关于第 09 期题目的讨论

数学学习小组

2020.08.06

目录

1 题目 09-1

本题来源于第 09 期（2020.08.06）小组讨论题中，原题号为 2019 年崇明一模 20 题的第 3 小问。

对于椭圆 Γ:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

设椭圆 Γ 的短轴的上端点为 B_1。

设椭圆 Γ 的短轴的下端点为 B_2。

设点 P 为椭圆 Γ 上异于 B_1, B_2 的动点。

设平面上一点 R 满足 $RB_1 \perp PB_1$ 且 $RB_2 \perp PB_2$。

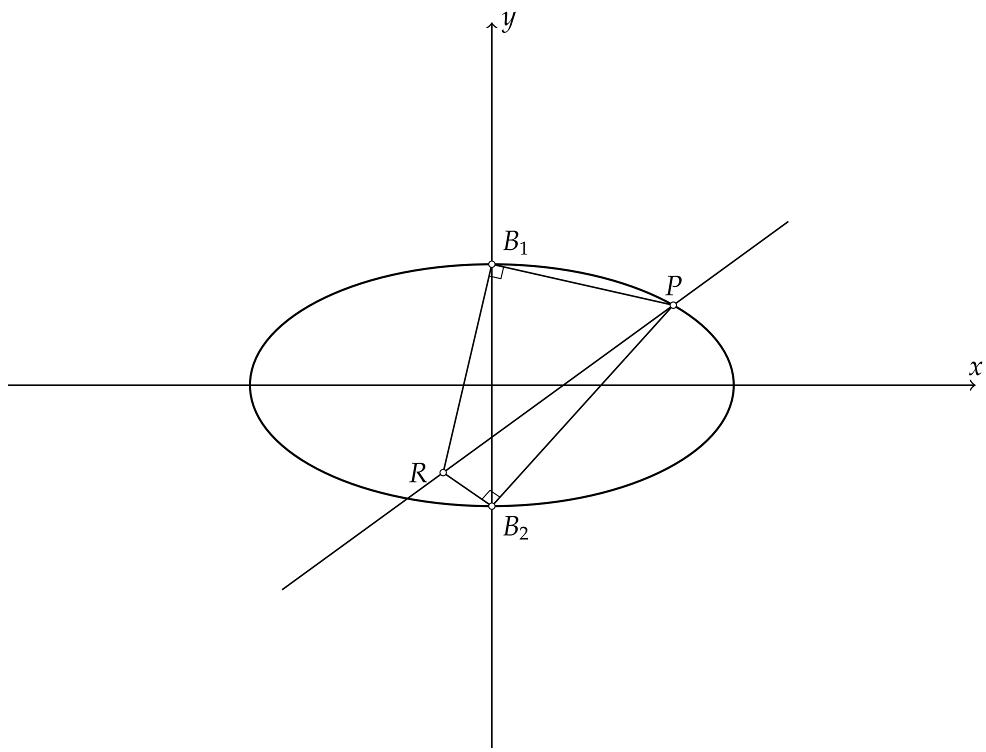

图 1: 题目 09-01 的示意图

证明 $\triangle PB_1B_2$ 和 $\triangle RB_1B_2$ 的面积比为定值。

1.1 第一种解法

整理者：施安然

核心思路：联立直线求横坐标的关系。

设点 $P(x_1, y_1)$，设 $R(x_2, y_2)$。

因为 $B_1(+2,0)$：$k_{PB_1} = \dfrac{y_1-2}{x_1}$

因为 $B_2(-2,0)$：$k_{PB_2} = \dfrac{y_1+2}{x_2}$

由于 $PB_1 \perp RB_1$：$k_{RB_1} = -\dfrac{x_1}{y_1-2}$

由于 $PB_2 \perp RB_2$：$k_{RB_2} = -\dfrac{x_1}{y_1+2}$

故直线 $RB_1 : y = -\dfrac{x_1}{y_1-2} \cdot x + 2$

故直线 $RB_2 : y = -\dfrac{x_1}{y_1+2} \cdot x - 2$

由于 R 在直线上 $RB_1 : y = -\dfrac{x_1}{y_1-2} \cdot x_2 + 2$

由于 R 在直线上 $RB_2 : y = -\dfrac{x_1}{y_1+2} \cdot x_2 - 2$

联立两式可以得到：

$$\frac{x_1}{y_1-2} \cdot x_2 - 2 = \frac{x_1}{y_1+2} \cdot x_2 + 2$$

$$x_2 = \frac{4}{\dfrac{x_1}{y_1-2} - \dfrac{x_1}{y_1+2}}$$

$$x_2 = \frac{4}{\dfrac{4x_1}{y_1^2-4}}$$

$$x_2 = \frac{4}{\dfrac{4x_1}{y_1^2-4}}$$

$$x_2 = \frac{{y_1}^2-4}{x_1}$$

由于两个三角形同底：

$$\frac{S_{\triangle}PB_1B_2}{S_{\triangle}RB_1B_2} = \frac{|x_1|}{|x_2|}$$

$$\frac{S_{\triangle}PB_1B_2}{S_{\triangle}RB_1B_2} = \left|\frac{x_1^2}{y_1^2-4}\right|$$

$$\frac{S_{\triangle}PB_1B_2}{S_{\triangle}RB_1B_2} = 4$$

1.2 第二种解法

整理者：乔君毅

核心思路：四点共圆。

因为 $RB_1 \perp PB_1$，同时 $RB_2 \perp PB_2$，故四点共圆。

设点 $P(x_1, y_1)$，设点 $R(X_2, Y_2)$。

设圆的圆心为 (a, b)，设圆的半径为 r。

设圆的方程为：$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 。

因为 $B_1(0,2), B_2(0,-2)$ 在圆上：

$$\begin{cases} a^2 + (b-2)^2 = r^2 \\ a^2 + (b+2)^2 = r^2 \end{cases}$$

两式相减得 $b = 0$，所以 $a^2 + 4 = r^2$，故圆心 $(a, 0)$。

将点 P 带入圆中得 $(x_1 - a)^2 + y_1^2 = r^2$。

由于 P 在椭圆上 $y_1^2 = 4 - \frac{x_1^2}{4}$。

因此原式可以变为：

$$(x_1 - a)^2 + 4 - \frac{x_1^2}{4} = a^2 + 4$$

$$x_1{}^2 - 2ax_1 + a^2 + 4 - \frac{x_1^2}{4} = a^2 + 4$$

$$x_1{}^2 - 2ax_1 - \frac{x_1^2}{4} = 0$$

$$\frac{3x_1^2}{4} - 2ax_1 = 0$$

$$x_1 = \frac{3a}{8} \quad \text{或} \quad x_1 = 0\text{（舍）}$$

因为 RP 为直径，其中点为圆心。

所以 $x_1 + x_2 = 2a$，故 $x_2 = -\frac{2}{3}a$。

所以 $\frac{S_{\triangle}PB_1B_2}{S_{\triangle}RB_1B_2} = \frac{|x_1|}{|x_2|} = 4$