作业2解答：

1. 定理9.7中，$[V_n^{-1}V_n]_{ij}=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{k(j-i)}/n$。由引理9.6，当 $j-i>0$ 时，$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{k(j-i)}=0$。当 $j-i<0$ 时，这个结论是否也成立？请给出证明。

1. 解：当 $j-i<0$ 时，也有 $\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{k(j-i)}=0$

注意有
$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{k(j-i)}=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{1}{\omega_n}\right)^{i-j}\right]^k$$
$$=\frac{\left[\left(\frac{1}{\omega_n}\right)^{i-j}\right]^n-1}{\left(\frac{1}{\omega_n}\right)^{i-j}-1}$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{\omega_n^n}\right)^{i-j}-1}{\left(\frac{1}{\omega_n}\right)^{i-j}-1}$$
$$=\frac{1-1}{\frac{1}{\omega_n^{i-j}}-1}$$
$$=0$$

其中：$i-j>0$ 且 $i-j$ 不能被 n 整除，故 $\omega_n^{i-j}\neq 1$。从而 $\frac{1}{\omega_n^{i-j}}-1\neq 0$。

因此 $[V_n^{-1}V_n]_{ij}=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{k(j-i)}/n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{k(j-i)}$

$=0$，当 $i\neq j$ 时。

2. 用递归的FFT算法计算 $y=DFT_4((0,1,2,3))$。

2. 解：$a=(0,1,2,3)$，$\omega_n=e^{2\pi i/n}$，$n=4$

$a^{[0]}=(a_0,a_2)=(0,2)$，$a^{[1]}=(a_1,a_3)=(1,3)$。

$y^{[0]}=DFT_2((0,2))$，$\omega_n=e^{2\pi i/n}$，$n=2$，$a_x=(0,2)$

$a_x^{[0]}=(a_0)=(0)$，$a_x^{[1]}=(a_2)=(2)$

$y_x^{[0]} = DFT_1((0)) = (0)$, $y_x^{[1]} = DFT_1((2)) = (2)$.

$y_0^{[0]} = 0 + \omega \cdot 2 = 0 + 1 \times 2 = 2$

$y_1^{[0]} = 0 - \omega \cdot 2 = 0 - 1 \times 2 = -2$

于是 $y^{[0]} = (2, -2)$.

$y^{[1]} = DFT_2((1,3))$, $\omega_n = e^{2\pi i/n}$, $n = 2$, $a_y = (1, 3)$

$a_y^{[0]} = (a_1) = (1)$, $a_y^{[1]} = (a_3) = (3)$.

$y_0^{[1]} = 1 + \omega \cdot 3 = 1 + 1 \times 3 = 4$

$y_1^{[1]} = 1 - \omega \cdot 3 = 1 - 1 \times 3 = -2$

于是 $y^{[1]} = (4, -2)$

$y_0 = y_0^{[0]} + \omega y_0^{[1]} = 2 + 1 \times 4 = 6$

$y_2 = y_0^{[0]} - \omega y_0^{[1]} = 2 - 1 \times 4 = -2$

$\omega = \omega \times \omega_n = \omega_n = e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$

$y_1 = y_1^{[0]} + \omega y_1^{[1]} = -2 + i \times (-2) = -2 - 2i$

$y_3 = y_1^{[0]} - \omega y_1^{[1]} = -2 - i \times (-2) = -2 + 2i$

最后

$y = DFT_4((0,1,2,3)) = (6, -2-2i, -2, -2+2i)$