作业15解答：

1. 给定背包问题：给定 $c>0$，$w_i>0$，$v_i>0$，$1\le i\le n$，要求找出一个 n 元向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$0\le x_i\le 1$，$1\le i\le n$，使得 $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le c$，而且 $\sum_{i=1}^{n} v_i x_i$ 达到最大。用贪心算法设计一个 $O(n\log n)$ 时间的算法，求解背包问题。

1. 解：算法：

(1) 令 $p_i = v_i/w_i$，$i=1,2,\cdots,n$。

(2) 用堆排序算法将 $p_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 按从大到小排序，得 $p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_n}$。

(3) $W \leftarrow 0$;

(4) $V \leftarrow 0$;

(5) FOR $j \leftarrow 1$ TO n DO $x_j \leftarrow 0$;

(6) $j \leftarrow 1$;

(7) WHILE $W + w_{i_j} \le c$ DO

BEGIN

(8) $W \leftarrow W + w_{i_j}$;

(9) $V \leftarrow V + v_{i_j}$;

(10) $x_{i_j} \leftarrow 1$;

(11) $j \leftarrow j+1$;

END;

(12) $x_{i_j} \leftarrow c - W$;

(13) $V \leftarrow V + p_{i_j} \times x_{i_j}$;

(14) 返回 $(V; (x_1, x_2, \cdots, x_n))$;

2. 设赋权图 G 的边按权从小到大排列是 $e_1, e_2, \cdots, e_\varepsilon$，且任意两条边的权不相等。证明：如果在局部查找算法中，按这个顺序把边加入初始解（一棵生成树），最后必然得到最优树。

证明：设用 Kruskal 算法得到的最优树 T_{min} 的边为 $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$；我们证明：用局部查找算法必然可以得到一棵树 T，使得 $E(T) = E(T_{min}) = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}\}$。其中 $w(e_{i_{j-1}}) < w(e_{i_j})$ $(j = 2, 3, \cdots, k)$。

当 $j=1$ 时，e_{i_1} 是 G 中权最小的边 e_1，假若初始解 T_0 中不含 e_{i_1}，则 $H_1 = T_0 + e_{i_1}$ 中有圈 C_0 包含 e_{i_1}，而该圈 C_0 中必含另一边 e_{i_1}'，使得 $w(e_{i_1}') > w(e_{i_1})$ 且 e_{i_1}' 是 C_0 中权最大的边，由局部查找算法，可得 $T_1 = T_0 + e_{i_1} - e_{i_1}'$，$w(T_1) < w(T_0)$。故 $e_{i_1} \in E(T)$。

下面作归纳假设。设 $E(T) \supseteq \{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_r}\}$，下面证：$e_{i_{r+1}} \in E(T)$。假设局部查找算法第 r 步的解 T_r 包含 $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_r}$，但不包含 $e_{i_{r+1}}$。由 Kruskal 算法，$e_{i_{r+1}}$ 是加入到 $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_r}\}$ 中无圈的权最小的边，由于局部查找算法是按 $e_1, e_2, \cdots, e_\varepsilon$ 顺序考虑每一条边，对于任意 m，满足 $i_r < m < i_{r+1}$，e_m 与 $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_r}\}$ 构成圈 C_r，而 C_r 就是 $T_r + e_m$ 中的唯一圈，该圈中权最大的边是 e_m。由局部查找算法，我们在 $T_r + e_m$ 的圈 C_r 中删除 e_m，得到的还是 T_r。

当 $j = r+1$ 时，由于 $e_{i_{r+1}}$ 与 $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_r}\}$ 不构成圈，故 $H_{r+1} = T_r + e_{i_{r+1}}$ 中唯一的圈 C_r' 中一定包含一条边 $e_{i_{r+1}}'$，$w(e_{i_{r+1}}') > w(e_{i_{r+1}})$，且 $e_{i_{r+1}}'$ 是 C_r' 中权最大的边。从而 $e_{i_{r+1}}' \notin \{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_r}\}$。由局部查找算法，$T_{r+1} = T_r + e_{i_{r+1}} - e_{i_{r+1}}'$，有 $w(T_{r+1}) < w(T_r)$，故 $e_{i_{r+1}} \in E(T)$。

由归纳法知，$E(T_{min})=\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}\}\subseteq E(T)$。又因为 T_{min} 和 T 都是 G 的生成树，$|E(T_{min})|=|E(T)|$，从而 $E(T)=E(T_{min})$。

因此，用局部查找算法求得的生成树是 G 的最小权生成树 T_{min}。