作业2解答：

1. 写出以下算法的计算时间的递归方程，并估计算法在最坏情况下的时间复杂性。设n是2的幂（且 $1 \le n \le N$）

```
FUNCTION path (s, t, n, N: integer): boolean;
BEGIN
   IF n=1 THEN
     IF edge(s,t) THEN
        RETURN(true)
     ELSE RETURN(false);
   /* if we reach here, n>1 */
   FOR i:=1 TO N DO
     IF path(s, i, n DIV2, N) AND
        path(i, t, n DIV2, N) THEN
        RETURN(true);
   RETURN(false);
END;
```

判断从s到t是否有长度为n的路径

其中，在N个顶点的图中，函数edge(i, j)当顶点i与顶点j有边相连或 $i=j$ 时，返回"真"，否则返回"假"。程序path(s, t, n, N)的作用是什么？

1. 解：程序path(s, t, n, N)的作用是判定在N个顶点的图中，从顶点s到t是否有长度为n的路径。

设该算法计算时间为T(n)，T(n)的递推关系式为

$$T(n)=\begin{cases} C_1 & , n=1 \\ 2N\,T(n/2)+C_2 & , n>1 \end{cases}$$

把N看作一个常数。这时，$a=2N$，$b=2$，由通解定理，

$d(n)=c_2=O(n^{\log_b a-\varepsilon})=O(n^{\log_2(2N)-\varepsilon})$，其中 $\varepsilon=0.1$。

故 $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})=\Theta(n^{\log_2(2N)})$。

2、用猜解的方法和扩展递推式的方法解以下递归方程：

$$T(1)=2$$
$$T(n)=2T(n-1)+1\ ,\ n\geq 2$$

2.解：

(1) 用猜解方法求 $T(n)$。

我们猜 $T(n)\leq a2^n+b$。

当 $n=1$ 时，$T(1)=2\leq a\cdot 2^1+b$，故 $2a+b\geq 2$。

假设对 $k<n$，有

$T(k)\leq a2^k+b$

对 $n\geq 2$，我们有

$$\begin{aligned}T(n)&=2T(n-1)+1\\&\leq 2(a2^{n-1}+b)+1\\&=a2^n+2b+1\\&\leq a2^n+b\end{aligned}$$

故 $2a+b\geq 2$ 且 $2b+1\leq b$

可得 $b\leq -1$，$2a-1\geq 2a+b\geq 2$，故 $a\geq\frac{3}{2}$

取 $a=\frac{3}{2}$，$b=-1$，用上述归纳法可证：

$T(n)\leq a2^n+b$。从而 $T(n)=O(2^n)$。

(2) 用扩展递推式的方法求解 $T(n)$。

$T(n)=2T(n-1)+1$

而 $T(n-1)=2T(n-2)+1$，代入上式

$$\begin{aligned}T(n)&=2(2T(n-2)+1)+1\\&=4T(n-2)+2+1\end{aligned}$$

中山大学本科生考试答题纸

学院(系) ………… 专业 ………… 级

考试科目 ………… 成绩评定 …………

考生姓名 ………… 教师签名 …………

学　　号 ………… 年　月　日

再由 $T(n-2)=2T(n-3)+1$，代入上式

$$T(n)=4(2T(n-3)+1)+2+1$$
$$=8T(n-3)+4+2+1$$
$$=\cdots$$
$$=2^{i}T(n-i)+\sum_{j=0}^{i-1}2^{j}$$

从而有

$$T(n)=2^{n-1}T(1)+\sum_{j=0}^{n-2}2^{j}$$
$$=2^{n}+\frac{2^{n-1}-1}{2-1}$$
$$=2^{n}+2^{n-1}-1$$
$$=\frac{3}{2}2^{n}-1$$