作业19解答：

1. 对一个栈执行一系列栈操作，假设该栈中元素个数不会超过k。假设每执行k个操作，就执行一次将整个栈备份一次的操作。证明：执行n次栈操作（包括备份操作）的时间复杂度为$O(n)$。（提示：赋予每个栈操作适当的平摊代价）。

1. 解：用会计方法。共有4种操作，每种操作的平摊代价如下：

(1) Push： 代价：2；

(2) Pop： 代价：0；

(3) Multipop (r, S)：代价：0；

(4) Copy (S)：代价：k。

因为初始时，栈S为空栈，每压入一个元素入栈，在Pop或Multipop操作时，至多出栈一次。故n次操作，至多有n个Push，故至多需$2n$时间。令$t = \lfloor n/k \rfloor$，每执行k次操作，执行一次Copy(S)，而S中至多有k个元素。故最多执行t次Copy操作，将$k \cdot t = k\lfloor n/k \rfloor \leq n$个元素从栈$S$中拷贝出栈。故执行$n$次操作至多执行了$n$次元素入栈和出栈，从而需要$O(n)$时间。

2. 设栈中初始有s_0 $(s_0 \geq 0)$个元素，最后有s_n个元素。执行一系列n个Push，Pop和Multipop操作的总代价是多少？

2. 解：用势函数方法

设初始数据结构D_0为栈S，包含s_0个元素，对每个

$i\ (i=1,2,\cdots,n)$，第 i 次操作作用于栈 D_{i-1}，得到栈 D_i，其实际代价为 c_i。定义势函数 $\Phi(D_i)$ 如下：

$\Phi(D_0)=0$，$\Phi(D_i)=$ 第 i 次操作后，栈 S 中的元素个数，$(i=1,2,\cdots,n)$。

令平摊代价 $\hat{c}_i=c_i+\Phi(D_i)-\Phi(D_{i-1})$。

Push 的平摊代价为：

$\hat{c}_1=c_1+\Phi(D_1)-\Phi(D_0)=1+(S_0+1)-0=S_0+2$，$i=1$

$\hat{c}_i=c_i+\Phi(D_i)-\Phi(D_{i-1})=1+1=2$，$i>1$

Pop 的平摊代价为：

$\hat{c}_1=c_1+\Phi(D_1)-\Phi(D_0)=1+(S_0-1)-0=S_0$，$i=1$

$\hat{c}_i=c_i+\Phi(D_i)-\Phi(D_{i-1})=1+(S-1)-S=0$，$i>1$.

Multipop 的平摊代价为：

$\hat{c}_1=c_1+\Phi(D_1)-\Phi(D_0)=k'+(S_0-k')-0=S_0$，$i=1$

$\hat{c}_i=c_i+\Phi(D_i)-\Phi(D_{i-1})=k'+(S-k')-S=0$，$i>0$

其中 S 为第 $i-1$ 步时，栈 S 中的元素个数。$k'=$ 第 i 步栈 S 中实际弹出的元素个数。

执行一系列 n 个 Push，Pop 和 Multipop 操作的总代价为：

$$\sum_{i=1}^{n} c_i=\sum_{i=1}^{n}\hat{c}_i-\Phi(D_i)+\Phi(D_0)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\hat{c}_i-S_n$$

$$\leq 2n+S_0-S_n$$