关于第 05 期题目的讨论

数学学习小组

2020.06.19

目录

1 题目 05-1

本题来源于第 05 期（2020.06.19）小组讨论题中，原题号为第 2 大题第 4 小问。

对于椭圆 Γ:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$$

设点 A 为椭圆短轴上的顶点。

设点 P 点 Q 为椭圆上异于 A 的任意一点，且两点关于原点 O 对称。

直线 AP 交 x 轴于点 M。

直线 AQ 交 x 轴于点 N。

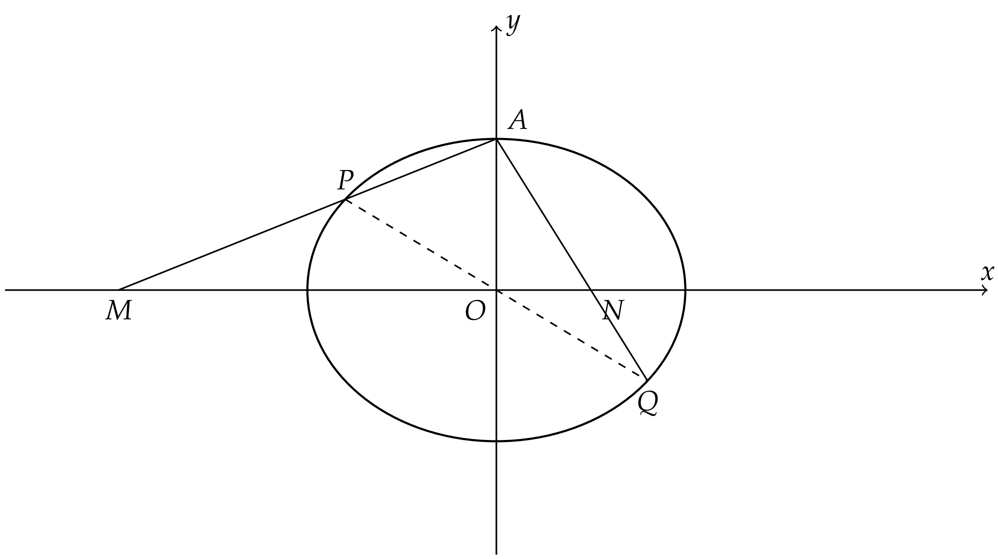

图 1: 题目 05-01 的示意图

请判断以线段 MN 为直径的圆是否过定点？

若是求出定点坐标，若否则说明理由。

1.1 第一种解法

提出者：李宇轩

核心思路：利用 $k_1 \cdot k_2 = e^2 - 1$，设定点 $S(x, y)$。

已知椭圆方程：$\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

解得 $A(0, 8)$ $\quad a = 10 \quad c = 6 \quad e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$

设 $l_{AP} : y = k_1 x + 8$ 令 $y = 0$ 则 $x_M = -\dfrac{8}{k_1}$

设 $l_{AQ} : y = k_2 x + 8$ 令 $y = 0$ 则 $x_N = -\dfrac{8}{k_2}$

直线 PQ 过圆心，故 AP 与 AQ 的斜率积为定值。

$k_1 \cdot k_2 = e^2 - 1$

$k_1 \cdot k_2 = -\dfrac{16}{25}$

设以直线 MN 为直径的圆所过定点为 $S(x, y)$

因此则有 $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{NS} = 0$

$M\left(-\dfrac{8}{k_1}, 0\right) \quad \overrightarrow{MS} = \left(x + \dfrac{8}{k_1}, y\right)$

$N\left(-\dfrac{8}{k_2}, 0\right) \quad \overrightarrow{NS} = \left(x + \dfrac{8}{k_2}, y\right)$

代入可得：

$$x^2 + x \cdot \left(\frac{8}{k_1} + \frac{8}{k_2}\right) + \frac{64}{k_1 \cdot k_2} + y^2 = 0$$

$$x^2 + x \cdot \left(\frac{8 \cdot (k_1 + k_2)}{k_1 \cdot k_2}\right) + \frac{64}{k_1 \cdot k_2} + y^2 = 0$$

$$x^2 - x \cdot \left(\frac{25 \cdot (k_1 + k_2)}{2}\right) - 100 + y^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{25}{2} \cdot (k_1 + k_2) \cdot x - 100 + y^2 = 0$$

由于 $S(x, y)$ 为圆所过的定点。

所以 S 的坐标取值应当使得上方推出等式恒成立。

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 10 \end{cases}$$

故定点为 $S(0, 10)$ 或 $S(0, -10)$

1.2 第二种解法

提出者：师梦萍

核心思路：求解 x_M, x_N**，设定点** $S(x, y)$。

已知椭圆方程：$\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

解得 $A(0, 8)$ 设 $P(x_1, y_1)$ 则 $Q(-x_1, -y_1)$

$\overrightarrow{AP} = (x_1, y_1 - 8)$

$\overrightarrow{QA} = (x_1, y_1 + 8)$

$l_{AP} : \dfrac{x}{x_1} = \dfrac{y-8}{y_1-8}$ 令 $y = 0$ 则 $x_M = \dfrac{-8x_1}{y_1-8}$

$l_{AQ} : \dfrac{x}{x_1} = \dfrac{y-8}{y_1+8}$ 令 $y = 0$ 则 $x_N = \dfrac{-8x_1}{y_1+8}$

上一步也可以用同理替代。

设以直线 MN 为直径的圆所过定点为 $S(x, y)$

因此则有 $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SN} = 0$

$M\left(\dfrac{-8x_1}{y_1-8}, 0\right)$ $\overrightarrow{SM} = \left(\dfrac{-8x_1}{y_1-8} - x, -y\right)$

$N\left(\dfrac{-8x_1}{y_1+8}, 0\right)$ $\overrightarrow{SN} = \left(\dfrac{-8x_1}{y_1+8} - x, -y\right)$

代入可得：

$$\left(\frac{-8x_1}{y_1-8} - x\right) \cdot \left(\frac{-8x_1}{y_1+8} - x\right) + y^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{8x_1}{y_1+8} + \frac{8x_1}{y_1-8}\right) \cdot x + \frac{64x_1^2}{y_1^2-64} = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{8x_1 \cdot (y_1 + 8 + y_1 - 8)}{y_1^2 - 64} \cdot x + \frac{64x_1^2}{y_1^2-64} = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{16x_1y_1}{y_1^2-64} \cdot x + \frac{64x_1^2}{y_1^2-64} = 0$$

由椭圆方程得：

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

$$y_1^2 = 64 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{100}\right)$$

$$y_1^2 = 64 - \frac{16}{25}x_1^2$$

将其代入可得：

$$x^2 + y^2 + \frac{16x_1y_1}{y_1^2-64} \cdot x + \frac{64x_1^2}{y_1^2-64} = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{16x_1y_1}{64 - \frac{16}{25}x_1^2 - 64} \cdot x + \frac{64x_1^2}{64 - \frac{16}{25}x_1^2 - 64} = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{16x_1y_1}{\frac{16}{25}x_1^2} \cdot x - \frac{64x_1^2}{\frac{16}{25}x_1^2} = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{25y_1}{x_1} \cdot x - 100 = 0$$

由于 $S(x, y)$ 为圆所过的定点。

所以 S 的坐标取值应当使得上方推出等式恒成立。

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 10 \end{cases}$$

故定点为 $S(0, 10)$ 或 $S(0, -10)$

1.3 第三种解法

提出者：乔君毅

核心思路：求解 x_M, x_N，设圆的方程。

已知椭圆方程：$\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$

解得 $A(0,8)$ 设 $P(x_1,y_1)$ 则 $Q(-x_1,-y_1)$

$$\overrightarrow{AP}=(x_1,y_1-8)$$

$$\overrightarrow{QA}=(x_1,y_1+8)$$

$$l_{AP}:\frac{x}{x_1}=\frac{y-8}{y_1-8}\quad 令\ y=0\quad 则\ x_M=\frac{-8x_1}{y_1-8}$$

$$l_{AQ}:\frac{x}{x_1}=\frac{y-8}{y_1+8}\quad 令\ y=0\quad 则\ x_N=\frac{-8x_1}{y_1+8}$$

上一步也可以用同理替代。

设点 M 和点 N 的中点 $C(x_C,0)$。

求解圆的圆心可得：

$$x_C=\frac{1}{2}\cdot(x_M+x_N)$$

$$x_C=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-8x_1}{y_1-8}+\frac{-8x_1}{y_1+8}\right)$$

$$x_C=\frac{-4x_1}{y_1-8}+\frac{-4x_1}{y_1+8}$$

$$x_C=-\frac{8x_1y_1}{y_1^2-64}$$

求解圆的半径可得：

$$r=\frac{1}{2}\cdot|x_M-x_N|$$

$$r=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{-8x_1}{y_1-8}+\frac{-8x_1}{y_1+8}\right|$$

$$r=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{8x_1}{y_1+8}-\frac{8x_1}{y_1-8}\right|$$

$$r=\left|\frac{64x_1}{y_1^2-64}\right|$$

因此可设圆的方程：

$$\left(x+\frac{8x_1y_1}{y_1^2-64}\right)^2+y^2=\frac{(64x_1)^2}{(y_1^2-64)^2}$$

$$x^2+x\cdot\left(\frac{16x_1y_1}{y_1^2-64}\right)+y^2=\frac{(64x_1)^2-(8x_1y_1)^2}{(y_1^2-64)^2}$$

根据椭圆方程可得：$y_1^2=64-\dfrac{16}{25}x_1^2$

将其代入可以得到：

$$x^2+x\cdot\left(\frac{16x_1y_1}{y_1^2-64}\right)+y^2=\frac{(64x_1)^2-(8x_1y_1)^2}{(y_1^2-64)^2}$$

$$x^2+x\cdot\left(\frac{16x_1y_1}{y_1^2-64}\right)+y^2=\frac{\left(\frac{1024}{25}\right)\cdot x_1^4}{\left(\frac{256}{25}\right)\cdot x_1^4}$$

$$x^2+x\cdot\left(\frac{16x_1y_1}{y_1^2-64}\right)+y^2=100$$

若圆上有一点 (x,y) 为定点。

那么该定点的取值应当使得上方推出等式恒成立。

$$\begin{cases}x=0\\x^2+y^2=100\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0\\y=\pm10\end{cases}$$

故定点为 $(0,10)$ 或 $(0,-10)$

1.4 第四种解法

提出者：李周

核心思路：参数方程，求解 x_M, x_N，设定点 $S(x,y)$。

已知椭圆的标准方程：$\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$

可得椭圆的参数方程：$\begin{cases} x=10\cdot\cos\theta \\ y=8\cdot\sin\theta \end{cases}$

设 $P(10\cdot\cos\theta, 8\cdot\cos\theta)$

故 $Q(-10\cdot\cos\theta, -8\cdot\cos\theta)$

且根据方程可知 $A(0,8)$

$l_{AP}: y=\dfrac{4\sin\theta-4}{5\cos\theta}x+8$

$l_{AQ}: y=\dfrac{4\sin\theta+4}{5\cos\theta}x+8$

令 $y=0$ 解得 $x_M=\dfrac{10\cdot\cos\theta}{1-\sin\theta}$

令 $y=0$ 解得 $x_N=\dfrac{-10\cdot\cos\theta}{1+\sin\theta}$

设以直线 MN 为直径的圆所过定点为 $S(x,y)$

因此则有 $\overrightarrow{MS}\cdot\overrightarrow{NS}=0$

$M\left(\dfrac{10\cdot\cos\theta}{1-\sin\theta},0\right)\quad \overrightarrow{MS}=\left(x-\dfrac{10\cdot\cos\theta}{1-\sin\theta},y\right)$

$N\left(\dfrac{-10\cdot\cos\theta}{1-\sin\theta},0\right)\quad \overrightarrow{NS}=\left(x+\dfrac{10\cdot\cos\theta}{1-\sin\theta},y\right)$

代入可得：

$$x^2+\left(\frac{10\cdot\cos\theta}{1+\sin\theta}-\frac{10\cdot\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)\cdot x-\frac{100\cdot\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}+y^2=0$$

$$x^2+\left(\frac{10\cdot\cos\theta}{1+\sin\theta}-\frac{10\cdot\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)\cdot x-100+y^2=0$$

由于 $S(x,y)$ 为圆所过的定点。

所以 S 的坐标取值应当使得上方推出等式恒成立。

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2=100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\pm10 \end{cases}$$

故定点为 $S(0,10)$ 或 $S(0,-10)$

1.5 第五种解法

提出者：白昱轩

已知椭圆方程：$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

经过变换可得：$16x^2+25y^2-1600=0$

设直线 PQ：$y=kx$

联立方程：$\begin{cases}16x^2+25y^2-1600=0\\ y=kx\end{cases}$

$16x^2+25k^2x^2-1600=0$

$x_1=\frac{40}{\sqrt{25k^2+16}}\quad P\left(\frac{40}{\sqrt{25k^2+16}},\frac{40k}{\sqrt{25k^2+16}}\right)$

$x_2=\frac{-40}{\sqrt{25k^2+16}}\quad Q\left(\frac{40}{\sqrt{25k^2+16}},\frac{-40k}{\sqrt{25k^2+16}}\right)$

据椭圆方程可知 $A(0,8)$

$l_{AP}:\frac{x}{x_P}=\frac{y-8}{y_P-8}$

$l_{AQ}:\frac{x}{x_Q}=\frac{y-8}{y_Q-8}$

令 $y=0$　则 $x_M=\frac{-8x_P}{y_P-8}=\frac{-40}{5k-\sqrt{25k^2+16}}$

令 $y=0$　则 $x_N=\frac{-8x_Q}{y_Q-8}=\frac{-40}{5k+\sqrt{25k^2+16}}$

设以 MN 为直径的圆所过定点为 $S(x,y)$

因此则有 $\overrightarrow{MS}\cdot\overrightarrow{NS}=0$

将其代入可得：

$(x-x_M)(x-x_N)+y^2=0$

$\left(x+\frac{40}{5k-\sqrt{25k^2+16}}\right)\left(x+\frac{40}{5k+\sqrt{25k^2+16}}\right)+y^2=0$

将其展开可得：

$x^2+\left(\frac{40}{5k-\sqrt{25k^2+16}}+\frac{40}{5k+\sqrt{25k^2+16}}\right)\cdot x-100+y^2=0$

若圆上有一点 (x,y) 为定点。

那么该定点的取值应当使得上方推出等式恒成立。

$\begin{cases}x=0\\ x^2+y^2=100\end{cases}$

$\begin{cases}x=0\\ y=\pm10\end{cases}$

故定点为（$0,10$）或（$0,-10$）

1.6 第六种解法

提出者：杨骐荣

核心思路：取特殊值，利用两圆的交点。

已知椭圆的标准方程：$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

可得椭圆的参数方程：$\begin{cases} x=10\cdot\cos\theta \\ y=8\cdot\sin\theta \end{cases}$

1. 令 $\cos\theta=1$ 有 $\sin\theta=0$

解得 $P\ (10,0)\quad Q(-10,0)$

显然 $M(10,0)\quad N(-10,0)$

可设圆 MN 的方程 $x^2+y^2=100$

2. 令 $\cos\theta=\frac{4}{5}$ 有 $\sin\theta=\frac{3}{5}$

解得 $P(8,\frac{24}{5})\quad Q(-8,-\frac{24}{5})\quad A(0,8)$

$l_{AP}:\frac{x-8}{8}=-\frac{y-\frac{24}{5}}{8-\frac{24}{5}}$ 令 $y=0\quad x_M=20$

$l_{AQ}:\frac{x-8}{8}=-\frac{y+\frac{24}{5}}{8+\frac{24}{5}}$ 令 $y=0\quad x_N=-5$

因此 $M(20,0)\quad N(-5,0)$

可设圆 MN 的方程 $\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{25}{2}\right)^2$

联立两个圆的方程后化简可得：

$$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ x^2+y^2-15x=100 \end{cases}$$

解得 $(0,\pm10)$，故猜测定点为 $(0,\pm10)$。

核心思路：取特殊值，利用椭圆的对称性。

设 P 关于 y 轴的对称点为 P'。

设 Q 关于 y 轴的对称点为 Q'。

直线 AP' 交 x 轴于点 M'。

直线 AQ' 交 x 轴于点 N'。

显然 MN 与 $M'N'$ 对称。

故以其为直径的圆也对称。

因此两圆的交点必然在 y 轴上。

取 $P(10,0)\quad Q(-10,0)$

圆 $MN: x^2+y^2=100$

与 y 轴交点 $(0,\pm10)$，故猜测定点为 $(0,\pm10)$。

以上为第一部分猜测定点的两种方法。

以下为第二部分证明定点的一种方法。

设 $P(x_1, y_1)$ 则 $Q(-x_1, -y_1)$ 同时 $A(0, 8)$

$\overrightarrow{AP} = (x_1, y_1 - 8)$

$\overrightarrow{QA} = (x_1, y_1 + 8)$

$l_{AP} : \frac{x}{x_1} = \frac{y-8}{y_1-8}$ 令 $y = 0$ 则 $x_M = \frac{-8x_1}{y_1-8}$

$l_{AQ} : \frac{x}{x_1} = \frac{y-8}{y_1+8}$ 令 $y = 0$ 则 $x_N = \frac{-8x_1}{y_1+8}$

上一步也可以用同理替代。

对于定点 $S(0, \pm 10)$ 有 $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SN} = 0$

$M\left(\frac{-8x_1}{y_1-8}, 0\right)$ $\overrightarrow{SM} = \left(\frac{-8x_1}{y_1-8}, \pm 10\right)$

$N\left(\frac{-8x_1}{y_1+8}, 0\right)$ $\overrightarrow{SN} = \left(\frac{-8x_1}{y_1+8}, \pm 10\right)$

代入可以得到:

$$\frac{-8x_1}{y_1-8} \cdot \frac{-8x_1}{y_1+8} + 100 = 0$$

$$\frac{64x_1^2}{y_1^2 - 64} + 100 = 0$$

由椭圆方程得:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

$$y_1^2 = 64 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{100}\right)$$

$$y_1^2 = 64 - \frac{16}{25}x_1^2$$

将其代入观察到等式成立。

因此证明了 $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SN} = 0$, 故定点 $S(0, \pm 10)$