第九章 快速富氏变换及应用

§9.1 多项式及其运算

一．多项式的定义

变量在代数域F上的多项式是一个函数, 表示如下：

, 其中

我们称为该多项式的次上界，称为该多项式的系数。一个多项式称为是次的，是说其最高的非0系数为, 其中。

二．多项式的运算

1. 加法：

设和是次上界为的两个多项式，与的和是一个次上界为的多项式。

设 ,

则 , 其中

两个次上界为的多项式相加，所需时间为。

2. 乘法

设和是两个次上界为的多项式，则与的积是一个次上界为的多项式。设和的表达式如上，则

其中

我们把的次上界说成是，因为次上界为的多项式的次上界也是。

例子：

乘法如下：

两个次上界为的多项式的相乘需时间，因为的每个系数要与的每个系数相乘。

§9.2 多项式的表示

一．多项式的系数表示

1. 系数表示

一个次上界为的多项式的系数表示是系数的向量。

2. 多项式的计算

用系数表示进行多项式的计算

1. 多项式的计值

需时间。

1. 多项式相加

给出系数向量，

，，其中：。

需时间。

1. 多项式相乘

给定系数向量，由(9.2)给出求与的积的公式。记作，也称为与的卷积。求需时间。

二．多项式的点值表示

1. 点值表示

次上界为的多项式的点值表示是个点值对的集合

，其中所有互不相同，并且

。

\*给出多项式的系数表示，计算个不同点的点值对需时间。以下我们将看到，如果适当选取，则只需时间。

2. 从点值表示求系数表示

从多项式的点值表示求系数表示的过程称为插值。

定理9.1：给定一个个点值对的集合

, 存在唯一的次上界为的多项式，使得，

。

证明：(9.3)可以表示成矩阵

左边的矩阵是范德蒙矩阵，记作。

范德蒙矩阵的行列式为 。

由于互不相同()，因此范德蒙行列式不为0，从而有逆矩阵。从而我们可以通过以下公式唯一地确定系数向量。

。

\*用矩阵方法求解需时间。

用拉格朗日插值公式：

求只需时间。

3. 用点值表示法计算多项式

给出多项式和的点值表示：

和

1. 加法

的点值表示为：

计算需要时间。

1. 乘法

，则

即只要将的值与的值相乘即可。

注意到的次上界为，故需个点值对来计算的点值表示。

取和的个点值对的点值表示：

和

得的点值表示：

计算只需时间，比系数表示的多项式乘法快。

三．系数表示的多项式乘法的快速算法

由于点值表示的多项式乘法只需时间，我们先把系数表示的多项式化为点值表示。再进行乘法运算，然后再把乘积的点值表示化为系数表示，从而得到系数表示多项式乘法的快速算法。

DFT(离散富里叶变换)：把多项式的系数表示转换为点值表示的变换过程。其逆过程称为逆DFT变换。

下一节我们将看到，当取值为次复单位根时，利用快速富里叶变换FFT进行DFT变换只需时间。

次复单位根记作。

假设已知FFT算法，以下过程计算两个次上界为的多项式和的乘积，该过程只需时间。其输入和输出为多项式的系数表示。假设为2的幂。假如不为2的幂，可设多项式的高次系数为0，将变为2的幂。

方法：

1.将次上界加倍。通过设和的高次系数为0，将它们的次上界从改为。

2.计值。利用阶的FFT算法，计算和在个阶复单位根处的值。从而得到和的有个点值对的点值表示。

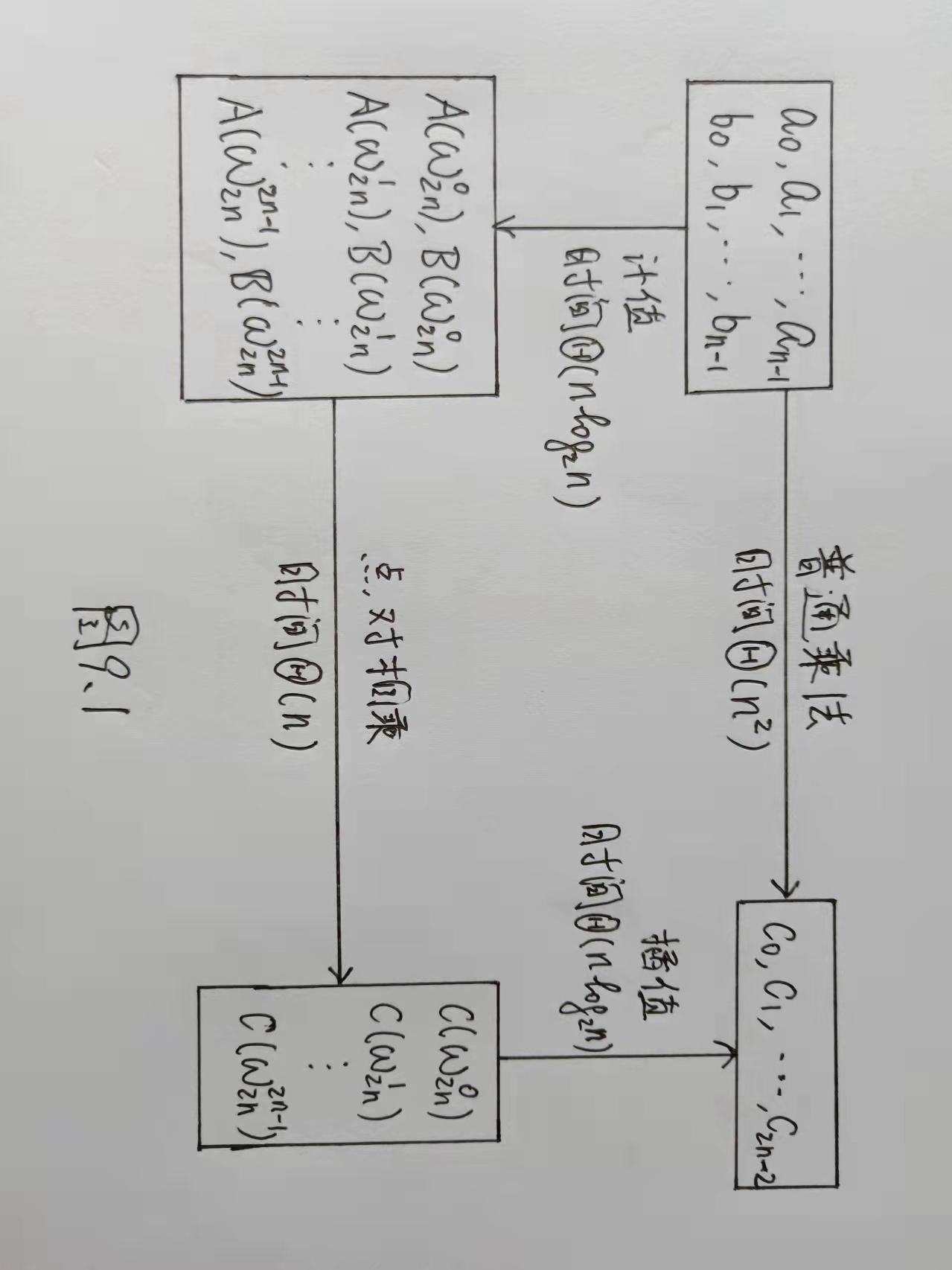
3.点值对相乘。通过计算和在每一个阶复单位根处的值的乘积，算出的点值表示。

4.插值。利用FFT算法计算DFT的逆变换，求出的系数表示。

步骤(1)和(3)需时间，步骤(2)和(4)需时间。

定理9.2：输入和输出都是系数表示的计算两个次上界为的多项式的乘积的算法需时间。

快速系数形式多项式相乘算法的图示见图9.1。

 图9.1

作业20：

1.计算多项式(次上界为)在给定点处的值，可以按以下方法：用除，得

。

(1)等于多少？

(2)是一个次上界为的商多项式。请给出一个时间的方法，从和的系数，求的系数。