§9.3 DFT和FFT

一．复单位根

1.定义：

一个阶复单位根是一个复数，使得

。

恰有个不同的阶复单位根。它们是, 。其中

。复数可以表示成

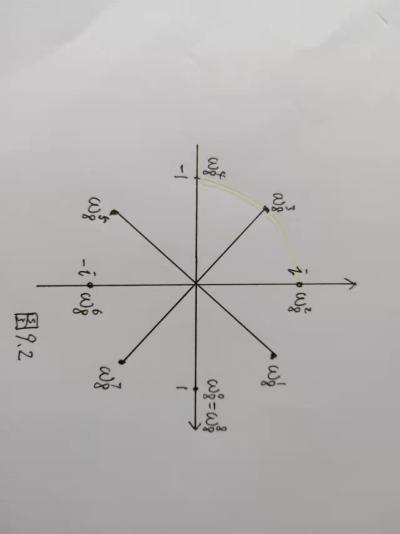
。

图9.2给出了8个不同的8阶复单位根的图示。

令

称为阶主单位根。则有个不同的阶复单位根为

。

 图9.2

2.复单位根的性质

引理9.3: 对任意整数和，有

证明：

。

推论9.4：对任意偶整数，有

。

引理9.5(Halving引理)：如果是偶数，则个不同的阶复单位根的平方恰好构成个不同的阶复单位根。

证明：由引理9.3已知，对，有。

又因为

故与有相同的平方数。从而本引理得证。

引理9.6：对任意整数和不可被整除的非负整数，有

。

证明：

。

由于不可被整除，故。

二．DFT变换

我们要计算以下多项式在的值。

设给出的系数表示，定义

(9.8)

则向量称为是系数向量的离散富里叶变换(DFT)。并记为。

三．FFT算法

1.思想：FFT即快速富里叶变换利用复单位根的性质，用分治策略进行DFT变换。它把多项式分成奇下标系数组成的子多项式和偶下标系数组成的子多项式。

取两个次上界为的多项式,

则 （9.9）

计算在处的值的问题可以通过以下途径计算。

(1)计算和在处的值。

(2)用(9.9)式将上述结果结合起来，从而算出。

注意，由引理9.5，恰好为个阶复单位根，每个根出现两次。故计算和只需计算其在个阶复单位根处的值。这样个元素的的计算化为两个个元素的的计算。

2. 递归算法

PROCEDURE Recursive\_FFT (a);

BEGIN

1. n := length[a]; /\* n是2的幂 \*/
2. IF n = 1 THEN

3. RETURN(a);

4. := ;

5. := 1;

6. := ;

7. := ;

8. := Recursive\_FFT();

9. := Recursive\_FFT();

10. FOR k := 0 TO DO

BEGIN

11. := ;

12. := ;

13. := ;

END;

14 RETURN();

END;

3.算法的正确性

算法2-3行代表递归的基础。

, 其中次上界为1。

6-7行定义了和的系数向量。

第4, 5, 13行保证了在执行11-12行时，。

第8-9行递归地进行计算，使得

由引理8.3，，即

。

11-12行结合的计算结果。

,

。

故Recursive\_FFT确实是。

4.算法分析

Recursive\_FFT过程的每次执行，除递归调用外，所花的时间为。设为该过程的执行时间。则

。

四．在复单位根处的插值

下面考虑从点值表示到系数表示的变换，即在复单位根处的插值。设方程(9.4)为，其中为阶范德蒙矩阵。具体形式如下：

的第项为，。

下面给出的形式。

定理9.7：对，的项为。

证明：只需要验证，即单位矩阵即可。

当时，以上和式为1，否则为0。注意 因此，不能被整除。由引理9.6，可得本结果。

有了后可由下式给出

(9.11)

。

比较(9.8)式与(9.11)式，只要在FFT算法中交换和，用代替, 并用所得结果的每一个元素除以，我们就可以计算出。所需时间也是。

定理9.9(卷积定理)：对任意两个长为n的向量和，其中，为2的幂，有，

其中，作运算前，和高位分量补0，形成长为的向量。

作业21：

1.定理9.7中，。由引理9.6，当时，。当时，这个结论是否也成立？请给出证明。

2.用递归的FFT算法计算。