

1. 设 M 点为圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 上的动点, 点 M 在 x 轴上的投影为 N . 动点 P 满足 $2\overrightarrow{PN} = \sqrt{3}\overrightarrow{MN}$, 动点 P 的轨迹为 E .

(1) 求 E 的方程;

(2) 设 E 的左顶点为 D , 若直线 $l: y = kx + m$ 与曲线 E 交于 A, B 两点 (A, B 不是左、右顶点), 且满足 $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}|$, 求证: 直线 l 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

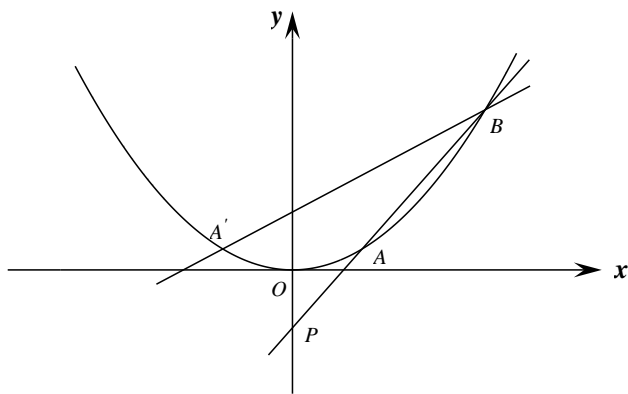
2. 已知抛物线 $C: x^2 = -2py$ 经过点 $(2, -1)$.

(1) 求抛物线 C 的方程及其准线方程;

(2) 设 O 为原点, 过抛物线 C 的焦点作斜率不为 0 的直线 l 交抛物线 C 于两点 M, N , 直线 $y = -1$ 分别交直线 OM, ON 于点 A 和点 B . 求证: 以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点.

3. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 过点 $(2, 1)$, 直线 l 过点 $P(0, -1)$ 与抛物线 C 交于 A, B 两点.

点 A 关于 y 轴的对称点为 A' , 连接 $A'B$. 问直线 $A'B$ 是否过定点? 若是, 求出定点坐标; 若不是, 请说明理由.



4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, 过点 $(1, 0)$ 做两条相互垂直的直线 l_1, l_2 分别与椭圆 C 交于 P, Q, M, N 四点. 若 $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{SN}$, $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{TQ}$, 证明直线 ST 是否过定点.

5. 已知抛物线 $\Gamma: y^2 = 4x$, 过点 $P(12, 8)$ 的两条直线 l_1, l_2 分别交抛物线 Γ 于点 C, D 和 E, F , 线段 CD 和 EF 的中点分别为 M, N . 如果直线 l_1 与 l_2 的倾斜角互余, 求证: 直线 MN 经过一定点.