数学扩展研究Ⅰ - 三角形

李宇轩

2020.03.09

目录

1 三角形

1.1 三角形的符号约定

我们首先进行符号约定，若没有特殊说明，这些符号将在后文表达相同的含义。

我们依照下方表格的规定进行符号约定:

符号	含义	符号	含义
A	角 A 的角度	h_a	垂线的长度（边 a 上）
B	角 B 的角度	h_b	垂线的长度（边 b 上）
C	角 C 的角度	h_c	垂线的长度（边 c 上）
a	边 a 的长度	m_a	中线的长度（边 a 上）
b	边 b 的长度	m_b	中线的长度（边 b 上）
c	边 c 的长度	m_c	中线的长度（边 c 上）
R	外接圆半径	t_a	角平分线的长度（角 a 上）
r	内切圆半径	t_b	角平分线的长度（角 b 上）
r_a	旁切圆半径（边 a 侧）	t_c	角平分线的长度（角 c 上）
r_b	旁切圆半径（边 b 侧）	p	半周长的大小
r_c	旁切圆半径（边 c 侧）		

表 1: 三角形的符号约定

我们将下方图片所示的三角形作为参考:

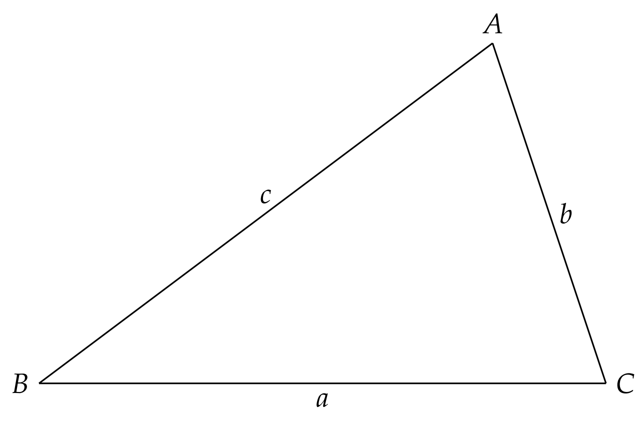

图 1: 三角形的示意图

除此之外，重心记为 G，垂心记为 H，外心记为 O，内心记为 I，旁心记为 P。

1.2 三角形的第一组面积公式

本章将研究三角形中较为基本的面积公式，并进行相应推导。

1.2.1 三角形面积公式 01

三角形面积公式 01：

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$$

1.2.2 三角形面积公式 02

三角形面积公式 02：

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin B$$

将高用边和角的正弦表示并代入公式 01：

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot (b \cdot \sin C) \tag{2}$$

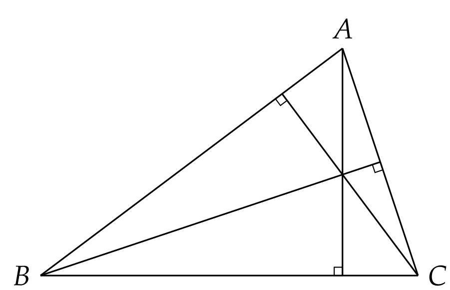

图 2: 三角形面积公式 02 示意图

1.2.3 三角形面积公式 03

三角形面积公式 03:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{4R} \cdot a \cdot b \cdot c$$

将正弦定理代入公式 02:

$$\begin{aligned} S_{\triangle} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C \qquad (1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \left(\frac{c}{2R}\right) \qquad (2) \\ &= \frac{1}{4R} \cdot a \cdot b \cdot c \qquad (3) \end{aligned}$$

1.2.4 三角形面积公式 04

三角形面积公式 04:

$$S_{\triangle} = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

将正弦定理代入公式 02:

$$\begin{aligned} S_{\triangle} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C \qquad (4) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2R \cdot \sin A) \cdot (2R \cdot \sin B) \cdot \sin C \qquad (5) \\ &= 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \qquad (6) \end{aligned}$$

1.2.5 三角形面积公式 05

三角形面积公式 05:

$$S_{\triangle} = r \cdot p$$

用角平分线将三角形分为三个小三角形:

$$\begin{aligned} S_{\triangle} &= S_{\triangle IBC} + S_{\triangle ICA} + S_{\triangle IAB} && (1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot c \cdot r && (2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a+b+c) \cdot r && (3) \\ &= r \cdot p && (4) \end{aligned}$$

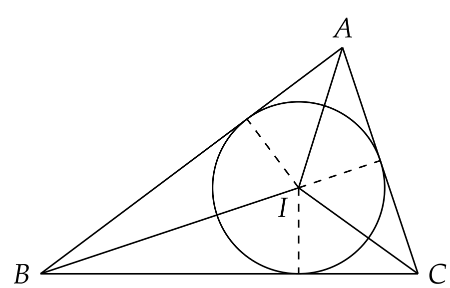

图 3: 三角形面积公式 05 示意图

1.2.6 三角形面积公式 06

三角形面积公式 06:

$$S_{\triangle} = r^2 \cdot \left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

将边长用内切圆半径和角的余切表示并代入公式 05:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle} &= r \cdot p && (5)\\
&= r \cdot \frac{1}{2} \cdot (a+b+c) && (6)\\
&= r \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2r \cdot \cot\frac{A}{2} + 2r \cdot \cot\frac{B}{2} + 2r \cdot \cot\frac{C}{2}\right) && (7)\\
&= r^2 \cdot \left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) && (8)
\end{aligned}$$

1.2.7 三角形面积公式 07

三角形面积公式 07:

$$S_{\triangle} = R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$$

将正弦定理代入公式 05:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle} &= r \cdot p && (1)\\
&= r \cdot \frac{1}{2} \cdot (a+b+c) && (2)\\
&= r \cdot \frac{1}{2} \cdot (2R \cdot \sin A + 2R \cdot \sin B + 2R \cdot \sin C) && (3)\\
&= R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C) && (4)
\end{aligned}$$

1.2.8 三角形面积公式 08

三角形面积公式 08:

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2\cdot b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}$$

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2\cdot c^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)^2}$$

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{c^2\cdot a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2}$$

对公式 02 进行变形:

$$\begin{aligned}S_{\triangle}&=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin C &(1)\\&=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{1-\cos^2 C} &(2)\\& &(3)\end{aligned}$$

将余弦定理代入:

$$\begin{aligned}S_{\triangle}&=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}\right)} &(4)\\&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2\cdot b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)} &(5)\end{aligned}$$

三角形面积公式 08 也被称为秦九韶公式。

1.2.9 三角形面积公式 09

三角形面积公式 09:

$$S_\triangle = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

对公式 02 进行变形:

$$\begin{aligned}
S_\triangle &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C && (1)\\
&= \sqrt{\left(\frac{a \cdot b}{2}\right)^2 \cdot \sin^2 C} && (2)\\
&= \sqrt{\left(\frac{a \cdot b}{2}\right)^2 \cdot (1-\cos^2 C)} && (3)\\
&= \sqrt{\left(\frac{a \cdot b}{2}\right)^2 \cdot (1+\cos C) \cdot (1-\cos C)} && (4)\\
&= \sqrt{\frac{a \cdot b \cdot (1+\cos C)}{2} \cdot \frac{a \cdot b \cdot (1-\cos C)}{2}} && (5)
\end{aligned}$$

将余弦定理代入:

$$\begin{aligned}
S_\triangle &= \sqrt{\frac{a \cdot b \cdot \left(1+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)}{2} \cdot \frac{a \cdot b \cdot \left(1-\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right)}{2}} && (6)\\
&= \sqrt{\frac{a \cdot b + \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}}{2} \cdot \frac{a \cdot b - \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}}{2}} && (7)\\
&= \sqrt{\frac{(a^2+2ab+b^2)-c^2}{4} \cdot \frac{c^2-(a^2-2ab+b^2)}{4}} && (8)\\
&= \sqrt{\frac{(a+b)^2-c^2}{4} \cdot \frac{c^2-(a+b)^2}{4}} && (9)\\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{c-a+b}{2}} && (10)\\
&= \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} && (11)
\end{aligned}$$

三角形面积公式 09 也被称为海伦公式。

1.2.10 三角形面积公式 10

三角形面积公式 10:

$$S_{\triangle}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{[(a+b)^2-c^2]\cdot[c^2-(a+b)^2]}$$

$$S_{\triangle}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{[(b+c)^2-a^2]\cdot[a^2-(b+c)^2]}$$

$$S_{\triangle}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{[(c+a)^2-b^2]\cdot[b^2-(c+a)^2]}$$

对公式 08 进行变形:

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2\cdot b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2} \tag{1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(a\cdot b+\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)\cdot\left(a\cdot b-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)} \tag{2}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{(a^2+b^2+2ab-c^2)\cdot(c^2-a^2-b^2+2ab)} \tag{3}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{[(a+b)^2-c^2]\cdot[c^2-(a-b)^2]} \tag{4}$$

三角形面积公式 10 常用于解决已知三角形边长和与边长差的问题。

1.2.11 三角形面积公式 11

三角形面积公式 11:

$$S_{\triangle} = {h_a}^2 \cdot \frac{\sin A}{2 \cdot \sin B \cdot \sin C}$$

$$S_{\triangle} = {h_b}^2 \cdot \frac{\sin B}{2 \cdot \sin C \cdot \sin A}$$

$$S_{\triangle} = {h_c}^2 \cdot \frac{\sin C}{2 \cdot \sin A \cdot \sin B}$$

将边长用高和角的正弦表示并代入公式 02:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{h_a}{\sin B} \cdot \frac{h_a}{\sin C} \cdot \sin A \tag{2}$$

$$= {h_a}^2 \cdot \frac{\sin A}{2 \cdot \sin B \cdot \sin C} \tag{3}$$

1.2.12 三角形面积公式 12

三角形面积公式 12:

$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot (a+b+c)} \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$$

联立公式 03 和公式 05:

$$\frac{1}{4R} \cdot (a \cdot b \cdot c) = r \cdot p \tag{1}$$

$$\frac{1}{4R} \cdot (a \cdot b \cdot c) = \frac{r}{2} \cdot (a+b+c) \tag{2}$$

$$2 \cdot R \cdot r = \frac{a \cdot b \cdot c}{a+b+c} \tag{3}$$

$$R \cdot r = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot (a+b+c)} \tag{4}$$

代入公式 07:

$$S_{\triangle} = R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C) \tag{5}$$

$$= \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot (a+b+c)} \cdot (\sin A + \sin B + \sin C) \tag{6}$$

1.2.13 三角形面积公式 13

三角形面积公式 13:

$$S_{\triangle} = r_a \cdot (p - a)$$

$$S_{\triangle} = r_b \cdot (p - b)$$

$$S_{\triangle} = r_c \cdot (p - c)$$

用角平分线将三角形分为三个小三角形:

$$\begin{aligned} S_{\triangle} &= S_{\triangle PBA} + S_{\triangle PBC} - S_{\triangle PAC} && (1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot c \cdot r_b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot r_b - \frac{1}{2} \cdot b \cdot r_b && (2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (c + a - b) \cdot r_b && (3) \\ &= r_b \cdot (p - b) && (4) \end{aligned}$$

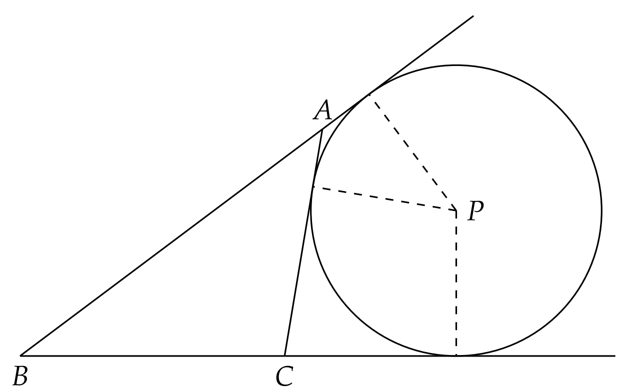

图 4: 三角形面积公式 13 示意图

1.2.14 三角形面积公式 14

三角形面积公式 14:

$$S_\triangle = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

将公式 05 和公式 13 变形代入公式 09:

$$S_\triangle = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \tag{1}$$

$$S_\triangle = \sqrt{\frac{S_\triangle}{r} \cdot \frac{S_\triangle}{r_a} \cdot \frac{S_\triangle}{r_b} \cdot \frac{S_\triangle}{r_c}} \tag{2}$$

$$S_\triangle = \sqrt{\frac{{S_\triangle}^4}{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}} \tag{3}$$

$${S_\triangle}^2 = \frac{{S_\triangle}^4}{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} \tag{4}$$

$${S_\triangle}^2 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \tag{5}$$

$$S_\triangle = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} \tag{6}$$

1.2.15 三角形面积公式 15

三角形面积公式 15:

$$S_\triangle = \frac{1}{p} \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$$

将公式 05 变形代入如公式 12:

$$S_\triangle = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} \tag{1}$$

$$S_\triangle = \sqrt{\frac{S_\triangle}{p} \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} \tag{2}$$

$${S_\triangle}^2 = \frac{S_\triangle}{p} \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \tag{3}$$

$$S_\triangle = \frac{1}{p} \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \tag{4}$$

1.3 三角形的相关圆半径

本章将研究三角形中，外接圆半径，内切圆半径，旁切圆半径，三者间的数量关系。

1.3.1 第一组关系

第一组关系：

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$$

由公式 05 可得：

$$\frac{1}{r}=\frac{p}{S_\triangle} \tag{1}$$

由公式 11 可得：

$$\frac{1}{r_a}=\frac{p-a}{S_\triangle} \tag{2}$$

$$\frac{1}{r_b}=\frac{p-b}{S_\triangle} \tag{3}$$

$$\frac{1}{r_c}=\frac{p-c}{S_\triangle} \tag{4}$$

我们可以进行以下推导：

$$\frac{1}{r}=\frac{p}{S_\triangle} \tag{5}$$

$$=\frac{3p-(a+b+c)}{S_\triangle} \tag{6}$$

$$=\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{S_\triangle} \tag{7}$$

$$=\frac{p-a}{S_\triangle}+\frac{p-b}{S_\triangle}+\frac{p-c}{S_\triangle} \tag{8}$$

$$=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c} \tag{9}$$

1.3.2 第二组关系

第二组关系:

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R$$

我们可以进行以下推导:

$$\begin{aligned}
r_a + r_b + r_c - r &= \frac{S_\triangle}{p-a} + \frac{S_\triangle}{p-b} + \frac{S_\triangle}{p-c} - \frac{S_\triangle}{p} && (1)\\
&= \frac{S_\triangle \cdot p - S_\triangle \cdot (p-a)}{p \cdot (p-a)} + \frac{S_\triangle \cdot (p-b) - S_\triangle \cdot (p-c)}{(p-b) \cdot (p-c)} && (2)\\
&= \frac{S_\triangle \cdot p - S_\triangle \cdot p + S_\triangle \cdot a}{p \cdot (p-a)} + \frac{S_\triangle \cdot p - S_\triangle \cdot b + S_\triangle \cdot p - S_\triangle \cdot c}{(p-b) \cdot (p-c)} && (3)\\
&= \frac{S_\triangle \cdot p - S_\triangle \cdot p + S_\triangle \cdot a}{p \cdot (p-a)} + \frac{S_\triangle \cdot (a+b+c) - S_\triangle \cdot (b-c)}{(p-b) \cdot (p-c)} && (4)\\
&= \frac{S_\triangle \cdot a}{p \cdot (p-a)} + \frac{S_\triangle \cdot a}{(p-b) \cdot (p-c)} && (5)\\
&= \frac{S_\triangle \cdot a \cdot [p \cdot (p-a) + (p-b) \cdot (p-c)]}{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} && (6)
\end{aligned}$$

代入公式 09 可得:

$$\begin{aligned}
r_a + r_b + r_c - r &= \frac{S_\triangle \cdot a \cdot [p \cdot (p-a) + (p-b) \cdot (p-c)]}{{S_\triangle}^2} && (7)\\
&= \frac{a \cdot [p \cdot (p-a) + (p-b) \cdot (p-c)]}{S_\triangle} && (8)\\
&= \frac{a \cdot [p^2 - ap + p^2 - cp - bp + bc]}{S_\triangle} && (9)\\
&= \frac{a \cdot [2p^2 - p \cdot (a+b+c) + bc]}{S_\triangle} && (10)\\
&= \frac{a \cdot [2p^2 - 2p^2 + bc]}{S_\triangle} && (11)\\
&= \frac{a \cdot b \cdot c}{S_\triangle} && (12)
\end{aligned}$$

代入公式 03 可得:

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R \qquad (13)$$