# 关于第 06 期题目的讨论

数学学习小组

2020.07.04

# 目录

# 1 题目 06-1

本题来源于第 06 期（2020.07.04）小组讨论题中，原题号为第 3 题。

对于抛物线 $\Gamma$:

$$x^2 = 4y$$

设直线 $l$ 过点 $P(0,-1)$。

将直线 $l$ 与抛物线 $\Gamma$ 的交点称为点 $A$ 和点 $B$。

将点 $A$ 关于 $y$ 轴的对称点称为点 $A'$。

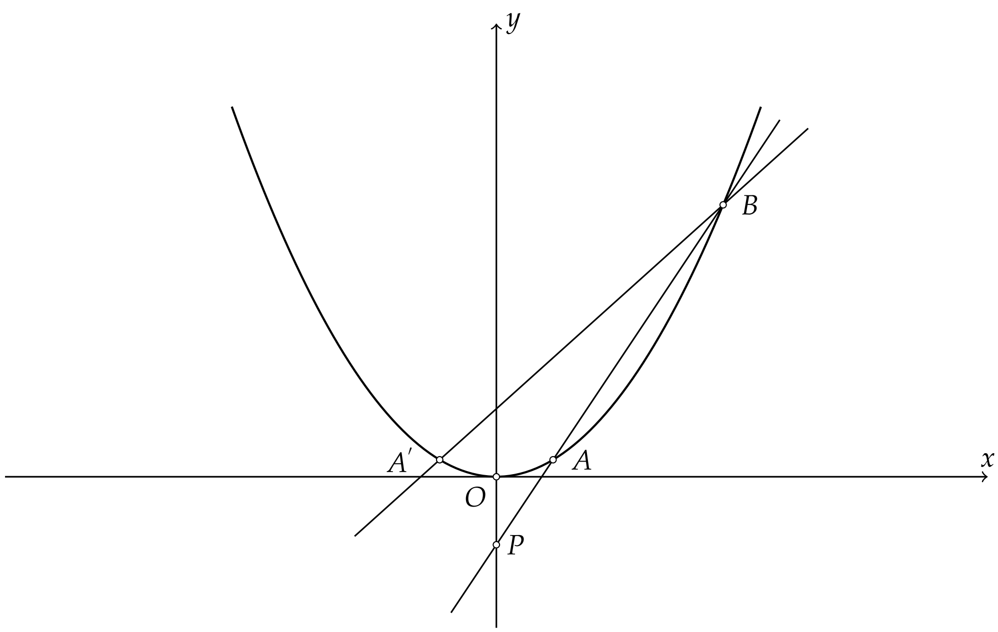


图 1: 题目 06-01 的示意图

现连接直线 $A'B$，求证直线 $A'B$ 过一定点，并求出该定点。

## 1.1 第一种解法

整理者：李宇轩

**核心思路：利用向量平行。**

设定点为 $S(x,y)$，因为 $S$ 在 $A'B$ 上，故 $\overrightarrow{A'S} \parallel \overrightarrow{A'B}$。

设点 $A(x_1,y_1)$，设点 $B(x_2,y_2)$，故点 $A'(-x_1,y_1)$。

$\overrightarrow{A'S} = (x+x_1, y-y_1)$

$\overrightarrow{A'B} = (x_2+x_1, y_2-y_1)$

根据条件可设直线 $l : y = kx_1$。

由于点 $A(x_1,y_1)$ 在直线 $l$ 上，故 $y_1 = kx_1 - 1$。

由于点 $A(x_2,y_2)$ 在直线 $l$ 上，故 $y_2 = kx_2 - 1$。

由平行条件可得：

$(x+x_1)\cdot(y_2-y_1) = (y-y_1)\cdot(x_2+x_1)$

$(y_2-y_1)x + x_1y_2 = (x_2+x_1)y - x_2y_1$

$(y_2-y_1)x + kx_1x_2 - x_1 = (x_2+x_1)y - kx_1x_2 + x_2$

联立直线和抛物线：

$$\begin{cases} y = kx - 1 \\ x^2 - 4y \end{cases}$$

$x^2 = 4\cdot(kx-1)$

$x^2 - 4kx - 4 = 0$

由韦达定理可知：

$x_1 + x_2 = 4k$

$x_1 \cdot x_2 = 4$

将两者代入可得：

$(y_2-y_1)x + kx_1x_2 - x_1 = (x_2+x_1)y - kx_1x_2 + x_2$

$(y_2-y_1)\cdot x = 4ky + 4k - 8k$

$(y_2-y_1)\cdot x = 4ky - 4k$

要使 $S$ 为定点，其坐标必为 $S(0,1)$。

## 1.2 第二种解法

整理者：李宇轩

**核心思路：特殊值法，利用对称性，利用向量平行。**

由于对称性，若 $A'B$ 过定点，则定点必在 $y$ 轴上。

设定点为 $S(0,y)$，因为 $S$ 在 $A'B$ 上，故 $\overrightarrow{A'S} \parallel \overrightarrow{A'B}$。

设点 $A(x_1,y_1)$，设点 $B(x_2,y_2)$，故点 $A'(-x_1,y_1)$。

$\overrightarrow{A'S} = (x_1, y - y_1)$

$\overrightarrow{A'B} = (x_2 + x_1, y_2 - y_1)$

根据条件可设直线 $l : y = kx_1$。

由于点 $A(x_1,y_1)$ 在直线 $l$ 上，故 $y_1 = kx_1 - 1$。

由于点 $A(x_2,y_2)$ 在直线 $l$ 上，故 $y_2 = kx_2 - 1$。

由平行条件可得：

$x_1 \cdot (y_2 - y_1) = (y - y_1) \cdot (x_2 + x_1)$

$x_1y_2 - x_1y_1 = (x_2 + x_1) \cdot y - x_2y_1 - x_1y_1$

$x_1y_2 + x_2y_1 = (x_2 + x_1) \cdot y$

求解定点纵坐标：

$$y = \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{x_1 + x_2}$$

$$y = \frac{kx_1x_2 - x_1 + kx_1x_2 - x_2}{x_1 + x_2}$$

$$y = \frac{2kx_1x_2 - (x_1 + x_2)}{x_1 + x_2}$$

$$y = \frac{2kx_1x_2}{x_1 + x_2} - 1$$

联立直线和抛物线：

$$\begin{cases} y = kx - 1 \\ x^2 - 4y \end{cases}$$

$x^2 = 4 \cdot (kx - 1)$

$x^2 - 4kx - 4 = 0$

由韦达定理可知：

$x_1 + x_2 = 4k$

$x_1 \cdot x_2 = 4$

将两者代入可得：

$$y = \frac{2k \cdot x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} - 1$$

$$y = \frac{2k \cdot 4}{4k} - 1$$

$y = 1$

因此点 $S$ 为定点，其坐标为 $S(0,1)$。

当点 $B$ 在右侧时的示意图:

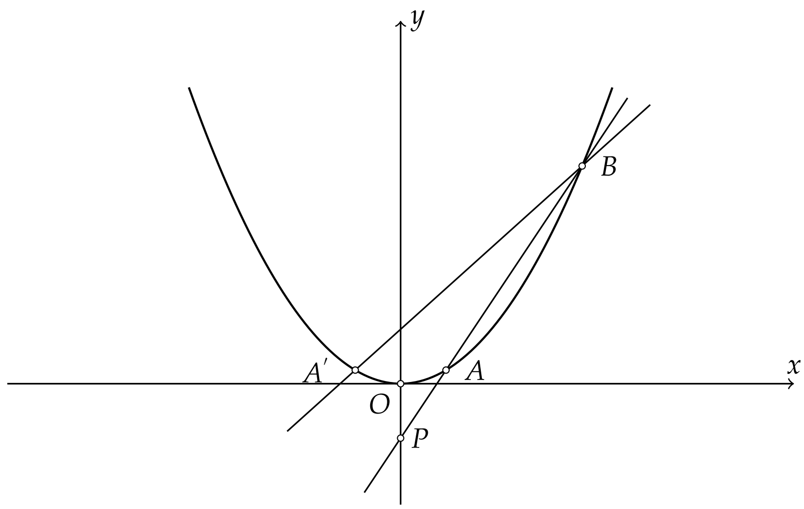


图 2: 当点 $B$ 在右侧时的示意图

当点 $B$ 在左侧时的示意图:

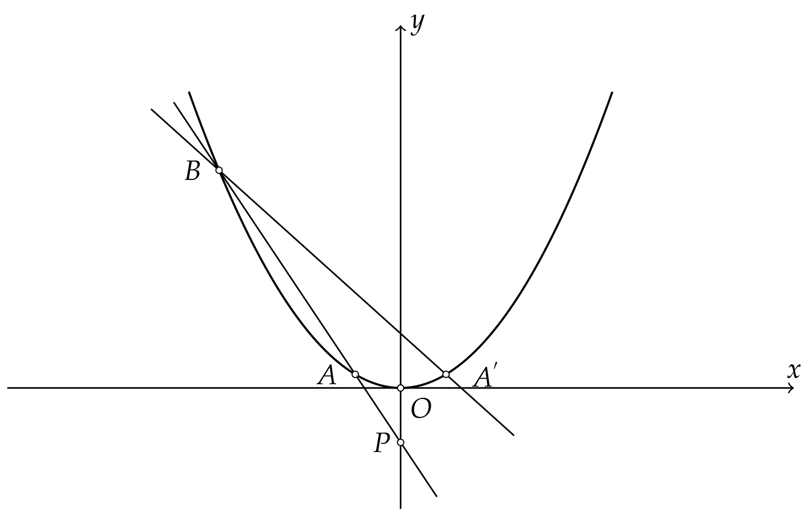


图 3: 当点 $B$ 在左侧时的示意图

以上是本解法的配图。

# 2 题目 06-02

本题来源于第 06 期（2020.07.04）小组讨论题中，原题号为第 5 题。

对于抛物线 $\Gamma$:

$$y^2 = 4x$$

设直线 $l_1$ 过点 $P(12, 8)$，交抛物线 $\Gamma$ 于点 $C$ 和点 $D$，两者的中点为点 $M$。

设直线 $l_2$ 过点 $P(12, 8)$，交抛物线 $\Gamma$ 于点 $E$ 和点 $F$，两者的中点为点 $N$。

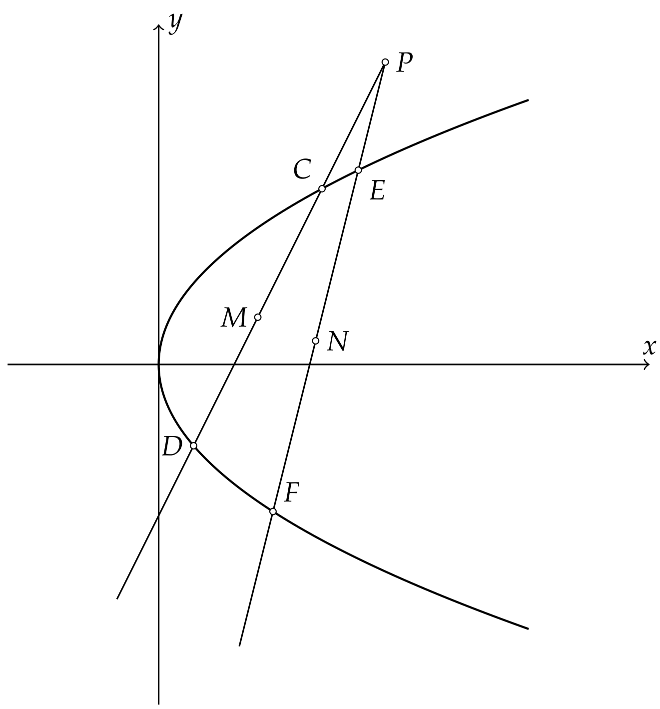


图 4: 题目 06-02 的示意图

若两直线满足倾斜角互余，求证直线 $MN$ 过一定点，并求出该定点。

## 2.1 第一种解法

整理者：乔君毅

**核心思路：设直线求解。**

因为直线 $l_1$ 和直线 $l_2$ 的倾斜角互余。

故设直线 $l_1$ 的斜率为 $k$，同时直线 $l_2$ 的斜率为 $\frac{1}{k}$。

设点 $C(x_1, y_1)$，设点 $D(x_2, y_2)$。

故中点 $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

由于直线 $l_1$ 在点 $P(12, 8)$ 上：

$$l_1 : y - 8 = k(x - 12)$$

$$l_1 : y = kx - 16k + 8$$

联立直线 $l_1$ 和抛物线：

$$\begin{cases} y = kx - 12k + 8 \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

$$ky^2 - 4y + 32 - 48k = 0$$

$$y_1 + y_2 = \frac{4}{k}$$

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{32 - 48k}{k}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{4} \cdot (y_1^2 + y_2^2)$$

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{4} \cdot \left[(y_1 + y_2)^2 - 2 \cdot y_1 \cdot y_2\right]$$

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{16}{k^2} - \tfrac{64}{k} + 96\right]$$

$$x_1 + x_2 = \frac{4}{k^2} - \frac{16}{k} + 24$$

所以 $M$ 点坐标为 $\left(12 + \frac{2}{k^2} - \frac{8}{k}\ ,\ \frac{2}{k}\right)$

同理 $N$ 点坐标为 $\left(12 + 2k^2 - 8k\ ,\ 2k\right)$

求解直线 $MN$ 的斜率：

$$k_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}$$

$$k_{MN} = \frac{\frac{2}{k} - 2k}{2(\frac{1}{k^2} - k^2) - 8(\frac{1}{k} - k)}$$

$$k_{MN} = \frac{1}{\frac{1}{k} + k - 4}$$

求解直线 $MN$ 的方程：

$$l_{MN} : y - 2k = \frac{1}{\frac{1}{k} + k - 4} \cdot [x - (12 + 2k^2 - 8k)]$$

$$l_{MN} : (\frac{1}{k} + k - 4) \cdot (y - 2k) = x - 2k^2 + 8k - 12$$

$$l_{MN} : (\frac{1}{k} + k - 4) \cdot y = x - 10$$

因为定点 $S$ 的坐标应使得上式恒成立。

所以定点的坐标为 $S(10, 0)$。

## 2.2 第二种解法

整理者：施安然

**核心思路：利用直线交点求特殊值。**

因为直线 $l_1$ 和直线 $l_2$ 的倾斜角互余。

故设直线 $l_1$ 的斜率为 $k$，同时直线 $l_2$ 的斜率为 $\frac{1}{k}$。

设点 $C(x_1, y_1)$，设点 $D(x_2, y_2)$。

故中点 $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

由于直线 $l_1$ 在点 $P(12,8)$ 上：

$l_1 : y - 8 = k(x - 12)$

$l_2 : y - 8 = \frac{1}{k}(x - 12)$

当 $k < 0$ 时，倾斜角大于 90 度，无余角，舍。

当 $k = 1$ 时，两条直线重合，不合题意，舍。

当 $k = 0$ 时，只有三个交点，不合题意，舍。

当 $k$ 不存在时，只有三个交点，不合题意，舍。

因此 $k$ 存在，同时满足 $k \in (0,1) \cap (1, +\infty)$

所以 $x_1 \neq x_2$，同时 $y_1 \neq y_2$。

$y_1^2 = 4x_1$

$y_2^2 = 4x_2$

$(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 4(x_1 - x_2)$

$y_1 + y_2 = \frac{4}{k}$

$x_1 + x_2 = \frac{4}{k^2} - \frac{16}{k} + 24$

所以 $M$ 点坐标为 $\left(12 + \frac{2}{k^2} - \frac{8}{k}\ ,\ \frac{2}{k}\right)$

同理 $N$ 点坐标为 $\left(12 + 2k^2 - 8k\ ,\ 2k\right)$

联立直线 $l_1$ 和抛物线：

$$\begin{cases} y - 8 = k(x - 12) \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

$y^2 - \frac{4}{k}y + \frac{32}{k} - 48 = 0$

解得：$\Delta = \frac{16}{k^2} - \frac{128}{k} + 192 > 0$

同理：$\Delta = 16k^2 - 128k + 192 > 0$

$k \in (0, \frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{2}, 2)$

代入 $k = \frac{1}{10}$： $M(132, 20)$ $N(\frac{561}{50}, \frac{1}{5})$

$l_{MN} : y = \frac{10}{61}x - \frac{100}{61}$

代入 $k = \frac{3}{2}$：$M(\frac{68}{9}, \frac{4}{3})$ $N(\frac{9}{2}, 3)$

$l_{MN} : y = -\frac{6}{11}x + \frac{60}{11}$

联立直线求得 $(10,0)$，故猜测定点为 $S(10,0)$。

过 $S$ 设 $l_{MN} : x = ty + 10$

将 $M$ 代入得：$t = k + \frac{1}{k} - 4$

将 $N$ 代入得：$t = k + \frac{1}{k} - 4$

因此对于任意 $k$，点 $S(10,0)$ 均在直线 $MN$ 上

由此证明了定点为 $S(10,0)$。