数学扩展研究 II - 四面体

李宇轩

2020.03.12

目录

1 四面体

1.1 四面体的符号约定

我们首先进行符号约定，若没有特殊说明，这些符号将在后文表达相同的含义。

我们依照下方表格的规定进行符号约定：

符号	含义
a	棱 OA 的长度
b	棱 OB 的长度
c	棱 OC 的长度
S	底面 ABC 的长度
S_a	侧面 OBC 的长度
S_b	侧面 OCA 的长度
S_c	侧面 OAB 的长度
α	线线角（直线 OB 和直线 OC 所成角）
β	线线角（直线 OC 和直线 OA 所成角）
γ	线线角（直线 OA 和直线 OB 所成角）
θ_a	线面角（直线 OA 和平面 OBC 所成角）
θ_b	线面角（直线 OB 和平面 OCA 所成角）
θ_c	线面角（直线 OC 和平面 OAB 所成角）
A	面面角（平面 OAC 和平面 OAB 所成角）
B	面面角（平面 OBA 和平面 OBC 所成角）
C	面面角（平面 OCB 和平面 OCA 所成角）

表 1: 四面体的符号约定

我们将下方图片所示的四面体作为参考：

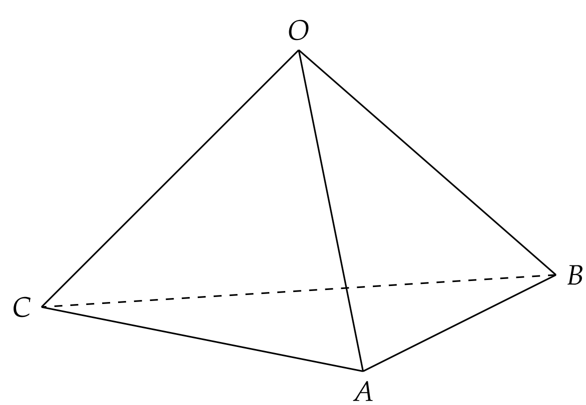

图 1: 四面体的示意图

1.2 四面体的空间角公式

本章将研究四面体中，线线角，线面角，面面角，三者间的数量关系。

1.2.1 四面体空间角基本公式

四面体空间角基本公式（线线角形式）:

$$\cos\alpha=\cos\beta\cdot\cos\gamma+\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos A$$

$$\cos\beta=\cos\gamma\cdot\cos\alpha+\sin\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\cos B$$

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos C$$

四面体空间角基本公式（面面角形式）:

$$\cos A=\frac{cos\alpha-\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

$$\cos B=\frac{cos\beta-\cos\gamma\cdot\cos\alpha}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}$$

$$\cos C=\frac{cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

在四面体 $O-ABC$ 中，在 OA 上任取一点 D。

在四面体 $O-ABC$ 中，取 OB 上一点 E 使得 $ED\perp OA$。

在四面体 $O-ABC$ 中，取 OC 上一点 F 使得 $FD\perp OA$。

四面体 $O-ABC$ 及其辅助线如下图所示:

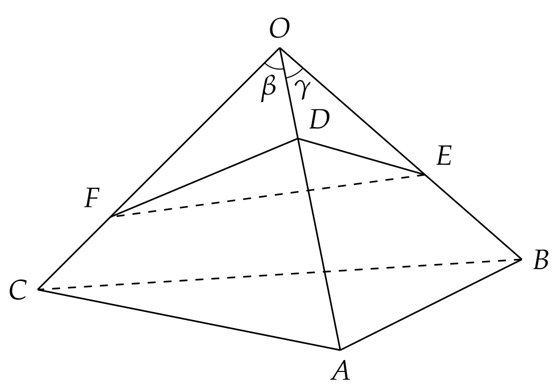

图 2: 四面体空间角基本公式的示意图

在 $\triangle DEF$ 中根据余弦定理可得:

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2 \cdot DE \cdot DF \cdot \cos A \tag{1}$$

在 $\triangle OEF$ 中根据余弦定理可得:

$$EF^2 = OE^2 + OF^2 - 2 \cdot OE \cdot OF \cdot \cos \alpha \tag{2}$$

在 $\triangle ODE$ 中角 ODE 是直角，根据勾股定理可得:

$$OE^2 = OD^2 + DE^2 \tag{3}$$

在 $\triangle ODE$ 中角 ODF 是直角，根据勾股定理可得:

$$OF^2 = OD^2 + DF^2 \tag{4}$$

将式 (3) 式 (4) 代入式 (2) 中，消去 OE^2 和 OF^2:

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2 \cdot OE \cdot OF \cdot \cos \alpha \tag{5}$$

$$EF^2 = (OD^2 + DE^2) + (OD^2 + DF^2) - 2 \cdot OE \cdot OF \cdot \cos \alpha \tag{6}$$

$$EF^2 = 2OD^2 + DE^2 + DF^2 - 2 \cdot OE \cdot OF \cdot \cos \alpha \tag{7}$$

将式 (7) 和式 (1) 相减，整理可得:

$$\left(2OD^2 + DE^2 + DF^2 - 2 \cdot OE \cdot OF \cdot \cos \alpha\right) - \left(DE^2 + DF^2 - 2 \cdot DE \cdot DF \cdot \cos A\right) = 0 \tag{8}$$

$$\left(2OD^2 + DE^2 + DF^2 - DE^2 - DF^2\right) - (2 \cdot OE \cdot OF \cdot \cos \alpha - 2 \cdot DE \cdot DF \cdot \cos A) = 0 \tag{9}$$

$$2 \cdot OD^2 - 2 \cdot OE \cdot OF \cdot \cos \alpha + 2 \cdot DE \cdot DF \cdot \cos A = 0 \tag{10}$$

$$2 \cdot OE \cdot OF \cdot \cos \alpha = 2OD^2 + 2 \cdot DE \cdot DF \cdot \cos A \tag{11}$$

$$OE \cdot OF \cdot \cos \alpha = OD^2 + DE \cdot DF \cdot \cos A \tag{12}$$

接下来将通过变形得到 $\cos \alpha$ 和 $\cos A$ 两者间的关系。

通过变形可以得到:

$$\cos\alpha = \frac{OD^2}{OE \cdot OF} + \frac{DE \cdot DF}{OE \cdot OF} \cdot \cos A \tag{13}$$

$$\cos\alpha = \frac{OD}{OE} \cdot \frac{OD}{OD} + \frac{DE}{OE} \cdot \frac{DF}{OF} \cdot \cos A \tag{14}$$

根据直角三角形 $\triangle ODF$ 可以得到:

$$\cos\beta = \frac{OD}{OF} \qquad \sin\beta = \frac{DF}{OF} \tag{15}$$

根据直角三角形 $\triangle ODE$ 可以得到:

$$\cos\gamma = \frac{OD}{OE} \qquad \sin\gamma = \frac{DE}{OE} \tag{16}$$

将四组三角比代入可得:

$$\cos\alpha = \cos\gamma \cdot \cos\beta + \sin\gamma \cdot \sin\beta \cdot \cos A \tag{17}$$

1.2.2 四面体空间角导出公式

四面体空间角导出公式:

$$\sin A \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = k$$

$$\sin B \cdot \sin \gamma \cdot \sin \alpha = k$$

$$\sin C \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = k$$

其中代换变量 k 的取值为:

$$k = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}$$

代入四面体空间角基本公式可得:

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos A^2} \tag{1}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} \right)^2} \tag{2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{(\cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos \gamma)^2}{\sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma}} \tag{3}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \gamma - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma}} \tag{4}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma - \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma}} \tag{5}$$

进一步代换可以得到:

$$\sin A = \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 \beta) \cdot (1 - \cos^2 \gamma) - \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} \tag{6}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} \tag{7}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} \tag{8}$$

定义代换变量 k:

$$k = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma} \tag{9}$$

代入代换变量 k:

$$\sin A = \frac{k}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} \tag{10}$$

$$\sin A\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma = k \tag{11}$$

1.2.3 四面体空间角比例公式

四面体空间角比例公式:

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{\sin C}{\sin\gamma} = \frac{k}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

其中代换变量 k 的取值为:

$$k = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$$

在四面体空间角导出公式两边同除可得:

$$\sin A\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma = k \tag{1}$$

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{k}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma} \tag{2}$$

$$\sin B\cdot\sin\gamma\cdot\sin\alpha = k \tag{3}$$

$$\frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{k}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma} \tag{4}$$

$$\sin C\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta = k \tag{5}$$

$$\frac{\sin C}{\sin\gamma} = \frac{k}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma} \tag{6}$$

1.2.4 四面体空间角正弦三元素公式

四面体空间角正弦三元素公式:

$$\sin\theta_a = \sin B \cdot \sin\gamma \qquad \sin\theta_a = \sin C \cdot \sin\beta$$

$$\sin\theta_b = \sin C \cdot \sin\alpha \qquad \sin\theta_b = \sin A \cdot \sin\gamma$$

$$\sin\theta_c = \sin A \cdot \sin\beta \qquad \sin\theta_c = \sin B \cdot \sin\alpha$$

在四面体 $O-ABC$ 中，过 A 作直线 AP 垂直于平面 OBC。

在四面体 $O-ABC$ 中，过 P 作直线 PH 垂直于直线 OC。

在四面体 $O-ABC$ 中, 联结 AH, 因为直线 OC 垂直于射影 PH, 所以直线 OC 垂直于斜线 AH。

四面体 $O-ABC$ 及其辅助线如下图所示:

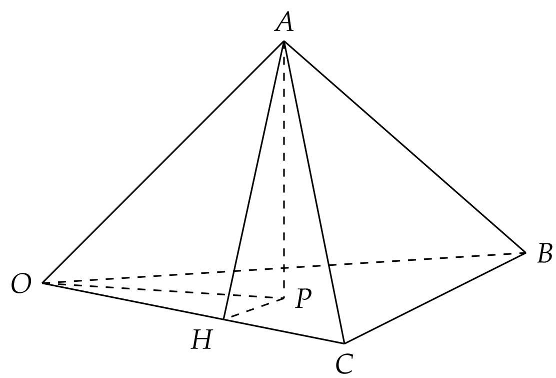

图 3: 四面体空间角正弦三元素公式的示意图

由此可见四面体中出现了三组重要的垂直关系:

$$AP \perp PO \qquad \angle APO = 90^\circ \tag{1}$$

$$AP \perp PH \qquad \angle APH = 90^\circ \tag{2}$$

$$AH \perp OH \qquad \angle AHO = 90^\circ \tag{3}$$

接下来将通过三个直角三角形，对空间角的三元素之间的关系进行推导。

在直角三角形 $\triangle APO$ 中角 $\angle AOP = \theta_a$，因此存在以下关系：

$$\sin\theta_a = \frac{AP}{AO} \tag{4}$$

在直角三角形 $\triangle AHO$ 中角 $\angle AOH = \beta$，因此存在以下关系：

$$\sin\beta = \frac{AH}{AO} \tag{5}$$

在直角三角形 $\triangle APH$ 中角 $\angle AHP = C$，因此存在以下关系：

$$\sin C = \frac{AP}{AH} \tag{6}$$

根据以下关系：

$$\frac{AP}{AO} = \frac{AH}{AO} \cdot \frac{AP}{AH} \tag{7}$$

代入上述结论可以得到：

$$\sin\theta_a = \sin\beta \cdot \sin C \tag{8}$$

根据比例公式可以得到：

$$\sin\theta_a = \sin\gamma \cdot \sin B \tag{9}$$

1.2.5 四面体空间角正弦乘积公式

四面体空间角正弦乘积公式:

$$\sin\theta_a \cdot \sin\alpha = k$$

$$\sin\theta_b \cdot \sin\beta = k$$

$$\sin\theta_c \cdot \sin\gamma = k$$

其中代换变量 k 的取值为:

$$k = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}$$

在四面体空间角正弦三元素公式中使用导出公式消去二面角:

$$\sin\theta_a = \sin B \cdot \sin\gamma \tag{1}$$

$$\sin\theta_a = \frac{k}{\sin\gamma \cdot \sin\alpha} \cdot \sin\gamma \tag{2}$$

$$\sin\theta_a = \frac{k}{\sin\alpha} \tag{3}$$

$$\sin\theta_a \cdot \sin\alpha = k \tag{4}$$

1.3 四面体的体积公式

本章将研究四面体的体积公式，并进行相应推导。

1.3.1 四面体体积公式 01

四面体体积公式 01:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$$

1.3.2 四面体体积公式 02

四面体体积公式 02:

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{S_b \cdot S_c}{a} \cdot \sin A$$

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{S_c \cdot S_a}{b} \cdot \sin B$$

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{S_a \cdot S_b}{c} \cdot \sin C$$

通过以下推导可以得出:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S_a \cdot AP && (1) \\ &= \frac{1}{3} \cdot S_a \cdot AH \cdot \sin C && (2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot S_a \cdot \frac{2 \cdot S_b}{OC} \cdot \sin C && (3) \end{aligned}$$

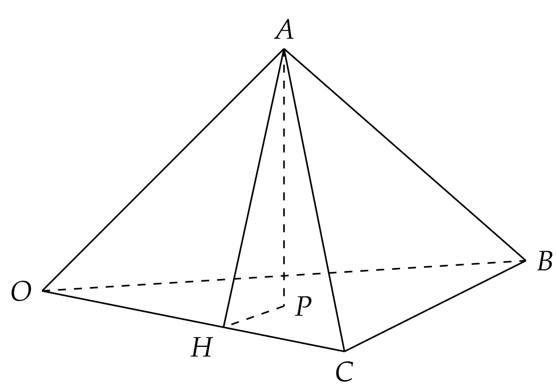

图 4: 四面体体积公式 02 示意图

1.3.3 四面体体积公式 03

四面体体积公式 03:

$$V = \frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot k$$

其中代换变量 k 的取值为:

$$k = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}$$

显然可以将面积表示为:

$$S_b = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta \tag{1}$$

$$S_c = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma \tag{2}$$

将上述结论代入公式 02:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \cdot \frac{S_b \cdot S_c}{a} \cdot \sin A & (3) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma \right) \cdot \sin A & (4) \\ &= \frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \sin A & (5) \\ &= \frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot k & (6) \end{aligned}$$

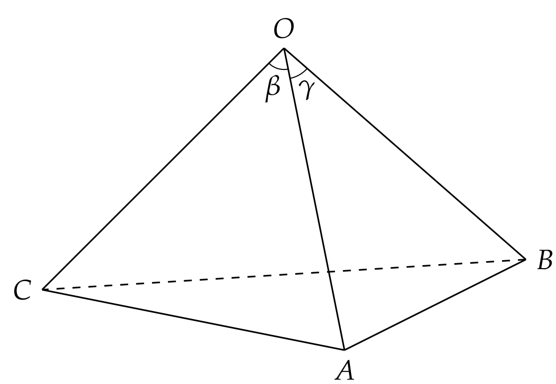

图 5: 四面体体积公式 03 示意图