

大学物理笔记

李宇轩

2020.07.01

目录

第一部分	力	3
1	质点的运动	4
1.1	运动的线量描述	4
1.1.1	位矢	4
1.1.2	速度	5
1.1.3	加速度	6
1.2	直线运动	7
1.2.1	匀变速直线运动	7
1.3	运动的角量描述	9
1.3.1	角位矢	9
1.3.2	角速度	10
1.3.3	角加速度	11
1.4	圆周运动	12
1.4.1	圆周运动的参量	12
1.4.2	匀速圆周运动	13
1.4.3	变速圆周运动	15
2	牛顿运动定律	18
2.1	质量	18
2.2	力	18
2.2.1	共点力的合成	19
2.2.2	牛顿第一定律	20
2.2.3	拉密定理	20
2.2.4	牛顿第二定律	21
2.2.5	牛顿第三定律	21
2.2.6	系统的牛顿第二定律	22
2.2.7	惯性系和非惯性系	23
2.2.8	重力	24
2.2.9	万有引力	24
2.2.10	弹力	25
2.2.11	摩擦力	26
2.3	受力分析的实例	27
2.3.1	斜面上的静止物体	27
2.3.2	斜面上的下滑物体	28
2.3.3	斜面上的上滑物体	29
2.3.4	伽利略等时圆原理	30

2.3.5	降落伞问题	31
2.4	万有引力的应用	33
2.4.1	开普勒第一定律	33
2.4.2	开普勒第二定律	33
2.4.3	开普勒第三定律	33
2.4.4	环绕物体的线速度	34
2.4.5	环绕物体的角速度	35
2.4.6	轨道周期的计算	36
2.4.7	天体质量的测量	37
2.4.8	天体密度的测量	38
3	能量守恒定律	39
3.1	功	39
3.2	功率	40
3.3	能	41
3.3.1	动能	41
3.3.2	重力势能	42
3.3.3	弹性势能	43
3.3.4	机械能	44
3.3.5	动能定理	44
3.3.6	保守力和耗散力	45
3.3.7	系统的动能定理	46
3.3.8	系统的功能原理	47
3.3.9	机械能守恒定律	47
4	动量守恒定律	48
4.1	冲量	48
4.2	动量	48
4.2.1	牛顿第二定律的动量形式	48
4.2.2	动量和冲量的单位	49
4.2.3	动量定理	49
4.2.4	系统的动量定理	50
4.2.5	系统的动量守恒定律	51
5	刚体的转动	52
5.1	刚体的平动和转动	52
5.2	力矩	53
5.2.1	转动定律	54
5.2.2	转动惯量	56
5.2.3	细棒的转动惯量	56
5.2.4	圆盘的转动惯量	59

目录	4
5.2.5 圆环的转动惯量	61
5.3 力矩的功	63
5.4 转动动能	65
5.4.1 转动的动能定理	66
6 角动量守恒定律	67
6.1 角冲量	67
6.2 角动量	67
6.2.1 角动量和角冲量的单位	68
6.2.2 角动量定理	68
6.2.3 角动量守恒定律	69
6.3 刚体定轴转动的角动量	70
6.3.1 转动定律的角动量形式	70
6.3.2 刚体定轴转动的角动量定理	71
6.3.3 刚体定轴转动的角动量守恒定律	72
第二部分 热	73
7 气体动理论	74
7.1 气体的状态参量	74
7.1.1 体积	74
7.1.2 压强	74
7.1.3 温度	74
7.1.4 平衡状态和平衡过程	75
7.1.5 气体的等温变化	76
7.1.6 气体的等体变化	76
7.1.7 气体的等压变化	76
7.1.8 克拉伯龙方程	77
7.2 分子动理论	79
7.3 理想气体的概念	80
7.3.1 理想气体的微观模型	80
7.3.2 理想气体的统计假设	80
7.4 理想气体的压强	81
7.5 理想气体的温度	84
7.6 自由度	86
7.6.1 能量按自由度均分定理	87
7.6.2 理想气体的分子平均动能	88
7.6.3 理想气体的分子动能	88
7.7 麦克斯韦-玻尔兹曼分布	89
7.7.1 分子热运动的三种速率	90

7.7.2	温度和速率分布曲线	91
8	热力学基础	92
8.1	内能	92
8.1.1	改变内能的方式	92
8.2	热力学第一定律	93
8.2.1	第一类永动机	93
8.3	气体平衡过程中的功	94
8.4	气体的等体过程	95
8.5	气体的等压过程	97
8.6	气体的热容量	99
8.6.1	等体摩尔热容量	100
8.6.2	等压摩尔热容量	101
8.6.3	热容比	102
8.6.4	迈耶公式	102
8.7	气体的等温过程	103
8.8	气体的绝热过程	105
8.8.1	绝热过程中气体状态参量间的关系	106
8.8.2	绝热过程和等温过程的关系	109
8.9	循环过程	111
8.9.1	热机	112
8.9.2	热泵	113
8.9.3	卡诺正循环	114
8.9.4	卡诺逆循环	116
8.10	热力学第二定律	118
8.10.1	第二类永动机	118
	第三部分 电	119
9	真空中静电场	120
9.1	电荷	120
9.1.1	元电荷	120
9.2	电场	121
9.3	电场力	122
9.4	电场强度	123
9.4.1	电场线	124
9.4.2	电场强度的迭加原理	125
9.4.3	电荷连续分布时的电场强度	126
9.4.4	电偶极子	127
9.4.5	电偶极子轴线的延长线上的电场强度	128

9.4.6	电偶极子轴线的中垂线上的电场强度	131
9.4.7	均匀带电圆环轴线上的电场强度	134
9.4.8	均匀带电圆盘轴线上的电场强度	137
9.5	电通量	140
9.5.1	高斯电场定理	141
9.5.2	均匀带电球面的电场强度	143
9.5.3	无限长均匀带电直线的电场强度	145
9.5.4	无限大均匀带电平面的电场强度	147

第一部分 力

1 质点的运动

质点是一种理想模型，只具有质量，没有大小，没有形状。

例如当研究地球的公转时，可以将地球视作质点。

例如当研究地球的自转时，不能将地球视作质点。

1.1 运动的线量描述

运动的线量描述可以用于研究质点在空间直角坐标系的运动。

运动的线量描述包含：

位矢	\boldsymbol{r}	m
速度	\boldsymbol{v}	m/s
加速度	\boldsymbol{a}	m/s ²

表 1: 运动的线量描述

1.1.1 位矢

位矢描述了物体的位置，其变化量称为位移，是一个矢量，通常用符号 \boldsymbol{r} 表示，单位是m。

位矢可以表示为：

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

位矢的大小可以表示为：

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

其中 x, y, z 代表三个坐标轴上的位矢分量，而 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 则代表三个坐标轴上的单位矢量。

三维空间中的运动学方程：

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

二维空间中的运动学方程：

$$x = x(t) \quad y = y(t)$$

运动学方程可以视作位矢关于时间的参数方程。

运动学方程中消去时间即可得到轨迹方程。

1.1.2 速度

速度衡量了位矢的变化快慢，是一个矢量，通常用符号 \mathbf{v} 表示。单位是m/s。

平均速度的定义：

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

瞬时速度的定义：

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

速度通常指的就是瞬时速度。

速度定义为平均速度在时间趋近零时的极限，速度是位矢关于时间的一阶导数。

速度 \mathbf{v} 的方向和位矢的瞬时变化量 $d\mathbf{r}$ 的方向相同，但与位矢 \mathbf{r} 的方向无关。

通过以下推导：

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1)$$

$$= \frac{d}{dt} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \quad (2)$$

$$= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (3)$$

$$= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \quad (4)$$

速度可以表示为：

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

速度的大小可以表示为：

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

其中 v_x, v_y, v_z 代表三个坐标轴上的速度分量，而 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 则代表三个坐标轴上的单位矢量。

因为速度是位矢关于时间的导数，所以位矢是速度关于时间的积分：

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{v} \cdot dt$$

通过该公式，可以在已知速度的情况下求解位矢。

1.1.3 加速度

加速度衡量了速度的变化快慢，是一个矢量，通常用符号 \mathbf{a} 表示。单位是 m/s^2 。

平均加速度的定义：

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

瞬间加速度的定义：

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

加速度通常指的就是瞬时加速度。

加速度定义为平均加速度在时间趋近于零时的极限，加速度是速度关于时间的一阶导数。

加速度 \mathbf{a} 的方向和速度的瞬时变化量 $d\mathbf{v}$ 的方向相同，但与速度 \mathbf{v} 的方向无关。

通过以下推导：

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1)$$

$$= \frac{d}{dt} (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) \quad (2)$$

$$= \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} \quad (3)$$

$$= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (4)$$

加速度可以表示为：

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

加速度的大小可以表示为：

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

其中 a_x, a_y, a_z 代表三个坐标轴上的加速度分量，而 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 则代表三个坐标轴上的单位矢量。

因为加速度是速度关于时间的导数，所以速度是加速度关于时间的积分：

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{a} \cdot dt$$

通过该公式，可以在已知加速度的情况下求解速度。

1.2 直线运动

质点的运动轨迹是直线的运动，称为直线运动。

在直线运动中，若加速度 a 为一定值，则称为匀加速直线运动或匀减速直线运动。

在直线运动中，若加速度 a 不为定值，则称为变加速直线运动或变减速直线运动。

1.2.1 匀变速直线运动

匀变速直线运动的特征是加速度 a 是一个常数。

速度 v 由加速度的积分得到：

$$v = \int a \cdot dt \quad (1)$$

$$v = a \cdot t + v_0 \quad (2)$$

位矢 s 由速度的积分得到：

$$s = \int v \cdot dt \quad (3)$$

$$s = \int (a \cdot t + v_0) \cdot dt \quad (4)$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + r_0 \quad (5)$$

由速度公式出发可以得到：

$$v^2 = (a \cdot t + v_0)^2 \quad (6)$$

$$v^2 = a^2 \cdot t^2 + v_0^2 + 2 \cdot a \cdot t \cdot v_0 \quad (7)$$

$$v^2 - v_0^2 = a^2 \cdot t^2 + 2 \cdot a \cdot t \cdot v_0 \quad (8)$$

由位矢公式出发可以得到：

$$s - s_0 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t \quad (9)$$

$$2a \cdot (s - s_0) = 2a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t \right) \quad (10)$$

$$2a \cdot (s - s_0) = a^2 \cdot t^2 + 2 \cdot a \cdot t \cdot v_0 \quad (11)$$

观察到两组等式右侧均为 $a^2 \cdot t^2 + 2 \cdot a \cdot t \cdot v_0$ ，因此等式左侧相等既 $2a \cdot (s - s_0) = v^2 - v_0^2$ 。

匀变速直线运动中物体的速度：

$$v = a \cdot t + v_0$$

$$v = a \cdot t \quad [v_0 = 0]$$

匀变速直线运动中物体的位矢：

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad [v_0 = 0, s_0 = 0]$$

匀变速直线运动中无关时间的恒等式：

$$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot (s - s_0)$$

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \quad [v_0 = 0, s_0 = 0]$$

第一组公式描述了匀变速直线运动中，速度和时间的关系。

第二组公式描述了匀变速直线运动中，位矢和时间的关系。

第三组公式描述了匀变速直线运动中，位矢、速度、加速度三者间的关系。

由第二组公式变形可以得到（初位矢和初速度为零）：

$$\begin{cases} a = \frac{2s}{t^2} \\ t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \end{cases}$$

由第三组公式变形可以得到（初位矢和初速度为零）：

$$\begin{cases} a = \frac{v^2}{2s} \\ s = \frac{v^2}{2a} \\ v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s} \end{cases}$$

需要特别注意的是，以上两组变形公式只能在初位矢 $s_0 = 0$ 且初速度 $v_0 = 0$ 时使用。

1.3 运动的角量描述

运动的角量描述可以用于研究质点在平面作圆周运动。

运动的线量描述包含：

角位矢	θ	rad
角速度	ω	rad/s
角加速度	α	rad/s ²

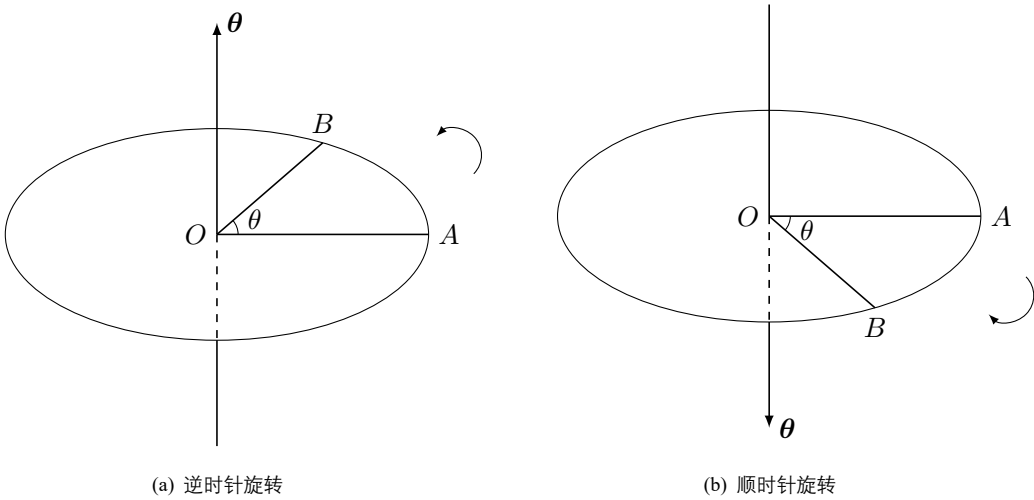
表 2: 运动的角量描述

1.3.1 角位矢

角位矢衡量了物体的角度，其变化量称为角位移，是一个矢量，通常用符号 θ 表示，单位是rad。

角位矢的矢量方向并非是其旋转方向，其方向定义为右手螺旋与旋转方向一致时拇指的方向。

角位矢的矢量方向示意图：



角位矢可以表示为：

$$\theta = \theta_x \cdot i + \theta_y \cdot j + \theta_z \cdot k$$

角位矢的大小可以表示为：

$$\theta = |\theta| = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2}$$

其中 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 代表三个坐标轴上的角位矢分量，而 i, j, k 则代表三个坐标轴上的单位矢量。

对于 xOy 平面上的旋转，可以认为分量 θ_x, θ_y 均为零，此时的旋转仅由分量 θ_z 决定。

1.3.2 角速度

角速度衡量了角位矢的变化快慢，是一个矢量，通常用符号 ω 表示。单位是rad/s。

平均角速度的定义：

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

瞬时角速度的定义：

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

角速度通常指的就是瞬时速度。

角速度定义为平均角速度在时间趋近零时的极限，角速度是角位矢关于时间的一阶导数。

角速度 ω 的方向和角位矢的瞬时变化量 $d\theta$ 的方向相同，但与角位矢 θ 的方向无关。

通过以下推导：

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (1)$$

$$= \frac{d}{dt} (\theta_x \mathbf{i} + \theta_y \mathbf{j} + \theta_z \mathbf{k}) \quad (2)$$

$$= \frac{d\theta_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{d\theta_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{d\theta_z}{dt} \mathbf{k} \quad (3)$$

$$= \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \quad (4)$$

角速度可以表示为：

$$\omega = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$$

角速度的大小可以表示为：

$$\omega = |\omega| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$$

其中 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 代表三个坐标轴上的角速度分量，而 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 则代表三个坐标轴上的单位矢量。

因为角速度是角位矢关于时间的导数，所以角位矢是角速度关于时间的积分：

$$\theta = \int \omega \cdot dt$$

通过该公式，可以在已知角速度的情况下求解角位矢。

1.3.3 角加速度

角加速度衡量了角速度的变化快慢，是一个矢量，通常用符号 α 表示。单位是 rad/s^2 。

平均角加速度的定义：

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

瞬间角加速度的定义：

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

角加速度通常指的就是瞬时角加速度。

角加速度定义为平均角加速度在时间趋近零时的极限，角加速度是角速度关于时间的一阶导数。

角加速度 α 的方向和角速度的瞬时变化量 $d\omega$ 的方向相同，但与角速度 ω 的方向无关。

通过以下推导：

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (1)$$

$$= \frac{d}{dt} (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}) \quad (2)$$

$$= \frac{d\omega_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{d\omega_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{d\omega_z}{dt} \mathbf{k} \quad (3)$$

$$= \alpha_x \mathbf{i} + \alpha_y \mathbf{j} + \alpha_z \mathbf{k} \quad (4)$$

角加速度可以表示为：

$$\alpha = \alpha_x \mathbf{i} + \alpha_y \mathbf{j} + \alpha_z \mathbf{k}$$

角加速度的大小可以表示为：

$$\alpha = |\alpha| = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2}$$

其中 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ 代表三个坐标轴上的位移分量，而 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 则代表三个坐标轴上的单位矢量。

因为角加速度是速度关于时间的导数，所以角速度是角加速度关于时间的积分：

$$\omega = \int \alpha \cdot dt$$

通过该公式，可以在已知角加速度的情况下求解角速度。

1.4 圆周运动

质点的运动轨迹是圆周的运动，称为圆周运动。

在圆周运动中，若角加速度 α 为零，则称为匀速圆周运动。

在圆周运动中，若角加速度 α 非零，则称为变速圆周运动。

1.4.1 圆周运动的参量

圆周运动的参量包括：

线速度	单位时间内转过的弧长	v	m/s
角速度	单位时间内转过的弧度	ω	rad/s
周期	转动一周所需要的时间	T	s
频率	单位时间内转动的周数	f	s ⁻¹

表 3: 圆周运动的参量

线速度根据其定义可以表示为：

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

角速度根据其定义可以表示为：

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

由于弧长和弧度相差一个半径：

$$v = \omega \cdot r$$

线速度在匀速圆周运动中可以用周期表示：

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

角速度在匀速圆周运动中可以用周期表示：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

频率和周期互为倒数：

$$f = \frac{1}{T}$$

频率 f 在匀速圆周运动中有时也称为转速并记作 n ，两者的意义是完全一致的。

1.4.2 匀速圆周运动

匀速圆周运动中的匀速表示线速度 v 的大小为一定值。

匀速圆周运动的示意图：

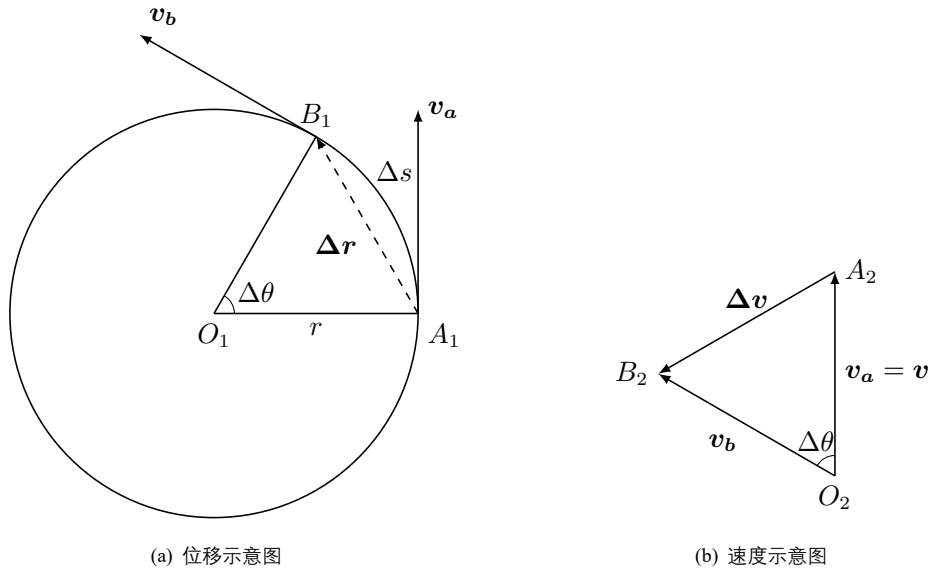


图 1: 匀速圆周运动的示意图

如图所示，时刻 t 处的线速度记作 $v = v_a$ ，时刻 $t + \Delta t$ 处的线速度记作 v_b 。

在位移示意图中，位移三角形 $\triangle O_1 A_1 B_1$ 中 $O_1 A_1 = O_1 B_1$ ，故为等腰三角形。

在速度示意图中，速度三角形 $\triangle O_2 A_2 B_2$ 中 $O_2 A_2 = O_2 B_2$ ，故为等腰三角形。

此处可以组成速度三角形的原因是存在矢量关系 $v_b = v_a + \Delta v$ 。

然而两个等腰三角形的顶角均为 $\Delta\theta$ ，因此两个三角形相似既 $\triangle O_2 A_2 B_2 \simeq \triangle O_1 A_1 B_1$ 。

根据相似关系可得：

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \quad (1)$$

$$\frac{\Delta v}{v \cdot \Delta t} = \frac{\Delta r}{r \cdot \Delta t} \quad (2)$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot v = \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot r \quad (3)$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (4)$$

这一步的关键在于利用相似关系建立等式后，在等式两侧同时除以 Δt 。

计算加速度的大小:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (5)$$

代入 $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t}$ 的关系可得:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (6)$$

由于 $\Delta t \rightarrow 0$ 时弧长和弦长等长:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (7)$$

利用线速度的定义 $\frac{ds}{dt} = v$:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (8)$$

$$a = \frac{v}{r} \cdot \frac{ds}{dt} \quad (9)$$

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (10)$$

加速度的方向为 $\Delta \mathbf{v} \rightarrow 0$ 时的方向, 当 $\Delta t \rightarrow 0$, 有 $\Delta \theta \rightarrow 0$, 此时 $\Delta \mathbf{v}$ 趋向于与 \mathbf{v} 垂直。

加速度的方向始终垂直于速度并指向圆心, 因此匀速圆周运动中的加速度也称为向心加速度。

向心加速度的计算公式:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

第一次代入 $v = \omega \cdot r$ 可得:

$$a = \omega \cdot v$$

第二次代入 $v = \omega \cdot r$ 可得:

$$a = \omega^2 \cdot r$$

根据周期公式 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 可得:

$$a = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2}$$

由此证明了以上四条向心加速度的计算公式。

1.4.3 变速圆周运动

变速圆周运动中的变速表示线速度 v 的大小不是定值。

变速圆周运动的示意图：

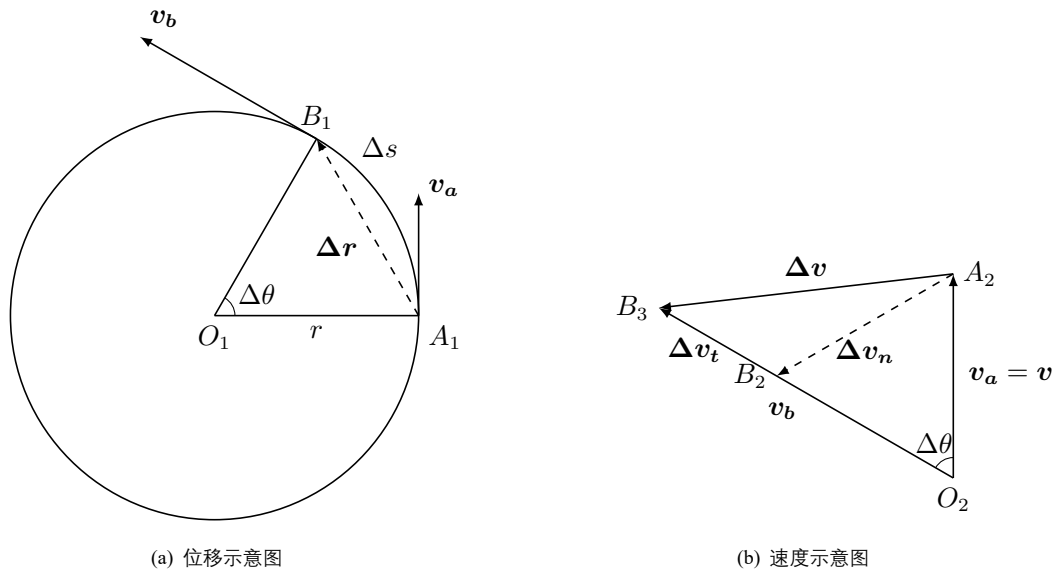


图 2: 变速圆周运动的示意图

如图所示，时刻 t 处的线速度记作 $v = v_a$ ，时刻 $t + \Delta t$ 处的线速度记作 v_b 。

如图所示，在 O_2B_3 上取点 B_2 使得 $O_2A_2 = O_2B_2$ 。

因此速度的变化量 Δv 可以被分解为 $\Delta v_n + \Delta v_t$ 。

其中速度的变化量的分量 Δv_n 仅改变速度的方向。

其中速度的变化量的分量 Δv_t 仅改变速度的大小。

类似于匀速圆周运动：

$$\frac{\Delta v_n}{v} = \frac{\Delta r}{r} \quad (1)$$

$$\frac{\Delta v_n}{v \cdot \Delta t} = \frac{\Delta r}{r \cdot \Delta t} \quad (2)$$

$$\frac{\Delta v_n}{\Delta t} \cdot v = \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot r \quad (3)$$

$$\frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (4)$$

这一步的关键在于利用相似关系建立等式后，在等式两侧同时除以 Δt 。

由于加速度可以表达为：

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (5)$$

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n + \Delta \mathbf{v}_t}{\Delta t} \quad (6)$$

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_t}{\Delta t} \quad (7)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t \quad (8)$$

加速度的分量 \mathbf{a}_n 与 $\Delta \mathbf{v}_n \rightarrow 0$ 的方向相同，即垂直于线速度 v ，故 \mathbf{a}_n 称为法向加速度。

加速度的分量 \mathbf{a}_t 与 $\Delta \mathbf{v}_t \rightarrow 0$ 的方向相同，即平行于线速度 v ，故 \mathbf{a}_t 称为切向加速度。

匀速圆周运动中的向心加速度等同于此处的法向加速度，其切向加速度为零。

求解法向加速度的大小：

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} \quad (9)$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_n}{r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (10)$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_n}{r} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (11)$$

$$a_n = \frac{v}{r} \cdot \frac{ds}{dt} \quad (12)$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad (13)$$

求解切向加速度的大小：

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_t}{\Delta t} \quad (14)$$

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_b - v_a}{r} \quad (15)$$

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{r} \quad (16)$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad (17)$$

由此证明了变速圆周运动中的法向加速度和切向加速度的计算公式。

法向加速度也可以使用角量描述：

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad (18)$$

$$a_n = \frac{r^2 \cdot \omega^2}{r} \quad (19)$$

$$a_n = r \cdot \omega^2 \quad (20)$$

切向加速度也可以使用角量描述：

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad (21)$$

$$a_t = r \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad (22)$$

$$a_t = r \cdot \alpha \quad (23)$$

法向加速度的计算公式：

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad a_n = r \cdot \omega^2$$

切向加速度的计算公式：

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_t = r \cdot \alpha$$

总加速度的示意图：

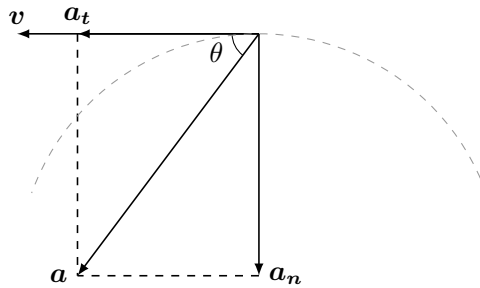


图 3: 总加速度的示意图

总加速度的大小和方向可以表达为：

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \quad \tan \theta = \frac{a_n}{a_t}$$

其中 θ 代表总加速度 a 和线速度 v 间的夹角，匀速圆周运动中 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 。

2 牛顿运动定律

根据观察和实验，有两个因素影响物体的机械运动：

1. 物体本身的固有属性，称其为质量。
2. 物体之间的相互作用，称其为力。

2.1 质量

质量衡量了物体具有的惯性强弱，是一个标量，通常用符号 m 表示，单位是kg。

质量定义中的惯性即为改变物体运动状态的难易程度，质量是惯性的定理描述。

较为严格的说，质量应当分为两类：

1. 反映物体惯性特性强弱的称为惯性质量，即惯性质量大的物体具有的惯性较大。
2. 反映物体引力特性强弱的称为引力质量，即引力质量大的物体受到的引力较大。

惯性质量出现于牛顿第二定律： $F = m \cdot a$

引力质量出现于万有引力定律： $F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$

现代物理研究表明两种质量可以不予区分，故可以用质量统一表示。

2.2 力

力衡量了物体间相互作用的强弱，是一个矢量，通常用符号 F 表示，单位是N。

力的单位牛顿的定义如下：

$$\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$$

力的作用效果有两种：使受力物体的运动状态发生改变，使受体物体发生形变。

力可以用力的示意图表示：

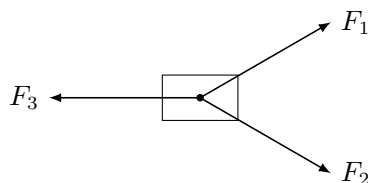


图 4: 力的示意图

力的三要素包括：力的作用点，力的方向，力的大小。

2.2.1 共点力的合成

已知两个力 F_1, F_2 的大小，已知两者的夹角为 θ ，现研究其合力的大小和方向。

考虑以下示意图：

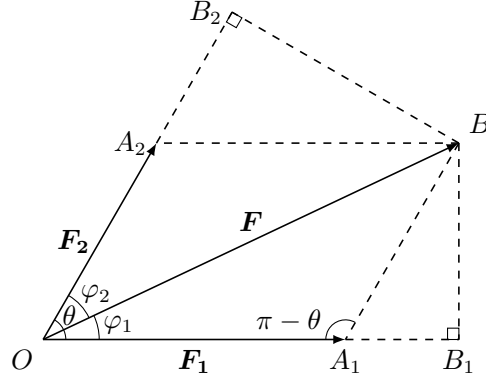


图 5: 共点力的合成

根据余弦定理：

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\pi - \theta) \quad (1)$$

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \theta \quad (2)$$

根据正弦定理：

$$\frac{A_1B}{\sin \varphi_1} = \frac{OB}{\sin(\pi - \theta)} \quad (3)$$

$$\frac{A_1B}{\sin \varphi_1} = \frac{OB}{\sin \theta} \quad (4)$$

$$\frac{F_2}{\sin \varphi_1} = \frac{F}{\sin \theta} \quad (5)$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{F_2}{F} \cdot \sin \theta \quad (6)$$

共点力的大小和方向可以表示为：

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \theta}$$

$$\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{F_2}{F} \cdot \sin \theta\right) \quad \varphi_2 = \arcsin\left(\frac{F_1}{F} \cdot \sin \theta\right)$$

其中 φ_1 表示 F 与 F_1 的夹角，其中 φ_2 表示 F 与 F_2 的夹角，后者的结论可以类似的证明。

2.2.2 牛顿第一定律

牛顿第一定律：任何物体都将保持静止或匀速直线运动，直到外力迫使它改变这种状态为止。

牛顿第一定律的数学表达：

$$\mathbf{F} = 0$$

牛顿第一定律指出：力是改变物体运动状态的原因，力不是维持物体运动状态的原因。

2.2.3 拉密定理

拉密定理：当三个共点力平衡时，任意一个力与另外两个力夹角正弦的比值相同。

拉密定理的数学表达：

$$\frac{F_1}{\sin \theta_1} = \frac{F_2}{\sin \theta_2} = \frac{F_3}{\sin \theta_3}$$

拉密定理的示意图：

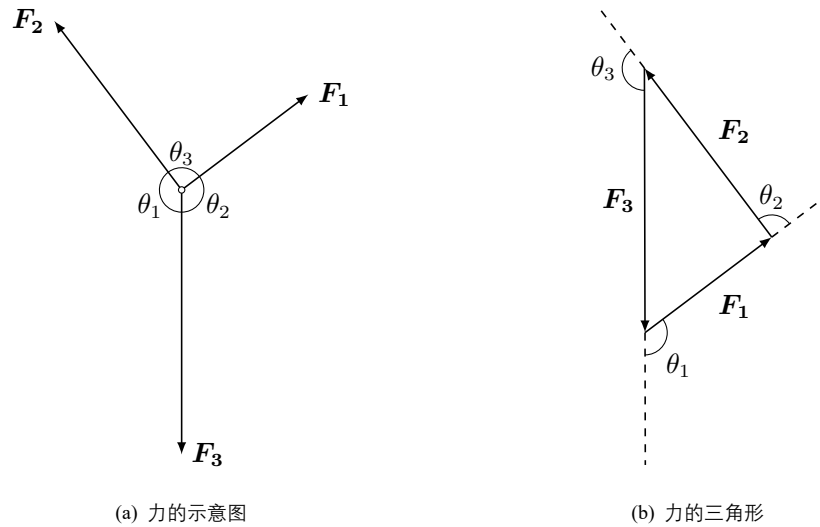


图 6: 拉密定理的示意图

如图所示，由于三个共点力平衡即矢量和为零，故三者的矢量可以首尾相接构成封闭三角形。

根据正弦定理和诱导公式：

$$\frac{F_1}{\sin(\pi - \theta_1)} = \frac{F_2}{\sin(\pi - \theta_2)} = \frac{F_3}{\sin(\pi - \theta_3)} \quad (1)$$

$$\frac{F_1}{\sin \theta_1} = \frac{F_2}{\sin \theta_2} = \frac{F_3}{\sin \theta_3} \quad (2)$$

由此可见，拉密定理本质为正弦定理在三力平衡中的实际应用。

2.2.4 牛顿第二定律

牛顿第二定律：当力作用于物体时，物体所得到的加速度的大小，与物体所受的合力成正比，与物体的质量成反比，物体加速度的方向与物体所受的合外力方向相同。

牛顿第二定律的数学表达：

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$$

牛顿第二定律的直角坐标分量式：

$$\begin{cases} F_x = m \cdot a_x \\ F_y = m \cdot a_y \\ F_z = m \cdot a_z \end{cases}$$

牛顿第二定律的法向切向分量式：

$$\begin{cases} F_n = m \cdot a_n \\ F_t = m \cdot a_t \end{cases}$$

牛顿第二定律定理指出：质量是物体惯性的量度，质量大的物体具有较大的惯性。

2.2.5 牛顿第三定律

牛顿第三定律：相互作用的两个物体之间的作用力和反作用力，大小相等，方向相反。

牛顿第三定律的数学表达：

$$\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA} = \mathbf{0}$$

牛顿第三定律的示意图：



图 7: 牛顿第三定律的示意图

在示意图中，力 \mathbf{F}_{AB} 表示物体 A 受到的来自 B 的力，力 \mathbf{F}_{BA} 表示物体 B 受到的来自 A 的力。

牛顿第三定律指出：物体间作用力具有相互作用力的本质，作用力和反作用力总是成对出现的。

牛顿第三定律在使用时应当注意作用力和反作用力必然为同一性质的力。

2.2.6 系统的牛顿第二定律

系统的牛顿第二定律：系统所受的合外力等于系统内各个物体的质量与加速度的乘积之和。

系统的牛顿第二定律的数学表达：

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{a}_i$$

我们首先考虑一个只有两个物体的系统。

设第一个物体的质量为 m_1 ，其所受的内力记作 \mathbf{f}_1 ，其所受的外力记作 \mathbf{F}_1 。

设第二个物体的质量为 m_2 ，其所受的内力记作 \mathbf{f}_2 ，其所受的外力记作 \mathbf{F}_2 。

该系统可以用以下示意图表达：



图 8: 系统的牛顿第二定律的示意图

系统所受的合外力 \mathbf{F} 可以表达为：

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F} \quad (1)$$

对第一个物体使用牛顿第二定律：

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{f}_1 = m_1 \cdot \mathbf{a}_1 \quad (2)$$

对第二个物体使用牛顿第二定律：

$$\mathbf{F}_2 + \mathbf{f}_2 = m_2 \cdot \mathbf{a}_2 \quad (3)$$

将两组结论相加可以得到：

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = m_1 \cdot \mathbf{a}_1 + m_2 \cdot \mathbf{a}_2 \quad (4)$$

$$\mathbf{F} + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = m_1 \cdot \mathbf{a}_1 + m_2 \cdot \mathbf{a}_2 \quad (5)$$

$$\mathbf{F} = m_1 \cdot \mathbf{a}_1 + m_2 \cdot \mathbf{a}_2 \quad (6)$$

此处推导的关键在于运用了牛顿第三定律 $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}$ ，即合内力为零。

由此证明了系统的牛顿第二定律在两个物体时是成立的，类似的也可以证明更多物体的情况。

2.2.7 惯性系和非惯性系

凡是适用牛顿运动定律的参照系，称为惯性系。

凡是不能适用牛顿运动定律的参照系，称为非惯性系。

相较于一个惯性系的加速度为 $\mathbf{a} = 0$ 的参照系，也是一个惯性系。

相较于一个惯性系的加速度为 $\mathbf{a} \neq 0$ 的参照系，则是一个非惯性系。

非惯性系中运动定律不再适用，但是我们可以通过添加惯性力，使运动定律重新适用。

非惯性系中的惯性力：

$$\mathbf{F}_{\text{惯}} = -m \cdot \mathbf{a}$$

其中 \mathbf{a} 为该非惯性系相对于惯性系的加速度。

惯性力的方向始终和非惯性系加速度的方向相反。

惯性力是一个虚拟的力，无施力物体，无反作用力。

运用惯性力可以解释失重和超重的现象：

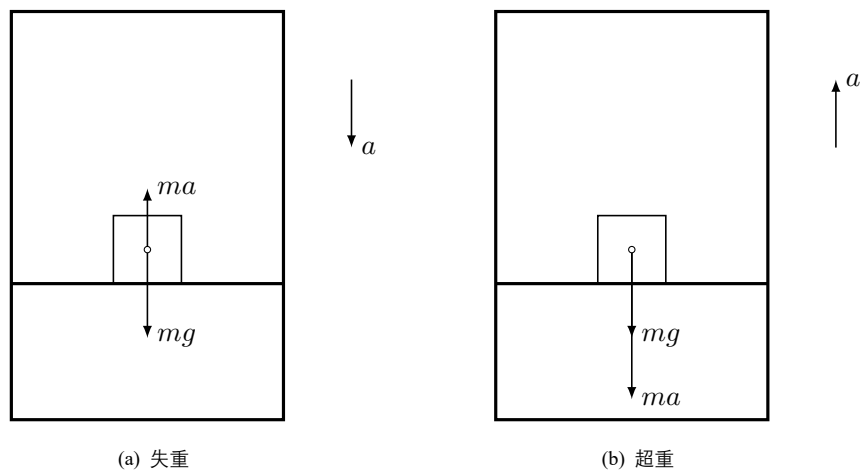


图 9: 超重和失重

当电梯加速度向下时，其中的物体受到一个向上的惯性力，抵消了部分重力，因此观察到失重。

当电梯加速度向上时，其中的物体受到一个向下的惯性力，加强了部分重力，因此观察到超重。

2.2.8 重力

重力指的是物体由于受到地球吸引而受到的，通常用字母 G 表示。

重力的方向总是竖直向下垂直于当地的水平面。

重力的计算公式：

$$G = -m \cdot g$$

重力的计算公式中的 g 代表当地的重力加速度，物体所受重力的大小和质量成正比。

重力的计算公式中的负号代表如果以竖直向上为正方向，则重力方向始终为负指向地面。

2.2.9 万有引力

万有引力指的是任何两个物体由于质量而产生的吸引力。

万有引力定律：

$$F = G_0 \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

其中符号 G_0 表示万有引力常量，其取值为 $G_0 = 6.67 \times 10^{-11} (\text{N} \cdot \text{m}^2)/\text{kg}^2$ 。

万有引力常量由卡文迪许通过扭秤实验测定，在不与重力 G 产生的误解的情况下也可记作 G 。

万有引力产生的加速度称为引力加速度，通常可以用符号 g 表示。

引力加速度可以推导如下：

$$\begin{cases} F = m \cdot g \\ F = G_0 \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \end{cases} \quad (1)$$

$$G_0 \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot g \quad (2)$$

$$G_0 \cdot \frac{M}{r^2} = g \quad (3)$$

引力加速度的计算公式：

$$g = G_0 \cdot \frac{M}{r^2} \quad g = \frac{F}{m}$$

引力加速度的单位是 N/m 或 m/s^2 ，两种单位是完全等效的。

引力在地球表面的近似即为重力，这是因为地球表面的物体至地心的距离基本等于地球半径。

引力加速度代入地球半径和地球质量，即可得到重力加速度 $g = 9.8 \text{m/s}^2$ 的结论。

2.2.10 弹力

弹力指的是物体由于发生弹性形变而产生的力，通常用字母 F 表示。

弹力的方向总是与物体发生形变的方向相反。

弹力的计算公式：

$$F = -k \cdot x$$

弹力的计算公式中的 k 代表弹簧的劲度系数，物体所受弹力的大小和形变程度成正比。

弹力的计算公式中的负号代表以位移方向为正方向，弹力方向始终为负指向平衡位置。

弹力的计算公式也称为胡克定律，其只能用于计算弹簧产生的弹性力。

弹力也存在于一般物体中，两个物体在接触时会由于发生微小的形变而产生弹力。

弹力总是垂直于两个物体接触面，若点和面接触则垂直于接触面，若与曲面接触则垂于与切面。

若弹力使得物体发生微小的压缩，则称这种弹力为压力，通常倾向于记作 N 。

若弹力使得物体发生微小的拉伸，则称这种弹力为拉力，通常倾向于记作 T 。

轻杆和轻绳是两种重要的物理模型：

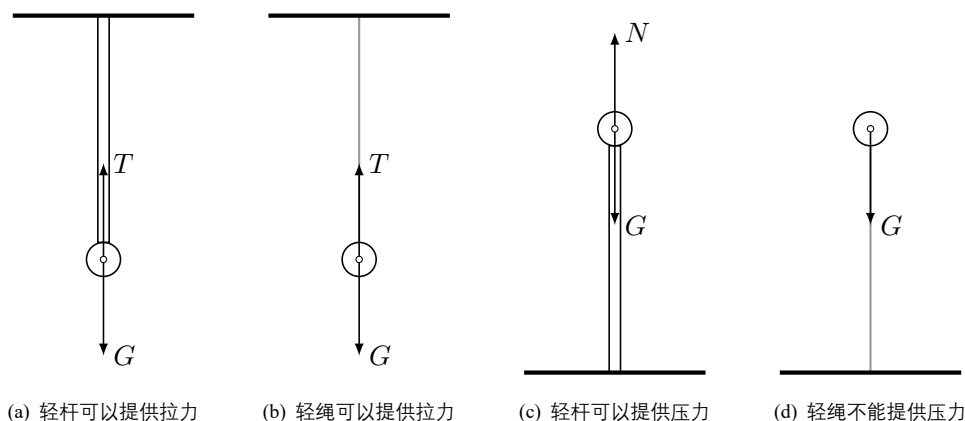


图 10: 轻绳和轻杆的特点

轻杆是一种没有质量的细长状物体，既可以提供拉力，也可以提供压力。

轻绳是一种没有质量的细长状物体，只可以提供拉力，不可以提供压力。

由于轻绳和轻杆均被假设为没有质量，若其受力不平衡，则牛顿第二定律指出其加速度无限大，从而导致不合理的结果，因此轻绳和轻杆的受力一定是平衡的。

2.2.11 摩擦力

摩擦力指的是两个粗糙物体由于相互摩擦而产生的力，通常用字母 f 表示。

1. 动摩擦力

滑动摩擦力指的是两个粗糙物体由于相对滑动而产生的力，通常用 f_k 表示。

滑动摩擦力的方向总是沿着接触面的切线方向，且与物体相对运动方向相反。

滑动摩擦力的计算公式：

$$f_k = \mu_k \cdot N$$

其中 μ_k 为动摩擦系数，物体所受动摩擦力的大小和物体间的弹力成正比。

2. 静摩擦力

静摩擦力指的是两个粗糙物体由于相对滑动趋势而产生的力，通常用 f_s 表示。

静摩擦力的方向总是沿着接触面的切线方向，且与物体的相对运动趋势方向相反。

静摩擦力的大小与物体间弹力无关，而是与外力的大小保持相同，使得物体能够始终保持静止，随着外力逐渐增大，静摩擦力逐渐增大，直至物体发生运动。

最大静摩擦力指的是物体在发生运动前可以产生的最大的静摩擦力。

最大静摩擦力的计算公式：

$$f_s = \mu_s \cdot N$$

其中 μ_s 为静摩擦系数，物体所受最大静摩擦力的大小和物体间的弹力成正比。

通常来说静摩擦因数和动摩擦因数小于一：

$$\mu_s < 1 \quad \mu_k < 1$$

实验表明静摩擦因数总是大于动摩擦因数：

$$\mu_s > \mu_k$$

这意味着使物体开始运动所需的力大于维持物体匀速直线运动所需的力。

一般情况下可以近似的认为静摩擦因数和动摩擦因数相等，即 $\mu = \mu_s = \mu_k$ 。

2.3 受力分析的实例

本章将分析一些常见情况下的物体受力和运动情况。

2.3.1 斜面上的静止物体

现研究一个倾斜角为 θ 的斜面上的静止物体的受力情况。

定义平行斜面向上的方向作为 x 轴的正方向，定义垂直斜面向上的方向作为 y 轴的正方向。

物体受力分析如图所示：

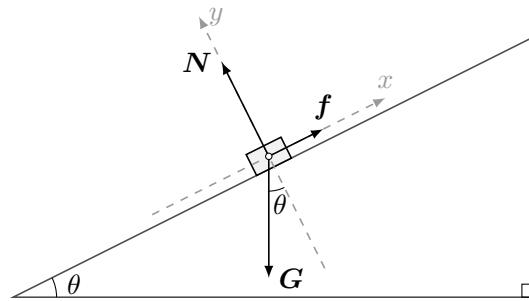


图 11: 斜面上的静止物体的受力分析

物体所受的力的矢量：

$$\mathbf{G} = (-mg \cdot \sin \theta, -mg \cdot \cos \theta) \quad (1)$$

$$\mathbf{N} = (0, N) \quad (2)$$

$$\mathbf{f} = (f, 0) \quad (3)$$

根据牛顿第二定律：

$$\begin{cases} f - mg \cdot \sin \theta = 0 \\ N - mg \cdot \cos \theta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f = mg \cdot \sin \theta \\ N = mg \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (4)$$

物体静止时，所受摩擦力为重力和倾斜角正弦的乘积：

$$f = mg \cdot \sin \theta$$

物体静止时，所受支持力为重力和倾斜角余弦的乘积：

$$N = mg \cdot \cos \theta$$

需要十分注意的是，以上关于摩擦力的结论只有在物体静止时才可以适用。

2.3.2 斜面上的下滑物体

现研究一个倾斜角为 θ 的斜面上的下滑物体的受力情况和运动情况。

定义平行斜面向上的方向作为 x 轴的正方向，定义垂直斜面向上的方向作为 y 轴的正方向。

物体受力分析如图所示：

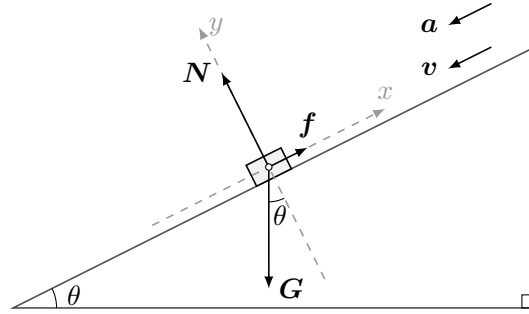


图 12: 斜面上的下滑物体的受力分析

物体所受的力的矢量：

$$\mathbf{G} = (-mg \cdot \sin \theta, -mg \cdot \cos \theta) \quad (1)$$

$$\mathbf{N} = (0, N) \quad (2)$$

$$\mathbf{f} = (f, 0) = (\mu N, 0) \quad (3)$$

根据牛顿第二定律：

$$\begin{cases} \mu N - mg \cdot \sin \theta = -ma \\ N - mg \cdot \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$N = mg \cdot \cos \theta \quad (5)$$

$$ma = mg \cdot \sin \theta - \mu N \quad (6)$$

$$ma = mg \cdot \sin \theta - \mu mg \cdot \cos \theta \quad (7)$$

$$a = g \cdot \sin \theta - \mu g \cdot \cos \theta \quad (8)$$

物体向下滑动时的加速度大小：

$$a = g \cdot \sin \theta - \mu \cdot g \cdot \cos \theta$$

由此可见，物体在向下滑动时具有较小的加速度（摩擦力与加速度方向相反）。

2.3.3 斜面上的上滑物体

现研究一个倾斜角为 θ 的斜面上的上滑物体的受力情况和运动情况。

定义平行斜面向上的方向作为 x 轴的正方向，定义垂直斜面向上的方向作为 y 轴的正方向。

物体受力分析如图所示：

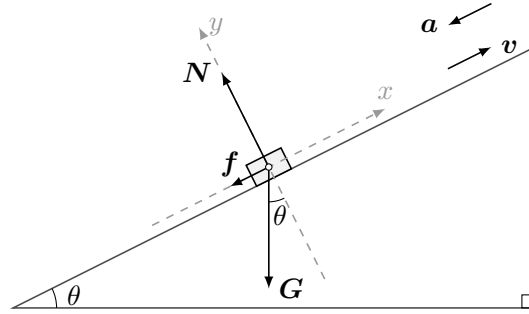


图 13: 斜面上的上滑物体的受力分析

物体所受的力的矢量：

$$\mathbf{G} = (-mg \cdot \sin \theta, -mg \cdot \cos \theta) \quad (1)$$

$$\mathbf{N} = (0, N) \quad (2)$$

$$\mathbf{f} = (-f, 0) = (-\mu N, 0) \quad (3)$$

根据牛顿第二定律：

$$\begin{cases} -\mu N - mg \cdot \sin \theta = -ma \\ N - mg \cdot \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$N = mg \cdot \cos \theta \quad (5)$$

$$ma = mg \cdot \sin \theta + \mu N \quad (6)$$

$$ma = mg \cdot \sin \theta + \mu mg \cdot \cos \theta \quad (7)$$

$$a = g \cdot \sin \theta + \mu g \cdot \cos \theta \quad (8)$$

物体向上滑动时的加速度大小：

$$a = g \cdot \sin \theta + \mu \cdot g \cdot \cos \theta$$

由此可见，物体在向下滑动时具有较大的加速度（摩擦力与加速度方向相同）。

2.3.4 伽利略等时圆原理

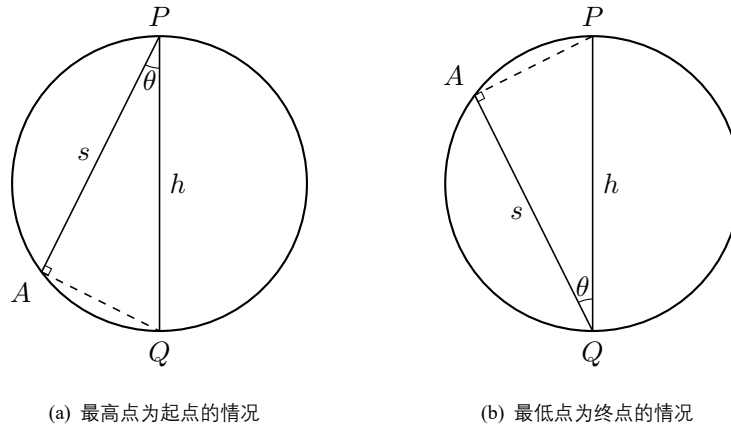
考虑一个竖直平面上的圆，设圆上最高点为点 P ，设圆上最低点为点 Q ，记圆上任意一点为 A 。

我们记一个质点由最高点 P 沿着轨道下滑至任意点 A 所需的时间为 t_1 。

我们记一个质点由任意点 A 沿着轨道下滑至任意点 Q 所需的时间为 t_2 。

伽利略等时圆原理指出，若记最高点 P 自由落体至最低点 Q 所需的时间为 t ，则必有 $t = t_1 = t_2$ 。

伽利略等时圆的示意图：



由图可知，两处轨道的倾斜角均为 $\pi - \theta$ 。

设 PQ 的高度为 h ，设下滑的加速度为 a ，设轨道的长度为 s ，设下滑时间为 T 。

根据斜面下滑的结论可知：

$$a = g \cdot \sin(\pi - \theta) \quad (1)$$

$$a = g \cdot \cos \theta \quad (2)$$

显然轨道长度可以表达为：

$$s = h \cdot \cos \theta \quad (3)$$

代入匀加速直线运动的计算公式：

$$T = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot \cos \theta}{g \cdot \cos \theta}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (4)$$

以上证明对两类轨道均是适用的。

以上证明指出，下滑的时间与角度 θ 无关，因此伽利略等时圆原理成立。

2.3.5 降落伞问题

假设一个质量为 m 的物体，其所受重力恒定 $G = mg$ ，其所受空气阻力和速度成正比 $f = kv$ 。

假设该物体从足够高处静止下落，求解该物体的速度和时间的函数关系。

由于该问题常以降落伞的形式出现，因此称为降落伞问题。

物体受力分析如图所示：

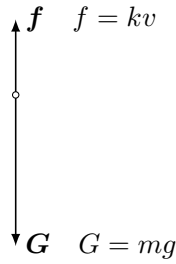


图 14: 降落伞问题的示意图

根据牛顿第二定律：

$$m \cdot a = G - f \quad (1)$$

$$m \cdot a = mg - kv \quad (2)$$

由此可以微分方程：

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - kv \quad (3)$$

将变量分离至两侧：

$$\frac{dv}{mg - kv} = \frac{dt}{m} \quad (4)$$

对等式两侧积分得：

$$\int \frac{dv}{mg - kv} = \int \frac{dt}{m} \quad (5)$$

$$\int \frac{dv}{-kv + mg} = \int \frac{dt}{m} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{k} \cdot \ln(|mg - kv|) = \frac{t}{m} + C \quad (7)$$

由于空气阻力应当小于重力即 $mg > kv$ ，因此此处的 $|mg - kv| = mg - kv$ 。

对积分结论进行化简：

$$\ln(mg - kv) = -\frac{kt}{m} + C \quad (8)$$

$$mg - kv = e^{-\frac{kt}{m} + C} \quad (9)$$

$$mg - kv = e^{-\frac{kt}{m}} \cdot e^C \quad (10)$$

$$v = \frac{1}{k} \cdot \left(mg - e^{-\frac{kt}{m}} \cdot e^C \right) \quad (11)$$

此处的 C 为一由初值确定的常数，我们已知当 $t = 0$ 时有 $v = 0$ 即初速度为零。

由此可以求解得出该常数：

$$v = \frac{1}{k} \cdot \left(mg - e^{-\frac{kt}{m}} \cdot e^C \right) \quad (12)$$

$$0 = \frac{1}{k} \cdot (mg - e^C) \quad (13)$$

$$0 = \frac{mg}{k} - \frac{e^C}{k} \quad (14)$$

$$e^C = mg \quad (15)$$

$$C = \ln mg \quad (16)$$

将求得的常数重新代入得：

$$v = \frac{1}{k} \cdot \left(mg - e^{-\frac{kt}{m}} \cdot e^C \right) \quad (17)$$

$$v = \frac{1}{k} \cdot \left(mg - e^{-\frac{kt}{m}} \cdot e^{\ln mg} \right) \quad (18)$$

$$v = \frac{1}{k} \cdot \left(mg - mg \cdot e^{-\frac{kt}{m}} \right) \quad (19)$$

$$v = \frac{mg}{k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) \quad (20)$$

降落伞问题的速度：

$$v = \frac{mg}{k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right)$$

降落伞问题中，当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $v \rightarrow \frac{mg}{k}$ ，即当时间趋近于无穷时速度趋近于定值。

降落伞问题的物体在向下运动的过程中，加速度逐渐减小趋近于零，速度逐渐增大趋近于定值。

2.4 万有引力的应用

本章将主要研究将万有引力应用于圆周运动时的一些重要结论。

2.4.1 开普勒第一定律

开普勒第一定律：所有行星绕太阳的轨道均是椭圆，太阳处于椭圆的一个焦点上。

开普勒第一定律的主要价值在于，其驳斥了自哥白尼时代起将行星轨道视为完美的圆形的错误认知，但是实际上太阳系行星的轨道偏心率均很小，因此一般可以近似的视作圆。

开普勒第一定律仅考虑了行星的轨道情况，对于一般的绕太阳运动的物体，如彗星或人造卫星，速度较小的为圆或椭圆，速度较大的为抛物线或双曲线，且太阳总是处于圆锥曲线的焦点处。

2.4.2 开普勒第二定律

开普勒第二定律：在任何相等的时间内，行星和太阳的连线扫过的面积是相等的。

开普勒第二定律的示意图：

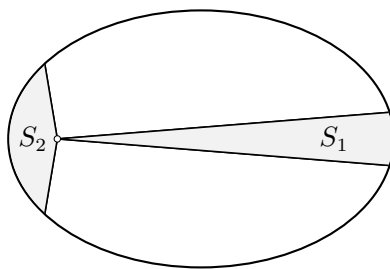


图 15: 开普勒第二定律的示意图

开普勒第二定律实际是行星绕太阳公转过程中角动量守恒的具体表现。

开普勒第二定律对于一般的圆锥曲线轨道，例如抛物线轨道和双曲线轨道也是普遍适用的。

2.4.3 开普勒第三定律

开普勒第三定律：绕太阳运行的各行星，轨道半长轴的立方和公转周期的平方成正比。

开普勒第三定律的数学表达：

$$k = \frac{R^3}{T^2}$$

开普勒第三定律是发现万有引力定律过程中的一个重要基础。

开普勒第三定律中，符号 R 表示椭圆轨道的半长轴，符号 T 表示轨道周期。

开普勒第三定律中，符号 k 称为开普勒衡量，其关于每一个中心天体为一常量。

2.4.4 环绕物体的线速度

现研究以圆形轨道环绕质量为 M 的中心天体的物体的线速度 v 的大小。

环绕物体线速度的计算公式：

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

环绕物体线速度的示意图：

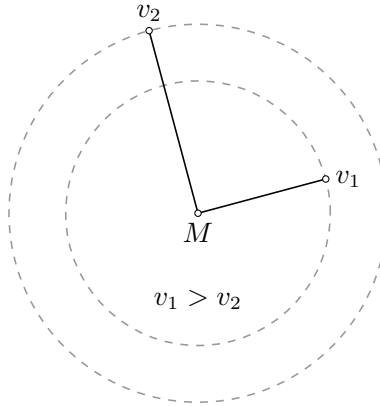


图 16: 轨道半径和线速度的关系

根据引力加速度的计算公式：

$$a = G \cdot \frac{M}{r^2} \quad (1)$$

根据向心加速度的计算公式：

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (2)$$

将两者联立可得：

$$G \cdot \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad (3)$$

$$G \cdot \frac{M}{r} = v^2 \quad (4)$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \quad (5)$$

线速度的计算公式指出，在半径一定的轨道上运行的物体具有相同的线速度。

线速度的计算公式指出，轨道上物体的线速度随着轨道半径的增大而减小。

2.4.5 环绕物体的角速度

现研究以圆形轨道环绕质量为 M 的中心天体的物体角速度 ω 的大小。

环绕物体角速度的计算公式：

$$\omega = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r^3}}$$

环绕物体角速度的示意图：

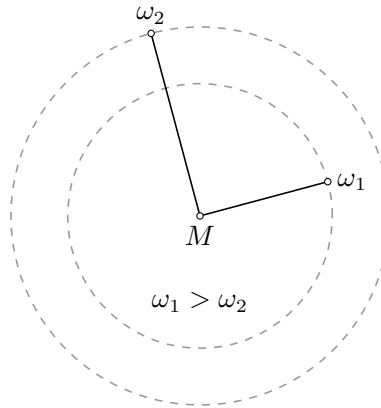


图 17: 轨道半径和角速度的关系

根据引力加速度的计算公式：

$$a = G \cdot \frac{M}{r^2} \quad (1)$$

根据向心加速度的计算公式：

$$a = \omega^2 \cdot r \quad (2)$$

将两者联立可得：

$$G \cdot \frac{M}{r^2} = \omega^2 \cdot r \quad (3)$$

$$G \cdot \frac{M}{r^3} = \omega^2 \quad (4)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r^3}} \quad (5)$$

角速度的计算公式指出，在半径一定的轨道上运行的物体具有相同的角速度。

角速度的计算公式指出，轨道上物体的角速度随着轨道半径的增大而减小。

2.4.6 轨道周期的计算

现研究以圆形轨道绕质量为 M 的中心天体的物体的轨道周期 T 的大小。

轨道周期的计算公式：

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M}}$$

轨道周期的示意图：

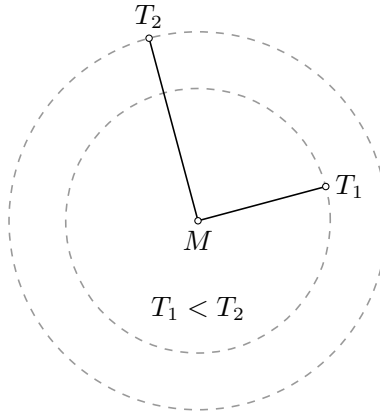


图 18: 轨道半径和周期的关系

根据引力加速度的计算公式：

$$a = G \cdot \frac{M}{r^2} \quad (1)$$

根据向心加速度的计算公式：

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \quad (2)$$

将两者联立可得：

$$G \cdot \frac{M}{r^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \quad (3)$$

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M} \quad (4)$$

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M}} \quad (5)$$

轨道周期的计算公式指出，在半径一定的轨道上运行的物体具有相同的周期。

轨道周期的计算公式指出，轨道上物体的周期随着轨道半径的增大而增大。

2.4.7 天体质量的测量

现研究如何通过环绕中心天体的物体的轨道参数求出中心天体的质量 M 。

天体质量的计算公式：

$$M = \frac{v^2 \cdot r}{G}$$

$$M = \frac{\omega^2 \cdot r^3}{G}$$

$$M = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$$

天体质量的示意图：

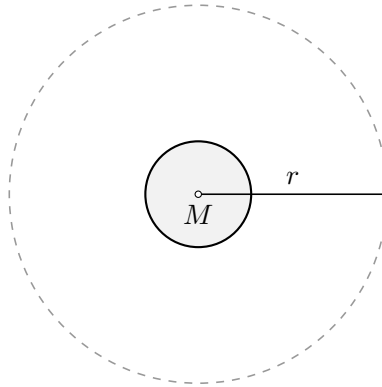


图 19: 天体质量测量的示意图

关于线速度的天体质量计算公式可以推导如下：

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{v^2 \cdot r}{G} \quad (1)$$

关于角速度的天体质量计算公式可以推导如下：

$$\omega = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r^3}} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\omega^2 \cdot r^3}{G} \quad (2)$$

关于轨道周期的天体质量计算公式可以推导如下：

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M}} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} \quad (3)$$

故已知轨道半径的情况下，只需要确定轨道周期就可以确定中心天体的质量。

2.4.8 天体密度的测量

现研究如何通过环绕中心天体的物体的轨道参数求出中心天体的密度 ρ 。

天体密度的计算公式：

$$\rho = \frac{3}{4} \cdot \frac{v^2 \cdot r}{G \cdot \pi} \cdot r_0^3$$

$$\rho = \frac{3}{4} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r^3}{G \cdot \pi} \cdot r_0^3$$

$$\rho = \frac{3 \cdot \pi}{G \cdot T^2} \cdot \frac{r^3}{r_0^3}$$

天体密度的示意图：

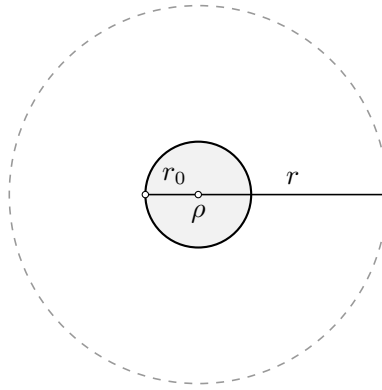


图 20: 天体密度测量的示意图

利用球的体积公式：

$$M = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_0^3 \cdot \rho \quad (1)$$

$$\rho = \frac{3}{4} \cdot \frac{M}{\pi} \cdot r_0^3 \quad (2)$$

$$\rho = \frac{3}{4} \cdot \frac{v^2 \cdot r}{G \cdot \pi} \cdot r_0^3 \quad \left(M = \frac{v^2 \cdot r}{G} \right) \quad (3)$$

$$\rho = \frac{3}{4} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r^3}{G \cdot \pi} \cdot r_0^3 \quad \left(M = \frac{\omega^2 \cdot r^3}{G} \right) \quad (4)$$

$$\rho = \frac{3 \cdot \pi}{G \cdot T^2} \cdot \frac{r^3}{r_0^3} \quad \left(M = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} \right) \quad (5)$$

故已知轨道半径和天体半径的情况下，只需要确定轨道周期就可以确定中心天体的质量。

3 能量守恒定律

3.1 功

功衡量了力在空间上的积累，是一个标量，通常用符号 W 表示，单位是J。

功的单位焦耳定义如下：

$$J = N \cdot m$$

$$J = kg \cdot m^2/s^2$$

功的计算公式（恒力做功）：

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$$

$$W = F \cdot s \cdot \cos \theta$$

功的计算公式（变力做功）：

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds \cdot \cos \theta$$

其中角 θ 代表力 \mathbf{F} 和位移 \mathbf{s} 间的夹角。

同时角 θ 的大小决定了功 W 的正负：

满足 $\theta < \frac{\pi}{2}$	功为正，表示力对物体做正功。
满足 $\theta > \frac{\pi}{2}$	功为负，表示力对物体做负功。

表 4: 角 θ 的大小和功的正负

此外，若力的方向和位移的方向垂直，则力不做功。

3.2 功率

功率衡量了力做功的快慢，是一个标量，通常用字母 P 表示，单位是W。

功率的单位瓦特的定义如下：

$$W = J/s$$

$$W = N \cdot m/s$$

$$W = kg \cdot m^2/s^3$$

功率是功关于时间的导数：

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (1)$$

$$= \frac{d}{dt} \cdot \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (2)$$

$$= \frac{d}{dt} \cdot \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \cdot dt \quad (3)$$

$$= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (4)$$

功率的计算公式：

$$P = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{v}$$

$$P = F \cdot dv \cdot \cos \theta$$

其中角 θ 代表力 \mathbf{F} 和速度 \mathbf{v} 间的夹角。

同时角 θ 的大小决定了功率 P 的正负：

满足 $\theta < \frac{\pi}{2}$	功率为正，表示在这一瞬间力对物体做正功。
满足 $\theta > \frac{\pi}{2}$	功率为负，表示在这一瞬间力对物体做负功。

表 5: 角 θ 的大小和功率的正负

此外，若力的方向和速度的方向垂直，则力的功率为零。

3.3 能

能衡量了物体做功本领的强弱，是一个标量，通常用符号 E 表示，单位是J。

能的单位焦耳定义如下：

$$J = N \cdot m$$

$$J = kg \cdot m^2/s^2$$

3.3.1 动能

动能指的是物体由于运动而具有的能力，通常用符号 E_k 表示。

动能定义为物体从速度为 0 时至速度为 v 时外力所作的功。

动能的计算公式：

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

由功的计算公式进行推导：

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (1)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \cdot dt \quad (2)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \cdot dt \quad (3)$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \cdot dt \quad (4)$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} m \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \quad (7)$$

根据动能定义，初速度应为 $v_1 = 0$ ，末速度应为 $v_2 = v$ ，代入即可得到动能的公式。

3.3.2 重力势能

重力势能指的是物体由于重力而具有的能量，通常用字母 E_p 表示。

重力势能定义为物体从高度为 h 处至高度为 0 处重力所做的功。

重力势能的计算公式：

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

由功的计算公式进行推导：

$$W = \int_{h_1}^{h_2} G \cdot dh \quad (1)$$

$$= \int_{h_1}^{h_2} -m \cdot g \cdot dh \quad (2)$$

$$= - \int_{h_1}^{h_2} m \cdot g \cdot dh \quad (3)$$

$$= -(m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1) \quad (4)$$

$$= m \cdot g \cdot h_1 - m \cdot g \cdot h_2 \quad (5)$$

根据重力势能定义，初高度应为 $h_1 = 0$ ，末高度应为 $h_2 = h$ ，代入即可得到重力势能的公式。

重力所做的功等于重力势能的负增量：

$$W = -(E_{p_2} - E_{p_1}) = \Delta E_p$$

我们用 E_{p_1} 表示高度为 h_1 时的重力势能。

我们用 E_{p_2} 表示高度为 h_2 时的重力势能。

将其代入可得：

$$W = m \cdot g \cdot h_1 - m \cdot g \cdot h_2 \quad (6)$$

$$= E_{p_1} - E_{p_2} \quad (7)$$

$$= -\Delta E_p \quad (8)$$

由此证明了重力所做的功等于重力势能的负增量。

3.3.3 弹性势能

弹性势能指的是物体由于弹力而具有的能量，通常用字母 E_p 表示。

弹性势能定义为物体从位移为 x 处至位移为 0 处弹力所做的功。

弹性势能的计算公式：

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

由功的计算公式进行推导：

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx \quad (1)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} -k \cdot x \cdot dx \quad (2)$$

$$= - \int_{x_1}^{x_2} k \cdot x \cdot dx \quad (3)$$

$$= -\left(\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2\right) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2 \quad (5)$$

根据弹性势能定义，初位移应为 $x_1 = 0$ ，末位移应为 $x_2 = x$ ，代入即可得到弹性势能的公式。

弹力所做的功等于弹性势能的负增量：

$$W = -(E_{p2} - E_{p1}) = \Delta E_p$$

我们用 E_{p1} 表示高度为 x_1 时的弹性势能。

我们用 E_{p2} 表示高度为 x_2 时的弹性势能。

将其代入可得：

$$W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2 \quad (6)$$

$$= E_{p1} - E_{p2} \quad (7)$$

$$= -\Delta E_p \quad (8)$$

由此证明了弹力所做的功等于弹性势能的负增量。

3.3.4 机械能

机械能指的是物体由于机械运动而具有的能量，通常用字母 E 表示。

机械能的计算公式：

$$E = E_k + E_p$$

机械能定义为物体动能和势能的总和。

3.3.5 动能定理

动能定理：外力对物体所做的功等于物体动能的增量。

动能定理的数学表达：

$$W = E_{k_2} - E_{k_1} = \Delta E_k$$

我们用 E_{k_1} 表示速度为 v_1 时的动能。

我们用 E_{k_2} 表示速度为 v_2 时的动能。

由此推导可得：

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (1)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \cdot dt \quad (2)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \cdot dt \quad (3)$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \cdot dt \quad (4)$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} m \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \quad (5)$$

$$= E_{k_2} - E_{k_1} \quad (6)$$

$$= \Delta E_k \quad (7)$$

由此证明了动能定理。

3.3.6 保守力和耗散力

根据力做功的特点可以将力分为：

1. 保守力：力所做的功和物体的运动路径无关。
2. 耗散力：力所做的功和物体的运动路径有关。

由重力做功的公式可知：

$$W = m \cdot g \cdot h_1 - m \cdot g \cdot h_2 \quad (1)$$

由弹力做功的公式可知：

$$W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2 \quad (2)$$

重力做功的多少只和初始高度和终末高度有关，与路径无关，重力是一种典型的保守力

弹力做功的多少只和初始位移和终末位移有关，与路径无关，弹力是一种典型的保守力。

由摩擦力做功的示意图可知：

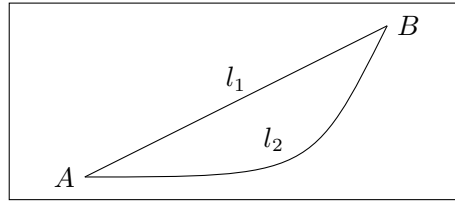


图 21: 摩擦力做功示意图

摩擦力沿 l_1 路径所做的功和摩擦力沿 l_2 路径所做的功是不同的。

摩擦力做功的多少与路径有关，摩擦力是一种典型的耗散力。

保守力做功的特点可以表示为：

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

耗散力做功的特点可以表示为：

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$$

即力沿任意闭合路径做功时，保守力所作功总是为零，耗散力所作功总是不为零。

3.3.7 系统的动能定理

系统的动能定理：系统的外力和内力做功的总和等于系统动能的增量。

系统的动能定理的数学表达：

$$W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = \Delta E_k$$

设一个系统中有两个质点，一个称为质点 1，一个称为质点 2。

质点 1 所受的外力记作 \mathbf{F}_1 ，质点 1 所受的内力记作 \mathbf{f}_1 。

质点 2 所受的外力记作 \mathbf{F}_2 ，质点 2 所受的内力记作 \mathbf{f}_2 。

对质点 1 使用动能定理：

$$\int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 + \int \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 = \Delta E_{k1} \quad (1)$$

对质点 2 使用动能定理：

$$\int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 + \int \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 = \Delta E_{k2} \quad (2)$$

由于系统的动能增量能表示为：

$$\Delta E_k = \Delta E_{k1} + \Delta E_{k2} \quad (3)$$

由于外力所做的功可以表示为：

$$W_{\text{外}} = \int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 + \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 \quad (4)$$

由于内力所做的功可以表示为：

$$W_{\text{内}} = \int \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 + \int \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 \quad (5)$$

故将两式相加并代入可以得到 $W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = \Delta E_k$ 。

由此证明了系统的动能定理。

3.3.8 系统的功能原理

系统的功能原理：系统的外力和耗散内力做功的总和等于系统机械能的增量。

系统的功能原理的数学表达：

$$W_{\text{外}} + W_{\text{内耗}} = \Delta E$$

系统中外力所作的功记作 $W_{\text{外}}$ 。

系统中内力所作的功记作 $W_{\text{内}}$ 。

系统内力做的功中，由耗散内力完成的功记作 $W_{\text{内耗}}$ 。

系统内力做的功中，由保守内力完成的功记作 $W_{\text{内保}}$ 。

由系统的动能定理可知：

$$\Delta E_k = W_{\text{外}} + W_{\text{内}} \quad (1)$$

$$\Delta E_k = W_{\text{外}} + W_{\text{内耗}} + W_{\text{内保}} \quad (2)$$

$$\Delta E_k = W_{\text{外}} + W_{\text{内耗}} - \Delta E_p \quad (3)$$

$$\Delta W_{\text{外}} + W_{\text{内耗}} = \Delta E_k + \Delta E_p \quad (4)$$

$$\Delta W_{\text{外}} + W_{\text{内耗}} = \Delta E \quad (5)$$

其中第二步运用了保守了做功的规律 $W = -\Delta E_p$ 。

由此证明了系统的功能原理。

3.3.9 机械能守恒定律

机械能守恒定律：当一个系统内只有保守力做功时，动能和势能可以互相转化，机械能保持不变。

机械能守恒定律的数学表达：

$$\Delta E = 0 \quad (W_{\text{外}} = W_{\text{内耗}} = 0)$$

机械能守恒定律可以由系统的功能原理直接得到。

4 动量守恒定律

4.1 冲量

冲量衡量了力在时间上的积累，是一个矢量，通常用符号 I 表示，单位是 $\text{N} \cdot \text{s}$ 。

冲量的计算公式（恒力的冲量）：

$$I = F \cdot t$$

冲量的计算公式（变力的冲量）：

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F \cdot dt$$

4.2 动量

动量衡量了物体运动上的强弱，是一个矢量，通常用符号 P 表示，单位是 $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ 。

动量的计算公式：

$$P = m \cdot v$$

4.2.1 牛顿第二定律的动量形式

牛顿第二定律的动量形式：力是动量的变化率，力的方向和动量的方向相同。

牛顿第二定律的动量形式的数学表达：

$$F = \frac{dP}{dt}$$

牛顿第二定律的动量形式的推导：

$$F = m \cdot a \tag{1}$$

$$= m \cdot \frac{dv}{dt} \tag{2}$$

$$= \frac{d}{dt} \cdot (m \cdot v) \tag{3}$$

$$= \frac{d}{dt} \cdot P \tag{4}$$

由此可见，力即是质量和加速度的乘积，力也是动量关于时间的导数。

4.2.2 动量和冲量的单位

动量和冲量的单位是等价的：

$$\text{N} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

这是因为力的单位 $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ ，将其代入左式即可得到这个结论。

4.2.3 动量定理

动量定理：物体所受外力的冲量等于物体动量的增量。

动量定理的数学表达：

$$I = P_2 - P_1 = \Delta P$$

我们用 P_1 表示时间为 t_1 时的动量。

我们用 P_2 表示时间为 t_2 时的动量。

由此推导可得：

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{t} \quad (1)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \cdot \mathbf{a} \cdot d\mathbf{t} \quad (2)$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{t} \quad (3)$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} m \cdot d\mathbf{v} \quad (4)$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} d\mathbf{P} \quad (5)$$

$$= P_2 - P_1 \quad (6)$$

$$= \Delta P \quad (7)$$

由此证明了动量定理。

4.2.4 系统的动量定理

系统的动量定理：系统所受外力的冲量等于系统动量的增量。

系统的动量定理的数学表达：

$$I_{\text{外}} = \Delta P$$

设一个系统中有两个质点，一个称为质点 1，一个称为质点 2。

质点 1 所受的外力记作 \mathbf{F}_1 ，质点 1 所受的内力记作 \mathbf{f}_1 。

质点 2 所受的外力记作 \mathbf{F}_2 ，质点 2 所受的内力记作 \mathbf{f}_2 。

对质点 1 使用动量定理：

$$\int \mathbf{F}_1 \cdot dt + \int \mathbf{f}_1 \cdot dt = \Delta \mathbf{P}_1 \quad (1)$$

对质点 2 使用动量定理：

$$\int \mathbf{F}_2 \cdot dt + \int \mathbf{f}_2 \cdot dt = \Delta \mathbf{P}_2 \quad (2)$$

由于系统的动量增量可以表示为：

$$\Delta \mathbf{P} = \Delta \mathbf{P}_1 + \Delta \mathbf{P}_2 \quad (3)$$

由于外力产生的冲量可以表示为：

$$\mathbf{I}_{\text{外}} = \int (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \cdot dt \quad (4)$$

由于内力产生的冲量可以表示为：

$$\mathbf{I}_{\text{内}} = \int (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) \cdot dt \quad (5)$$

然而根据牛顿第三定律可以发现：

$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_{\text{内}} = 0 \quad (6)$$

故将两式相加并代入可以得到 $\mathbf{I}_{\text{外}} = \Delta \mathbf{P}$ 。

由此证明了系统的动量定理。

4.2.5 系统的动量守恒定律

系统的动量守恒定律：系统受到的外力为零时，系统的动量保持不变。

系统的动量守恒定律的数学表达：

$$\Delta P = 0 \quad (F_{\text{外}} = 0)$$

由于此时系统受到的外力为零：

$$F_{\text{外}} = 0 \quad (1)$$

所以系统所受外力的冲量为零：

$$I_{\text{外}} = 0 \quad (2)$$

根据动量定义可知 $\Delta P = I_{\text{外}} = 0$ 。

由此证明了系统的动量守恒定律。

5 刚体的转动

刚体是一种理想模型，当力作用于刚体，只会发生运动状态的改变，不会发生形变。

例如研究橡皮在桌面上的运动时，可以将橡皮视为刚体。

例如研究橡皮受挤压时的形变时，不能将橡皮视为刚体。

5.1 刚体的平动和转动

刚体最基本的运动可以分为两类：

1. 刚体的平动，指的是运动时刚体内任一直线的方向都保持不变。
2. 刚体的转动，指的是运动时刚体内任一质点都绕同一直线转动。

下图展示了刚体的平动 (\overrightarrow{AB} 方向不变)：

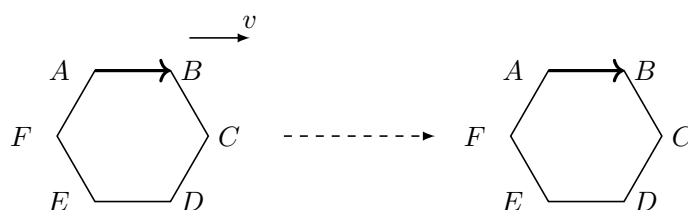


图 22: 刚体的平动

下图展示了刚体的转动 (\overrightarrow{AB} 方向改变)：

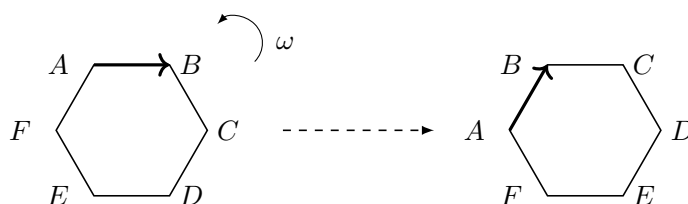


图 23: 刚体的转动

刚体的转动中所绕的直线称为转轴，若转轴位置保持不变，则称为定轴转动。

刚体的一般运动可以视为平动和转动的叠加。

5.2 力矩

力矩衡量了力对刚体的转动作用，是一个矢量，通常用符号 M 表示，单位是 $\text{N} \cdot \text{m}$ 。

力矩可以用转轴到力的作用线的距离 d 表示：

$$M = F \cdot d$$

力矩可以用转轴到力的作用点的距离 r 表示：

$$M = F \cdot r \cdot \sin \varphi$$

力矩的示意图如下：

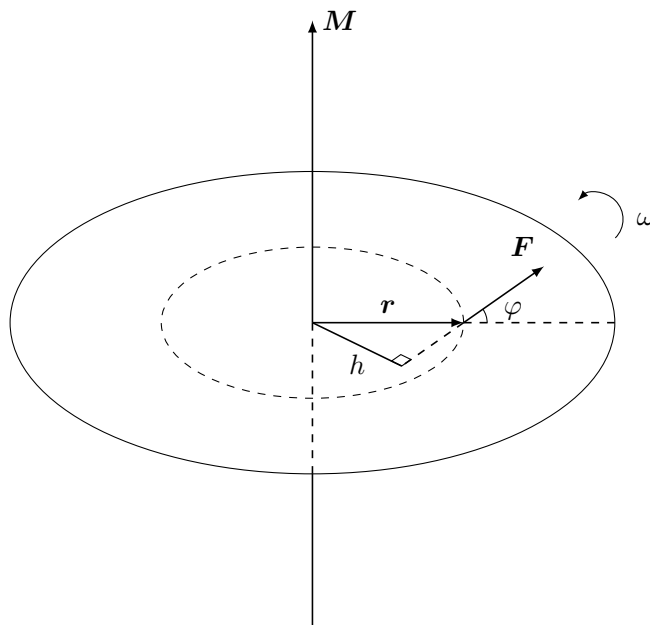


图 24: 力矩的示意图

其中转轴到力的作用线的距离 d 称为力臂。

力矩是矢量，其方向为右手四指沿位矢 r 的方向至力 F 的方向螺旋时右手拇指指向的方向。

力矩的计算公式：

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

力矩在定轴转动中，方向总是沿着转轴方向。

5.2.1 转动定律

转动定律：当力矩作用于刚体时，刚体所得到的角加速度的大小，与刚体所受的合力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比，刚体角加速度的方向与刚体所受的合力矩方向相同。

转动定律的数学表达：

$$M = J \cdot \alpha$$

考虑刚体中的一个质点 P_i ：

1. 质点 P_i 所受合外力在转动平面内的分量为 F_i ，其与位矢所成角度为 φ_i 。
2. 质点 P_i 所受合内力在转动平面内的分量为 f_i ，其与位矢所成角度为 β_i 。

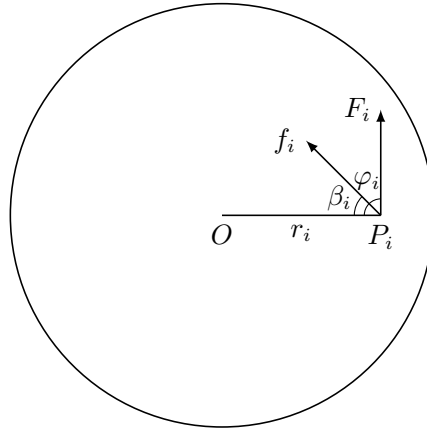


图 25: 质点 P_i 的受力示意图

将力分解为法向分量：

$$F_i \cdot \cos \varphi_i + f_i \cdot \cos \beta_i = m_i \cdot a_{ni} = m_i \cdot r_i \cdot \omega^2 \quad (1)$$

将力分解为切向分量：

$$F_i \cdot \sin \varphi_i + f_i \cdot \sin \beta_i = m_i \cdot a_{ti} = m_i \cdot r_i \cdot \alpha \quad (2)$$

对于法向分量，其通过转轴，力矩为零不予考虑。

对于切向分量，将两边同乘 r_i 可得：

$$F_i \cdot r_i \cdot \sin \varphi_i + f_i \cdot r_i \cdot \sin \beta_i = m_i \cdot r_i^2 \cdot \alpha \quad (3)$$

考虑所有质点则有：

$$\sum F_i \cdot r_i \cdot \sin \varphi_i + \sum f_i \cdot r_i \cdot \sin \beta_i = \left(\sum m_i \cdot r_i^2 \right) \cdot \alpha \quad (4)$$

其中第一项表示合外力的力矩：

$$\sum F_i \cdot r_i \cdot \sin \varphi_i \quad (5)$$

其中第二项表示合内力的力矩：

$$\sum f_i \cdot r_i \cdot \sin \beta_i \quad (6)$$

根据牛顿第三定律，合内力中的作用力和反作用力相互抵消，故内力的合力矩为零。

因此可以得到：

$$\sum F_i \cdot r_i \cdot \sin \varphi_i = \left(\sum m_i \cdot r_i^2 \right) \cdot \alpha \quad (7)$$

定义力矩 M 为：

$$M = \sum F_i \cdot r_i \cdot \sin \varphi_i \quad (8)$$

定义转动惯量 J 为：

$$J = \sum m_i \cdot r_i^2 \quad (9)$$

将其代入可得：

$$M = J \cdot \alpha \quad (10)$$

由此证明了转动定律。

5.2.2 转动惯量

转动惯量衡量了刚体保持原有转动状态的惯性, 是一个标量, 通常用符号 J 表示, 单位是 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。

转动惯量的计算公式 (质量离散分布):

$$J = \sum m_i \cdot r_i^2$$

转动惯量的计算公式 (质量连续分布):

$$J = \int r^2 \cdot \mathrm{d}m$$

5.2.3 细棒的转动惯量

细棒的转动惯量 (转轴过中心且垂直):

$$J = \frac{1}{12} \cdot m \cdot L^2$$

细棒的转动惯量 (转轴过一端且垂直):

$$J = \frac{1}{3} \cdot m \cdot L^2$$

细棒的示意图如下:

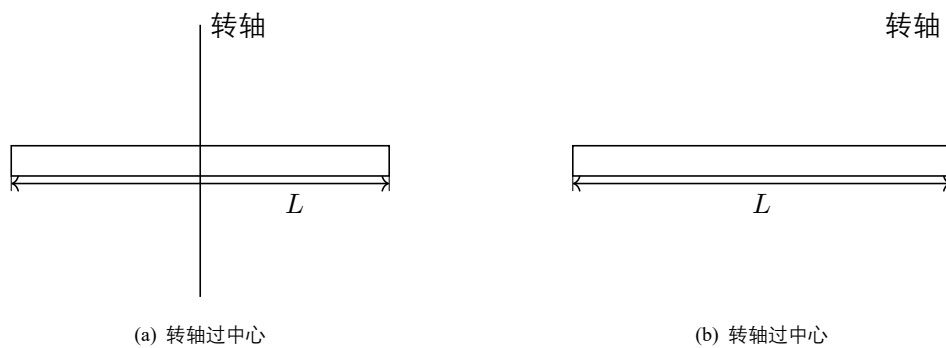


图 26: 细棒的示意图

上述公式中, 符号 m 表示棒的质量, 符号 L 表示棒的长度。

在距转轴 x 处取长度元 dx ，其质量为 dm ，设棒质量的线密度为 λ 。

显然有以下关系式：

$$dm = \lambda \cdot dx \quad (1)$$

线密度可以表示为：

$$\lambda = \frac{m}{L} \quad (2)$$

当转轴过中心时有：

$$J = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 \cdot dm \quad (3)$$

$$= \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 \cdot \lambda \cdot dx \quad (4)$$

$$= \lambda \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 \cdot dx \quad (5)$$

$$= \lambda \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot x^3 \right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \quad (6)$$

$$= \lambda \cdot \frac{L^3}{12} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \lambda \cdot L^3 \quad (8)$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{m}{L} \cdot L^3 \quad (9)$$

$$= \frac{1}{12} \cdot m \cdot L^2 \quad (10)$$

由此证明了转轴过中心时的转动惯量。

在距转轴 x 处取长度元 dx ，其质量为 dm ，设棒质量的线密度为 λ 。

显然有以下关系式：

$$dm = \lambda \cdot dx \quad (1)$$

线密度可以表示为：

$$\lambda = \frac{m}{L} \quad (2)$$

当转轴过一端时有：

$$J = \int_0^L x^2 \cdot dm \quad (3)$$

$$= \int_0^L x^2 \cdot \lambda \cdot dx \quad (4)$$

$$= \lambda \cdot \int_0^L x^2 \cdot dx \quad (5)$$

$$= \lambda \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot x^3 \right]_0^L \quad (6)$$

$$= \lambda \cdot \frac{L^3}{3} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \lambda \cdot L^3 \quad (8)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{L} \cdot L^3 \quad (9)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot m \cdot L^3 \quad (10)$$

由此证明了转轴过一端时的转动惯量。

5.2.4 圆盘的转动惯量

圆盘的转动惯量：

$$J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$$

圆盘的示意图如下：

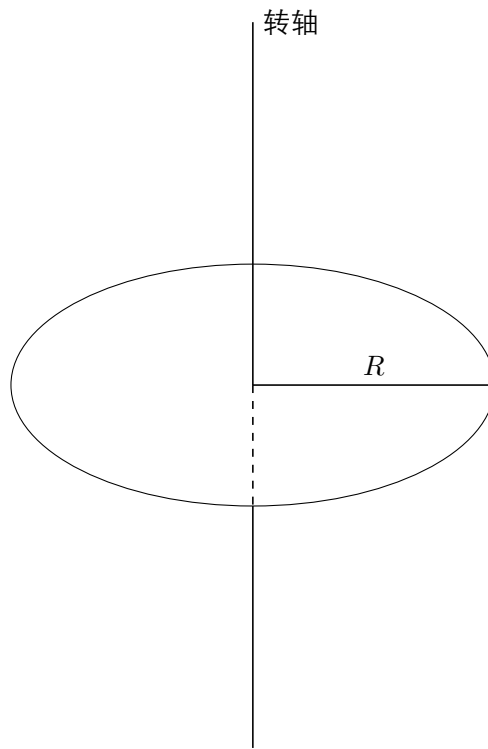


图 27: 圆盘的示意图

上述公式中，符号 m 表示圆盘的质量，符号 L 表示圆盘的半径。

在距离转轴 r 处取一薄圆环，其宽度为 dr ，其质量为 dm ，设圆盘的面密度为 σ 。

显然有以下关系式：

$$dm = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sigma \cdot dr \quad (1)$$

面密度可以表示为：

$$\sigma = \frac{m}{\pi \cdot R^2} \quad (2)$$

推导圆盘的转动惯量：

$$J = \int_0^R r^2 \cdot dm \quad (3)$$

$$= \int_0^R r^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sigma \cdot dr \quad (4)$$

$$= \int_0^R 2 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \sigma \cdot dr \quad (5)$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \int_0^R r^3 \cdot dr \quad (6)$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot r^4 \right]_0^R \quad (7)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \sigma \cdot R^4 \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^4 \cdot \frac{m}{\pi \cdot R^2} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \quad (10)$$

由此证明了圆盘的转动惯量。

5.2.5 圆环的转动惯量

圆环的转动惯量：

$$J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot [R_1^2 + R_2^2]$$

圆环的示意图如下：

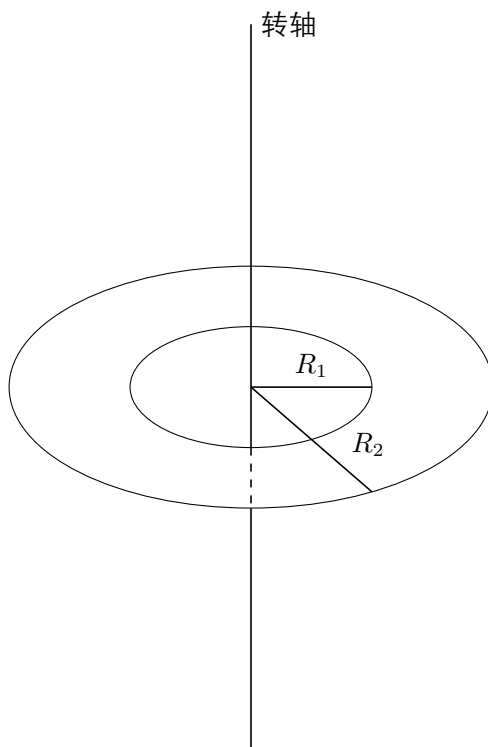


图 28: 圆盘的示意图

上述公式中，符号 m 表示圆盘的质量，符号 L 表示圆盘的半径。

在距离转轴 r 处取一薄圆环，其宽度为 dr ，其质量为 dm ，设圆盘的面密度为 σ 。

显然有以下关系式：

$$dm = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sigma \cdot dr \quad (1)$$

面密度可以表示为：

$$\sigma = \frac{m}{\pi \cdot [R_2^2 - R_1^2]} \quad (2)$$

推导圆环的转动惯量：

$$J = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot dm \quad (3)$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sigma \cdot dr \quad (4)$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} 2 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \sigma \cdot dr \quad (5)$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^3 \cdot dr \quad (6)$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot r^4 \right]_{R_1}^{R_2} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \sigma \cdot [R_2^4 - R_1^4] \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \sigma \cdot [R_2^2 + R_1^2] \cdot [R_2^2 - R_1^2] \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{m}{\pi \cdot [R_2^2 - R_1^2]} \cdot [R_2^2 - R_1^2] \cdot [R_2^2 + R_1^2] \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot [R_1^2 + R_2^2] \quad (11)$$

由此证明了圆环的转动惯量。

5.3 力矩的功

力矩的功衡量了力矩在空间上的积累，是一个标量，通常用符号 W 表示，单位是J。

力矩的功的计算公式（恒力矩做功）：

$$W = M \cdot \theta$$

力矩的功的计算公式（变力矩做功）：

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot d\theta$$

力矩的功率衡量了力矩做功的快慢，是一个标量，通常用符号 P 表示，单位是W。

力矩的功率的计算公式：

$$P = M \cdot \omega$$

力矩的功和功率的示意图如下：

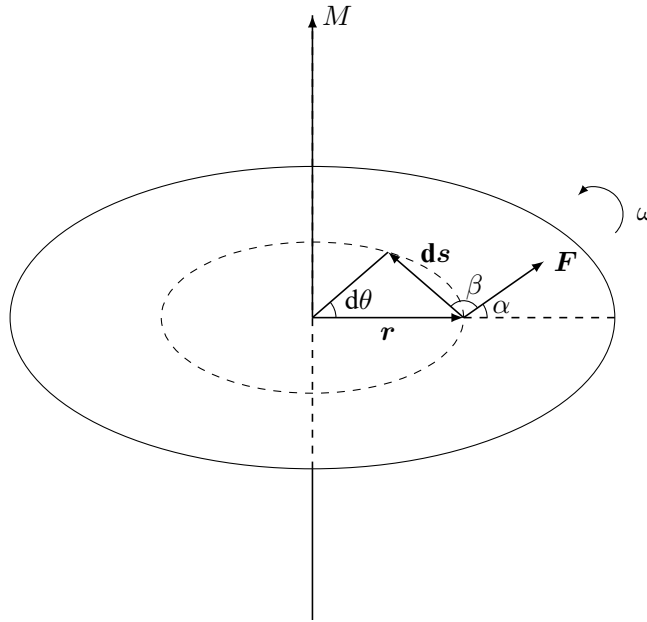


图 29: 力矩的功和功率的示意图

其中角 α 为力 F 和位矢 r 的夹角。

其中角 β 为力 F 和位矢 r 的夹角。

由于 $d\theta$ 很小，所以实际上 $\alpha + \beta = 90^\circ$ 。

由于力 \boldsymbol{F} 在位移 $\mathrm{d}s$ 中所作的功为：

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot \cos \beta \quad (1)$$

$$= \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot \sin \alpha \quad (2)$$

$$= \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\theta \cdot \sin \alpha \quad (3)$$

$$= \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} \cdot \sin \alpha \cdot \mathrm{d}\theta \quad (4)$$

$$= \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\theta \quad (5)$$

因为力矩 \boldsymbol{M} 在角位移由 θ_1 至 θ_2 中所做的功为：

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{d}W \quad (6)$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\theta \quad (7)$$

因为力矩 \boldsymbol{M} 的功率 P 为功 W 对时间 t 的导数：

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \quad (8)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot \int \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\theta \quad (9)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot \int \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}t \quad (10)$$

$$= \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (11)$$

由此证明了力矩的功和功率的计算公式。

5.4 转动动能

转动动能衡量了刚体由于转动而具有的能量，是一个标量，通常用符号 E_k 表示，单位是J。

转动动能定义为刚体从角速度为 0 时至角速度为 ω 时，外力矩所做的功。

转动动能的计算公式：

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

由变力矩做功的计算公式机进行推导：

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot d\theta \quad (1)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} M \cdot \omega \cdot dt \quad (2)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} J \cdot \alpha \cdot \omega \cdot dt \quad (3)$$

$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \omega \cdot dt \quad (4)$$

$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \cdot \omega \cdot d\omega \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_2^2 - \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_1^2 \quad (6)$$

根据转动动能定义，初角速度为 $\omega_1 = 0$ ，末角速度为 $\omega_2 = \omega$ ，代入即可得到转动动能的公式。

5.4.1 转动的动能定理

转动的动能定理：外力矩对刚体所做的功等于刚体转动动能的增量。

转动的动能定理的数学表达：

$$W = E_{k_2} - E_{k_1} = \Delta E_k$$

我们用 E_{k_1} 表示角速度为 ω_1 时的转动动能。

我们用 E_{k_2} 表示角速度为 ω_2 时的转动动能。

由此推导可得：

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot d\theta \quad (1)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} M \cdot \omega \cdot dt \quad (2)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} J \cdot \alpha \cdot \omega \cdot dt \quad (3)$$

$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \omega \cdot dt \quad (4)$$

$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \cdot \omega \cdot d\omega \quad (5)$$

$$= E_{k_2} - E_{k_1} \quad (6)$$

$$= \Delta E_k \quad (7)$$

由此证明了转动的动能定理。

6 角动量守恒定律

6.1 角冲量

角冲量衡量了力矩在时间上的积累，是一个矢量，通常用符号 \boldsymbol{H} 表示，单位是 $\text{N} \cdot \text{s}^2$ 。

角冲量的计算公式（恒力矩的冲量）：

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{M} \cdot t$$

角冲量的计算公式（变力矩的冲量）：

$$\boldsymbol{H} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M} \cdot dt$$

6.2 角动量

角动量衡量了物体在转动上的强弱，是一个矢量，通常用符号 \boldsymbol{L} 表示，单位是 $\text{kg} \cdot \text{m}$ 。

角动量的计算公式：

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \cdot m$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

角动量大小的计算公式：

$$L = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \theta$$

$$L = r \cdot p \cdot \sin \theta$$

其中 θ 可以是位矢 \boldsymbol{r} 与速度 \boldsymbol{v} 所成的角。

其中 θ 可以是位矢 \boldsymbol{r} 与动量 \boldsymbol{p} 所成的角。

其中 \boldsymbol{r} 是质点相较于某一参考点的位矢，该参考点可以根据情况任意选择。

因此讨论质点的角动量时，必须指明是对于哪一参考点的角动量。

6.2.1 角动量和角冲量的单位

角动量和角冲量的单位是等价的：

$$\text{N} \cdot \text{s}^2 = \text{kg} \cdot \text{m}$$

这是因为力的单位 $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ ，将其代入左式即可得到这个结论。

6.2.2 角动量定理

角动量定理：物体所受合力矩的角冲量等于物体角动量的增量。

角动量定理的数学表达：

$$H = L_2 - L_1 = \Delta L$$

我们用 L_1 表示时间为 t_1 时的角动量。

我们用 L_2 表示时间为 t_2 时的角动量。

由此推导可得：

$$H = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{t} \quad (1)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{t} \quad (2)$$

$$= \mathbf{r} \times \int_{t_1}^{t_2} m \cdot \mathbf{a} \cdot d\mathbf{t} \quad (3)$$

$$= \mathbf{r} \times \int_{t_1}^{t_2} m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{t} \quad (4)$$

$$= \mathbf{r} \times \int_{t_1}^{t_2} m \cdot d\mathbf{v} \quad (5)$$

$$= \mathbf{r} \times \int_{p_1}^{p_2} m \cdot d\mathbf{p} \quad (6)$$

$$= \mathbf{r} \times (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \quad (7)$$

$$= L_2 - L_1 \quad (8)$$

$$= \Delta L \quad (9)$$

由此证明了角动量定理。

6.2.3 角动量守恒定律

角动量守恒定律：物体所受力矩为零时，物体的角动量保持不变。

角动量守恒定律的数学表达：

$$\Delta L = 0 \quad (M = 0)$$

由于此时物体受到的力矩为零：

$$M = 0$$

故物体所受力矩的角冲量为零：

$$H = 0$$

根据角动量定理可知 $\Delta L = H = 0$ 。

由此证明了角动量守恒定律。

质点的角动量守恒有两种情况：

1. 质点所受力 $F = 0$ ，致使力矩 $M = 0$ 。
2. 质点所受力 $F \neq 0$ ，但力 F 指向参考点，致使力矩 $M = 0$ 。

因此如果作用于质点的力是有心力，那么该质点以力心作为参考点的角动量守恒。

例如行星绕太阳以椭圆轨道运行时，以及彗星绕太阳以双曲线轨道运行时，引力始终指向太阳，故引力是一个有心力，且引力的力心是太阳，因此以太阳为参考点时行星和彗星的角动量守恒。

6.3 刚体定轴转动的角动量

刚体定轴转动的角动量：

$$\mathbf{L} = J \cdot \boldsymbol{\omega}$$

考虑一个定轴转动的刚体，以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动。

刚体上一质点对轴的角动量为：

$$L_i = r_i \cdot m_i \cdot v \quad (1)$$

$$L_i = r_i^2 \cdot m_i \cdot \omega \quad (2)$$

刚体整体对轴的角动量为：

$$L = \sum r_i^2 \cdot m_i \cdot \omega \quad (3)$$

$$L = \sum (r_i^2 \cdot m_i) \cdot \omega \quad (4)$$

$$L = \sum (m_i \cdot r_i^2) \cdot \omega \quad (5)$$

$$L = J \cdot \omega \quad (6)$$

6.3.1 转动定律的角动量形式

转动定律的角动量形式：力矩是角动量的变化率，力矩的方向和角动量的方向相同。

转动定律的角动量形式的数学表达：

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

转动定律的角动量形式的推导：

$$\mathbf{M} = J \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (7)$$

$$= J \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad (8)$$

$$= \frac{d}{dt} \cdot (J \cdot \boldsymbol{\omega}) \quad (9)$$

$$= \frac{d}{dt} \cdot \mathbf{L} \quad (10)$$

由此可见，力矩即是转动惯量和角加速度的乘积，力矩也是角动量关于时间的导数。

6.3.2 刚体定轴转动的角动量定理

刚体定轴转动的角动量定理：刚体所受合外力矩的角冲量等于刚体角动量的增量。

刚体定轴转动的角动量定理的数学表达：

$$H_{\text{外}} = \Delta L$$

我们用 L_1 表示时间为 t_1 时的角动量。

我们用 L_2 表示时间为 t_2 时的角动量。

由此推导可得：

$$H = \int_{t_1}^{t_2} M \cdot dt \quad (1)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} J \cdot \alpha \cdot dt \quad (2)$$

$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot dt \quad (3)$$

$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \cdot d\omega \quad (4)$$

$$= \int_{L_1}^{L_2} dL \quad (5)$$

$$= L_2 - L_1 \quad (6)$$

$$= \Delta L \quad (7)$$

由此证明了刚体定轴转动的角动量定理。

6.3.3 刚体定轴转动的角动量守恒定律

刚体定轴转动的角动量守恒定律：刚体所受外力矩为零时，刚体的角动量保持不变。

刚体定轴转动的角动量守恒定律的数学表达：

$$\Delta L = 0 \quad (M_{\text{外}} = 0)$$

由于此时刚体受到的外力矩为零：

$$M_{\text{外}} = 0$$

因此刚体所受力矩的角冲量为零：

$$H_{\text{外}} = 0$$

根据角动量定理可知 $\Delta L = H_{\text{外}} = 0$ 。

由此证明了刚体定轴转动的角动量守恒定律。

第二部分 热

7 气体动理论

7.1 气体的状态参量

气体的状态参量用于在研究大量气体分子热运动时气体的状态。

气体的状态参量包含：

体积	V	L
压强	P	Pa
温度	T	K

表 6: 气体的状态参量

7.1.1 体积

体积描述了气体分子在容器中可能达到的空间的度量，通常用符号 V 表示，单位是L。

体积的单位除了升（L），还有立方厘米（ cm^3 ）、立方分米（ dm^3 ）、立方米（ m^3 ）。

体积的单位换算关系如下：

$$1\text{m}^3 = 1 \times 10^3\text{dm}^3 = 1 \times 10^6\text{cm}^3 \qquad 1\text{L} = 1\text{dm}^3$$

7.1.2 压强

压强描述了气体分子对容器器壁单位面积上力的大小，通常用符号 P 表示，单位是Pa。

压强的单位除了帕斯卡（Pa），还有标准大气压（atm）、厘米汞柱（cmHg）、毫米汞柱（mmHg）。

压强的单位换算关系如下：

$$1\text{atm} = 76\text{cmHg} = 760\text{mmHg} = 1.013 \times 10^5\text{Pa} \qquad 1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$$

7.1.3 温度

温度描述了气体宏观上表现出来的冷热程度，通常用符号 T 表示，单位是K。

温度的单位既可以用热力学温标开尔文（K），温度的单位也可以用摄氏温标摄氏度（ $^{\circ}\text{C}$ ）。

温度的单位换算关系如下：

$$0^{\circ}\text{C} = 273.15\text{K}$$

温度的下限是热力学温度 0K。

7.1.4 平衡状态和平衡过程

平衡状态：将一定的气体封闭在容器中，若气体与外界无能量交换，且气体内部没有能量转化，经过一段时间后，气体的宏观性质将长期保持不变，那么气体的这种状态称为平衡状态。

平衡状态可以用一组值表示，如 (P_1, V_1, T_1) 表示一个状态，如 (P_2, V_2, T_2) 表示另一个状态。

平衡状态可以用压强体积图像即 $P - V$ 图表示：

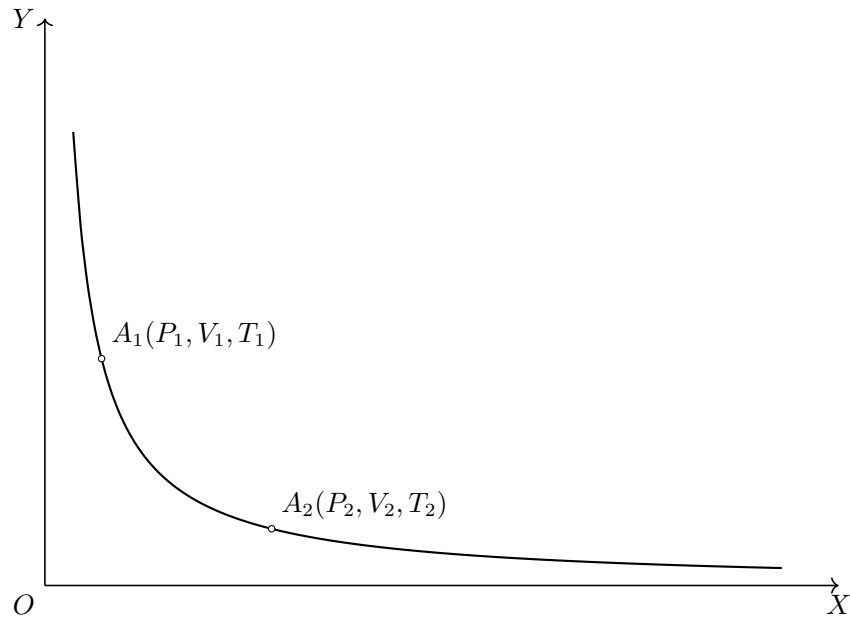


图 30: 气体的平衡状态和平衡过程

平衡过程：如果气体的状态发生改变时，改变的过程十分缓慢，改成过程中的每一个中间状态都有充分是时间达到平衡状态，那么气体这样的变化过程就称为平衡过程。

平衡过程的关键是缓慢，平衡过程的变化速度应当远低于气体重新达到平衡的速度。

例如缓慢地挤压活塞，可以视作平衡过程。

例如内燃机中的活塞，不能视作平衡过程。

平衡过程是一种理想过程，但是通常可以将许多实际过程近似为平衡过程。

平衡过程可以用上方压强体积图像中的连续曲线表示。

7.1.5 气体的等温变化

气体的等温变化：当气体的温度一定时，气体的压强和体积成反比。

气体的等温变化的第一种数学表达：

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$$

气体的等温变化的第二种数学表达：

$$P \cdot V = C$$

气体的等温变化也可以表述为，气体的压强和体积的乘积是一定值。

气体的等温变化规律也称为玻意耳定律。

7.1.6 气体的等体变化

气体的等体变化：当气体的体积一定时，气体的温度和压强成正比。

气体的等体变化的第一种数学表达：

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

气体的等体变化的第二种数学表达：

$$\frac{P}{T} = C$$

气体的等体变化也可以表述为，气体的压强和温度的比值是一定值。

气体的等体变化规律也称为查理定律。

7.1.7 气体的等压变化

气体的等压变化：当气体的压强一定时，气体的温度和体积成正比。

气体的等压变化的第一种数学表达：

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

气体的等压变化的第二种数学表达：

$$\frac{V}{T} = C$$

气体的等温变化也可以表述为，气体的体积和温度的比值是一定值。

气体的等压变化规律也称为盖吕萨克定律。

7.1.8 克拉伯龙方程

克拉伯龙方程描述了气体处于平衡态时气体三个状态参量之间的关系。

克拉伯龙方程的数学表达：

$$\frac{P \cdot V}{T} = \frac{m}{M} \cdot R$$

其中符号 R 表示普适气体常量，其取值为 $R = 8.31 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$ 。

此外符号 m 表示气体质量，同时符号 M 表示气体摩尔质量。

假设一个平衡过程分为三步：

$$(P_1, V_1, T_1) \xrightarrow{\text{等温}} (P_2, V_2, T_1) \xrightarrow{\text{等容}} (P_3, V_2, T_2) \xrightarrow{\text{等压}} (P_3, V_3, T_3)$$

根据等温变化的规律：

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2 \quad (1)$$

根据等容变化的规律：

$$\frac{P_2}{T_1} = \frac{P_3}{T_2} \Rightarrow P_2 = T_1 \cdot \frac{P_3}{T_2} \quad (2)$$

根据等压变化的规律：

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \Rightarrow V_2 = T_2 \cdot \frac{V_3}{T_3} \quad (3)$$

分别代入可得：

$$P_1 \cdot V_1 = T_1 \cdot T_2 \cdot \frac{P_3}{T_2} \cdot \frac{V_3}{T_3} \quad (4)$$

$$P_1 \cdot V_1 = T_1 \cdot \frac{P_3 \cdot V_3}{T_3} \quad (5)$$

$$\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_3 \cdot V_3}{T_3} \quad (6)$$

由此可以得到：

$$\frac{P \cdot V}{T} = C \quad (7)$$

即压强和体积的乘积与温度的比值为一定值。

代入标准状态下气体的摩尔体积:

$$\frac{P \cdot V}{T} = n \cdot \frac{P \cdot V_m}{T} \quad (8)$$

$$\frac{P \cdot V}{T} = \frac{m}{M} \cdot \frac{P \cdot V_m}{T} \quad (9)$$

$$\frac{P \cdot V}{T} = \frac{m}{M} \cdot \frac{1.013 \times 10^5 \text{Pa} \cdot 22.4 \text{L/mol}}{273.15 \text{K}} \quad (10)$$

$$\frac{P \cdot V}{T} = \frac{m}{M} \cdot 8.31 \text{J/(K} \cdot \text{mol)} \quad (11)$$

$$\frac{P \cdot V}{T} = \frac{m}{M} \cdot R \quad (12)$$

由此证明了克拉伯龙方程。

7.2 分子动理论

分子动理论是从微观结构出发阐明热现象规律的一种理论。

分子动理论包含以下三条假设：

1. 一切物质是由大量微观粒子分子组成。
2. 分子都在永不停息地作无规则热运动。
3. 分子间有相互作用力。

布朗在 1827 年使用显微镜观察到悬浮在水中的花粉不停地作无定向运动，即所谓布朗运动。

布朗运动是由于无规则运动的流体分子撞击划分颗粒导致的。

布朗运动虽然不受流体分子本身的热运动，却如实的反映了流体分子热运动的状况。

分子间作用力和分子距离的关系如下：

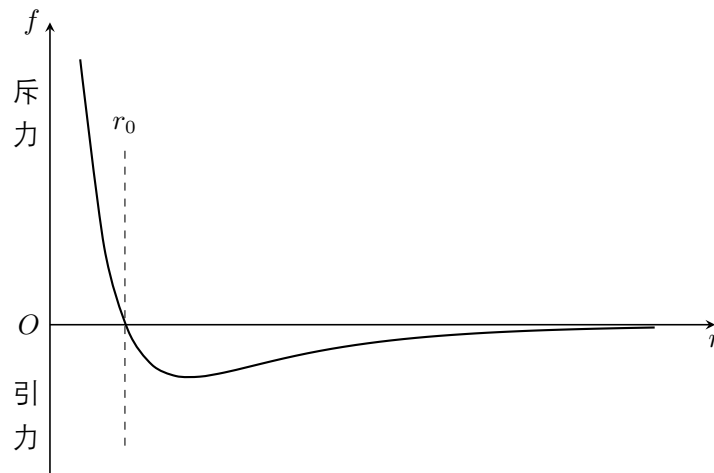


图 31: 分子间作用力和距离的关系

分子间作用力可以分为：分子引力，分子斥力。

分子间作用力是分子引力和分子斥力的合力，两者均随距离增大而减小。

当分子间距离 $r < r_0$ 时，此时合力表现为斥力，分子间距离减小，分子间斥力急剧增大。

当分子间距离 $r > r_0$ 时，此时合力表现为引力，分子间距离增大，分子间引力先增大后减小。

当分子间距离 $r = r_0$ 时，此时合力为零，分子引力和分子斥力平衡，这一距离称为平衡距离。

此外当分子间距离远大于平衡距离即 $r > 10 \cdot r_0$ 时，分子间作用力可以忽略不计。

7.3 理想气体的概念

理想气体指的是无条件服从克拉伯龙方程的气体。

理想气体是一种理想模型，并不真实存在。

1. 真实气体需要在压强不太大（相对大气压）时才满足克拉伯龙方程。
2. 真实气体需要在温度不太高（相对于室温）时才满足克拉伯龙方程。

理想气体的概念正是由此抽象而来。

7.3.1 理想气体的微观模型

理想气体的微观模型包含五条假设：

1. 气体分子间的距离远大于气体分子的大小。
2. 气体分子间的相互作用力可以忽略。
3. 气体分子在运动时遵循牛顿运动定律。
4. 气体分子在撞击时遵守能量守恒定律。
5. 气体分子在撞击时遵守动量守恒定律。

7.3.2 理想气体的统计假设

理想气体处于平衡态时，由于分子运动的杂乱性，没有一个方向比另一个方向的运动更占优势。

理想气体分子速度每一分量的平方，对全体分子的平均值相等： $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$ 。

由于速度的大小可以表示为：

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (1)$$

对等式的两侧取平均值可得：

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \quad (2)$$

将其代入即可得到：

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \cdot \overline{v^2}$$

这就是理想气体的统计假设。

7.4 理想气体的压强

理想气体的压强的计算公式（用平均分子速度表示）：

$$P = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m \cdot \overline{v^2}$$

理想气体的压强的计算公式（用平均平动动能表示）：

$$P = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \overline{\varepsilon_{ks}}$$

其中 n 是分子数密度，即单位体积内的分子数。

假设一个长方形容器，在 X 轴上长 l_1 ，在 Y 轴上长 l_2 ，在 Z 轴上长 l_3 。

假设容器中有 N 个相同类型的分子，每一个分子的质量为 m 。

考虑以下示意图：

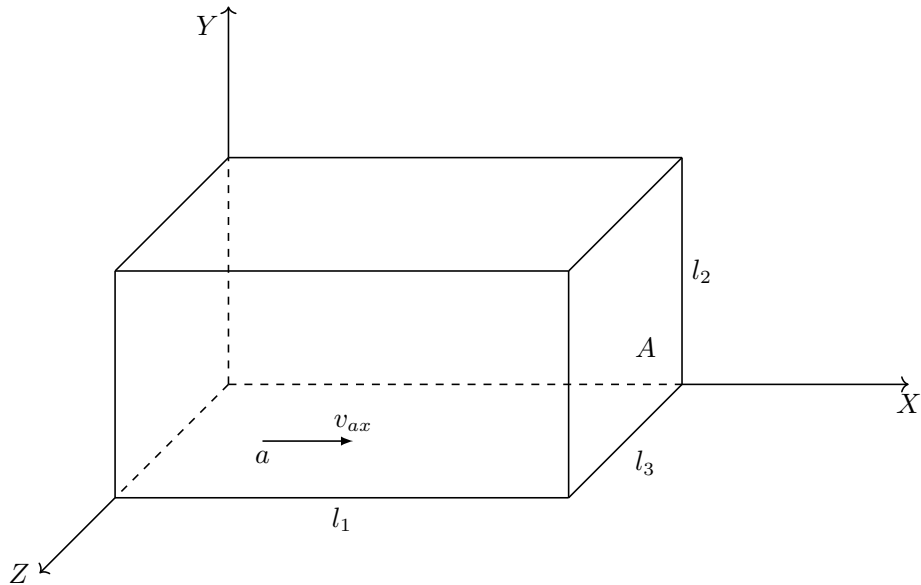


图 32: 理想气体的压强示意图

研究其中的一个分子 a ，其速度是 v_a ，其速度在 x 轴的分量是 v_{ax} 。

当分子 a 以速度 v_{ax} 撞向面 A , 此时分子 a 会以速度 $-v_{ax}$ 弹回。

故分子 a 的速度变化量为:

$$\Delta v_{ax} = -2v_{ax} \quad (1)$$

且分子 a 的动量变化量为:

$$\Delta p_{ax} = -2p_{ax} \quad (2)$$

根据动量守恒定律和动量定理, 分子 a 每撞击面 A 一次给其的冲量为 $2 \cdot m \cdot v_{ax}$ 。

由于分子 a 连续两次碰撞面 A 的时间间隔为:

$$\Delta t_0 = \frac{2 \cdot l_1}{v_{ax}} \quad (3)$$

所以分子 a 在 Δt 的时间内作用于面 A 的冲量为:

$$I_{ax} = 2 \cdot m \cdot v_{ax} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t_0} \quad (4)$$

$$= 2 \cdot m \cdot v_{ax} \cdot \Delta t \cdot \frac{v_{ax}}{2 \cdot l_1} \quad (5)$$

$$= \frac{m \cdot v_{ax}^2 \cdot \Delta t}{l_1} \quad (6)$$

因此容器中所有分子在 Δt 的时间中给面 A 的冲量为:

$$I_x = \sum_{i=1}^N I_{ix} \quad (7)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{m \cdot v_{ax}^2 \cdot \Delta t}{l_1} \quad (8)$$

根据冲量的定义可知分子给面 A 带来的持续冲力为:

$$F_x = \frac{I_x}{\Delta t} \quad (9)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{m \cdot v_{ax}^2}{l_1} \quad (10)$$

由此通过单个分子作用于面 A 的冲量求得了面 A 所受的持续冲力。

所以面 A 受到的压强为：

$$P = \frac{F_x}{S_A} \quad (11)$$

$$= \frac{F_x}{l_2 \cdot l_3} \quad (12)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{m \cdot v_{ix}^2}{l_1 \cdot l_2 \cdot l_3} \quad (13)$$

$$= \frac{m}{l_1 \cdot l_2 \cdot l_3} \cdot \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 \quad (14)$$

$$= \frac{m \cdot N}{l_1 \cdot l_2 \cdot l_3} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 \quad (15)$$

$$= \frac{m \cdot N}{l_1 \cdot l_2 \cdot l_3} \cdot \overline{v_x^2} \quad (16)$$

定义分子数密度 $n = \frac{N}{l_1 \cdot l_2 \cdot l_3}$ 并代入：

$$P = n \cdot m \cdot \overline{v_x^2} \quad (17)$$

根据统计学规律 $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \cdot \overline{v^2}$ 并代入得：

$$P = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m \cdot \overline{v^2} \quad (18)$$

引入分子平均平动动能：

$$\overline{\varepsilon_{ks}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v^2} \quad (19)$$

将上式代入就可以得到：

$$P = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m \cdot \overline{v^2} \quad (20)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v^2} \right) \quad (21)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot n \cdot \overline{\varepsilon_{ks}} \quad (22)$$

由此证明了理想气体的压强公式。

7.5 理想气体的温度

理想气体的温度的计算公式（用平均分子速度表示）：

$$T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k} \cdot m \cdot \overline{v^2}$$

理想气体的温度的计算公式（用平均平动动能表示）：

$$T = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k} \cdot \overline{\varepsilon_{ks}}$$

玻尔兹曼常数的定义为：

$$k = \frac{R}{N_A}$$

其中 k 为玻尔兹曼常数，其取值为 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$ 。

设一个分子的质量为 m_0 。

设气体的总质量为 m ，设 1mol 气体的质量为 M 。

设气体的总分子为 N ，设 1mol 气体的分子为 N_A ，即阿伏伽德罗常数个。

因此有以下关系：

$$m = N \cdot m_0 \quad (1)$$

同时有以下关系：

$$M = N_A \cdot m_0 \quad (2)$$

代入克拉伯龙方程：

$$\frac{P \cdot V}{T} = \frac{m}{M} \cdot R \quad (3)$$

$$P \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \quad (4)$$

$$P \cdot V = \frac{N}{N_A} \cdot R \cdot T \quad (5)$$

$$P = \frac{N}{V} \cdot \frac{R}{N_A} \cdot T \quad (6)$$

由此通过克拉伯龙方程得到了压强和温度的关系。

定义符号 n 为分子数的密度并代入：

$$n = \frac{N}{V} \quad (7)$$

定义符号 k 为玻尔兹曼常数并代入：

$$k = \frac{R}{N_A} \quad (8)$$

之所以 k 是一个常数，是因为 R 和 N_A 也均是常数。

温度和压强的关系：

$$P = n \cdot k \cdot T$$

将其变换既可以得到：

$$T = \frac{P}{n \cdot k} \quad (9)$$

$$T = \frac{2}{3} \cdot \frac{n \cdot \overline{\varepsilon_{ks}}}{n \cdot k} \quad (10)$$

$$T = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k} \cdot \overline{\varepsilon_{ks}} \quad (11)$$

将其变换也可以得到：

$$T = \frac{P}{n \cdot k} \quad (12)$$

$$T = \frac{1}{3} \cdot \frac{n \cdot m \cdot \overline{v^2}}{n \cdot k} \quad (13)$$

$$T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k} \cdot \overline{v^2} \quad (14)$$

由此证明了理想气体的温度公式。

由此可见，理想气体的温度只与分子平均平动动能相关，即温度是分子平均平动动能的量度。

温度越高，表明分子热运动越剧烈，表明分子平均平动动能越大。

温度越低，表明分子热运动越微弱，表明分子平均平动动能越小。

7.6 自由度

自由度指的是确定一物体在空间的位置所需要的最少的独立坐标，通常用字母 i 表示。

刚体最多有六个自由度：

1. 三个独立坐标决定质心的位置： x, y, z 。
2. 两个独立坐标决定转轴的方向： α, β 。
3. 一个独立坐标决定绕轴的角度： φ 。

考虑以下示意图：

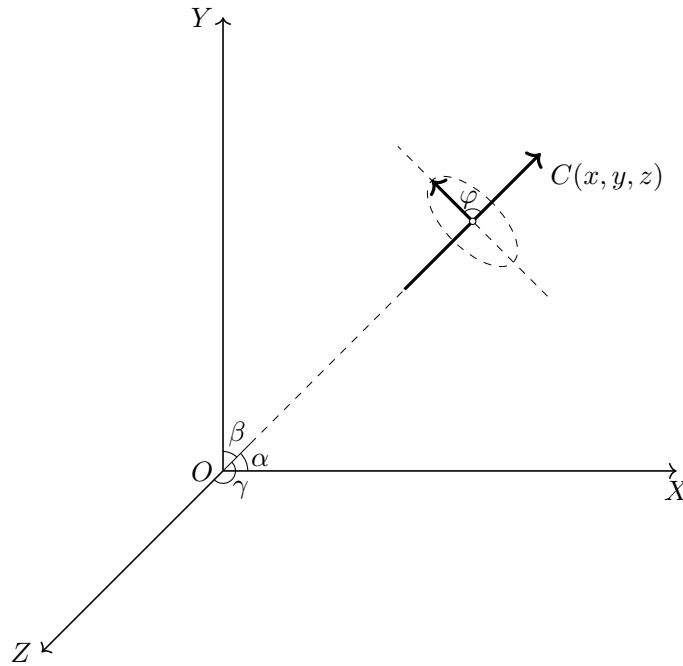


图 33: 自由度的示意图

虽然实际上有三个方向角，但是由于存在以下关系只有两个是独立的：

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1)$$

气体分子的自由度如下：

单原子分子有三个自由度，即 $i = 3$ ，这是因为单原子分子可以看作一个点。

双原子分子有五个自由度，即 $i = 5$ ，这是因为双原子分子可以看作一条线。

多原子分子有五个自由度，即 $i = 6$ ，这是因为多原子分子需看作一个刚体。

此外双原子和多原子分子实际上是不完全刚性的，因此存在振动自由度，但是通常不需要考虑。

7.6.1 能量按自由度均分定理

能量按自由度均分定理：气体处于平衡状态时，气体分子任意自由度的平均动能均为 $\frac{1}{2} \cdot k \cdot T$ 。

能量按自由度均分定理的数学表达：

$$\overline{\varepsilon_{ki}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot T$$

由理想气体的温度公式推导：

$$T = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k} \cdot \overline{\varepsilon_{ks}} \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} \cdot k \cdot T = \overline{\varepsilon_{ks}} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \cdot k \cdot T = \overline{\varepsilon_{kx}} + \overline{\varepsilon_{ky}} + \overline{\varepsilon_{kz}} \quad (3)$$

在 x 轴上的平均平动动能可表达为：

$$\varepsilon_{kx} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v_x^2} \quad (4)$$

在 y 轴上的平均平动动能可表达为：

$$\varepsilon_{ky} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v_y^2} \quad (5)$$

在 z 轴上的平均平动动能可表达为：

$$\varepsilon_{kz} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v_z^2} \quad (6)$$

根据统计规律：

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} \quad (7)$$

$$\overline{\varepsilon_{kx}} = \overline{\varepsilon_{ky}} = \overline{\varepsilon_{kz}} \quad (8)$$

代入可以得到：

$$\overline{\varepsilon_{kx}} = \overline{\varepsilon_{ky}} = \overline{\varepsilon_{kz}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot T \quad (9)$$

由此我们证明了每一平动自由度的平均动能应为 $\frac{1}{2} \cdot k \cdot T$ 。

然而也可以证明每一转动自由度的平均动能同为 $\frac{1}{2} \cdot k \cdot T$ 。

因此能量按自由度均分定理成立。

7.6.2 理想气体的分子平均动能

理想气体的分子平均动能：

$$\varepsilon_k = \frac{i}{2} \cdot k \cdot T$$

由于分子平均动能等于各自由度平均动能之和：

$$\varepsilon_k = i \cdot \overline{\varepsilon_{ki}} \quad (1)$$

$$\varepsilon_k = i \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot T \quad (2)$$

$$\varepsilon_k = \frac{i}{2} \cdot k \cdot T \quad (3)$$

7.6.3 理想气体的分子动能

理想气体的分子动能：

$$E_k = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$$

由于分子动能是所有分子平均动能的总和：

$$E_k = N \cdot \overline{\varepsilon_k} \quad (1)$$

$$E_k = \frac{m}{M} \cdot N_A \cdot \overline{\varepsilon_k} \quad (2)$$

$$E_k = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot k \cdot N_A \cdot T \quad (3)$$

$$E_k = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \quad (4)$$

此处的 N 代表分子数量。

由此可见，对于一定质量的某种理想气体，其分子动能完全取决于温度。

7.7 麦克斯韦-玻尔兹曼分布

假设总分子数为 N ，设速率在区间 v 至 $v + \Delta v$ 中的分子数为 ΔN 。

显然分子速度在 Δv 区间内的概率为：

$$\frac{\Delta N}{N} \quad (1)$$

所以分子速度在 Δv 区间内的概率密度为：

$$\frac{\Delta N}{\Delta v \cdot N} \quad (2)$$

当 $\Delta v \rightarrow 0$ 时得到一个连续函数，称为速率分布函数：

$$D(v) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta v \cdot N} \quad (3)$$

$$D(v) = \frac{1}{N} \cdot \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta v} \quad (4)$$

$$D(v) = \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dv} \quad (5)$$

速率分布函数 $D(v)$ 的值表示了分子速率为 v 时的概率密度大小，即单位速度区间的概率大小。

麦克斯韦-玻尔兹曼分布：

$$D(v) = \left(\frac{m}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi v^2 \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T}}$$

麦克斯韦和玻尔兹曼等人从理论上证明了分子速率服从以上分布函数。

该函数中，第一项为比例系数，第二项为几何因子，第三项为玻尔兹曼因子。

该函数中，符号 k 为玻尔兹曼常数，符号 m 为分子质量，符号 T 为热力学温度。

以下等式表示速率在 v_1 和 v_2 间的分子数百分率：

$$\int_{v_1}^{v_2} D(v) \cdot dv = \frac{\Delta N}{N}$$

以下等式表示速率分布函数 $D(v)$ 需满足的归一化条件：

$$\int_0^{\infty} D(v) \cdot dv = 1$$

这是因为所有分子的速率均在 0 到 ∞ 间，故百分率应为 1 。

7.7.1 分子热运动的三种速率

平均速率的计算公式：

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi \cdot M}} \approx 1.60 \cdot \sqrt{\frac{R \cdot T}{M}}$$

方根均速率的计算公式：

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}} \approx 1.73 \cdot \sqrt{\frac{R \cdot T}{M}}$$

最概然速率的计算公式：

$$v_p = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot T}{M}} \approx 1.41 \cdot \sqrt{\frac{R \cdot T}{M}}$$

所有分子速率的算数平均值，称为平均速率 \bar{v} ，用于计算分子的平均自由程。

所有分子速率的平方平均值，称为方根均速率 v_{rms} ，用于计算分子的平均平动动能。

最概然速率 v_p 指的是分布函数中概率最大处所对应的速率。

三种速率的大小关系如下：

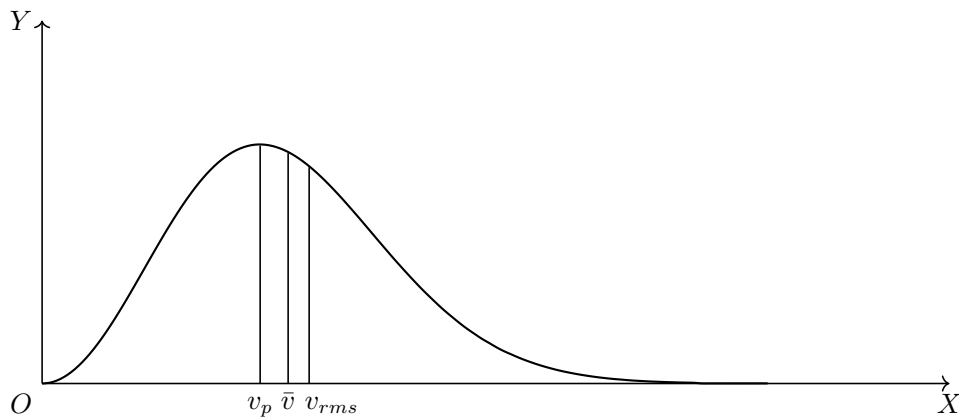


图 34: 三种速率的大小关系

三种速率满足 $v_p < \bar{v} < v_{rms}$ 的关系，这是由于三种速率前的系数导致的。

三种速率均和气体温度的平方根 \sqrt{T} 成正比，即气体温度越高，对应速率越高。

三种速率均和摩尔质量的平方根 \sqrt{M} 成正比，即摩尔质量越小，对应速率越高。

7.7.2 温度和速率分布曲线

温度和速率分布曲线的关系：

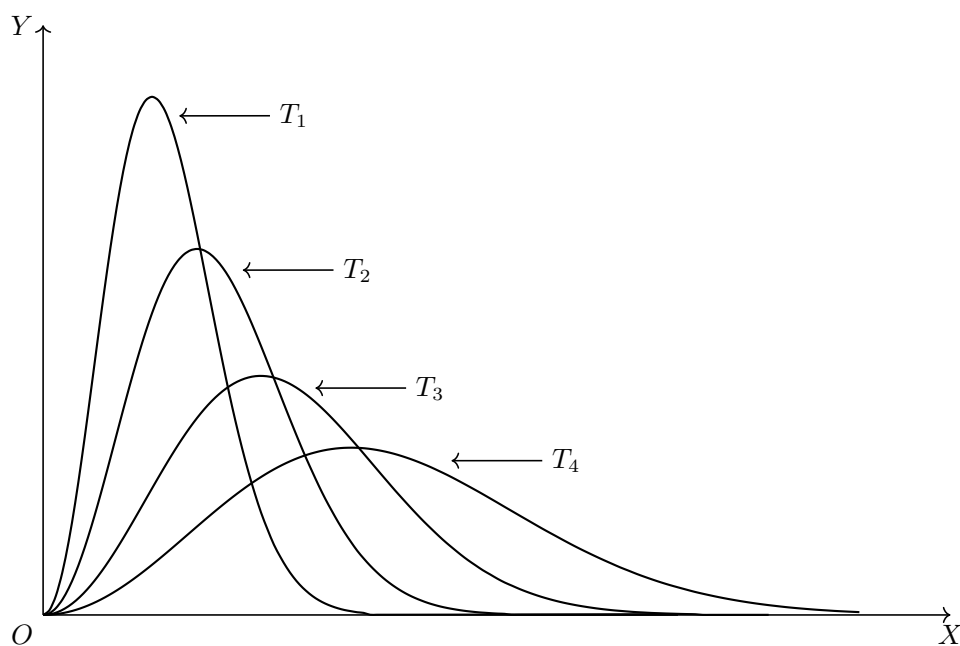


图 35: 温度和速率分布曲线的关系

其中 $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$ 。

温度较低，最概然速率较低，曲线最高点向左偏移，由于存在归一化条件，故曲线较为陡峭。

温度较高，最概然速率较高，曲线最高点向右偏移，由于存在归一化条件，故曲线较为平坦。

8 热力学基础

8.1 内能

热力学中将研究的物体称为热力学系统，与系统发生作用的环境称为外界。

热力学系统的能量依赖于系统的状态，这种能量称为内能。

气体的内能是分子动能和分子势能的总和。

气体为真实气体时的内能：

$$E = F(V, T)$$

气体为理想气体时的内能：

$$E = F(T)$$

由此可见，内能是系统状态的函数。

气体的分子动能和温度有关，气体的分子势能和体积有关。

气体为真实气体时，分子间相互作用不能忽略，分子势能不能忽略。

气体为理想气体时，分子间相互作用可以忽略，分子势能可以忽略。

理想气体的内能等于分子动能：

$$E = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot t$$

因此计算理想气体的内能时，可以直接使用理想气体分子动能的公式。

8.1.1 改变内能的方式

改变系统的内能有两个途径：

1. 对热力学系统做功。
2. 对热力学系统传递热量。

例如通过玻璃棒搅拌烧杯中的水，对其做功，可以使其温度升高，内能增加。

例如通过酒精灯加热烧杯中的水，传递热量，可以使其温度升高，内能增加。

由此可见，做功和传递热量，两者对于改变系统的内能是等效的。

过去在习惯上，用焦作为功的单位，记作J。

过去在习惯上，用卡作为热的单位，记作cal。

焦耳通过热功当量实验测定了功和热的关系：

$$1\text{cal} = 4.186\text{J}$$

现行的国际单位制中，功和热均用焦作为单位。

功是通过物体的宏观位移完成，是系统外物体的有规则位移与系统内分子的无规则运动的转换。

热是通过分子间相互作用完成，是系统外分子的无规则运动与系统内分子的无规则运动的转换。

8.2 热力学第一定律

热力学第一定律：外界对系统传递的热量，等于系统的内能增量与对外做功的总和。

热力学第一定律的数学表达（宏观过程）：

$$Q = (E_2 - E_1) + W$$

热力学第一定律的数学表达（微观过程）：

$$dQ = dE + dW$$

系统从外界吸热时，我们规定 dQ 为正值。

系统向外界放热时，我们规定 dQ 为负值。

系统对外界做功时，我们规定 dW 为正值。

系统受外界做功时，我们规定 dW 为负值。

系统的内能增加时，我们规定 dE 为正值。

系统的内能减小时，我们规定 dE 为负值。

8.2.1 第一类永动机

第一类永动机指的是不消耗任何能量却可以不断对外做功的机器。

第一类永动机违背了热力学第一定律，因此不可能实现。

8.3 气体平衡过程中的功

气体平衡过程中的功的计算公式（宏观过程）：

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV$$

气体平衡过程中的功的计算公式（微观过程）：

$$dW = P \cdot dV$$

假设有一气缸，面积为 S ，压强为 P ，压力为 F ，研究气缸在活塞由 l_1 移动至 l_2 时的做功情况。

气体平衡过程中的功的推导：

$$W = \int_{l_1}^{l_2} F \cdot dl \quad (1)$$

$$= \int_{l_1}^{l_2} P \cdot S \cdot dl \quad (2)$$

$$= \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV \quad (3)$$

气体在平衡过程中所做的功，是压强对体积的积分。

气体在平衡过程中所得到的功可以用 $P - V$ 图表示：

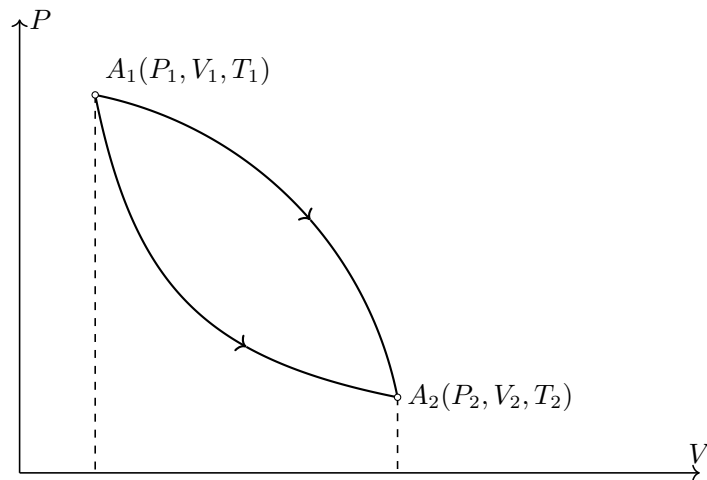


图 36: 气体在平衡过程中所做的功

其中曲线下方的面积表示功，由图可知做功的多少与过程有关。

由于内能与过程无关（内能是过程的函数），而做功与过程有关，故吸收热量与过程有关。

8.4 气体的等体过程

气体的等体过程的特征是体积不变，即 $V_1 = V_2 = V$ 。

气体的等体过程在 $P - V$ 图上表现为平行于 P 轴的直线，称为等体线：

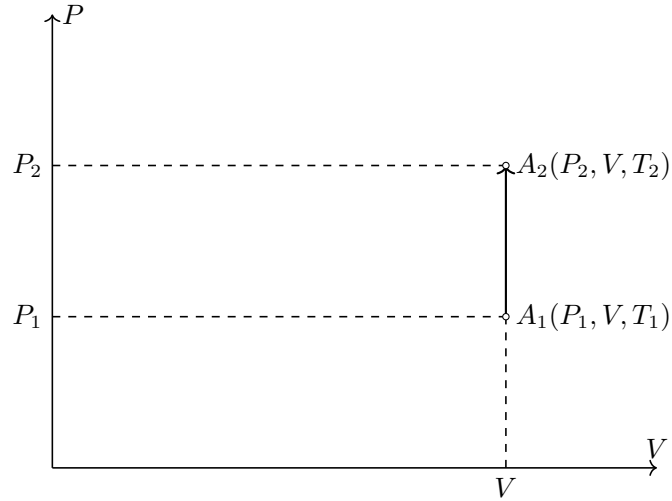


图 37: 气体的等体过程

气体的等体过程中的热量变化：

$$Q_V = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

气体的等体过程中的内能变化：

$$\Delta E = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

气体的等体过程中的做功情况：

$$W = 0$$

在等体升温的过程中，理想气体吸收的热量，全部转化为其内能的增加，不向外界做功。

在等体降温的过程中，理想气体放出的热量，全部来自于其内能的减少，不受外界做功。

由于压强和温度成正比，故向上的等体线压强增大温度升高，是等体升温过程。

由于压强和温度成正比，故向下的等体线压强减小温度下降，是等体降温过程。

由于等体过程的体积为定值：

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV \quad (1)$$

$$W = 0 \quad (2)$$

根据理想气体的内能的公式：

$$\Delta E = E_2 - E_1 \quad (3)$$

$$\Delta E = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 - \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \quad (4)$$

$$\Delta E = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \quad (5)$$

由热力学第一定律可以得到：

$$Q_V = (E_2 - E_1) + W \quad (6)$$

$$Q_V = \Delta E + W \quad (7)$$

$$Q_V = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \quad (8)$$

由此证明了气体的等体过程的相关规律。

8.5 气体的等压过程

气体的等压过程的特征是压强不变，即 $P_1 = P_2 = P$ 。

气体的等压过程在 $P - V$ 图上表现为平行于 V 轴的直线，称为等压线：

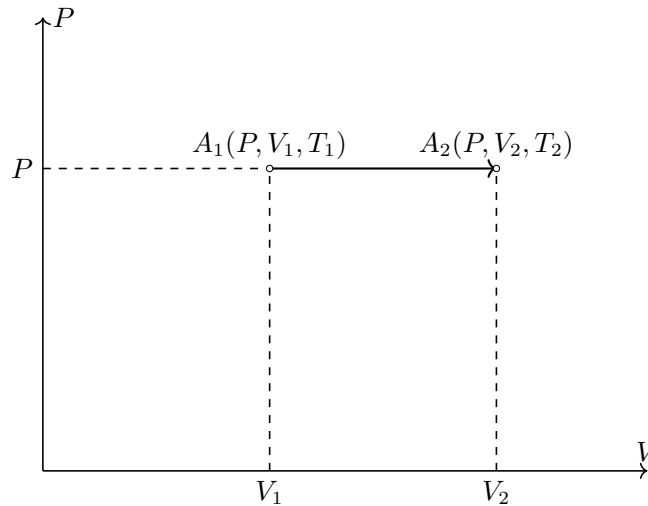


图 38: 气体的等压过程

气体的等压过程中的热量变化：

$$Q_P = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

气体的等压过程中的内能变化：

$$\Delta E = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

气体的等压过程中的做功情况：

$$W = \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

在等压升温的过程中，理想气体吸收的热量，部分转化为其内能的增加，部分用于向外界做功。

在等压降温的过程中，理想气体放出的热量，部分来自于其内能的减少，部分源于受外界做功。

由于体积和温度成正比，故向右的等压线体积增大温度升高，是等压升温过程。

由于体积和温度成正比，故向左的等压线体积减小温度下降，是等压降温过程。

由于等压过程的压强为定值：

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV \quad (1)$$

$$W = P \cdot (V_2 - V_1) \quad (2)$$

根据克拉伯龙方程可以得到：

$$W = P \cdot \left(\frac{m}{M \cdot P} \cdot R \cdot T_2 - \frac{m}{M \cdot P} \cdot R \cdot T_1 \right) \quad (3)$$

$$W = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 - \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \quad (4)$$

$$W = \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \quad (5)$$

根据理想气体的内能的公式：

$$\Delta E = E_2 - E_1 \quad (6)$$

$$\Delta E = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 - \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \quad (7)$$

$$\Delta E = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \quad (8)$$

由热力学第一定律可以得到：

$$Q_P = (E_2 - E_1) + W \quad (9)$$

$$Q_P = \Delta E + W \quad (10)$$

$$Q_P = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) + \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \quad (11)$$

$$Q_P = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \quad (12)$$

由此证明了气体的等压过程的相关规律。

8.6 气体的热容量

热容量衡量了一定量的物质上升单位温度所需吸收的热量。

热容量是一个标量，通常用符号 C 表示，单位是J/K。

热容量的定义式：

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C \cdot dT$$

比热容量衡量了一定质量的物质上升单位温度所需吸收的热量。

比热容量是一个标量，通常用符号 c 表示，单位是J/(K·kg)。

比热容量的定义式：

$$Q = m \cdot \int_{T_1}^{T_2} c \cdot dT$$

摩尔热容量衡量了单位物质的量的物质上升单位温度所吸收的热量。

摩尔热容量是一个标量，通常用符号 C_m 表示，单位是J/(K·mol)。

摩尔热容量的定义式：

$$Q = \frac{m}{M} \cdot \int_{T_1}^{T_2} C_m \cdot dT$$

对摩尔热容量的定义式两侧取微分：

$$Q = \frac{m}{M} \cdot \int C_m \cdot dT \quad (1)$$

$$dQ = \frac{m}{M} \cdot C_m \cdot dT \quad (2)$$

$$dQ \cdot \frac{M}{m} = C_m \cdot dT \quad (3)$$

$$C_m = \frac{M}{m} \cdot \frac{dQ}{dT} \quad (4)$$

摩尔热容量的计算公式：

$$C_m = \frac{M}{m} \cdot \frac{dQ}{dT}$$

摩尔热容量正比于热容对温度的导数。

8.6.1 等体摩尔热容量

等体摩尔热容量指的是气体在等体过程中的摩尔热容量，通常用符号 C_{V_m} 表示。

等体摩尔热容量的计算公式：

$$C_{V_m} = \frac{i}{2} \cdot R$$

等体摩尔热容量的推导过程：

$$C_{V_m} = \frac{M}{m} \cdot \frac{dQ_V}{dT} \quad (1)$$

$$= \frac{M}{m} \cdot \frac{d}{dT} \cdot \left(\frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \right) \quad (2)$$

$$= \frac{i}{2} \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot \frac{dT}{dT} \quad (3)$$

$$= \frac{i}{2} \cdot R \cdot \frac{dT}{dT} \quad (4)$$

$$= \frac{i}{2} \cdot R \quad (5)$$

等体摩尔热容量只和气体自由度有关，等体摩尔热容量是一个无关温度的定值。

等体过程的热量还可以表示为：

$$Q_V = \frac{m}{M} \cdot C_{V_m} \cdot (T_2 - T_1)$$

理想气体的等体摩尔容量分别为：

气体类型	自由度	等体摩尔容量
单原子气体	$i = 3$	$C_{V_m} = 12.5 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$
双原子气体	$i = 5$	$C_{V_m} = 20.8 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$
多原子气体	$i = 6$	$C_{V_m} = 24.9 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$

表 7: 理想气体的等体摩尔容量

实际气体的等体摩尔容量，单原子和双原子气体与理论值相近，多原子气体与理论值相差较大。

8.6.2 等压摩尔热容量

等压摩尔热容量指的是气体在等压过程中的摩尔热容量，通常用符号 C_{P_m} 表示。

等压摩尔热容量的计算公式：

$$C_{P_m} = \frac{i+2}{2} \cdot R$$

等压摩尔热容量的推导过程：

$$C_{P_m} = \frac{M}{m} \cdot \frac{dQ_V}{dT} \quad (1)$$

$$= \frac{M}{m} \cdot \frac{d}{dT} \cdot \left(\frac{i+2}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \right) \quad (2)$$

$$= \frac{i+2}{2} \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot \frac{dT}{dT} \quad (3)$$

$$= \frac{i+2}{2} \cdot R \cdot \frac{dT}{dT} \quad (4)$$

$$= \frac{i+2}{2} \cdot R \quad (5)$$

等压摩尔热容量只和气体自由度有关，等压摩尔热容量是一个无关温度的定值。

等压过程的热量还可以表示为：

$$Q_P = \frac{m}{M} \cdot C_{P_m} \cdot (T_2 - T_1)$$

理想气体的等压摩尔容量分别为：

气体类型	自由度	等体摩尔容量
单原子气体	$i = 3$	$C_{P_m} = 20.8 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$
双原子气体	$i = 5$	$C_{P_m} = 29.1 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$
多原子气体	$i = 6$	$C_{P_m} = 33.2 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$

表 8: 理想气体的等压摩尔容量

实际气体的等压摩尔容量，单原子和双原子气体与理论值相近，多原子气体与理论值相差较大。

8.6.3 热容比

热容比定义为等压摩尔热容与等体摩尔热容的比值，通常用符号 γ 表示。

热容比定义的数学表达：

$$\gamma = \frac{C_{P_m}}{C_{V_m}} = \frac{i+2}{i}$$

理想气体的热容比分别为：

气体类型	自由度	热容比
单原子气体	$i = 3$	$\gamma = 1.67$
双原子气体	$i = 5$	$\gamma = 1.40$
多原子气体	$i = 6$	$\gamma = 1.33$

表 9: 理想气体的热容比

8.6.4 迈耶公式

迈耶公式指出了等压摩尔热容量和等体摩尔热容量的差恒普适气体常量 R 。

迈耶公式的数学表达：

$$C_{P_m} - C_{V_m} = R$$

迈耶公式的推导过程：

$$C_{P_m} - C_{V_m} = \frac{i+2}{2} \cdot R - \frac{i}{2} \cdot R \quad (1)$$

$$C_{P_m} - C_{V_m} = R \quad (2)$$

对于实际气体的摩尔热容，单原子和双原子气体与理论值相近，多原子气体与理论值有所偏离，然而无论哪种气体，均基本遵循迈耶公式，即两种摩尔热容的差为普适气体常量。

由此可见，迈耶公式有超越等体摩尔热容和等压摩尔热容的普适意义。

除此之外，迈耶公式说明了升高相同温度，等压过程相比等体过程需要吸收更多能量。

8.7 气体的等温过程

气体的等温过程的特征是温度不变，即 $T_1 = T_2 = T$ 。

气体的等温过程在 $P - V$ 图上表现为等轴双曲线，称为等温线：

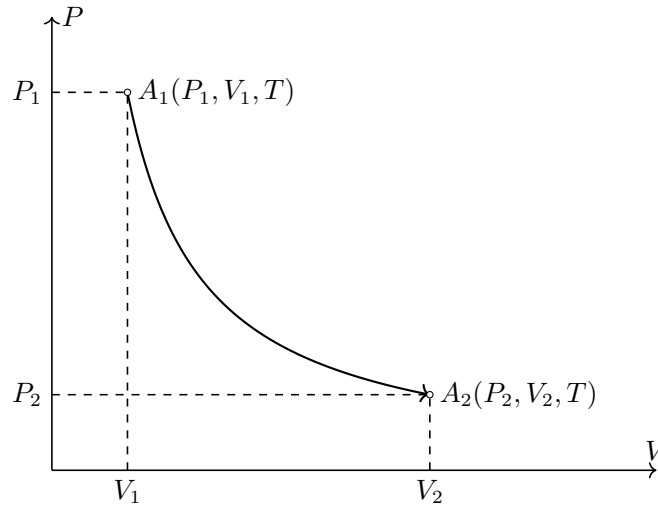


图 39: 气体的等温过程

气体的等温过程中的热量变化：

$$Q_T = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$Q_T = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}$$

气体的等温过程中的做功情况：

$$W = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}$$

气体的等温过程中的内能变化：

$$\Delta E = 0$$

在等温膨胀中，理想气体向外界所作的功，全部来自于其吸收的热量，内能不变。

在等温压缩中，理想气体受外界所作的功，全部转化为其放出的热量，内能不变。

由于等压过程的温度为定值：

$$\Delta E = E_2 - E_1 \quad (1)$$

$$\Delta E = 0 \quad (2)$$

根据克拉伯龙方程可以得到：

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV \quad (3)$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M \cdot V} \cdot R \cdot T \cdot dV \quad (4)$$

$$W = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} \cdot dV \quad (5)$$

$$W = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot (\ln V_2 - \ln V_1) \quad (6)$$

$$W = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (7)$$

由热力学第一定律可以得到：

$$Q_T = (E_2 - E_1) + W \quad (8)$$

$$Q_T = \Delta E + W \quad (9)$$

$$Q_T = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (10)$$

$$Q_T = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{P_1}{P_2} \quad (11)$$

其中最后一步运用了玻意耳定律：

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2 \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1} \quad (12)$$

由此证明了气体的等温过程的相关规律。

8.8 气体的绝热过程

气体的绝热过程的特指是对外绝热，即 $Q = 0$ 。

气体的绝热过程在 $P - V$ 图上表现为一根曲线，称为绝热线：

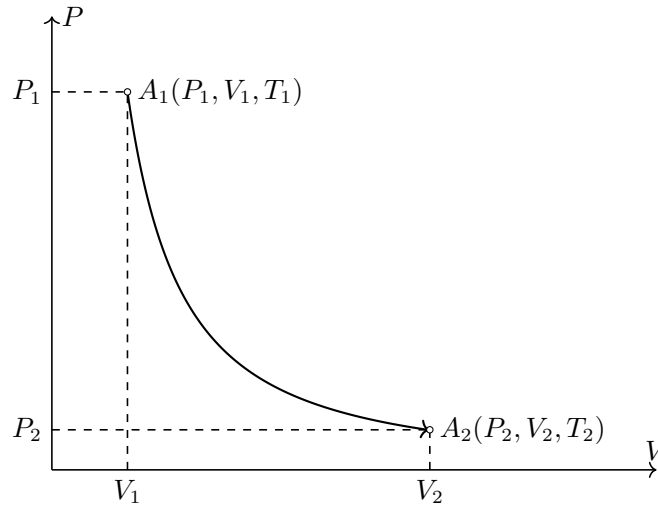


图 40: 气体的绝热过程

气体的绝热过程中的内能变化：

$$\Delta E = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

$$\Delta E = \frac{m}{M} \cdot C_{V_m} \cdot (T_2 - T_1)$$

气体的绝热过程中的做功情况：

$$W = -\frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

$$W = -\frac{m}{M} \cdot C_{V_m} \cdot (T_2 - T_1)$$

气体的绝热过程中的热量变化：

$$Q = 0$$

在绝热膨胀中，理想气体向外界所作的功，全部来自于其内能的减少，不吸收热量。

在绝热压缩中，理想气体受外界所作的功，全部转化为其内能的增加，不放出热量。

根据理想气体的内能的公式：

$$\Delta E = E_2 - E_1 \quad (1)$$

$$\Delta E = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \quad (2)$$

$$\Delta E = \frac{m}{M} \cdot C_{V_m} \cdot (T_2 - T_1) \quad (3)$$

由热力学第一定律可以得到：

$$Q = (E_2 - E_1) + W \quad (4)$$

$$0 = \Delta E + W \quad (5)$$

$$W = -\Delta E \quad (6)$$

$$W = -\frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) \quad (7)$$

$$W = -\frac{m}{M} \cdot C_{V_m} \cdot (T_2 - T_1) \quad (8)$$

由此证明了绝热过程的相关规律。

8.8.1 绝热过程中气体状态参量间的关系

绝热过程中，气体的压强体积温度均在变化，但是三者间实际上仍然存在一组额外关系。

绝热过程中的对外绝热：

$$dE + dW = 0 \quad (1)$$

$$P \cdot dV = -dE \quad (2)$$

$$P \cdot dV = -\frac{m}{M} \cdot C_{V_m} \cdot dT \quad (3)$$

对克拉伯龙方程取微分：

$$P \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \quad (4)$$

$$P \cdot dV + V \cdot dP = \frac{m}{M} \cdot R \cdot dT \quad (5)$$

由此得到了两组绝热过程中关于 dP 、 dV 、 dT 的关系式。

由此得到了一个方程组:

$$\begin{cases} P \cdot dV = -\frac{m}{M} \cdot C_{V_m} \cdot dT \\ P \cdot dV + V \cdot dP = \frac{m}{M} \cdot R \cdot dT \end{cases} \quad (6)$$

由第一个方程反解 dT :

$$dT \cdot C_{V_m} = -\frac{m}{M} \cdot P \cdot dV \quad (7)$$

$$dT = -\frac{M}{m} \cdot \frac{1}{C_{V_m}} \cdot P \cdot dV \quad (8)$$

在第二个方程代入 dT :

$$P \cdot dV + V \cdot dP = \frac{m}{M} \cdot R \cdot dT \quad (9)$$

$$P \cdot dV + V \cdot dP = -\frac{m}{M} \cdot R \cdot \left(\frac{M}{m} \cdot \frac{1}{C_{V_m}} \cdot P \cdot dV \right) \quad (10)$$

$$P \cdot dV + V \cdot dP = -\frac{1}{C_{V_m}} \cdot P \cdot dV \quad (11)$$

对其变形代入迈耶公式:

$$C_{V_m} \cdot (P \cdot dV + V \cdot dP) = -R \cdot P \cdot dV \quad (12)$$

$$C_{V_m} \cdot (P \cdot dV + V \cdot dP) = -(C_{P_m} - C_{V_m}) \cdot R \cdot P \cdot dV \quad (13)$$

$$C_{V_m} \cdot (P \cdot dV + V \cdot dP) = (C_{V_m} - C_{P_m}) \cdot R \cdot P \cdot dV \quad (14)$$

$$C_{V_m} \cdot P \cdot dV + C_{V_m} \cdot V \cdot dP = C_{V_m} \cdot P \cdot dV - C_{P_m} \cdot P \cdot dV \quad (15)$$

$$C_{V_m} \cdot V \cdot dP + C_{P_m} \cdot P \cdot dV = 0 \quad (16)$$

将两侧同除 $P \cdot V$:

$$\frac{dP}{P} \cdot C_{V_m} + \frac{dV}{V} \cdot C_{P_m} = 0 \quad (17)$$

将两侧同除 C_{V_m} :

$$\frac{dP}{P} \cdot \frac{C_{V_m}}{C_{V_m}} + \frac{dV}{V} \cdot \frac{C_{P_m}}{C_{V_m}} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} \cdot \gamma = 0 \quad (19)$$

由此我们将 P, dP 与 V, dV 分离。

对以上得到的结论积分可得：

$$\int \frac{1}{P} \cdot dP + \gamma \cdot \int \frac{1}{V} \cdot dV = C \quad (20)$$

$$\ln P + \gamma \cdot \ln V = C \quad (21)$$

$$e^{\ln P + \gamma \cdot \ln V} = C \quad (22)$$

$$e^{\ln P} \cdot e^{\gamma \cdot \ln V} = C \quad (23)$$

$$P \cdot V^\gamma = C \quad (24)$$

绝热过程压强和体积的关系（第一种表达）：

$$P_1 \cdot V_1^\gamma = P_2 \cdot V_2^\gamma$$

绝热过程压强和体积的关系（第二种表达）：

$$P \cdot V^\gamma = C$$

由克拉伯龙方程代换压强：

$$P \cdot V^\gamma = C \quad (25)$$

$$V^\gamma \cdot \left(\frac{m}{M} \cdot \frac{1}{V} \cdot R \cdot T \right) = C \quad (26)$$

$$V^{\gamma-1} \cdot T \cdot \left(\frac{m}{M} \cdot R \right) = C \quad (27)$$

$$V^{\gamma-1} \cdot T = C \quad (28)$$

由克拉伯龙方程代换体积：

$$P \cdot V^\gamma = C \quad (29)$$

$$P \cdot \left(\frac{m}{M} \cdot \frac{1}{P} \cdot R \cdot T \right)^\gamma = C \quad (30)$$

$$P^{1-\gamma} \cdot T^\gamma \cdot \left(\frac{m}{M} \cdot R \right)^\gamma = C \quad (31)$$

$$P^{1-\gamma} \cdot T^\gamma = C \quad (32)$$

由此得到了另外两组关系。

绝热过程体积和温度的关系（第一种表达）：

$$V_1^{\gamma-1} \cdot T_1 = V_2^{\gamma-1} \cdot T_2$$

绝热过程体积和温度的关系（第二种表达）：

$$V^{\gamma-1} \cdot T = C$$

绝热过程压强和温度的关系（第一种表达）：

$$P_1^{1-\gamma} \cdot T_1^{\gamma} = P_2^{1-\gamma} \cdot T_2^{\gamma}$$

绝热过程压强和温度的关系（第二种表达）：

$$P^{1-\gamma} \cdot T^{\gamma} = C$$

由此证明了绝热过程中各个状态参量间存在的一组额外关系。

因此绝热过程中只要知道一个参量的数值，就一定可以求出另外两个参量。

8.8.2 绝热过程和等温过程的关系

根据之前的推导，绝热过程满足的方程为 $P \cdot V^{\gamma} = C$ 。

根据之前的推导，等温过程满足的方程为 $P \cdot V = C$ 。

因此绝热线和等温线实际上非常相似：

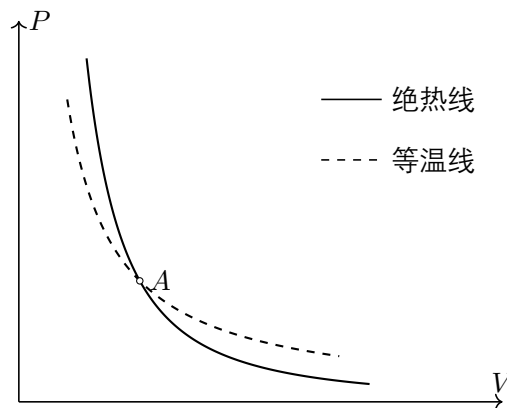


图 41: 绝热过程和等温过程

由图可见，绝热线的切线斜率的绝对值总是大于等温线，绝热线比等温线更陡峭。

由于等温过程的方程为：

$$P \cdot V = C \rightarrow P = \frac{C}{V} \quad (1)$$

故等温过程中的导数为：

$$\frac{dP}{dV} = \frac{d}{dV} \cdot \frac{C}{V} \quad (2)$$

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{C}{V^2} \quad (3)$$

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{P \cdot V}{V^2} \quad (4)$$

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{P}{V} \quad (5)$$

由于绝热过程的方程为：

$$P \cdot V^\gamma = C \rightarrow P = \frac{C}{V^\gamma} \quad (6)$$

故绝热过程中的导数为：

$$\frac{dP}{dV} = \frac{d}{dV} \cdot \frac{C}{V^\gamma} \quad (7)$$

$$\frac{dP}{dV} = -\gamma \cdot \frac{C}{V^{\gamma+1}} \quad (8)$$

$$\frac{dP}{dV} = -\gamma \cdot \frac{P \cdot V}{V^{\gamma+1}} \quad (9)$$

$$\frac{dP}{dV} = -\gamma \cdot \frac{P}{V} \quad (10)$$

根据热容比的定义可知其满足 $\gamma > 1$ ：

$$\left| -\gamma \cdot \frac{P}{V} \right| > \left| -\frac{P}{V} \right|$$

由此证明了绝热线的切线斜率的绝对值始终大于等温线，即绝热线比等温线更陡。

8.9 循环过程

循环过程指的是热力学系统的一种过程：系统经过一系列变化后，最终又回到原来的状态。

循环过程中的热力学系统通常也称为工作物质或工质，该过程常用于生产中功和能的持续转化。

循环过程可以用 $P - V$ 图上的封闭曲线表示：

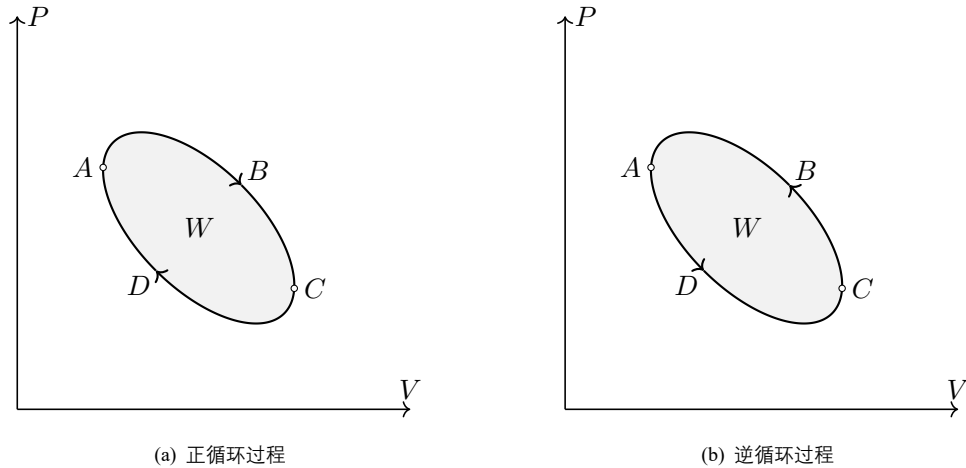


图 42: 循环过程

循环过程中所做的功为曲线所包围的面积，经过一个循环内能不变。

循环过程为顺时针方向的称为正循环，工作物质作正循环的称为热机。

循环过程为逆时针方向的称为逆循环，工作物质作逆循环的称为热泵。

热机的工质在 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 的过程中吸收热量，体积膨胀，对外界做功。

热机的工质在 $C \rightarrow D \rightarrow A$ 的过程中放出热量，体积压缩，受外界做功。

热机工质的膨胀中对外界做的功大于热机在压缩中受外界做的功，因此热机可以对外界做功。

热机中较为典型的包括蒸汽机和内燃机。

热泵的工质在 $A \rightarrow D \rightarrow C$ 的过程中吸收热量，体积膨胀，对外界做功。

热泵的工质在 $C \rightarrow B \rightarrow A$ 的过程中放出热量，体积压缩，受外界做功。

热泵工质的膨胀中对外界做的功小于热机在压缩中受外界做的功，因此热泵需要受外界做功。

热泵中较为典型的包括冷空调和暖空调。

8.9.1 热机

热机可以向外界做功，从高温热源吸收热量，向低温热源放出热量，使得热源间的温度差减少。

热机是一种通过消耗高温热源和低温热源的温差，从而向外界做功的机械。

热机的工作原理可以用下图表示：

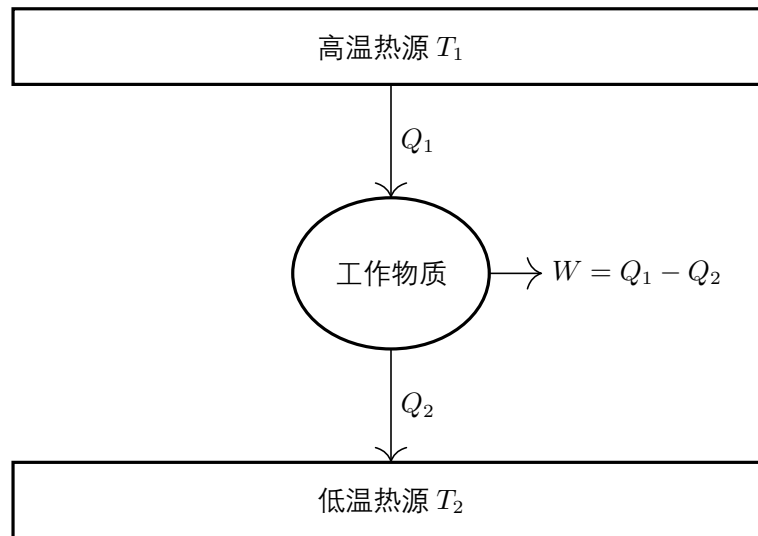


图 43: 热机的工作原理

热机可以用于对外做功，例如蒸汽机用于做功驱动机械。

热机做功时，将蒸汽作为高温热源，将空气作为低温热源，通过热机的工作从而做功驱动机械。

热机的一个重要指标是热机效率 η ：

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

热机效率 η 定义为工质输出的功 W 与高温热源吸收热量 Q_1 的比值。

8.9.2 热泵

热泵需要受外界做功，从低温热源吸收热量，向高温热源放出热量，使得热源间的温度差增加。

热泵是一种通过受外界做功，从而增大高温热源和低温热源的温差的机械。

热泵的工作原理可以用下图表示：

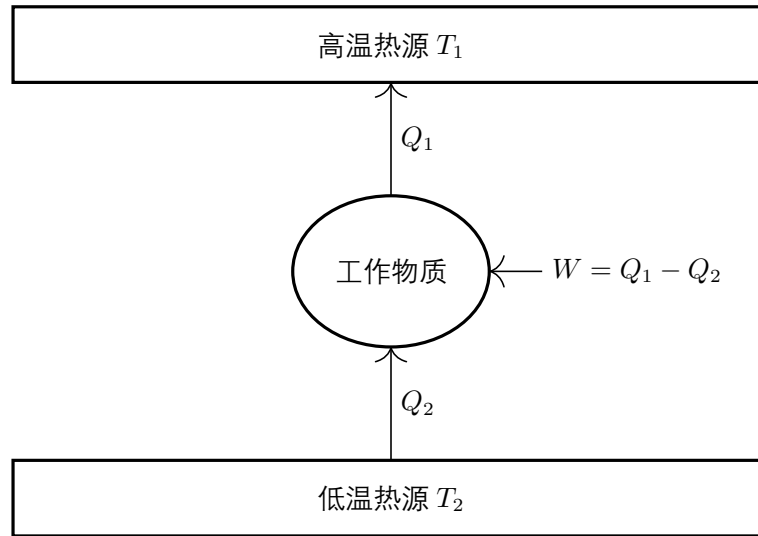


图 44: 热泵的工作原理

热泵可以用于供热或制冷，例如热空调用于供热，例如冷空调用于制冷。

热泵供热时，将室内作为高温热源，将室外作为低温热源，通过热泵的工作使得室内温度更高。

热泵制冷时，将室内作为低温热源，将室外作为高温热源，通过热泵的工作使得室内温度更低。

热泵制冷时的一个重要指标是热泵制冷效能 w_c ：

$$w_c = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

热泵供暖时的一个重要指标是热泵供暖效能 w_h ：

$$w_h = \frac{Q_1}{W} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2}$$

热泵制冷效能 w_c 定义为从低温热源吸收的热量 Q_2 和工质输入的功 W 的比值。

热泵供暖效能 w_h 定义为向高温热源放出的热量 Q_1 和工质输入的功 W 的比值。

8.9.3 卡诺正循环

卡诺正循环以理想气体为工质，由两个等温过程和两个绝热过程组成的循环过程。

卡诺正循环可以用 $P-V$ 图上的封闭曲线表示：

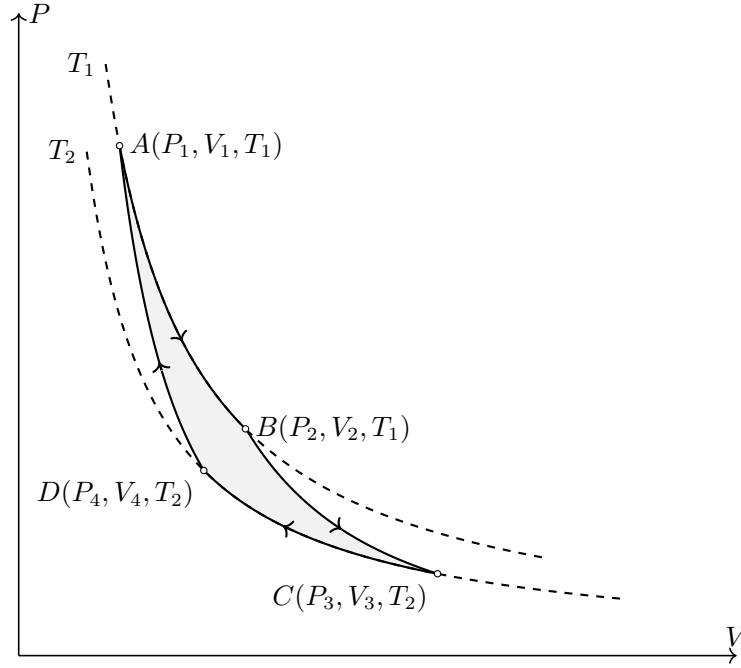


图 45: 卡诺正循环

卡诺正循环分为四个过程：

1. 等温膨胀过程 $A-B$ ，温度不变 ($T_1 \rightarrow T_1$)，体积增大 ($V_1 \rightarrow V_2$)。
2. 绝热膨胀过程 $B-C$ ，温度降低 ($T_1 \rightarrow T_2$)，体积增大 ($V_2 \rightarrow V_3$)。
3. 等温压缩过程 $C-D$ ，温度不变 ($T_2 \rightarrow T_2$)，体积减小 ($V_3 \rightarrow V_4$)。
4. 绝热压缩过程 $D-A$ ，温度升高 ($T_2 \rightarrow T_1$)，体积减小 ($V_4 \rightarrow V_1$)。

卡诺正循环工作于温度为 T_1 的高温热源和温度为 T_2 的低温热源：

1. 等温膨胀过程 $A-B$ ，工质从温度 T_1 的高温热源吸收热量 Q_1 ，能量用于对外界做功。
2. 绝热膨胀过程 $B-C$ ，工质绝热，内能减少使得温度下降至 T_2 ，能量用于对外界做功。
3. 等温压缩过程 $C-D$ ，工质向温度 T_2 的低温热源放出热量 Q_2 ，能量来自受外界做功。
4. 绝热压缩过程 $D-A$ ，工质绝热，内能增加使得温度升高至 T_1 ，能量来自受外界做功。

卡诺正循环对应的机械称为卡诺热机，现在我们研究卡诺热机的效率。

在等温膨胀 $A(V_1, T_1) - B(V_2, T_1)$ 中，从高温热源吸收的热量为：

$$Q_1 = + \left(\frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (1)$$

在等温压缩 $C(V_3, T_2) - D(V_4, T_2)$ 中，向低温热源放出的热量为：

$$Q_2 = - \left(\frac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_4}{V_3} \right) = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_3}{V_4} \quad (2)$$

对绝热膨胀 $B(V_2, T_1) - C(V_3, T_2)$ 使用绝热方程：

$$T_1 \cdot V_2^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_3^{\gamma-1} \quad (3)$$

对绝热压缩 $D(V_4, T_2) - A(V_1, T_1)$ 使用绝热方程：

$$T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_4^{\gamma-1} \quad (4)$$

将两个绝热方程作比可以得到：

$$\frac{T_1 \cdot V_2^{\gamma-1}}{T_1 \cdot V_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2 \cdot V_3^{\gamma-1}}{T_2 \cdot V_4^{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad (5)$$

将吸收和放出的热量作比可得：

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}}{\frac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_3}{V_4}} = \frac{T_1}{T_2} \quad (6)$$

卡诺热机的效率的计算公式：

$$\eta_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

卡诺热机的效率 η_C 只和高温热源和低温热源的温度有关。

卡诺热机的效率 η_C 的计算公式指出，温差越大，低温热源的温度越低，效率越高。

由于低温热源的温度 $T_2 \neq 0$ ，故卡诺热机的效率 $\eta < 1$ 。

8.9.4 卡诺逆循环

卡诺逆循环以理想气体为工质，由两个等温过程和两个绝热过程组成的循环过程。

卡诺逆循环可以用 $P-V$ 图上的封闭曲线表示：

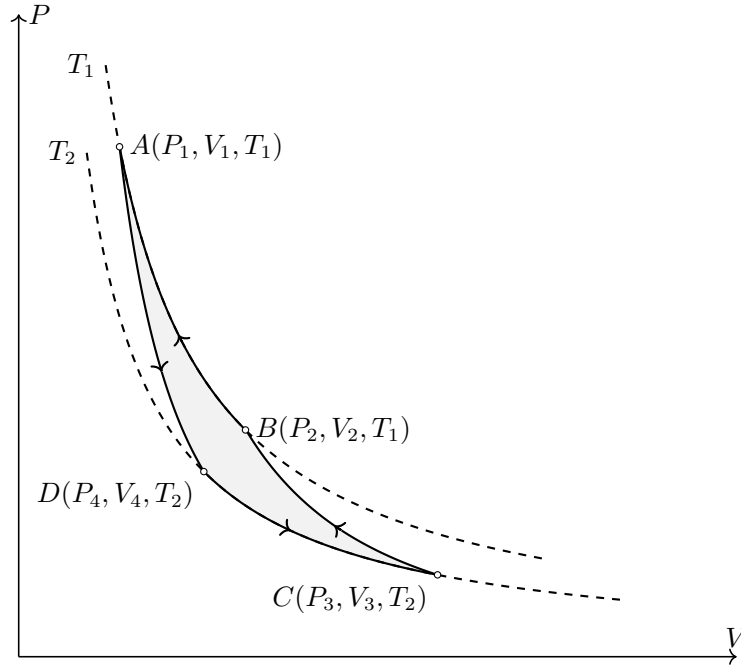


图 46: 卡诺逆循环

卡诺逆循环分为四个过程：

1. 绝热膨胀过程 $A-D$ ，温度降低 ($T_1 \rightarrow T_2$)，体积增大 ($V_1 \rightarrow V_4$)。
2. 等温膨胀过程 $D-C$ ，温度不变 ($T_2 \rightarrow T_2$)，体积增大 ($V_4 \rightarrow V_3$)。
3. 绝热压缩过程 $C-B$ ，温度升高 ($T_2 \rightarrow T_1$)，体积减小 ($V_3 \rightarrow V_2$)。
4. 等温压缩过程 $B-A$ ，温度不变 ($T_1 \rightarrow T_1$)，体积减小 ($V_2 \rightarrow V_1$)。

卡诺逆循环工作于温度为 T_1 的高温热源和温度为 T_2 的低温热源：

1. 绝热膨胀过程 $A-D$ ，工质绝热，内能减少使得温度下降至 T_2 ，能量用于对外界做功。
2. 等温膨胀过程 $D-C$ ，工质从温度 T_2 的低温热源吸收热量 Q_2 ，能量用于对外界做功。
3. 绝热压缩过程 $C-B$ ，工质绝热，内能增加使得温度升高至 T_1 ，能量来自受外界做功。
4. 等温压缩过程 $B-A$ ，工质向温度 T_1 的高温热源放出热量 Q_1 ，能量来自受外界做功。

卡诺逆循环对应的机械称为卡诺热泵，现在我们研究卡诺热泵的效能。

在等温膨胀 $D(V_4, T_2) - C(V_3, T_2)$ 中，从低温热源吸收的热量为：

$$Q_2 = + \left(\frac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_3}{V_4} \right) = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_3}{V_4} \quad (1)$$

在等温压缩 $B(V_2, T_1) - A(V_1, T_1)$ 中，向高温热源放出的热量为：

$$Q_1 = - \left(\frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_1}{V_2} \right) = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2)$$

对绝热膨胀 $A(V_1, T_1) - D(V_4, T_2)$ 使用绝热方程：

$$T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_4^{\gamma-1} \quad (3)$$

对绝热压缩 $C(V_3, T_2) - B(V_2, T_1)$ 使用绝热方程：

$$T_1 \cdot V_2^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_3^{\gamma-1} \quad (4)$$

将两个绝热方程作比可以得到：

$$\frac{T_1 \cdot V_2^{\gamma-1}}{T_1 \cdot V_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2 \cdot V_3^{\gamma-1}}{T_2 \cdot V_4^{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad (5)$$

将放出和吸收的热量作比可得：

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 - \ln \frac{V_2}{V_1}}{\frac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 - \ln \frac{V_3}{V_4}} = \frac{T_1}{T_2} \quad (6)$$

卡诺热泵的效能的计算公式：

$$w_{C_h} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

$$w_{C_c} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

卡诺热泵的效能 w 只和高温热源和低温热源的温度有关。

卡诺热泵的供热效能 w_{C_h} 的计算公式指出，温差越大，高温热源的温度越低，供热效能越低。

卡诺热泵的制冷效能 w_{C_c} 的计算公式指出，温差越大，低温热源的温度越低，制冷效能越低。

由于低温热源的温度 $T_2 \neq 0$ ，故卡诺热泵的供热效能 $w_{C_h} > 1$ 。

8.10 热力学第二定律

热力学第二定律（克劳修斯）：不可能把热量从低温物体传递到高温物体，而不产生其他影响。

热力学第二定律的克劳修斯表述指出，自发的热量传递具有不可逆性，只能由高温到低温。

热泵虽然可以使得热量从低温物体传递到高温物体，但是却需要通过热泵额外做功才能实现。

热力学第二定律（开尔文）：不可能从单一热源吸收热量，使之完全变为功而不产生其他影响。

热力学第二定律的开尔文表述指出，功可以自发的转变为热，热却不可以自发的转变为功。

热力学第二定律的开尔文表述同时说明了热机的效率 η 不可能达到 100%。

根据热机效率的计算公式：

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (1)$$

观察该公式可以发现，假如向低温热源放出的热量 $Q_2 = 0$ ，那么热机的效率就可以达到 100%。

然而这是不可能实现的，因为卡诺从理论上证明了卡诺热机在温差一定时具有最高的效率。

根据卡诺热机效率的公式：

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (2)$$

观察该公式可以发现，只有当低温热源的温度为 $T_2 = 0$ ，那么卡诺热机的效率才能达到 100%。

但是绝对零度是不可能达到的，这就说明了热机不可能使热完全转化为功。

热力学第一定律和热力学第二定律是缺一不可的：

1. 热力学第一定律说明了任何过程必须满足能量守恒定律。
2. 热力学第二定律说明了并非所有满足能量守恒定理的过程均能实现。

8.10.1 第二类永动机

第二类永动机指的是可以从单一热源吸收热量并完全转变为功而不产生其他影响的机器。

第二类永动机违背了热力学第二定律的开尔文表述，因此不可能实现。

第三部分 电

9 真空中静电场

9.1 电荷

电荷只有两种类型：负电荷，正电荷。

1. 负电荷，用 $-$ 表示，例如电子所带的电荷就为负电荷。
2. 正电荷，用 $+$ 表示，例如质子所带的电荷就为正电荷。

例如丝绸和玻璃棒摩擦会发生电荷的转移，丝绸带负电荷，玻璃棒带正电荷。

例如毛皮和橡胶棒摩擦会发生电荷的转移，毛皮带正电荷，橡胶棒带负电荷。

电荷量衡量了物体所带电荷数量的多少，通常用字母 Q 表示，是一个标量，单位是C。

电荷量的单位库伦定义如下：

$$C = A \cdot s$$

电荷量在不引起误解的情况下，也可以简称为电荷或电量。

点电荷是一种理想模型，只具有质量和电荷量，没有大小，没有形状。

点电荷通常在带电体的大小远远小于带电体的距离时使用，此时大小形状相较于距离可以忽略。

电荷守恒定律：在一个孤立系统中，电荷既不能被创造，电荷也不能被消灭，只能从一个物体转移到另一个物体，或者从物体的一个部分转移到另一个部分。

电荷守恒定律描述了电荷在一切宏观过程和微观过程中所遵循的基本规律。

9.1.1 元电荷

实验表明，物体所带电荷量的值是不连续的，物体所带电荷量总是某一值的整数倍。

研究表明，这一数值为质子或电子所带电荷量的大小，称之为元电荷或基本电荷。

元电荷的数值为：

$$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{C}$$

元电荷的数值由密立根通过密立根油滴实验测定。

如果用元电荷 e 表示质子的电荷量，那么质子的电荷量可以写作 $+e$ 。

如果用元电荷 e 表示电子的电荷量，那么电子的电荷量可以写作 $-e$ 。

9.2 电场

电荷间有相互作用力，同性电荷相互排斥，异性电荷相互吸引。

电荷不需要相互接触就可以有作用力，但是这种作用实际并不是超距的。

电荷间的相互作用是通过电场实现的：

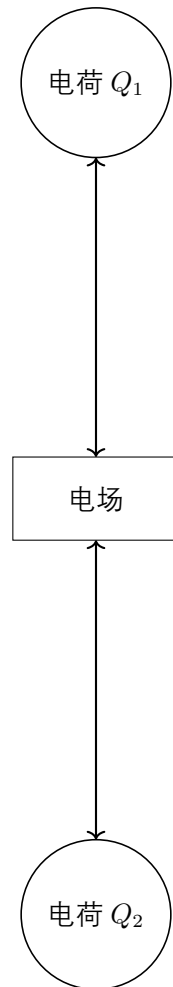


图 47: 电荷通过电场传递相互作用力

电荷在其周围会激发电场，由静止电荷激发的电场称为静电场。

电场是一种特殊但客观存在的物质，因此电场也具有能量和动量。

9.3 电场力

电场力衡量了电荷在电场中受到的力，通常用符号 \boldsymbol{F} 表示，是一个矢量，单位是N。

电场力的计算公式（矢量形式）：

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \boldsymbol{r}_0$$

电场力的计算公式（标量形式）：

$$F = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

该结论也被称为库伦定律。

其中 ε_0 为真空电容率，其取值为 $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ 。

其中 Q_1, Q_2 代表了施力电荷和受力电荷，而 \boldsymbol{r}_0 代表施力电荷和受力电荷的位矢的单位矢量。

当两个电荷同号时的电场力：

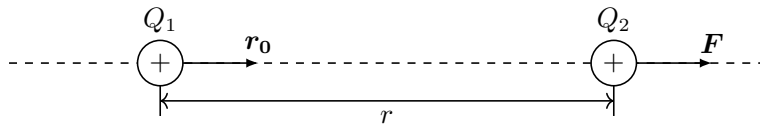


图 48: 两个电荷同号时的受力情况

当两个电荷异号时的电场力：

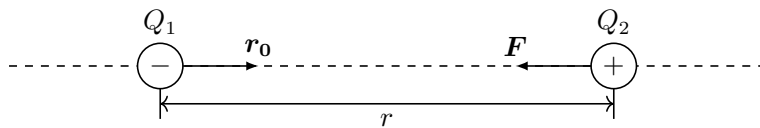


图 49: 两个电荷异号时的受力情况

第一种情况中，电荷量的乘积 $Q_1 \cdot Q_2$ 为正值，故电场力 \boldsymbol{F} 的方向和 \boldsymbol{r}_0 方向相同。

第二种情况中，电荷量的乘积 $Q_1 \cdot Q_2$ 为负值，故电场力 \boldsymbol{F} 的方向和 \boldsymbol{r}_0 方向相反。

库伦定律中也可以引入一比例系数 $k = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} = 8.98 \times 10^9 (\text{N} \cdot \text{m}^2)/\text{C}^2$ 。

库伦定律会因此变得更为简单，但这会使更为常用的导出公式变得复杂，故通常不使用该系数。

9.4 电场强度

电场强度衡量了电场的强弱和方向，通常用符号 \mathbf{E} 表示，是一个矢量，单位是N/C。

电场强度的计算公式（矢量形式）：

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2} \cdot \mathbf{r}_0$$

电场强度的计算公式（标量形式）：

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2}$$

其中 Q_1 代表场源电荷，而 \mathbf{r}_0 代表场源指向场点的位矢的单位矢量。

其中 Q_2 代表试验电荷，而 \mathbf{F} 为试验电荷在场源电荷中某一处受到的电场力。

试验电荷的电荷量十分的小，以至于其自身产生的电场相较于场源电荷的电场可以忽略。

电场强度定义为单位电荷量的试验电荷在电场中所受到的电场力。

电场强度的计算公式的推导如下：

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q_2} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2} \cdot \mathbf{r}_0 \quad (1)$$

当场源电荷为正电荷时的电场强度：

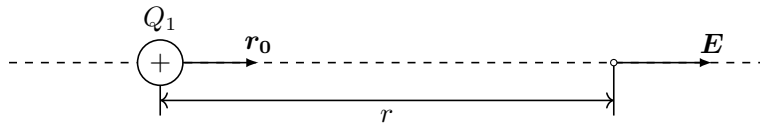


图 50: 场源电荷为正电荷时的电场强度

当场源电荷为负电荷时的电场强度：

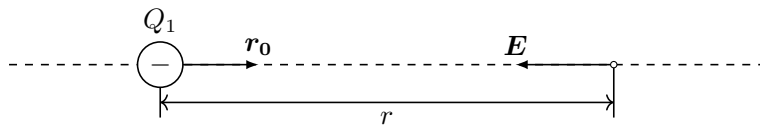


图 51: 场源电荷为负电荷时的电场强度

第一种情况中，场源电荷的电荷量的乘积 Q_1 为正值，故电场强度 \mathbf{E} 的方向和 \mathbf{r}_0 方向相同。

第二种情况中，场源电荷的电荷量的乘积 Q_1 为负值，故电场强度 \mathbf{E} 的方向和 \mathbf{r}_0 方向相反。

9.4.1 电场线

电场线可以形象的表示电场强度的分布情况，电场线又可以称为 E 线。

电场线的密度表示了电场强度的大小，电场线越密电场强度越大，电场线越疏电场强度越小。

电场线上任意一点的切线方向与该处电场强度方向相同。

正点电荷的电场线：

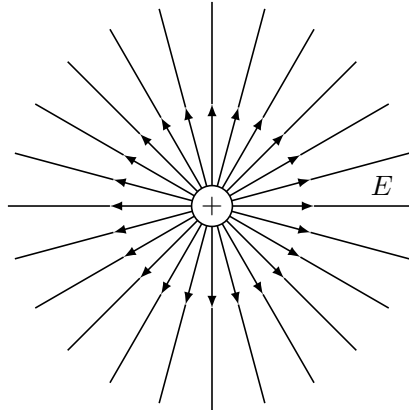


图 52: 正点电荷的电场线

负点电荷的电场线：

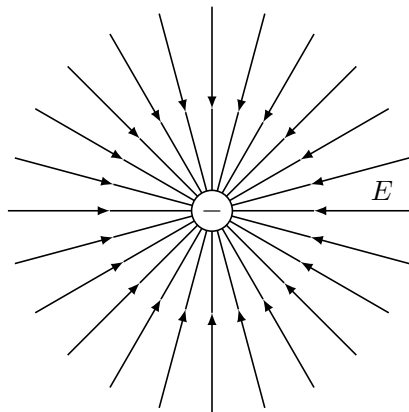


图 53: 负点电荷的电场线

静电场的电场线具有两个特点：

1. 电场线不能相交，这是因为电场中每一点的电场强度的方向是唯一确定的。
2. 电场线不是闭合曲线，始于正电荷，止于负电荷，故静电场称为有源场。

9.4.2 电场强度的迭加原理

电场强度的迭加原理：点电荷系在某一场点产生的电场强度，等于该点电荷系中的每一个电荷，在其单独存在时，分别在该场点产生的电场强度的矢量和。

电场强度的迭加原理的数学表达：

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i$$

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \mathbf{r}_{0i}$$

设点电荷系由 n 个点电荷 $Q_1 \sim Q_n$ 组成，使用的试验电荷为 q 。

设点电荷系中的 n 个点电荷在场点处所施加的电场力为 $\mathbf{F}_1 \sim \mathbf{F}_n$ 。

设点电荷系中的 n 个点电荷在场点处产生的电场强度为 $\mathbf{E}_1 \sim \mathbf{E}_n$ 。

设点电荷系中的 n 个点电荷至场点处的单位矢量依次为 $\mathbf{r}_{01} \sim \mathbf{r}_{0n}$ 。

设场点处试验电荷所受电场力的合力为 \mathbf{F} ，设场电处的电场强度为 \mathbf{E} 。

根据电场强度的定义式：

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{q} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_i \cdot q}{r^2} \cdot \mathbf{r}_{0i} \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_i \cdot q}{r^2} \cdot \frac{1}{q} \cdot \mathbf{r}_{0i} \quad (3)$$

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{r^2} \cdot \mathbf{r}_{0i} \quad (4)$$

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \quad (5)$$

由此运用了电场力的迭加原理推导出了电场强度的迭加原理。

9.4.3 电荷连续分布时的电场强度

电荷线密度为 λ 的线带电体的电场强度为：

$$\mathbf{E} = \int_L \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dL}{r^2} \cdot \mathbf{r}_0$$

电荷面密度为 σ 的面带电体的电场强度为：

$$\mathbf{E} = \int_S \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot dS}{r^2} \cdot \mathbf{r}_0$$

电荷面密度为 ρ 的体带电体的电场强度为：

$$\mathbf{E} = \int_V \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\rho \cdot dV}{r^2} \cdot \mathbf{r}_0$$

我们可以利用电场强度的迭加原理，计算电荷连续分布的带电体的电场强度。

我们可以将带电体所携带的电荷看作许多电荷元 dQ 组成的集合。

电荷元 dQ 产生的电场强度 $d\mathbf{E}$ 为：

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2} \cdot \mathbf{r}_0$$

对于电荷线密度为 λ 的线带电体：

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dL}{r^2} \cdot \mathbf{r}_0 \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = \int_L \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dL}{r^2} \cdot \mathbf{r}_0 \quad (2)$$

对于电荷面密度为 σ 的面带电体：

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot dS}{r^2} \cdot \mathbf{r}_0 \quad (3)$$

$$\mathbf{E} = \int_S \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot dS}{r^2} \cdot \mathbf{r}_0 \quad (4)$$

对于电荷体密度为 ρ 的体带电体：

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\rho \cdot dV}{r^2} \cdot \mathbf{r}_0 \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = \int_V \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\rho \cdot dV}{r^2} \cdot \mathbf{r}_0 \quad (6)$$

由此我们得到了计算电荷连续分布时的电场强度的方法。

9.4.4 电偶极子

电偶极子由指的是由两个的点电荷构成的结构，两者电量相等，同时符号相反。

电偶极子的示意图：

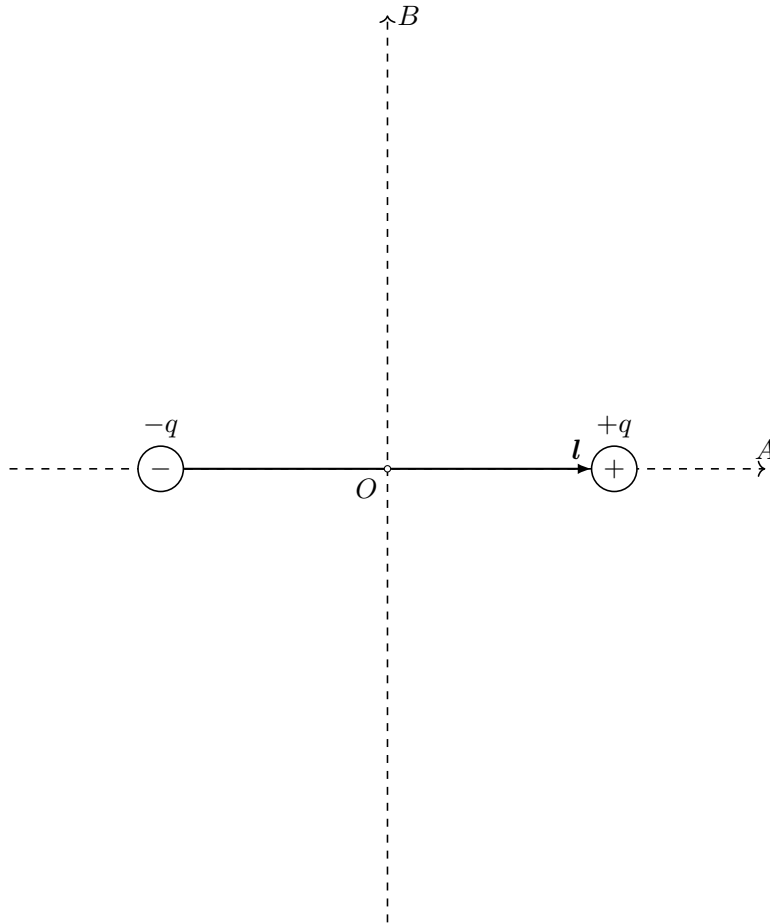


图 54: 电偶极子的示意图

定义电偶极子的电偶极距：

$$\mathbf{p} = q \cdot \mathbf{l}$$

其中 \mathbf{l} 称为电偶极子的轴，为一个由负电荷指向正电荷的矢量，没有单位。

通常会研究场点在以下两个位置时的电场情况：

1. 场点位于电偶极子的轴的延长线上，即位于 A 轴上，此时场点通常记作 A 。
2. 场点位于电偶极子的轴的中垂线上，即位于 B 轴上，此时场点通常记作 B 。

9.4.5 电偶极子轴线的延长线上的电场强度

假设在 A 轴上有一点 A ，其至中点的距离的大小为 r 。

场点 A 处的电场强度的计算公式：

$$\mathbf{E}_A = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot \mathbf{p} \cdot r}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}$$

场点 A 在中心点右侧时的电场强度情况：

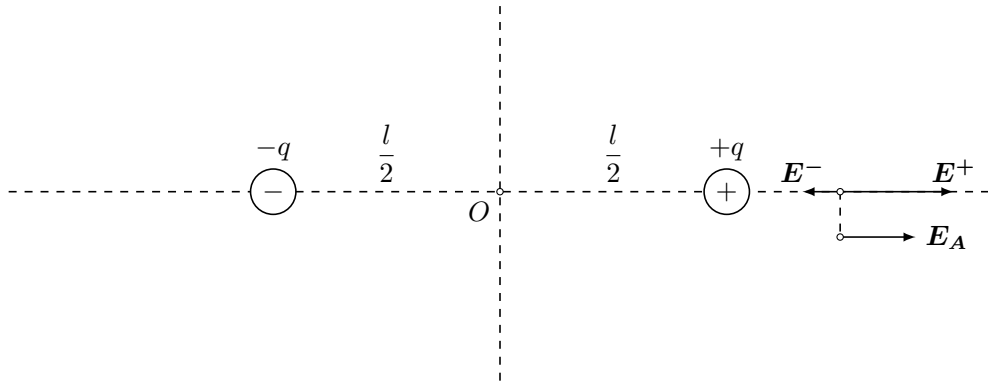


图 55: 场点 A 在中心点右侧且在电偶极子外的情况

场点 A 在中心点左侧时的电场强度情况：

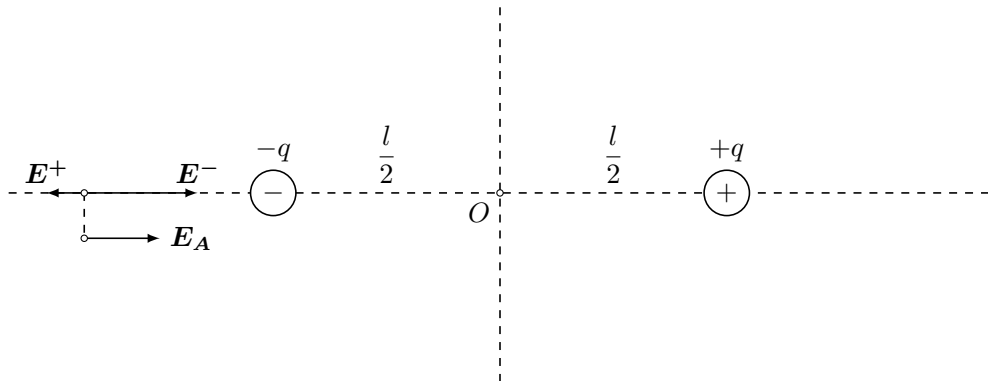


图 56: 场点 A 在中心点右侧且在电偶极子外的情况

由于通常我们不关心电偶极子间的情况，因此我们此处只研究电偶极子外的情况。

当场点 A 在中心点 O 的右侧时有 $E^+ > E^-$ ，故场点 A 处的场强的大小为： $E_A = E^+ - E^-$ 。

当场点 A 在中心点 O 的左侧时有 $E^- > E^+$ ，故场点 A 处的场强的大小为： $E_A = E^- - E^+$ 。

场点 A 在中心点右侧时有:

$$E_A = E^+ - E^- = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left[\frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] \quad (1)$$

场点 A 在中心点左侧时有:

$$E_A = E^- - E^+ = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left[\frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] \quad (2)$$

两者的结论是完全一致的, 因此可以统一进行推导。

变形化简场强 E_A 可得:

$$E_A = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left[\frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] \quad (3)$$

$$E_A = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] \quad (4)$$

$$E_A = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2 - \left(r - \frac{l}{2}\right)^2}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \quad (5)$$

$$E_A = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{r^2 + lr + \frac{l^2}{4} - r^2 + lr - \frac{l^2}{4}}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \quad (6)$$

$$E_A = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot l \cdot r}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \quad (7)$$

$$E_A = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot q \cdot l \cdot r}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \quad (8)$$

$$E_A = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot p \cdot r}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \quad (9)$$

对于场点 A , 场强方向总是与电偶极矩的方向相同, 故应当取 $+p$ 。

电偶极子轴线的延长线上的电场强度（精确值）：

$$\mathbf{E}_A = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot \mathbf{p} \cdot r}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}$$

电偶极子轴线的延长线上的电场强度（近似值）：

$$\mathbf{E}_A \approx \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot \mathbf{p}}{r^3}$$

电偶极子轴线的延长线上的电场强度的函数图像：

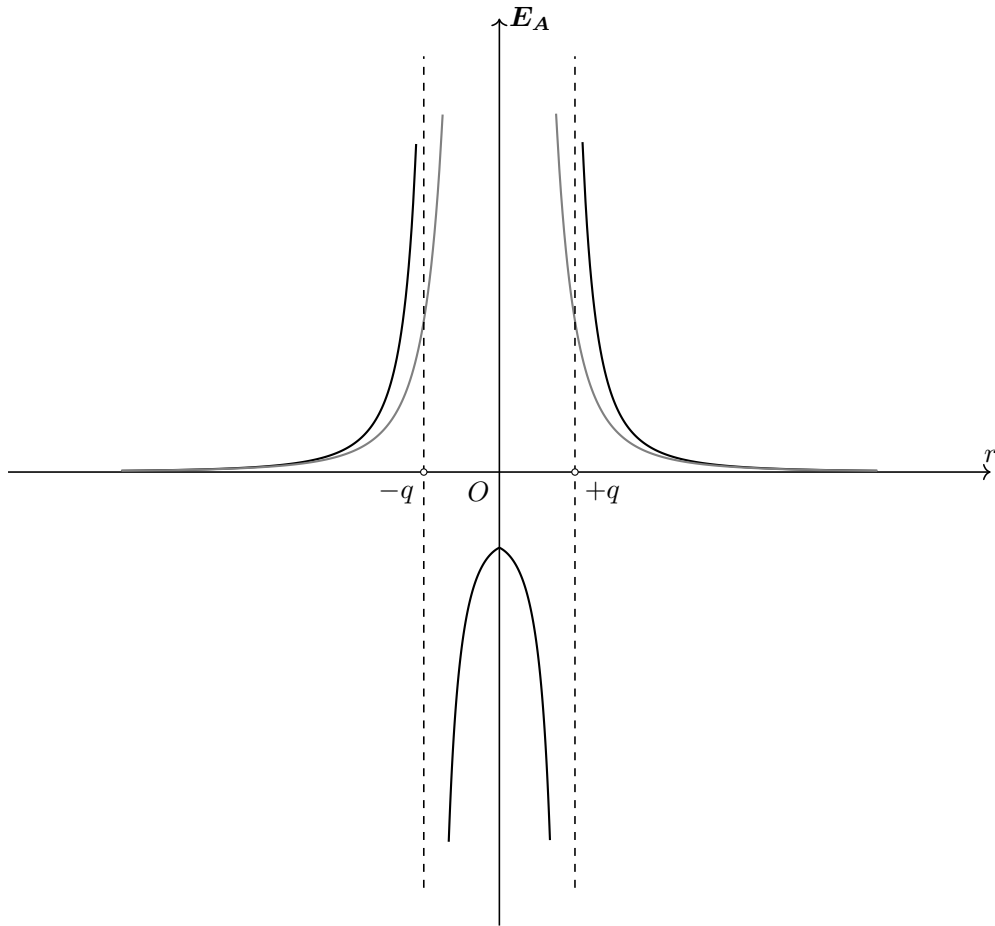


图 57: 电偶极子轴线的延长线上的电场强度的函数曲线

此处的近似假设为 $r \gg l$ ，故可以近似认为 $\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^2 = r^4$ 从而得到近似值。

该图像中，黑色实线代表电场强度精确值的函数曲线。

该图像中，灰色实线代表电场强度近似值的函数曲线。

9.4.6 电偶极子轴线的中垂线上的电场强度

假设在 B 轴上有一点 B ，其至中点的距离的大小为 r 。

场点 B 处的电场强度的计算公式：

$$\mathbf{E}_B = -\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p}}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

场点 B 在中心上侧时的电场强度情况：

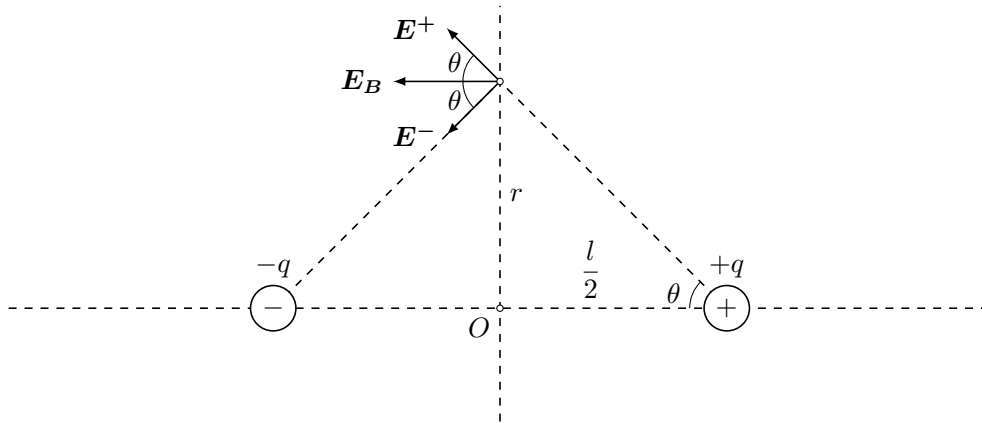


图 58: 场点 B 在中心点上侧时电场强度情况

场点 B 在中心下侧时的电场强度情况：

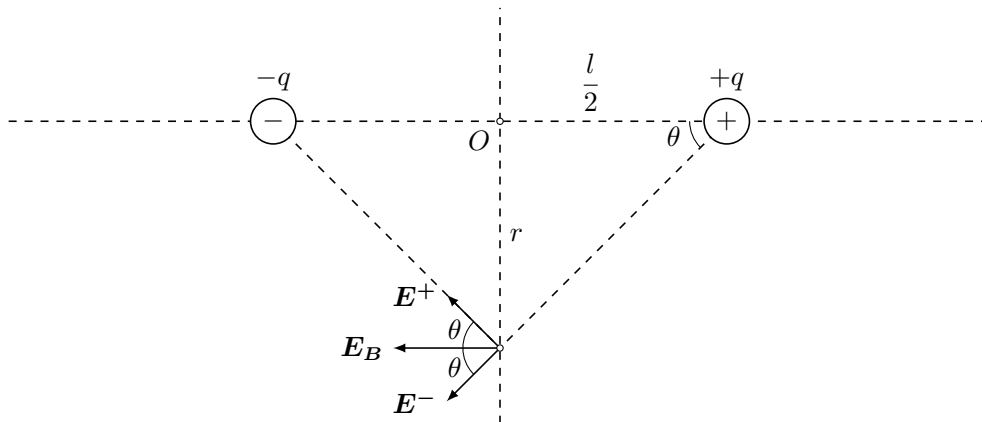


图 59: 场点 B 在中心点下侧时电场强度情况

场点 B 无论在中心点上侧还是下侧，其电场强度方向均是向左的。

场点 B 处的电场强度大小为： $E_B = (E^+ + E^-) \cdot \cos \theta$ 。

由图可以得到 $\cos \theta$ 的值为：

$$\cos \theta = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}} \quad (1)$$

正电荷的场强可以表示为：

$$E^+ = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}} \quad (2)$$

负电荷的场强可以表示为：

$$E^- = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}} \quad (3)$$

由于两者产生的场强相等：

$$E_B = (E^+ + E^-) \cdot \cos \theta \quad (4)$$

$$E_B = 2 \cdot \cos \theta \cdot E^+ \quad (5)$$

变形化简场强 E_B 可得：

$$E_B = 2 \cdot \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}} \quad (6)$$

$$E_B = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}} \cdot \frac{l}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}} \quad (7)$$

$$E_B = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^1} \cdot \frac{l}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (8)$$

$$E_B = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot l}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (9)$$

$$E_B = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{p}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (10)$$

对于场点 B ，场强方向总是与电偶极矩的方向相反，故应当取 $-p$ 。

电偶极子轴线的中垂线上的电场强度（精确值）：

$$\mathbf{E}_B = -\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p}}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

电偶极子轴线的中垂线上的电场强度（近似值）：

$$\mathbf{E}_B = -\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p}}{r^3}$$

电偶极子轴线的中垂线上的电场强度的函数图像：

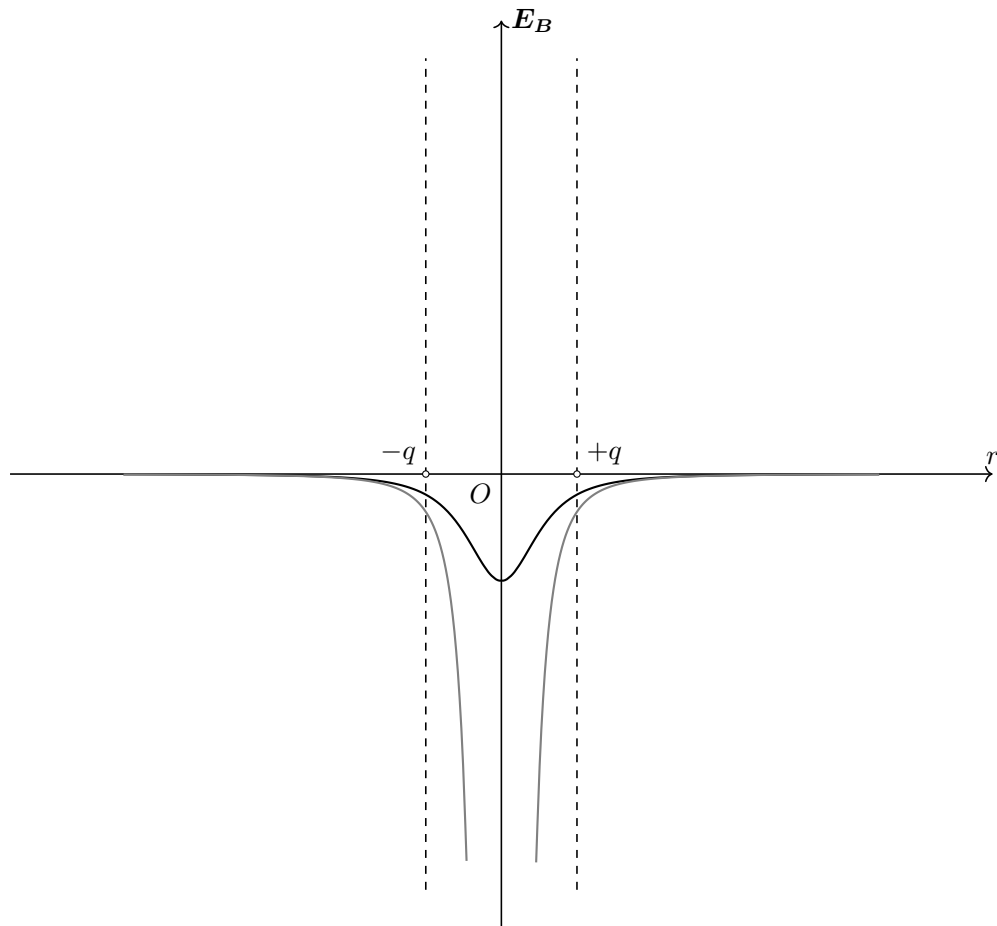


图 60: 电偶极子轴线的中垂线上的电场强度的函数曲线

此处的近似假设为 $r \gg l$ ，故可以近似认为 $\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = r^3$ 从而得到近似值。

该图像中，黑色实线代表电场强度精确值的函数曲线。

该图像中，灰色实线代表电场强度近似值的函数曲线。

9.4.7 均匀带电圆环轴线上的电场强度

均匀带电圆环轴线上的电场强度：

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot r}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

均匀带电圆环的示意图：

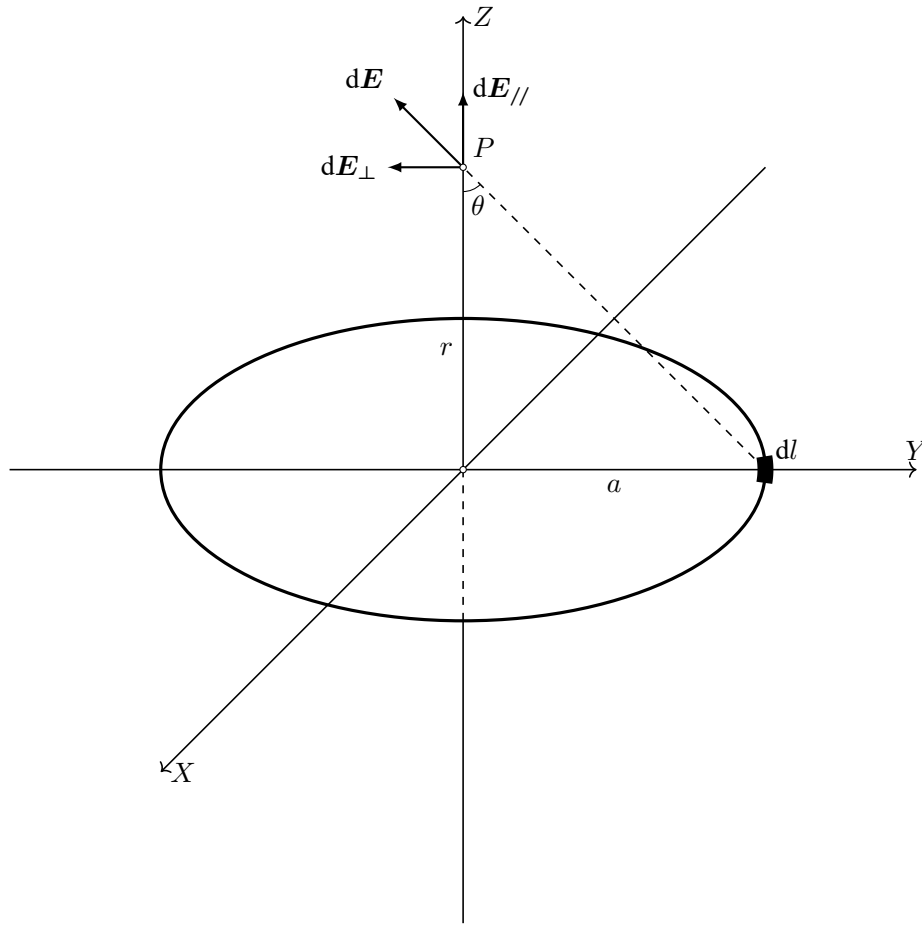


图 61: 均匀带电圆环的示意图

假设一带电圆环，其半径为 a ，其电荷的线密度为 λ ，其电荷量为 Q 。

显然该带电圆环的电荷线密度 λ 和电荷量 Q 有以下关系：

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot \lambda \quad (1)$$

现在考虑带点圆环的轴上至圆心距离为 r 的一点 P 处的电场强度。

在均匀带电圆环上取一电荷元：

$$dQ = \lambda \cdot dl \quad (2)$$

该电荷元在 P 点产生的电场强度为：

$$dE = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dl}{r^2 + a^2} \quad (3)$$

电场强度 dE 在平行于轴的分量为 $dE_{//}$ ：

$$dE_{//} = dE \cdot \sin \theta \quad (4)$$

$$dE_{//} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dl}{r^2 + a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \quad (5)$$

$$dE_{//} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot a \cdot dl}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

电场强度 dE 在垂直于轴的分量为 dE_{\perp} ：

$$dE_{\perp} = dE \cdot \cos \theta \quad (7)$$

$$dE_{\perp} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dl}{r^2 + a^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \quad (8)$$

$$dE_{\perp} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot r \cdot dl}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (9)$$

带点圆环上任意直径两端的电荷元在 P 点产生的电场强度分量 dE_{\perp} 将相互抵消，故无需考虑。

带电圆环轴线上的电场强度只由电场强度分量 $dE_{//}$ 决定：

$$E = \int_L dE_z \quad (10)$$

$$E = \int_0^{2\pi a} \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot r \cdot dl}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (11)$$

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot r}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^{2\pi a} dl \quad (12)$$

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \lambda \cdot r}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (13)$$

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot r}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (14)$$

由此得到了均匀带电圆环轴线上任意一点 P 的电场强度大小。

均匀带电圆环轴线上的电场强度:

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot r}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

均匀带电圆环轴线上的电场强度的函数曲线:

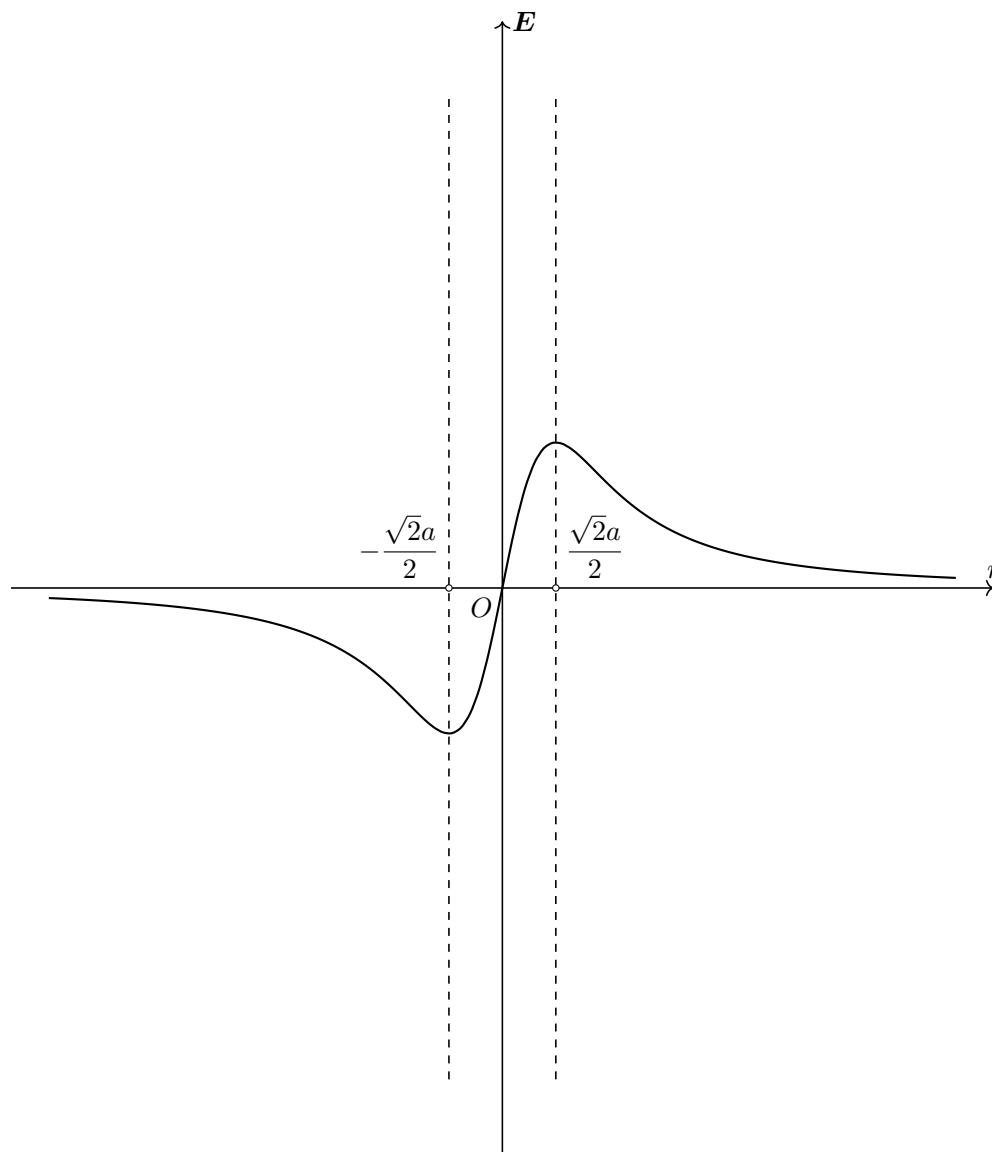


图 62: 均匀带电圆环轴线上的电场强度的函数曲线

均匀带电圆环轴线上的电场强度的大小左侧在 $r = -\frac{\sqrt{2}a}{2}$ 时取最大值。

均匀带电圆环轴线上的电场强度的大小右侧在 $r = +\frac{\sqrt{2}a}{2}$ 时取最大值。

9.4.8 均匀带电圆盘轴线上的电场强度

均匀带电圆盘轴线上的电场强度：

$$E = \frac{1}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\sigma - \frac{\sigma \cdot r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right)$$

均匀带电圆环的示意图：

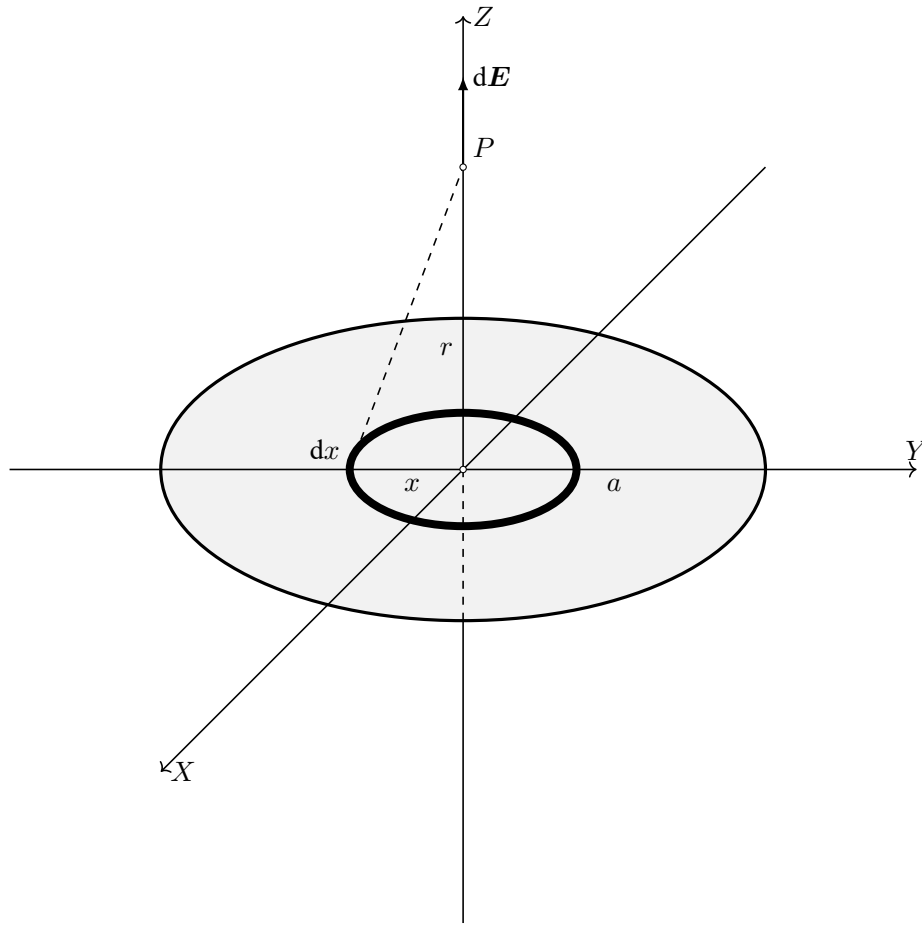


图 63: 均匀带电圆盘的示意图

假设一带电圆盘，其半径为 a ，其电荷的面密度为 σ ，其电荷量为 Q 。

显然该带电圆环的电荷面密度 σ 和电荷量 Q 有以下关系：

$$Q = \pi \cdot a^2 \cdot \sigma \cdot r \quad (1)$$

现在考虑带点圆盘的轴上至圆心距离为 r 的一点 P 处的电场强度。

在均匀带电圆盘上取一细圆环：

$$dQ = 2\pi \cdot x \cdot \sigma \cdot dx \quad (2)$$

该细圆环在 P 点产生的电场强度为：

$$dE = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{dQ \cdot r}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

$$dE = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{2\pi \cdot x \cdot \sigma \cdot r}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx \quad (4)$$

$$dE = \frac{\sigma \cdot r}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx \quad (5)$$

将细圆环在 P 点产生的电场强度积分：

$$E = \int_L dE \quad (6)$$

$$E = \int_0^a \frac{\sigma \cdot r}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx \quad (7)$$

$$E = \frac{\sigma \cdot r}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_0^a \frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx \quad (8)$$

$$E = \frac{\sigma \cdot r}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_0^a \frac{x}{\sqrt{(r^2 + x^2)^3}} \cdot dx \quad (9)$$

$$E = \frac{\sigma \cdot r}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right]_0^a \quad (10)$$

$$E = \frac{\sigma \cdot r}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right] \quad (11)$$

$$E = \frac{1}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\sigma - \frac{\sigma \cdot r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \quad (12)$$

由此得到了均匀带电圆盘轴线上任意一点 P 的电场强度大小。

均匀带电圆盘轴线上的电场强度:

$$E = \frac{1}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\sigma - \frac{\sigma \cdot r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right)$$

均匀带电圆盘轴线上的电场强度的函数曲线:

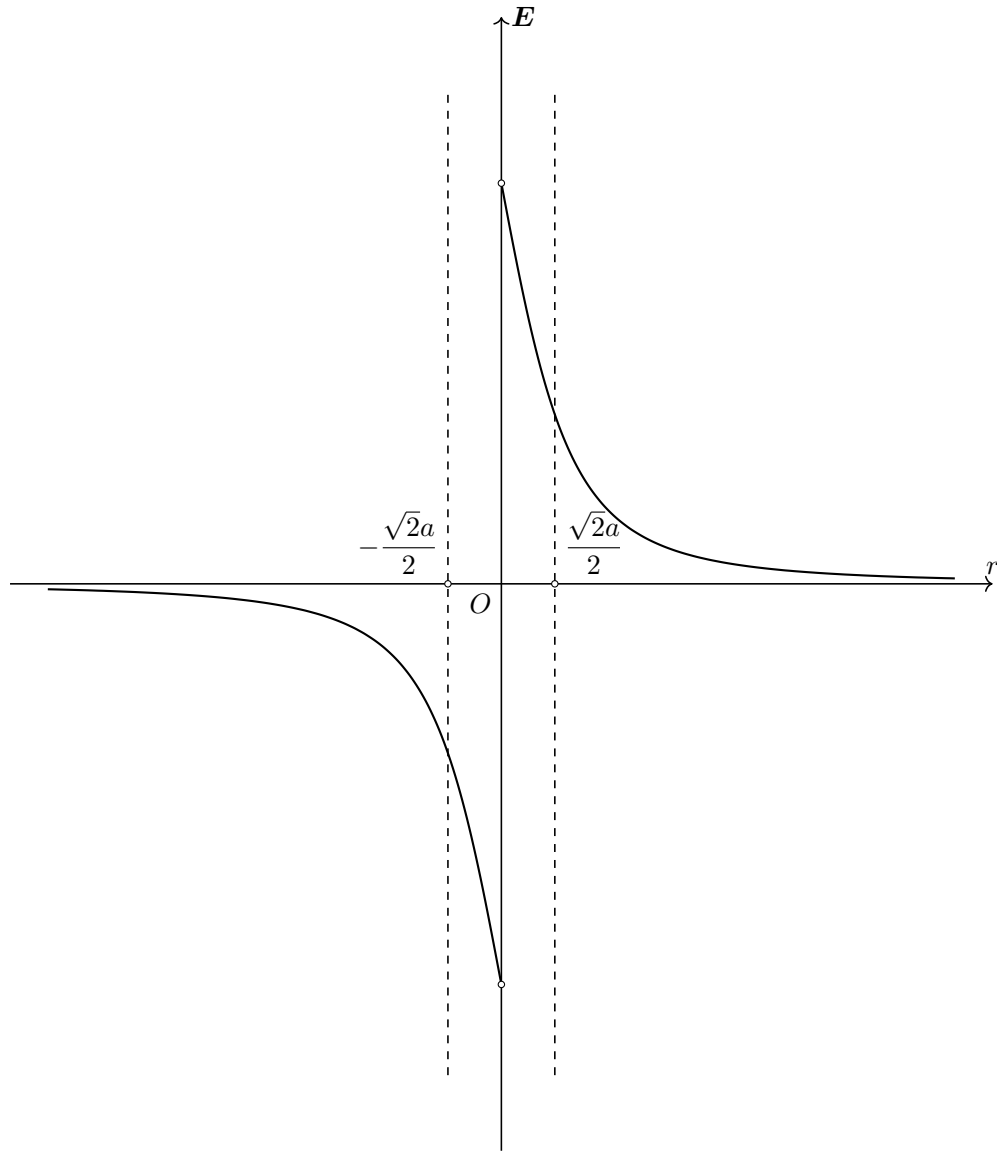


图 64: 均匀带电圆盘轴线上的电场强度的函数曲线

均匀带电圆盘轴线上的电场强度在 $r = 0$ 处从左右各逼近一个定值。

均匀带电圆盘轴线上的电场强度在 $r = 0$ 处不连续。

9.5 电通量

电通量衡量了电场强度在面积上的积累，通常用 Φ_E 表示，是一个标量，单位是 $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ 。

电通量的计算公式（电场分布均匀）：

$$\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}$$

$$\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos \theta$$

电通量的计算公式（电场分布不均）：

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

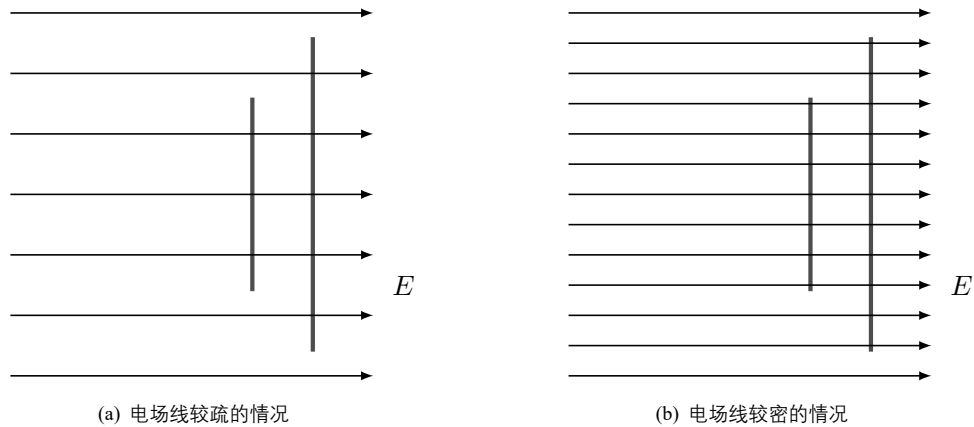
$$\Phi_E = \int_S E \cdot dS \cdot \cos \theta$$

其中 θ 代表电场强度 \mathbf{E} 和面积 \mathbf{S} 的夹角，此处面积 \mathbf{S} 的方向定义为其法向的方向。

电场线可以形象的表示电场，电场线的密度表示电场强度，电场线的数量则表示电通量。

电通量可以用通过一个曲面的电场线数量来形象表示，这是符合其定义的。

例如在下面这个例子中：



当曲面面积一定时，电场强度越大，通过曲面的电场线数量越多，表明电通量越大。

当电场强度一定时，曲面面积越大，通过曲面的电场线数量越多，表明电通量越大。

9.5.1 高斯电场定理

高斯电场定理：通过任一闭合曲面的电通量正比于其所包围电荷的电量。

高斯电场定理的数学表达：

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

高斯电场定理中，所取的闭合曲面称为高斯面。

闭合曲面的电通量中，通常人为规定由内向外的方向为面积元法向量的正方向。

当电场线由内向外穿出曲面时，电场线与面积元的法向量方向相同，故此时电通量 $\Phi_E > 0$ 。

当电场线由外向内穿入曲面时，电场线与面积元的法向量方向相反，故此时电通量 $\Phi_E < 0$ 。

高斯电场定理的示意图：

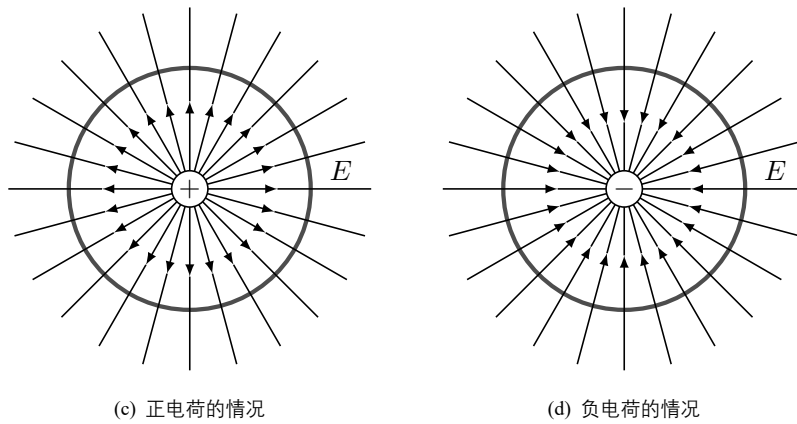


图 65: 高斯电场定律的示意图

假设一个点电荷 Q ，取以电荷为球心半径为 r 的球面作为高斯面，研究该闭合曲面上的电通量。

因为电场线总是和面积元垂直：

$$\cos \theta = 1 \quad (1)$$

因此球面上的电通量可以写作：

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \cdot \cos \theta \quad (2)$$

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (3)$$

接下来将以此推导通过该球面的电通量。

代入电场强度的计算公式可以得到：

$$\Phi_E = \oint_S E \cdot dS \quad (4)$$

$$\Phi_E = \oint_S \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot dS \quad (5)$$

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \oint_S dS \quad (6)$$

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi \cdot r^2 \quad (7)$$

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (8)$$

由此证明了闭合曲面为球面且电荷在球心时，高斯电场定理成立。

当曲面不为球面时，可以想象，其并不会影响穿过曲面的电场线数目，即不会影响电通量。

当电荷不在球心时，可以想象，其也不会影响穿过曲面的电场线数目，即不会影响电通量。

当电荷在闭合曲面外时，其对闭合曲面电通量的贡献为零，故无需考虑：

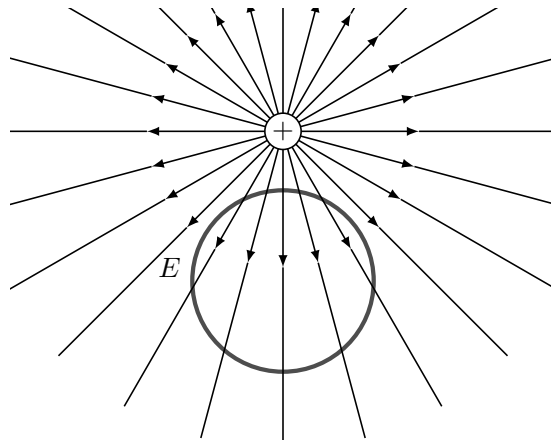


图 66: 电荷在闭合曲面外的情况

因此，对于任意闭合曲面，对于任意数目或位置的电荷，高斯电场定理均是成立的。

然而，高斯电场定理虽然是由库伦定律导出，但其适用范围更广。

高斯电场定理可以同时适用于静电场和变化电场，库伦定律只能适用于静电场。

高斯电场定理反映了电场是有源场的特性，其也是电磁场理论的基本方程之一。

9.5.2 均匀带电球面的电场强度

均匀带电球面内部的电场强度：

$$E_1 = 0 \quad (r < R)$$

均匀带电球面外部的电场强度：

$$E_2 = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (r > R)$$

均匀带电球面的示意图：

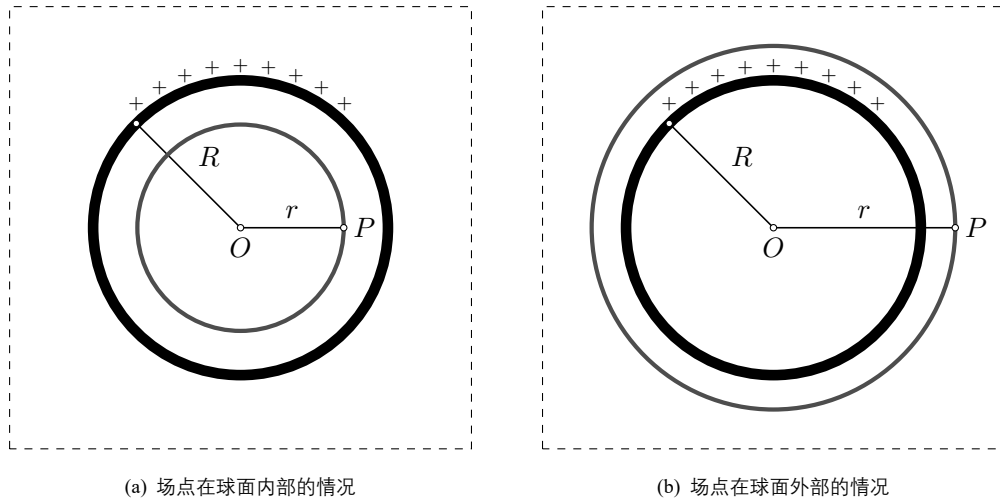


图 67: 均匀带电球面的示意图

假设一电量 Q 半径 R 的均匀带电球面，以其中心为球心取一半径 r 为半径的球面作高斯面。

假设一场点 P 至球心的距离为 r ，即场点在高斯面上，现研究该场点的电场强度情况。

若场点在带电球面内，此时高斯面内的电荷量为 0：

$$\Phi_{E_1} = 0 \quad (1)$$

若场点在带电球面外，此时高斯面内的电荷量为 Q ：

$$\Phi_{E_2} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

由此通过高斯电场定理计算得到了所取高斯面上的电通量。

因为球面至中心点的距离处处相同，所以高斯球面上的电场强度 E 是一个常量。

因此高斯球面上的电通量和电场强度有以下关系：

$$\Phi_E = \oint_S E \cdot dS \quad (3)$$

$$\Phi_E = E \cdot \oint_S dS \quad (4)$$

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi \cdot r^2 \quad (5)$$

$$E = \frac{\Phi_E}{4\pi \cdot r^2} \quad (6)$$

代入 Φ_{E_1} 可以得到场点在带电球面内的电场强度：

$$E_1 = 0 \quad (r < R) \quad (7)$$

代入 Φ_{E_2} 可以得到场点在带电球面外的电场强度：

$$E_2 = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (r > R) \quad (8)$$

均匀带电球面的电场强度的函数曲线：

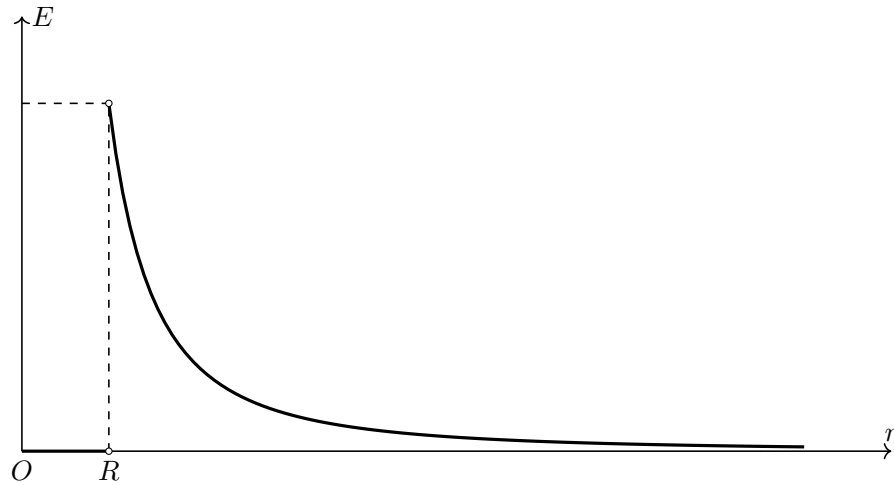


图 68: 均匀带电球面的电场强度的函数曲线

均匀带电球面外的电场强度情况等价于所有电荷集中在球心时的情况。

9.5.3 无限长均匀带电直线的电场强度

无限长均匀带电直线的电场强度：

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}$$

无限长均匀带电直线的示意图：

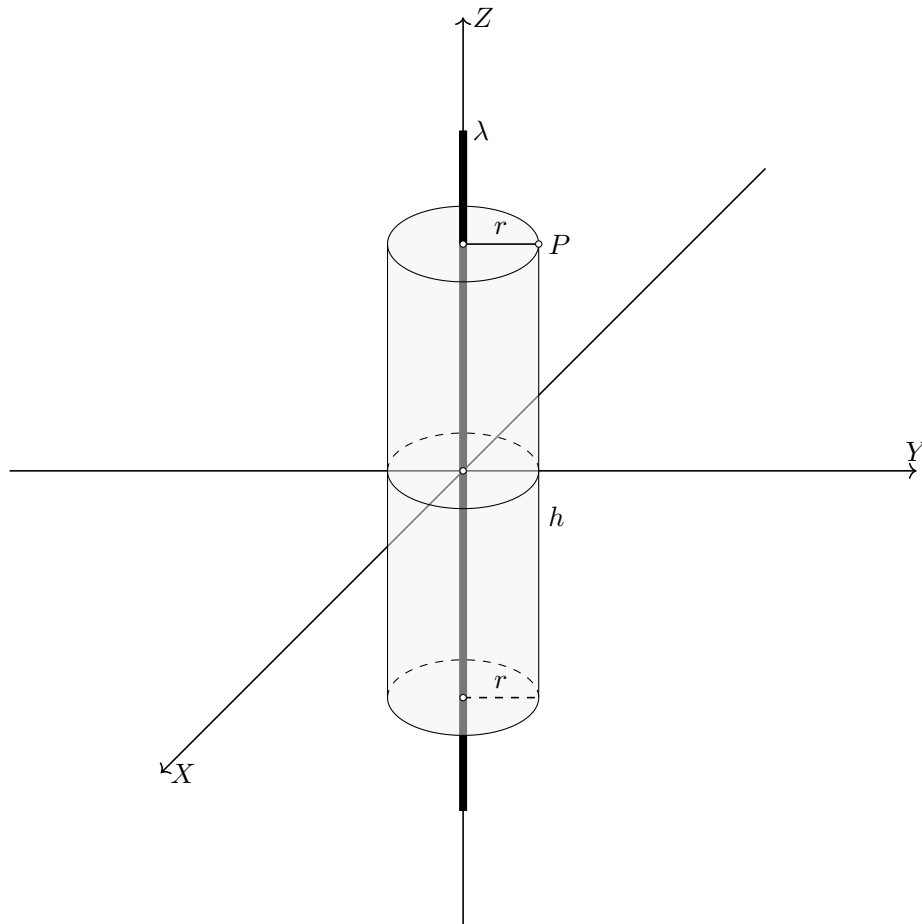


图 69: 无限长均匀带电直线的电场强度的示意图

假设一线密度为 λ 的无限长带电直线，以其为轴取半径为 r 高度为 h 的圆柱面作高斯面。

假设一场点 P 至轴的距离为 r ，即场点在高斯面上，现研究该场点的电场强度情况。

此时高斯面内的电荷为 $\lambda \cdot h$ ：

$$\Phi_E = \frac{\lambda \cdot h}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

该高斯面上，圆柱的两个底面的电通量为零，圆柱的侧面占有了所有的电通量。

因为圆柱侧面至轴的距离处处相同，所以圆柱侧面上的电场强度 E 是一个常量。

因此圆柱侧面上的电通量和电场强度有以下关系：

$$\Phi_E = \oint_S E \cdot dS \quad (2)$$

$$\Phi_E = E \cdot \oint_S dS \quad (3)$$

$$\Phi_E = E \cdot 2\pi \cdot r \cdot h \quad (4)$$

$$E = \frac{\Phi_E}{2\pi \cdot r \cdot h} \quad (5)$$

代入 Φ_E 可以得到场点处的电场强度：

$$E = \frac{\lambda \cdot h}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r \cdot h} \quad (6)$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \quad (7)$$

无限长均匀带电直线的电场强度的函数曲线：

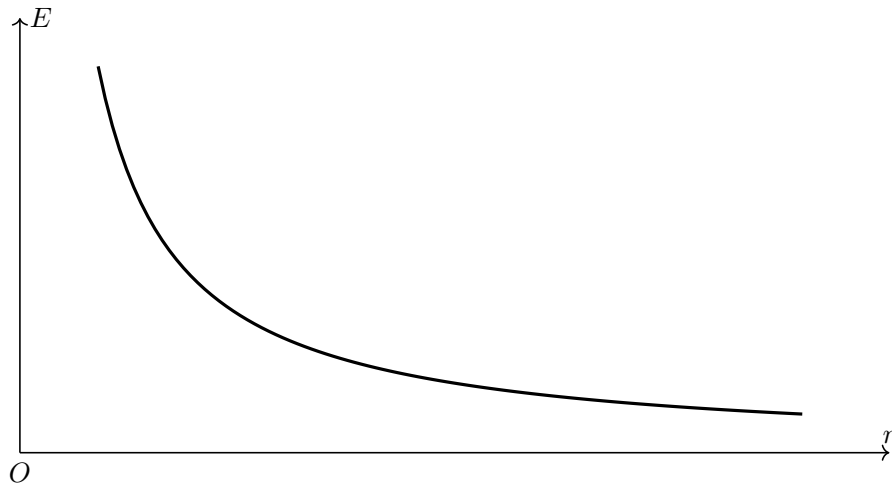


图 70: 无限长均匀带电直线的电场强度的函数曲线

无限长均匀带电直线周围的电场强度依照距离的反比衰减。

9.5.4 无限大均匀带电平面的电场强度

无限大均匀带电平面的电场强度：

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

无限长均匀带电直线的示意图：

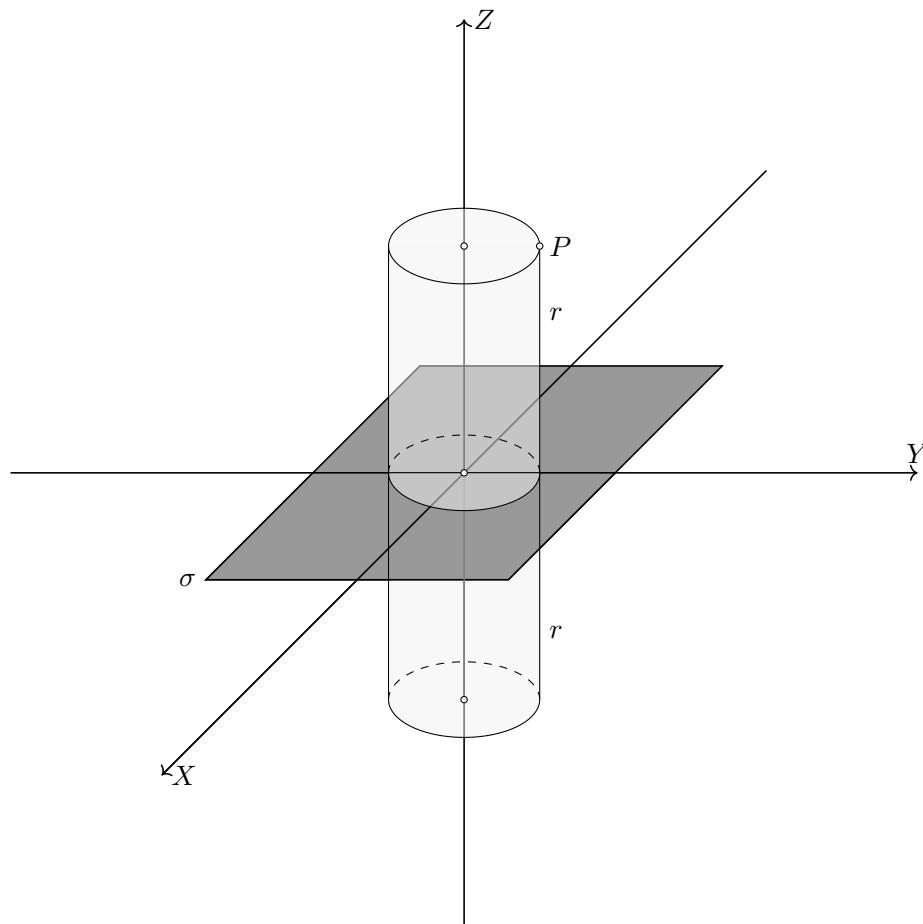


图 71: 无限大均匀带电平面的电场强度的示意图

假设一面密度为 σ 的无限大带电平面，以法线为轴取高度为 $2r$ 底面积为 S 的圆柱面作高斯面。

假设一场点 P 至平面的距离为 r ，即场点在高斯面上，现研究该场点的电场强度情况。

此时高斯面内的电荷为 $\sigma \cdot S$ ：

$$\Phi_E = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

该高斯面上，圆柱的侧面的电通量为零，圆柱的两个底面占有了所有的电通量。

因为圆柱底面至轴的距离处处相同，所以圆柱底面上的电场强度 E 是一个常量。

因此圆柱底面上的电通量和电场强度有以下关系：

$$\Phi_E = \oint_S E \cdot dS \quad (2)$$

$$\Phi_E = E \cdot \oint_S dS \quad (3)$$

$$\Phi_E = E \cdot 2S \quad (4)$$

$$E = \frac{\Phi_E}{2 \cdot S} \quad (5)$$

代入 Φ_E 可以得到场点处的电场强度：

$$E = \frac{\sigma \cdot S}{2 \cdot S \cdot \varepsilon_0} \quad (6)$$

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} \quad (7)$$

无限大均匀带电平面的电场强度的函数曲线：

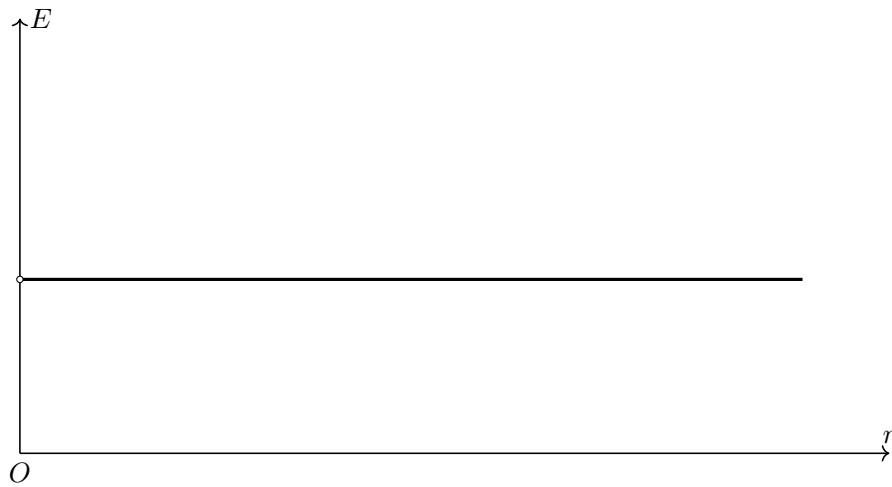


图 72: 无限大均匀带电平面的电场强度的函数曲线

无限大均匀带电平面周围的电场强度是一个常数。