关于第 06 期题目的讨论

数学学习小组

2020.07.09

目录

1 题目 06-1 **3**

1.1 第一种解法 4

1.2 第二种解法 5

2 题目 06-02 **7**

2.1 第一种解法 8

2.2 第二种解法 9

1 题目 06-1

本题来源于第 06 期（2020.07.09）小组讨论题中，原题号为第 3 题。

对于抛物线 Γ：

$$x^2 = 4y$$

设直线 l 过点 $P(0, -1)$。

将直线 l 与抛物线 Γ 的交点称为点 A 和点 B。

将点 A 关于 y 轴的对称点称为点 A'。

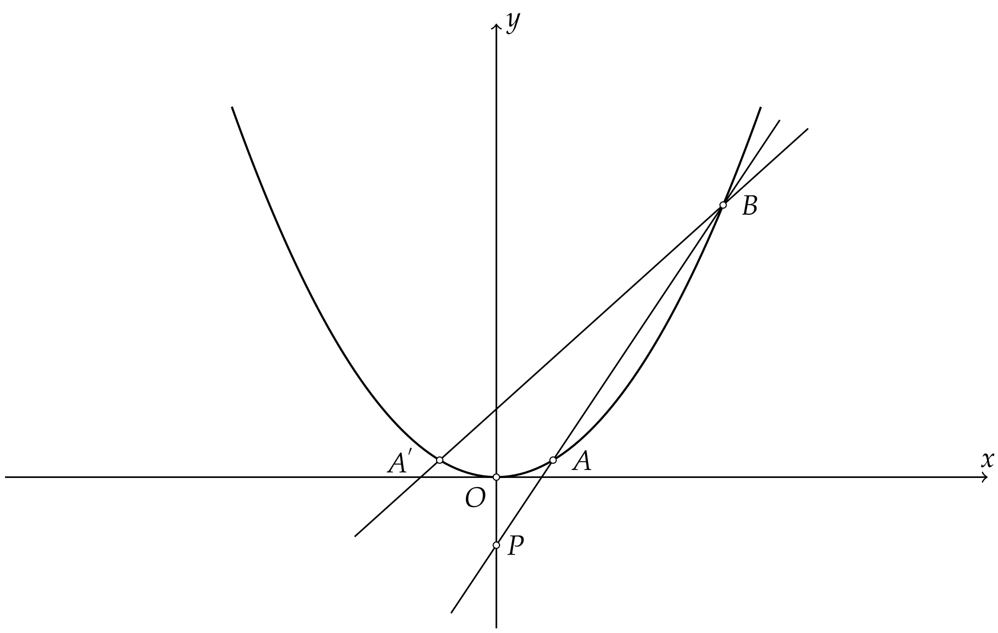

图 1: 题目 06-01 的示意图

现连接直线 $A'B$，求证直线 $A'B$ 过一定点，并求出该定点。

1.1 第一种解法

整理者：李宇轩

核心思路：利用向量平行。

设定点为 $S(x,y)$，因为 S 在 $A'B$ 上，故 $\overrightarrow{A'S} \parallel \overrightarrow{A'B}$。

设点 $A(x_1,y_1)$，设点 $B(x_2,y_2)$，故点 $A'(-x_1,y_1)$。

$\overrightarrow{A'S} = (x+x_1, y-y_1)$

$\overrightarrow{A'B} = (x_2+x_1, y_2-y_1)$

根据条件可设直线 $l: y = kx_1$。

由于点 $A(x_1,y_1)$ 在直线 l 上，故 $y_1 = kx_1 - 1$。

由于点 $A(x_2,y_2)$ 在直线 l 上，故 $y_2 = kx_2 - 1$。

由平行条件可得：

$(x+x_1)\cdot(y_2-y_1) = (y-y_1)\cdot(x_2+x_1)$

$(y_2-y_1)x + x_1y_2 = (x_2+x_1)y - x_2y_1$

$(y_2-y_1)x + kx_1x_2 - x_1 = (x_2+x_1)y - kx_1x_2 + x_2$

联立直线和抛物线：

$$\begin{cases} y = kx-1 \\ x^2-4y \end{cases}$$

$x^2 = 4\cdot(kx-1)$

$x^2 - 4kx - 4 = 0$

由韦达定理可知：

$x_1 + x_2 = 4k$

$x_1 \cdot x_2 = 4$

将两者代入可得：

$(y_2-y_1)x + kx_1x_2 - x_1 = (x_2+x_1)y - kx_1x_2 + x_2$

$(y_2-y_1)\cdot x = 4ky + 4k - 8k$

$(y_2-y_1)\cdot x = 4ky - 4k$

要使 S 为定点，其坐标必为 $S(0,1)$。

1.2 第二种解法

整理者：李宇轩

核心思路：特殊值法，利用对称性，利用向量平行。

由于对称性，若 $A'B$ 过定点，则定点必在 y 轴上。

设定点为 $S(0,y)$，因为 S 在 $A'B$ 上，故 $\overrightarrow{A'S} \parallel \overrightarrow{A'B}$。

设点 $A(x_1,y_1)$，设点 $B(x_2,y_2)$，故点 $A'(-x_1,y_1)$。

$\overrightarrow{A'S} = (x_1, y - y_1)$

$\overrightarrow{A'B} = (x_2 + x_1, y_2 - y_1)$

根据条件可设直线 $l : y = kx_1$。

由于点 $A(x_1,y_1)$ 在直线 l 上，故 $y_1 = kx_1 - 1$。

由于点 $A(x_2,y_2)$ 在直线 l 上，故 $y_2 = kx_2 - 1$。

由平行条件可得：

$x_1 \cdot (y_2 - y_1) = (y - y_1) \cdot (x_2 + x_1)$

$x_1y_2 - x_1y_1 = (x_2 + x_1) \cdot y - x_2y_1 - x_1y_1$

$x_1y_2 + x_2y_1 = (x_2 + x_1) \cdot y$

求解定点纵坐标：

$y = \dfrac{x_1y_2 + x_2y_1}{x_1 + x_2}$

$y = \dfrac{kx_1x_2 - x_1 + kx_1x_2 - x_2}{x_1 + x_2}$

$y = \dfrac{2kx_1x_2 - (x_1 + x_2)}{x_1 + x_2}$

$y = \dfrac{2kx_1x_2}{x_1 + x_2} - 1$

联立直线和抛物线：

$\begin{cases} y = kx - 1 \\ x^2 - 4y \end{cases}$

$x^2 = 4 \cdot (kx - 1)$

$x^2 - 4kx - 4 = 0$

由韦达定理可知：

$x_1 + x_2 = 4k$

$x_1 \cdot x_2 = 4$

将两者代入可得：

$y = \dfrac{2k \cdot x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} - 1$

$y = \dfrac{2k \cdot 4}{4k} - 1$

$y = 1$

因此点 S 为定点，其坐标为 $S(0,1)$。

当点 B 在右侧时的示意图:

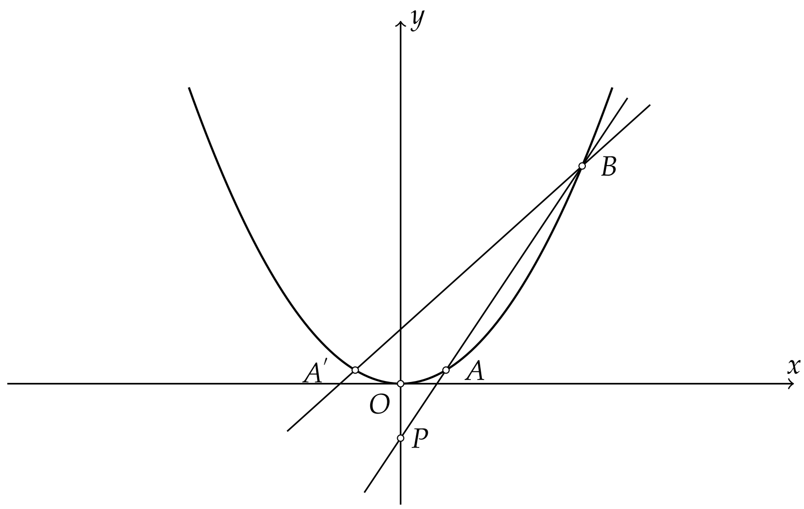

图 2: 当点 B 在右侧时的示意图

当点 B 在左侧时的示意图:

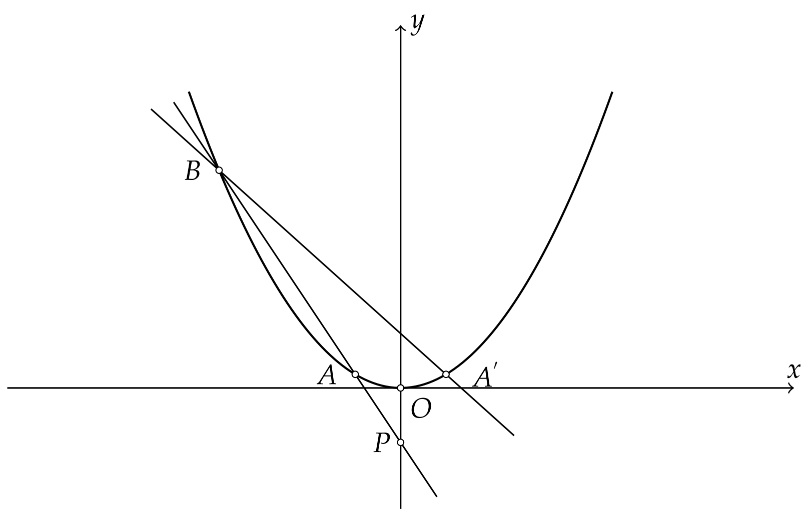

图 3: 当点 B 在左侧时的示意图

以上是本解法的配图。

2 题目 06-02

本题来源于第 06 期（2020.07.09）小组讨论题中，原题号为第 5 题。

对于抛物线 Γ:

$$y^2 = 4x$$

设直线 l_1 过点 $P(12,8)$，交抛物线 Γ 于点 C 和点 D，两者的中点为点 M。

设直线 l_2 过点 $P(12,8)$，交抛物线 Γ 于点 E 和点 F，两者的中点为点 N。

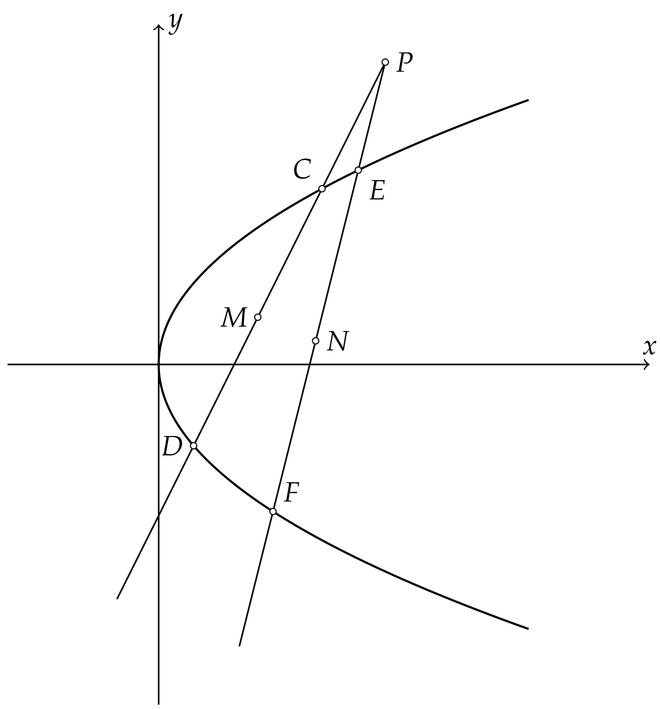

图 4: 题目 06-02 的示意图

若两直线满足倾斜角互余，求证直线 MN 过一定点，并求出该定点。

2.1 第一种解法

整理者：乔君毅

核心思路：设直线求解。

因为直线 l_1 和直线 l_2 的倾斜角互余。

故设直线 l_1 的斜率为 k，同时直线 l_2 的斜率为 $\frac{1}{k}$。

设点 $C(x_1,y_1)$，设点 $D(x_2,y_2)$。

故中点 $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$

由于直线 l_1 在点 $P(12,8)$ 上：

$l_1 : y-8=k(x-12)$

$l_1 : y=kx-16k+8$

联立直线 l_1 和抛物线：

$$\begin{cases} y=kx-12k+8 \\ y^2=4x \end{cases}$$

$ky^2-4y+32-48k=0$

$y_1+y_2=\frac{4}{k}$

$y_1\cdot y_2=\frac{32-48k}{k}$

$x_1+x_2=\frac{1}{4}\cdot(y_1^2+y_2^2)$

$x_1+x_2=\frac{1}{4}\cdot\left[(y_1+y_2)^2-2\cdot y_1\cdot y_2\right]$

$x_1+x_2=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{16}{k^2}-\frac{64}{k}+96\right]$

$x_1+x_2=\frac{4}{k^2}-\frac{16}{k}+24$

所以 M 点坐标为 $\left(12+\frac{2}{k^2}-\frac{8}{k}\ ,\ \frac{2}{k}\right)$

同理 N 点坐标为 $\left(12+2k^2-8k\ ,\ 2k\right)$

求解直线 MN 的斜率：

$k_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}$

$k_{MN}=\frac{\frac{2}{k}-2k}{2(\frac{1}{k^2}-k^2)-8(\frac{1}{k}-k)}$

$k_{MN}=\frac{1}{\frac{1}{k}+k-4}$

求解直线 MN 的方程：

$l_{MN} : y-2k=\frac{1}{\frac{1}{k}+k-4}\cdot[x-(12+2k^2-8k)]$

$l_{MN} : (\frac{1}{k}+k-4)\cdot(y-2k)=x-2k^2+8k-12$

$l_{MN} : (\frac{1}{k}+k-4)\cdot y=x-10$

因为定点 S 的坐标应使得上式恒成立。

所以定点的坐标为 $S(10,0)$。

2.2 第二种解法

整理者：施安然

核心思路：利用直线交点求特殊值。

因为直线 l_1 和直线 l_2 的倾斜角互余。

故设直线 l_1 的斜率为 k，同时直线 l_2 的斜率为 $\frac{1}{k}$。

设点 $C(x_1, y_1)$，设点 $D(x_2, y_2)$。

故中点 $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

由于直线 l_1 在点 $P(12, 8)$ 上：

$l_1 : y - 8 = k(x - 12)$

$l_2 : y - 8 = \frac{1}{k}(x - 12)$

当 $k < 0$ 时，倾斜角大于 90 度，无余角，舍。

当 $k = 1$ 时，两条直线重合，不合题意，舍。

当 $k = 0$ 时，只有三个交点，不合题意，舍。

当 k 不存在时，只有三个交点，不合题意，舍。

因此 k 存在，同时满足 $k \in (0, 1) \cap (1, +\infty)$

所以 $x_1 \neq x_2$，同时 $y_1 \neq y_2$。

$y_1^2 = 4x_1$

$y_2^2 = 4x_2$

$(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 4(x_1 - x_2)$

$y_1 + y_2 = \frac{4}{k}$

$x_1 + x_2 = \frac{4}{k^2} - \frac{16}{k} + 24$

所以 M 点坐标为 $\left(12 + \frac{2}{k^2} - \frac{8}{k}\ ,\ \frac{2}{k}\right)$

同理 N 点坐标为 $\left(12 + 2k^2 - 8k\ ,\ 2k\right)$

联立直线 l_1 和抛物线：

$$\begin{cases} y - 8 = k(x - 12) \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

$y^2 - \frac{4}{k}y + \frac{32}{k} - 48 = 0$

解得：$\Delta = \frac{16}{k^2} - \frac{128}{k} + 192 > 0$

同理：$\Delta = 16k^2 - 128k + 192 > 0$

$k \in (0, \frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{2}, 2)$

代入 $k = \frac{1}{10}$ ： $M(132, 20)$ $N(\frac{561}{50}, \frac{1}{5})$

$l_{MN} : y = \frac{10}{61}x - \frac{100}{61}$

代入 $k = \frac{3}{2}$： $M(\frac{68}{9}, \frac{4}{3})$ $N(\frac{9}{2}, 3)$

$l_{MN} : y = -\frac{6}{11}x + \frac{60}{11}$

联立直线求得 $(10, 0)$，故猜测定点为 $S(10, 0)$。

过 S 设 $l_{MN} : x = ty + 10$

将 M 代入得：$t = k + \frac{1}{k} - 4$

将 N 代入得：$t = k + \frac{1}{k} - 4$

因此对于任意 k，点 $S(10, 0)$ 均在直线 MN 上

由此证明了定点为 $S(10, 0)$。