关于第 07 期题目的讨论

数学学习小组

2020.07.16

目录

1 题目 07-1

本题来源于第 07 期（2020.07.16）小组讨论题中，原题号为 2018 年虹口一模 20 题的第 2 小问。

对于抛物线 Γ:

$$y^2 = 2px$$

显然其准线为 $l : x = -\dfrac{p}{2}$。

设抛物线 Γ 上有一点 A，过 A 作准线 l 的垂线，垂足为 E。

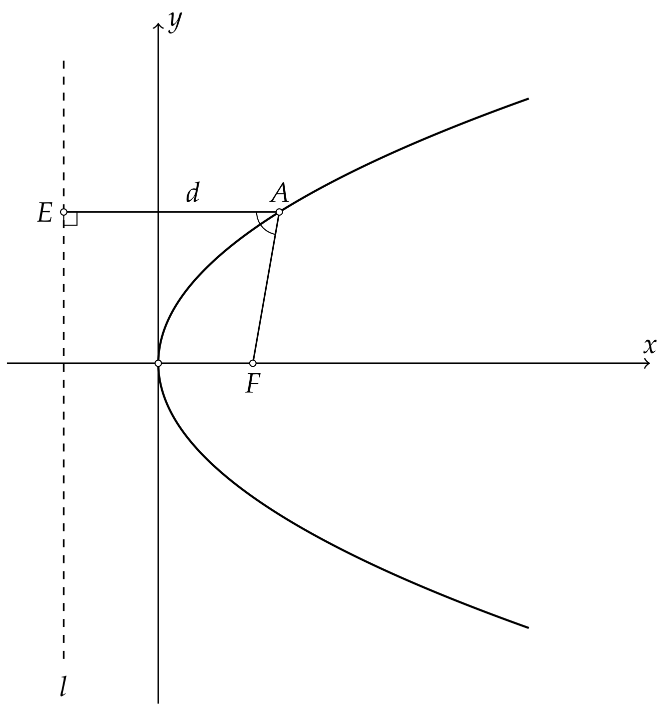

图 1: 题目 07-01 的示意图

现设 $AE = d$，且满足 $\dfrac{3p}{4} \leq d \leq \dfrac{4p}{3}$，求解 $\angle EAF$ 的取值范围。

1.1 第一种解法

整理者：李宇轩

核心思路：利用向量夹角公式。

设 $A(x,y)$，已知 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，且 $E\left(-\frac{p}{2},y\right)$。

$\overrightarrow{EA}=\left(x+\frac{p}{2},0\right)$

$\overrightarrow{FA}=\left(x-\frac{p}{2},y\right)$

根据抛物线性质可知：$|\overrightarrow{EA}|=|\overrightarrow{FA}|$

$\cos\angle EAF=\dfrac{\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{EA}|\cdot|\overrightarrow{FA}|}$

$\cos\angle EAF=\dfrac{\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{EA}|^2}$

$\cos\angle EAF=\dfrac{\left(x+\frac{p}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$

$\cos\angle EAF=\dfrac{x-\frac{p}{2}}{x+\frac{p}{2}}$

$\cos\angle EAF=1-\dfrac{p}{x+\frac{p}{2}}$

当 $d=\frac{3}{4}p$，有 $x=\frac{1}{4}p$，此时 $\cos\angle EAF=-\frac{1}{3}p$。

当 $d=\frac{4}{3}p$，有 $x=\frac{5}{6}p$，此时 $\cos\angle EAF=\frac{1}{4}p$。

故 $\angle EAF\in\left[\arccos\left(\frac{1}{4}\right),\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$

1.2 第二种解法

整理者：李宇轩

核心思路：利用余弦定理。

设 $A(x,y)$，已知 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，且 $E\left(-\frac{p}{2},y\right)$。

在 $\triangle EAF$ 中，$AE=AF=x+\frac{p}{2}$，$EF^2=y^2+p^2$

$$\cos\angle EAF=\frac{AE^2+AF^2-EF^2}{2\cdot AE\cdot AF}$$

$$\cos\angle EAF=\frac{2\cdot\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-(y^2+p^2)}{2\cdot\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$\cos\angle EAF=1-\frac{y^2+p^2}{2\cdot\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$\cos\angle EAF=1-\frac{2px+p^2}{2\cdot\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$\cos\angle EAF=1-\frac{2p\left(x+\frac{p}{2}\right)}{2\cdot\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$\cos\angle EAF=1-\frac{p}{x+\frac{p}{2}}$$

当 $d=\frac{3}{4}p$，有 $x=\frac{1}{4}p$，此时 $\cos\angle EAF=-\frac{1}{3}p$。

当 $d=\frac{4}{3}p$，有 $x=\frac{5}{6}p$，此时 $\cos\angle EAF=\frac{1}{4}p$。

故 $\angle EAF\in\left[\arccos\left(\frac{1}{4}\right),\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$

1.3 第三种解法

整理者：白昱轩

核心思路：说理论证。

因为 $EA \parallel x$，故 $\angle EAF$ 与 $\angle AFO$ 互补。

因为点 F 移动的过程中：

显然 $\angle AFO$ 随 x 的变大而变大。

所以 $\angle EAF$ 随 x 的变大而变小。

故 d 最小时 $\angle EAF$ 最大。

而 d 最大时 $\angle EAF$ 最小。

当 d=$\frac{3p}{4}$ 时，$\cos\angle EAF = \left(\frac{\frac{3p}{4} - p}{\frac{3p}{4}}\right) = -\frac{1}{3}$

当 d=$\frac{4p}{3}$ 时，$\cos\angle EAF = \left(\frac{\frac{4p}{3} - p}{\frac{4p}{3}}\right) = \frac{1}{4}$

故 $\angle EAF \in \left[\arccos\frac{1}{4}, \arccos\frac{-1}{3}\right]$

2 题目 07-2

本题来源于第 07 期（2020.07.16）小组讨论题中，原题号为 2018 年虹口一模 20 题的第 3 小问。

对于抛物线 Γ:

$$y^2 = 2px$$

显然其准线为 $l : x = -\frac{p}{2}$。

设抛物线 Γ 上有一点 A，过 A 作准线 l 的垂线，垂足为 E。

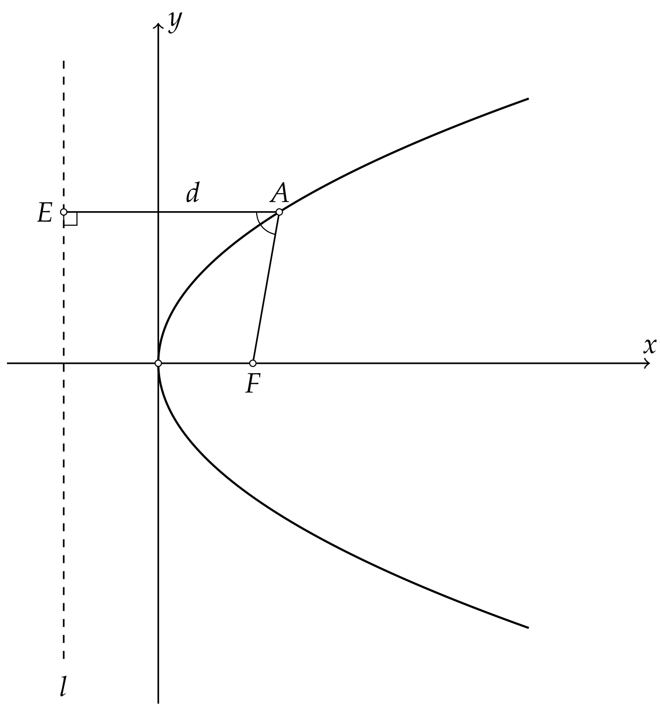

图 2: 题目 07-02 的示意图

现判断 $\angle EAF$ 的角平分线所在直线与曲线的交点个数，并说明理由。

2.1 第一种解法

整理者：白昱轩

核心思路：说理论证。

因为 $EA = FA$，故 $\angle EAF$ 的角平分线即 EF 的垂直平分线。

角平分线已经与抛物线交与点 A，假设存在第二个交点 A_1，假设其在 l 上的投影为 E_1

根据抛物线性质：$A_1F = A_1E_1$。

根据垂直平分线：$A_1F = A_1E$。

由于 $\triangle A_1E_1E$ 始终为直角三角形，且 A_1E_1 为斜边，而 A_1E 为直角边。

故根据直角三角形的性质，必然有 $A_1E_1 < A_1E$，然而与上述结论产生矛盾。

故假设不成立，不存在第二个交点，因此只有一个交点。

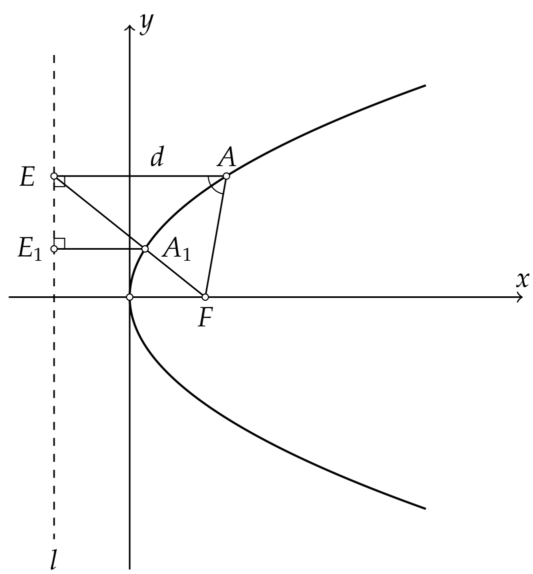

图 3: 第一种解法的配图

以上是本解法的配图。

2.2 第二种解法

整理者：白昱轩

核心思路：设法向量联立。

设 $A(x_1, y_1)$，且 $E\left(-\frac{p}{2}, y_1\right)$，已知 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$。

设角平分线为 l，设角平分线的法向量为 $\vec{n}$。

$\vec{n} = \overrightarrow{EF} = (p, -y_1)$

$l: p\left(x - x_1\right) - y_1 \cdot \left(y - y_1\right) = 0$

联立直线和抛物线：

$$\begin{cases} p\left(x - x_1\right) - y_1 \cdot \left(y - y_1\right) = 0 \\ y^2 = 2px \\ y_1^2 = 2px_1 \end{cases}$$

$px - px_1 - yy_1 + y_1^2 = 0$

$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y_1^2 - yy_1 + y_1^2 = 0$

$\frac{1}{2}y^2 - yy_1 + \frac{1}{2}y_1^2 = 0$

$\Delta = 0$

故只有一个交点。

2.3 第三种解法

整理者：白昱轩

核心思路：设斜率求解。

设 $A(x_1, y_1)$，且 $E\left(-\frac{p}{2}, y_1\right)$，已知 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$。

设角平分线为 l，设其与 x 轴的交点为 P。

设 $\theta = \angle EFP$

设 $\alpha = \angle APF$

显然角平分线 AP 也是直线 EF 的垂直平分线。

因此 $\angle EFP + \angle APF = \frac{\pi}{2}$，即 $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$。

$k = \tan \alpha$

$k = \cot \theta$

$k = \frac{p}{y_1}$

$l : y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$

联立直线和抛物线：

$$\begin{cases} y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \\ y^2 = 2px \\ y_1^2 = 2px_1 \end{cases}$$

$y - y_1 = \frac{p}{y_1}x - \frac{p}{y_1}x_1$

$yy_1 - y_1^2 = px - px_1$

$yy_1 - y_1^2 = \frac{y^2}{2} - \frac{y_1^2}{2}$

$\frac{1}{2}y^2 - yy_1 + \frac{1}{2}y_1^2 = 0$

$\Delta = 0$

故只有一个交点。

3 题目 07-3

本题来源于第 07 期（2020.07.16）小组讨论题中，原题号为 2018 年杨浦一模 20 题的第 2 小问。

对于抛物线 Γ:

$$y^2 = 4x$$

设直线 l 与抛物线 Γ 相交于点 A 和点 B。

设定圆 $C : (x-5)^2 + y^2 = 16$ 与直线 l 相切，且切点为 M。

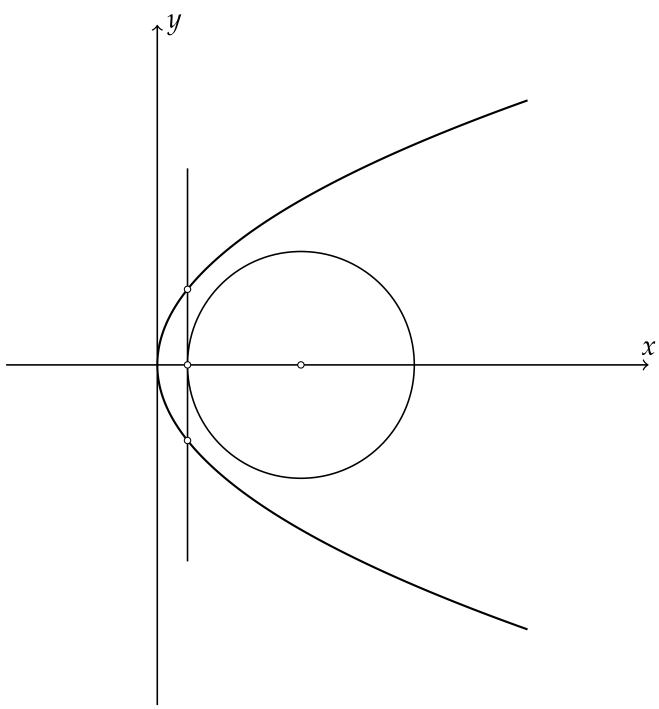

图 4: 题目 07-03 的示意图

若切点 M 为点 A 和点 B 的中点，求直线 l 的方程。

3.1 第一种解法

整理者：李宇轩

核心思路：利用相切，利用切点。

设直线 $x = ty + b$

当 t 不存在时，舍。

当 t 存在时：

$$\begin{cases} x = ty + b \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

$y^2 = 4ty + 4b$

$y^2 - 4ty - 4b = 0$

$\Delta = 16t^2 + 16b > 0$

$y_1 \cdot y_2 = -4t$

$y_1 + y_2 = 4t$

$x_1 + x_2 = 4t^2 + 2b$

因为 $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

所以 $M\left(2t^2 + b, 2t\right)$

点 $C(5, 0)$ 至直线 l 的距离应为 4 保证相切：

$l : x = ty + b$

$l : x - ty - b = 0$

$$d = \frac{|5 - b|}{\sqrt{1 + t^2}} = 4$$

$16t^2 + 16 = b^2 - 10b + 25$

$16t^2 = b^2 - 10b + 9$

向量 $\overrightarrow{CM}$ 应当于向量 $\overrightarrow{AB}$ 垂直保证切点为 M：

$\overrightarrow{CM} = (2t^2 + b - 5, 2t)$

$\overrightarrow{AB} = \vec{d} = (t, 1)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM}$

$t^2 \cdot (2t^2 + b - 5) + 2t = 0$

1. 若 $t = 0$：$l : x = 1$ 或 $l : x = 9$

2. 若 $t \neq 0$

$2t^2 + b - 5 + 2 = 0$

$2t^2 + b - = 0$

$2t^2 = -b + 3$

$16t^2 = -8b + 24$

联立两组结论可得：

$$\begin{cases} 16t^2 = b^2 - 10b + 9 \\ 16t^2 = -8b + 24 \end{cases}$$

$b^2 - 10b + 9 = -8b + 24$

$b^2 - 2b - 15 = 0$

$$\begin{cases} b = 5 \\ t^2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -3 \\ t^2 = 3 \end{cases}$$

第一组解显然不合理，第二组解不满足 Δ，均舍。

4 题目 07-4

本题来源于第 07 期（2020.07.16）小组讨论题中，原题号为 2018 年普陀一模 20 题的第 3 小问。

对于椭圆 Γ:

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$$

设椭圆 Γ 的左焦点为 F_1，设椭圆 Γ 的右焦点为 F_2。

设点 M 点 N 为椭圆上位于 x 轴上方的两点，且满足 $\overrightarrow{F_1M} \parallel \overrightarrow{F_2N}$。

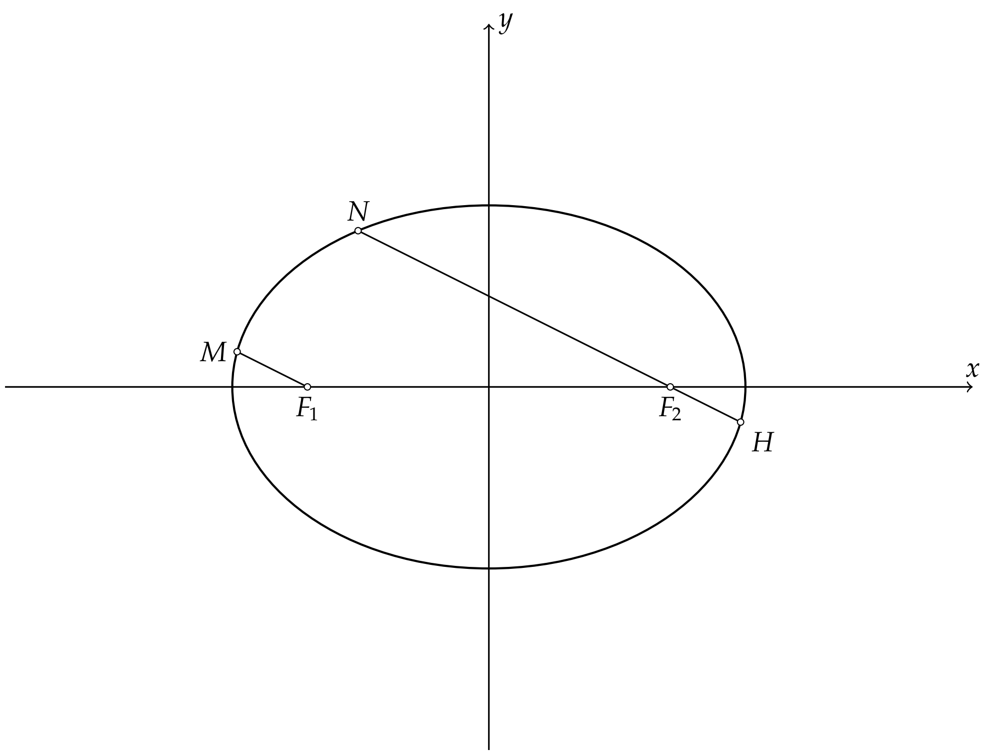

图 5: 题目 07-04 的示意图

当 $|\overrightarrow{F_2N}|-|\overrightarrow{F_1M}|=\sqrt{6}$ 时，求直线 F_2N 的方程。

4.1 第一种解法

整理者：杨骐荣

核心思路：利用相切，利用切点。

延长 NF_2 交椭圆于 H。

根据图像的对称性可知 $\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \left|\overrightarrow{F_2H}\right|$

设 $N(x_1, y_1)$，设 $H(x_2, y_2)$

故 $l_{NH}: y = k(x-2)$

$\left|\overrightarrow{F_2N}\right| = \sqrt{(x_1-2)^2+y_1^2} = \sqrt{k^2+1}\,|x_1-2|$

$\left|\overrightarrow{F_2H}\right| = \sqrt{(x_2-2)^2+y_2^2} = \sqrt{k^2+1}\,|x_2-2|$

因为 $\left|\overrightarrow{F_2N}\right| - \left|\overrightarrow{F_2H}\right| = \sqrt{6}$

$\sqrt{k^2+1}\cdot|x_1-2| - \sqrt{k^2+1}\cdot|x_2-2| = \sqrt{6}$

$\sqrt{k^2+1}\cdot(|x_1-2|-|x_2-2|) = \sqrt{6}$

由图可知：$x_1 < 2 < x_2$

$\sqrt{k^2+1}\cdot(2-x_1-x_2+2) = \sqrt{6}$

$\sqrt{k^2+1}\cdot[4-(x_1+x_2)] = \sqrt{6}$

$\begin{cases} y = k(x-2) \\ x^2+2y^2 = 8 \end{cases}$

$(2k^2+1)x^2 - 8k^2x + 8k^2 - 8 = 0$

$\Delta > 0$ 恒成立

$x_1 + x_2 = \dfrac{8k^2}{8k^2+1}$

代入可得：$\sqrt{k^2+1}\cdot\left[4-\dfrac{8k^2}{2k^2+1}\right] = \sqrt{6}$

求解得到：$k^2 = \dfrac{1}{2}$ 或 $k^2 = \dfrac{-5}{6}$ (舍)

由图可知 $k < 0$

$k = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$y = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$

5 题目 07-5

本题来源于第 07 期（2020.07.16）小组讨论题中，原题号为 2018 年徐汇一模 20 题的第 3 小问。

对于椭圆 Γ:

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{1}=1$$

设椭圆 Γ 的右焦点为 F_2，过焦点 F_2 作两条相互垂直的直线。

第一条直线交椭圆与点 A 和点 B，其中点为 M。

第二条直线交椭圆与点 C 和点 D，其中点为 N。

已知直线 MN 恒过定点 $R\left(\frac{2}{3},0\right)$（此为第 2 小问的结论）。

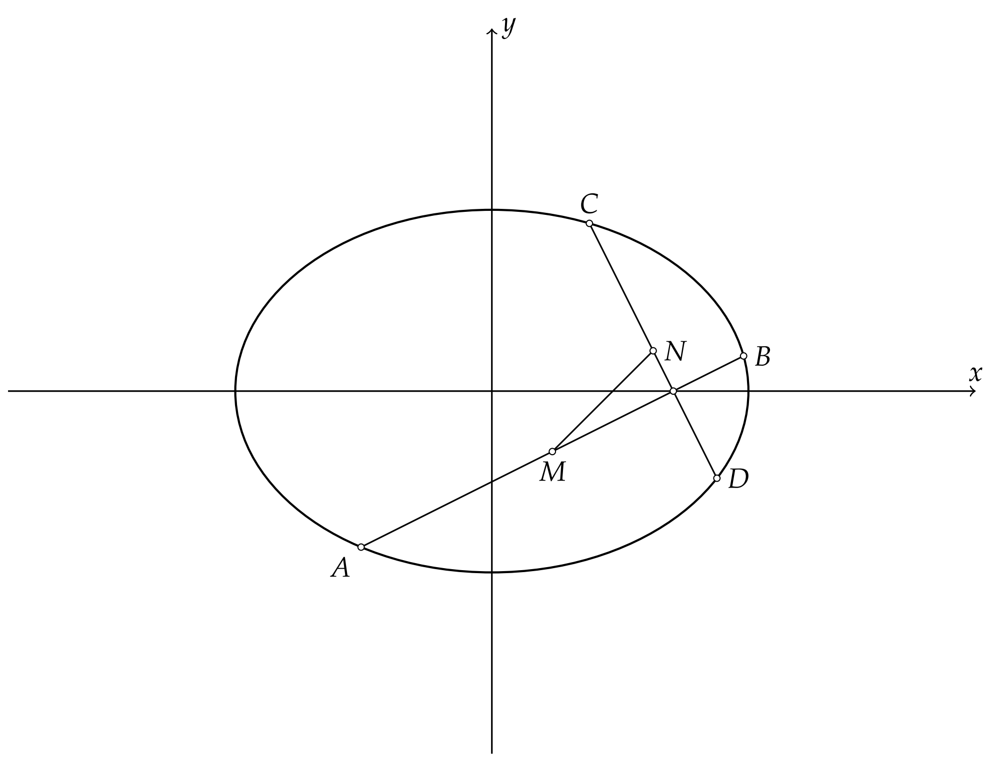

图 6: 题目 07-05 的示意图

求 $\triangle MNF_2$ 的最大值。

5.1 第一种解法

整理者：李周

核心思路：拆分三角形。

设 $M(x_1,y_1)$，设 $N(x_2,y_2)$。

设 $l_{AB}: x = ty + 1$

设 $l_{CD}: x = -\frac{1}{t}y + 1$

根据对称性可知，只需讨论 $m > 0$ 的情况。

联立椭圆和直线：

$$\begin{cases} x = ty + 1 \\ x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$(t^2+2)y^2 + 2ty - 1 = 0$

因为 F_2 在椭圆内，所以必有两个交点，故 $\Delta > 0$

$y_1 + y_2 = -\frac{2t}{t^2+2}$

$x_1 + x_2 = \frac{4}{t^2+2}$

$M(\frac{2}{t^2+2}, -\frac{t}{t^2+2})$

$N(\frac{2t^2}{1+2t^2}, \frac{t}{1+2t^2})$（同理可得）

$S_{\triangle MNF_2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot |y_m - y_n|$

$S_{\triangle MNF_2} = \frac{1}{6}\left|\frac{t}{1+2t^2} + \frac{t}{t^2+2}\right|$

$S_{\triangle MNF_2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3t^3+3t}{2t^4+5t^2+2}$

$S_{\triangle MNF_2} = \frac{t^3+t}{4t^4+10t^2+4}$

$S_{\triangle MNF_2} = \frac{t+\frac{1}{t}}{10+4t^2+\frac{4}{t^2}}$

令 $m = t + \frac{1}{t}$，故 $m \le -2$ 或 $m \ge 2$。

$S_{\triangle MNF_2} = \frac{m}{4m^2+2}$

$S_{\triangle MNF_2} = \frac{1}{4m+\frac{2}{m}}$

因为 $m \ge 2$，故 $S_{\triangle MNF_2}$ 面积的最大值为 $\frac{1}{9}$。

5.2 第二种解法

整理者：李周

核心思路：求解直角三角形的两条边。

设 $M(x_1, y_1)$，设 $N(x_2, y_2)$。

设 $l_{AB}: x = ty + 1$

设 $l_{CD}: x = -\frac{1}{t}y + 1$

根据对称性可知，只需讨论 $m > 0$ 的情况。

联立椭圆和直线：

$$\begin{cases} x = ty + 1 \\ x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$(t^2 + 2)y^2 + 2ty - 1 = 0$

因为 F_2 在椭圆内，所以必有两个交点，故 $\Delta > 0$

$y_1 + y_2 = -\frac{2t}{t^2 + 2}$

$x_1 + x_2 = \frac{4}{t^2 + 2}$

$M(\frac{2}{t^2 + 2}, -\frac{t}{t^2 + 2})$

$N(\frac{2t^2}{1 + 2t^2}, \frac{t}{1 + 2t^2})$（同理可得）

$$|MF_2| = \sqrt{(\frac{2}{t^2 + 2} - 1)^2 + (\frac{t}{t^2 + 2})^2}$$

$$|MF_2| = \frac{\sqrt{t^4 + t^2}}{t^2 + 2}$$

$$|NF_2| = \sqrt{(\frac{2t^2}{1 + 2t^2} - 1)^2 + (\frac{t}{1 + 2t^2})^2}$$

$$|NF_2| = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{2t^2 + 1}$$

$$S_{\triangle MNF_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{t^6 + 2t^4 + t^2}}{2t^4 + 5t^2 + 2}$$

$$S_{\triangle MNF_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3 + t}{2t^4 + 5t^2 + 2}$$

$$S_{\triangle MNF_2} = \frac{t^3 + t}{4t^4 + 10t^2 + 4}$$

$$S_{\triangle MNF_2} = \frac{t + \frac{1}{t}}{10 + 4t^2 + \frac{4}{t^2}}$$

令 $m = t + \frac{1}{t}$，故 $m \leq -2$ 或 $m \geq 2$。

$$S_{\triangle MNF_2} = \frac{m}{4m^2 + 2}$$

$$S_{\triangle MNF_2} = \frac{1}{4m + \frac{2}{m}}$$

因为 $m \geq 2$，故 $S_{\triangle MNF_2}$ 面积的最大值为 $\frac{1}{9}$。