数学扩展研究 I - 三角形

李宇轩

2020.03.09

目录

1 三角形

1.1 三角形的符号约定

我们首先进行符号约定，若没有特殊说明，这些符号将在后文表达相同的含义。

我们依照下方表格的规定进行符号约定：

符号	含义	符号	含义
A	角 A 的角度	h_a	垂线的长度（边 a 上）
B	角 B 的角度	h_b	垂线的长度（边 b 上）
C	角 C 的角度	h_c	垂线的长度（边 c 上）
a	边 a 的长度	m_a	中线的长度（边 a 上）
b	边 b 的长度	m_b	中线的长度（边 b 上）
c	边 c 的长度	m_c	中线的长度（边 c 上）
R	外接圆半径	t_a	角平分线的长度（角 a 上）
r	内切圆半径	t_b	角平分线的长度（角 b 上）
r_a	旁切圆半径（边 a 侧）	t_c	角平分线的长度（角 c 上）
r_b	旁切圆半径（边 b 侧）	p	半周长的大小
r_c	旁切圆半径（边 c 侧）		

表 1: 三角形的符号约定

我们将下方图片所示的三角形作为参考：

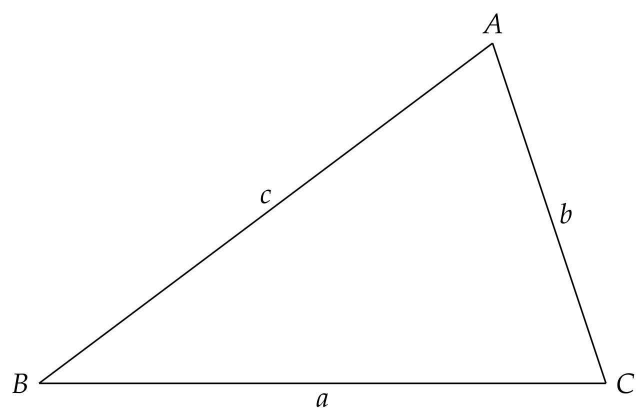

图 1: 三角形的示意图

除此之外，重心记为 G，垂心记为 H，外心记为 O，内心记为 I，旁心记为 P。

1.2 三角形的第一组面积公式

本章将研究三角形中较为基本的面积公式，并进行相应推导。

1.2.1 三角形面积公式 01

三角形面积公式 01：

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$$

1.2.2 三角形面积公式 02

三角形面积公式 02：

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin B$$

将高用边和角的正弦表示并代入公式 01：

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot (b \cdot \sin C) \tag{2}$$

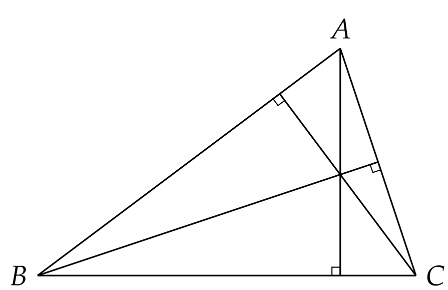

图 2: 三角形面积公式 02 示意图

1.2.3 三角形面积公式 03

三角形面积公式 03:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{4R} \cdot a \cdot b \cdot c$$

将正弦定理代入公式 02:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C && (1)\\
&= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \left(\frac{c}{2R}\right) && (2)\\
&= \frac{1}{4R} \cdot a \cdot b \cdot c && (3)
\end{aligned}$$

1.2.4 三角形面积公式 04

三角形面积公式 04:

$$S_{\triangle} = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

将正弦定理代入公式 02:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C && (4)\\
&= \frac{1}{2} \cdot (2R \cdot \sin A) \cdot (2R \cdot \sin B) \cdot \sin C && (5)\\
&= 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C && (6)
\end{aligned}$$

1.2.5 三角形面积公式 05

三角形面积公式 05:

$$S_{\triangle} = r \cdot p$$

用角平分线将三角形分为三个小三角形:

$$\begin{aligned} S_{\triangle} &= S_{\triangle IBC} + S_{\triangle ICA} + S_{\triangle IAB} && (1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot c \cdot r && (2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a+b+c) \cdot r && (3) \\ &= r \cdot p && (4) \end{aligned}$$

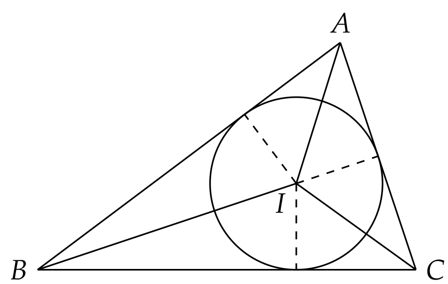

图 3: 三角形面积公式 05 示意图

1.2.6 三角形面积公式 06

三角形面积公式 06:

$$S_{\triangle} = r^2 \cdot \left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

将边长用内切圆半径和角的余切表示并代入公式 05:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle} &= r \cdot p && (5)\\
&= r \cdot \frac{1}{2} \cdot (a+b+c) && (6)\\
&= r \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2r\cdot\cot\frac{A}{2} + 2r\cdot\cot\frac{B}{2} + 2r\cdot\cot\frac{C}{2}\right) && (7)\\
&= r^2 \cdot \left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) && (8)
\end{aligned}$$

1.2.7 三角形面积公式 07

三角形面积公式 07:

$$S_{\triangle} = R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$$

将正弦定理代入公式 05:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle} &= r \cdot p && (1)\\
&= r \cdot \frac{1}{2} \cdot (a+b+c) && (2)\\
&= r \cdot \frac{1}{2} \cdot (2R\cdot\sin A + 2R\cdot\sin B + 2R\cdot\sin C) && (3)\\
&= R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C) && (4)
\end{aligned}$$

1.2.8 三角形面积公式 08

三角形面积公式 08:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 \cdot b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 \cdot c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}\right)^2}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{c^2 \cdot a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}\right)^2}$$

对公式 02 进行变形:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{1 - \cos^2 C} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

将余弦定理代入:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)} \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 \cdot b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)} \tag{5}$$

三角形面积公式 08 也被称为秦九韶公式。

1.2.9 三角形面积公式 09

三角形面积公式 09:

$$S_{\triangle} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

对公式 02 进行变形:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C && (1)\\
&= \sqrt{\left(\frac{a \cdot b}{2}\right)^2 \cdot \sin^2 C} && (2)\\
&= \sqrt{\left(\frac{a \cdot b}{2}\right)^2 \cdot (1-\cos^2 C)} && (3)\\
&= \sqrt{\left(\frac{a \cdot b}{2}\right)^2 \cdot (1+\cos C) \cdot (1-\cos C)} && (4)\\
&= \sqrt{\frac{a \cdot b \cdot (1+\cos C)}{2} \cdot \frac{a \cdot b \cdot (1-\cos C)}{2}} && (5)
\end{aligned}$$

将余弦定理代入:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle} &= \sqrt{\frac{a \cdot b \cdot \left(1+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)}{2} \cdot \frac{a \cdot b \cdot \left(1-\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)}{2}} && (6)\\
&= \sqrt{\frac{a \cdot b + \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}}{2} \cdot \frac{a \cdot b - \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}}{2}} && (7)\\
&= \sqrt{\frac{(a^2+2ab+b^2)-c^2}{4} \cdot \frac{c^2-(a^2-2ab+b^2)}{4}} && (8)\\
&= \sqrt{\frac{(a+b)^2-c^2}{4} \cdot \frac{c^2-(a+b)^2}{4}} && (9)\\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{c-a+b}{2}} && (10)\\
&= \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} && (11)
\end{aligned}$$

三角形面积公式 09 也被称为海伦公式。

1.2.10 三角形面积公式 10

三角形面积公式 10:

$$S_{\triangle}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{[(a+b)^2-c^2]\cdot[c^2-(a+b)^2]}$$

$$S_{\triangle}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{[(b+c)^2-a^2]\cdot[a^2-(b+c)^2]}$$

$$S_{\triangle}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{[(c+a)^2-b^2]\cdot[b^2-(c+a)^2]}$$

对公式 08 进行变形:

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2\cdot b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2} \tag{1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(a\cdot b+\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)\cdot\left(a\cdot b-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)} \tag{2}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{(a^2+b^2+2ab-c^2)\cdot(c^2-a^2-b^2+2ab)} \tag{3}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{[(a+b)^2-c^2]\cdot[c^2-(a-b)^2]} \tag{4}$$

三角形面积公式 10 常用于解决已知三角形边长和与边长差的问题。

1.2.11 三角形面积公式 11

三角形面积公式 11:

$$S_\triangle = {h_a}^2 \cdot \frac{\sin A}{2 \cdot \sin B \cdot \sin C}$$

$$S_\triangle = {h_b}^2 \cdot \frac{\sin B}{2 \cdot \sin C \cdot \sin A}$$

$$S_\triangle = {h_c}^2 \cdot \frac{\sin C}{2 \cdot \sin A \cdot \sin B}$$

将边长用高和角的正弦表示并代入公式 02:

$$\begin{aligned} S_\triangle &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A && (1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{h_a}{\sin B} \cdot \frac{h_a}{\sin C} \cdot \sin A && (2) \\ &= {h_a}^2 \cdot \frac{\sin A}{2 \cdot \sin B \cdot \sin C} && (3) \end{aligned}$$

1.2.12 三角形面积公式 12

三角形面积公式 12:

$$S_\triangle = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot (a+b+c)} \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$$

联立公式 03 和公式 05:

$$\frac{1}{4R} \cdot (a \cdot b \cdot c) = r \cdot p \tag{1}$$

$$\frac{1}{4R} \cdot (a \cdot b \cdot c) = \frac{r}{2} \cdot (a+b+c) \tag{2}$$

$$2 \cdot R \cdot r = \frac{a \cdot b \cdot c}{a+b+c} \tag{3}$$

$$R \cdot r = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot (a+b+c)} \tag{4}$$

代入公式 07:

$$\begin{aligned} S_\triangle &= R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C) && (5) \\ &= \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot (a+b+c)} \cdot (\sin A + \sin B + \sin C) && (6) \end{aligned}$$

1.2.13 三角形面积公式 13

三角形面积公式 13:

$$S_\triangle = r_a \cdot (p-a)$$

$$S_\triangle = r_b \cdot (p-b)$$

$$S_\triangle = r_c \cdot (p-c)$$

用角平分线将三角形分为三个小三角形:

$$\begin{aligned} S_\triangle &= S_{\triangle PBA} + S_{\triangle PBC} - S_{\triangle PAC} && (1)\\ &= \frac{1}{2}\cdot c \cdot r_b + \frac{1}{2}\cdot a \cdot r_b - \frac{1}{2}\cdot b \cdot r_b && (2)\\ &= \frac{1}{2}\cdot (c+a-b)\cdot r_b && (3)\\ &= r_b \cdot (p-b) && (4) \end{aligned}$$

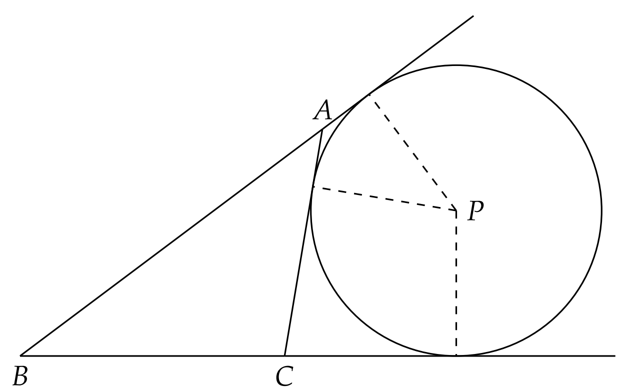

图 4: 三角形面积公式 13 示意图

1.2.14 三角形面积公式 14

三角形面积公式 14:

$$S_{\triangle} = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

将公式 05 和公式 13 变形代入公式 09:

$$S_{\triangle} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \tag{1}$$

$$S_{\triangle} = \sqrt{\frac{S_{\triangle}}{r} \cdot \frac{S_{\triangle}}{r_a} \cdot \frac{S_{\triangle}}{r_b} \cdot \frac{S_{\triangle}}{r_c}} \tag{2}$$

$$S_{\triangle} = \sqrt{\frac{{S_{\triangle}}^4}{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}} \tag{3}$$

$${S_{\triangle}}^2 = \frac{{S_{\triangle}}^4}{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} \tag{4}$$

$${S_{\triangle}}^2 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \tag{5}$$

$$S_{\triangle} = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} \tag{6}$$

1.2.15 三角形面积公式 15

三角形面积公式 15:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{p} \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$$

将公式 05 变形代入如公式 12:

$$S_{\triangle} = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} \tag{1}$$

$$S_{\triangle} = \sqrt{\frac{S_{\triangle}}{p} \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} \tag{2}$$

$${S_{\triangle}}^2 = \frac{S_{\triangle}}{p} \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \tag{3}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{p} \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \tag{4}$$

1.3 三角形的相关圆半径

本章将研究三角形中，外接圆半径，内切圆半径，旁切圆半径，三者间的数量关系。

1.3.1 第一组关系

第一组关系：

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

由公式 05 可得：

$$\frac{1}{r} = \frac{p}{S_\triangle} \tag{1}$$

由公式 11 可得：

$$\frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S_\triangle} \tag{2}$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S_\triangle} \tag{3}$$

$$\frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S_\triangle} \tag{4}$$

我们可以进行以下推导：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} &= \frac{p}{S_\triangle} & (5)\\
&= \frac{3p-(a+b+c)}{S_\triangle} & (6)\\
&= \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{S_\triangle} & (7)\\
&= \frac{p-a}{S_\triangle} + \frac{p-b}{S_\triangle} + \frac{p-c}{S_\triangle} & (8)\\
&= \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} & (9)
\end{aligned}$$

1.3.2 第二组关系

第二组关系:

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R$$

我们可以进行以下推导:

$$\begin{aligned}
r_a + r_b + r_c - r &= \frac{S_\triangle}{p-a} + \frac{S_\triangle}{p-b} + \frac{S_\triangle}{p-c} - \frac{S_\triangle}{p} && (1)\\
&= \frac{S_\triangle \cdot p - S_\triangle \cdot (p-a)}{p \cdot (p-a)} + \frac{S_\triangle \cdot (p-b) - S_\triangle \cdot (p-c)}{(p-b)\cdot(p-c)} && (2)\\
&= \frac{S_\triangle \cdot p - S_\triangle \cdot p + S_\triangle \cdot a}{p \cdot (p-a)} + \frac{S_\triangle \cdot p - S_\triangle \cdot b + S_\triangle \cdot p - S_\triangle \cdot c}{(p-b)\cdot(p-c)} && (3)\\
&= \frac{S_\triangle \cdot p - S_\triangle \cdot p + S_\triangle \cdot a}{p \cdot (p-a)} + \frac{S_\triangle \cdot (a+b+c) - S_\triangle \cdot (b-c)}{(p-b)\cdot(p-c)} && (4)\\
&= \frac{S_\triangle \cdot a}{p \cdot (p-a)} + \frac{S_\triangle \cdot a}{(p-b)\cdot(p-c)} && (5)\\
&= \frac{S_\triangle \cdot a \cdot [p \cdot (p-a) + (p-b)\cdot(p-c)]}{p \cdot (p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} && (6)
\end{aligned}$$

代入公式 09 可得:

$$\begin{aligned}
r_a + r_b + r_c - r &= \frac{S_\triangle \cdot a \cdot [p \cdot (p-a) + (p-b)\cdot(p-c)]}{{S_\triangle}^2} && (7)\\
&= \frac{a \cdot [p \cdot (p-a) + (p-b)\cdot(p-c)]}{S_\triangle} && (8)\\
&= \frac{a \cdot [p^2 - ap + p^2 - cp - bp + bc]}{S_\triangle} && (9)\\
&= \frac{a \cdot [2p^2 - p \cdot (a+b+c) + bc]}{S_\triangle} && (10)\\
&= \frac{a \cdot [2p^2 - 2p^2 + bc]}{S_\triangle} && (11)\\
&= \frac{a \cdot b \cdot c}{S_\triangle} && (12)
\end{aligned}$$

代入公式 03 可得:

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R \qquad (13)$$

1.4 三角形的半角公式

本章将研究三角形中各个内角半角的三角比公式，并进行相应推导。

1.4.1 三角形的正切半角公式

三角形的正切半角公式：

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)\cdot(p-a)}{p\cdot(p-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{p\cdot(p-c)}}$$

由三角形的半周长开始推导：

$$p=\frac{1}{2}\cdot(a+b+c) \tag{1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(DB+DC+EC+EA+FA+FB) \tag{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(2DB+2DC+2EA) \tag{3}$$

$$=DB+DC+EA \tag{4}$$

$$=a+EA \tag{5}$$

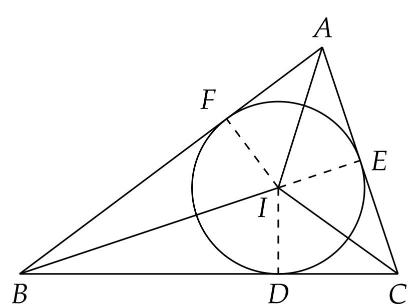

图 5: 三角形正切半角公式示意图

由上述推导结论可得:

$$EA = p - a \tag{6}$$

由直角三角形 $\triangle AEI$ 可得:

$$\begin{aligned}
\tan\frac{A}{2} &= \frac{EI}{EA} && (7)\\
&= \frac{r}{p-a} && (8)\\
&= \frac{r\cdot p}{p\cdot(p-a)} && (9)\\
&= \frac{S_{\triangle}}{p\cdot(p-a)} && (10)
\end{aligned}$$

由公式 09 代入后可得:

$$\begin{aligned}
\tan\frac{A}{2} &= \frac{\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}}{p\cdot(p-a)} && (11)\\
&= \sqrt{\frac{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{p^2\cdot(p-a)^2}} && (12)\\
&= \sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}} && (13)
\end{aligned}$$

1.4.2 三角形的正弦半角公式

三角形的正弦半角公式:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{b\cdot c}}$$
$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)\cdot(p-a)}{c\cdot a}}$$
$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{a\cdot b}}$$

根据三角形的正切半角公式可得:

$$\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p\cdot(p-a)}{(p-b)\cdot(p-c)}} \tag{1}$$

由三角比的平方关系开始推导:

$$\csc^2\frac{A}{2}-\cot^2\frac{A}{2}=1 \tag{2}$$
$$\csc^2\frac{A}{2}=1+\cot^2\frac{A}{2} \tag{3}$$
$$\csc^2\frac{A}{2}=1+\frac{p\cdot(p-a)}{(p-b)\cdot(p-c)} \tag{4}$$
$$\csc^2\frac{A}{2}=\frac{p\cdot(p-a)+(p-b)\cdot(p-c)}{(p-b)\cdot(p-c)} \tag{5}$$
$$\csc^2\frac{A}{2}=\frac{p\cdot(p+b+c-2p)+(p-b)\cdot(p-c)}{(p-b)\cdot(p-c)} \tag{6}$$
$$\csc^2\frac{A}{2}=\frac{p^2+pb+pc-2p^2+p^2-pb-pc+bc}{(p-b)\cdot(p-c)} \tag{7}$$
$$\csc^2\frac{A}{2}=\frac{b\cdot c}{(p-b)\cdot(p-c)} \tag{8}$$
$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{b\cdot c} \tag{9}$$
$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{b\cdot c}} \tag{10}$$

1.4.3 三角形的余弦半角公式

三角形的余弦半角公式:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p\cdot(p-a)}{b\cdot c}}$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p\cdot(p-b)}{c\cdot a}}$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p\cdot(p-c)}{a\cdot b}}$$

根据三角形的正切半角公式可得:

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}} \tag{1}$$

由三角比的平方关系开始推导:

$$\sec^2\frac{A}{2}-\tan^2\frac{A}{2}=1 \tag{2}$$

$$\sec^2\frac{A}{2}=1+\tan^2\frac{A}{2} \tag{3}$$

$$\sec^2\frac{A}{2}=1+\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)} \tag{4}$$

$$\sec^2\frac{A}{2}=\frac{p\cdot(p-a)+(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)} \tag{5}$$

$$\sec^2\frac{A}{2}=\frac{p\cdot(p+b+c-2p)+(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)} \tag{6}$$

$$\sec^2\frac{A}{2}=\frac{p^2+pb+pc-2p^2+p^2-pb-pc+bc}{p\cdot(p-a)} \tag{7}$$

$$\sec^2\frac{A}{2}=\frac{b\cdot c}{p\cdot(p-a)} \tag{8}$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p\cdot(p-a)}{b\cdot c} \tag{9}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p\cdot(p-a)}{b\cdot c}} \tag{10}$$

1.5 三角形的第二组面积公式

本章将研究三角形中与半角的三角函数相关的面积公式，并进行相应推导。

1.5.1 三角形面积公式 16

三角形面积公式 16:

$$S_\triangle = p \cdot (p-a) \cdot \tan\frac{A}{2}$$

$$S_\triangle = p \cdot (p-b) \cdot \tan\frac{B}{2}$$

$$S_\triangle = p \cdot (p-c) \cdot \tan\frac{C}{2}$$

将三角形正切半角公式推导的中间步骤变形可得:

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{S_\triangle}{p \cdot (p-a)} \tag{1}$$

$$S_\triangle = p \cdot (p-a) \cdot \tan\frac{A}{2} \tag{2}$$

1.5.2 三角形面积公式 17

三角形面积公式 17:

$$S_\triangle = p^2 \cdot \tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2}$$

由公式 16 可以得到:

$$\tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2} = \frac{S_\triangle}{p \cdot (p-a)} \cdot \frac{S_\triangle}{p \cdot (p-b)} \frac{S_\triangle}{p \cdot (p-c)} \tag{1}$$

$$\tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2} = \frac{{S_\triangle}^3}{p^3 \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \tag{2}$$

$$\tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2} = \frac{{S_\triangle}^2}{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \cdot \frac{S_\triangle}{p^2} \tag{3}$$

$$\tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2} = \frac{{S_\triangle}^2}{{S_\triangle}^2} \cdot \frac{S_\triangle}{p^2} \tag{4}$$

$$\tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2} = \frac{S_\triangle}{p^2} \tag{5}$$

$$S_\triangle = p^2 \cdot \tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2} \tag{6}$$

1.5.3 三角形面积公式 18

三角形面积公式 18:

$$S_\triangle = a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{p} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

由三角形余弦半角公式可以得到:

$$\cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \cos^2\frac{C}{2} = \frac{p \cdot (p-a)}{b \cdot c} \cdot \frac{p \cdot (p-b)}{c \cdot a} \cdot \frac{p \cdot (p-c)}{a \cdot b} \tag{1}$$

$$\cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \cos^2\frac{C}{2} = \frac{p^3 \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} \tag{2}$$

$$\cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} \cdot \cos^2\frac{C}{2} = \frac{p^2 \cdot {S_\triangle}^2}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} \tag{3}$$

$$\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} = \frac{p \cdot S_\triangle}{a \cdot b \cdot c} \tag{4}$$

$$S_\triangle = a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{p} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \tag{5}$$

1.5.4 三角形面积公式 19

三角形面积公式 19:

$${S_\triangle}^2 = a \cdot b \cdot c \cdot p \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

由三角形正弦半角公式可以得到:

$$\sin^2\frac{A}{2} \cdot \sin^2\frac{B}{2} \cdot \sin^2\frac{C}{2} = \frac{(p-b) \cdot (p-c)}{b \cdot c} \cdot \frac{(p-c) \cdot (p-a)}{c \cdot a} \cdot \frac{(p-a) \cdot (p-b)}{a \cdot b} \tag{1}$$

$$\sin^2\frac{A}{2} \cdot \sin^2\frac{B}{2} \cdot \sin^2\frac{C}{2} = \frac{p^2 \cdot (p-a)^2 \cdot (p-b)^2 \cdot (p-c)^2}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot p^2} \tag{2}$$

$$\sin^2\frac{A}{2} \cdot \sin^2\frac{B}{2} \cdot \sin^2\frac{C}{2} = \frac{{S_\triangle}^4}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot p^2} \tag{3}$$

$$\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} = \frac{S_\triangle}{a \cdot b \cdot c} \tag{4}$$

$${S_\triangle}^2 = a \cdot b \cdot c \cdot p \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \tag{5}$$

1.5.5 三角形面积公式 20

三角形面积公式 20:

$$S_{\triangle} = 4 \cdot R \cdot p \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

将公式 04 代入公式 19:

$$S_{\triangle}{}^2 = a \cdot b \cdot c \cdot p \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \tag{1}$$

$$S_{\triangle} \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = a \cdot b \cdot c \cdot p \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \tag{2}$$

$$S_{\triangle} = 4 \cdot R \cdot p \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \tag{3}$$

1.5.6 三角形面积公式 21

三角形面积公式 21:

$$S_{\triangle} = 4 \cdot R \cdot r \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

将公式 04 代入公式 18:

$$S_{\triangle} = a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{p} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \tag{1}$$

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{p} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \tag{2}$$

$$p = 4 \cdot R \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \tag{3}$$

将上述结论代入公式 05:

$$S_{\triangle} = r \cdot p \tag{4}$$

$$S_{\triangle} = r \cdot 4 \cdot R \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \tag{5}$$

$$S_{\triangle} = 4 \cdot R \cdot r \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \tag{6}$$

1.5.7 三角形面积公式 22

三角形面积公式 22:

$$S_{\triangle} = r^2 \cdot \cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} \cdot \cot\frac{C}{2}$$

将公式 05 和公式 17 对比:

$$S_{\triangle} = r \cdot p \tag{1}$$

$$S_{\triangle} = p^2 \cdot \tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2} \tag{2}$$

$$r = p \cdot \tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2} \tag{3}$$

$$p = \frac{r}{\tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2}} \tag{4}$$

将上述结论代入公式 17:

$$S_{\triangle} = p^2 \cdot \tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2} \tag{5}$$

$$S_{\triangle} = \frac{r^2}{\tan^2\frac{A}{2} \cdot \tan^2\frac{B}{2} \cdot \tan^2\frac{C}{2}} \cdot \tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2} \tag{6}$$

$$S_{\triangle} = \frac{r^2}{\tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2}} \tag{7}$$

$$S_{\triangle} = r^2 \cdot \cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} \cdot \cot\frac{C}{2} \tag{8}$$

1.6 三角形中的线段

本章将研究三角形中的线段，并进行相应推导。

1.6.1 三角形内的线段长公式

三角形内的线段长公式：

$$i_a = \sqrt{\frac{1}{\lambda+\mu} \cdot \left(\lambda b^2 + \mu c^2 - \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda+\mu} \cdot a^2\right)}$$

$$i_b = \sqrt{\frac{1}{\lambda+\mu} \cdot \left(\lambda c^2 + \mu a^2 - \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda+\mu} \cdot b^2\right)}$$

$$i_c = \sqrt{\frac{1}{\lambda+\mu} \cdot \left(\lambda a^2 + \mu b^2 - \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda+\mu} \cdot c^2\right)}$$

线段 i_a 代表三角形内线段 AD：

$$\frac{DB}{DC} = \frac{\lambda}{\mu}$$

线段 i_b 代表三角形内线段 BE：

$$\frac{EC}{EA} = \frac{\lambda}{\mu}$$

线段 i_c 代表三角形内线段 CF：

$$\frac{FA}{FB} = \frac{\lambda}{\mu}$$

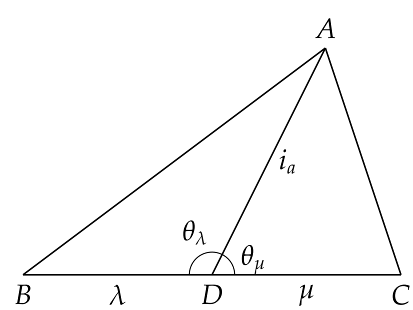

图 6: 三角形内的线段长公式示意图

如图所示可以得出以下结论：

$$DB = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot a \tag{1}$$

$$DC = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot a \tag{2}$$

由余弦定理可以得到：

$$\cos\theta_\lambda = \frac{DB^2 + DA^2 - AB^2}{2 \cdot DB \cdot DA} = \frac{\left(\dfrac{\lambda a}{\lambda + \mu}\right) + {i_a}^2 - c^2}{2 \cdot \dfrac{\lambda a}{\lambda + \mu} \cdot i_a} \tag{3}$$

$$\cos\theta_\mu = \frac{DC^2 + DA^2 - AC^2}{2 \cdot DC \cdot DA} = \frac{\left(\dfrac{\mu a}{\lambda + \mu}\right) + {i_a}^2 - b^2}{2 \cdot \dfrac{\mu a}{\lambda + \mu} \cdot i_a} \tag{4}$$

由于两个角的和：

$$\theta_\lambda + \theta_\mu = \pi \tag{5}$$

$$\cos\theta_\lambda + \cos\theta_\mu = 0 \tag{6}$$

代入后可以得到：

$$\frac{\left(\dfrac{\lambda a}{\lambda + \mu}\right) + {i_a}^2 - c^2}{2 \cdot \dfrac{\lambda a}{\lambda + \mu} \cdot i_a} + \frac{\left(\dfrac{\mu a}{\lambda + \mu}\right) + {i_a}^2 - b^2}{2 \cdot \dfrac{\mu a}{\lambda + \mu} \cdot i_a} = 0 \tag{7}$$

$$\mu \cdot \left[\left(\frac{\lambda a}{\lambda + \mu}\right)^2 + {i_a}^2 - c^2\right] + \lambda \cdot \left[\left(\frac{\lambda a}{\lambda + \mu}\right)^2 + {i_a}^2 - b^2\right] = 0 \tag{8}$$

$$\mu \cdot \left[\left(\frac{\lambda^2 a^2}{(\lambda + \mu)^2}\right)^2 + {i_a}^2 - c^2\right] + \lambda \cdot \left[\left(\frac{\mu^2 a^2}{(\lambda + \mu)^2}\right)^2 + {i_a}^2 - b^2\right] = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\lambda^2 \cdot \mu \cdot a^2}{(\lambda + \mu)^2} + \frac{\mu^2 \cdot \lambda \cdot a^2}{(\lambda + \mu)^2} + (\lambda + \mu) \cdot {i_a}^2 - \lambda b^2 - \mu c^2 = 0 \tag{10}$$

$$\frac{(\lambda + \mu) \cdot (\lambda \cdot \mu \cdot a^2)}{(\lambda + \mu)^2} + (\lambda + \mu) \cdot {i_a}^2 - \lambda b^2 - \mu c^2 = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\lambda \cdot \mu \cdot a^2}{\lambda + \mu} + (\lambda + \mu) \cdot {i_a}^2 - \lambda b^2 - \mu c^2 = 0 \tag{12}$$

进一步变形可以得到:

$$(\lambda+\mu)\cdot {i_a}^2=\lambda b^2+\mu c^2-\frac{\lambda\cdot\mu\cdot a^2}{\lambda+\mu} \tag{13}$$

$${i_a}^2=\frac{1}{\lambda+\mu}\cdot\left(\lambda b^2+\mu c^2-\frac{\lambda\cdot\mu\cdot a^2}{\lambda+\mu}\right) \tag{14}$$

$$i_a=\sqrt{\frac{1}{\lambda+\mu}\cdot\left(\lambda b^2+\mu c^2-\frac{\lambda\cdot\mu\cdot a^2}{\lambda+\mu}\right)} \tag{15}$$

1.6.2 三角形中线长公式 01

三角形中线长公式 01:

$$m_a=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(b^2+c^2-\frac{1}{2}\cdot a^2\right)}$$

$$m_b=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(c^2+a^2-\frac{1}{2}\cdot b^2\right)}$$

$$m_c=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(a^2+b^2-\frac{1}{2}\cdot c^2\right)}$$

对于中线显然有以下性质:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{1} \tag{1}$$

随后可以使用三角形内的线段长公式:

$$m_a=\sqrt{\frac{1}{\lambda+\mu}\cdot\left(\lambda b^2+\mu c^2-\frac{\lambda\cdot\mu}{\lambda+\mu}\cdot a^2\right)} \tag{2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{1+1}\cdot\left(b^2+c^2-\frac{1\cdot 1}{1+1}\cdot a^2\right)} \tag{3}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(b^2+c^2-\frac{1}{2}\cdot a^2\right)} \tag{4}$$

1.6.3 三角形中线长公式 02

三角形中线长公式 02:

$$m_a{}^2 = \frac{1}{4} \cdot a^2 + b \cdot c \cdot \cos A$$

$$m_b{}^2 = \frac{1}{4} \cdot b^2 + c \cdot a \cdot \cos B$$

$$m_c{}^2 = \frac{1}{4} \cdot c^2 + a \cdot b \cdot \cos C$$

在三角形中线长公式 01 中代入余弦定理:

$$m_a = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(b^2 + c^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2\right)} \tag{1}$$

$$m_a = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(b^2 + c^2 - a^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2\right)} \tag{2}$$

$$m_a = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[b^2 + c^2 - (b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A)\right] + \frac{1}{4} \cdot a^2} \tag{3}$$

$$m_a = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A\right] + \frac{1}{4} \cdot a^2} \tag{4}$$

$$m_a = \sqrt{b \cdot c \cdot \cos A + \frac{1}{4} \cdot a^2} \tag{5}$$

$$m_a{}^2 = b \cdot c \cdot \cos A + \frac{1}{4} \cdot a^2 \tag{6}$$

$$m_a{}^2 = \frac{1}{4} \cdot a^2 + b \cdot c \cdot \cos A \tag{7}$$

1.6.4 三角形角平分线长公式 01

三角形角平分线长公式 01：

$$t_a = \sqrt{b \cdot c \cdot \left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right]}$$

$$t_b = \sqrt{c \cdot a \cdot \left[1 - \frac{b^2}{(c+a)^2}\right]}$$

$$t_c = \sqrt{a \cdot b \cdot \left[1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right]}$$

在三角形 $\triangle ABD$ 中运用正弦定理：

$$\frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AD}{\sin B} \tag{1}$$

在三角形 $\triangle ACD$ 中运用正弦定理：

$$\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AD}{\sin C} \tag{2}$$

由于 AD 平分角 $\angle BAC$，即 $\angle BAD = \angle CAD$：

$$\frac{BD}{CD} = \frac{\sin C}{\sin B} \tag{3}$$

而在三角形 $\triangle ABC$ 中使用正弦定理，可以得到：

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B} \tag{4}$$

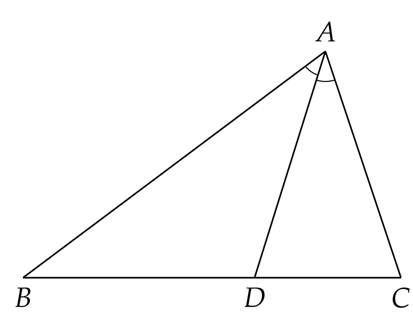

图 7: 三角形的角平分线长公式示意图

由上述两组结论此可以得到:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \tag{5}$$

对于角平分线因此有以下性质:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{c}{b} \tag{6}$$

随后可以使用三角形内的线段长公式:

$$t_a = \sqrt{\frac{1}{b+c} \cdot \left(c \cdot b^2 + b \cdot c^2 - \frac{bc}{b+c} \cdot a^2\right)} \tag{7}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{b+c} \cdot \left(bc \cdot (b+c) - \frac{bc}{b+c} \cdot a^2\right)} \tag{8}$$

$$= \sqrt{bc - \frac{bc \cdot a^2}{b+c}} \tag{9}$$

$$= \sqrt{bc \cdot \left(1 - \frac{bc \cdot a^2}{b+c}\right)} \tag{10}$$