第七章 算法设计技术

\*经过多年的实践和总结，我们找到几种为解决问题设计有效算法的通用的技术：分治策略，动态规划，贪心算法，回溯技术，分支定界法和局部查找。

通常我们设计算法时，首先考虑这几种技术能否设计出解决问题的有效算法。

§7.1 分治策略

一．分治策略的思想：

1. 思想：把大问题化成若干个较小的子问题，把子问题再化成更小的子问题，依此下去，直到每个子问题可以方便地求出解。而我们从较小的子问题的解可以方便地求出大问题的解。

2. 例子：

例1：河内塔问题：设有三个柱子A, B和C。C柱子上有n个盘子，从下往上依次从大到小。现在要把C柱子上的盘子全部搬到A柱子上，每次只允许把一个盘子从一个柱子搬到另一个柱子上，任何时候不允许把大盘子放到小盘子上。以上问题称为河内塔问题。

求解思想：先按某种方法将C柱子上个盘子搬到B柱子上，再将C柱子上第个盘子搬到A柱子上，再用上述方法将B柱子上的个盘子搬到A柱子上。

算法：

PROCEDURE Hanoi\_Tower (A, B, C, n);

/\* 把C柱子上的n个盘子移到A柱子上 \*/

BEGIN

IF n 1 THEN

BEGIN

Hanoi\_Tower (B, A, C, n1);

Move (A, B, C, n);

Hanoi\_Tower (A, C, B, n1);

END

END;

其中，Move(A, B, C, n)表示把盘子n从C移到A, 中间杆为B。

算法分析：设为上述算法的计算时间:

解得：为。

例2：求集合S的最大元和最小元。

算法：

PROCEDURE MAXMIN (S);

BEGIN

IF |S| = 2 THEN

BEGIN

设S；

RETURN(MAX(), MIN())

END

ELSE BEGIN

把S划分成两个子集和，和各含S的一半元素；

(max1, min1) := MAXMIN();

(max2, min2) := MAXMIN();

RETURN( MAX(max1, max2), MIN(min1, min2) );

END;

END;

算法分析：设为上述算法的元素比较次数

解得, 为2的幂。

即 为。

二．求两个长整数的乘积

1. 小学算术的解法：

时间复杂度为，为每个长整数的位数。

2. 分治策略解法

X: A B

Y: C D

这时，设为计算两个位数为n的整数的乘法所需的时间。则

解出是。

3. 改进方法：

上式可以改成

从而

解得 。

4. 算法：

FUNCTION mult (X, Y, n : integer) : integer;

/\* X和Y是小于的有符号数，n是2的幂 \*/

VAR

s : integer; /\* s中存放XY的符号 \*/

: integer;

A, B, C, D : integer;

BEGIN

s := sign(X) \* sign(Y);

X := abs(X);

Y := abs(Y);

IF n=1 THEN

IF (X=1) AND (Y=1) THEN

RETURN (s)

ELSE RETURN(0)

ELSE BEGIN

A := left n/2 bits of X;

B := right n/2 bits of X;

C := left n/2 bits of Y;

D := right n/2 bits of Y;

:= mult(A, C, n/2);

:= mult(AB, DC, n/2);

:= mult(B, D, n/2);

RETURN(s\*())；

END

END;

\*虽然是，但常数系数很大。当时，普通算术方法更快。

三．平衡子问题

1. 原则：用分治策略划分子问题时，尽可能将子问题化成等体积的。

2. 例子：

插入排序第i遍，可看作将一个长为i的文件与一个长为1的文件归并，因此，

解得 。

而归并排序则是将两个长为的文件归并，

解得，优于插入排序。

四．循环赛日程表

分治法不仅可以用来设计算法，而且在其它方面也有广泛的应用。例如：可以用分治思想来设计电路，构造数学证明等。下面举一个例子说明。

设有个运动员，要进行网球循环赛。现在要设计一个满足以下要求的比赛日程表：

1. 每个选手必须与其他个选手各赛一次；
2. 每个选手一天只能赛一次；
3. 循环赛一共进行天。

按分治策略，可以将所有选手分成两半，n个选手的比赛日程表可以通过n/2个选手设计的比赛日程表来决定。递归地用这种一分为二的策略对选手进行分割，直到只剩下2个选手时，只要让这两个选手进行比赛就可以了。

例如：安排8个选手的比赛日程表。

图7.1

其中，左上角与左下角的2个小块分别为选手1至4以及选手5至8前3天的比赛日程。据此，将左上角的小块中所有数字按其相对位置抄到右下角，将左下角小块中所有数字按其相对位置抄到右上角，这样就分别安排好选手1至4及选手5至8在后4天的比赛日程。

五．已学过的分治策略算法的例子：

1. 归并排序：

解得。

2. 快速排序：

最好情况：

解得: 。

3. 找第k个最小元

解得：。

4. 二分查找：

解得：。

作业13：

1. 设n个不同的整数从小到大排序后存于中。若存在下标，，使得 ，设计一个有效算法找到这个下标。要求算法在最坏情况下的计算时间为 。

二分搜索

1. 设是个元素的数组。对任一元素，设

。当时，称为T的主元素。试设计一个有效算法，确定T是否有一个主元素。其中算法的计算复杂性为。

S(x)是数组中值为x的下标集合

数组中存在一半以上的数相同，则该数是主元素

如果一个数列有主元素,那么必然是其中位数。求一个数列有没有主元素，只要看中位数是不是主元素。

先找出中位数（寻找第n/2小元），再计数