

数学扩展研究 I - 三角形

李宇轩

2020.03.09

目录

1	三角形	3
1.1	三角形的符号约定	3
1.2	三角形的第一组面积公式	4
1.2.1	三角形面积公式 01	4
1.2.2	三角形面积公式 02	4
1.2.3	三角形面积公式 03	5
1.2.4	三角形面积公式 04	5
1.2.5	三角形面积公式 05	6
1.2.6	三角形面积公式 06	7
1.2.7	三角形面积公式 07	7
1.2.8	三角形面积公式 08	8
1.2.9	三角形面积公式 09	9
1.2.10	三角形面积公式 10	10
1.2.11	三角形面积公式 11	11
1.2.12	三角形面积公式 12	11
1.2.13	三角形面积公式 13	12
1.2.14	三角形面积公式 14	13
1.2.15	三角形面积公式 15	13
1.3	三角形的相关圆半径	14
1.3.1	第一组关系	14

1 三角形

1.1 三角形的符号约定

我们首先进行符号约定，若没有特殊说明，这些符号将在后文表达相同的含义。

我们依照下方表格的规定进行符号约定：

符号	含义	符号	含义
A	角 A 的角度	h_a	垂线的长度（边 a 上）
B	角 B 的角度	h_b	垂线的长度（边 b 上）
C	角 C 的角度	h_c	垂线的长度（边 c 上）
a	边 a 的长度	m_a	中线的长度（边 a 上）
b	边 b 的长度	m_b	中线的长度（边 b 上）
c	边 c 的长度	m_c	中线的长度（边 c 上）
R	外接圆半径	t_a	角平分线的长度（角 a 上）
r	内切圆半径	t_b	角平分线的长度（角 b 上）
r_a	旁切圆半径（边 a 侧）	t_c	角平分线的长度（角 c 上）
r_b	旁切圆半径（边 b 侧）	p	半周长的大小
r_c	旁切圆半径（边 c 侧）		

表 1: 三角形的符号约定

我们将下方图片所示的三角形作为参考：

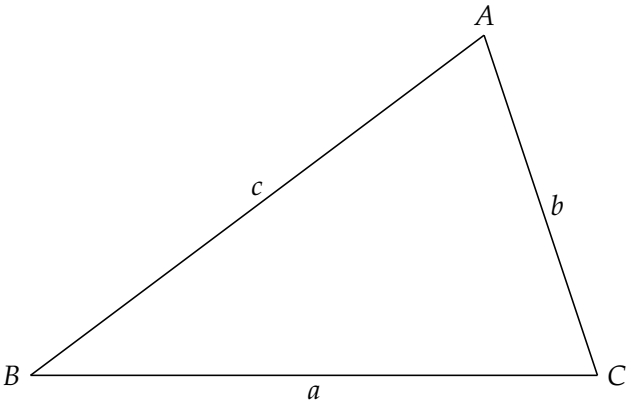


图 1: 三角形的示意图

除此之外，重心记为 G ，垂心记为 H ，外心记为 O ，内心记为 I ，旁心记为 P 。

1.2 三角形的第一组面积公式

本章将研究三角形中较为基本的面积公式，并进行相应推导。

1.2.1 三角形面积公式 01

三角形面积公式 01:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

1.2.2 三角形面积公式 02

三角形面积公式 02:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin B$$

将高用边和角的正弦表示并代入公式 01:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot (b \cdot \sin C) \tag{2}$$

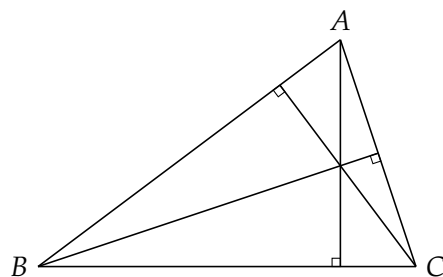


图 2: 三角形面积公式 02 示意图

1.2.3 三角形面积公式 03

三角形面积公式 03:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{4R} \cdot a \cdot b \cdot c$$

将正弦定理代入公式 02:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \left(\frac{c}{2R} \right) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{4R} \cdot a \cdot b \cdot c \quad (3)$$

1.2.4 三角形面积公式 04

三角形面积公式 04:

$$S_{\triangle} = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

将正弦定理代入公式 02:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2R \cdot \sin A) \cdot (2R \cdot \sin B) \cdot \sin C \quad (5)$$

$$= 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \quad (6)$$

1.2.5 三角形面积公式 05

三角形面积公式 05:

$$S_{\triangle} = r \cdot p$$

用角平分线将三角形分为三个小三角形:

$$S_{\triangle} = S_{\triangle IBC} + S_{\triangle ICA} + S_{\triangle IAB} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot c \cdot r \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (a + b + c) \cdot r \quad (3)$$

$$= r \cdot p \quad (4)$$

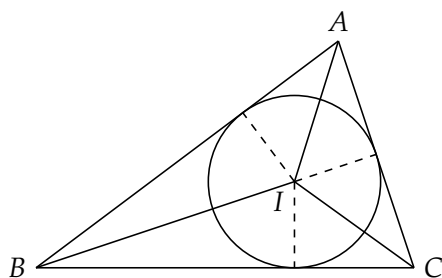


图 3: 三角形面积公式 05 示意图

1.2.6 三角形面积公式 06

三角形面积公式 06:

$$S_{\triangle} = r^2 \cdot \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)$$

将边长用内切圆半径和角的余切表示并代入公式 05:

$$S_{\triangle} = r \cdot p \quad (5)$$

$$= r \cdot \frac{1}{2} \cdot (a + b + c) \quad (6)$$

$$= r \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2r \cdot \cot \frac{A}{2} + 2r \cdot \cot \frac{B}{2} + 2r \cdot \cot \frac{C}{2} \right) \quad (7)$$

$$= r^2 \cdot \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \quad (8)$$

1.2.7 三角形面积公式 07

三角形面积公式 07:

$$S_{\triangle} = R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$$

将正弦定理代入公式 05:

$$S_{\triangle} = r \cdot p \quad (1)$$

$$= r \cdot \frac{1}{2} \cdot (a + b + c) \quad (2)$$

$$= r \cdot \frac{1}{2} \cdot (2R \cdot \sin A + 2R \cdot \sin B + 2R \cdot \sin C) \quad (3)$$

$$= R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C) \quad (4)$$

1.2.8 三角形面积公式 08

三角形面积公式 08:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 \cdot b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 \cdot c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \right)^2}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{c^2 \cdot a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right)^2}$$

对公式 02 进行变形:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{1 - \cos^2 C} \quad (2)$$

$$(3)$$

将余弦定理代入:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \right)} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 \cdot b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2} \quad (5)$$

三角形面积公式 08 也被称为秦九韶公式。

1.2.9 三角形面积公式 09

三角形面积公式 09:

$$S_{\Delta} = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

对公式 02 进行变形:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C \quad (1)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a \cdot b}{2}\right)^2 \cdot \sin^2 C} \quad (2)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a \cdot b}{2}\right)^2 \cdot (1 - \cos^2 C)} \quad (3)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a \cdot b}{2}\right)^2 \cdot (1 + \cos C) \cdot (1 - \cos C)} \quad (4)$$

$$= \sqrt{\frac{a \cdot b \cdot (1 + \cos C)}{2} \cdot \frac{a \cdot b \cdot (1 - \cos C)}{2}} \quad (5)$$

将余弦定理代入:

$$S_{\Delta} = \sqrt{\frac{a \cdot b \cdot \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)}{2} \cdot \frac{a \cdot b \cdot \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)}{2}} \quad (6)$$

$$= \sqrt{\frac{a \cdot b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}{2} \cdot \frac{a \cdot b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}{2}} \quad (7)$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2 + 2ab + b^2) - c^2}{4} \cdot \frac{c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{4}} \quad (8)$$

$$= \sqrt{\frac{(a + b)^2 - c^2}{4} \cdot \frac{c^2 - (a + b)^2}{4}} \quad (9)$$

$$= \sqrt{\frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} \cdot \frac{c + a - b}{2} \cdot \frac{c - a + b}{2}} \quad (10)$$

$$= \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} \quad (11)$$

三角形面积公式 09 也被称为海伦公式。

1.2.10 三角形面积公式 10

三角形面积公式 10:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{[(a+b)^2 - c^2] \cdot [c^2 - (a+b)^2]}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{[(b+c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b+c)^2]}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{[(c+a)^2 - b^2] \cdot [b^2 - (c+a)^2]}$$

对公式 08 进行变形:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 \cdot b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(a \cdot b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right) \cdot \left(a \cdot b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab - c^2) \cdot (c^2 - a^2 - b^2 + 2ab)} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{[(a+b)^2 - c^2] \cdot [c^2 - (a-b)^2]} \quad (4)$$

三角形面积公式 10 常用于解决已知三角形边长和与边长差的问题。

1.2.11 三角形面积公式 11

三角形面积公式 11:

$$S_{\triangle} = h_a^2 \cdot \frac{\sin A}{2 \cdot \sin B \cdot \sin C}$$

$$S_{\triangle} = h_b^2 \cdot \frac{\sin B}{2 \cdot \sin C \cdot \sin A}$$

$$S_{\triangle} = h_c^2 \cdot \frac{\sin C}{2 \cdot \sin A \cdot \sin B}$$

将边长用高和角的正弦表示并代入公式 02:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{h_a}{\sin B} \cdot \frac{h_a}{\sin C} \cdot \sin A \quad (2)$$

$$= h_a^2 \cdot \frac{\sin A}{2 \cdot \sin B \cdot \sin C} \quad (3)$$

1.2.12 三角形面积公式 12

三角形面积公式 12:

$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot (a + b + c)} \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$$

联立公式 03 和公式 05:

$$\frac{1}{4R} \cdot (a \cdot b \cdot c) = r \cdot p \quad (1)$$

$$\frac{1}{4R} \cdot (a \cdot b \cdot c) = \frac{r}{2} \cdot (a + b + c) \quad (2)$$

$$2 \cdot R \cdot r = \frac{a \cdot b \cdot c}{a + b + c} \quad (3)$$

$$R \cdot r = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot (a + b + c)} \quad (4)$$

代入公式 07:

$$S_{\triangle} = R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C) \quad (5)$$

$$= \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot (a + b + c)} \cdot (\sin A + \sin B + \sin C) \quad (6)$$

1.2.13 三角形面积公式 13

三角形面积公式 13:

$$S_{\triangle} = r_a \cdot (p - a)$$

$$S_{\triangle} = r_b \cdot (p - b)$$

$$S_{\triangle} = r_c \cdot (p - c)$$

用角平分线将三角形分为三个小三角形:

$$S_{\triangle} = S_{\triangle PBA} + S_{\triangle PBC} - S_{\triangle PAC} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot c \cdot r_b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot r_b - \frac{1}{2} \cdot b \cdot r_b \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (c + a - b) \cdot r_b \quad (3)$$

$$= r_b \cdot (p - b) \quad (4)$$

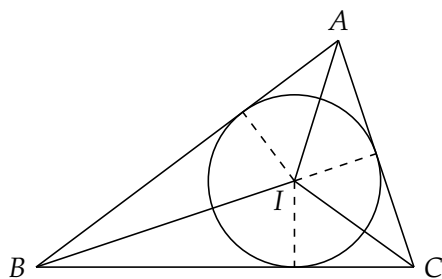


图 4: 三角形面积公式 13 示意图

1.2.14 三角形面积公式 14

三角形面积公式 14:

$$S_{\Delta} = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

将公式 05 和公式 13 变形代入公式 09:

$$S_{\Delta} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \quad (1)$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{\frac{S_{\Delta}}{r} \cdot \frac{S_{\Delta}}{r_a} \cdot \frac{S_{\Delta}}{r_b} \cdot \frac{S_{\Delta}}{r_c}} \quad (2)$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{\frac{S_{\Delta}^4}{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}} \quad (3)$$

$$S_{\Delta}^2 = \frac{S_{\Delta}^4}{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} \quad (4)$$

$$S_{\Delta}^2 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \quad (5)$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} \quad (6)$$

1.2.15 三角形面积公式 15

三角形面积公式 15:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{p} \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$$

将公式 05 变形代入如公式 12:

$$S_{\Delta} = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} \quad (1)$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{\frac{S_{\Delta}}{p} \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} \quad (2)$$

$$S_{\Delta}^2 = \frac{S_{\Delta}}{p} \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \quad (3)$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{p} \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \quad (4)$$

1.3 三角形的相关圆半径

本章将研究三角形中，外接圆半径，内切圆半径，旁切圆半径，三者间的数量关系。

1.3.1 第一组关系

第一组关系：

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

由公式 05 可得：

$$\frac{1}{r} = \frac{p}{S_{\Delta}} \quad (1)$$

由公式 11 可得：

$$\frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S_{\Delta}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S_{\Delta}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S_{\Delta}} \quad (4)$$

我们可以进行以下推导：

$$\frac{1}{r} = \frac{p}{S_{\Delta}} \quad (5)$$

$$= \frac{3p - (a + b + c)}{S_{\Delta}} \quad (6)$$

$$= \frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{S_{\Delta}} \quad (7)$$

$$= \frac{p-a}{S_{\Delta}} + \frac{p-b}{S_{\Delta}} + \frac{p-c}{S_{\Delta}} \quad (8)$$

$$= \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \quad (9)$$