§1.5 解递归方程

一．解递归方程的三种途径

1.猜一个解，用递推关系式证明。

\*有时只猜的形式，将某些参数留待以后确定(例如：

未知)，当我们试图证对所有成立时，推出参数的值。

2.用递推关系式代入该式右边的T(m) (m < n)，直到所有项仅含T(1)。由于T(1)总是常数，我们可以把T(n)表是成n和常数的表达式。我们把这个表达式称为T(n)的闭式。

3.对某些常见类型的递推关系式求通解。

二．猜一个解

我们猜(1.1)式的解是。(以下如无特别说明，我们总是用表示)。将代入，不成立。可再试。

当时，由于(1.1)式给出的是的上确界，故有。

作归纳假设， (1.2)

对所有成立。我们试图证明

由于对，我们有

故

(1.3)

这里 。

令，由归纳法可证，对所有, 有

(1.4)

故 是。

三．扩展递推式

以(1.1)为例，由于, 故

(1.5)

从而

(1.6)

又由 代入(1.6)式，得

由归纳法，可得

(1.8)

假设 , 则由上式可写为

(1.9)

由于，并且，(1.9)式为

故 是。

§1.6 一大类递归方程的通解

一．一类常见的递归方程

\*递推关系式也叫递归方程

(1.10)

其中称为驱动函数。

在Mergesort过程的例子中，, 以为单位。

二．扩展递推式

由于

设, 则，那么

(1.11)

由于,

由于

故 。

三．齐次解与特解

(1.11)式中的称为(1.10)式的齐次解，称为(1.10)式的特解。

当驱动函数对所有成立时，齐次解就是递归方程(1.10)式的解。

齐次解是解所有子问题的代价。而特解则是建立子问题和把子问题的解合并在一起的代价。

要改进一个算法的时间复杂性，就要改进齐次解和特解中大的那一项所代表的算法中的那一部分。

四．乘法函数

1. 乘法函数的定义：

若函数满足：，则称为乘法函数，其中和是正整数。

例8：是乘法函数，因为。

2.当是乘法函数时，解(1.11)式。

当是乘法函数时，。

设，有

(1.12)

当时，有

(1.13)

讨论：

1. 当，(1.12)式为。其中。在此情形下，特解与齐次解相同。

2. 当，(1.12)式为，即。在此情形下，特解大于齐次解。在的特例下，。这时特解为或。

3. 当，(1.13)为。这时特解超过齐次解。在的特例下，(1.13)式为。

五．例子

例8：求以下递归方程的解

在所有情况下，。

解1：。

特解与齐次解相同，。

解3：。

特解大于齐次解，。

解2：。

特解大于齐次解，。

六．通解定理

定理1.2(通解定理): 设和为常数，是函数，并设由以下递归方程定义在非负整数上：

，

其中表示或。那么

1. 如果对某个常数成立，则；
2. 如果，则；
3. 如果对某个常数成立，并且对某个常数和所有充分大的成立，则。

证明：思路与前面的证明类似，略。

七．解递归方程的一些技巧与例子。

例9：

解：不是乘法函数，因为有系数2。是乘法函数。令

，则

由于，齐次解为，故为.

对于特解, 令, 不会影响特解。

因为，

故特解也是。

从而。因为，故。

利用通解定理，，

从而 。

例10：

解：这里，。

齐次解为，特解为：

因为 ，故为。

例11：

解：，

由通解定理，，其中，

故 。

例12：

解：变换递归方程的变量，令，递归方程为

再令 ，递归方程为

，这时，特解大于齐次解，

从而。

作业2：

1. 写出以下算法的计算时间的递归方程，并估计该算法在最坏情况

下的时间复杂性，设n是2的幂且。

FUNCTION path (s, t, n, N : integer) : Boolean;

BEGIN

IF n = 1 THEN

IF edge(s, t) THEN

RETURN(true)

ELSE RETURN(false);

/\* if we reach here, n >1\*/

FOR i := 1 TO N DO

IF path(s, i, n DIV 2, N) AND path(i, t, n DIV 2, N) THEN

RETURN(true);

RETURN(false);

END;

其中，在N个顶点的图中，函数edge(i, j)当顶点i与顶点j有边相连或i=j时返回“真”，否则返回“假”。程序path(s, t, n, N)的作用是什么？

1. 用猜解的方法和扩展递推式的方法解以下递归方程。