三．图的着色问题

图的着色问题：能否用k种颜色给图的顶点着色，每个顶点着一种颜色，使得任意两个相邻顶点着不同颜色？

定理11.8：图着色问题属于NPC。

证明：一个含有个变量，个子句，每句不超过3个文字的合取范式可满足与否，可化为图G可否用种颜色进行着色的问题。

设表达式有个子句：

个变量：

及其补：

下面假设，可按下面叙述的不超过多项式时间的步骤，构造一个图，使得可用种颜色着色的充要条件是上述合取范式可满足。

设图的顶点为：

。其中，

是新引进的顶点。

图的边：

若，

若，

设，给定种颜色，首先因形成了完全图，

中任意两个顶点不能有相同颜色。

着第种颜色，。余下第种颜色。由于除非，否则和不可能同色，和也一样。故补充着色如下：

令。

即取为和中之一。令着第种颜色，。着第种颜色，。

每个不能着以与它所不含有的文字相同的颜色。具体地说，若

，则和不能着相同颜色。

其次，由于假定，而每一个至多含3个文字，所以至少存在一对顶点和与相邻。所以，每个都不能着第种颜色。

由上可知，所能着与其所含的文字(比如或)相同的颜色，而且排除是第种颜色的可能性。令着第种颜色的文字赋值F，其它赋值T，这就证明了图能否用种颜色着色的充要条件是可满足性是否成立。

时，共有8种可能情况，可直接检验该合取范式是否可满足。证毕。

四．独立集、顶点覆盖

设是一个图，。若集合S中任意两个顶点都不相邻，则称S为图G的独立集。若，且G的任一边至少有一个端点属于C，则称C为图G的顶点覆盖。

独立集问题：已知图，问是否存在独立集，使得？

顶点覆盖问题：已知图，正整数，问是否存在顶点覆盖，使得

定理11.9：独立集问题属于NPC。

证：因独立集问题属于NP类，只要证团问题可以多项式归约于独立集问题即可。

已知图及k，作图G的补图，

当且仅当。充要条件是：对于图，S是独立集。证毕。

定理11.10：顶点覆盖问题属于NPC。

证：顶点覆盖问题显然属于NP类，只要证独立集问题可以多项式归约为顶点覆盖问题。

已知图及整数k，令。

如果有一独立集S，使得 显然是图G的顶点覆盖，的顶点数为。

反之，如果C是图G的顶点覆盖集，，则是独立集，且的顶点数为。证毕。

五．哈密顿道路问题

已知有向图及两个顶点，问是否存在以u为始点，以v为终点的有向哈密顿道路？这个问题称为有向哈密顿道路问题。

定理1.11：有向哈密顿道路问题属于NPC。

证：显然有向哈密顿道路问题属于NP类。只要证顶点覆盖问题可以多项式归约为有向哈密顿道路问题。

已知无向图是正整数，与点相关联的边(即以为一端点的边)的数目设为，这些边设为现构造一有向图如下：

顶点集V’有以下两个组成部分：

1. 新增加k+1个顶点：
2. 对于任一顶点，对应有个顶点：

有向边集E’的组成部分有：

1. 对于图G中相邻两个顶点u和v，设则有边：

1. 对于每个，对应有边：

故对应每个顶点，存在一个道路

对应于边的两端点u和v，道路之间存在边

即边对应一由4个顶点组成的子图：(见图11.5)

图11.5

若有哈密顿道路进入点，则必须从点退出该子图。如果从退出，则或者无法经过，或者无法经过。由进入由退出有两种可能，一是经过这4个顶点，另一个是走退出这个子图。

从图11.5可见，若图G中有则G’图中存在从的道路： 和

图G’存在有向哈密顿道路的充要条件是图G有k个顶点的顶点覆盖，设

是图G的顶点覆盖，可构造图G’的从到的哈密顿道路，步骤如下：

1. 构造一从到的哈密顿道路P (见图11.6)

图11.6

1. 对于边设点u属于顶点覆盖C，但z不属于C，则道路P中的一段为绕道通过两点一段所取代。其中

，即中的一段改道为，从而吸收了点。因C是顶点覆盖，故可以吸收G’的所有顶点，正如u点和z点通过边相邻，从而吸收一样。

反之，可以从图G’构造G的顶点覆盖集S。由于哈密顿道路过所有的顶点，故过所有的。由于E’中不存在从的边，故哈密顿道路可以分解为若干段，每一段从某个到另一个，中间不存在其它的。对于每一条从的道路对应一顶点，使得道路的端点为，这样的k个顶点便是图G的顶点覆盖集。 证毕。

推论11.12：有向图是否存在有向哈密顿回路的问题属于NPC。

证：只要证有向哈密顿道路问题可以多项式归约为有向哈密顿回路问题。只要对于有向图及两点和，增加一个点，并增加两条边和，得到。显然图是否存在哈密顿回路的充要条件是是否存在从到的有向哈密顿道路。

定理11.13：无向图是否存在哈密顿道路问题属于NPC。

证：只要证有向哈密顿道路问题可以多项式归约为无向图的哈密顿道路问题。设已知有向图及两点，构造无向图

如下：

即图中每一个顶点，对应上连接三个顶点的道路。当两点在图中邻接(从到有弧)时，和相连。故当存在一条从到的哈密顿道路时，图存在一条从到的哈密顿道路，包含了所有的边，以及上的边对应的边。

反之，图存在哈密顿道路，对应有向图的一条有向哈密顿道路。

推论11.14：无向图是否存在哈密顿圈问题属于NPC。

证：类似于有向哈密顿圈问题。

推论11.15：已知无向图，正整数，中是否有生成树使得树中每点的度数不超过的问题属于NPC。

证：令，该问题即为求哈密顿道路问题。

六．几个已知的NPC问题

图11.7

§11.6 NP难题

一．定义

定义：若所有NP类问题都可以多项式变换为问题，则称为NP难题。简称为NPH。

是NP难题，不要求属于NP类。

NP-完全问题一定是NP-难题，反之则不一定。

二．旅行售货员问题TSP

定理11.16：对称型的旅行商问题为NP难题。

\*所谓对称型的旅行商问题指的是旅费矩阵是对称的，即。

证：对称型旅行商问题不属于NP类, 因为在多项式时间内不能检验一个哈密顿圈是否所有哈密顿圈中最优的。

下面证明一个无向图是否存在哈密顿回路问题可在多项式时间内转换为对称型旅行商问题，定理便得到了证明。

已知无向图, ，构造旅行商问题如下：令

显然，图G的旅行商问题有解n的充要条件是图G有哈密顿回路。注意：若G不含哈密顿回路，这时旅行商问题的解至少为n+1。证毕。

一般说来，判定问题可能属于NP完全类，相应的最优化问题则是NP难题。