

归纳法证明中的“减法”

乔海燕

中山大学信息学院

2016 年 5 月 24 日

在使用归纳法证明时，有同学往往在关键的归纳步证明中犯逻辑错误：即在归纳步证明中，从归纳假设出发，使用“加法”来证明归纳步的情况。正确的方法是，在归纳步中使用“减法”，然后得以使用归纳假设。以下用一个例子说明可能出现的问题。

定理1. 设 T 是有 $n(\geq 1)$ 个结点的树，那么 T 一定有 $n-1$ 条边。

证明1 (正确证明). 证明使用归纳法，对结点数 n 归纳。

归纳基：当 $n=1$ 时， T 只有一个结点，边数为0，故定理对 $n=1$ 成立。

归纳假设：假设定理对于结点数为 n 的树成立，即具有 n 个结点的树一定有 $n-1$ 条边。

归纳步：这里需要证明的命题是，“如果 T 是具有 $n+1$ 个结点的树，那么 T 一定具有 n 条边”。

下面是归纳步的证明。

假定 T 是具有 $n+1$ 条边的树，那么 T 中至少有一个1度结点 v （可以证明至少有2个结点的树一定至少有一个1度结点）。令 T' 是将 v 及其关联边从 T 中删除后的子图，则 T' 连通，没有回路，故 T' 仍然是树，并且有 n 个结点。根据归纳假设， T' 有 $n-1$ 条边，故 T 有 n 条边。证明完成。

注意，在以上归纳步的证明中，关于 T 的假设只有它是“具有 $n+1$ 个结点的树”，并没有说“ T 是在 n 个结点的树上添加一个结点后得到的具有 $n+1$ 个结点的树”。在设法使用归纳假设时，证明中使用了“减法”，得到 T' ，然后利用归纳假设，以及 T 与 T' 的关系完成归纳步的证明。

例如，下面的归纳步证明是错误的。

证明2 (归纳步的错误证明). 设 T 是在 n 个结点的树 T' 上添加一个1度结点后得到的具有 $n+1$ 个结点的树，则由归纳假设， T' 有 $n-1$ 条边，故 T 有 n 条边。

问题在于，归纳假设是要证明：“对于任意具有 $n+1$ 个结点的树 T ， T 一定有 n 条边”。以上归纳步只是证明了，“对于那些可以在 n 个结点的树上添加一个1度结点的树 T ， T 一定有 n 条边”。所以，这种使用“加法”利用归纳假设来完成归纳步的证明是错误的。

证明3 (另一个证明). 证明使用归纳法，对结点数 n 归纳。

归纳基：当 $n=1$ 时， T 只有一个结点，边数为0，故定理对 $n=1$ 成立。

归纳假设：假设定理对于结点数为 $n < k$ 的树成立，即具有 $n < k$ 个结点的树一定有 $n-1$ 条边。

归纳步：这里需要证明的命题是，“如果 T 是具有 $n = k$ 个结点的树，那么 T 一定具有 $k - 1$ 条边”。在树中删去一条边 $e = (u, v)$ ，则由此得到两颗树 T_1 和 T_2 （为什么？），设两棵树结点数分别是 k_1 和 k_2 ，则 $k_1 < k$ ， $k_2 < k$ ，而且 $k_1 + k_2 = k$ 。由归纳假设， T_1 和 T_2 各有 $k_1 - 1$ 和 $k_2 - 1$ 条边，所以原树 T 有 $k_1 - 1 + k_2 - 1 + 1 = k - 1$ 条边。