

作业10解答:

1. 设 $T(n) \leq Cn$, ; $n \leq 49$

$$T(n) \leq T(n/5) + T(3n/4) + Cn, n \geq 50$$

证明: $T(n) \leq 20Cn$ 。从而完成找第 k 个最小元的算法复杂性分析。

证明: 用归纳法证明: $T(n) \leq 20Cn$ 。

当 $k \leq 49$ 时, $T(k) \leq Ck \leq 20Ck$ 。

下面设, 当 $k < n$ 时, 有 $T(k) \leq 20Ck$ 。

现在设 $k = n \geq 50$, 由递推关系式,

$$T(n) \leq T(n/5) + T(3n/4) + Cn$$

$$\leq 20C \frac{n}{5} + 20C \frac{3n}{4} + Cn$$

$$= 4Cn + 15Cn + Cn$$

$$= 20Cn。$$

故 $T(n) = O(n)$ 。

2. 设 $G = (V, E)$ 是一个无向连通图。给出一个 $O(|V| + |E|)$ 时间的算法, 求 G 中的一条路 P , P 经过 E 中每一条边 (在每一个方向上) 恰好一次。如果你有足够的零钱, 试找出一个走出迷宫的方法。

解: 算法如下:

输入: 图 $G = (V, E)$ 和邻接表 $[IV]$, $v \in V(G)$ 。

输出: 路径 P 的边序列, P 经过 E 中每一条边 (在每一个方向上) 恰好一次。

PROCEDURE Search(v);

BEGIN

mark v "old";

Last-Stack-Top := top[S]; /* top[S] 初始为空 */

Push(v , S); /* v 入栈 S */

Instack[v] := true; /* 标志 v 在栈中 */

FOR each vertex w on $L[v]$ DO

IF w is marked "new" THEN

BEGIN

WRITE(" (v, w) ");

Search(w);

WRITE(" (w, v) ");

END

ELSE IF ($w \neq$ Last-Stack-Top) AND Instack[w] THEN

BEGIN /* 此时, (v, w) 是回边 */

WRITE(" (v, w) ");

WRITE(" (w, v) ");

END;

Pop(S); /* v 弹出栈 */

Instack[v] := false;

END;

主程序:

BEGIN

FOR all v in V DO

BEGIN mark v "new"; Instack[v] := false; END;

Choose a vertex v ; Set stack S empty;

Search(v);

END;

对一个迷宫,每个交叉路口设为图 G 的一个顶点,交叉路口和交叉路口之间的路径设为一条边。从任一顶点出发,按上述算法走。因为该算法走图中每一条边(在每一个方向上)恰好一次,必然能走到迷宫的出口,因而走出迷宫。