关于第 08 期题目的讨论

数学学习小组

2020.07.25

目录

1 题目 08-1

本题来源于第 08 期（2020.07.25）小组讨论题中，原题号为 2018 年宝山一模 20 题的第 3 小问。

对于椭圆 Γ:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

设椭圆 Γ 的右焦点为 F，过右焦点 F 的直线 l 交 Γ 于 A,B 两点。

设点 A 在直线 $x=4$ 上的射影点为 D。

设点 B 在直线 $x=4$ 上的射影点为 E。

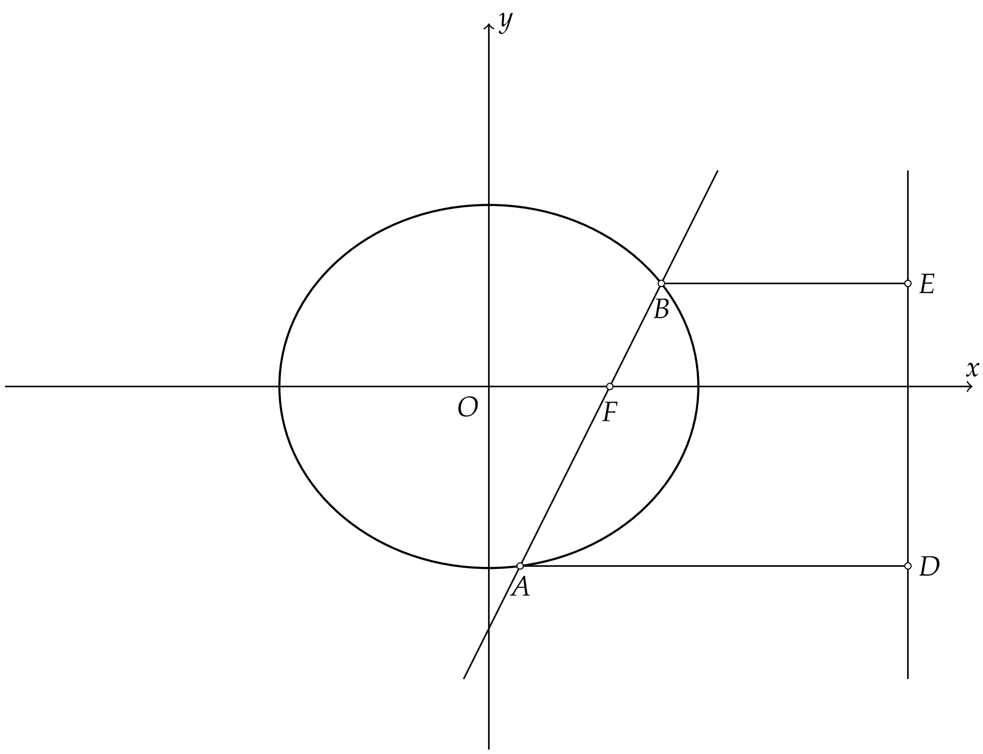

图 1: 题目 08-01 的示意图

当直线 l 绕点 F 转动时，直线 AE 和直线 BD 是否相交于定点?

1.1 第一种解法

整理者：李宇轩

核心思路：特殊值法，利用向量平行。

设 $x = ty + 1$，当 t 不存在时，舍。

取特殊值 $t = 0$，此时两直线相较于 $S(2.5, 0)$。

因此两条直线若交于定点，则必交于 $S(2.5, 0)$。

设点 $A(x_1, y_1)$，故 $D(4, y_1)$。

设点 $B(x_2, y_2)$，故 $E(4, y_2)$。

联立直线和椭圆可得：

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \\ x = ty + 1 \end{cases}$$

$(3t^2 + 4) \cdot x^2 + 6ty - 9 = 0$

$y_1 + y_2 = \dfrac{-6t}{3t^2 + 4}$

$y_1 \cdot y_2 = \dfrac{-9}{3t^2 + 4}$

若 S 在直线 AE 上，则需满足 $\overrightarrow{SA} // \overrightarrow{SE}$。

若 S 在直线 BD 上，则需满足 $\overrightarrow{SB} // \overrightarrow{SD}$。

$\overrightarrow{SA} = (x_1 - 2.5\ ,\ y_1)$

$\overrightarrow{SE} = (1.5\ ,\ y_2)$

$x_1y_2 - 2.5y_2 - 1.5y_1$

$= (ty_1 + 1)y_2 - 2.5y_2 - 1.5y_1$

$= ty_1y_2 + y_1 - 2.5y_2 - 1.5y_1$

$= ty_1y_2 - 1.5(y_1 + y_2)$

$= ty_1y_2 - 1.5(y_1 + y_2)$

$= \dfrac{-9t^2}{3t^2 + 4} + \dfrac{9t^2}{3t^2 + 4}$

$= 0$

因此 $\overrightarrow{SA} // \overrightarrow{SE}$ 成立。

同理 $\overrightarrow{SB} // \overrightarrow{SD}$ 成立。

因此两条直线相交于定点 $S(2.5, 0)$。

2 题目 08-2

本题来源于第 08 期（2020.07.25）小组讨论题中，原题号为 2018 年浦东一模 20 题的第 3 小问。

对于椭圆 Γ:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$$

已知一定点 $E(2,1)$。

设点 A 为椭圆 Γ 的上端点。

设点 P 为椭圆 Γ 上一动点。

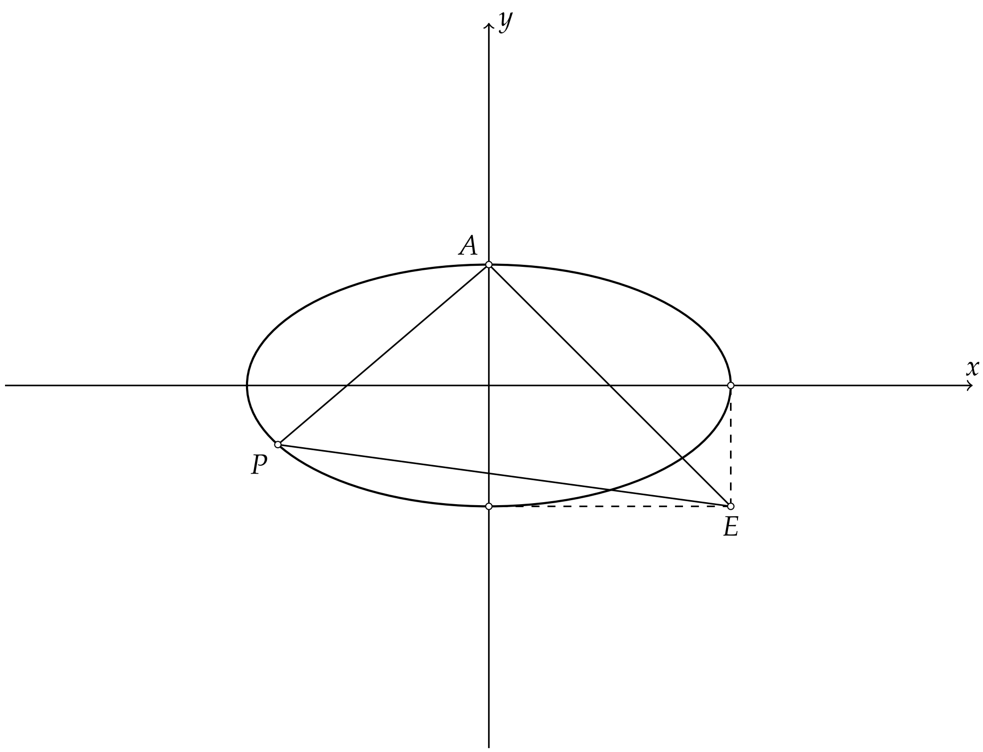

图 2: 题目 08-02 的示意图

当 P 在椭圆上移动时，讨论 $\triangle AEP$ 在不同的面积区间中存在的个数。

2.1 第一种解法

整理者：白昱轩

核心思路：标准方程，设平行直线求距离。

已知 $E(2,-1)$，同时 $A(0,1)$，因此 $k_{AE}=-1$。

故过 P 的平行于 AE 的直线可设为：

$l_P: y=-x+b$

联立直线和椭圆可得：

$$\begin{cases} y=-x+b \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$$

$5x^2-8bx+4b^2-4=0$

$\Delta=-16b^2+80$

$\Delta=0$

$b=\pm\sqrt{5}$

当 $b=+\sqrt{5}$ 时，$S_{\triangle AEP}=\sqrt{5}-1$

当 $b=-\sqrt{5}$ 时，$S_{\triangle AEP}=\sqrt{5}+1$

存在 4 个：满足 $S_{\triangle AEP}\in\left(0,\sqrt{5}-1\right)$

存在 3 个：满足 $S_{\triangle AEP}=\sqrt{5}-1$

存在 2 个：满足 $S_{\triangle AEP}\in\left(\sqrt{5}-1,\sqrt{5}+1\right)$

存在 1 个：满足 $S_{\triangle AEP}=\sqrt{5}+1$

存在 0 个：满足 $S_{\triangle AEP}\in\left(\sqrt{5}+1,\infty\right)$

2.2 第二种解法

整理者：白昱轩

核心思路：参数方程，计算点到直线距离。

已知 $E(2,-1)$，同时 $A(0,1)$，因此 $k_{AE}=-1$。

故直线 AE 可表达为：

$l_{AE}: y=-x+1$。

$l_{AE}: x+y-1=0$。

由参数方程设 $P(2\cos\theta, \sin\theta)$，其中 $\theta\in[0,2\pi)$。

根据点到直线距离公式：

$$d=\frac{|2\cos\theta+\sin\theta-1|}{\sqrt{2}}\in\left[0,\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$d_1=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$$

$$d_2=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$$

此外 $AE=2\sqrt{2}$。

存在 4 个：满足 $S_{\triangle AEP}\in\left(0,\sqrt{5}-1\right)$

存在 3 个：满足 $S_{\triangle AEP}=\sqrt{5}-1$

存在 2 个：满足 $S_{\triangle AEP}\in\left(\sqrt{5}-1,\sqrt{5}+1\right)$

存在 1 个：满足 $S_{\triangle AEP}=\sqrt{5}+1$

存在 0 个：满足 $S_{\triangle AEP}\in\left(\sqrt{5}+1,\infty\right)$

3 题目 08-3

本题来源于第 08 期（2020.07.25）小组讨论题中，原题号为 2018 年静安一模 20 题的第 3 小问。

对于曲线 Γ:

$$\left|x^2-y^2\right|=1$$

设动点 P 是曲线 Γ 上一动点，设直线 $l_1: y=x$，设直线 $l_2: y=-x$。

过动点 P 作直线 l_1 的平行线，交曲线 Γ 于点 Q。

过动点 P 作直线 l_2 的平行线，交曲线 Γ 于点 R。

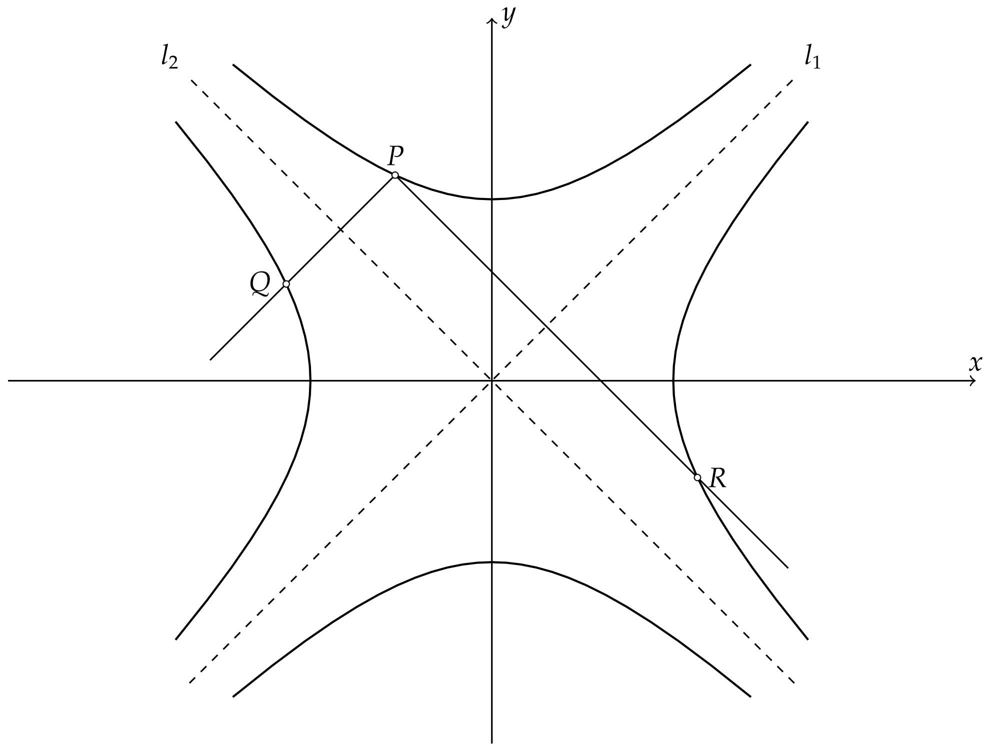

图 3: 题目 08-03 的示意图

证明三角形 $\triangle PQR$ 的面积为定值，并求出该面积。

3.1 第一种解法

整理者：施安然

核心思路：联立求点，代入双曲线方程。

由于 $|x^2-y^2|=1$ 具有对称性。

因此只需要讨论 P 在 $y^2-x^2=1$ 上的情况即可。

因此点 $P(x_0,y_0)$ 满足 $y_0^2-x_0^2=1$。

联立直线 PQ 和左右开口的双曲线：

$$\begin{cases} y-y_0=x-x_0 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$$

$x^2-(x-x_0+y_0)^2=1$

$x^2-(x^2+x_0^2+y_0^2-2xx_0+2xy_0-2x_0y_0)=1$

$x_0^2+y_0^2-2xx_0+2xy_0-2x_0y_0=-1$

$(x_0-y_0)^2-2x\cdot(x_0-y_0)=-1$

$2x\cdot(x_0-y_0)=(x_0-y_0)^2+1$

$2x\cdot(x_0-y_0)=(x_0-y_0)^2-(x_0^2-y_0^2)$

$2x\cdot(x_0-y_0)=(x_0-y_0)^2-(x_0+y_0)\cdot(x_0-y_0)$

$2x=(x_0-y_0)-(x_0+y_0)$

$x=-y_0$

因此 $Q(-y_0,-x_0)$

同理 $R(+y_0,+x_0)$

$$\begin{vmatrix} +x_0 & +y_0 & 1 \\ +y_0 & +x_0 & 1 \\ -y_0 & -x_0 & 1 \end{vmatrix}=2x_0^2-2y_0^2=-2$$

$S_{\triangle PQR}=\dfrac{1}{2}\cdot|-2|=1$

$\because y^2-x^2=1$ 与 $x^2-y^2=1$ 共渐近线 $y=\pm x$

$\therefore PQ$ 关于 $y=-x$ 对称

$\therefore Q(-y_0,-x_0)$

同理：$R(y_0,x_0)$

3.2　第二种解法

整理者：施安然

核心思路：利用关于直线的对称点。

由于 $x^2 - y^2 = 1$ 和 $y^2 - x^2 = 1$ 互为共轭双曲线。

故其渐近线均为 $y = +x$ 和 $y = -x$，设 $P(x_0, y_0)$。

P 关于 $y = -x$ 的对称点为 $Q(-y_0, -x_0)$。

P 关于 $y = +x$ 的对称点为 $R(+y_0, +x_0)$。

$$\begin{vmatrix} +x_0 & +y_0 & 1 \\ +y_0 & +x_0 & 1 \\ -y_0 & -x_0 & 1 \end{vmatrix} = 2x_0^2 - 2y_0^2 = -2$$

$$S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2} \cdot |-2| = 1$$