

数学扩展研究 I - 三角形

李宇轩

2020.03.09

目录

1	三角形	3
1.1	三角形的符号约定	3
1.2	三角形的第一组面积公式	4
1.2.1	三角形面积公式 01	4
1.2.2	三角形面积公式 02	4
1.2.3	三角形面积公式 03	5
1.2.4	三角形面积公式 04	5
1.2.5	三角形面积公式 05	6
1.2.6	三角形面积公式 06	7
1.2.7	三角形面积公式 07	7
1.2.8	三角形面积公式 08	8

1 三角形

1.1 三角形的符号约定

我们首先进行符号约定，若没有特殊说明，这些符号将在后文表达相同的含义。

我们依照下方表格的规定进行符号约定：

符号	含义	符号	含义
A	角 A 的角度	h_a	垂线的长度（边 a 上）
B	角 B 的角度	h_b	垂线的长度（边 b 上）
C	角 C 的角度	h_c	垂线的长度（边 c 上）
a	边 a 的长度	m_a	中线的长度（边 a 上）
b	边 b 的长度	m_b	中线的长度（边 b 上）
c	边 c 的长度	m_c	中线的长度（边 c 上）
R	外接圆半径	t_a	角平分线的长度（角 a 上）
r	内切圆半径	t_b	角平分线的长度（角 b 上）
r_a	旁切圆半径（边 a 侧）	t_c	角平分线的长度（角 c 上）
r_b	旁切圆半径（边 b 侧）	p	半周长的大小
r_c	旁切圆半径（边 c 侧）		

表 1: 三角形的符号约定

我们将下方图片所示的三角形作为参考：

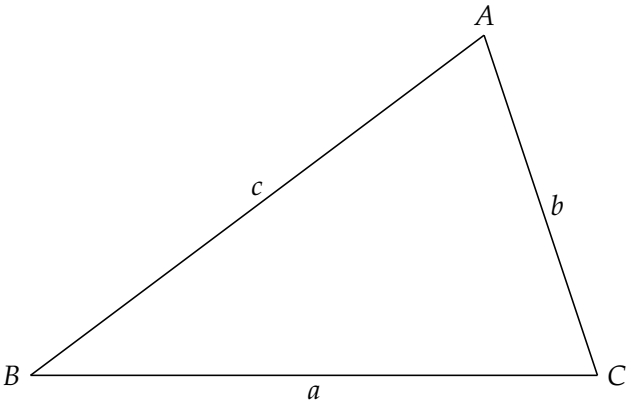


图 1: 三角形的示意图

除此之外，重心记为 G ，垂心记为 H ，外心记为 O ，内心记为 I ，旁心记为 P 。

1.2 三角形的第一组面积公式

1.2.1 三角形面积公式 01

三角形面积公式 01:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

1.2.2 三角形面积公式 02

三角形面积公式 02:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin B$$

将高用边和角的正弦表示并代入公式 01:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot (b \cdot \sin C) \tag{2}$$

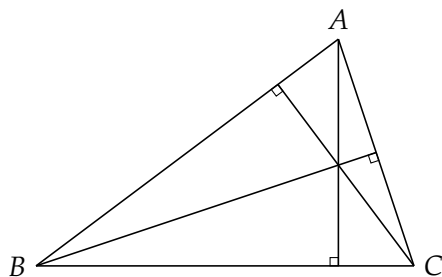


图 2: 三角形面积公式 02 示意图

1.2.3 三角形面积公式 03

三角形面积公式 03:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{4R} \cdot a \cdot b \cdot c$$

将正弦定理代入公式 02:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \left(\frac{c}{2R} \right) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{4R} \cdot a \cdot b \cdot c \quad (3)$$

1.2.4 三角形面积公式 04

三角形面积公式 04:

$$S_{\triangle} = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

将正弦定理代入公式 02:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2R \cdot \sin A) \cdot (2R \cdot \sin B) \cdot \sin C \quad (5)$$

$$= 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \quad (6)$$

1.2.5 三角形面积公式 05

三角形面积公式 05:

$$S_{\triangle} = r \cdot p$$

用角平分线将三角形分为三个小三角形:

$$S_{\triangle} = S_{\triangle IBC} + S_{\triangle ICA} + S_{\triangle IAB} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot c \cdot r \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (a + b + c) \cdot r \quad (3)$$

$$= r \cdot p \quad (4)$$

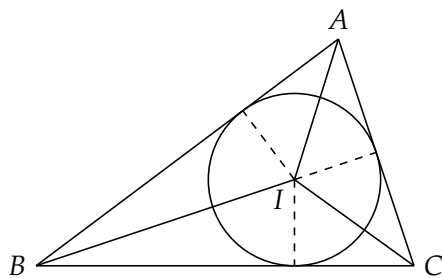


图 3: 三角形的内心

1.2.6 三角形面积公式 06

三角形面积公式 06:

$$S_{\triangle} = r^2 \cdot \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)$$

将边长用内切圆半径和角的余切表示并代入公式 05:

$$S_{\triangle} = r \cdot p \quad (5)$$

$$= r \cdot \frac{1}{2} \cdot (a + b + c) \quad (6)$$

$$= r \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2r \cdot \cot \frac{A}{2} + 2r \cdot \cot \frac{B}{2} + 2r \cdot \cot \frac{C}{2} \right) \quad (7)$$

$$= r^2 \cdot \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \quad (8)$$

1.2.7 三角形面积公式 07

三角形面积公式 07:

$$S_{\triangle} = R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$$

将正弦定理代入公式 05:

$$S_{\triangle} = r \cdot p \quad (1)$$

$$= r \cdot \frac{1}{2} \cdot (a + b + c) \quad (2)$$

$$= r \cdot \frac{1}{2} \cdot (2R \cdot \sin A + 2R \cdot \sin B + 2R \cdot \sin C) \quad (3)$$

$$= R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C) \quad (4)$$

1.2.8 三角形面积公式 08

三角形面积公式 08:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 \cdot b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 \cdot c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \right)^2}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{c^2 \cdot a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right)^2}$$

将余弦定理代入公式 02:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{1 - \cos^2 C} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \right)^2} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 \cdot b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2} \quad (4)$$

三角形面积公式 08 也被称为秦九韶公式。