数学笔记

李宇轩

2019.07.27

目录

1 集合与命题

1.1 集合

我们将能够确切指定的不同对象组成的整体，称为集合。

集合的元素指的是集合中的各个对象。

集合的元素是各不相同的，且地位相等，与顺序无关。

含有有限个元素的集合称为有限集。

含有无限个元素的集合称为无限集。

不含有任何元素的集合称为空集，通常用符号 $\varnothing$ 表示。

集合通常使用大写英文字母表示，例如 A，例如 B，例如 C。

集合通常使用小写英文字母表示，例如 a ，例如 b ，例如 c 。

1.1.1 集合的表示方法

集合的表示方法通常有两种：列举法，描述法。

以下列出了使用列举法描述集合的例子：

$$A = \left\{a, b, c, d\right\}$$

$$B = \left\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\right\}$$

以下列出了使用描述法描述集合的例子：

$$A = \left\{y \mid y = f(x)\right\}$$

$$B = \left\{y \mid y > f(x)\right\}$$

$$C = \left\{(x, y) \mid F(x, y)\right\}$$

1.1.2 集合和元素的关系

如果集合 A 中有元素 a，称为元素 a 属于集合 A。

如果集合 A 中无元素 a，称为元素 a 不属于集合 A。

元素 a 属于集合 A：

$$a \in A$$

元素 a 不属于集合 A：

$$a \notin A$$

1.1.3 集合和集合的关系

如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 中的元素，同时集合 B 中可能有集合 A 中没有的元素：

那么集合 A 是集合 B 的子集，前者对后者的关系称为包含于。

那么集合 B 是集合 A 的超集，前者对后者的关系称为包含。

集合 A 是集合 B 的子集：

$$A \subseteq B$$

集合 B 是集合 A 的超集：

$$B \supseteq A$$

如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 中的元素，同时集合 B 中一定有集合 A 中没有的元素：

那么集合 A 是集合 B 的真子集，前者对后者的关系称为真包含于。

那么集合 B 是集合 A 的真超集，前者对后者的关系称为真包含。

集合 A 是集合 B 的真子集：

$$A \subsetneqq B$$

集合 B 是集合 A 的真超集：

$$B \supsetneqq A$$

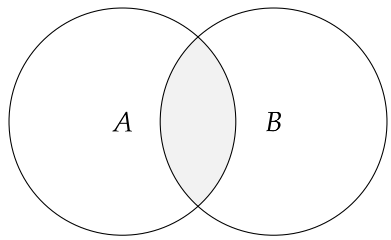
1.1.4 交集运算

由属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的交集。

集合 A 和集合 B 的交集的数学表达：

$$A \cap B = \left\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\right\}$$

集合 A 和集合 B 的交集的文氏图表达：



$A \cap B$

图 1: 交集的文氏图表达

集合的交集运算有以下重要性质：

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cap B \subseteq A$$

$$A \cap B \subseteq B$$

此外多个集合的交集也可以表示为：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

这个符号代表 $A_1 \sim A_n$ 共计 n 个集合依次取交集。

1.1.5 并集运算

由属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的并集。

集合 A 和集合 B 的并集的文氏图表达：

$$A \cup B = \left\{ x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \right\}$$

集合 A 和集合 B 的并集的文氏图表达：

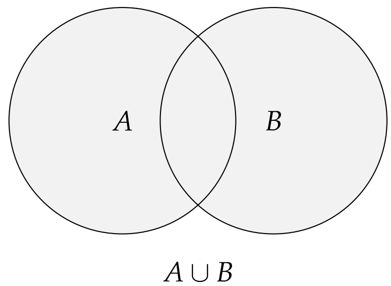


图 2: 并集的文氏图表达

集合的并集运算有以下重要性质：

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cup B \supseteq A$$

$$A \cup B \supseteq B$$

此外多个集合的并集也可以表示为：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

这个符号代表 $A_1 \sim A_n$ 共计 n 个集合依次取并集。

1.1.6　补集运算

由属于集合 U 且不属于集合 A 的元素组成的集合，称为集合 A 在集合 U 中的补集。

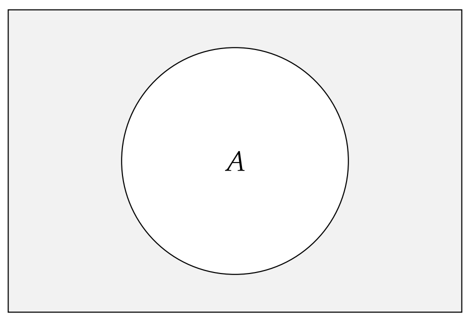
需要指出的是，集合 U 应当满足为集合 A 的超集，集合 A 应当满足为集合 U 的子集。

需要说明的是，集合 U 在补集运算中，通常被称为全集。

集合 A 在集合 U 中的补集的数学表达：

$$\complement_U A = \left\{ x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A \right\}$$

集合 A 在集合 U 中的补集的文氏图表达：



$\complement_U A$

图 3: 补集的文氏图表达

集合的补集运算有以下重要性质：

$$\complement_U A \cap A = \varnothing$$

$$\complement_U A \cup A = U$$

$$\complement_U \left[\complement_U A \right] = A$$

1.1.7 集合的性质 1

集合的性质 1 的基本形式:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

集合的性质 1 的推广形式:

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i)$$

基本形式的等式左侧可以用文氏图表示为:

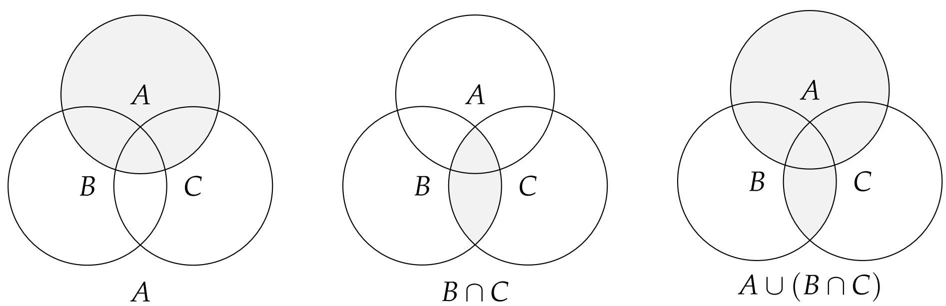


图 4: 等式左侧的文氏图表达

基本形式的等式右侧可以用文氏图表示为:

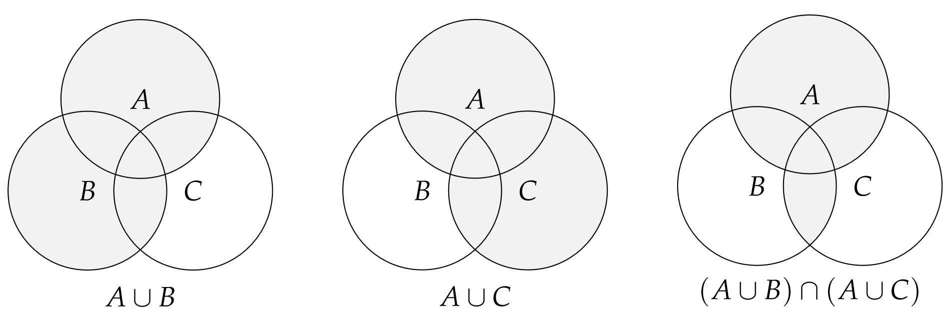


图 5: 等式右侧的文氏图表达

由两组文氏图可以看出，最终得出的结论是一致的，因此基本形式由此证明。

推广形式可以使用第一类数学归纳法加以证明。

假设以下式子成立：

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i) \tag{1}$$

我们进行以下代换：

$$B_1 = C_1 \ , \ B_2 = C_2 \ , \ \cdots \ , \ B_{n-1} = C_{n-1} \ , \ B_n = C_n \cap C_{n+1} \tag{2}$$

左式既可以表示为：

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) = A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i \right) \tag{3}$$

左侧也可以表示为：

$$\begin{aligned}
A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) &= \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i) && (4) \\
&= \left[\bigcap_{i=1}^{n-1} (A \cup B_i) \right] \cap (A \cup B_n) && (5) \\
&= \left[\bigcap_{i=1}^{n-1} (A \cup C_i) \right] \cap (A \cup (C_n \cap C_{n+1})) && (6) \\
&= \left[\bigcap_{i=1}^{n-1} (A \cup C_i) \right] \cap (A \cup C_n) \cap (A \cup C_{n+1}) && (7) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n+1} (A \cup C_i) && (8)
\end{aligned}$$

联立两个结论可得：

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n+1} (A \cup C_i) \tag{9}$$

由此证明了该假设可以由 $n \Rightarrow n+1$，然而已经证明该假设在 $n = 2$ 时成立，因此假设成立。

1.1.8 集合的性质 2

集合的性质 2 的基本形式:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

集合的性质 2 的推广形式:

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

基本形式的等式左侧可以用文氏图表示为:

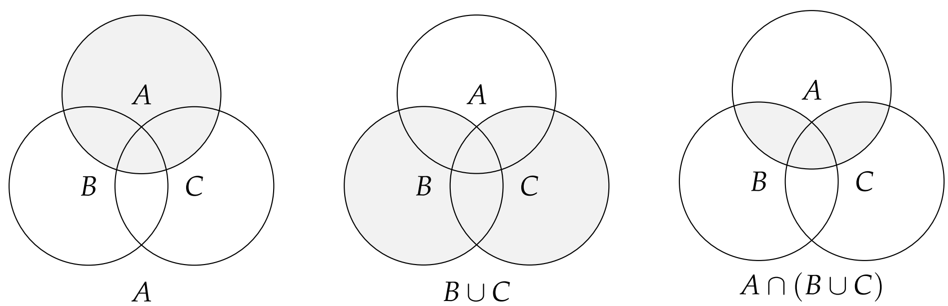


图 6: 等式左侧的文氏图表达

基本形式的等式右侧可以用文氏图表示为:

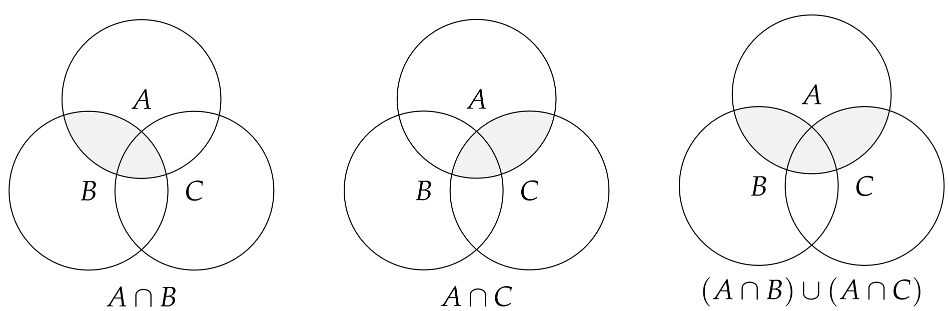


图 7: 等式右侧的文氏图表达

由两组文氏图可以看出，最终得出的结论是一致的，因此基本形式由此证明。

推广形式可以使用第一类数学归纳法加以证明。

假设以下式子成立:

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i) \tag{1}$$

我们进行以下代换:

$$B_1 = C_1 \ , \ B_2 = C_2 \ , \ \cdots \ , \ B_{n-1} = C_{n-1} \ , \ B_n = C_n \cup C_{n+1} \tag{2}$$

左式既可以表示为:

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} C_i \right) \tag{3}$$

左侧也可以表示为:

$$\begin{aligned} A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) &= \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i) &(4)\\ &= \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} (A \cap B_i) \right] \cup (A \cap B_n) &(5)\\ &= \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} (A \cap C_i) \right] \cup (A \cap (C_n \cup C_{n+1})) &(6)\\ &= \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} (A \cap C_i) \right] \cup (A \cap C_n) \cup (A \cap C_{n+1}) &(7)\\ &= \bigcup_{i=1}^{n+1} (A \cap C_i) &(8) \end{aligned}$$

联立两个结论可得:

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} C_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n+1} (A \cap C_i) \tag{9}$$

由此证明了该假设可以由 $n \Rightarrow n+1$，然而已经证明该假设在 $n = 2$ 时成立，因此假设成立。

1.1.9 集合的性质 3

集合的性质 3 的基本形式:

$$\complement_U A \cap \complement_U B = \complement_U (A \cup B)$$

集合的性质 3 的推广形式:

$$\bigcap_{i=1}^{n} \complement_U A_i = \complement_U \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)$$

基本形式的等式左侧可以用文氏图表示为:

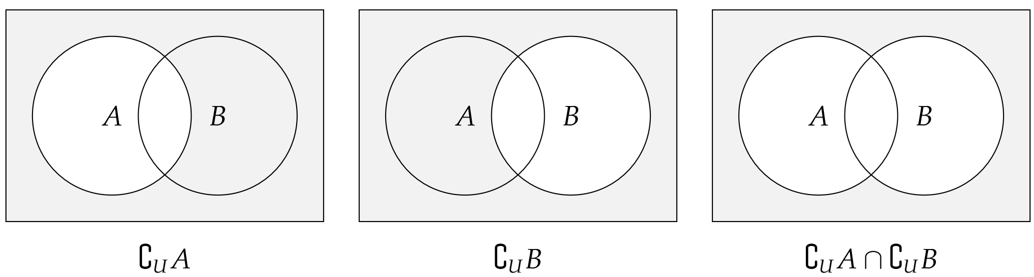


图 8: 等式左侧的文氏图表达

基本形式的等式右侧可以用文氏图表示为:

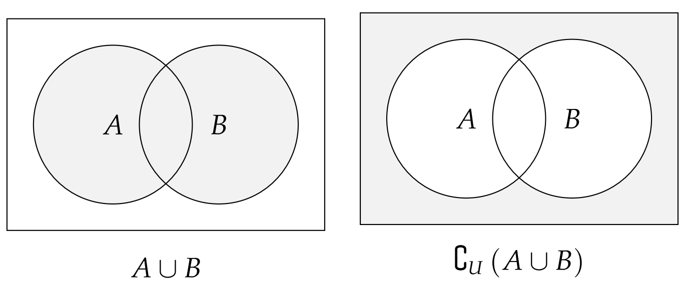


图 9: 等式左侧的文氏图表达

由两组文氏图可以看出，最终得出的结论是一致的，因此基本形式由此证明。

推广形式可以使用第一类数学归纳法加以证明。

假设以下式子成立:

$$\bigcap_{i=1}^{n} \complement_U B_i = \complement_U \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) \tag{1}$$

我们进行以下代换:

$$B_1 = C_1\ ,\ B_2 = C_2\ ,\ \cdots\ ,\ B_{n-1} = C_{n-1}\ ,\ B_n = C_n \cup C_{n+1} \tag{2}$$

左式既可以表示为:

$$\complement_U \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \complement_U \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} Ci \right) \tag{3}$$

左侧也可以表示为:

$$\begin{aligned}
\complement_U \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) &= \bigcap_{i=1}^{n} \complement_U B_i && (4)\\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \complement_U B_i \right) \cap \complement_U B_n && (5)\\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \complement_U C_i \right) \cap \complement_U \left(C_n \cup C_{n+1} \right) && (6)\\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \complement_U C_i \right) \cap \complement_U C_n \cap \complement_U C_{n+1} && (7)\\
&= \bigcap_{i=1}^{n+1} \complement_U C_i && (8)
\end{aligned}$$

联立两个结论可得:

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} \complement_U C_i = \complement_U \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} C_i \right) \tag{9}$$

由此证明了该假设可以由 $n \Rightarrow n+1$，然而已经证明该假设在 $n = 2$ 时成立，因此假设成立。

1.1.10 集合的性质 4

集合的性质 4 的基本形式:

$$\complement_U A \cup \complement_U B = \complement_U (A \cap B)$$

集合的性质 4 的推广形式:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \complement_U A_i = \complement_U \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right)$$

基本形式的等式左侧可以用文氏图表示为:

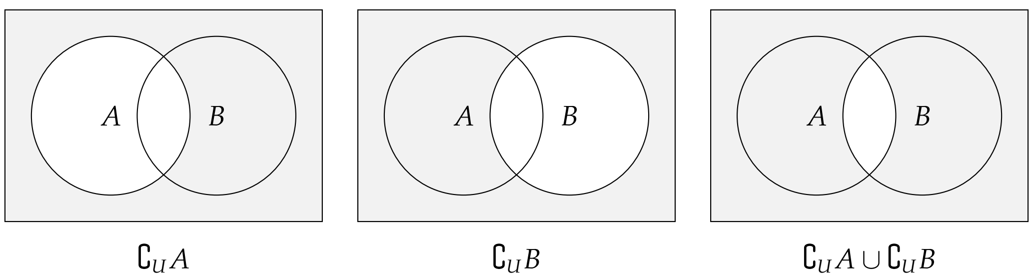


图 10: 等式左侧的文氏图表达

基本形式的等式右侧可以用文氏图表示为:

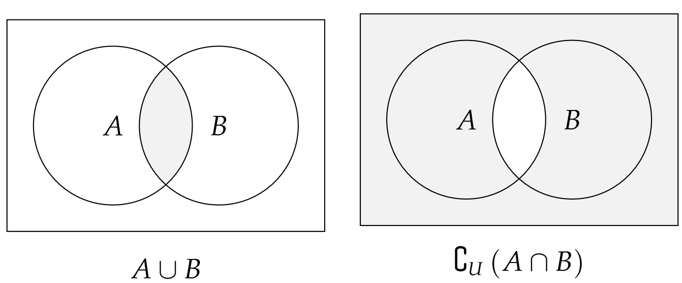


图 11: 等式左侧的文氏图表达

由两组文氏图可以看出，最终得出的结论是一致的，因此基本形式由此证明。

推广形式可以使用第一类数学归纳法加以证明。

假设以下式子成立:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \complement_U B_i = \complement_U \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) \tag{1}$$

我们进行以下代换:

$$B_1 = C_1\ ,\ B_2 = C_2\ ,\ \cdots\ ,\ B_{n-1} = C_{n-1}\ ,\ B_n = C_n \cap C_{n+1} \tag{2}$$

左式既可以表示为:

$$\complement_U \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) = \complement_U \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} Ci \right) \tag{3}$$

左侧也可以表示为:

$$\begin{aligned}
\complement_U \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) &= \bigcup_{i=1}^{n} \complement_U B_i &(4)\\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \complement_U B_i \right) \cup \complement_U B_n &(5)\\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \complement_U C_i \right) \cup \complement_U \left(C_n \cap C_{n+1} \right) &(6)\\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \complement_U C_i \right) \cup \complement_U C_n \cup \complement_U C_{n+1} &(7)\\
&= \bigcup_{i=1}^{n+1} \complement_U C_i &(8)
\end{aligned}$$

联立两个结论可得:

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} \complement_U C_i = \complement_U \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i \right) \tag{9}$$

由此证明了该假设可以由 $n \Rightarrow n+1$，然而已经证明该假设在 $n = 2$ 时成立，因此假设成立。

1.1.11 数集的符号

数集指的是以数为元素的集合，常用的数集通常用特定的字母符号表示。

数集的符号表示：

自然数集	$\mathbb{N}$
非零自然数集	$\mathbb{N}^*$
整数集	$\mathbb{Z}$
正整数集	$\mathbb{Z}^+$
负整数集	$\mathbb{Z}^-$
有理数集	$\mathbb{Q}$
正有理数集	$\mathbb{Q}^+$
负有理数集	$\mathbb{Q}^-$
实数集	$\mathbb{R}$
正实数集	$\mathbb{R}^+$
负实数集	$\mathbb{R}^-$
虚数集	$\mathbb{I}$
复数集	$\mathbb{C}$

表 1: 数集的符号

实际上，非零自然数集 $\mathbb{N}^*$ 和正整数集 $\mathbb{Z}^+$ 的意义是完全相同的。

1.1.12 数集的区间表示

数集除了可以使用集合的方式表示，也可以使用区间进行表示。

数集的区间表示（有限区间）：

区间表示	集合表示
$[a,b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$
$[a,b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$
(a,b)	$\{x \mid a < x < b\}$
$(a,b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$

表 2: 数集的区间表示（有限区间）

数集的区间表示（无限空间）：

区间表示	集合表示
$[a,+\infty)$	$\{x \geq a\}$
$(a,+\infty)$	$\{x > a\}$
$(-\infty,a]$	$\{x \leq a\}$
$(-\infty,a)$	$\{x < a\}$

表 3: 数集的区间表示（无限区间）

从上面的例子中可以看出，中括号代表包含（闭），圆括号代表排除（开）。

左侧为闭，右侧为闭，范围从 a 至 b 的区间，可以称为 a 至 b 的闭区间。

左侧为开，右侧为开，范围从 a 至 b 的区间，可以称为 a 至 b 的开区间。

左侧为闭，右侧为开，范围从 a 至 b 的区间，可以称为 a 至 b 的左闭右开区间。

左侧为开，右侧为闭，范围从 a 至 b 的区间，可以称为 a 至 b 的左开右闭区间。

1.2 命题

命题的通常形式：如果 α，那么 β。

其中 α 和 β 是两个事件，事件 α 称为条件，事件 β 称为结论。

若事件 α 可以推出事件 β，即 $\alpha \Rightarrow \beta$，那么这个命题是真命题。

若事件 α 不能推出事件 β，即 $\alpha \nRightarrow \beta$，那么这个命题是假命题。

以下列出了命题的四种形式：

原命题	$\alpha \Rightarrow \beta$
否命题	$\bar{\alpha} \Rightarrow \bar{\beta}$
逆命题	$\beta \Rightarrow \alpha$
逆否命题	$\bar{\beta} \Rightarrow \bar{\alpha}$

表 4: 命题的四种形式

需要说明的是，事件 $\bar{\alpha}$ 指的是事件 α 的否定，事件 $\bar{\beta}$ 指的是事件 β 的否定。

需要指出的是，互为逆否命题的两个命题同时为真或同时为假。

1.2.1 充分条件和必要条件

对于命题 $\alpha \Rightarrow \beta$：我们称 α 是 β 的充分条件，我们称 β 是 α 的必要条件。

充分条件的含义：因为 $\alpha \Rightarrow \beta$，若有条件 α，那么事件 β 必然成立，因此 α 对 β 是充分的。

必要条件的含义：因为 $\bar{\beta} \Rightarrow \bar{\alpha}$，若无条件 β，那么事件 α 不能成立，因此 β 对 α 是必要的。

若同时满足 $\alpha \Rightarrow \beta$ 和 $\beta \Rightarrow \alpha$，即 $\alpha \Leftrightarrow \beta$，我们称 α 和 β 互为充要条件。

2 不等式

2.1 不等式的性质

不等式和实数的大小关系存在以下联系:

$$a-b>0 \ \Rightarrow \ a>b \qquad (a,b\in\mathbb{R})$$

$$a-b<0 \ \Rightarrow \ a<b \qquad (a,b\in\mathbb{R})$$

不等式和实数的比例关系存在以下联系:

$$\frac{a}{b}>1 \ \Rightarrow \ a>b \qquad (a,b\in\mathbb{R}^{+})$$

$$\frac{a}{b}<1 \ \Rightarrow \ a<b \qquad (a,b\in\mathbb{R}^{+})$$

接下来将逐条列出不等式的若干性质，这些性质是不等式推导的基础。

2.1.1 不等式的可加性

不等式的可加性:

$$\begin{cases} a>b \\ a,b\in\mathbb{R} \quad \lambda\in\mathbb{R} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a+\lambda>b+\lambda$$

该性质表明，不等式两侧加上任意数，此时不等式仍然成立。

2.1.2 不等式的可乘性

不等式的可乘性:

$$\begin{cases} a>b \\ a,b\in\mathbb{R} \quad \lambda\in\mathbb{R}^{+} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a\cdot\lambda>b\cdot\lambda$$

$$\begin{cases} a>b \\ a,b\in\mathbb{R} \quad \lambda\in\mathbb{R}^{-} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a\cdot\lambda<b\cdot\lambda$$

该性质表明，不等式两侧乘上任意正数，不等式符号不变，此时不等式仍然成立。

该性质表明，不等式两侧乘上任意负数，不等式符号改变，此时不等式仍然成立。

2.1.3 不等式的对称性

不等式的对称性:

$$a > b \ \Rightarrow \ b < a$$

该性质表明,不等式的两侧交换并变号,此时不等式仍然成立。

2.1.4 不等式的叠加性

不等式的叠加性:

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \\ a,b,c,d \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \quad a+c > b+d$$

该性质表明,两个同号不等式叠加后,此时不等式仍然成立。

2.1.5 不等式的叠乘性

不等式的叠乘性:

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \\ a,b,c,d \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot d$$

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \\ a,b,c,d \in \mathbb{R}^- \end{cases} \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot d$$

该性质表明,两个同号不等式叠乘后,若两侧为正数则不等式符号不变,此时不等式仍然成立。

该性质表明,两个同号不等式叠乘后,若两侧为负数则不等式符号改变,此时不等式仍然成立。

2.1.6 不等式的乘方法则

不等式的乘方法则:

$$\begin{cases} a > b \\ a, b \in \mathbb{R}^{+} \quad n \in \mathbb{Z}^{+} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a^{n} > b^{n}$$

$$\begin{cases} a > b \\ a, b \in \mathbb{R}^{+} \quad n \in \mathbb{Z}^{-} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a^{n} < b^{n}$$

该性质表明，不等式的两侧均为正数，进行正指数的乘方运算后不变号，此时不等式仍然成立。

该性质表明，不等式的两侧均为正数，进行负指数的乘方运算后需变号，此时不等式仍然成立。

2.1.7 不等式的开方法则

不等式的开方法则:

$$\begin{cases} a > b \\ a, b \in \mathbb{R}^{+} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$$

该性质表明，不等式的两侧均为正数，进行开方运算后不变号，此时不等式仍然成立。

2.1.8 不等式的倒数法则

不等式的倒数法则:

$$\begin{cases} a > b \\ ab > 0 \quad a, b \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$\begin{cases} a > b \\ ab < 0 \quad a, b \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

该性质表明，不等式的两侧若同号，取倒数后需变号，此时不等式仍然成立。

该性质表明，不等式的两侧若异号，取倒数后不变号，此时不等式仍然成立。

2.1.9 不等式的指数法则

不等式的指数法则：

$$\begin{cases} a > b \\ \\ a,b \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}^{+} \quad x > 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x^{a} > x^{b}\text{。}$$

$$\begin{cases} a > b \\ \\ a,b \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}^{+} \quad n < 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x^{a} > x^{b}$$

该性质表明，将不等式两侧作为指数，若底数大于 1 且为正数则不变号，此时不等式仍然成立。

该性质表明，将不等式两侧作为指数，若底数小于 1 且为正数则需变号，此时不等式仍然成立。

2.1.10 不等式的对数法则

不等式的对数法则：

$$\begin{cases} a > b \\ \\ a,b \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}^{+} \quad n > 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \log_{x} a > \log_{x} b$$

$$\begin{cases} a > b \\ \\ a,b \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}^{+} \quad n < 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \log_{x} a < \log_{x} b$$

该性质表明，将不等式两侧作为真数，若底数大于 1 且为正数则不变号，此时不等式仍然成立。

该性质表明，将不等式两侧作为真数，若底数小于 1 且为正数则需变号，此时不等式仍然成立。

2.2 一元二次方程的求解

一元二次方程需要解决这样的问题:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

对一元二次方程进行配方可以得到:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \tag{2}$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \tag{3}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \tag{4}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \tag{5}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} \tag{6}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{7}$$

定义一元二次方程根的判别式:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

上述得出的等式中，右侧的正负性仅由分数线上方的部分决定，即只由判别式的正负决定。

当 $\Delta > 0$ 时，一元二次方程有两个解:

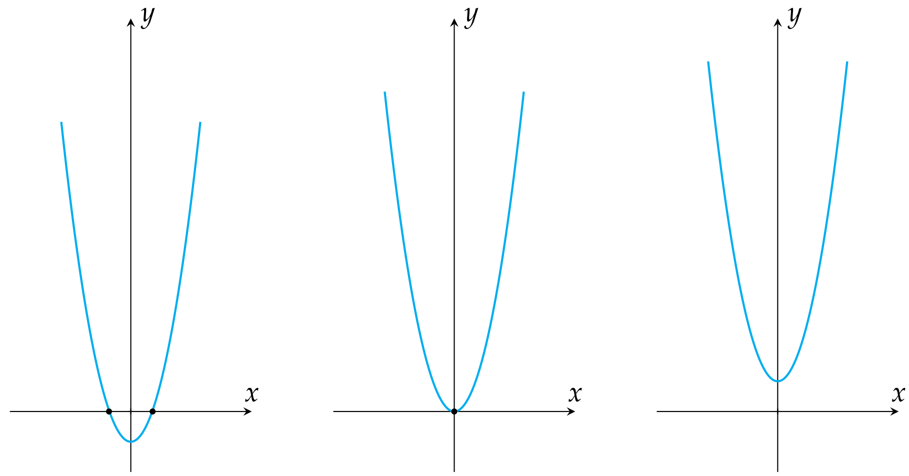
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

当 $\Delta = 0$ 时，一元二次方程有一个解:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

当 $\Delta = 0$ 时，一元二次方无解。

一元二次方程可以用图像表示：



(a) $\Delta > 0$ 时的图像　(b) $\Delta = 0$ 时的图像　(c) $\Delta < 0$ 时的图像

图 12: 一元二次方程的图像

当满足 $\Delta > 0$ 时，证明如下：

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \tag{1}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \tag{3}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4}$$

当满足 $\Delta = 0$ 时，证明如下：

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \tag{5}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \tag{6}$$

当满足 $\Delta < 0$ 时，证明如下：

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0 \qquad \frac{b^2 - 4a}{4a^2} < 0 \tag{7}$$

等式左侧始终为负，等式右侧始终为正，故必然无解。

在满足 $\Delta \geq 0$ 时求解两根之和:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && (1) \\
&= \frac{-2b - \sqrt{b^2 - 4ac} + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && (2) \\
&= -\frac{2b}{2a} && (3) \\
&= -\frac{b}{a} && (4)
\end{aligned}
$$

当满足 $\Delta \leq 0$ 时求解两根之积:

$$
\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && (5) \\
&= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} && (6) \\
&= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} && (7) \\
&= \frac{4ac}{4a^2} && (8) \\
&= \frac{c}{a} && (9)
\end{aligned}
$$

故两根之和和两根之积可以表示为:

$$
x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}
$$

这两条结论也被称为韦达定理。

2.3 一元二次不等式的求解

一元二次不等式需要解决这样的问题:

$$ax^2 + bx + c > 0 \tag{1}$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \tag{2}$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \tag{3}$$

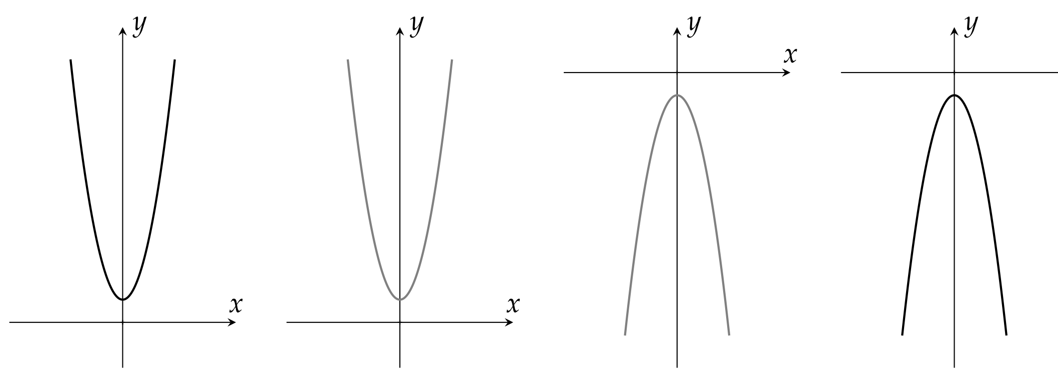
$$ax^2 + bx + c \leq 0 \tag{4}$$

我们定义 s 来表示不等式的符号:

当不等式的符号为大于（$>$）或大于等于（$\geq$）时，规定变量 $s > 0$。

当不等式的符号为小于（$<$）或大于等于（$\leq$）时，规定变量 $s < 0$。

当一元二次不等式满足 $\Delta < 0$ 时，图像如下:



(a) 满足（$a > 0 \quad s > 0$） (b) 满足（$a > 0 \quad s < 0$） (c) 满足（$a < 0 \quad s > 0$） (d) 满足（$a < 0 \quad s < 0$）

图 13: 满足 $\Delta < 0$ 时的图像

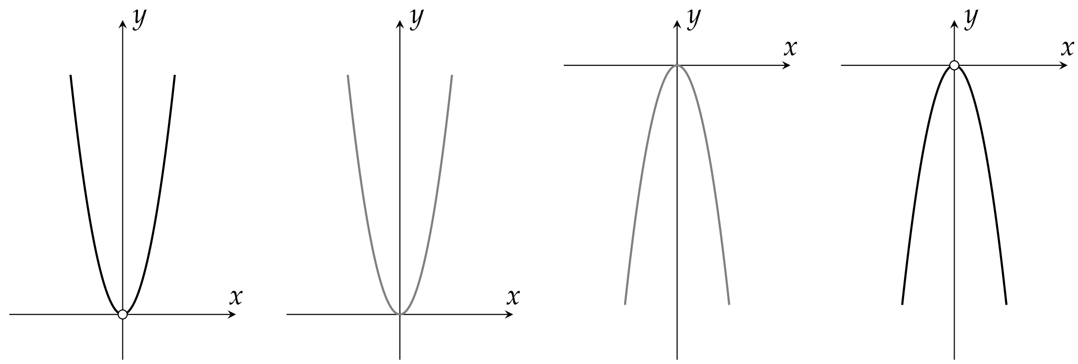
当一元二次不等式满足 $\Delta < 0$ 时，性质总结如下:

满足条件	符号不能取等	符号可以取等
$a \cdot s > 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$a \cdot s < 0$	$\varnothing$	$\varnothing$

表 5: 满足 $\Delta < 0$ 时的性质总结

以上图像中，黑色部分代表在解集内，灰色部分代表在解集外。

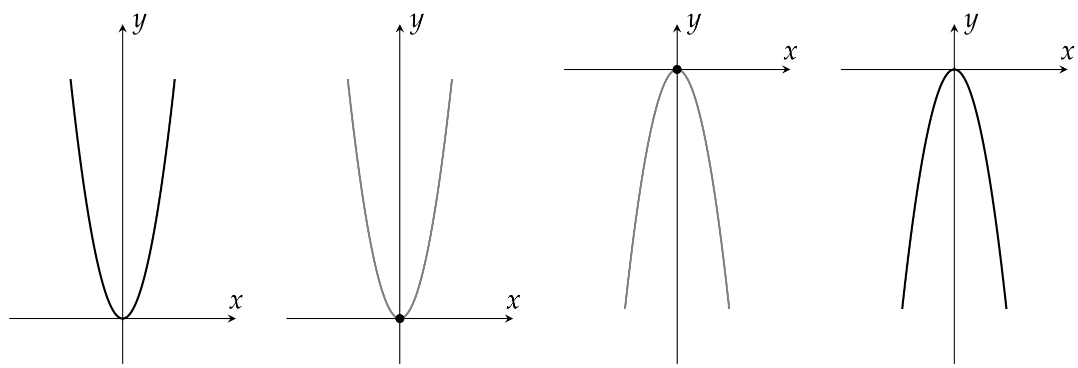
当一元二次不等式满足 $\Delta = 0$ 时，且符号不能取等时，图像如下：



(a) 满足（$a > 0 \quad s > 0$） (b) 满足（$a > 0 \quad s < 0$） (c) 满足（$a < 0 \quad s > 0$） (d) 满足（$a < 0 \quad s < 0$）

图 14: 满足 $\Delta = 0$ 时的图像（不能取等）

当一元二次不等式满足 $\Delta = 0$ 时，且符号可以取等时，图像如下：



(a) 满足（$a > 0 \quad s > 0$） (b) 满足（$a > 0 \quad s < 0$） (c) 满足（$a < 0 \quad s > 0$） (d) 满足（$a < 0 \quad s < 0$）

图 15: 满足 $\Delta = 0$ 时的图像（可以取等）

当一元二次不等式满足 $\Delta = 0$ 时，性质总结如下：

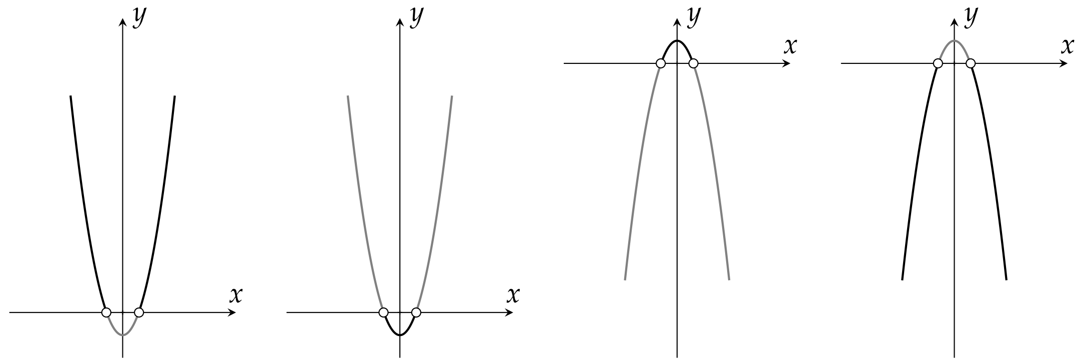
满足条件	符号不取等	符号取等
$a \cdot s > 0$	$x \neq x_0$	$\mathbb{R}$
$a \cdot s < 0$	$\varnothing$	$x = x_0$

表 6: 满足 $\Delta = 0$ 时的性质总结

该情况下的解集，也可以代入 $\Delta > 0$ 时的解集公式中求解，可以得出相同的结论。

以上图像中，黑色部分代表在解集内，灰色部分代表在解集外。

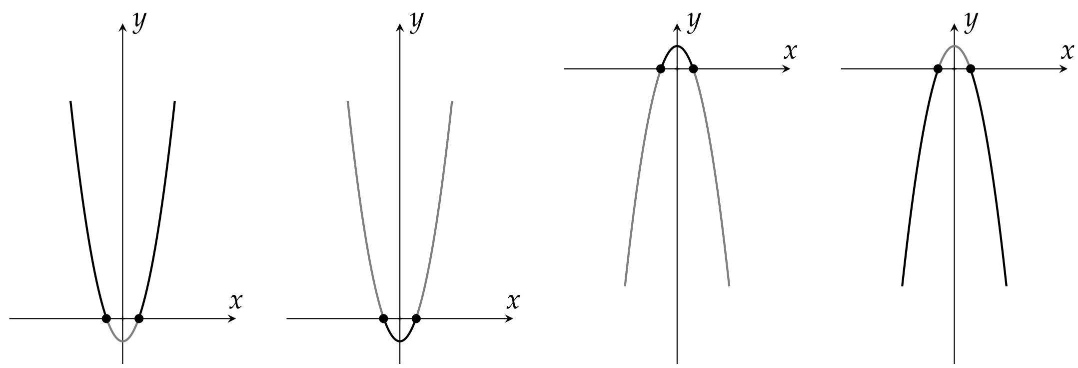
当一元二次不等式满足 $\Delta > 0$ 时，且符号不能取等时，图像如下:



(a) 满足（$a > 0 \quad s > 0$） (b) 满足（$a > 0 \quad s < 0$） (c) 满足（$a < 0 \quad s > 0$） (d) 满足（$a < 0 \quad s < 0$）

图 16: 满足 $\Delta > 0$ 时的图像（不能取等）

当一元二次不等式满足 $\Delta > 0$ 时，且符号可以取等时，图像如下:



(a) 满足（$a > 0 \quad s > 0$） (b) 满足（$a > 0 \quad s < 0$） (c) 满足（$a < 0 \quad s > 0$） (d) 满足（$a < 0 \quad s < 0$）

图 17: 满足 $\Delta > 0$ 时的图像（可以取等）

当一元二次不等式满足 $\Delta > 0$ 时，性质总结如下:

满足条件	符号不取等	符号取等
$a \cdot s > 0$	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x \leq x_1$ 或 $x \geq x_2$
$a \cdot s < 0$	$x > x_1$ 且 $x < x_2$	$x \geq x_1$ 且 $x \leq x_2$

表 7: 满足 $\Delta > 0$ 时的性质总结

当满足 $a \cdot s > 0$ 时，即当二次项系数和符号同号时，取两根之外。

当满足 $a \cdot s < 0$ 时，即当二次项系数和符号异号时，取两根之间。

以上图像中，黑色部分代表在解集内，灰色部分代表在解集外。

2.4 一元高次不等式的求解

一元高次不等式需要解决这样的问题:

$$\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{b_i} > 0 \tag{1}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{b_i} \geq 0 \tag{2}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{b_i} < 0 \tag{3}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{b_i} \leq 0 \tag{4}$$

我们首先研究一种特殊情况:

$$(x-A)^3 \cdot (x-B)^1 \cdot (x-C)^2 \cdot (x-D)^1 > 0 \qquad (A<B<C<D) \tag{5}$$

我们可以通过数轴标根法来绘制大致图像:

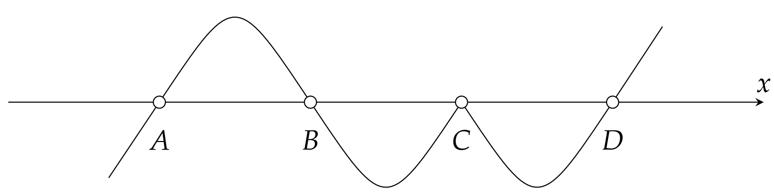
1. 当 x 的取值同时大于三个数时，其取值为正，因此曲线从右侧上方穿入。

2. 当 x 经过点 D 时取值为零，由于次数为 1 是奇数，故其左侧和右侧异号，曲线上表现为穿透。

3. 当 x 经过点 C 时取值为零，由于次数为 2 是奇数，故其左侧和右侧同号，曲线上表现为反弹。

4. 当 x 经过点 B 时取值为零，由于次数为 1 是奇数，故其左侧和右侧异号，曲线上表现为穿透。

5. 当 x 经过点 A 时取值为零，由于次数为 3 是奇数，故其左侧和右侧异号，曲线上表现为穿透。



根据大致图像可以得到解集为: $x \in (A, B) \cup (D, +\infty)$

这就是数轴标根法的思想: 曲线从右上穿入，遇到奇次项穿透，遇到偶次项反弹，即奇穿偶回。

2.5 根的分布

根的分布研究这样一类问题，给定方程的根的范围，求解一元二次方程参数需满足的条件。

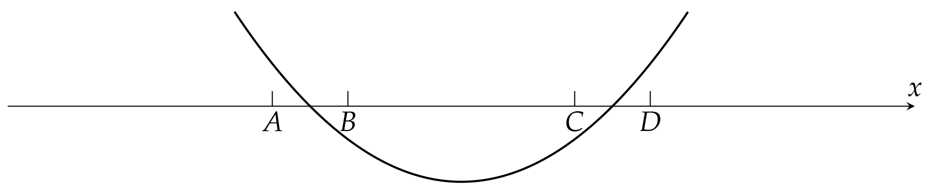
根的分布的问题最终都可以通过分类讨论，化归为以下两类基本情况。

2.5.1 根的分布基本情况 1

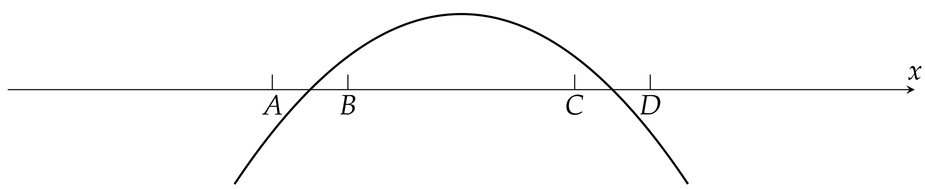
根的分布基本情况 1 的条件如下：

$$x_1 \in (A, B) \qquad x_2 \in (C, D) \qquad (A < B \leq C < D)$$

根的分布基本情况 1 的示意图如下：



(a) 当满足 $a > 0$ 时



(b) 当满足 $a < 0$ 时

图 18: 根的分布基本情况 1 的示意图

根的分布基本情况 1 的参数如下：

$$\begin{cases} F(A) > 0 \\ F(B) < 0 \\ F(C) < 0 \\ F(D) > 0 \end{cases} (a > 0) \qquad \begin{cases} F(A) < 0 \\ F(B) > 0 \\ F(C) > 0 \\ F(D) < 0 \end{cases} (a < 0)$$

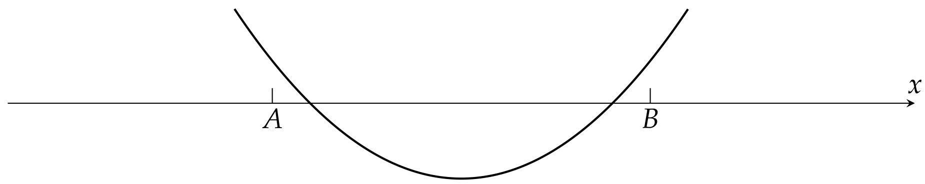
在这一情况中，允许 $A = -\infty$，允许 $D = +\infty$，包含无穷的条件视为无效。

2.5.2 根的分布基本情况 2

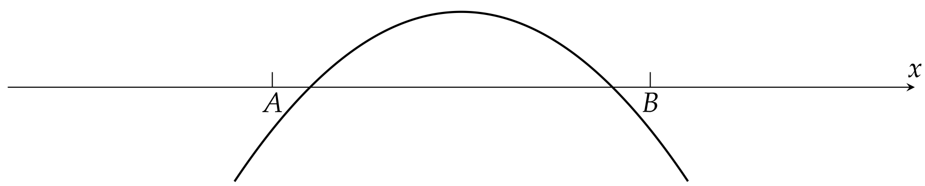
根的分布基本情况 2 的条件如下：

$$x_1 \in (A, B) \qquad x_2 \in (A, B) \qquad (A < B)$$

根的分布基本情况 2 的示意图如下：



(a) 当满足 $a > 0$ 时



(b) 当满足 $a < 0$ 时

图 19: 根的分布基本情况 2 的示意图

根的分布基本情况 2 的参数如下：

$$\begin{cases} F(A) > 0 \\ F(B) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > A \\ -\dfrac{b}{2a} < B \\ \Delta > 0 \end{cases} \quad (a > 0) \qquad \begin{cases} F(A) < 0 \\ F(B) < 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > A \\ -\dfrac{b}{2a} < B \\ \Delta > 0 \end{cases} \quad (a < 0)$$

在这一情况中，允许 $A = -\infty$，允许 $B = +\infty$，包含无穷的条件视为无效。

2.6　分式不等式的求解

分式不等式的求解需要利用以下同解原理。

分式不等式的同解原理 1:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot g(x) > 0$$

分式不等式的同解原理 2:

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot g(x) < 0$$

分式不等式的同解原理 3:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

分式不等式的同解原理 4:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \leq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

需要特别注意的是，若不等式右侧的数不为零，必须将其移至左侧同分，切不可直接套用。

2.7 无理不等式的求解

无理不等式的求解需要利用以下同解原理。

无理不等式的同解原理 1:

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

无理不等式的同解原理 2:

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

无理不等式的同解原理 3:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

无理不等式的同解原理 4:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

需要说明的是，若将大于替换为大于等于，或将小于替换为小于等于，同解原理仍然成立。

2.8 绝对值不等式的求解

绝对值不等式的求解需要利用以下同解原理。

绝对值不等式的同解原理 1:

$$\left|f(x)\right| < a \ \ (a > 0) \quad \Rightarrow \quad x > -a \ \text{且} \ x < a$$

绝对值不等式的同解原理 2:

$$\left|f(x)\right| > a \ \ (a > 0) \quad \Rightarrow \quad x < -a \ \text{或} \ x > a$$

绝对值不等式的同解原理 3:

$$\left|f(x)\right| < \left|g(x)\right| \quad \Rightarrow \quad f^2(x) < g^2(x)$$

绝对值不等式的同解原理 4:

$$\left|f(x)\right| > \left|g(x)\right| \quad \Rightarrow \quad f^2(x) > g^2(x)$$

需要说明的是，若将大于替换为大于等于，或将小于替换为小于等于，同解原理仍然成立。

2.9 基本不等式 1

基本不等式 1 的基本形式:

$$a^2+b^2 \geq 2\cdot a\cdot b \qquad a,b\in\mathbb{R} \qquad (\text{当且仅当 } a=b \text{ 时等号成立})$$

基本不等式 1 的扩展形式:

$$\begin{cases} 2\cdot a\cdot b \leq +(a^2+b^2) \qquad a,b\in\mathbb{R} \qquad (\text{当且仅当 } a=+b \text{ 时等号成立}) \\ 2\cdot a\cdot b \geq -(a^2+b^2) \qquad a,b\in\mathbb{R} \qquad (\text{当且仅当 } a=-b \text{ 时等号成立}) \end{cases}$$

当满足 $a=+b$ 时有:

$$2\cdot a\cdot b = +(a^2+b^2) \tag{1}$$

当满足 $a\neq +b$ 时有:

$$(a-b)^2 > 0 \tag{2}$$

$$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 > 0 \tag{3}$$

$$a^2+b^2 > 2\cdot a\cdot b \tag{4}$$

$$2\cdot a\cdot b < +(a^2+b^2) \tag{5}$$

当满足 $a=-b$ 时有:

$$2\cdot a\cdot b = -(a^2+b^2) \tag{6}$$

当满足 $a\neq -b$ 时有:

$$(a+b)^2 > 0 \tag{7}$$

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 > 0 \tag{8}$$

$$a^2+b^2 > -2\cdot a\cdot b \tag{9}$$

$$2\cdot a\cdot b > -(a^2+b^2) \tag{10}$$

由此证明了基本不等式 1 的基本形式和扩展形式成立。

2.10 基本不等式 2

基本不等式 2 的基本形式:

$$a+b \geq 2\cdot\sqrt{a\cdot b} \qquad a,b \in \mathbb{R}^{+} \qquad \text{（当且仅当 } a=b \text{ 时等号成立）}$$

基本不等式 2 的扩展形式:

$$\begin{cases} a+b \geq +2\cdot\sqrt{a\cdot b} & a,b \in \mathbb{R}^{+} \qquad \text{（当且仅当 } a=b \text{ 时等号成立）} \\ a+b \leq -2\cdot\sqrt{a\cdot b} & a,b \in \mathbb{R}^{-} \qquad \text{（当且仅当 } a=b \text{ 时等号成立）} \end{cases}$$

当满足 $a^{'} > 0$ 且 $b^{'} > 0$ 时可以进行以下代换:

$$a=\sqrt{a'} \qquad b=\sqrt{b'} \tag{1}$$

$$a^2=a^{'} \qquad b^2=b^{'} \tag{2}$$

代入基本不等式 1 的基本形式可得:

$$a^2+b^2 \geq 2\cdot a\cdot b \tag{3}$$

$$a^{'}+b^{'} \geq 2\cdot\sqrt{a'}\cdot\sqrt{b'} \tag{4}$$

$$a^{'}+b^{'} \geq 2\cdot\sqrt{a'\cdot b'} \tag{5}$$

$$a^{'}+b^{'} \geq +2\cdot\sqrt{a'\cdot b'} \tag{6}$$

当满足 $a^{'} < 0$ 且 $b^{'} < 0$ 时可以进行以下代换:

$$a=-\sqrt{-a'} \qquad b=-\sqrt{-b'} \tag{7}$$

$$a^2=-a^{'} \qquad b^2=-b^{'} \tag{8}$$

代入基本不等式 1 的基本形式可得:

$$a^2+b^2 \geq 2\cdot a\cdot b \tag{9}$$

$$-a^{'}-b^{'} \geq 2\cdot\sqrt{-a'}\cdot\sqrt{-b'} \tag{10}$$

$$-a^{'}-b^{'} \geq 2\cdot\sqrt{a'\cdot b'} \tag{11}$$

$$a^{'}+b^{'} \leq -2\cdot\sqrt{a'\cdot b'} \tag{12}$$

由此证明了基本不等式 2 的基本形式和扩展形式成立。

2.10.1 使用基本不等式求解函数最值 1

求解形如下方的函数的最值:

$$f(x)=\frac{a\cdot x^2+b\cdot x+c}{d\cdot x+e} \tag{1}$$

定义代换变量 t 代换 x 有:

$$t=d\cdot x+e \tag{2}$$

用变量 t 将 x 反表示则有:

$$x=\frac{1}{d}\cdot(t-e) \tag{3}$$

即变量 x 可以表示为关于代换变量 t 的函数，记之为函数 $x=g(t)$。

将其代入函数 $f(x)$ 可得:

$$f(x)=\frac{a\cdot x^2+b\cdot x+c}{d\cdot x+e} \tag{4}$$

$$f(t)=\frac{a\cdot g(t)^2+b\cdot g(t)+c}{t} \tag{5}$$

$$f(t)=\frac{A\cdot t^2+B\cdot t+C}{t} \tag{6}$$

$$f(t)=A\cdot t+B+C\cdot\frac{1}{t} \tag{7}$$

$$f(t)=A\cdot t+C\cdot\frac{1}{t}+B \tag{8}$$

观察函数 $f(t)$ 可以发现:

$$f(t)=\underbrace{\left(A\cdot t+C\cdot\frac{1}{t}\right)}_{\text{基本不等式 2}}+B \tag{9}$$

因此此时即可通过基本不等式 2 求解函数最值。

上述第五步至第六步的推导如下:

$$f(t) = \frac{1}{t} \cdot \left[a \cdot g(t)^2 + b \cdot g(t) + c\right] \tag{10}$$

$$f(t) = \frac{1}{t} \cdot \left[\frac{a}{d^2} \cdot (t-e)^2 + \frac{b}{d} \cdot (t-e) + c\right] \tag{11}$$

$$f(t) = \frac{1}{t} \cdot \left[t^2 \cdot \frac{a}{d^2} - t \cdot \frac{2ae}{d^2} + \frac{ae^2}{d^2} + t \cdot \frac{b}{d} - \frac{be}{d} + c\right] \tag{12}$$

$$f(t) = \frac{1}{t} \cdot \left[t^2 \cdot \frac{a}{d^2} + t \cdot \frac{bd - 2ae}{d^2} + \frac{ae^2 + cd^2 - bde}{d^2}\right] \tag{13}$$

定义代换变量 A 替代二次项系数:

$$A = \frac{a}{d^2} \tag{14}$$

定义代换变量 B 替代一次项系数:

$$B = \frac{bd - 2ae}{d^2} \tag{15}$$

定义代换变量 C 替代常数项系数:

$$C = \frac{ae^2 + cd^2 - bde}{d^2} \tag{16}$$

代入三个代换变量可得:

$$f(t) = \frac{A \cdot t^2 + B \cdot t + C}{t} \tag{17}$$

由此从上述过程中的第五步推导至第六步。

2.10.2 使用基本不等式求解函数最值 2

求解形如下方的函数的最值:

$$f(x) = \frac{p}{ax+b} + \frac{q}{cx+d} \tag{1}$$

定义代换变量 A:

$$A = ax + b \tag{2}$$

定义代换变量 B:

$$B = cx + d \tag{3}$$

将其代入函数 $f(x)$ 可知:

$$f(x) = \frac{p}{ax+b} + \frac{q}{cx+d} \tag{4}$$

$$= \frac{p}{A} + \frac{q}{C} \tag{5}$$

进行以下的推导可以得到:

$$A \cdot c - C \cdot a \tag{6}$$

$$= c \cdot (ax+b) - a \cdot (cx+d) \tag{7}$$

$$= a \cdot c \cdot x + b \cdot c - a \cdot c \cdot x - a \cdot d \tag{8}$$

$$= b \cdot c - a \cdot d \tag{9}$$

因此两者作比的结果为一:

$$\frac{A \cdot c - C \cdot a}{b \cdot c - a \cdot d} = 1 \tag{10}$$

由于该比的比值为一，所以可以将该比乘在函数 $f(x)$ 后而无影响。

函数 $f(x)$ 乘以该比可得:

$$f(x)=\left[\frac{p}{A}+\frac{q}{C}\right]\cdot\frac{A\cdot c-C\cdot a}{b\cdot c-a\cdot d} \tag{11}$$

$$f(x)=\left[\frac{p}{A}\cdot(A\cdot c-C\cdot a)+\frac{q}{C}\cdot(A\cdot c-C\cdot a)\right]\cdot\frac{1}{b\cdot c-a\cdot d} \tag{12}$$

$$f(x)=\left[c\cdot p-\frac{C}{A}\cdot p\cdot a+\frac{A}{C}\cdot q\cdot c-a\cdot q\right]\cdot\frac{1}{b\cdot c-a\cdot d} \tag{13}$$

$$f(x)=\left[c\cdot p-a\cdot q+\frac{A}{C}\cdot q\cdot c-\frac{C}{A}\cdot p\cdot a\right]\cdot\frac{1}{b\cdot c-a\cdot d} \tag{14}$$

观察函数 $f(t)$ 可以发现:

$$f(x)=\left[c\cdot p-a\cdot q+\underbrace{\frac{A}{C}\cdot q\cdot c-\frac{C}{A}\cdot p\cdot a}_{\text{基本不等式 2}}\right]\cdot\frac{1}{b\cdot c-a\cdot d} \tag{15}$$

因此此时即可通过基本不等式 2 求解函数最值。

2.11 柯西不等式

柯西不等式（完整形式）：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \quad \text{（当且仅当 } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \text{ 时等号成立）}$$

柯西不等式（当 $n = 2$ 的情况）：

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2\right) \cdot \left(b_1^2 + b_2^2\right)$$

柯西不等式（当 $n = 3$ 的情况）：

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) \cdot \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)$$

构造以下二次函数：

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot x + b_i)^2 \tag{1}$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2 x^2 + 2 \cdot a_i \cdot b_i \cdot x + b_i^2\right) \tag{2}$$

很显然其判别式为：

$$\Delta = 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2 - 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \tag{3}$$

由于 $f(x)$ 由若干平方数组成，故 $f(x) \leq 0$，即 $\Delta \leq 0$。

据此可得到不等式：

$$4 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2 - 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0 \tag{4}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0 \tag{5}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \tag{6}$$

由此证明了柯西不等式的不等式部分。

由于 $f(x)$ 由若干平方数组成，因此只有每一项都为零时，等号才能成立，即 $\Delta = 0$。

由于 $f(x)$ 由若干平方数组成，因此只要用一项不为零时，等号不能成立，即 $\Delta \neq 0$。

故等号成立的条件是：

$$a_i \cdot x + b_i = 0 \tag{7}$$

$$a_i \cdot x = -b_i \tag{8}$$

$$\frac{a_i}{b_i} = -x \tag{9}$$

$$\frac{a_i}{b_i} = C \tag{10}$$

即当任意 a_i 和 b_i 的比值为定值时，不等式等号成立。

由此证明了柯西不等式的等号成立部分。

2.12 均值不等式

我们定义以下平均数的概念:

调和平均数:

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

几何平均数:

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}$$

算数平均数:

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

平方平均数:

$$Q_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

对于这四类平均数,我们有以下均值不等式:

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n \qquad (\text{当且仅当 } x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ 时等号成立})$$

3 函数

3.1 函数的定义

对于非空数集 A 和非空数集 B，如果依照某一个确定的对应关系 f，使集合 A 中任意一个数 x，在集合 B 中有唯一一个数 y，可以与之对应。

那么就称对应关系 f 是集合 A 到集合 B 的一个函数:

$$y = f(x) \qquad (x \in A)$$

集合 A 中的元素 x，称为函数的自变量。

集合 B 中的元素 y，称为函数的因变量。

集合 A 称为函数的定义域。

集合 B 称为函数的值域。

3.2 函数的运算

对于函数 $f(x)$ $(x \in D_1)$ 和函数 $g(x)$ $(x \in D_2)$，设集合 $D = D_1 \cap D_2$，且满足 $D \neq \varnothing$。

我们将以下运算称为函数的和:

$$f(x) + g(x) \qquad (x \in D)$$

我们将以下运算称为函数的差:

$$f(x) - g(x) \qquad (x \in D)$$

我们将以下运算称为函数的积:

$$f(x) \cdot g(x) \qquad (x \in D)$$

我们将以下运算称为函数的商:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (x \in D)$$

3.3 函数的图像变换

我国著名的数学家华罗庚曾说：数缺形时少直观，形缺数时难入微。

3.3.1 平移变换

函数 $f(x)$ 的图像沿 x 轴方向向左平移 a 个单位:

$$y = f(x + a)$$

函数 $f(x)$ 的图像沿 y 轴方向向上平移 a 个单位:

$$y = f(x) + a$$

3.3.2 伸缩变换

函数 $f(x)$ 的图像沿 x 轴方向压缩 a 倍:

$$y = f(a \cdot x)$$

函数 $f(x)$ 的图像沿 y 轴方向伸长 a 倍:

$$y = a \cdot f(x)$$

3.3.3 翻折变换

函数 $f(x)$ 的图像除去左半部分，将右半部分翻折至左半部分:

$$y = f(|x|)$$

函数 $f(x)$ 的图像除去下半部分，将下半部分翻折至上半部分:

$$y = |f(x)|$$

3.3.4 关于 x 轴的对称变换

函数 $f(x)$ 的图像关于 x 轴对称变换:

$$y = -f(x)$$

函数 $f(x)$ 的图像关于平行 x 轴的直线 $y = n$ 对称变换:

$$y = 2n - f(x)$$

3.3.5 关于 y 轴的对称变换

函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称变换:

$$y = f(-x)$$

函数 $f(x)$ 的图像关于平行 y 轴的直线 $x = m$ 对称变换:

$$y = f(2m - x)$$

3.3.6 关于原点的对称变换

函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称变换:

$$y = -f(-x)$$

函数 $f(x)$ 的图像关于点 (m, n) 对称变换:

$$y = 2n - f(2m - x)$$

3.4 函数的奇偶性

函数的奇偶性是函数整体的性质。

若函数 $f(x)$ 满足以下条件，我们将其称为奇函数（关于原点对称）：

$$f(x)+f(-x)=0$$

若函数 $f(x)$ 满足以下条件，我们将其称为偶函数（关于 y 轴对称）：

$$f(x)-f(-x)=0$$

两个奇函数的和仍然是奇函数。

两个偶函数的和仍然是偶函数。

若函数 $f(x)$ 的定义域 $D \in (-\infty,+\infty)$，那么其可以表示为一个偶函数和一个奇函数的和。

构造函数 $H(x)$：

$$H(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2} \tag{1}$$

构造函数 $G(x)$：

$$G(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \tag{2}$$

显然函数 $H(x)$ 是一个奇函数：

$$H(x)+H(-x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(-x)-f(x)}{2}=0 \tag{3}$$

显然函数 $G(x)$ 是一个偶函数：

$$G(x)-G(-x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}-\frac{f(-x)+f(x)}{2}=0 \tag{4}$$

同时函数 $H(x)$ 和函数 $G(x)$ 的和恰为 $f(x)$：

$$H(x)+G(x)=f(x) \tag{5}$$

这就是所要证明的。

3.5 函数的单调性

函数单调性是函数局部的性质。

若函数 $f(x)$ 在区间 D 中满足以下条件，我们将其称为是在单调增区间 D 上的增函数：

$$\forall x_1 \in D \quad \forall x_2 \in D \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

若函数 $f(x)$ 在区间 D 中满足以下条件，我们将其称为是在单调减区间 D 上的减函数：

$$\forall x_1 \in D \quad \forall x_2 \in D \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

两个增函数的和仍然是增函数。

两个减函数的和仍然是减函数。

奇函数在对称的两个区间上的单调性相同。

偶函数在对称的两个区间上的单调性相反。

若函数 $y = f(u)$ 和函数 $u = g(x)$ 单调性相同，复合函数 $f[g(x)]$ 是增函数。

若 $f(u)$ 为增函数，而 $g(x)$ 为增函数，后者为前者提供的参数方向为正，故复合函数是增函数。

若 $f(u)$ 为减函数，而 $g(x)$ 为减函数，后者为前者提供的参数方向为负，故复合函数是增函数。

若函数 $y = f(u)$ 和函数 $u = g(x)$ 单调性相反，复合函数 $f[g(x)]$ 是减函数。

若 $f(u)$ 为增函数，而 $g(x)$ 为减函数，后者为前者提供的参数方向为负，故复合函数是减函数。

若 $f(u)$ 为减函数，而 $g(x)$ 为增函数，后者为前者提供的参数方向为正，故复合函数是减函数。

3.6 函数的最值

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的取值满足以下条件，我们将 $f(x_0)$ 称为其最大值：

$$\forall x \in D \quad f(x) \geq f(x_0)$$

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的取值满足以下条件，我们将 $f(x_0)$ 称为其最小值：

$$\forall x \in D \quad f(x) \leq f(x_0)$$

函数的最大值和最小值统称为函数的最值。

形如 ax^2+bx+c 的函数，我们可以运用二次函数的性质求解其最值。

形如 ax^2+bx+c 的函数的图像：

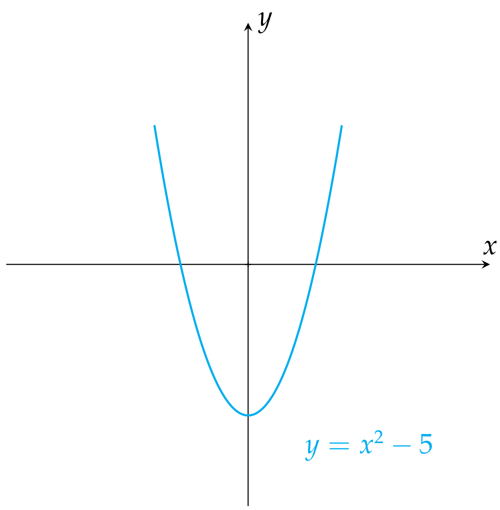


图 21: 函数 $y = x^2 - 5$ 的图像

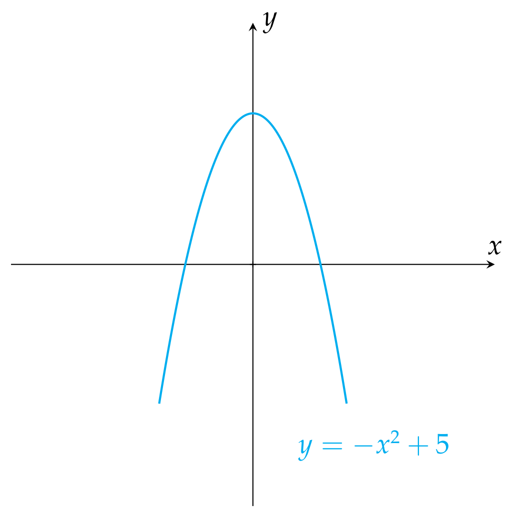


图 22: 函数 $y = -x^2 + 5$ 的图像

形如 ax^2+bx+c 的函数的顶点：

$$P\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

当 $a > 0$ 时，函数在顶点处取最小值。

当 $a < 0$ 时，函数在顶点处取最大值。

形如 $ax+\dfrac{b}{x}$ 的函数，我们可以运用基本不等式的性质求解其最值。

形如 $ax+\dfrac{b}{x}$ 的函数的图像：

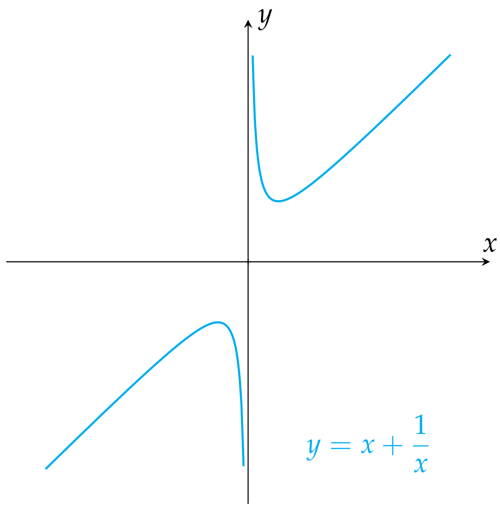


图 23: 函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的图像

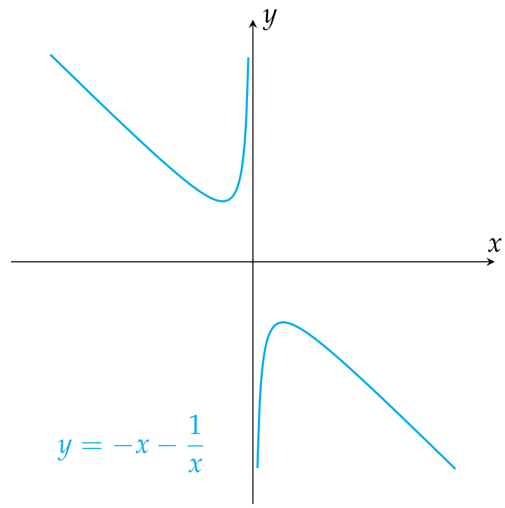


图 24: 函数 $y=-x-\dfrac{1}{x}$ 的图像

形如 $ax+\dfrac{b}{x}$ 的函数的顶点（$a>0\ \ b>0$）：

$$P_A\left(+\sqrt{\frac{b}{a}}\ ,\ \ +2\sqrt{ab}\right)\qquad P_B\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\ ,\ \ -2\sqrt{ab}\right)$$

形如 $ax+\dfrac{b}{x}$ 的函数的顶点（$a<0\ \ b<0$）：

$$P_A\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\ ,\ \ +2\sqrt{ab}\right)\qquad P_B\left(+\sqrt{\frac{b}{a}}\ ,\ \ -2\sqrt{ab}\right)$$

当 $x>0$ 时，函数在上顶点 P_A 处取最小值。

当 $x<0$ 时，函数在下顶点 P_B 处取最大值。·

3.6.1 求解函数 $f(x)=\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{b_2x+c_2}$ 的最值

对于符合以下形式的函数:

$$f(x)=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{b_2x+c_2} \tag{1}$$

通过多项式的除法可以得到以下结论:

$$a_1x^2+b_1x+c_1=(b_2x+c_2)\cdot\left(\frac{a_1}{b_2}\cdot x+\frac{b_1b_2-a_1c_2}{{b_2}^2}\right)+\left(c_1-c_2\cdot\frac{b_1b_2-a_1c_2}{{b_2}^2}\right) \tag{2}$$

$$=(b_2x+c_2)\cdot\left(\frac{a_1}{b_2}\cdot x+k\right)+(c_1-c_2\cdot k) \tag{3}$$

其中多项式的除法结果中的代换变量 k 等于:

$$k=\frac{b_1b_2-a_1c_2}{{b_2}^2} \tag{4}$$

将结论代入函数可以得到:

$$f(x)=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{b_2x+c_2} \tag{5}$$

$$=\frac{(b_2x+c_2)\cdot\left(\frac{a_1}{b_2}\cdot x+k\right)+(c_1-c_2k)}{b_2x+c_2} \tag{6}$$

$$=\frac{(b_2x+c_2)\cdot\left(\frac{a_1}{b_2}\cdot x+k\right)}{b_2x+c_2}+\frac{c_1-c_2k}{b_2x+c_2} \tag{7}$$

上下同除分子上的多项式可以得到:

$$f(x)=\frac{a_1}{b_2}\cdot x+k+\frac{c_1-c_2k}{b_2x+c_2} \tag{8}$$

在函数左侧构建多项式:

$$f(x)=\frac{a_1}{b_2}\cdot x+k+\frac{c_1-c_2k}{b_2x+c_2} \tag{9}$$

$$=\frac{a_1}{{b_2}^2}\cdot(b_2x+c_2)+\frac{c_1-c_2k}{b_2x+c_2}+k-\frac{a_1c_2}{{b_2}^2} \tag{10}$$

$$=\left[\frac{a_1}{{b_2}^2}\right]\cdot(b_2x+c_2)+\left[c_1-c_2\cdot k\right]\cdot\frac{1}{(b_2x+c_2)}+k-\frac{a_1c_2}{{b_2}^2} \tag{11}$$

显然两个参数需要同号时，原式才可以求极值：

$$\frac{a_1}{{b_2}^2} \cdot (c_1 - c_2 \cdot k) > 0$$

以下结论中的代换变量 k 等于：

$$k = \frac{b_1 \cdot b_2 - a_1 \cdot c_2}{{b_2}^2}$$

当 $a_1 > 0$，且 $b_2 \cdot x + c_2 > 0$，原式有最小值：

$$f(x) \geq k - \frac{a_1 \cdot c_2}{{b_2}^2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{a_1}{{b_2}^2} \cdot (c_1 - c_2 \cdot k)} \qquad iff \;\; x = +\sqrt{\frac{{b_2}^2}{a_1} \cdot (c_1 - c_2 \cdot k)}$$

当 $a_1 < 0$，且 $b_2 \cdot x + c_2 < 0$，原式有最小值：

$$f(x) \geq k - \frac{a_1 \cdot c_2}{{b_2}^2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{a_1}{{b_2}^2} \cdot (c_1 - c_2 \cdot k)} \qquad iff \;\; x = -\sqrt{\frac{{b_2}^2}{a_1} \cdot (c_1 - c_2 \cdot k)}$$

当 $a_1 > 0$，且 $b_2 \cdot x + c_2 < 0$，原式有最大值：

$$f(x) \leq k - \frac{a_1 \cdot c_2}{{b_2}^2} - 2 \cdot \sqrt{\frac{a_1}{{b_2}^2} \cdot (c_1 - c_2 \cdot k)} \qquad iff \;\; x = +\sqrt{\frac{{b_2}^2}{a_1} \cdot (c_1 - c_2 \cdot k)}$$

当 $a_1 < 0$，且 $b_2 \cdot x + c_2 > 0$，原式有最大值：

$$f(x) \leq k - \frac{a_1 \cdot c_2}{{b_2}^2} - 2 \cdot \sqrt{\frac{a_1}{{b_2}^2} \cdot (c_1 - c_2 \cdot k)} \qquad iff \;\; x = -\sqrt{\frac{{b_2}^2}{a_1} \cdot (c_1 - c_2 \cdot k)}$$

4 指数和对数

4.1 指数和对数

我们将形如这样的称为指数运算:

$$a^n = N$$

我们将形如这样的称为对数运算:

$$\log_a N = n$$

在指数运算中，字母 a 被称为底数，字母 n 被称为指数。

在对数运算中，字母 a 被称为底数，字母 N 被称为真数。

指数运算的运算结果被称为幂，所以指数运算有时也被称作幂运算。

指数运算和对数运算是一对逆运算:

$$\log_a a^n = n$$

在指数运算中，当指数是一个有理数时，我们这样定义:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

在指数运算中，当指数是一个负数时，我们这样定义:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

对于指数是无理数的情况，由于无理数的本质是无限不循环小数我们可以使用有理数逐位逼近，我们将有理数的位数趋向于无穷大时的极限，作为指数是无理数时的运算结果。

4.1.1 指数的运算法则

指数运算有以下运算法则:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

4.1.2 对数的运算法则

对数运算有以下运算法则:

$$\log_a M + \log_a N = \log_a(M \cdot N)$$

$$\log_a M - \log_a N = \log_a(\frac{M}{N})$$

$$\log_a M^k = k \cdot \log_a M$$

$$\log_{a^k} M = \frac{1}{k} \cdot \log_a M$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

4.2 幂函数

我们将符合以下形式的函数称为幂函数:

$$y = x^n \qquad n \in \mathbb{Q}$$

在幂函数中，自变量 x 是底数，参数 n 是指数。

幂函数的函数图像性质和参数 n 有关，具体可以分为三种（$n = \dfrac{p}{q}$）:

参数取值	示例	图像特征
q 为偶数	$y = x^{\frac{1}{2}} \quad y = x^{\frac{1}{4}}$	非奇非偶函数
q 为奇数 p 为偶数	$y = x^2 \quad y = x^4 \quad y = x^{\frac{2}{3}}$	偶函数
q 为奇数 p 为奇数	$y = x^1 \quad y = x^3 \quad y = x^{\frac{1}{3}}$	奇函数

表 8: 幂函数的图像性质

幂函数无论参数如何变化，其图像必然过点 $(1, 1)$。

函数图像（q 为偶数）:

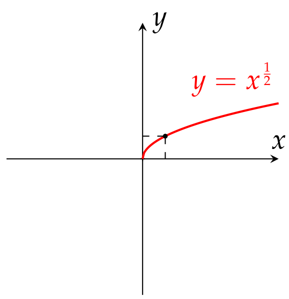


图 25: 函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$

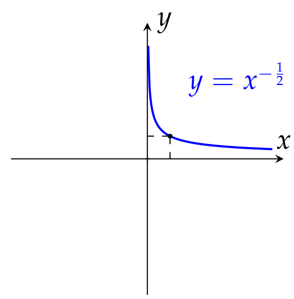


图 26: 函数 $y = x^{-\frac{1}{2}}$

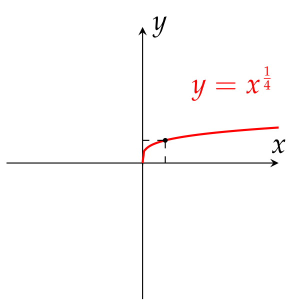


图 27: 函数 $y = x^{\frac{1}{4}}$

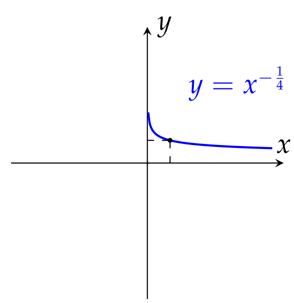


图 28: 函数 $y = x^{-\frac{1}{4}}$

函数图像（q 为奇数 p 为偶数）:

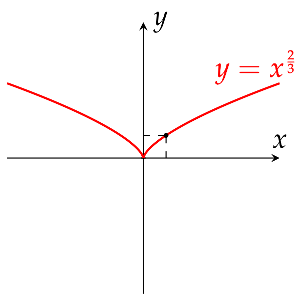


图 29: 函数 $y = x^{\frac{2}{3}}$

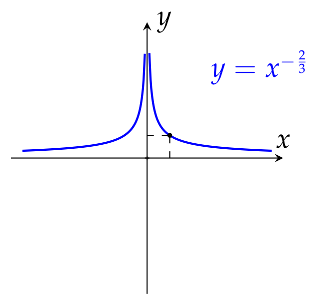


图 30: 函数 $y = x^{-\frac{2}{3}}$

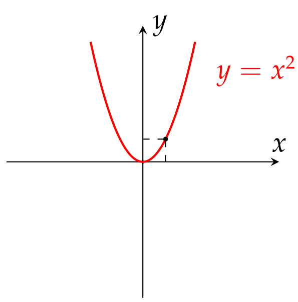


图 31: 函数 $y = x^2$

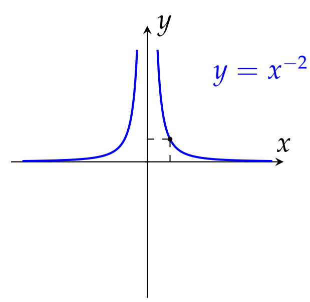


图 32: 函数 $y = x^{-2}$

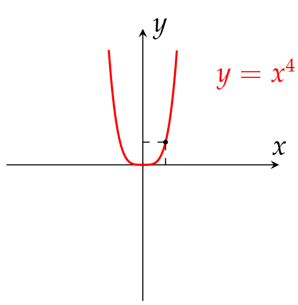


图 33: 函数 $y = x^4$

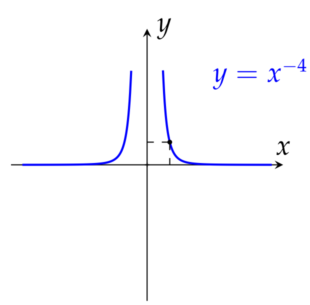


图 34: 函数 $y = x^{-4}$

函数图像（$n < 0$　q 为奇数 p 为奇数):

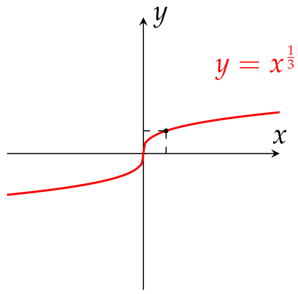


图 35: 函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$

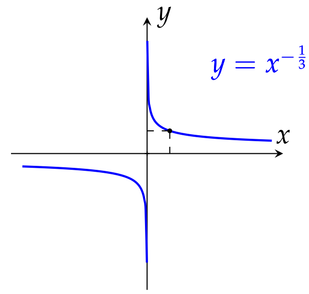


图 36: 函数 $y = x^{-\frac{2}{3}}$

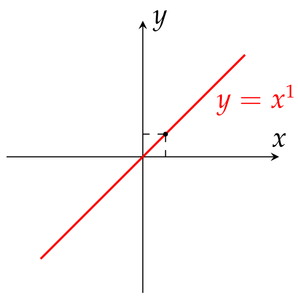


图 37: 函数 $y = x^{1}$

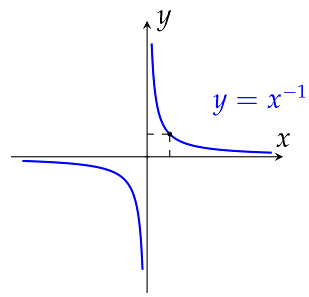


图 38: 函数 $y = x^{-1}$

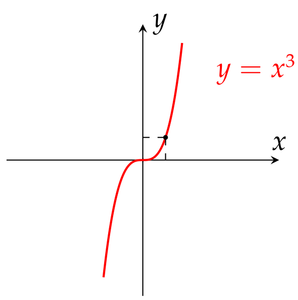


图 39: 函数 $y = x^{3}$

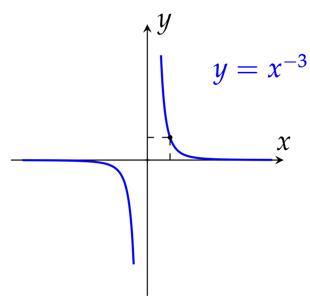


图 40: 函数 $y = x^{-3}$

4.3 指数函数

我们将符合以下形式的函数称为指数函数：

$$y = n^x \qquad n \in \mathbb{R}^+$$

在指数函数中，自变量 x 是指数，参数 n 是底数。

指数函数的函数图像性质和参数 n 有关，具体可以分为两种：

参数取值	示例	图像特征
$n < 1$	$y = \frac{1}{2}^x \qquad y = \frac{1}{3}^x$	单调递减函数
$n > 1$	$y = 2^x \qquad y = 3^x$	单调递减函数

表 9: 指数函数的图像性质

指数函数无论参数如何变化，其图像必然过点 $(0, 1)$。

函数图像（$n < 1$）：

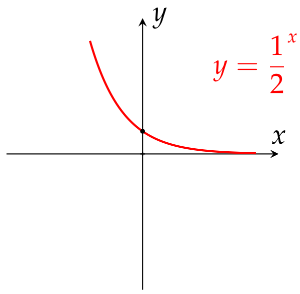


图 41: 函数 $y = \frac{1}{2}^x$

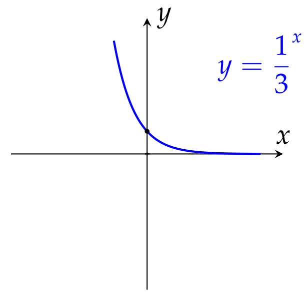


图 42: 函数 $y = \frac{1}{3}^x$

函数图像（$n > 1$）：

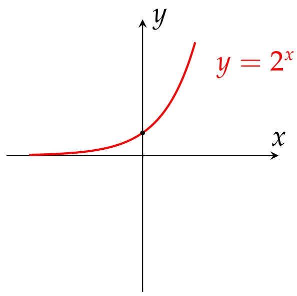


图 43: 函数 $y = 2^x$

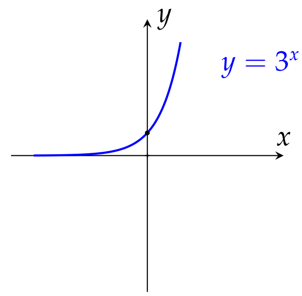


图 44: 函数 $y = 3^x$

4.4 对数函数

我们将符合以下形式的函数称为对数函数:

$$y = \log_n x \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

在对数函数中，自变量 x 是真数，参数 n 是底数。

对数函数的函数图像性质和参数 n 有关，具体可以分为两种:

参数取值	示例		图像特征
$n < 1$	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	单调递减函数
$n > 1$	$y = \log_2 x$	$y = \log_3 x$	单调递增函数

表 10: 对数函数的图形性质

对数函数无论参数如何变化，其图像必然过点 $(1, 0)$。

函数图像（$n < 1$）:

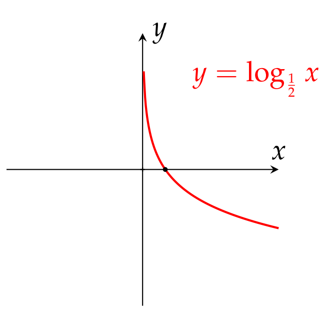


图 45: 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

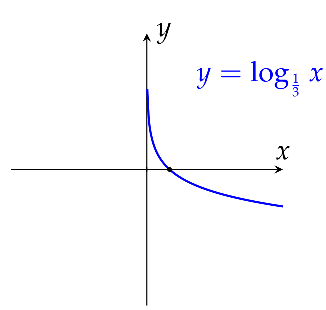


图 46: 函数 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

函数图像（$n > 1$）:

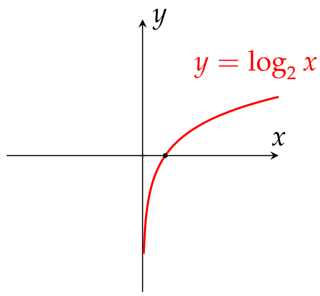


图 47: 函数 $y = \log_2 x$

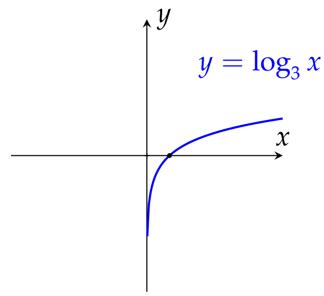


图 48: 函数 $y = \log_3 x$

5 三角比的运算

5.1 角度

角度制是衡量角的大小的一种方式，单位是度。

我们定义 1 度为周角的 360 等分。

按逆时针方向旋转所形成的角称为正角，其度量值为正。

按顺时针方向旋转所形成的角称为负角，其度量值为负。

根据角度定义，在角度制中，周角的大小是 360 度。

在研究三角函数时，我们通常会默认角的顶点位于坐标原点，角的始边与 x 轴正半轴重合。

5.2 弧度

弧度制是衡量角的大小的一种方式，单位是弧度。

我们定义 1 弧度为单位圆上弧长为一的弧所对应的圆心角的大小。

弧度的意义在于填补了角度制的设计缺陷，大幅度简化了运算。

弧度在使用中，可以省略弧度单位，直接书写弧度数即可。

根据弧度定义，在弧度制中，周角的大小是 2π 弧度。

5.3 扇形的弧长和面积

弧度的本质是单位圆上的角所对应的弧长，所以考虑圆的半径，我们就可以得出：

扇形的弧长公式：

$$l = \alpha \cdot r$$

我们知道圆的面积可以用 πr^2 计算，显然扇形的面积和圆的面积比可以使用 $\dfrac{\alpha}{2\pi}$ 表示。

因此我们可以通过将两者相乘，得到关于弧度和半径的扇形面积公式。

同时我们可以再代入弧长公式，得到关于弧长和半径的扇形面积公式。

扇形的面积公式：

$$S = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot r$$

5.4 三角比的定义

设三角形终边上一点 $P(x,y)$，同时令原点到点 P 的距离 $OP=r$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$。

首先定义以下三角比：

正弦（sin）：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}$$

余弦（cos）：

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}$$

正切（tan）：

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}$$

然后定义以下三角比：

余割（csc）：

$$\csc\alpha=\frac{r}{y}$$

正割（sec）：

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}$$

余切（cot）：

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}$$

特别的，如果在一个单位圆上，角 α 的终边与单位圆的交点为 $\mathrm{P}(x,y)$，直线 OP 的斜率为 k。

那么存在以下关系：

$$x=\cos\alpha$$

$$y=\sin\alpha$$

$$k=\tan\alpha$$

5.5 同角三角比的关系

由于 sin 和 csc 互为倒数，cos 和 sec 互为倒数，tan 和 cot 互为倒数，我们可以得到倒数关系。

倒数关系：

$$\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$$
$$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$$
$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$

由于 $\sin\alpha = \frac{y}{r}$，同时 $\cos\alpha = \frac{x}{r}$，且 $\tan\alpha = \frac{y}{x}$，通过两者相除可以得到商数关系。

商数关系：

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

通过以下推导，我们可以得出平方关系：

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 \tag{1}$$

$$\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = \frac{r^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = 1 \tag{2}$$

$$\csc^2\alpha - \cot^2\alpha = \frac{r^2}{y^2} - \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2+y^2}{y^2} - \frac{x^2}{y^2} = 1 \tag{3}$$

平方关系：

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$$
$$\csc^2\alpha - \cot^2\alpha = 1$$

5.6 第一组诱导公式

第一组诱导公式讨论了 α 和 $2\pi+\alpha$ 的关系。

我们知道，两个相差 2π 的角的终边是相同的，所以我们可以得到：

第一组诱导公式：

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$$

$$\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$$

$$\tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

5.7 第二组诱导公式

第二组诱导公式讨论了 α 和 $-\alpha$ 的关系

角 α 与单位圆的交点为：$P(\cos\alpha,\sin\alpha)$
角 $-\alpha$ 与单位圆的交点为：$P'(\cos(-\alpha),\sin(-\alpha))$

显然点 P 和点 P' 关于 x 轴对称，所以点 P' 也可以写为 $(\cos\alpha,-\sin\alpha)$。

对于正切，我们可以通过三角比的商数关系求得。

第二组诱导公式：

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

5.8 第三组诱导公式

第三组诱导公式讨论了 α 和 $\alpha+\pi$ 的关系。

角 α 与单位圆的交点为：$P(\cos\alpha, \sin\alpha)$
角 $\pi+\alpha$ 与单位圆的交点为：$P'(\cos(\pi+\alpha), \sin(\pi+\alpha))$

由于两个角相差 180 度，点 P 和点 P' 关于原点对称，所以点 P' 也可也写为 $(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$。

对于正切，我们仍然可以通过三角比的商数关系求得。

第三组诱导公式：

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$

5.9 第四组诱导公式

第四组诱导公式讨论了 α 和 $\pi-\alpha$ 的关系。

角 α 与单位圆的交点为：$P(\cos\alpha, \sin\alpha)$
角 $\pi-\alpha$ 与单位圆的交点为：$P'(\cos(\pi-\alpha), \sin(\pi-\alpha))$

我们可以这样理解，首先将 α 变换为 $-\alpha$，也就是先关于 x 轴对称，接下来再将 $-\alpha$ 变换为 $\pi-\alpha$，即再关于原点对称，总体来看便是关于 y 轴对称，所以点 P' 也可也写为 $(-\cos\alpha, \sin\alpha)$。

对于正切，我们依然可以通过三角比的商数关系求得。

第四组诱导公式：

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$

5.10 诱导公式和角度的图形变换

综合考虑前四个诱导公式，我们会发现其本质都是对于角度的图形变换：

变换方式	诱导公式	参数	sin[x]	cos[y]	tan[k]
不变换	第一组诱导公式	$+\alpha$	$+$	$+$	$+$
关于 x 轴对称	第二组诱导公式	$-\alpha$	$-$	$+$	$-$
关于 y 轴对称	第四组诱导公式	$-\alpha+\pi$	$+$	$-$	$-$
关于原点对称	第三组诱导公式	$+\alpha+\pi$	$-$	$-$	$+$

表 11: 诱导公式和角度的图形变换

5.11 余弦的和差公式

设 α 和 β 两个任意角，两角终边与单位圆的交点为 $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 和 $B(\cos\beta, \sin\beta)$。

接下来将 OA 和 OB 绕 O 旋转 $-\beta$，使得点 $A^{'}(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$，点 $B^{'}(1,0)$。

根据两点之间距离公式：

$$
\begin{aligned}
|AB|^2 &= (\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 && (1)\\
&= \cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta && (2)\\
&= 2-2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta-2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta && (3)\\
&= 2-2\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta) && (4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|A^{'}B^{'}|^2 &= (\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(\sin(\alpha-\beta))^2 && (5)\\
&= \cos^2(\alpha-\beta)-2\cdot\cos\alpha-\beta+1+\sin^2(\alpha-\beta) && (6)\\
&= 2-2\cdot\cos(\alpha-\beta) && (7)
\end{aligned}
$$

由于 $|AB|=|A^{'}B^{'}|$，所以有 $2-2\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)=2-2\cdot\cos(\alpha-\beta)$，化简可得：

两角差的余弦公式：

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

在两角差的余弦公式中，用 $-\beta$ 替代 β，那么我们可以得到：

两角和的余弦公式：

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

5.12 第五组诱导公式

第五组诱导公式讨论了 α 和 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的关系。

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha \tag{1}$$

$$= 0\cdot\cos\alpha + 1\cdot\sin\alpha \tag{2}$$

$$= \sin\alpha \tag{3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) \tag{4}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \tag{5}$$

$$= \cos(\alpha) \tag{6}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha \tag{7}$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \tag{8}$$

第五组诱导公式：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$$

5.13 第六组诱导公式

第六组诱导公式讨论了 α 和 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 的关系。

使用 α 替换第五组诱导公式:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}+(-(-\alpha))=\cos(-\alpha)=\cos\alpha \tag{1}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}+(-(-\alpha))=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \tag{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\tan\frac{\pi}{2}+(-(-\alpha))=\cot(-\alpha)=-\cot\alpha \tag{3}$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cot\frac{\pi}{2}+(-(-\alpha))=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha \tag{4}$$

第六组诱导公式:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$$

5.14 正弦的和差公式

通过余弦的和差公式和第五组诱导公式，我们就可以推导正弦的和差公式：

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) &(1)\\
&= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) &(2)\\
&= \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cdot\cos\beta+\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cdot\sin\beta &(3)\\
&= \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta &(4)
\end{aligned}
$$

两角和的正弦公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

在两角和的正弦公式中，用 β 替换 $-\beta$，可以得到：

两角差的余弦公式：

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

5.15 正切的和差公式

由于已经推导出了正弦和余弦的和差公式，通过商数关系，我们可以推出正切的和差公式：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\tan\alpha\cdot 1+1\cdot\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \quad (1)$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\tan\alpha\cdot 1-1\cdot\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta} \quad (2)$$

两角和的正切公式

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

两角差的正切公式

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

5.16 辅助角公式

辅助角公式：

$$a \cdot \sin\alpha + b \cdot \cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(\alpha+\beta) \qquad \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

推导如下：

$$a \cdot \sin\alpha + b \cdot \cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cos\alpha\right) \tag{1}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta) \tag{2}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(\alpha+\beta) \tag{3}$$

5.17 倍角的三角比

对于三角比的和公式，特别的，当 $\alpha = \beta$ 时，我们可以有：

$$\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha \tag{4}$$

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha \tag{5}$$

$$\tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\alpha} \tag{6}$$

正弦的倍角公式：

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

对于 $\cos 2\alpha$，可以再结合公式 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$，得出另外两种表达形式。

余弦的倍角公式：

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot \sin^2\alpha$$

正切的倍角公式：

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

5.18 半角的三角比

将余弦的倍角公式中使用 β 替代 2α:

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2 \alpha - 1 \tag{1}$$

$$\cos \beta = 2 \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1 \tag{2}$$

$$2 \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} = 1 + \cos \beta \tag{3}$$

$$\cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1 + \cos \beta}{2} \tag{4}$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \tag{5}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot \sin^2 \alpha \tag{6}$$

$$\cos \beta = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2} \tag{7}$$

$$2 \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 - \cos \beta \tag{8}$$

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos \beta}{2} \tag{9}$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} \tag{10}$$

正弦的半角公式：

$$\sin \frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}}$$

余弦的半角公式：

$$\cos \frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}}$$

通过商数关系可以推导正切的半角公式:

$$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\beta}{2}}}{\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\beta}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} \tag{11}$$

我们还可以通过以下方法推导正切的半角公式的另外两种形式:

$$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\dfrac{\beta}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}}=\frac{\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot 2\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot 2\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}}=\frac{\left(2\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\right)}{1+\left(2\cdot\cos^2\dfrac{\beta}{2}-1\right)}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} \tag{12}$$

$$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\dfrac{\beta}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}}=\frac{\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot 2\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot 2\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}}=\frac{1-\left(1-2\cdot\sin^2\dfrac{\beta}{2}\right)}{\left(2\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\right)}=\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta} \tag{13}$$

正切的半角公式:

$$\tan\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}}$$

$$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}$$

$$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}$$

5.19 万能置换公式

进行如下推导:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{2 \cdot \tan\alpha \cdot 1}{\tan^2\alpha + 1} = \frac{2 \cdot \tan\alpha}{1 + \tan\alpha^2} \tag{14}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{1 - \tan^2\alpha}{\tan^2\alpha + 1} = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} \tag{15}$$

万能置换公式:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan\alpha}{1 + \tan\alpha^2}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$$

5.20 正弦定理

对于任意三角形 $\triangle ABC$，我们不妨以 C 为原点，以 CB 为 x 轴正方向，建立平面直角坐标系。

过 A 作 BC 的高，显然我们可以得到：

$$BC = a \qquad AD = b \cdot \sin C \tag{1}$$

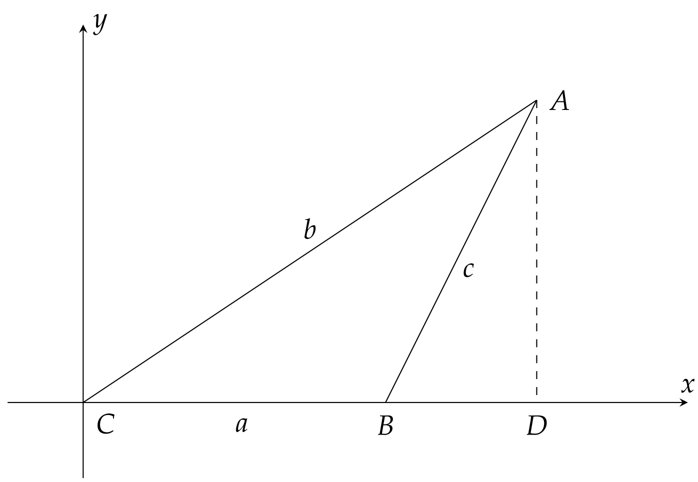


图 48: 正弦定理示意图

由此我们可以得出三角形的面积：

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C \tag{3}$$

替换字母，我们总共可以得出三组类似的结论。

任意三角形的面积公式：

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C$$

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin A$$

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot ca \cdot \sin B$$

根据任意三角形的面积公式可得:

$$\frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot ca \cdot \sin B \tag{4}$$

同除 $\frac{1}{2} \cdot abc$ 可得:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \tag{5}$$

同时取倒数可得:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \tag{6}$$

正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

正弦定理的文字表述:

在三角形中，各边与其对角的正弦的比相等。

5.21 余弦定理

对于任意三角形 $\triangle ABC$，我们不妨以 C 为原点，以 CB 为 x 轴正方向，建立平面直角坐标系。

过 A 作 BC 的高，显然我们可以得到：

$$B(a,0) \qquad A(b\cdot\cos C, b\cdot\sin C) \tag{1}$$

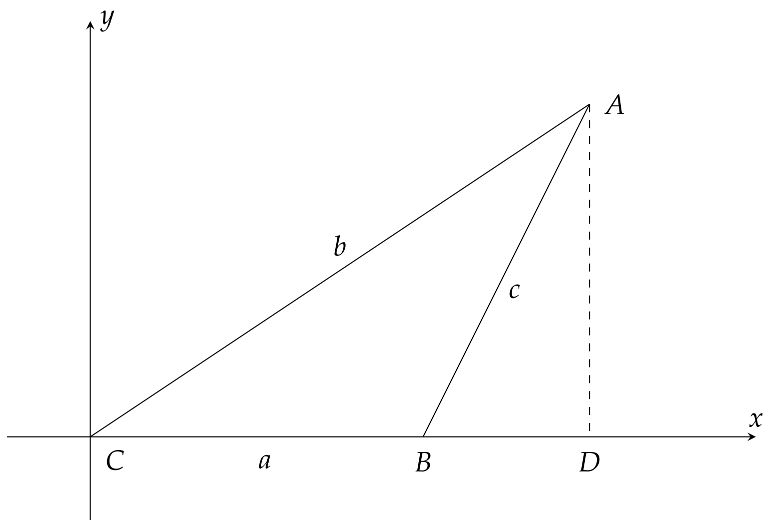


图 49: 余弦定理示意图

根据两点间距离公式可得：

$$c^2 = (b\cdot\cos C - a)^2 + (b\cdot\sin C - 0)^2 \tag{2}$$

$$= b^2\cdot\cos^2 C + b^2\cdot\sin^2 A - 2ab\cdot\cos C + a^2 \tag{3}$$

$$= b^2\cdot\left(\cos^2 C + \sin^2 C\right) + a^2 - 2ab\cdot\cos A \tag{4}$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C \tag{5}$$

对其变形还可以得到另一种形式：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C \tag{6}$$

$$\cos C = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} \tag{7}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \tag{8}$$

替换字母，我们总共可以得出三组类似的结论。

余弦定理：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

余弦定理的文字表述：

在三角形中，一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与其夹角余弦的乘积的两倍。

5.22 正弦定理的扩充

对于任意三角形 $\triangle ABC$，我们设其外接圆直径为 $2R$，过 B 作直线 BD。

由于同弧对应的圆周角均相等，所以可以得到：

$$\angle A = \angle D \tag{1}$$

由于 BD 为直径，故 $\angle DCB$ 为直角，可以得到：

$$\sin D = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R} \tag{2}$$

对其变换可得：

$$2R = \frac{a}{\sin A} \tag{3}$$

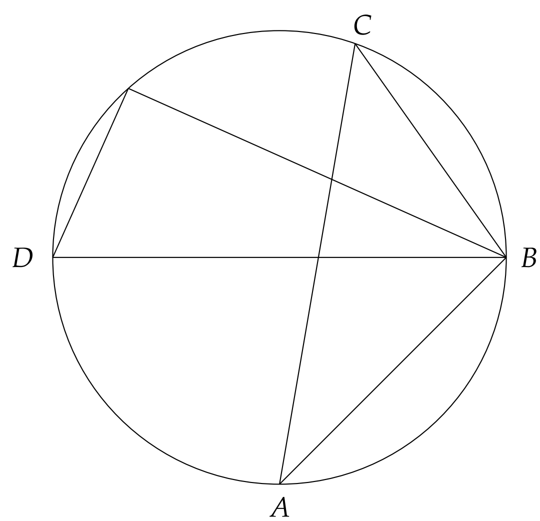


图 50: 正弦定理的扩充示意图

代入正弦定理，我们总共可以得出三组类似的结论。

正弦定理的扩充：

$$2R = \frac{a}{\sin A}$$

$$2R = \frac{b}{\sin B}$$

$$2R = \frac{c}{\sin C}$$

6 三角函数

6.1 正弦函数

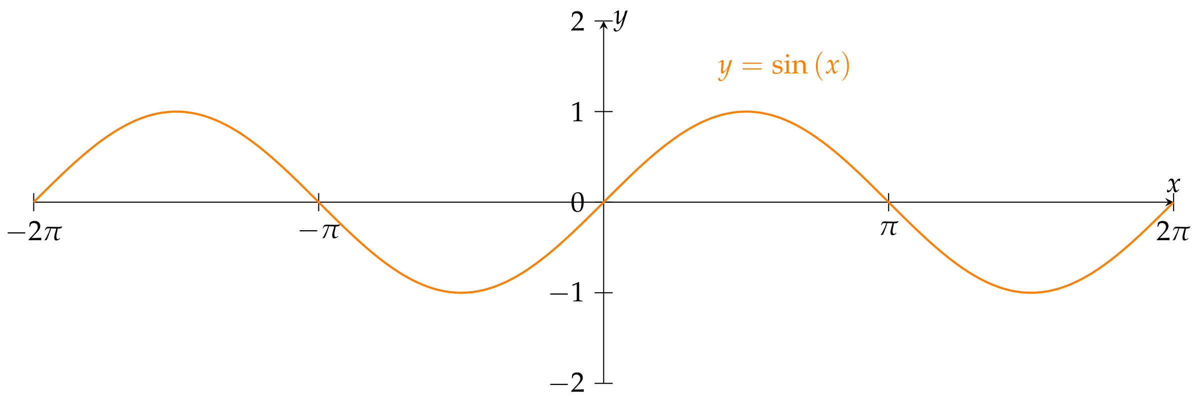


图 51: 正弦函数的图像

正弦函数的性质：

周期：2π　　定义域：$(-\infty, \infty)$　　值域：$[-1, 1]$

与 x 轴交点：$\{x \mid x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$

最大值：$\left\{x \mid x = k \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

最小值：$\left\{x \mid x = k \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

观察图形可以发现，正弦函数的本质是余弦函数向右平移 $\frac{\pi}{2}$。

6.2 余弦函数

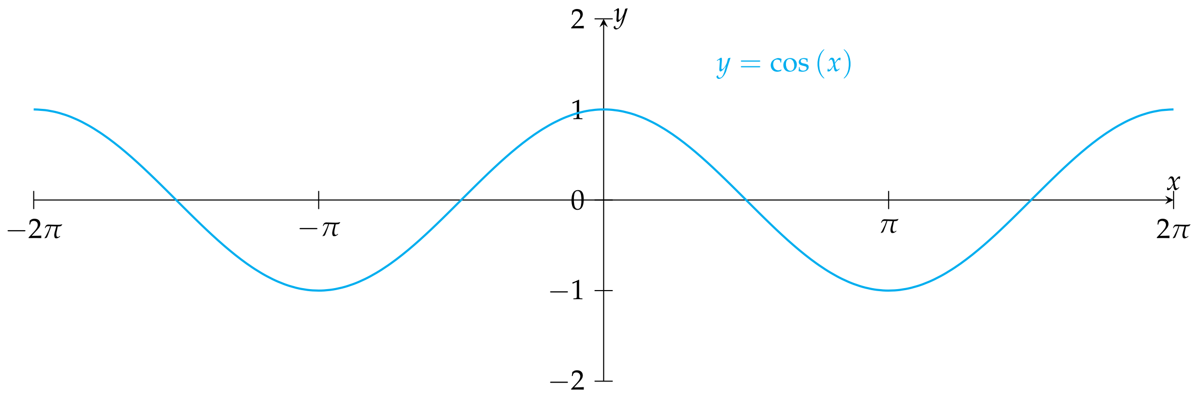


图 52: 余弦函数的图像

余弦函数的性质:

周期: 2π　　定义域: $(-\infty, \infty)$　　值域: $[-1, 1]$

与 x 轴交点: $\left\{x \mid x = k \cdot \pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

最大值: $\{x \mid x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

最小值: $\{x \mid x = k \cdot 2\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$

观察图形可以发现，余弦函数的本质是正弦函数向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$。

6.3 关于函数 $A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$

6.3.1 参数 A 的意义

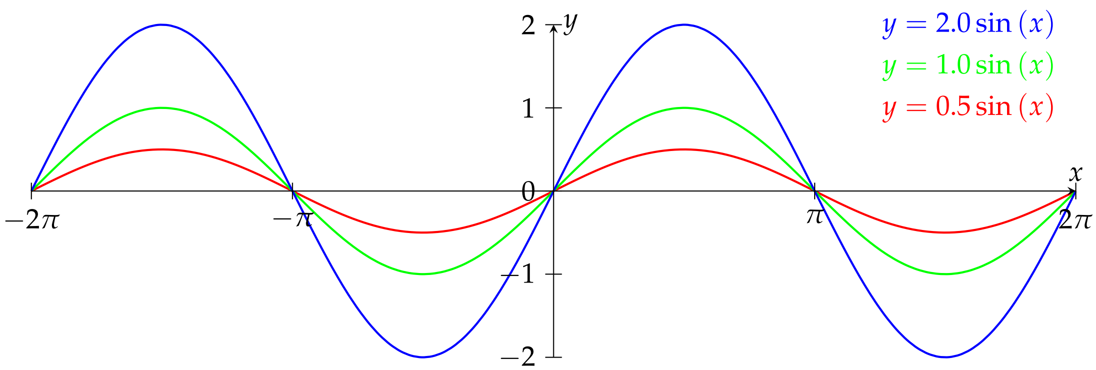


图 53: 参数 A 对于正弦函数图像的影响

参数 A 决定了图像在 y 轴上的缩放，缩放倍数为：A

参数 A 同时决定了函数的值域：$[-A, A]$

6.3.2 参数 ω 的意义

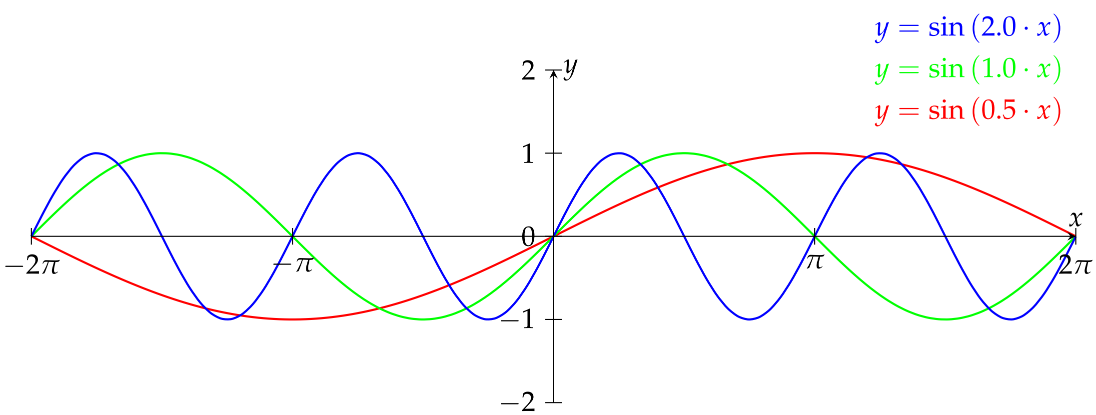


图 54: 参数 ω 对于正弦函数图像的影响

参数 ω 决定了图像在 x 轴上的缩放，缩放倍数为：$\dfrac{1}{\omega}$

参数 ω 同时影响了图像的周期：$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

6.3.3 参数 φ 的意义

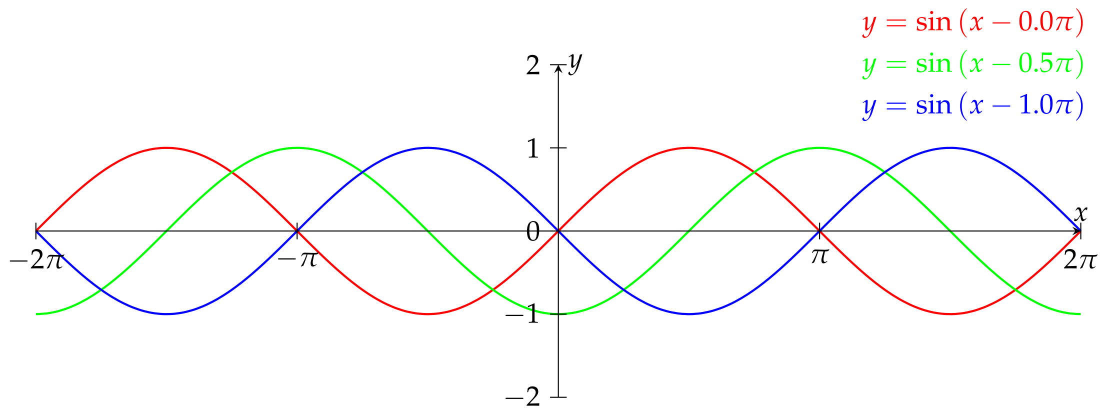


图 55: 参数 φ 对于正弦函数图像的影响

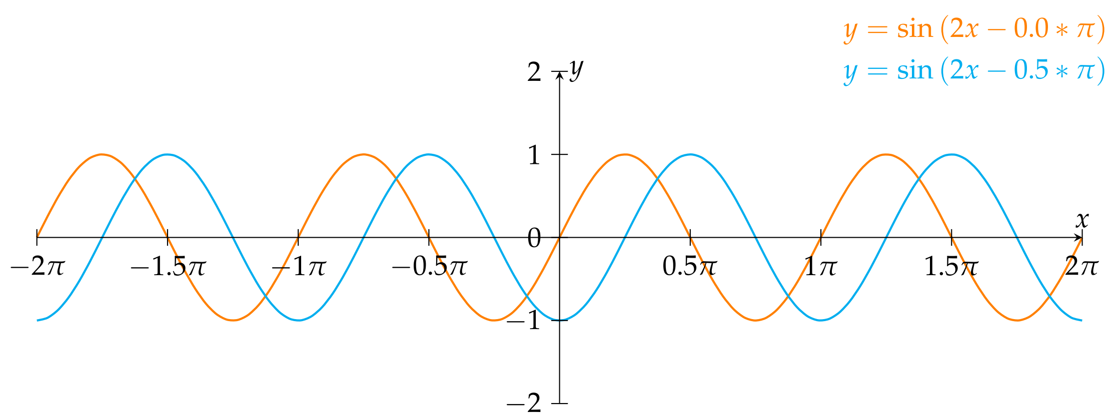


图 56: 参数 ω 和参数 φ 对于平移的影响

参数 φ 和参数 ω 共同决定了图像在 x 轴上的平移：$-\dfrac{\varphi}{\omega}$

6.4 正切函数

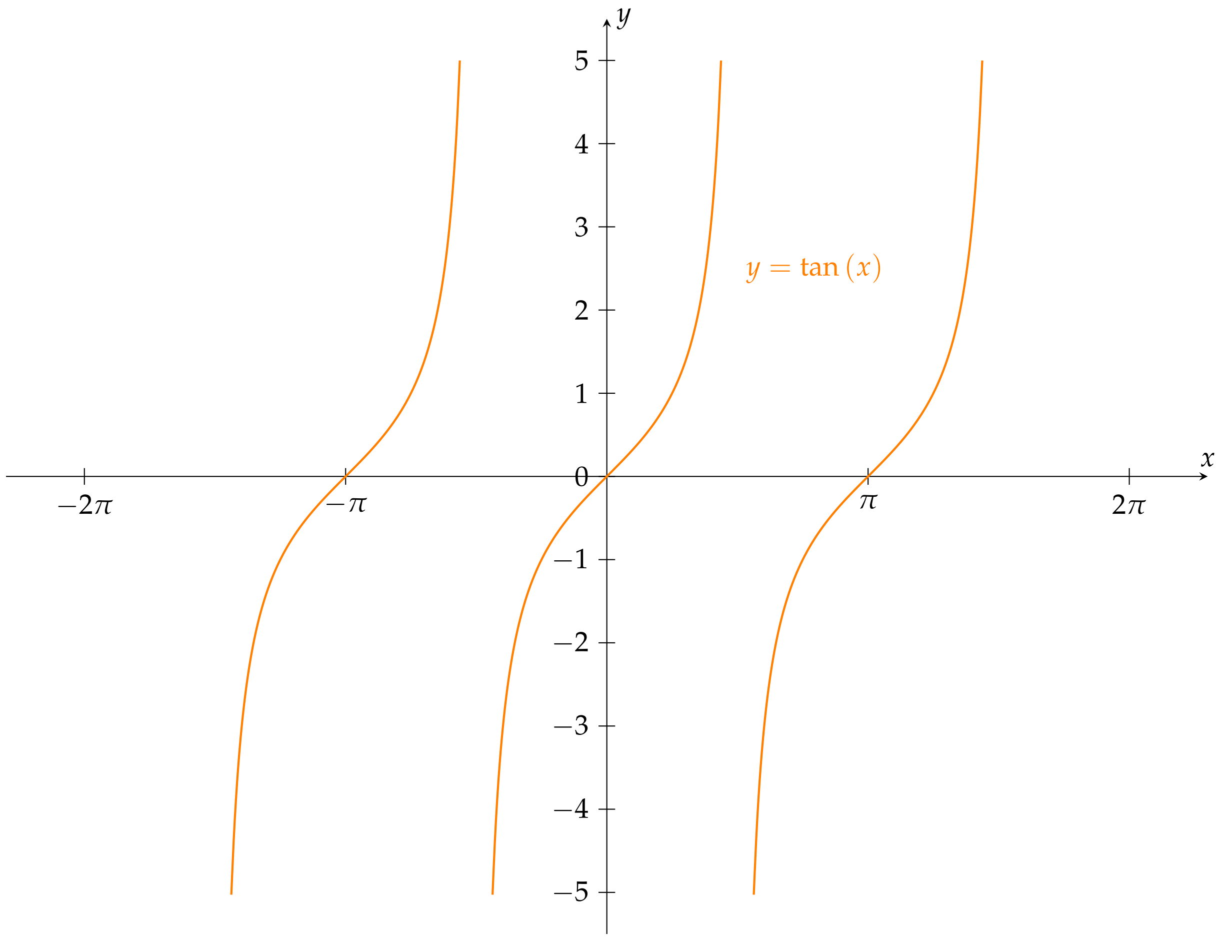


图 57: 正切函数的图像

正切函数的性质：

周期：π　　定义域：$\left\{x \mid x \neq k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$　　值域：$(-\infty, \infty)$

与 x 轴交点：$\{x \mid x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$

正切函数的图像在局部是单调递增的。

观察图像可以发现，正切函数的本质是余切函数向右平移 $\frac{\pi}{2}$，再关于 y 轴翻转。

6.5 余切函数

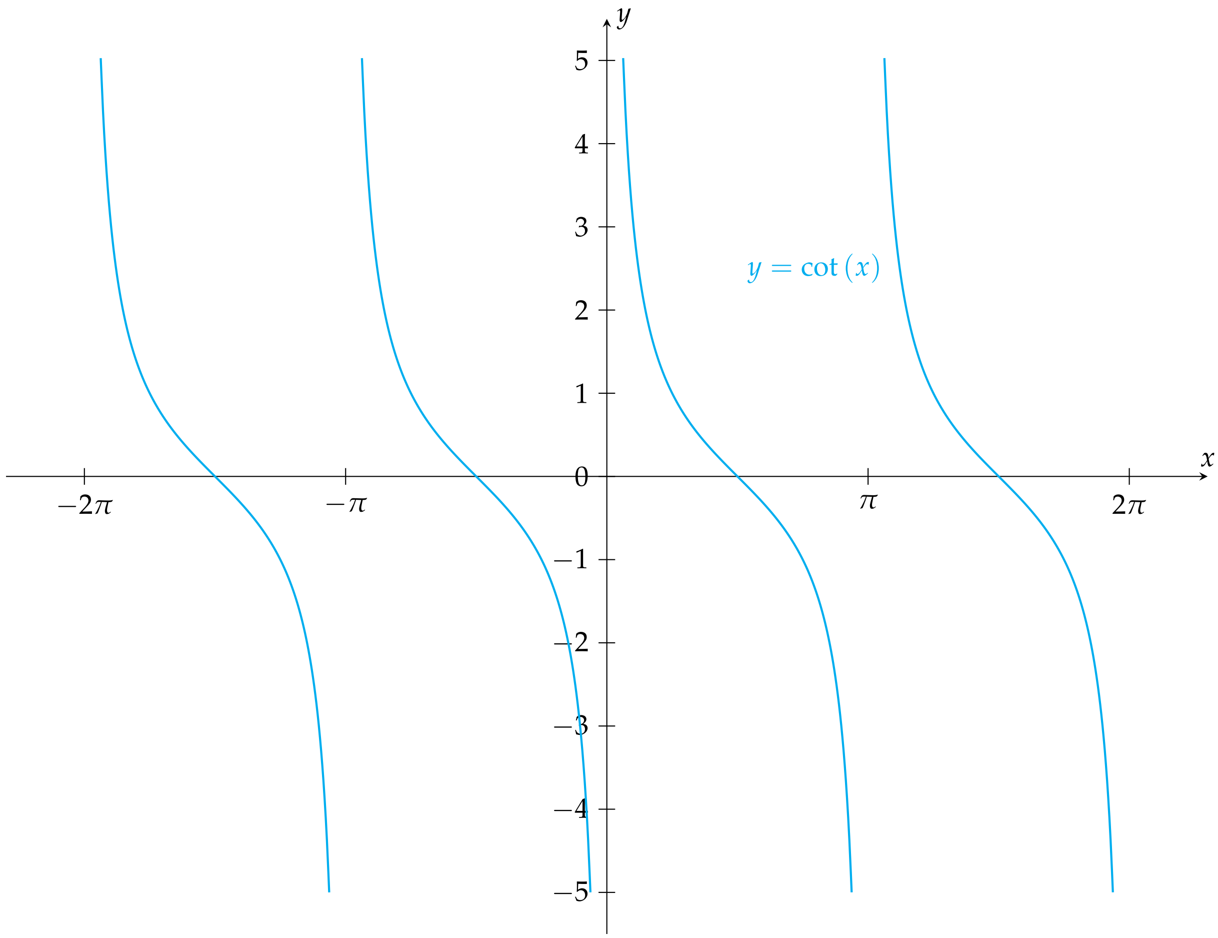


图 58: 余切函数的图像

余切函数的性质：

周期：π　　定义域：$\{x \mid x \neq k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$　　值域：$(-\infty, \infty)$

与 x 轴交点：$\left\{x \mid x \neq k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

余切函数的图像在局部是单调递减的。

观察图像可以发现，余切函数的本质是正切函数向左平移 $\frac{\pi}{2}$，再关于 y 轴翻转。

6.6 反正弦函数

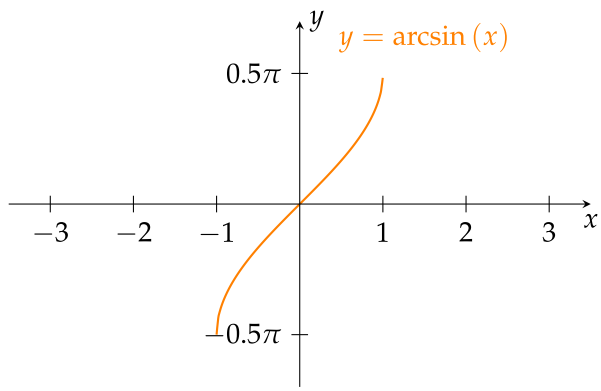


图 59: 反正弦函数的图像

反正弦函数的性质：

定义域：$[-1, 1]$

值域：$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

6.7 反余弦函数

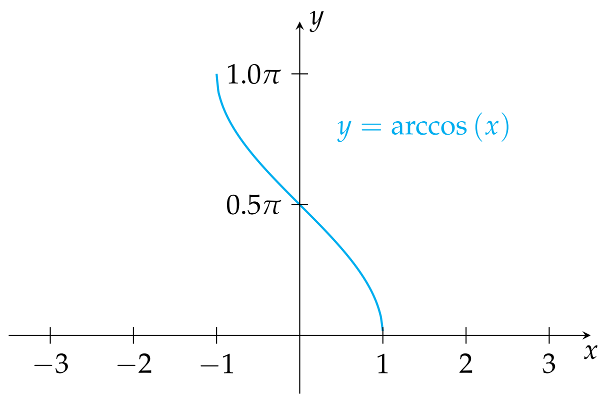


图 60: 反余弦函数的图像

反余弦函数的性质：

定义域：$[-1, 1]$

值域：$[0, \pi]$

6.8 反正切函数

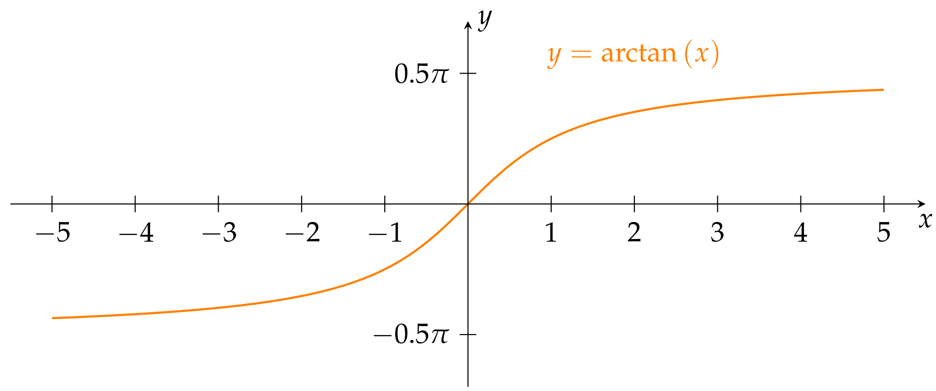


图 61: 反正切函数的图像

反正切函数的性质：

定义域：$(-\infty, \infty)$

值域：$(-\frac{\pi}{2}, \pi)$

6.9 反余切函数

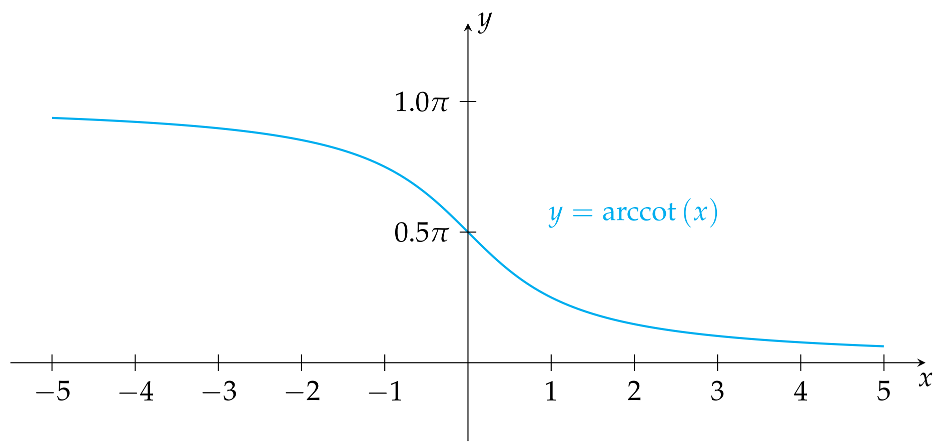


图 62: 反余切函数的图像

反余切函数的性质：

定义域：$(-\infty, \infty)$

值域：$(0, \pi)$

7 数列

递推公式形容了数列中任意一项与其前一项之间的关系。

通项公式形容了数列中任意一项与其序数的关系。

7.1 等差数列

等差数列中，相邻项之间的差等于一个常数，这个常数称为公差，通常用 d 表述。

7.1.1 等差数列的递推公式

根据等差数列的定义，我们可以得到等差数列的递推公式：

$$a_n = a_{n-1} + d$$

7.1.2 等差数列的通项公式

通过递推公式，我们可以得到等差数列的通项公式：

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

7.1.3 等差数列的求和公式

等差数列的求和公式通常可以表述为以下三种形式：

关于首项和末项：

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

关于首项和公差：

$$S_n = n \cdot a_1 + \frac{(n^2 - n)}{2} \cdot d$$

关于序数：

$$S_n = \frac{d}{2} \cdot n^2 + (a_1 - \frac{d}{2}) \cdot n$$

7.2 等比数列

等比数列中，相邻项之间的比等于一个常数，这个常数称为公比，通常用 q 来表达。

7.2.1 等比数列的递推公式

根据等比数列的定义，我们可以得到等比数列的递推公式：

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

7.2.2 等比数列的通项公式

通过递推公式，我们可以得到等比数列的通项公式：

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

7.2.3 等比数列的求和公式

当 $q \neq 1$ 时：

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q}$$

当 $q = 1$ 时：

$$S_n = n \cdot a_1$$

7.3 通过递推公式推导通项公式

7.3.1 形如$a_{n+1} = a_n + f(n)$

通过递推公式，我们可以得到相邻两项的差关于 n 的表达式，所以可以运用累加法：

$$a_n = a_1 + \sum_{x=1}^{n-1} f(x)$$

7.3.2 形如$a_{n+1} = a_n \times f(n)$

通过递推公式，我们可以得到相邻两项的比关于 n 的表达式，所以可以运用累乘法：

$$a_n = a_1 \times \prod_{x=1}^{n-1} f(x)$$

7.3.3 形如$a_{n+1} = q \cdot a_n + c$

运用待定系数法，我们可以进行如下推导：

$$a_{n+1} = q \cdot a_n + c \tag{1}$$

$$a_{n+1} + x = q \cdot (a_n + x) \tag{2}$$

$$a_{n+1} + x = q \cdot a_n + q \cdot x \tag{3}$$

$$a_{n+1} = q \cdot a_n + (q-1) \cdot x \tag{4}$$

与原式对照可以得到：

$$(q-1) \cdot x = c \tag{5}$$

$$x = \frac{c}{q-1} \tag{6}$$

代入可得：

$$a_{n+1} + \frac{c}{q-1} = \left(a_n + \frac{c}{q-1}\right) \cdot q \tag{7}$$

$$a_{n+1} + \frac{c}{q-1} = \left(a_1 + \frac{c}{q-1}\right) \cdot q^n \tag{8}$$

$$a_{n+1} + \frac{c}{q-1} = a_1 \cdot q^n + \frac{c}{q-1} \cdot q^n \tag{9}$$

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n + \frac{c}{q-1} \cdot (q^n - 1) \tag{10}$$

用 n 替代 $n+1$ 后，我们就可以得到通项公式：

$$a_n = q^{n-1} \cdot a_1 + \frac{c}{q-1} \cdot (q^{n-1} - 1)$$

7.3.4 形如$a_{n+1} = q \cdot a_n + c^n$

首先两边同除 c^{n+1}:

$$a_{n+1} = q \cdot a_n + c^n \tag{1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{c^{n+1}} = \frac{q \cdot a_n}{c^{n+1}} + \frac{1}{c} \tag{2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{c^{n+1}} = \frac{q}{c} \cdot \frac{a_n}{c^n} + \frac{1}{c} \tag{3}$$

令 $b_n = \frac{a_n}{c^n}$，使用待定系数法的公式:

$$b_{n+1} = \frac{q}{c} \cdot b_n + \frac{1}{c} \tag{4}$$

$$b_{n+1} = b_1 \cdot \left(\frac{q}{c}\right)^n + \left(\frac{\frac{1}{c}}{\frac{q}{c} - 1}\right) \cdot \left[\left(\frac{q}{c}\right)^n - 1\right] \tag{5}$$

$$b_{n+1} = b_1 \cdot \left(\frac{q}{c}\right)^n + \left(\frac{\frac{1}{c}}{\frac{q-c}{c}}\right) \cdot \left[\left(\frac{q}{c}\right)^n - 1\right] \tag{6}$$

$$b_{n+1} = b_1 \cdot \left(\frac{q}{c}\right)^n + \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{c}{q-c}\right) \cdot \left[\left(\frac{q}{c}\right)^n - 1\right] \tag{7}$$

$$b_{n+1} = b_1 \cdot \left(\frac{q}{c}\right)^n + \frac{1}{q-c} \cdot \left[\left(\frac{q}{c}\right)^n - 1\right] \tag{8}$$

$$\frac{a_{n+1}}{c^{n+1}} = \frac{a_1}{c} \cdot \frac{q^n}{c^n} + \frac{1}{q-c} \cdot \left(\frac{q^n}{c^n} - 1\right) \tag{9}$$

$$\frac{a_{n+1}}{c^{n+1}} = \frac{a_1 \cdot q^n}{c^{n+1}} + \frac{1}{q-c} \cdot \left(\frac{q^n}{c^n} - 1\right) \tag{10}$$

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n + \frac{1}{q-c} \cdot \left(\frac{q^n}{c^n} - 1\right) \cdot c^{n+1} \tag{11}$$

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n + \frac{1}{q-c} \cdot \left(q^n \cdot c - c^{n+1}\right) \tag{12}$$

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n + \frac{c}{q-c} \cdot \left(q^n - c^n\right) \tag{13}$$

用 n 替代 $n+1$ 后，我们就可以得到通项公式:

$$a_n = q^{n-1} \cdot a_1 + \frac{c}{q-c} \cdot \left(q^{n-1} - c^{n-1}\right)$$

7.3.5 形如$a_{n+1} = q \cdot a_n^c$

等式两边取对数:

$$a_{n+1} = q \cdot a_n^c \tag{1}$$

$$\lg a_{n+1} = c \cdot \lg q + \lg a_n \tag{2}$$

$$\lg a_{n+1} = c \cdot \lg a_n + \lg q \tag{3}$$

令 $b_n = \lg a_n$，使用待定系数法的公式:

$$b_{n+1} = c \cdot b_n + \lg q \tag{4}$$

$$b_{n+1} = c^n \cdot b_1 + \frac{\lg q}{c-1} \cdot (c^n - 1) \tag{5}$$

$$\lg a_{n+1} = c^n \cdot \lg a_1 + \frac{\lg q}{c-1} \cdot (c^n - 1) \tag{6}$$

$$\lg a_{n+1} = \lg a_1^{c^n} + lgq^{\frac{c^n-1}{c-1}} \tag{7}$$

$$\lg a_{n+1} = \lg a_1^{c^n} \cdot q^{\frac{c^n-1}{c-1}} \tag{8}$$

$$a_{n+1} = a_1^{c^n} \cdot q^{\frac{c^n-1}{c-1}} \tag{9}$$

用 n 替代 $n+1$ 后，我们就可以得到通项公式:

$$a_n = a_1^{c^{n-1}} \cdot q^{\frac{c^{n-1}-1}{c-1}}$$

7.3.6 形如$a_{n+1} = \dfrac{p \cdot a_n}{q \cdot a_n + c}$

等式两边取倒数:

$$a_{n+1} = \frac{p \cdot a_n}{q \cdot a_n + c} \tag{1}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{q \cdot a_n + c}{p \cdot a_n} \tag{2}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{q}{p} + \frac{c}{p \cdot an} \tag{3}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{c}{p} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{q}{p} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

令 $b_n = \dfrac{1}{a_n}$，使用待定系数法的公式:

$$b_{n+1} = \frac{c}{p} \cdot b_{n+1} + \frac{q}{p} \tag{6}$$

$$b_{n+1} = \left(\frac{c}{p}\right)^n \cdot b_1 + \frac{\frac{q}{p}}{\frac{c}{p} - 1} \cdot \left[\left(\frac{c}{p}\right)^n - 1\right] \tag{7}$$

$$b_{n+1} = \frac{c^n}{p^n} \cdot b_1 + \frac{\frac{q}{p}}{\frac{c-p}{p}} \cdot \left(\frac{c^n}{p^n} - 1\right) \tag{8}$$

$$b_{n+1} = \frac{c^n}{p^n} \cdot b_1 + \frac{q}{c-p} \cdot \left(\frac{c^n}{p^n} - 1\right) \tag{9}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{c^n}{p^n} \cdot \frac{1}{a_1} + \frac{q}{c-p} \cdot \left(\frac{c^n}{p^n} - 1\right) \tag{10}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{\frac{c^n}{p^n} \cdot \frac{1}{a_1} + \frac{q}{c-p} \cdot \left(\frac{c^n}{p^n} - 1\right)} \tag{11}$$

用 n 替代 $n+1$ 后，我们就可以得到通项公式:

$$a_n = \frac{1}{\frac{c^{n-1}}{p^{n-1}} \cdot \frac{1}{a_1} + \frac{q}{c-p} \cdot \left(\frac{c^{n-1}}{p^{n-1}} - 1\right)}$$

7.3.7 形如$a_{n+1}+a_n=f(n)$

通过以下推导:

$$a_{n+1}+a_n=f(n) \tag{1}$$

$$a_{n+2}+a_{n+1}=f(n+1) \tag{2}$$

$$a_{n+2}+a_{n+1}-a_{n+1}-an=f(n+1)-f(n) \tag{3}$$

$$a_{n+2}-a_n=f(n+1)-f(n) \tag{4}$$

当 n 为奇数时:

$$a_n=a_1+\sum_{x=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(f(2x)-f(2x-1)\right)$$

对于奇数，可以这样理解:

函数所需的参数 {n}: $1\ 3\ 5\ \cdots\ n-2$

求和所提供的数 {x}: $1\ 2\ 3\ \cdots\ \dfrac{n-1}{2}$

两者的关系: $n=2x-1$

$f(n+1)=f(2x-1+1)=f(2x) \qquad f(n)=f(2x-1)$

当 n 为偶数时:

$$a_n=a_1+\sum_{x=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(f(2x+1)-f(2x)\right)$$

对于偶数，可以这样理解:

函数所需的参数 {n}: $2\ 4\ 6\ \cdots\ n-2$

求和所提供的数 {x}: $1\ 2\ 3\ \cdots\ \dfrac{n-2}{2}$

两者的关系: $n=2x$

$f(n+1)=f(2x+1) \qquad f(n)=f(2x)$

7.3.8 形如$a_{n+1} \times a_n = f(n)$

通过以下推导:

$$a_{n+1} \cdot a_n = f(n) \tag{1}$$

$$a_{n+2} \cdot a_{n+1} = f(n+1) \tag{2}$$

$$\frac{a_{n+2} \cdot a_{n+1}}{a_{n+1} \cdot a_n} = \frac{f(n+1)}{f(n)} \tag{3}$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{f(n+1)}{f(n)} \tag{4}$$

当 n 为奇数时:

$$a_n = a_1 \times \prod_{x=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{f(2x)}{f(2x-1)}$$

对于奇数，可以这样理解:

函数所需的参数 {n}: $1\ 3\ 5\ \cdots\ n-2$

求和所提供的数 {x}: $1\ 2\ 3\ \cdots\ \frac{n-1}{2}$

两者的关系: $n = 2x - 1$

$f(n+1) = f(2x-1+1) = f(2x) \qquad f(n) = f(2x-1)$

当 n 为偶数时:

$$a_n = a_1 \times \prod_{x=1}^{\frac{n-2}{2}} \frac{f(2x+1)}{f(2x)}$$

对于偶数，可以这样理解:

函数所需的参数 {n}: $2\ 4\ 6\ \cdots\ n-2$

求和所提供的数 {x}: $1\ 2\ 3\ \cdots\ \frac{n-2}{2}$

两者的关系: $n = 2x$

$f(n+1) = f(2x+1) \qquad f(n) = f(2x)$

7.4 数列的极限

数列的极限可以通俗的理解为：对于一个数列 $\{a_n\}$，在项数 n 无限增大的过程中项 a_n 无限趋近于的常数。但是这样的形象表述并不严谨，不符合数学的严密性和简洁性，也不利于证明过程的书写，所以我们需要对数列的极限进行严格的定义。

数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义：设 $\{a_n\}$ 是一个数列，如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε，总存在一个正整数 N，使得当 $n > N$ 时，都有 $|a_n - A| < \varepsilon$，则称数列 $\{a_n\}$ 的极限是 A。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

如果一个数列 $\{a_n\}$ 存在极限，我们也可以说数列 a_n 是收敛的。

如果一个数列 $\{a_n\}$ 不存在极限，我们也可以说数列 a_n 是发散的。

常数列的极限等于常数自身：

$$\lim_{x\to\infty}(C) = C$$

两个数列和的极限等于它们的极限之和：

$$\lim_{x\to\infty}[a_n + b_n] = \lim_{x\to\infty} a_n + \lim_{x\to\infty} b_n$$

两个数列差的极限等于它们的极限之差：

$$\lim_{x\to\infty}[a_n - b_n] = \lim_{x\to\infty} a_n - \lim_{x\to\infty} b_n$$

两个数列积的极限等于它们的极限之积：

$$\lim_{x\to\infty}[a_n \cdot b_n] = \lim_{x\to\infty} a_n \cdot \lim_{x\to\infty} b_n$$

两个数列商的极限等于它们的极限之商：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} a_n}{\lim\limits_{x\to\infty} b_n} \qquad \left(\lim_{x\to\infty} b_n \neq 0\right)$$

8 向量

标量指的是只有大小没有方向的量。

向量指的是既有大小又有方向的量。

在数学上，通常用有向线段形象的表示向量，其长度代表向量的长度，其角度代表向量的角度，由于向量并不关心位置，因此长度和角度相同但位置不同的有向线段代表的是同一个向量。

8.1 向量的表示

特别的，我们将长度为 1 的向量称为单位向量。

在二维平面中，我们定义以下两个特殊的单位向量指向两个坐标轴的正方向：

$$\vec{i} = (1,0) \qquad \vec{j} = (0,1)$$

在二维平面中，任何一个向量都可以表示为上述两个单位向量的线性组合：

$$\vec{a} = (x,y)$$

$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

二维平面中的向量，我们通常称为平面向量。

在三维空间中，我们定义以下三个特殊的单位向量指向三个坐标轴的正方向：

$$\vec{i} = (1,0,0) \qquad \vec{j} = (0,1,0) \qquad \vec{k} = (0,0,1)$$

在三维空间中，任何一个向量都可以表示为上述两个单位向量的线性组合：

$$\vec{a} = (x,y,z)$$

$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

三维空间中的向量，我们通常称为空间向量。

8.2 向量的长度

向量的长度可以用向量的模表示。

平面向量的模:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

空间向量的模:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

8.3 向量的角度

向量的角度可以用向量的单位向量表示。

平面向量的单位向量:

$$\vec{a_0} = \left(\frac{x}{|\vec{a}|}\,,\ \frac{y}{|\vec{a}|}\right)$$

空间向量的单位向量:

$$\vec{a_0} = \left(\frac{x}{|\vec{b}|}\,,\ \frac{y}{|\vec{b}|}\,,\ \frac{z}{|\vec{b}|}\right)$$

8.4 向量的加法

平面向量的加法:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2\,,\ y_1 + y_2)$$

空间向量的加法:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2\,,\ y_1 + y_2\,,\ z_1 + z_2)$$

8.5 向量的减法

平面向量的减法:

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2\,,\ y_1 - y_2)$$

空间向量的减法:

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2\,,\ y_1 - y_2\,,\ z_1 - z_2)$$

8.6 向量的数乘

平面向量的数乘:

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot x\,,\ \lambda \cdot y)$$

空间向量的数乘:

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot x\,,\ \lambda \cdot y\,,\ \lambda \cdot z)$$

向量数乘的结合律:

$$m \cdot n \cdot \vec{a} = m \cdot (n \cdot \vec{a})$$

向量数乘的第一分配律:

$$(m + n) \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{a}$$

向量数乘的第二分配律:

$$m \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = m \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b}$$

8.6.1 平面向量共线定理

如果两个平面向量满足以下条件:

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$$

那么这两个向量共线，且实数 λ 是唯一的。

8.6.2 空间向量共面定理

如果三个空间向量满足以下条件:

$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

那么这三个向量共面，且实数对 λ, μ 是唯一的。

8.6.3 三点共线定理

如果平面上两个点满足以下条件，那么这两个点共线：

$$\overrightarrow{OC} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$$

根据平面向量共线定理，三个点共线的条件是：

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \tag{2}$$

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB} - \lambda \cdot \overrightarrow{OA} \tag{3}$$

$$\overrightarrow{OC} = (1 - \lambda) \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB} \tag{4}$$

8.6.4 四点共面定理

如果空间中三个点满足以下条件，那么这三个点共面：

$$\overrightarrow{OD} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$$

根据空间向量共面定理，四个点共面的条件是：

$$\overrightarrow{AD} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \lambda \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + \mu \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right) \tag{2}$$

$$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB} - \lambda \cdot \overrightarrow{OA} + \mu \cdot \overrightarrow{OC} - \mu \cdot \overrightarrow{OA} \tag{3}$$

$$\overrightarrow{OD} = (1 - \lambda - \mu) \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB} + \mu \cdot \overrightarrow{OC} \tag{4}$$

8.7 向量的点乘

向量的点乘：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

需要指出的是，该公式对平面向量和空间向量，乃至更高维向量均是适用的。

向量点乘的交换律：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

向量点乘的分配律：

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

向量点乘**不符合**结合律，但有以下性质：

$$\lambda\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}=(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=(\lambda\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}$$

推导平面向量点乘的坐标形式：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j})\cdot(x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}) \tag{1}$$

$$=(x_1\cdot x_2)\cdot\vec{i}^{\,2}+(y_1\cdot y_2)\cdot\vec{j}^{\,2}+(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1)\cdot\vec{i}\cdot\vec{j} \tag{2}$$

$$=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2 \tag{3}$$

推导空间向量点乘的坐标形式：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k})\cdot(x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k}) \tag{1}$$

$$=(x_1\cdot x_2)\cdot\vec{i}^{\,2}+(y_1\cdot y_2)\cdot\vec{j}^{\,2}+(z_1\cdot z_2)\cdot\vec{k}^{\,2}+ \tag{2}$$

$$(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1)\cdot\vec{i}\cdot\vec{j}+(y_1\cdot z_2+y_2\cdot z_1)\cdot\vec{j}\cdot\vec{k}+(x_1\cdot z_2+x_2\cdot z_1)\cdot\vec{i}\cdot\vec{k} \tag{3}$$

$$=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2 \tag{4}$$

平面向量的点乘:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

立体向量的点乘:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

8.7.1 高维向量的点乘

对于 n 维向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n)$$

高维向量的点乘:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

8.8 向量的夹角

向量的夹角:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

需要指出的是，该公式对平面向量和空间向量，乃至更高维向量均是适用的。

平面向量的夹角:

$$\cos\theta = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}}$$

空间向量的夹角:

$$\cos\theta = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

8.9 向量的旋转

对于向量 $\vec{a} = (x, y)$，如果我们将其旋转 θ，我们可以通过如下过程求解旋转得到的向量 $\vec{b}$。

首先计算向量 $\vec{a}$ 的角度：

$$\vec{a} = (x, y) \tag{1}$$

$$\vec{a_0} = \left(\frac{x}{|\vec{a}|}, \frac{y}{|\vec{a}|}\right) \tag{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} \tag{3}$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{|\vec{a}|} \tag{4}$$

然后推导向量 $\vec{b}$ 的角度：

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha \cdot \cos\theta - \sin\alpha \cdot \sin\theta \tag{5}$$

$$= \frac{x}{|\vec{a}|} \cdot \cos\theta + \frac{y}{|\vec{a}|} \cdot \sin\theta \tag{6}$$

$$\sin(\alpha + \theta) = \sin\alpha \cdot \cos\theta - \cos\alpha \cdot \sin\theta \tag{7}$$

$$= \frac{y}{|\vec{a}|} \cdot \cos\theta + \frac{x}{|\vec{a}|} \cdot \sin\theta \tag{8}$$

最后计算向量 $\vec{b}$ 的坐标：

$$\vec{b_0} = (\cos(\alpha + \theta), \sin(\alpha + \theta)) \tag{9}$$

$$= \left(\frac{x}{|\vec{a}|} \cdot \cos\theta + \frac{y}{|\vec{a}|} \cdot \sin\theta\,,\ \frac{y}{|\vec{a}|} \cdot \cos\theta + \frac{x}{|\vec{a}|} \cdot \sin\theta\right) \tag{10}$$

$$\vec{b} = \vec{b_0} \cdot |\vec{a}| = (x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta\,,\ y \cdot \cos\theta + x \cdot \sin\theta) \tag{11}$$

向量的旋转：

$$\vec{b} = (x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta\,,\ x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta)$$

8.10 向量的平行条件

对于两个平行的向量，我们可以做以下推导：

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 1 \tag{1}$$

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \tag{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} \tag{3}$$

$${x_1}^2 \cdot {x_2}^2 + {y_1}^2 \cdot {y_2}^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot y_1 \cdot y_2 = \left({x_1}^2 + {y_1}^2\right) \cdot \left({x_2}^2 + {y_2}^2\right) \tag{4}$$

$${x_1}^2 \cdot {x_2}^2 + {y_1}^2 \cdot {y_2}^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot y_1 \cdot y_2 = {x_1}^2 \cdot {x_2}^2 + {x_1}^2 \cdot {y_2}^2 + {x_2}^2 \cdot {y_1}^2 + {y_1}^2 \cdot {y_2}^2 \tag{5}$$

$$2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot y_1 \cdot y_2 = {x_1}^2 \cdot {y_2}^2 + {x_2}^2 \cdot {y_1}^2 \tag{6}$$

$${x_1}^2 \cdot {y_2}^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot y_1 \cdot y_2 + {x_2}^2 \cdot {y_1}^2 = 0 \tag{7}$$

$$(x_1 \cdot y_2)^2 - 2 \cdot (x_1 \cdot y_2) \cdot (x_2 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_2) \tag{8}$$

$$(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)^2 = 0 \tag{9}$$

$$x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0 \tag{10}$$

向量平行的条件：

$$x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0$$

8.11 向量的垂直条件

对于两个垂直的向量，我们可以做以下推导：

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0 \tag{1}$$

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0 \tag{2}$$

向量垂直的条件：

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$$

8.12 线段的定比分点公式

设点 P 是直线 P_1P_2 上的一点，若存在一个实数 λ，可以使得 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \cdot \overrightarrow{PP_2}$，那么我们将点 P 称为以 λ 为比分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的定比分点。

设点 $P(x,y)$，点 $P_1(x_1,y_1)$，点 $P_2(x_2,y_2)$，我们可以得到：

$$\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1) \tag{1}$$

$$\overrightarrow{P_1P} = (x_2 - x, y_2 - y) \tag{2}$$

根据定比分点的定义：

$$\overrightarrow{P_1P} = \lambda \cdot \overrightarrow{PP_2} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x) \\ y - y_1 = \lambda \cdot (y_2 - y) \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x = \lambda \cdot x_2 - \lambda \cdot x + x_1 \\ y = \lambda \cdot y_2 - \lambda \cdot y + y_1 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} (1+\lambda) \cdot x = x_1 + \lambda \cdot x_2 \\ (1+\lambda) \cdot y = y_1 + \lambda \cdot y_2 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda} \end{cases} \tag{7}$$

由此我们得到了线段的定比分点公式：

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda} \end{cases}$$

8.13 三角形外心的向量表达

三角形的外心是三条**中垂线**的交点。

三角形外心同时也是三角形外接圆的圆心。

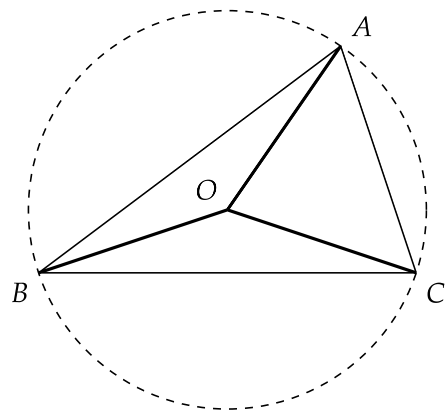


图 63: 三角形的外心

由于点 ABC 均在圆上，且 O 为圆心：

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| \tag{1}$$

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OC}\right|^2 \tag{2}$$

$$\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2 \tag{3}$$

三角形外心的向量表达：

$$\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2$$

8.14 三角形重心的向量表达

三角形的重心是三条**中线**的交点。

设 BC 的中点为 D，延长 GD 至 E，使得 $OD = ED$，连接 BE，连接 CE。

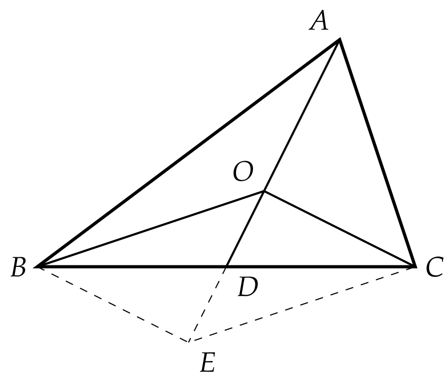


图 64: 三角形的重心

显然我们有以下平行关系：

$$OB \parallel CE \qquad OC \parallel BE \tag{1}$$

由此可以得到：

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OE} \tag{2}$$

根据重心的性质和平行关系：

$$\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{DO} \qquad \overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OD} \tag{3}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{DO} - 2\overrightarrow{OD} = \vec{0} \tag{4}$$

将向量 $\overrightarrow{OE}$ 用 $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ 代换：

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \tag{5}$$

三角形重心的向量表达：

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

8.15 三角形垂心的向量表达

三角形的垂心是三条**垂线**的交点。

将点 A 垂线的垂足记为点 D，将点 B 垂线的垂足记为点 E，将点 C 垂线的垂足记为点 F。

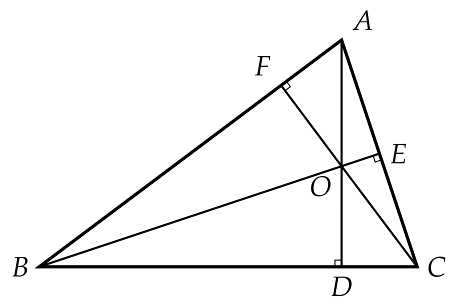


图 65: 三角形的垂心

由于 $AD \perp BC$，根据向量的垂直条件：

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = \vec{0} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{0} \tag{3}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \tag{4}$$

由于 $CE \perp AB$，根据向量的垂直条件：

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0} \tag{5}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) = \vec{0} \tag{6}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{0} \tag{7}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} \tag{8}$$

三角形垂心的向量表达：

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$$

8.16 三角形垂心的向量表达

三角形的垂心是三条**垂线**的交点。

将点 A 垂线的垂足记为点 D，将点 B 垂线的垂足记为点 E，将点 C 垂线的垂足记为点 F。

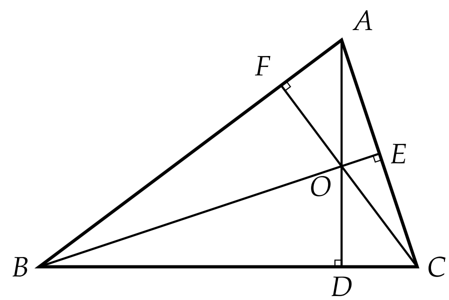


图 66: 三角形的垂心

由于 $AD \perp BC$，根据向量的垂直条件:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = \vec{0} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{0} \tag{3}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \tag{4}$$

由于 $CE \perp AB$，根据向量的垂直条件:

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0} \tag{5}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) = \vec{0} \tag{6}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{0} \tag{7}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} \tag{8}$$

三角形垂心的向量表达:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$$

8.17 三角形的内心的向量表达

三角形的内心是三条**角平分线**的交点。

三角形的内心同时也是三角形内接圆的圆心。

设 BO 与 AC 相交于 E，设 CO 与 AB 相交于 F。

过 A 作 CO 的平行线，与 BO 的延长线相交于 N。

过 A 作 BO 的平行线，与 CO 的延长线相交于 M。

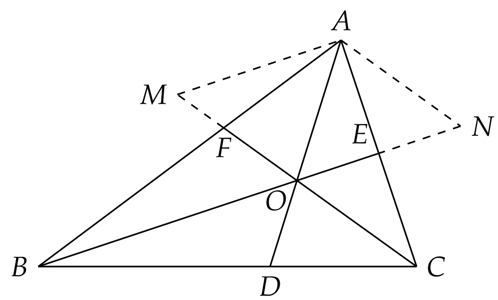


图 67: 三角形的内心

根据内心的性质，内心到边 a 和边 b 的距离相等：

$$\frac{b}{a}=\frac{AC}{BC}=\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}} \tag{1}$$

根据 OC 和 OF 的比例可以得到：

$$\frac{OC}{OF}=\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle AOF}}=\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle BOF}} \tag{2}$$

进一步变形可得：

$$\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle AOF}}=\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle BOF}} \tag{3}$$

$$\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{S_{\triangle AOF}}{S_{\triangle BOF}} \tag{4}$$

$$\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{AF}{BF} \tag{5}$$

将面积代换最终得到：

$$\frac{b}{a}=\frac{AF}{BF} \tag{6}$$

根据内心的性质，内心到边 a 和边 c 的距离相等：

$$\frac{c}{a} = \frac{AB}{CB} = \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle COB}} \tag{7}$$

根据 OB 和 OE 的比例可以得到：

$$\frac{OB}{OE} = \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOE}} = \frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle COE}} \tag{8}$$

进一步变形可得：

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOE}} = \frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle COE}} \tag{9}$$

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle COB}} = \frac{S_{\triangle AOE}}{S_{\triangle COE}} \tag{10}$$

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle COB}} = \frac{AE}{CE} \tag{11}$$

将面积代换最终得到：

$$\frac{c}{a} = \frac{AE}{CE} \tag{12}$$

由于 $AM \parallel ON$ 且 $AN \parallel OM$，所以四边形 $AMON$ 是一个平行四边形：

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} \tag{13}$$

$$= \left(\frac{OM}{CO}\right) \cdot \overrightarrow{CO} + \frac{ON}{BO} \cdot \overrightarrow{BO} \tag{14}$$

$$= \left(\frac{AN}{CO}\right) \cdot \overrightarrow{CO} + \frac{AM}{BO} \cdot \overrightarrow{BO} \tag{15}$$

因为 $AN \parallel CO$ 且 $AM \parallel BO$：

$$\frac{AN}{CO} = \frac{AE}{CE} = \frac{c}{a} \qquad \frac{AM}{BO} = \frac{AF}{BF} = \frac{b}{a} \tag{16}$$

最终代入可得：

$$\overrightarrow{OA} = \frac{c}{a} \cdot \overrightarrow{CO} + \frac{b}{a} \cdot \overrightarrow{BO} \tag{17}$$

$$a \cdot \overrightarrow{OA} = c \cdot \overrightarrow{CO} + b \cdot \overrightarrow{BO} \tag{18}$$

三角形内心的向量表达：

$$a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

9 矩阵

我们将一个由 m 行 n 列组成的矩形数表称为矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

9.1 矩阵的加法和减法

对于矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} \end{pmatrix}$$

矩阵的减法:

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{1,1} - b_{1,1} & a_{1,2} - b_{1,2} \\ a_{2,1} - b_{2,1} & a_{2,2} - b_{2,2} \end{pmatrix}$$

请注意，只有对于同型的矩阵才可以进行加减运算!

矩阵的加法满足加法交换律:

$$A + B = B + A$$

矩阵的加法满足加法结合律:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

9.2 矩阵的数乘

对于矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

矩阵的数乘:

$$c \cdot A = \begin{pmatrix} c \cdot a_{1,1} & c \cdot a_{1,2} \\ c \cdot a_{2,1} & c \cdot a_{2,2} \end{pmatrix}$$

矩阵的数乘满足乘法交换律:

$$c \cdot A = A \cdot c$$

矩阵的数乘满足乘法结合律:

$$c \cdot d \cdot A = c \cdot (d \cdot A) = d \cdot (c \cdot A)$$

矩阵的数乘满足乘法分配律:

$$(c + d) \cdot A = c \cdot A + d \cdot A$$

$$c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B$$

9.3 矩阵的乘法

对于矩阵:

$$A = (a_{ma,na}) \qquad B = (b_{mb,nb})$$

当矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相等，即 $na = mb$ 时，我们定义:

$$A \cdot B = C$$

对于矩阵 C 的行数和列数：

$$C = (c_{ma,nb})$$

即行数为矩阵 A 的行数，列数为矩阵 B 的列数。（行看 A，列看 B）

对于矩阵 C 的值（其中 $r = na = mb$）：

$$c_{i,j} = \sum_{x=1}^{r} a_{i,x} \cdot b_{x,j}$$

即 $c_{i,j}$ 等于矩阵 A 的第 i 个行向量和第 j 个列向量的内积。（A 的第 i 行乘以 B 的第 j 列）

矩阵的乘法**不满足**乘法交换律!

矩阵的乘法满足乘法结合律:

$$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

矩阵的乘法满足乘法分配律:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$

9.4 矩阵的转置

我们将原矩阵的行和列互换所产生的矩阵称为转置矩阵，这一过程称为转置。

矩阵 A 的转置矩阵记作 A^T。

考虑以下例子：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

除了行列的互换，我们还可以将转置理解为矩阵关于主对角线的翻折。

矩阵的转置满足以下运算规律：

$$(A^T)^T = A$$

$$(c \cdot A)^T = c \cdot A^T$$

$$(AB)^T = B^T \cdot A^T$$

10 行列式

行列式是一个由 $n \times n$ 个数组成的特定运算的符号，本质是一个数：

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{vmatrix}$$

我们将一个由 n 行 n 列组成的行列式称为 n 阶行列式。

10.1 二阶行列式

二阶行列式的运算法则：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

10.1.1 二元一次方程组的行列式解法

对于二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases}$$

我们定义行列式 D：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

使用常数项 c 所在的一列替换 x 的参数 a 所在的一列，得到行列式 D_x：

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

使用常数项 c 所在的一列替换 y 的参数 b 所在的一列，得到行列式 D_y：

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

当 $D \neq 0$ 时，我们可以得到方程组的解：

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$$

当 $D = 0$ 时，若 $D_x \neq 0$ 或 $D_y \neq 0$，方程组无解。

当 $D = 0$ 时，若 $D_x = 0$ 且 $D_y = 0$，方程组有无穷多解。

10.2 三阶行列式

三阶行列式的运算法则：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

10.2.1 三元一次方程组的行列式解法

对于三元一次方程组：

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z = d_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z = d_2 \\ a_3 \cdot x + b_3 \cdot y + c_3 \cdot z = d_3 \end{cases}$$

我们定义系数行列式 D：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

使用常数项 d 所在的一列替换 x 的参数 a 所在的一列，得到行列式 D_x：

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

使用常数项 d 所在的一列替换 y 的参数 b 所在的一列，得到行列式 D_y：

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

使用常数项 d 所在的一列替换 z 的参数 c 所在的一列，得到行列式 D_z：

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

当 $D \neq 0$ 时，我们可以得到方程组的解：

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \\ z = \dfrac{D_z}{D} \end{cases}$$

当 $D = 0$ 时，方程组可能是无解或无穷多解，具体情况需要代入数字验证。

10.3 利用行列式求解三角形面积

对于 $\triangle ABC$，如果三角形的顶点坐标分别为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$。

三角形的面积公式：

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

需要注意的是：

如果顶点 ABC 按逆时针排列，行列式为正值。

如果顶点 ABC 按顺时针排列，行列式为负值。

10.4 代数余子式

对于行列式 D 和该行列式中的一个元素 u，我们将行列式 D 中划去元素 u 所在的行和列后，剩下的元素重新组成的行列式，称为元素 u 的余子式。在余子式的基础上添加元素所对应的符号，则称为代数余子式。

其中元素和符号的对应关系如下：

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

代数余子式通常记作元素对应的大写字母并附加相同下标，例如 a_1 的代数余子式 A_1。

请考虑以下例子：

对于行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

我们有代数余子式：

$$A_1 = +\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad B_2 = +\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式的值等于其任意一行或任意一列中元素与其对应代数余子式的乘积之和。

11 直线方程

11.1 点方向式方程

需要求解直线 l 的方程，已知直线过点 P，且平行于向量 $\vec{d}$，

此时我们适合使用点方向式方程表示这条直线。

我们已知:

$$P(x_0, y_0) \qquad \vec{d} = (u, v)$$

对于直线 l 上任意一点 $Q(x, y)$，我们可以求得向量 $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0)$，由于向量 $\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{d}$，根据向量的平行公式，我们可以建立方程。

点方向式方程:

$$v \cdot (x - x_0) - u \cdot (y - y_0) = 0$$

其中，平行于直线 l 的向量 $\vec{d}$ 被称为方向向量（direction vector）。

为了更加方便的构造方程，点方向式方程还有以下两种孪生形式:

1. 通过点 $P(x_0, y_0)$ 和方向向量 $\vec{d} = (u, v)$ 构造方程:

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v}$$

2. 通过点 $P(x_1, y_1)$ 和点 $Q(x_2, y_2)$ 构造方程:

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

这两种形式虽然可以更加快速的构建方程，但由于需要讨论分母是否为 0，所以在解决复杂问题时并不好用，但数学教材仍然将上述的第一种形式作为点方向式的定义。

11.2 点法向式方程

需要求解直线 l 的方程，已知直线过点 P，且垂直于向量 $\vec{n}$，

此时我们适合使用点法向式方程表示这条直线。

我们已知：

$$P(x_0, y_0) \qquad \vec{n} = (u, v)$$

对于直线 l 上任意一点 $Q(x, y)$，我们可以求得向量 $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0)$，由于向量 $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{n}$，根据向量的垂直公式，我们可以建立方程。

点法向式方程：

$$u \cdot (x - x_0) + v \cdot (y - y_0) = 0$$

其中，垂直于直线 l 的向量 $\vec{n}$ 被称为法向量（normal vector）。

11.3 点斜式方程

对于一次函数，我们学习过斜率 k 的概念，斜率（slope）代表了直线的陡峭程度。

直线 l 与 x 轴间的最小正角称为直线 l 的倾斜角，倾斜角 α 的取值范围 $[\,0, \pi\,)$

当 $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$ 时，$k = \tan\alpha$

当 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ 时，k 不存在

当 $k < 0$ 时，$\alpha = \arctan(k) + \pi$

当 $k > 0$ 时，$\alpha = \arctan(k)$

当 $k = 0$ 时，$\alpha = 0$

需要求解直线 l 的方程，已知过点 $P(x_0, y_0)$，且已知直线与 x 轴的夹角 α，或已知直线的斜率 k，此时我们适合使用点斜式方程表示这条直线。

点斜式方程：

$$y - y_0 = (x - x_0) \cdot \tan\alpha$$

$$y - y_0 = (x - x_0) \cdot k$$

11.4 截距式方程

如果我们已知直线 l 在 x 轴及 y 轴上的截距，那么此时适合用截距式方程表示这条直线。

我们已知直线在 x 轴上的截距为 a，在 y 轴上的截距为 b，显然这条直线过点 $A(a, 0)$，点 $B(0, b)$，代入点方向式方程的第二种孪生形式：

$$\frac{x-a}{a-0} = \frac{y-0}{0-b} \tag{1}$$

$$\frac{x-a}{a} = -\frac{y}{b} \tag{2}$$

$$\frac{x-a}{a} + \frac{y}{b} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{a}{a} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \tag{5}$$

截距式方程：

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

11.5 斜截式方程

如果我们已知直线 l 的斜率 k 和在 y 轴上的截距 b，我们可以直接使用初中所学过的一次函数的形式表达这条直线，这种形式在直线方程中被称为斜截式方程。

由于直线方程中 x 和 y 间的关系是平等的，所以我们可以调换 x 和 y 的位置，得到另一种形式。

斜截式方程 1：

$$y = kx + b$$

斜截式方程 2：

$$x = ty + b$$

对于第一种情况，参数 b 代表直线在 y 轴上的截距。

对于第二种情况，参数 b 代表直线在 x 轴上的截距。

11.6 一般式方程

直线方程的各种形式实际上均可以化为关于 x，y 的二元一次方程。

我们称这种形式为直线的一般式方程:

$$ax + by + c = 0$$

对于直线方程 $l : ax + by + c = 0$:

直线 l 的方向向量:

$$\vec{d} = (-b, a) \qquad \vec{d} = (b, -a)$$

直线 l 的法向量:

$$\vec{n} = (a, b) \qquad \vec{n} = (-a, -b)$$

直线 l 的斜率:

$$k = -\frac{a}{b}$$

直线 l 经过点:

$$A(0, -\frac{c}{b}) \qquad B(-\frac{c}{a}, 0)$$

11.7 两条直线的关系

我们设两条直线的方程为:

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

联立方程，可以得到方程组:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases}$$

如果方程组有一组解，代表两条直线相交，存在一个交点。

如果方程组无解，代表两条直线平行，没有交点。

如果方程组有无穷解，代表两条直线重合，存在无穷多个交点。

我们可以应用行列式来解方程组:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}$$

当 $a_1b_2 \neq a_1b_2$ 时，方程有唯一解，两条直线相交，交点 $P(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D})$

当 $a_1b_2 = a_1b_2$ 时，若 $D_x \neq 0$ 或 $D_y \neq 0$，方程无解，两条直线平行。

当 $a_1b_2 = a_1b_2$ 时，若 $D_x = 0$ 或 $D_y = 0$，方程有无穷解，两条直线重合。

11.8 两条直线的夹角

我们设两条直线的方程为:

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

两条直线的方向向量分别为 $\vec{d}_1 = (-b_1, a_1)$ $\vec{d}_2 = (-b_2, a_2)$。

因为两条直线的夹角的取值范围为 $[0, \frac{\pi}{2}]$,

所以两条直线的夹角公式应当是两条直线所对应的方向向量夹角的绝对值。

两条直线的夹角公式:

$$\cos\alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2} \cdot \sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2}}$$

特别的，当 $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ 时，两条直线垂直。

由于 $k_1 \cdot k_2 = \frac{a_1a_2}{b_1b_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{b_1b_2} - 1$

所以当两条直线垂直时，斜率满足:

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

11.9 点在直线上的射影点

已知点 $P(i,j)$ 和直线 $l: ax+by+c=0$，求解点在直线上的射影点 H。

首先构造直线 l_{PH} 的方程:

$$l_{PH}: -bx+ay+d=0 \tag{1}$$

由于点 P 在直线 l_{PH}，代入可得:

$$-bi+aj+d=0 \tag{2}$$

$$d=bi-aj \tag{3}$$

从而得到 l_{PH} 的方程:

$$l_{PH}: -bx+ay+(bi-aj)=0 \tag{4}$$

联立直线 l 和直线 l_{PH}，建立方程组:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ -bx+ay+(bi-aj)=0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} ax+by=-c \\ -bx+ay=-(bi-aj) \end{cases} \tag{6}$$

通过行列式求解方程组:

$$D=a^2+b^2 \tag{7}$$

$$D_x=-ac+b\cdot(bi-aj) \tag{8}$$

$$D_y=-bc-a\cdot(bi-aj) \tag{9}$$

射影点 H 的坐标:

$$H\left(\frac{-ac+b\cdot(bi-aj)}{a^2+b^2}\ ,\ \frac{-bc-a\cdot(bi-aj)}{a^2+b^2}\right)$$

11.10 点关于直线的对称点

已知点 $P(i,j)$ 和直线 $l: ax+by+c=0$，求解点关于直线的对称点 Q。

设点 P 在直线 l 上的射影点为 H，显然我们有：

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} &(1)\\
&= \overrightarrow{OP} + 2\cdot\overrightarrow{PH} &(2)\\
&= \overrightarrow{OP} + 2\cdot\left(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP}\right) &(3)\\
&= \overrightarrow{OP} + 2\cdot\overrightarrow{OH} - 2\cdot\overrightarrow{OP} &(4)\\
&= 2\cdot\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} &(5)\\
&= 2\cdot\left(\frac{-ac+b\cdot(bi-aj)}{a^2+b^2}\ ,\ \frac{-bc-a\cdot(bi-aj)}{a^2+b^2}\right) - (i,j) &(6)\\
&= \left(2\cdot\frac{-ac+b\cdot(bi-aj)}{a^2+b^2} - i\ ,\ 2\cdot\frac{-bc-a\cdot(bi-aj)}{a^2+b^2} - j\right) &(7)
\end{aligned}$$

进一步变形可以得到：

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OQ} &= \left(\frac{-2ac+2b^2i-2abj}{a^2+b^2} - i\ ,\ \frac{-2bc+2a^2j-abi}{a^2+b^2} - j\right) &(8)\\
&= \left(\frac{-2ac+2b^2i-2abj-a^2i-b^2i}{a^2+b^2}\ ,\ \frac{-2bc+2a^2j-2abi-a^2j-b^2j}{a^2+b^2}\right) &(9)\\
&= \left(\frac{-2ac-2abj-a^2i+b^2i}{a^2+b^2}\ ,\ \frac{-2bc-2abi-b^2j+a^2j}{a^2+b^2}\right) &(10)\\
&= \left(\frac{-2a^2i-2abj-2ac+a^2i+b^2i}{a^2+b^2}\ ,\ \frac{-2b^2j-2abi-2bc+b^2j+a^2j}{a^2+b^2}\right) &(11)\\
&= \left(\frac{-2a\cdot(ai+bj+c)+i\cdot(a^2+b^2)}{a^2+b^2}\ ,\ \frac{-2b\cdot(ai+bj+c)+j\cdot(a^2+b^2)}{a^2+b^2}\right) &(12)\\
&= \left(i-\frac{2a\cdot(ai+bj+c)}{a^2+b^2}\ ,\ j-\frac{2b\cdot(ai+bj+c)}{a^2+b^2}\right) &(13)
\end{aligned}$$

对称点 Q 的坐标：

$$Q\left(i-\frac{2a\cdot(ai+bj+c)}{a^2+b^2}\ ,\ j-\frac{2b\cdot(ai+bj+c)}{a^2+b^2}\right)$$

11.11 点到直线的距离

已知点 $P(i,j)$ 和直线 $l: ax+by+c=0$，求解点到直线的距离 d。

设点 H 为 P 在直线 l 上的射影点，由于距离 d 等于线段 PH 的长度：

$$d^2 = \left[\frac{-ac + b \cdot (bi - aj)}{a^2 + b^2} - i^2\right]^2 + \left[\frac{-bc - a \cdot (bi - aj)}{a^2 + b^2} - j^2\right]^2 \tag{1}$$

$$d^2 = \left[\frac{-ac + b^2 i - abj - a^2 i - b^2 i}{a^2 + b^2}\right]^2 + \left[\frac{-bc + a^2 j - abi - a^2 j - b^2 j}{a^2 + b^2}\right]^2 \tag{2}$$

$$d^2 = \left[\frac{-ac - abj - a^2 i}{a^2 + b^2}\right]^2 + \left[\frac{-bc - abi - b^2 j}{a^2 + b^2}\right]^2 \tag{3}$$

$$d^2 = \frac{a^2 \cdot (-c - bj - ai)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2 \cdot (-c - ai - bj)^2}{(a^2 + b^2)^2} \tag{4}$$

$$d^2 = \frac{(a^2 + b^2) \cdot (-c - bj - ai)^2}{(a^2 + b^2)^2} \tag{5}$$

$$d^2 = \frac{(-c - bj - ai)^2}{a^2 + b^2} \tag{6}$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{7}$$

点到直线的距离公式：

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

11.12 两条平行线间的距离

对于两条平行的直线:

$$l_1 : ax + by + c_1 = 0$$
$$l_2 : ax + by + c_2 = 0$$

设点 $P(u, v)$ 在直线 $l_1 : ax + by + c_1 = 0$ 上，代入可得:

$$a \cdot u + b \cdot v = -c_1$$

根据两点之间距离公式，点 P 到直线 l_2 的距离为:

$$d = \frac{|au + bv + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c_1 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

两条平行线之间的距离公式:

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

12 圆锥曲线方程

12.1 圆的方程

圆的定义：到平面内到一个定点的距离等于常数的点的轨迹称为圆。

圆的定义中，定点 O 被称为圆心，定长 r 称为半径。

设圆心 $O(a,b)$，设半径为 r。

圆的方程可以表达为：

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

圆的曲线图像：

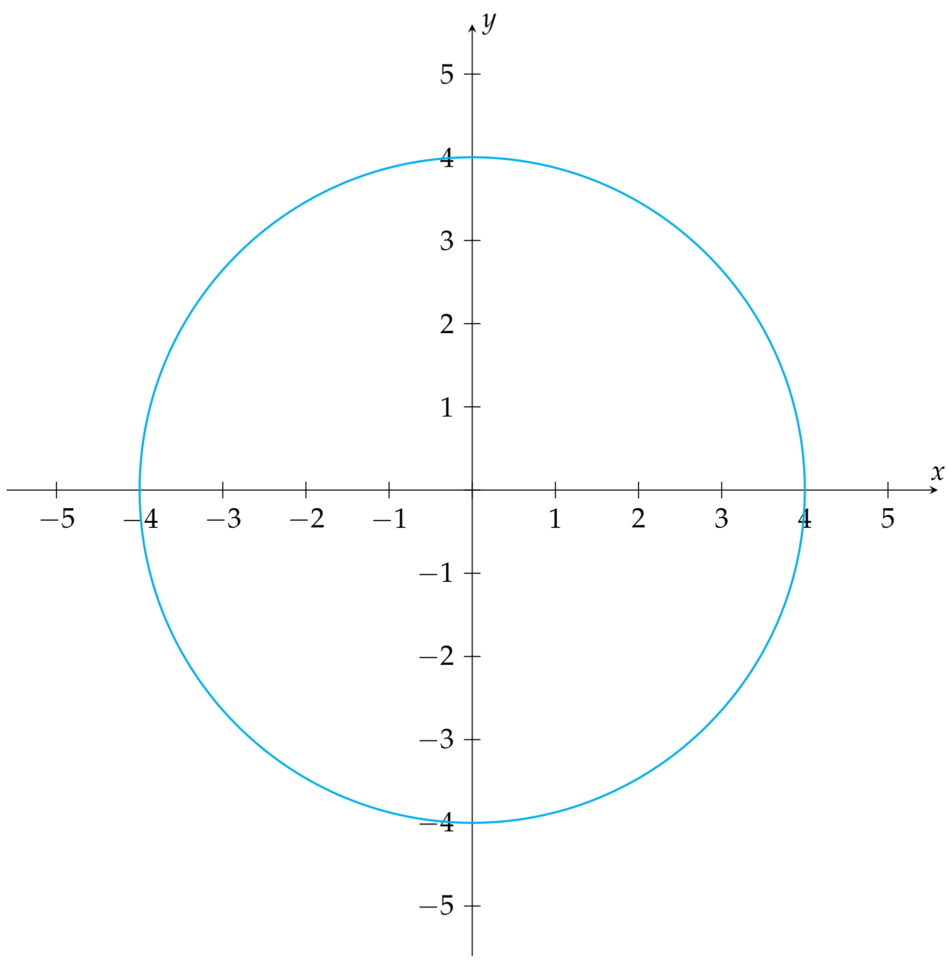


图 68: 圆的图像

接下来将由此开始推导圆的相关性质。

12.1.1 圆的标准方程

圆的标准方程（圆心过 $O(a,b)$）:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

圆的标准方程（圆心过 $O(0,0)$）:

$$x^2+y^2=r^2$$

圆的图像如下:

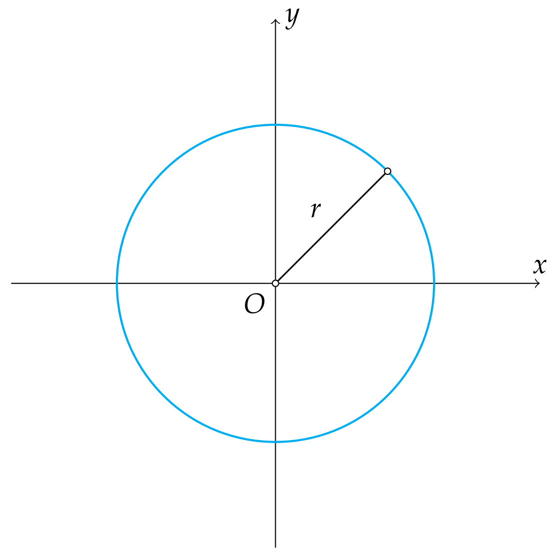


图 69: 圆的图像

圆的标准方程可以推导如下:

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \tag{1}$$

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2 \tag{2}$$

由此证明了圆的标准方程。

12.1.2 圆的一般方程

圆的一般方程:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

圆的一般方程可以推导如下:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{1}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \tag{3}$$

定义代换变量 D 替代 x 的一次项系数:

$$D = -2a \tag{4}$$

定义代换变量 E 替代 y 的一次项系数:

$$E = -2b \tag{5}$$

定义代换变量 F 替代常数项:

$$F = a^2 + b^2 - r^2 \tag{6}$$

将三个变量代入可得:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \tag{7}$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{8}$$

由此证明了圆的一般方程。

12.1.3 圆的一般方程的判别式

圆的一般方程的判别式:

$$r^2 = \frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

由于只有圆的一般方程的参数能使得半径的平方大于零时，此方程才能表达一个圆。

因此使用圆的一般方程时必须通过判别式是否大于零，判断该方程是否有意义。

圆的一般方程的判别式的推导如下:

$$F = a^2+b^2-r^2 \tag{1}$$

$$r^2 = F-a^2-b^2 \tag{2}$$

根据代换变量 D 的定义:

$$D = -2a \;\Rightarrow\; a = -\frac{D}{2} \tag{3}$$

根据代换变量 E 的定义:

$$E = -2b \;\Rightarrow\; b = -\frac{E}{2} \tag{4}$$

将其代入可得:

$$r^2 = \left(-\frac{D}{2}\right)^2 + \left(-\frac{E}{2}\right)^2 - F \tag{5}$$

$$r^2 = \frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F \tag{6}$$

$$r^2 = \frac{D^2+E^2-4F}{4} \tag{7}$$

由此证明了圆的一般方程的判别式。

12.1.4 圆和点的关系

圆和点的关系分为三种：在圆上，在圆内，在圆外。

圆和点的关系可以通过点到圆心的距离判断。

对于以下的圆 C 和点 P:

$$P(x_0, y_0) \qquad C : (x-a)^2 + (y-b) = r^2 \tag{1}$$

当点到圆心的距离小于半径时，点处于圆内:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b) < r^2$$

当点到圆心的距离等于半径时，点处于圆上:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b) = r^2$$

当点到圆心的距离大于半径时，点处于圆上:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b) > r^2$$

以上讨论了圆和点的关系。

12.1.5 圆和直线的关系

圆和直线的关系可以分为三种：与圆相交，与圆相切，与圆相离。

圆和直线的关系可以通过直线到圆心的距离判断。

对于以下的圆 C 和直线 L:

$$L : Ax + By + C = 0 \qquad C : (x-a)^2 + (y-b) = r^2 \tag{1}$$

当直线到圆心的距离小于半径时，直线与圆相交:

$$\frac{(Aa + Bb + C)^2}{A^2 + B^2} < r^2$$

当直线到圆心的距离等于半径时，直线与圆相切:

$$\frac{(Aa + Bb + C)^2}{A^2 + B^2} = r^2$$

当直线到圆心的距离大于半径时，直线与圆相离:

$$\frac{(Aa + Bb + C)^2}{A^2 + B^2} > r^2$$

以上讨论了圆和直线的关系。

12.1.6 圆和圆的关系

圆和圆的关系可以分为五种：相离，外切，相交，内切，内含。

圆和圆的关系可以通过圆心间的距离判断。

对于以下的圆 C_1 和圆 C_2：

$$C_1 : (x-a_1)^2 + (y-b_1) = r_1^2 \qquad C_2 : (x-a_2)^2 + (y-b_2) = r_2^2 \tag{1}$$

当圆心距满足大于半径和时，此时两个圆的关系为相离：

$$(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 > (r_1+r_2)^2$$

当圆心距满足等于半径和时，此时两个圆的关系为外切：

$$(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 = (r_1+r_2)^2$$

当圆心距在半径和差之间时，此时两个圆的关系为相交：

$$(r_1-r_2)^2 < (a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 < (r_1+r_2)^2$$

当圆心距满足等于半径差时，此时两个圆的关系为内切：

$$(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 = (r_1-r_2)^2$$

当圆心距满足小于半径差时，此时两个圆的关系为内含：

$$(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 < (r_1-r_2)^2$$

可以证明，两个圆的公共切线数量：

圆和圆的关系	相离	外切	相交	内切	内含
公切线的数量	4	3	2	1	0

表 12: 圆的公切线数量

以上讨论了圆和圆的关系

12.1.7 圆的切线方程

圆的切线方程（圆心过 $O(a,b)$ ）:

$$(x-a)\cdot(x_0-a)+(y-b)\cdot(y_0-b)=0 \tag{1}$$

圆的切线方程（圆心过 $O(0,0)$ ）:

$$x\cdot x_0+y\cdot y_0=0 \tag{2}$$

已知一个圆，若圆心为 $O(a,b)$，求解过该圆上一点 $M(x_0,y_0)$ 的切线 l 的直线方程:

直线 l 的方向量可以表达为:

$$\vec{n}=\overrightarrow{OM} \tag{3}$$

$$\vec{n}=(x_0-a,y_0-b) \tag{4}$$

直线 l 的点法向式方程可以表达为:

$$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0 \tag{5}$$

对直线方程化简可得:

$$x\cdot x_0-x_0^2-ax+ax_0+y\cdot y_0-y_0^2-by+by_0=0 \tag{6}$$

$$x\cdot x_0-ax-ax_0+a^2+y\cdot y_0-by-by_0+b^2=x_0^2-2ax_0+a^2+y_0^2-2by_0+b^2 \tag{7}$$

$$x\cdot x_0-ax-ax_0+a^2+y\cdot y_0-by-by_0+b^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2 \tag{8}$$

由圆的标准方程可知:

$$x\cdot x_0-ax-ax_0+a^2+y\cdot y_0-by-by_0+b^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2 \tag{9}$$

$$x\cdot x_0-ax-ax_0+a^2+y\cdot y_0-by-by_0+b^2=r^2 \tag{10}$$

$$x\cdot(x_0-a)-a\cdot(x_0-a)+y\cdot(y_0-b)-b\cdot(y_0-b)=r^2 \tag{11}$$

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2 \tag{12}$$

由此证明了圆的切线方程。

12.2 椭圆的方程

椭圆的定义：到平面上两个定点的距离和等于常数的点的轨迹称为椭圆。

椭圆的定义中，定点 F_1, F_2 被称为焦点，而两个焦点间的距离 $|F_1F_2|$ 被称为焦距。

设焦点 $F_1(x_1, y_1), F_2(x_2, y_2)$，设点到两焦点的距离和为 $2a$。

椭圆的方程可以表达为：

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=2a$$

椭圆的曲线图像：

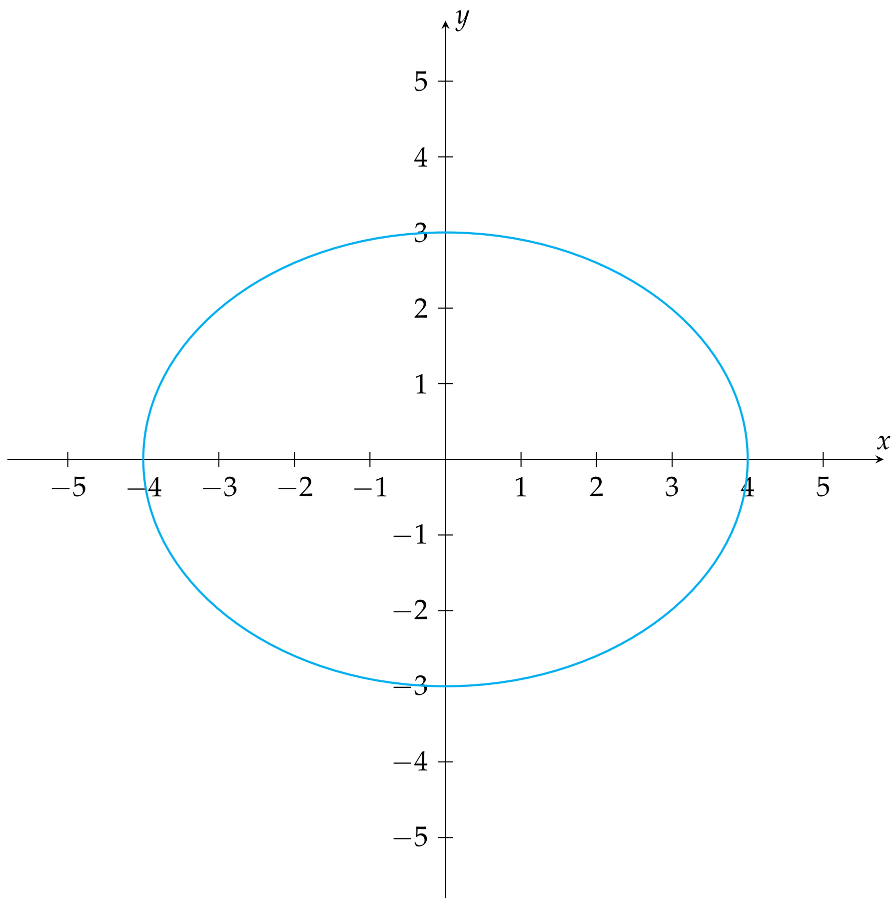


图 70: 椭圆的图像

接下来将由此开始研究椭圆的相关性质。

12.2.1 椭圆的标准方程

特别的，如果两个焦点均在 x 轴上，且椭圆中心为原点 $(0,0)$ 时：
我们可以设焦距为 $2c$，点到两焦点的距离和为 $2a$，焦点 $F_1(-c,0)$，焦点 $F_2(c,0)$。

我们可以进行以下推导：

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \tag{1}$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{2}$$

$$(x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{3}$$

$$x^2+c^2-2xc+y^2=4a^2+x^2+c^2+2xc+y^2-4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{4}$$

$$4a^2+4xc=4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{5}$$

$$a^2+xc=a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{6}$$

$$a^4+2xc^2+x^2c^2=a^2\cdot((x+c)^2+y^2) \tag{7}$$

$$a^4+x^2c^2-x^2a^2-y^2a^2-a^2c^2=0 \tag{8}$$

$$a^4+x^2(c^2-a^2)-y^2a^2-a^2c^2=0 \tag{9}$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2 \tag{10}$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \tag{11}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{12}$$

当椭圆中心为原点，焦点在 x 轴上时，椭圆的方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \qquad (a>c) \tag{13}$$

当椭圆中心为原点，焦点在 y 轴上时，椭圆的方程：

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2-c^2}=1 \qquad (a>c) \tag{14}$$

为了简化方程，定义以代换变量 $b^2=a^2-c^2$，将其代入即可得到椭圆的标准方程。

椭圆的标准方程（焦点位于 x 轴）：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

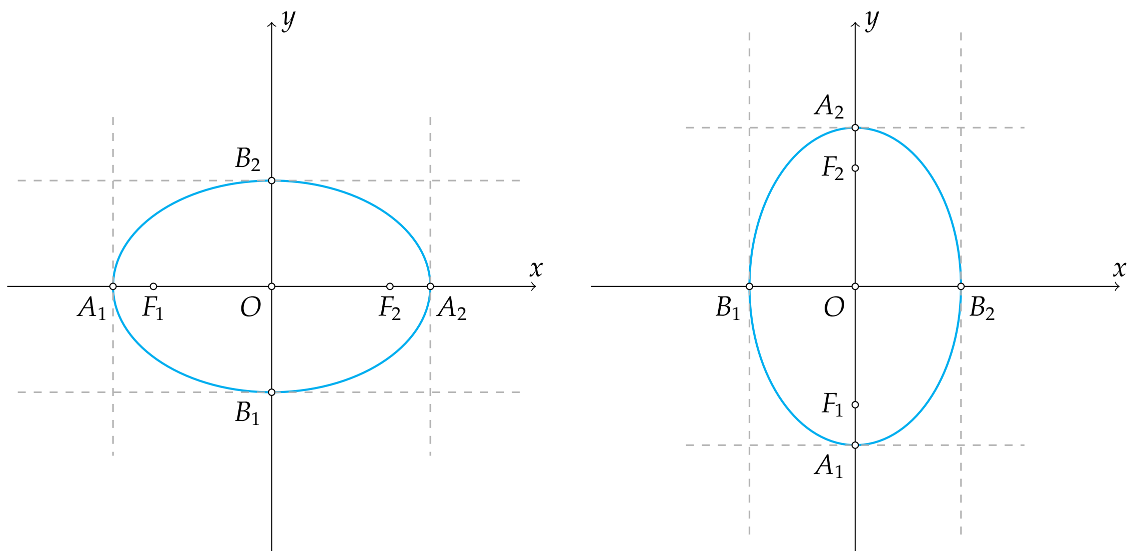
椭圆的标准方程（焦点位于 y 轴）：

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

椭圆中长度为 $2a$ 的线段 A_1A_2 称为椭圆的长轴，因此标准方程中的 a 称为椭圆的半长轴。

椭圆中长度为 $2b$ 的线段 B_1B_2 称为椭圆的短轴，因此标准方程中的 b 称为椭圆的半短轴。

椭圆的图像如下：



(a) 焦点在 x 轴上的椭圆 (b) 焦点在 y 轴上的椭圆

图 71: 椭圆的图像

椭圆中有以下重要关系：

$$c^2 = a^2 - b^2$$

即半焦距的平方是半长轴和半短轴的平方差。

12.2.2 椭圆的焦点三角形

椭圆的焦点三角形指的是椭圆上任意一点与椭圆两焦点组成的三角形。

椭圆的焦点三角形的示意图:

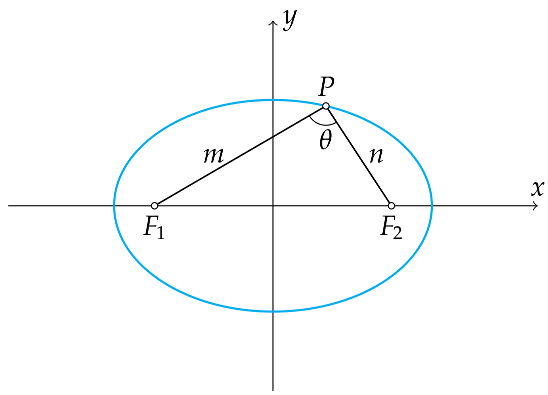


图 72: 椭圆的焦点三角形

椭圆上有一点 P，对于焦点三角形 $\triangle PF_1F_2$:

$$PF_1 = m \qquad PF_2 = n \qquad F_1F_2 = 2c \qquad \angle F_1PF_2 = \theta \tag{1}$$

根据余弦定理可以得到:

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{m^2+n^2-(2c)^2}{2mn} &(2)\\
&= \frac{(m+n)^2-(2c)^2-2mn}{2mn} &(3)\\
&= \frac{(2a)^2-(2c)^2-2mn}{2mn} &(4)\\
&= \frac{4a^2-4c^2-2mn}{2mn} &(5)\\
&= \frac{4(a^2-c^2)-2mn}{2mn} &(6)\\
&= \frac{4b^2-2mn}{2mn} &(7)\\
&= \frac{2b^2-mn}{mn} &(8)
\end{aligned}$$

由此得到了一个角 θ 的余弦和半短轴 b 以及焦半径 m 和焦半径 n 的关系式。

对该式进行变换可得:

$$\cos\theta = \frac{2b^2 - mn}{mn} \tag{9}$$

$$mn \cdot \cos\theta = 2b^2 - mn \tag{10}$$

$$mn \cdot \cos\theta + mn = 2b^2 \tag{11}$$

$$mn \cdot (\cos\theta + 1) = 2b^2 \tag{12}$$

$$mn = \frac{2b^2}{\cos\theta + 1} \tag{13}$$

根据三角形面积公式:

$$S = \frac{1}{2} \cdot mn \cdot \sin\theta \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2b^2}{\cos\theta + 1} \cdot \sin\theta \tag{15}$$

$$= \frac{b^2}{\cos\theta + 1} \cdot \sin\theta \tag{16}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} \cdot b^2 \tag{17}$$

$$= \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot b^2 \tag{18}$$

椭圆的焦点三角形的面积公式:

$$S = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot b^2$$

由此证明了椭圆的焦点三角形的面积公式。

12.2.3 椭圆和点的关系

椭圆和点的关系有三种：在椭圆上，在椭圆内，在椭圆外。

椭圆和点的关系的示意图：

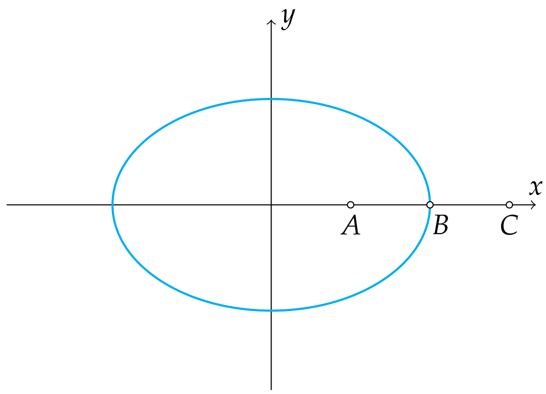


图 73: 椭圆和点的关系

当点在椭圆内时（A）：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$$

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}<1$$

当点在椭圆上时（B）：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

当点在椭圆外时（C）：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$$

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}>1$$

椭圆和点的关系的示意图中，点 A 是在椭圆内，点 B 是在椭圆上，点 C 是在椭圆外。

椭圆和点的关系中，点在椭圆内时为小于，点在椭圆外时为大于。

当点在椭圆内时的示意图:

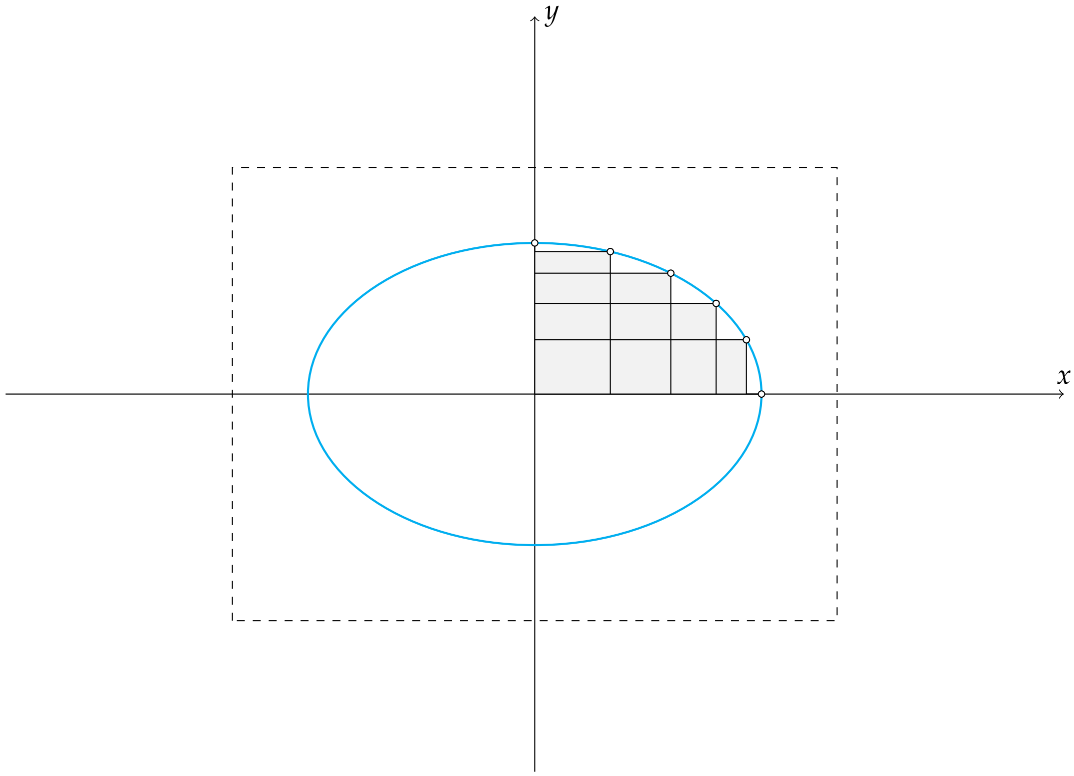


图 74: 点在椭圆内时的示意图

设椭圆上任意一点 (x_0, y_0)，设平面上任意一点 (x, y)。

满足下列不等式组的点为椭圆的内部:

$$\begin{cases} |x| \leq |x_0| \\ |y| \leq |y_0| \end{cases} \quad \text{（等号不能同时成立）} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x^2 \leq x_0^2 \\ y^2 \leq y_0^2 \end{cases} \quad \text{（等号不能同时成立）} \tag{2}$$

将以上结论代入椭圆的标准方程可知:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \tag{3}$$

由此证明了点在椭圆内部的公式。

当点在椭圆外时的示意图:

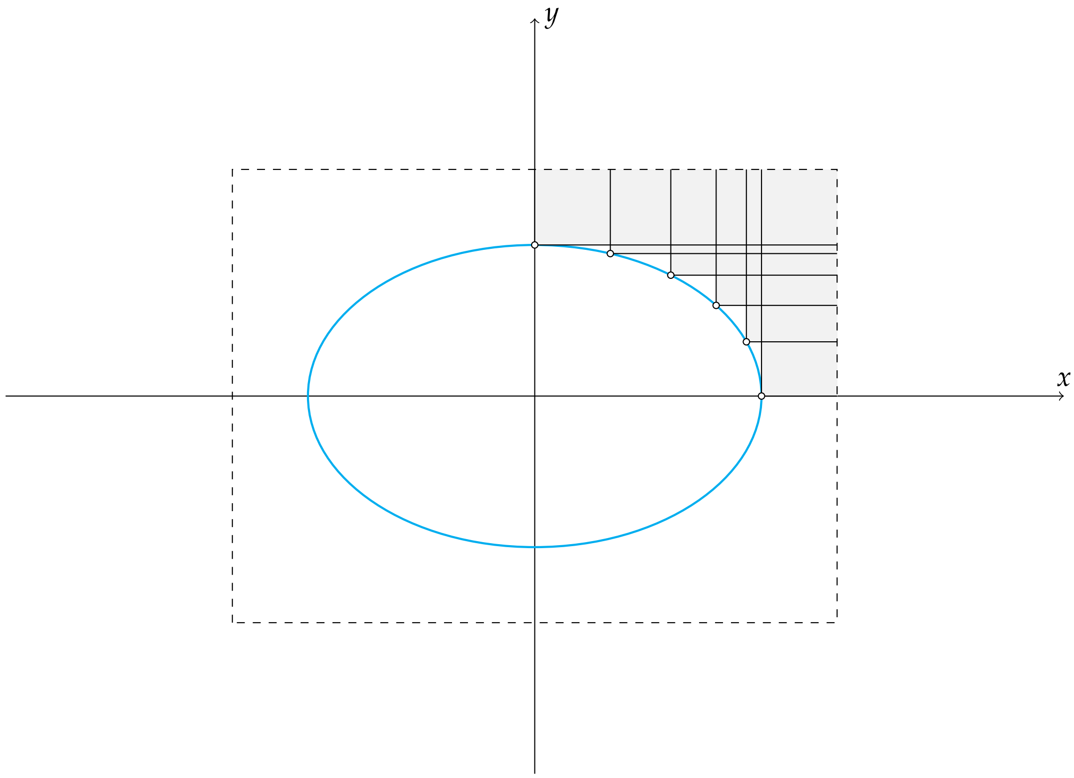


图 75: 点在椭圆外时的示意图

设椭圆上任意一点 (x_0, y_0)，设平面上任意一点 (x, y)。

满足下列不等式组的点为椭圆的外部:

$$\begin{cases} |x| \geq |x_0| \\ |y| \geq |y_0| \end{cases} \quad (\text{等号不能同时成立}) \tag{1}$$

$$\begin{cases} x^2 \geq x_0^2 \\ y^2 \geq y_0^2 \end{cases} \quad (\text{等号不能同时成立}) \tag{2}$$

将以上结论代入椭圆的标准方程可知:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1 \tag{3}$$

由此证明了点在椭圆外部的公式。

12.2.4 等轴椭圆

等轴椭圆的定义是半短轴和半焦距相等的椭圆。

等轴椭圆的定义的数学表达：

$$b = c$$

等轴椭圆的示意图：

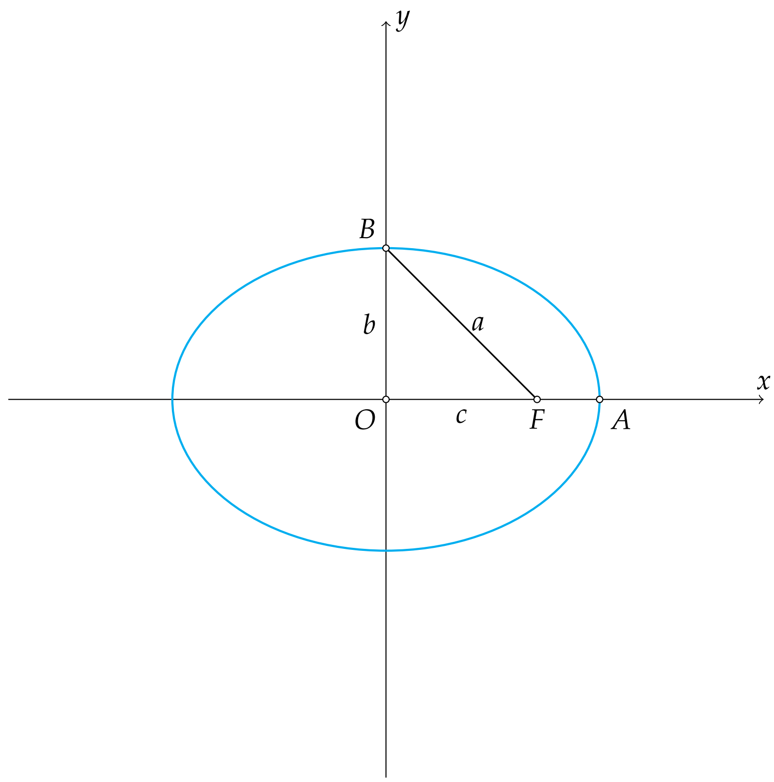


图 76: 等轴椭圆

等轴椭圆的半长轴可以表达为：

$$a = \sqrt{2} \cdot b$$

$$a = \sqrt{2} \cdot c$$

这一点可以根据椭圆中的关系式 $a^2 = b^2 + c^2$ 得到。

12.2.5 椭圆的切线方程

我们现在研究椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 (x_0,y_0) 处的切线方程。

对标准方程的第一项求导:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{1}{a^2}\cdot 2\cdot x \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{2x}{a^2} \tag{3}$$

对标准方程的第二项求导:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{1}{b^2}\cdot 2\cdot y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{4}$$

对标准方程右侧求导，由于右侧为常数，故求导结果为零。

故标准方程求导结果为:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{b^2}{2y} \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{x}{y} \tag{7}$$

由此得到了椭圆上任意一点处的导数，即得到了椭圆上任意一点处的切线斜率。

代入点斜式方程:

$$(y - y_0) = k \cdot (x - x_0) \tag{8}$$

$$(y - y_0) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} \cdot (x - x_0) \tag{9}$$

$$y_0 \cdot (y - y_0) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot x_0 \cdot (x - x_0) \tag{10}$$

$$y \cdot y_0 - {y_0}^2 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot (x \cdot x_0 - {x_0}^2) \tag{11}$$

$$\frac{y \cdot y_0}{b^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} = -\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{{x_0}^2}{a^2} \tag{12}$$

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} \tag{13}$$

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} \tag{14}$$

由标准方程可知:

$$\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1 \tag{15}$$

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1 \tag{16}$$

椭圆的切线方程（焦点位于 x 轴）:

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

椭圆的切线方程（焦点位于 y 轴）:

$$\frac{y \cdot y_0}{a^2} + \frac{x \cdot x_0}{b^2} = 1$$

由此证明了椭圆的切线方程。

12.2.6 椭圆的一般方程

椭圆的一般方程:

$$Ax^2 + By^2 + C = 0 \qquad (A \cdot B > 0)$$

对于焦点在 x 轴上的椭圆可以做如下变形:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \tag{2}$$

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 - a^2 \cdot b^2 = 0 \tag{3}$$

对于焦点在 x 轴上的椭圆定义代换变量为:

$$A = b^2 \quad B = a^2 \quad C = -a^2 \cdot b^2 \tag{4}$$

$$Ax^2 + By^2 + C = 0 \quad (A \cdot B > 0) \tag{5}$$

对于焦点在 y 轴上的椭圆可以做如下变形:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

$$a^2 \cdot x^2 + b^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \tag{7}$$

$$a^2 \cdot x^2 + b^2 \cdot y^2 - a^2 \cdot b^2 = 0 \tag{8}$$

对于焦点在 y 轴上的椭圆定义代换变量为:

$$A = a^2 \quad B = b^2 \quad C = -a^2 \cdot b^2 \tag{9}$$

$$Ax^2 + By^2 + C = 0 \quad (A \cdot B > 0) \tag{10}$$

由此证明了椭圆的一般方程。

12.2.7 椭圆和基于 k 的直线的联立

联立椭圆 $\Gamma: Ax^2+By^2+C$ 和直线 $l: y=kx+b$ 前，首先需确保直线的 k 存在。

联立椭圆和直线可以得到：

$$\begin{cases} Ax^2+By^2+C=0 \\ y=kx+b \end{cases} \tag{1}$$

将直线代入椭圆可以得到：

$$Ax^2+B\cdot(kx+b)^2+C=0 \tag{2}$$

$$Ax^2+B\cdot\left(k^2x^2+2kbx+b^2\right)+C=0 \tag{3}$$

$$Ax^2+Bk^2x^2+2Bbkx+Bb^2+C=0 \tag{4}$$

$$\left(A+Bk^2\right)\cdot x^2+2Bbk\cdot x+Bb^2+C=0 \tag{5}$$

联立椭圆和直线的表达式为：

$$\left(A+Bk^2\right)\cdot x^2+2Bbk\cdot x+Bb^2+C=0$$

联立椭圆和直线的表达式的根判别式为：

$$\Delta=-4\cdot\left(ABb^2+BCk^2+AC\right)$$

联立椭圆和直线的表达式的韦达定理为：

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-2Bbk}{A+Bk^2} \\ x_1\ \cdot\ x_2=\dfrac{Bb^2+C}{A+Bk^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{2Ab}{A+Bk^2} \\ y_1\ \cdot\ y_2=\dfrac{Ab^2+Ck^2}{A+Bk^2} \end{cases}$$

在椭圆中，其参数满足 $A\cdot B>0$，故二次项系数 $A+Bk^2$ 不可能为零，无需讨论。

在椭圆中，由于二次项系数始终不为零，故联立得到的表达式一定是二次方程。

已知联立后的表达式:

$$\left(A+Bk^2\right)\cdot x^2+2Bbk\cdot x+Bb^2+C=0 \tag{6}$$

可以推导根的判别式:

$$\Delta=(2Bk)^2-4\cdot\left(A+Bk^2\right)\cdot\left(Bb^2+C\right) \tag{7}$$

$$\Delta=4B^2b^2k^2-4\cdot\left(ABb^2+AC+B^2k^2b^2+BCk^2\right) \tag{8}$$

$$\Delta=-4\cdot\left(ABb^2+AC+BCk^2\right) \tag{9}$$

根据韦达定理可以推导横坐标的两根之和:

$$x_1+x_2=\frac{-2Bbk}{A+Bk^2} \tag{10}$$

根据韦达定理可以推导横坐标的两根之积:

$$x_1\ \cdot\ x_2=\frac{Bb^2+C}{A+Bk^2} \tag{11}$$

将直线代入就可以得出纵坐标的两根之和:

$$y_1+y_2=(kx_1+b)+(kx_1+b) \tag{12}$$

$$y_1+y_2=k\cdot(x_1+x_2)+2b \tag{13}$$

$$y_1+y_2=\frac{-2Bbk^2}{A+Bk^2}+\frac{2Ab+2Bbk^2}{A+Bk^2} \tag{14}$$

$$y_1+y_2=\frac{2Ab}{A+Bk^2} \tag{15}$$

将直线代入就可以得出纵坐标的两根之积:

$$y_1\ \cdot\ y_2=(kx_1+b)\cdot(kx_2+b) \tag{16}$$

$$y_1\ \cdot\ y_2=k^2\cdot(x_1\cdot x_2)+kb\cdot(x_1+x_2)+b^2 \tag{17}$$

$$y_1\ \cdot\ y_2=\frac{Bb^2k^2+Ck^2}{A+Bk^2}+\frac{-2Bb^2k^2}{A+Bk^2}+\frac{Ab^2+Bb^2k^2}{A+Bk^2} \tag{18}$$

$$y_1\ \cdot\ y_2=\frac{Ab^2+Ck^2}{A+Bk^2} \tag{19}$$

由此证明了椭圆和基于 k 的直线联立时的相关结论。

12.2.8 椭圆和基于 t 的直线的联立

联立椭圆 $\Gamma : Ay^2 + Bx^2 + C$ 和直线 $l : x = ty + b$ 前，首先需确保直线的 t 存在。

联立椭圆和直线可以得到：

$$\begin{cases} Ay^2 + Bx^2 + C = 0 \\ x = ty + b \end{cases} \tag{1}$$

将直线代入椭圆可以得到：

$$Ay^2 + B \cdot (ty + b)^2 + C = 0 \tag{2}$$

$$Ay^2 + B \cdot \left(t^2y^2 + 2tby + b^2\right) + C = 0 \tag{3}$$

$$Ay^2 + Bt^2y^2 + 2Bbty + Bb^2 + C = 0 \tag{4}$$

$$\left(A + Bt^2\right) \cdot y^2 + 2Bbt \cdot y + Bb^2 + C = 0 \tag{5}$$

联立椭圆和直线的表达式为：

$$\left(A + Bt^2\right) \cdot y^2 + 2Bbt \cdot y + Bb^2 + C = 0$$

联立椭圆和直线的表达式的根判别式为：

$$\Delta = -4 \cdot \left(ABb^2 + BCt^2 + AC\right)$$

联立椭圆和直线的表达式的韦达定理为：

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \dfrac{-2Bbt}{A + Bt^2} \\ y_1 \ \cdot \ y_2 = \dfrac{Bb^2 + C}{A + Bt^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2Ab}{A + Bt^2} \\ x_1 \ \cdot \ x_2 = \dfrac{Ab^2 + Ct^2}{A + Bt^2} \end{cases}$$

在椭圆中，其参数满足 $A \cdot B > 0$，故二次项系数 $A + Bt^2$ 不可能为零，无需讨论。

在椭圆中，由于二次项系数始终不为零，故联立得到的表达式一定是二次方程。

已知联立后的表达式:

$$\left(A+Bt^2\right)\cdot y^2+2Bbt\cdot y+Bb^2+C=0 \tag{6}$$

可以推导根的判别式:

$$\Delta=(2Bt)^2-4\cdot\left(A+Bt^2\right)\cdot\left(Bb^2+C\right) \tag{7}$$

$$\Delta=4B^2b^2t^2-4\cdot\left(ABb^2+AC+B^2t^2b^2+BCt^2\right) \tag{8}$$

$$\Delta=-4\cdot\left(ABb^2+AC+BCt^2\right) \tag{9}$$

根据韦达定理可以推导横坐标的两根之和:

$$y_1+y_2=\frac{-2Bbt}{A+Bt^2} \tag{10}$$

根据韦达定理可以推导横坐标的两根之积:

$$y_1\ \cdot\ y_2=\frac{Bb^2+C}{A+Bt^2} \tag{11}$$

将直线代入就可以得出纵坐标的两根之和:

$$x_1+x_2=(ty_1+b)+(ty_1+b) \tag{12}$$

$$x_1+x_2=t\cdot(y_1+y_2)+2b \tag{13}$$

$$x_1+x_2=\frac{-2Bbt^2}{A+Bt^2}+\frac{2Ab+2Bbt^2}{A+Bt^2} \tag{14}$$

$$x_1+x_2=\frac{2Ab}{A+Bt^2} \tag{15}$$

将直线代入就可以得出纵坐标的两根之积:

$$x_1\ \cdot\ x_2=(ty_1+b)\cdot(ty_2+b) \tag{16}$$

$$x_1\ \cdot\ x_2=y^2\cdot(y_1\cdot y_2)+tb\cdot(y_1+y_2)+b^2 \tag{17}$$

$$x_1\ \cdot\ x_2=\frac{Bb^2t^2+Ct^2}{A+Bt^2}+\frac{-2Bb^2t^2}{A+Bt^2}+\frac{Ab^2+Bb^2t^2}{A+Bt^2} \tag{18}$$

$$x_1\ \cdot\ x_2=\frac{Ab^2+Ct^2}{A+Bt^2} \tag{19}$$

由此证明了椭圆和基于 t 的直线联立时的相关结论。

12.3 双曲线的方程

双曲线的定义：到平面上两个定点的距离差的绝对值等于常数的点的轨迹称为双曲线。

双曲线的定义中，定点 F_1, F_2 被称为焦点，而两个焦点间的距离 $|F_1F_2|$ 被称为焦距。

如果设焦点 $F_1(x_1, y_1), F_2(x_2, y_2)$，点到两焦点的距离差的绝对值为 $2a$。

双曲线的方程可以表达为：

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}-\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=\pm 2a$$

双曲线的曲线图像：

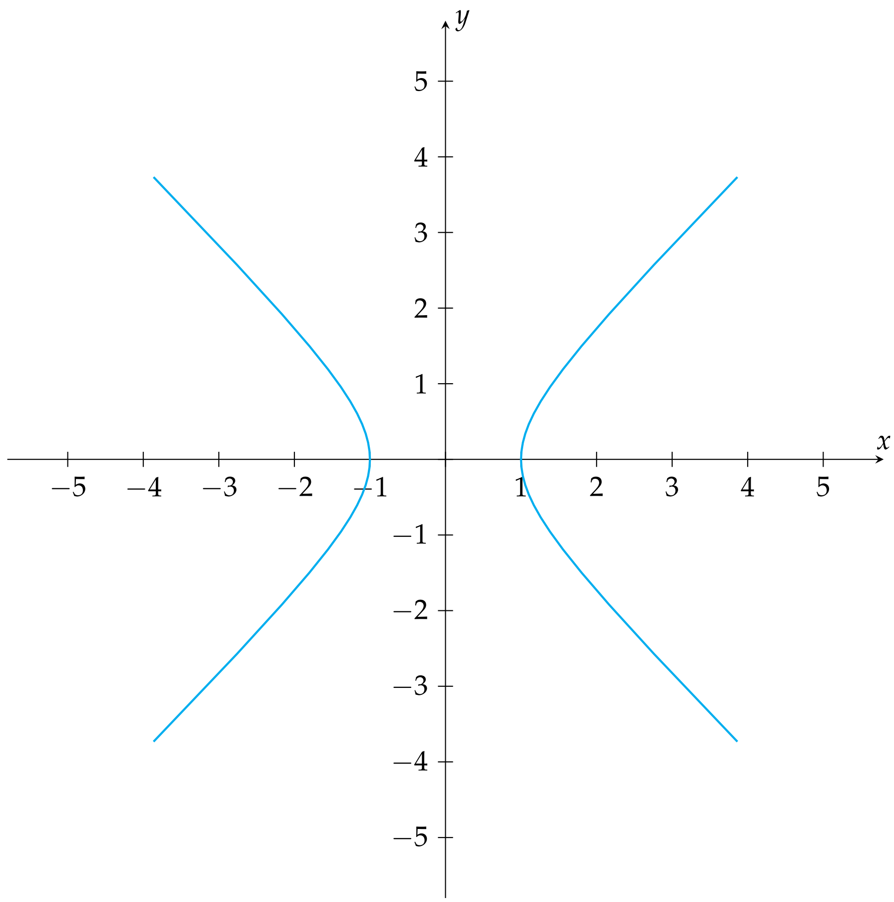


图 77: 双曲线的图像

接下来将由此开始研究双曲线的相关性质。

12.3.1 双曲线的标准方程

特别的，如果两个焦点均在 x 轴上，且双曲线中心为原点 $(0,0)$ 时：
我们可以设焦距为 $2c$，点到两焦点的距离差的绝对值为 $2a$，焦点 $F_1(-c,0)$，焦点 $F_2(c,0)$。

虽然双曲线方程的右侧，既可以为正，也可以为负，但两者结果是一致的，故此处只考虑前者。

我们可以进行以下推导：

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \tag{1}$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{2}$$

$$(x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2+4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{3}$$

$$x^2+c^2-2xc+y^2=4a^2+x^2+c^2+2xc+y^2+4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{4}$$

$$4a^2+4xc=-4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{5}$$

$$a^2+xc=-a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{6}$$

$$a^4+2xca^2+x^2c^2=a^2\cdot((x+c)^2+y^2) \tag{7}$$

$$a^4+x^2c^2-x^2a^2-y^2a^2-a^2c^2=0 \tag{8}$$

$$a^4+x^2(c^2-a^2)-y^2a^2-a^2c^2=0 \tag{9}$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2 \tag{10}$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \tag{11}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{12}$$

当双曲线中心为原点，焦点在 x 轴上时，双曲线的方程：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1 \qquad (c>a) \tag{13}$$

当双曲线中心为原点，焦点在 y 轴上时，双曲线的方程：

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{c^2-a^2}=1 \qquad (c>a) \tag{14}$$

为了简化方程，定义以代换变量 $b^2=c^2-a^2$，将其代入即可得到双曲线的标准方程。

双曲线的标准方程（焦点位于 x 轴）：

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

双曲线的标准方程（焦点位于 y 轴）：

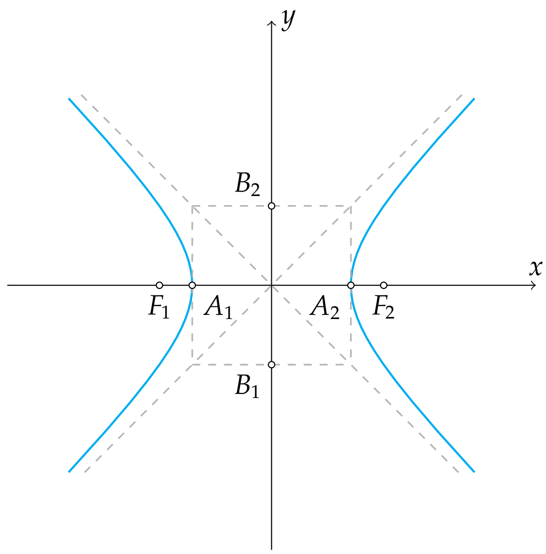
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

双曲线中长度为 $2a$ 的线段 A_1A_2 称为双曲线的实轴，因此标准方程中的 a 称为双曲线的半实轴。

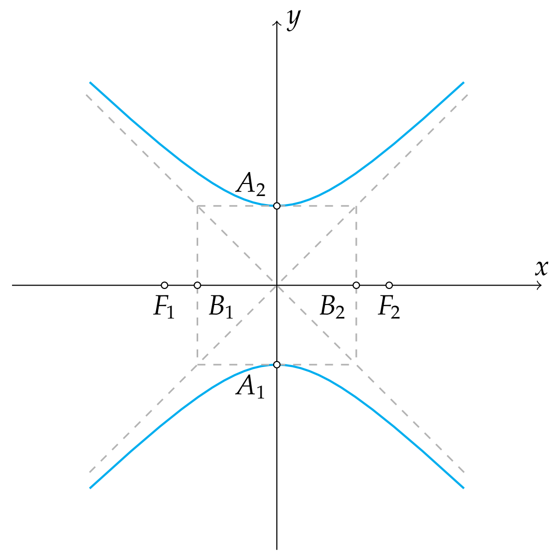
双曲线中长度为 $2b$ 的线段 B_1B_2 称为双曲线的虚轴，因此标准方程中的 b 称为双曲线的半虚轴。

双曲线中的点 B_1 和点 B_2 的图像意义是渐进线上横坐标为 $\pm a$ 的一点在纵坐标轴上的投影点。

双曲线的图像如下：



(a) 焦点在 x 轴上的双曲线



(b) 焦点在 y 轴上的双曲线

图 78: 双曲线的图像

双曲线中有以下重要关系：

$$c^2 = a^2 + b^2$$

即半焦距的平方是半长轴和半短轴的平方和。

12.3.2 双曲线的焦点三角形

双曲线的焦点三角形指的是双曲线上任意一点与双曲线两焦点组成的三角形。

双曲线的焦点三角形的示意图:

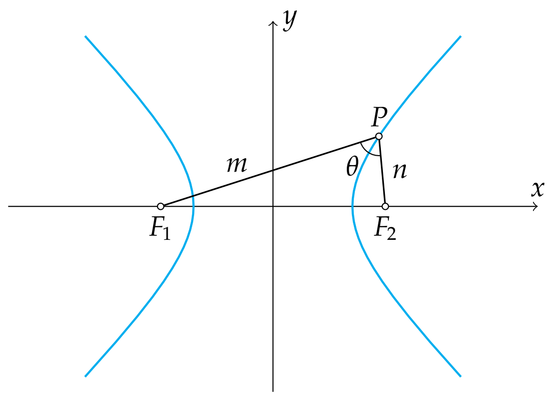


图 79: 双曲线的焦点三角形

设双曲线上一点为 P, 对于焦点三角形 $\triangle PF_1F_2$:

$$PF_1 = m \qquad PF_2 = n \qquad F_1F_2 = 2c \qquad \angle F_1PF_2 = \theta \tag{1}$$

根据余弦定理:

$$\cos\theta = \frac{m^2 + n^2 - (2c)^2}{2mn} \tag{2}$$

$$= \frac{(m-n)^2 - (2c)^2 + 2mn}{2mn} \tag{3}$$

$$= \frac{(2a)^2 - (2c)^2 + 2mn}{2mn} \tag{4}$$

$$= \frac{4a^2 - 4c^2 + 2mn}{2mn} \tag{5}$$

$$= \frac{4(a^2 - c^2) + 2mn}{2mn} \tag{6}$$

$$= \frac{-4b^2 + 2mn}{2mn} \tag{7}$$

$$= \frac{-2b^2 + mn}{mn} \tag{8}$$

由此得到了一个角 θ 的余弦和半短轴 b 以及焦半径 m 和焦半径 n 的关系式。

对该式进行变换:

$$\cos\theta = \frac{-2b^2 + mn}{mn} \tag{9}$$

$$mn \cdot \cos\theta = -2b^2 + mn \tag{10}$$

$$mn \cdot \cos\theta - mn = -2b^2 \tag{11}$$

$$mn \cdot (\cos\theta - 1) = -2b^2 \tag{12}$$

$$mn = \frac{-2b^2}{1 - \cos\theta} \tag{13}$$

根据三角形面积公式:

$$S = \frac{1}{2} \cdot mn \cdot \sin\theta \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2b^2}{1 - \cos\theta} \cdot \sin\theta \tag{15}$$

$$= \frac{b^2}{\cos\theta + 1} \cdot \sin\theta \tag{16}$$

$$= \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} \cdot b^2 \tag{17}$$

$$= \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot b^2 \tag{18}$$

双曲线的焦点三角形的面积公式:

$$S = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot b^2$$

由此证明了双曲线的焦点三角形的面积公式。

12.3.3 双曲线和点的关系

双曲线和点的关系有三种：在双曲线上，在双曲线内，在双曲线外。

双曲线和点的关系的示意图：

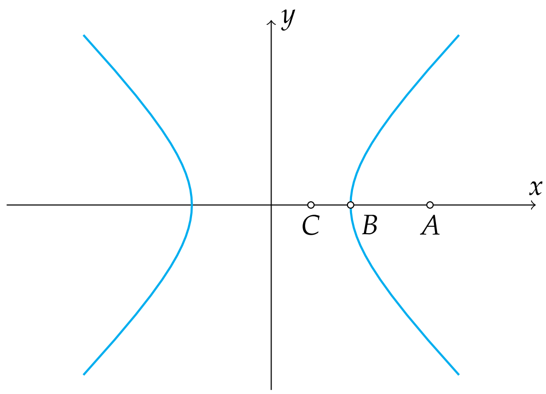


图 80: 双曲线和点的关系

当点在双曲线内时（A）：

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} > 1$$

当点在双曲线上时（B）：

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

当点在双曲线外时（C）：

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} < 1$$

双曲线和点的关系的示意图中，点 A 是在双曲线内，点 B 是在双曲线上，点 C 是在双曲线外。

双曲线和点的关系中，点在椭圆内时为大于，点在椭圆外时为小于。

当点在双曲线内时的示意图：

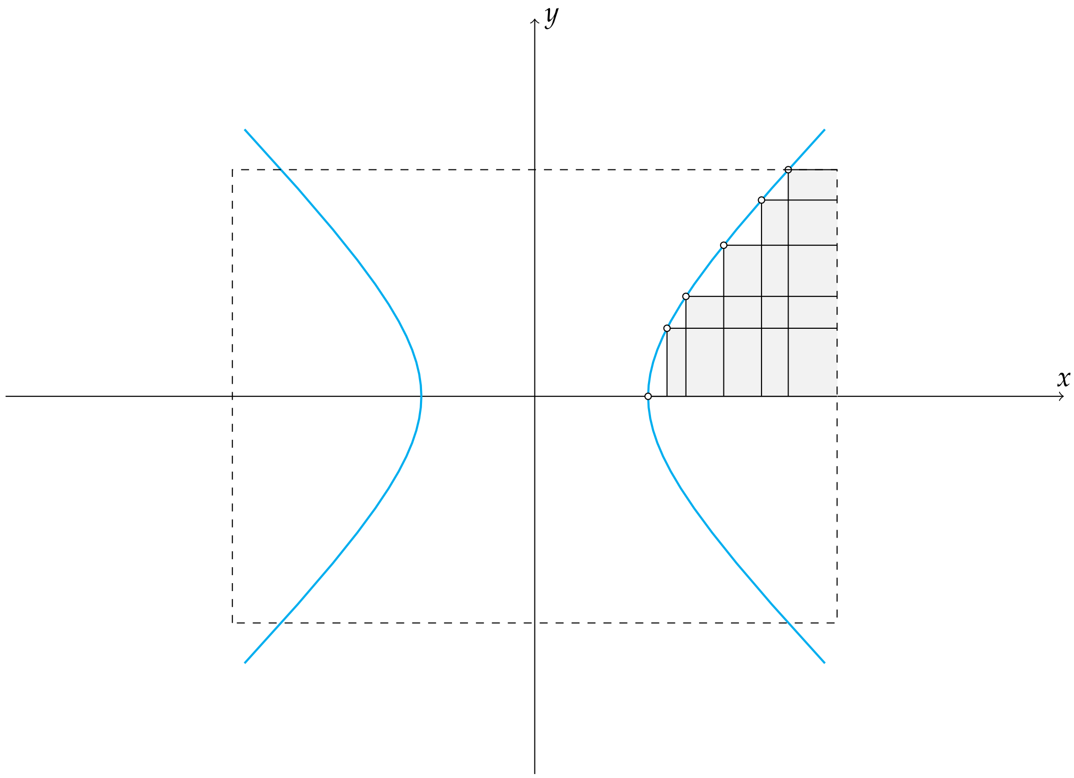


图 81: 点在双曲线内时的示意图

设双曲线上任意一点 (x_0, y_0)，设平面上任意一点 (x, y)。

满足下列不等式组的点为双曲线的内部：

$$\begin{cases} |x| \geq |x_0| \\ |y| \leq |y_0| \end{cases} \quad \text{（等号不能同时成立）} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x^2 \geq x_0^2 \\ y^2 \leq y_0^2 \end{cases} \quad \text{（等号不能同时成立）} \tag{2}$$

将以上结论代入双曲线的标准方程可知：

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1 \tag{3}$$

由此证明了点在双曲线内部的公式。

当点在双曲线外时的示意图:

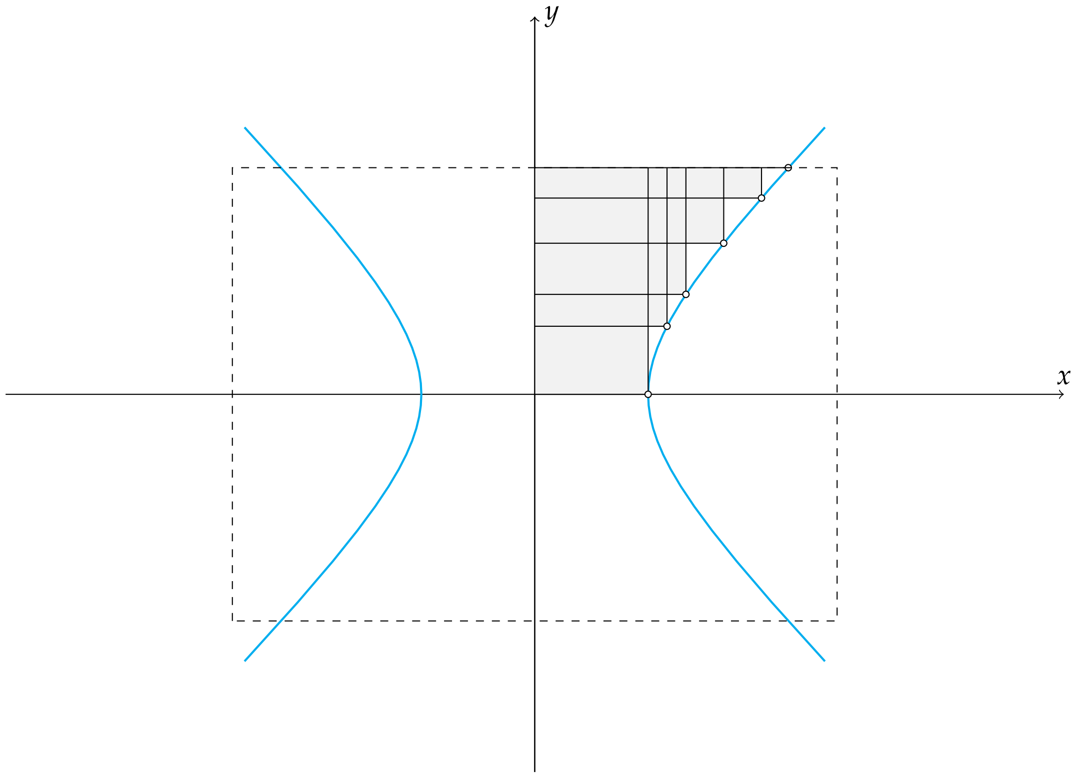


图 82: 点在双曲线外时的示意图

设双曲线上任意一点 (x_0, y_0)，设平面上任意一点 (x, y)。

满足下列不等式组的点为双曲线的外部:

$$\begin{cases} |x| \leq |x_0| \\ |y| \geq |y_0| \end{cases} \quad \text{(等号不能同时成立)} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x^2 \leq x_0^2 \\ y^2 \geq y_0^2 \end{cases} \quad \text{(等号不能同时成立)} \tag{2}$$

将以上结论代入双曲线的标准方程可知:

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \ \Rightarrow \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1 \tag{3}$$

由此证明了点在双曲线外部的公式。

12.3.4 等轴双曲线

等轴双曲线的定义是半短轴和半长轴相等的双曲线。

等轴双曲线的定义的数学表达：

$$b = a$$

等轴双曲线的示意图：

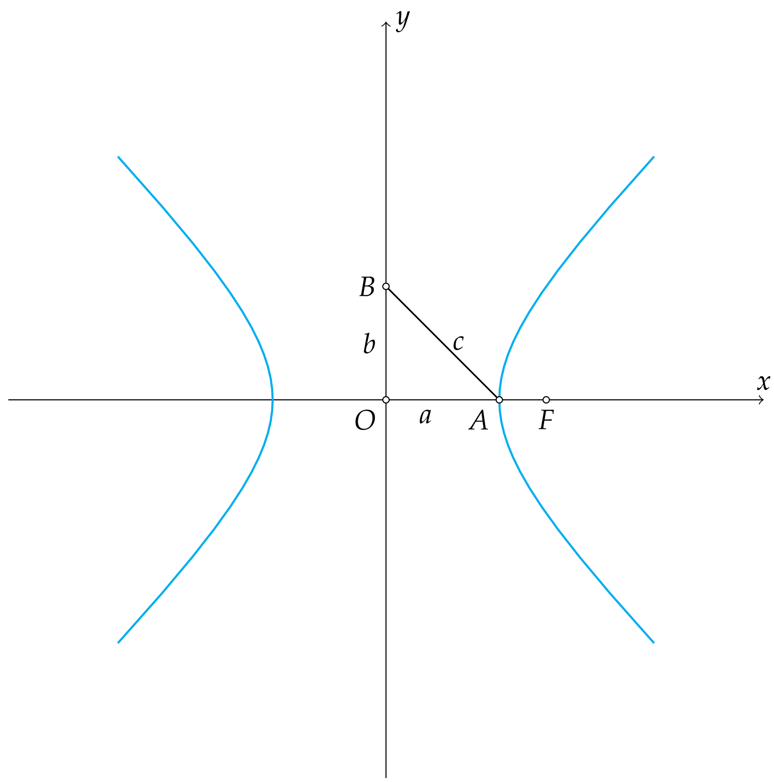


图 83: 等轴双曲线

等轴双曲线的半焦距可以表达为：

$$c = \sqrt{2} \cdot a$$

$$c = \sqrt{2} \cdot b$$

这一点可以根据双曲线中的关系式 $c^2 = a^2 + b^2$ 得到。

12.3.5 双曲线的渐近线方程

对双曲线的标准方程进行一些变换:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

可以得到其位于第一象限的显函数:

$$b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = b^2 \cdot a^2 \tag{2}$$

$$a^2 \cdot y^2 = b^2 \cdot x^2 - b^2 \cdot a^2 \tag{3}$$

$$a^2 \cdot y^2 = b^2 \cdot \left(x^2 - a^2\right) \tag{4}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \left(x^2 - a^2\right) \tag{5}$$

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \tag{6}$$

双曲线在第一象限的方程:

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \tag{7}$$

渐近线在第一象限的方程:

$$y = \frac{b}{a} \cdot x \tag{8}$$

接下来将证明此处设出的渐近线方程确实是双曲线的渐近线。

由于双曲线同时关于横纵坐标轴对称,因此只需要证明在第一象限该结论成立即可。

证明渐进线需要分为两步:

1. 证明渐近线的图像始终在双曲线上方,以说明双曲线和渐进线始终没有交点。

2. 证明双曲线和渐近线的差的极限为零,以说明双曲线和渐近线将会无限趋近。

第一步证明渐近线的图像始终在双曲线上方:

$$a^2 > 0 \tag{9}$$

$$x^2 > x^2 - a^2 \tag{10}$$

$$x > \sqrt{x^2 - a^2} \tag{11}$$

$$\frac{b}{a} \cdot x > \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \tag{12}$$

第二步证明渐近线和双曲线的差的极限为零:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b}{a} \cdot x - \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \tag{13}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a} \cdot \left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) \tag{14}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2 - (x^2 - a^2)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \tag{15}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \tag{16}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a \cdot b}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \tag{17}$$

$$= 0 \tag{18}$$

焦点位于 x 轴的双曲线的渐近线方程:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad y = \frac{b}{a} \cdot x \qquad y = -\frac{b}{a} \cdot x$$

焦点位于 y 轴的双曲线的渐近线方程:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad y = \frac{a}{b} \cdot x \qquad y = -\frac{a}{b} \cdot x$$

此处的渐近线方程的斜率可以简单的记忆为: 总是 y 下面的数除以 x 下面的数。

12.3.6 双曲线的切线方程

我们现在研究双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上一点 (x_0, y_0) 处的切线方程。

对标准方程的第一项求导:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{1}{a^2} \cdot 2 \cdot x \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{2x}{a^2} \tag{3}$$

对标准方程的第二项求导:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{1}{b^2} \cdot 2 \cdot y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{4}$$

对标准方程右侧求导，由于右侧为常数，故求导结果为零。

故标准方程求导结果为:

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x}{a^2} \cdot \frac{b^2}{2y} \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \tag{7}$$

由此得到了双曲线上任意一点处的导数，即得到了双曲线上任意一点处的切线斜率。

代入点斜式方程:

$$(y - y_0) = k \cdot (x - x_0) \tag{8}$$

$$(y - y_0) = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} \cdot (x - x_0) \tag{9}$$

$$y_0 \cdot (y - y_0) = \frac{b^2}{a^2} \cdot x_0 \cdot (x - x_0) \tag{10}$$

$$y \cdot y_0 - {y_0}^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (x \cdot x_0 - {x_0}^2) \tag{11}$$

$$\frac{y \cdot y_0}{b^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} = \frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{{x_0}^2}{a^2} \tag{12}$$

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = \frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} \tag{13}$$

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = \frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} \tag{14}$$

由标准方程可知:

$$\frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1 \tag{15}$$

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1 \tag{16}$$

双曲线的切线方程（焦点位于 x 轴）:

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

双曲线的切线方程（焦点位于 y 轴）:

$$\frac{y \cdot y_0}{a^2} - \frac{x \cdot x_0}{b^2} = 1$$

由此证明了双曲线的切线方程。

12.3.7 双曲线的一般方程

双曲线的一般方程:

$$Ax^2 + By^2 + C = 0 \qquad (A \cdot B < 0)$$

对于焦点在 x 轴上的双曲线可以做如下变形:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

$$b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \tag{2}$$

$$b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 - a^2 \cdot b^2 = 0 \tag{3}$$

对于焦点在 x 轴上的双曲线定义代换变量为:

$$A = b^2 \quad B = -a^2 \quad C = -a^2 \cdot b^2 \tag{4}$$

$$Ax^2 + By^2 + C = 0 \quad (A \cdot B < 0) \tag{5}$$

对于焦点在 y 轴上的双曲线可以做如下变形:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

$$-a^2 \cdot x^2 + b^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \tag{7}$$

$$-a^2 \cdot x^2 + b^2 \cdot y^2 - a^2 \cdot b^2 = 0 \tag{8}$$

对于焦点在 y 轴上的双曲线定义代换变量为:

$$A = -a^2 \quad B = b^2 \quad C = -a^2 \cdot b^2 \tag{9}$$

$$Ax^2 + By^2 + C = 0 \quad (A \cdot B < 0) \tag{10}$$

由此证明了双曲线的一般方程。

12.3.8 双曲线和基于 k 的直线的联立

联立双曲线 $\Gamma: Ax^2 + By^2 + C$ 和直线 $l: y = kx + b$ 前，首先需确保直线的 k 存在。

联立双曲线和直线可以得到:

$$\begin{cases} Ax^2 + By^2 + C = 0 \\ y = kx + b \end{cases} \tag{1}$$

将直线代入双曲线可以得到:

$$Ax^2 + B \cdot (kx + b)^2 + C = 0 \tag{2}$$

$$Ax^2 + B \cdot \left(k^2x^2 + 2kbx + b^2\right) + C = 0 \tag{3}$$

$$Ax^2 + Bk^2x^2 + 2Bbkx + Bb^2 + C = 0 \tag{4}$$

$$\left(A + Bk^2\right) \cdot x^2 + 2Bbk \cdot x + Bb^2 + C = 0 \tag{5}$$

联立双曲线和直线的表达式为:

$$\left(A + Bk^2\right) \cdot x^2 + 2Bbk \cdot x + Bb^2 + C = 0$$

联立双曲线和直线的表达式的根判别式为:

$$\Delta = -4 \cdot \left(ABb^2 + BCk^2 + AC\right)$$

联立双曲线和直线的表达式的韦达定理为:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-2Bbk}{A + Bk^2} \\ x_1 \ \cdot \ x_2 = \dfrac{Bb^2 + C}{A + Bk^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + y_2 = \dfrac{2Ab}{A + Bk^2} \\ y_1 \ \cdot \ y_2 = \dfrac{Ab^2 + Ck^2}{A + Bk^2} \end{cases}$$

在双曲线中，其参数满足 $A \cdot B < 0$，故二次项系数 $A + Bk^2$ 可能为零，需要讨论。

在双曲线中，当二次项系数为零时，代表直线和双曲线的渐近线平行。

已知联立后的表达式：

$$\left(A+Bk^2\right)\cdot x^2+2Bbk\cdot x+Bb^2+C=0 \tag{6}$$

可以推导根的判别式：

$$\Delta=(2Bk)^2-4\cdot\left(A+Bk^2\right)\cdot\left(Bb^2+C\right) \tag{7}$$

$$\Delta=4B^2b^2k^2-4\cdot\left(ABb^2+AC+B^2k^2b^2+BCk^2\right) \tag{8}$$

$$\Delta=-4\cdot\left(ABb^2+AC+BCk^2\right) \tag{9}$$

根据韦达定理可以推导横坐标的两根之和：

$$x_1+x_2=\frac{-2Bbk}{A+Bk^2} \tag{10}$$

根据韦达定理可以推导横坐标的两根之积：

$$x_1\ \cdot\ x_2=\frac{Bb^2+C}{A+Bk^2} \tag{11}$$

将直线代入就可以得出纵坐标的两根之和：

$$y_1+y_2=(kx_1+b)+(kx_1+b) \tag{12}$$

$$y_1+y_2=k\cdot(x_1+x_2)+2b \tag{13}$$

$$y_1+y_2=\frac{-2Bbk^2}{A+Bk^2}+\frac{2Ab+2Bbk^2}{A+Bk^2} \tag{14}$$

$$y_1+y_2=\frac{2Ab}{A+Bk^2} \tag{15}$$

将直线代入就可以得出纵坐标的两根之积：

$$y_1\ \cdot\ y_2=(kx_1+b)\cdot(kx_2+b) \tag{16}$$

$$y_1\ \cdot\ y_2=k^2\cdot(x_1\cdot x_2)+kb\cdot(x_1+x_2)+b^2 \tag{17}$$

$$y_1\ \cdot\ y_2=\frac{Bb^2k^2+Ck^2}{A+Bk^2}+\frac{-2Bb^2k^2}{A+Bk^2}+\frac{Ab^2+Bb^2k^2}{A+Bk^2} \tag{18}$$

$$y_1\ \cdot\ y_2=\frac{Ab^2+Ck^2}{A+Bk^2} \tag{19}$$

由此证明了双曲线和基于 k 的直线联立时的相关结论。

12.3.9 双曲线和基于 t 的直线的联立

联立双曲线 $\Gamma : Ay^2 + Bx^2 + C$ 和直线 $l : x = ty + b$ 前，首先需确保直线的 t 存在。

联立双曲线和直线可以得到：

$$\begin{cases} Ay^2 + Bx^2 + C = 0 \\ x = ty + b \end{cases} \tag{1}$$

将直线代入双曲线可以得到：

$$Ay^2 + B \cdot (ty + b)^2 + C = 0 \tag{2}$$

$$Ay^2 + B \cdot \left(t^2y^2 + 2tby + b^2\right) + C = 0 \tag{3}$$

$$Ay^2 + Bt^2y^2 + 2Bbty + Bb^2 + C = 0 \tag{4}$$

$$\left(A + Bt^2\right) \cdot y^2 + 2Bbt \cdot y + Bb^2 + C = 0 \tag{5}$$

联立双曲线和直线的表达式为：

$$\left(A + Bt^2\right) \cdot y^2 + 2Bbt \cdot y + Bb^2 + C = 0$$

联立双曲线和直线的表达式的根判别式为：

$$\Delta = -4 \cdot \left(ABb^2 + BCt^2 + AC\right)$$

联立双曲线和直线的表达式的韦达定理为：

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \dfrac{-2Bbt}{A + Bt^2} \\ y_1 \ \cdot \ y_2 = \dfrac{Bb^2 + C}{A + Bt^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2Ab}{A + Bt^2} \\ x_1 \ \cdot \ x_2 = \dfrac{Ab^2 + Ct^2}{A + Bt^2} \end{cases}$$

在双曲线中，其参数满足 $A \cdot B < 0$，故二次项系数 $A + Bk^2$ 可能为零，需要讨论。

在双曲线中，当二次项系数为零时，代表直线和双曲线的渐近线平行。

已知联立后的表达式:

$$\left(A+Bt^2\right)\cdot y^2+2Bbt\cdot y+Bb^2+C=0 \tag{6}$$

可以推导根的判别式:

$$\Delta=(2Bt)^2-4\cdot\left(A+Bt^2\right)\cdot\left(Bb^2+C\right) \tag{7}$$

$$\Delta=4B^2b^2t^2-4\cdot\left(ABb^2+AC+B^2t^2b^2+BCt^2\right) \tag{8}$$

$$\Delta=-4\cdot\left(ABb^2+AC+BCt^2\right) \tag{9}$$

根据韦达定理可以推导横坐标的两根之和:

$$y_1+y_2=\frac{-2Bbt}{A+Bt^2} \tag{10}$$

根据韦达定理可以推导横坐标的两根之积:

$$y_1\ \cdot\ y_2=\frac{Bb^2+C}{A+Bt^2} \tag{11}$$

将直线代入就可以得出纵坐标的两根之和:

$$x_1+x_2=(ty_1+b)+(ty_1+b) \tag{12}$$

$$x_1+x_2=t\cdot(y_1+y_2)+2b \tag{13}$$

$$x_1+x_2=\frac{-2Bbt^2}{A+Bt^2}+\frac{2Ab+2Bbt^2}{A+Bt^2} \tag{14}$$

$$x_1+x_2=\frac{2Ab}{A+Bt^2} \tag{15}$$

将直线代入就可以得出纵坐标的两根之积:

$$x_1\ \cdot\ x_2=(ty_1+b)\cdot(ty_2+b) \tag{16}$$

$$x_1\ \cdot\ x_2=y^2\cdot(y_1\cdot y_2)+tb\cdot(y_1+y_2)+b^2 \tag{17}$$

$$x_1\ \cdot\ x_2=\frac{Bb^2t^2+Ct^2}{A+Bt^2}+\frac{-2Bb^2t^2}{A+Bt^2}+\frac{Ab^2+Bb^2t^2}{A+Bt^2} \tag{18}$$

$$x_1\ \cdot\ x_2=\frac{Ab^2+Ct^2}{A+Bt^2} \tag{19}$$

由此证明了双曲线和基于 t 的直线联立时的相关结论。

12.4 抛物线的方程

抛物线的定义：到平面上一个定点和一条定直线的距离相等的点的轨迹称为抛物线。

抛物线的定义中，定点 F 称为焦点，定直线 l 称为准线，焦点至准线的距离称为焦准距。

设焦点 $F(x_0, y_0)$，设准线 $l : ax + by + c = 0$。

抛物线的方程可以表达为：

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

抛物线的曲线图像：

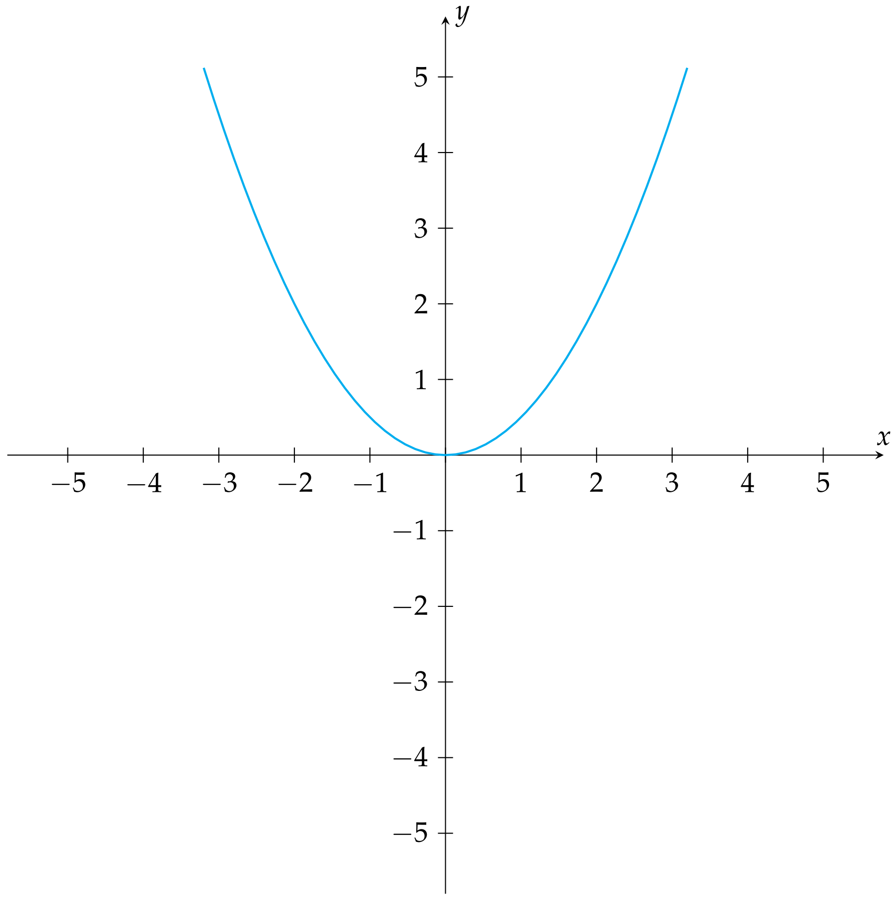


图 84: 抛物线的图像

接下来将由此开始研究抛物线的相关性质。

12.4.1 抛物线的标准方程

特别的，如果焦点在 x 轴上，准线垂直于 x 轴且交点与焦点关于原点 $(0,0)$ 对称时：
我们可以设焦准距为 p，焦点为 $F\,(\frac{p}{2},0)$，准线为 $x=-\frac{p}{2}$。

我们可以进行以下推导：

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right| \tag{1}$$

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \tag{2}$$

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4} \tag{3}$$

$$y^2=x^2-x^2+px+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4} \tag{4}$$

$$y^2=2px \tag{5}$$

特别的，如果焦点在 y 轴上，准线垂直于 y 轴且交点与焦点关于原点 $(0,0)$ 对称时：
我们可以设焦准距为 p，焦点为 $F\,(0,\frac{p}{2})$，准线为 $y=-\frac{p}{2}$。

我们可以进行以下推导：

$$\sqrt{\left(y-\frac{p}{2}\right)^2+x^2}=\left|y+\frac{p}{2}\right| \tag{1}$$

$$\left(y-\frac{p}{2}\right)^2+x^2=\left(y+\frac{p}{2}\right)^2 \tag{2}$$

$$y^2-py+\frac{p^2}{4}+x^2=y^2+py+\frac{p^2}{4} \tag{3}$$

$$x^2=y^2-y^2+py+py+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4} \tag{4}$$

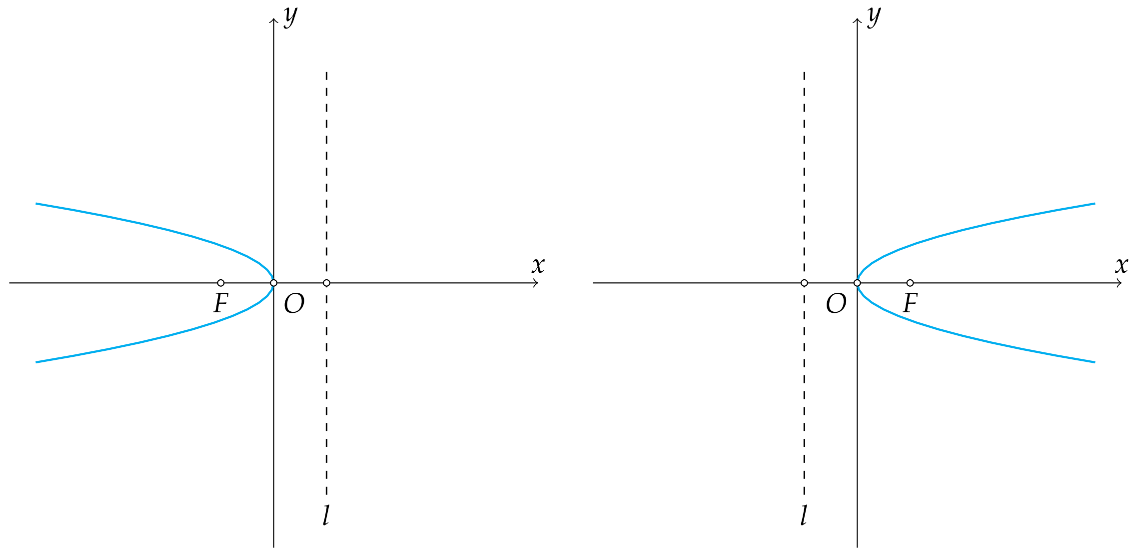
$$x^2=2py \tag{5}$$

由此得到了抛物线的标准方程。

抛物线的标准方程（焦点位于 x 轴）：

$$y^2 = 2px$$

抛物线的焦点在 x 轴时图像如下：



(a) 焦点在 x 轴开口向左的抛物线

(b) 焦点在 x 轴开口向右的抛物线

图 85: 抛物线在 x 轴时的图像

抛物线的焦点在 x 轴时的焦点坐标和准线方程：

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \qquad l : x = -\frac{p}{2}$$

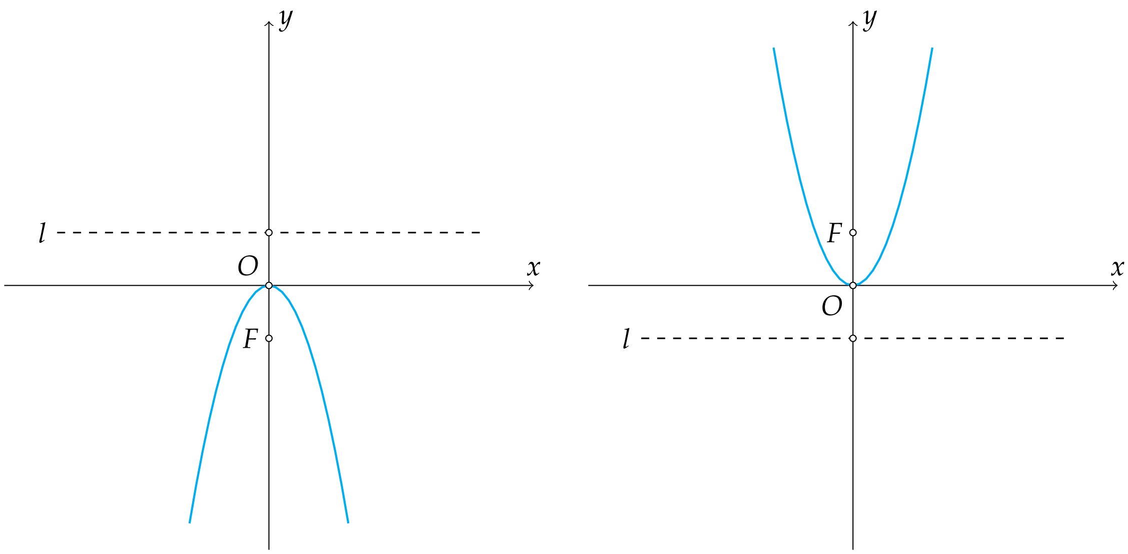
抛物线焦点在 x 轴时，在焦准距 $p > 0$ 时为右开口，焦点在准线右侧。

抛物线焦点在 x 轴时，在焦准距 $p < 0$ 时为左开口，焦点在准线左侧。

抛物线的标准方程（焦点位于 y 轴）:

$$x^2 = 2py$$

抛物线的焦点在 y 轴时图像如下:



(a) 焦点在 y 轴开口向下的抛物线 (b) 焦点在 y 轴开口向上的抛物线

图 86: 抛物线在 x 轴时的图像

抛物线的焦点在 y 轴时的焦点坐标和准线方程:

$$F\left(0\,,\,\frac{p}{2}\right) \qquad l: y = -\frac{p}{2}$$

抛物线焦点在 y 轴时，在焦准距 $p > 0$ 时为上开口，焦点在准线上侧。

抛物线焦点在 y 轴时，在焦准距 $p < 0$ 时为下开口，焦点在准线下侧。

12.4.2 抛物线和点的关系

抛物线和点的关系有三种：在抛物线上，在抛物线内，在抛物线外。

抛物线和点的关系的示意图：

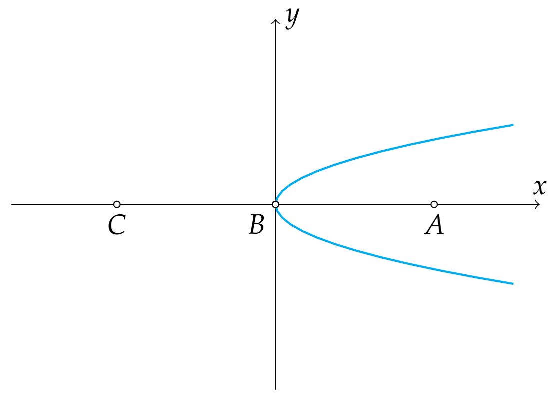


图 87: 抛物线和点的关系

当点在抛物线内时（A）：

$$y^2 < 2px$$

$$x^2 < 2py$$

当点在抛物线上时（B）：

$$y^2 = 2px$$

$$x^2 = 2py$$

当点在抛物线外时（C）：

$$y^2 > 2px$$

$$x^2 > 2py$$

抛物线和点的关系的示意图中，点 A 是在抛物线内，点 B 是在抛物线上，点 C 是在抛物线外。

抛物线和点的关系中，点在抛物线内时为小于，点在抛物线外时为大于。

当点在抛物线内时的示意图:

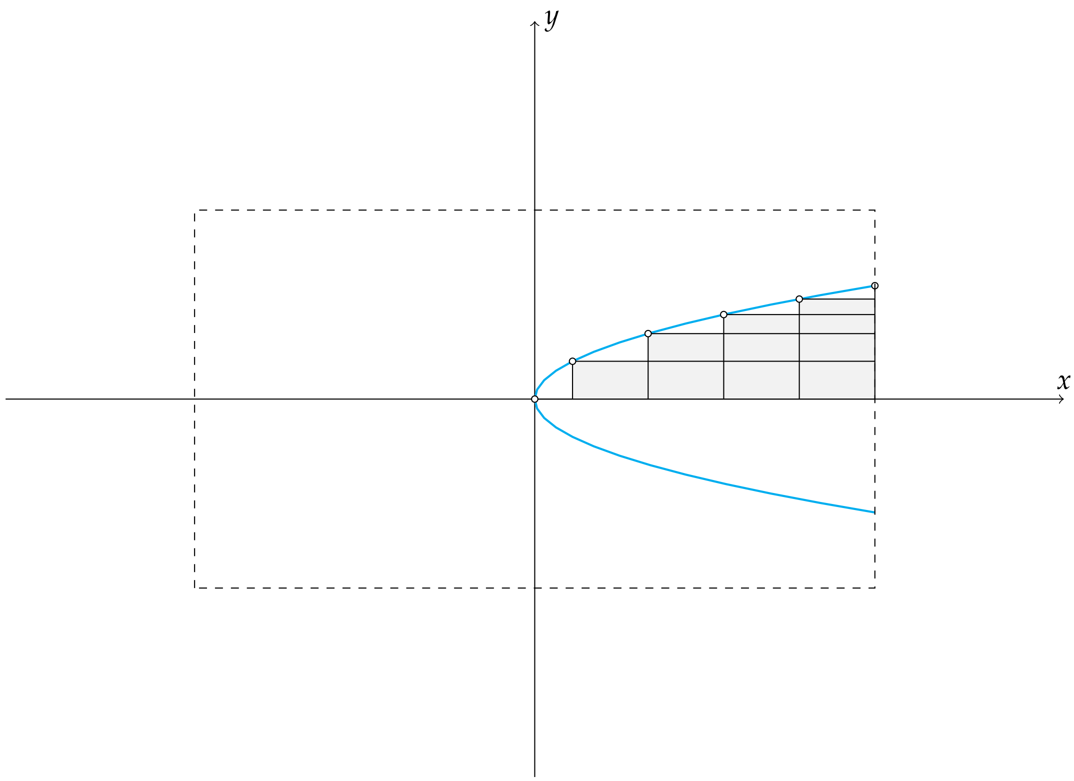


图 88: 点在抛物线内时的示意图

设抛物线上任意一点 (x_0, y_0)，设平面上任意一点 (x, y)。

满足下列不等式组的点为抛物线的内部:

$$\begin{cases} x \geq x_0 \\ |y| \leq |y_0| \end{cases} \quad \text{（等号不能同时成立）} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x \geq x_0 \\ y^2 \leq y_0^2 \end{cases} \quad \text{（等号不能同时成立）} \tag{2}$$

将以上结论代入抛物线的标准方程可知:

$$y_0^2 = 2px \quad \Rightarrow \quad y^2 < 2px \tag{3}$$

由此证明了点在抛物线内部的公式。

当点在抛物线外时的示意图:

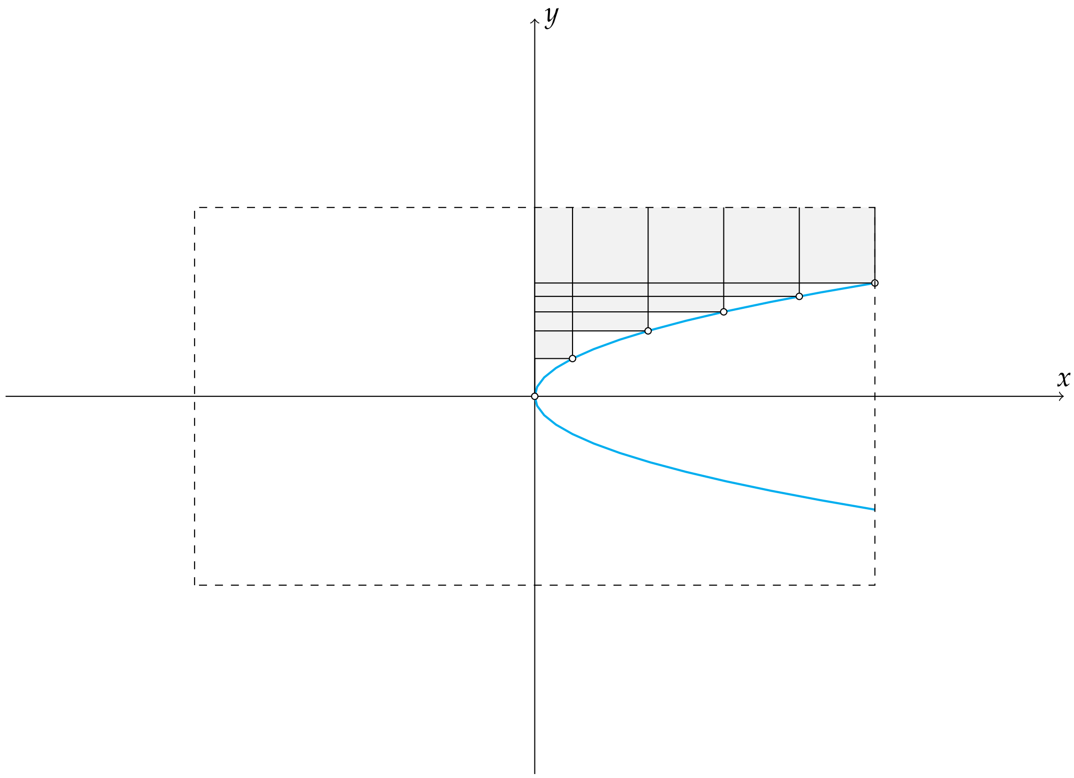


图 89: 点在抛物线外时的示意图

设抛物线上任意一点 (x_0, y_0)，设平面上任意一点 (x, y)。

满足下列不等式组的点为抛物线的外部:

$$\begin{cases} x \le x_0 \\ |y| \ge |y_0| \end{cases} \quad \text{(等号不能同时成立)} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x \le x_0 \\ y^2 \ge y_0^2 \end{cases} \quad \text{(等号不能同时成立)} \tag{2}$$

将以上结论代入抛物线的标准方程可知:

$$y_0^2 = 2px \;\Rightarrow\; y^2 > 2px \tag{3}$$

由此证明了点在抛物线外部的公式。

12.4.3 抛物线的切线方程

我们现在研究双曲线 $y^2 = 2px$ 上一点 (x_0, y_0) 处的切线方程。

对标准方程的左侧求导:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2\right) = \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2\right) = 2y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{2}$$

对标准方程的右侧求导:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2px) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} \cdot 2p \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2px) = 2p \tag{4}$$

故标准方程求导结果为:

$$2y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2p \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2p}{2y} \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p}{y} \tag{7}$$

由此得到了抛物线上任意一点处的导数，即得到了抛物线上任意一点处的切线斜率。

代入点斜式方程:

$$(y - y_0) = k \cdot (x - x_0) \tag{8}$$

$$(y - y_0) = \frac{p}{y_0} \cdot (x - x_0) \tag{9}$$

$$y \cdot y_0 - y_0^2 = p \cdot (x - x_0) \tag{10}$$

$$y \cdot y_0 - y_0^2 = px - px_0 \tag{11}$$

由标准方程可知:

$$y \cdot y_0 - 2px_0 = px - px_0 \tag{12}$$

$$y \cdot y_0 = px - px_0 + 2px_0 \tag{13}$$

$$y \cdot y_0 = px + px_0 \tag{14}$$

$$y \cdot y_0 = p \cdot (x + x_0) \tag{15}$$

抛物线的切线方程（焦点位于 x 轴）:

$$y \cdot y_0 = p \cdot (x + x_0)$$

抛物线的切线方程（焦点位于 y 轴）:

$$x \cdot x_0 = p \cdot (y + y_0)$$

由此证明了抛物线的切线方程。

12.4.4 抛物线和基于 k 的直线的联立

联立抛物线和直线时，若抛物线的焦点在 y 轴上，通常使用基于 k 的直线联立。

联立抛物线 $\Gamma : x^2 = 2py$ 和直线 $y = kx + b$，当直线的 k 不存在时，两者只有一个交点。

联立抛物线和直线可以得到：

$$\begin{cases} x^2 = 2py \\ y = kx + b \end{cases} \tag{1}$$

将直线代入抛物线可以得到：

$$x^2 = 2p \cdot (kx + b) \tag{2}$$

$$x^2 = 2pkx + 2pb \tag{3}$$

$$x^2 - 2pkx - 2pb = 0 \tag{4}$$

联立抛物线和直线的表达式为：

$$x^2 - 2pkx - 2pb = 0$$

联立抛物线和直线的表达式的根判别式为：

$$\Delta = 4p^2k^2 + 8pb$$

联立抛物线和直线的表达式的韦达定理为（横坐标的和积）：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2pk \\ x_1 \ \cdot \ x_2 = -2pb \end{cases}$$

联立抛物线和直线的表达式的韦达定理为（纵坐标的和积）：

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2pk^2 + 2b \\ y_1 \ \cdot \ y_2 = b^2 \end{cases}$$

由于直线选取合理，此处不必特别讨论 $k = 0$ 的情况。

已知联立后的表达式:

$$x^2 - 2pkx - 2pb = 0 \tag{5}$$

可以推导根的判别式:

$$\Delta = (2pk)^2 + 4 \cdot 2pb \tag{6}$$

$$\Delta = 4p^2k^2 + 8pb \tag{7}$$

根据韦达定理可以推导横坐标的两根之和:

$$x_1 + x_2 = 2pk \tag{8}$$

根据韦达定理可以推导横坐标的两根之积:

$$x_1 \ \cdot \ x_2 = -2pb \tag{9}$$

将直线代入就可以得出纵坐标的两根之和:

$$y_1 + y_2 = (kx_1 + b) + (kx_2 + b) \tag{10}$$

$$y_1 + y_2 = kx_1 + kx_2 + 2b \tag{11}$$

$$y_1 + y_2 = k \cdot (x_1 + x_2) + 2b \tag{12}$$

$$y_1 + y_2 = 2pk^2 + 2b \tag{13}$$

将直线代入就可以得出纵坐标的两根之积:

$$y_1 \ \cdot \ y_2 = (kx_1 + b) \cdot (kx_2 + b) \tag{14}$$

$$y_1 \ \cdot \ y_2 = k^2 \cdot x_1x_2 + kbx_1 + kbx_2 + b^2 \tag{15}$$

$$y_1 \ \cdot \ y_2 = k^2 \cdot (x_1 \cdot x_2) + kb \cdot (x_1 + x_2) + b^2 \tag{16}$$

$$y_1 \ \cdot \ y_2 = -2pk^2b + 2pk^2b + b^2 \tag{17}$$

$$y_1 \ \cdot \ y_2 = b^2 \tag{18}$$

由此证明了抛物线和基于 k 的直线联立时的相关结论。

12.4.5 抛物线和基于 t 的直线的联立

联立抛物线和直线时，若抛物线的焦点在 x 轴上，通常使用基于 t 的直线联立。

联立抛物线 $\Gamma : y^2 = 2px$ 和直线 $x = ty + b$，当直线的 t 不存在时，两者只有一个交点。

联立抛物线和直线可以得到：

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ x = ty + b \end{cases} \tag{1}$$

将直线代入抛物线可以得到：

$$y^2 = 2p \cdot (ty + b) \tag{2}$$

$$y^2 = 2pty + 2pb \tag{3}$$

$$y^2 - 2pty - 2pb = 0 \tag{4}$$

联立抛物线和直线的表达式为：

$$y^2 - 2pty - 2pb = 0$$

联立抛物线和直线的表达式的根判别式为：

$$\Delta = 4p^2t^2 + 8pb$$

联立抛物线和直线的表达式的韦达定理为（纵坐标的和积）：

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2pt \\ y_1 \cdot y_2 = -2pb \end{cases}$$

联立抛物线和直线的表达式的韦达定理为（横坐标的和积）：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2pt^2 + 2b \\ x_1 \cdot x_2 = b^2 \end{cases}$$

由于直线选取合理，此处不必特别讨论 $t = 0$ 的情况。

已知联立后的表达式:

$$y^2 - 2pty - 2pb = 0 \tag{5}$$

可以推导根的判别式:

$$\Delta = (2pt)^2 + 4 \cdot 2pb \tag{6}$$

$$\Delta = 4p^2t^2 + 8pb \tag{7}$$

根据韦达定理可以推导纵坐标的两根之和:

$$y_1 + y_2 = 2pt \tag{8}$$

根据韦达定理可以推导纵坐标的两根之积:

$$y_1 \ \cdot \ y_2 = -2pb \tag{9}$$

将直线代入就可以得出横坐标的两根之和:

$$x_1 + x_2 = (ty_1 + b) + (ty_2 + b) \tag{10}$$

$$x_1 + x_2 = ty_1 + ty_2 + 2b \tag{11}$$

$$x_1 + x_2 = t \cdot (y_1 + y_2) + 2b \tag{12}$$

$$x_1 + x_2 = 2pt^2 + 2b \tag{13}$$

将直线代入就可以得出横坐标的两根之积:

$$x_1 \ \cdot \ x_2 = (ty_1 + b) \cdot (ty_2 + b) \tag{14}$$

$$x_1 \ \cdot \ x_2 = t^2 \cdot y_1y_2 + tby_1 + tby_2 + b^2 \tag{15}$$

$$x_1 \ \cdot \ x_2 = t^2 \cdot (y_1 \cdot y_2) + tb \cdot (y_1 + y_2) + b^2 \tag{16}$$

$$x_1 \ \cdot \ x_2 = -2pt^2b + 2pt^2b + b^2 \tag{17}$$

$$x_1 \ \cdot \ x_2 = b^2 \tag{18}$$

由此证明了抛物线和基于 t 的直线联立时的相关结论。

12.5 圆锥曲线和直线

本章讨论关于圆锥曲线和直线的两个问题：求解弦长的弦长公式，求解弦中点的弦中点公式。

12.5.1 弦长公式

这一节推导的弦长公式适用于所有圆锥曲线。

弦长公式可以解决这样的问题，已知一条圆锥曲线，已知一条直线，求解弦的长度。

设直线 $y = kx + b$，其与任意圆锥曲线联立的结果总能表达为 $ax^2 + bx + c = 0$。

设直线 $y = kx + b$ 和圆锥曲线的交点为 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$。

根据两点间距离公式：

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{1}$$

代入直线方程可得：

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \left[(kx_1 + b) - (kx_2 + b)\right]^2} \tag{2}$$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \left[k \cdot (x_1 - x_2)\right]^2} \tag{3}$$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + k^2 \cdot (x_1 - x_2)^2} \tag{4}$$

$$AB = \sqrt{(k^2 + 1) \cdot (x_1 - x_2)^2} \tag{5}$$

$$AB = \sqrt{k^2 + 1} \cdot |x_1 - x_2| \tag{6}$$

对其变换形式可得：

$$AB = \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \tag{7}$$

$$AB = \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2} \tag{8}$$

$$AB = \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2} \tag{9}$$

$$AB = \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2} \tag{10}$$

由此转换得到了包含两根之和和两根之积的式子。

代入韦达定理可得：

$$AB=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2-4\cdot\frac{c}{a}} \tag{11}$$

$$AB=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}} \tag{12}$$

$$AB=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4ac}{a^2}} \tag{13}$$

$$AB=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}} \tag{14}$$

$$AB=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{\frac{\Delta}{a^2}} \tag{15}$$

$$AB=\sqrt{k^2+1}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \tag{16}$$

弦长公式（直线 $y=kx+b$，联立式 $ax^2+bx+c=0$）：

$$AB=\sqrt{k^2+1}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$AB=\sqrt{k^2+1}\cdot|x_1-x_2|$$

$$AB=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4\cdot x_1\cdot x_2}$$

弦长公式（直线 $x=ty+b$，联立式 $ay^2+by+c=0$）：

$$AB=\sqrt{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$AB=\sqrt{t^2+1}\cdot|y_1-y_2|$$

$$AB=\sqrt{t^2+1}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4\cdot y_1\cdot y_2}$$

此处关于 t 的弦长公式也可以用类似的方法推导得到。

虽然弦长常用于推导圆锥曲线的弦长，但是前两个公式对于任意两点实际上也是成立的。

12.5.2 弦中点公式（椭圆或双曲线）

这一节推导的弦中点公式适用于椭圆和双曲线。

弦中点公式可以解决这样的问题，已知一条圆锥曲线，已知一条直线，求解弦的中点。

弦中点公式推导中的关核心思想是点差法，即将直线与圆锥曲线的交点分别代入并做差。

设直线 $y = kx + b$，设椭圆或双曲线 $Ax^2 + By^2 + C = 0$。

设直线 $y = kx + b$ 和椭圆或双曲线的交点为 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$，两者的中点设为 $M(x_0, y_0)$。

由于交点 A, B 的中点为 $M(x_0, y_0)$：

$$2x_0 = x_1 + x_2 \tag{1}$$

$$2y_0 = y_1 + y_2 \tag{2}$$

由于交点 A, B 在直线 $y = kx + b$ 上：

$$k = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \tag{3}$$

将交点代入曲线方程并做差：

$$\begin{cases} Ax_1^2 + By_1^2 + C = 0 \\ Ax_2^2 + By_2^2 + C = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$A \cdot (x_1^2 - x_2^2) + B \cdot (y_1^2 - y_2^2) = 0 \tag{5}$$

$$A \cdot (x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2) + B \cdot (y_1 + y_2) \cdot (y_1 - y_2) = 0 \tag{6}$$

$$A \cdot 2x_0 \cdot (x_1 - x_2) + B \cdot 2y_0 \cdot (y_1 - y_2) = 0 \tag{7}$$

$$A \cdot 2x_0 \cdot (x_1 - x_2) = -B \cdot 2y_0 \cdot (y_1 - y_2) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{A \cdot 2x_0}{B \cdot 2y_0} \tag{9}$$

$$k = -\frac{A \cdot 2x_0}{B \cdot 2y_0} \tag{10}$$

$$k = -\frac{A \cdot x_0}{B \cdot y_0} \tag{11}$$

此处所运用的方法，即将两个交点代入后做差的方法，称为点差法。

对所得的斜率变形可以得到：

$$y_0 = -\frac{A}{Bk} \cdot x_0 \tag{12}$$

由于中点也同时在原直线上：

$$y_0 = k \cdot x_0 + b \tag{13}$$

将原直线代入斜率变形后的直线方程可得：

$$k \cdot x_0 + b = -\frac{A}{Bk} \cdot x_0 \tag{14}$$

$$\left(\frac{A}{Bk} + k\right) \cdot x_0 = -b \tag{15}$$

$$\left(\frac{A + Bk^2}{Bk}\right) \cdot x_0 = -b \tag{16}$$

$$x_0 = -b \cdot \frac{Bk}{A + Bk^2} \tag{17}$$

$$x_0 = \frac{-Bbk}{A + Bk^2} \tag{18}$$

将横坐标代入斜率变形后的直线方程可得：

$$y_0 = -\frac{A}{Bk} \cdot \frac{-Bbk}{A + Bk^2} \tag{19}$$

$$y_0 = \frac{Ab}{A + Bk^2} \tag{20}$$

弦中点公式（直线 $y = kx + b$，圆锥曲线 $Ax^2 + By^2 + C = 0$）：

$$k = -\frac{A \cdot x_0}{B \cdot y_0} \qquad M\left(\frac{-Bbk}{A + Bk^2}, \frac{Ab}{A + Bk^2}\right)$$

弦中点公式（直线 $x = ty + b$，圆锥曲线 $Ay^2 + Bx^2 + C = 0$）：

$$t = -\frac{A \cdot y_0}{B \cdot x_0} \qquad M\left(\frac{Ab}{A + Bt^2}, \frac{-Bbt}{A + Bt^2}\right)$$

此处关于 t 的弦中点公式可以用类似的方法推导得到。

弦中点公式在使用后应当联立通过判别式验证交点是否存在，若不存在交点则应当舍去。

12.5.3 弦中点公式（上下开口的抛物线）

这一节推导的弦中点公式适用上下开口的抛物线。

设直线 $y = kx + b$，设抛物线 $x^2 = 2py$。

设直线 $y = kx + b$ 和抛物线的交点为 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$，两者的中点设为 $M(x_0, y_0)$。

将交点代入曲线方程并做差：

$$\begin{cases} x_1^2 = 2py_1 \\ x_2^2 = 2py_2 \end{cases} \tag{1}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 2p \cdot (y_1 - y_2) \tag{2}$$

$$(x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2) = 2p \cdot (y_1 - y_2) \tag{3}$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2x_0}{2p} \tag{4}$$

$$k = \frac{2x_0}{2p} \tag{5}$$

$$k = \frac{x_0}{p} \tag{6}$$

对所得的斜率变形可以得到：

$$x_0 = p \cdot k \tag{7}$$

由于中点也同时在原直线上：

$$y_0 = k \cdot x_0 + b \tag{8}$$

$$y_0 = p \cdot k^2 + b \tag{9}$$

弦中点公式（直线 $y = kx + b$，圆锥曲线 $x^2 = 2py$）：

$$k = \frac{x_0}{p} \qquad M\big(pk \ , \ pk^2 + b\big)$$

弦中点公式在使用后应当联立通过判别式验证交点是否存在，若不存在交点则应当舍去。

12.5.4 弦中点公式（左右开口的抛物线）

这一节推导的弦中点公式适用左右开口的抛物线。

设直线 $y = kx + b$，设抛物线 $y^2 = 2px$。

设直线 $y = kx + b$ 和抛物线的交点为 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$，两者的中点设为 $M(x_0, y_0)$。

将交点代入曲线方程并做差：

$$\begin{cases} y_1^2 = 2px_1 \\ y_2^2 = 2px_2 \end{cases} \tag{1}$$

$$y_1^2 - y_2^2 = 2p \cdot (x_1 - x_2) \tag{2}$$

$$(y_1 + y_2) \cdot (y_1 - y_2) = 2p \cdot (x_1 - x_2) \tag{3}$$

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{2y_0}{2p} \tag{4}$$

$$t = \frac{2y_0}{2p} \tag{5}$$

$$t = \frac{y_0}{p} \tag{6}$$

对所得的斜率变形可以得到：

$$y_0 = p \cdot k \tag{7}$$

由于中点也同时在原直线上：

$$x_0 = t \cdot x_0 + b \tag{8}$$

$$x_0 = p \cdot t^2 + b \tag{9}$$

弦中点公式（直线 $x = ty + b$，圆锥曲线 $y^2 = 2px$）：

$$t = \frac{y_0}{p} \qquad M\left(pt^2 + b\ ,\ pt\right)$$

弦中点公式在使用后应当联立通过判别式验证交点是否存在，若不存在交点则应当舍去。

12.6 圆锥曲线的第二定义

圆锥曲线的第二定义：到一个定焦点和到一个定准线的距离之比为常数的点的轨迹。

圆锥曲线中的常数称为离心率，通常用 e 表示，其取值决定了圆锥曲线的类型。

圆锥曲线的类型和离心率的关系如下：

圆（Circle）	$e = 0$
椭圆（Ellipse）	$e < 1$
抛物线（Parabola）	$e = 1$
双曲线（Hyperbola）	$e > 1$

表 13: 圆锥曲线的类型和离心率的关系

我们首先研究这样一种特殊情况，焦点被固定在 x 轴上，准线被固定为垂直于 x 轴。

我们研究的这种情况可以用下图表示：

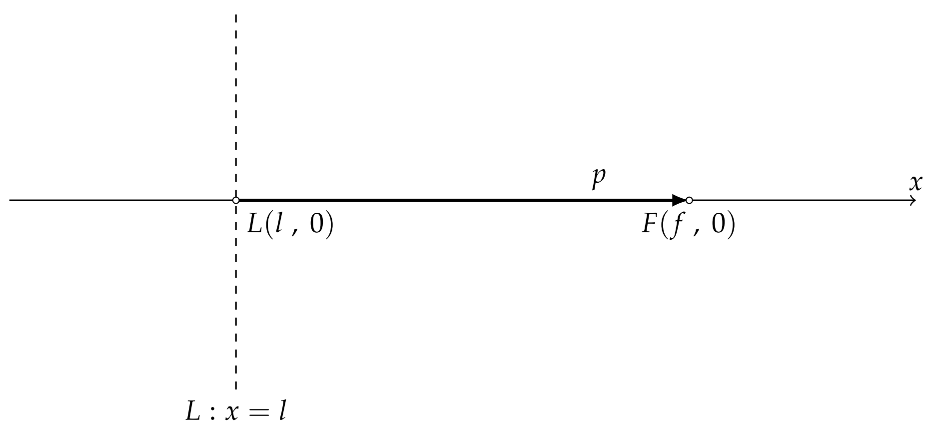


图 90: 圆锥曲线的第二定义

设焦点 F 的横坐标为 f，即焦点坐标为 $F(f\ ,\ 0)$。

设准线 L 的横坐标为 l，即准线方程为 $L : x = l$。

设焦准距 p 为准线和 x 轴的交点 L 指向焦点 F 的有向距离，向右时取正，向左时取负。

故焦准距可以表示为：

$$p = f - l$$

即焦准距为焦点的横坐标减去准线的横坐标。

平面上一点 (x, y) 到定焦点的距离为：

$$d_F = \sqrt{(x-f)^2 + y^2} \tag{1}$$

平面上一点 (x, y) 到定准线的距离为：

$$d_L = |x - l| \tag{2}$$

离心率为两者的距离比：

$$e = \frac{d_F}{d_L} = \frac{\sqrt{(x-f)^2 + y^2}}{|x-l|} \tag{3}$$

对其变形展开可以得到：

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} = e \cdot |x - l| \tag{4}$$

$$(x-f)^2 + y^2 = e^2 \cdot (x-l)^2 \tag{5}$$

$$\left(x^2 - 2fx + f^2\right) + y^2 = e^2 \cdot \left(x^2 - 2lx + m^2\right) \tag{6}$$

$$x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2x^2 - 2le^2x + l^2e^2 \tag{7}$$

$$x^2 - e^2x^2 + 2le^2x - 2fx + y^2 = l^2e^2 - f^2 \tag{8}$$

$$\left(1 - e^2\right) \cdot x^2 + 2 \cdot \left(le^2 - f\right) \cdot x + y^2 = l^2e^2 - f^2 \tag{9}$$

由此得到这样一个方程：

$$\left(1 - e^2\right) \cdot x^2 + 2 \cdot \left(le^2 - f\right) \cdot x + y^2 = l^2e^2 - f^2$$

其描述了一条圆锥曲线，离心率为 e，焦点位于 x 轴横坐标为 f，准线垂直于 x 轴横坐标为 l。

接下来将据此推导圆锥曲线的中心点在原点的情况，同时证明圆锥曲线第二定义与原定义相符，并研究圆锥曲线第二定义的参量和圆锥曲线标准方程的参量间的关系。

12.6.1 圆锥曲线的第二定义在椭圆中的应用

对于中心点在原点的椭圆，其 x 的一次项系数必然为零。

因此在方程中：

$$\left(1-e^2\right)\cdot x^2+2\cdot\left(le^2-f\right)\cdot x+y^2=l^2e^2-f^2 \tag{1}$$

需要满足等式：

$$2(le^2-f)=0 \tag{2}$$

$$2le^2=2f \tag{3}$$

$$le^2=f \tag{4}$$

故椭圆的焦点和准线有以下关系：

$$f=le^2$$

故中心点在原点的椭圆，若离心率一定，已知焦点可以确定准线，已知准线也可以确定焦点。

将以上结论代入方程可得：

$$\left(1-e^2\right)\cdot x^2+y^2=l^2e^2-f^2 \tag{5}$$

$$\left(1-e^2\right)\cdot x^2+y^2=l^2e^2-m^2e^4 \tag{6}$$

$$\left(1-e^2\right)\cdot x^2+y^2=l^2e^2\cdot\left(1-e^2\right) \tag{7}$$

$$\frac{x^2}{l^2e^2}+\frac{y^2}{l^2e^2\cdot(1-e^2)}=1 \tag{8}$$

由此可推导离心率的范围：

$$l^2e^2\cdot\left(1-e^2\right)>0 \tag{9}$$

$$1-e^2>0 \tag{10}$$

$$e^2<1 \tag{11}$$

$$e<1 \tag{12}$$

由此证明了圆锥曲线的第二定义在 $e<1$ 时，得出的椭圆方程与原定义下的方程相同。

根据圆锥曲线第二定义下的椭圆方程:

$$\frac{x^2}{l^2e^2}+\frac{y^2}{l^2e^2\cdot(1-e^2)}=1 \tag{13}$$

求解半长轴 a 并两次代入 $l=\frac{f}{e^2}$:

$$a^2=l^2e^2 \tag{14}$$

$$a^2=fl \tag{15}$$

$$a^2=\frac{f^2}{e^2} \tag{16}$$

求解半短轴 b 并两次代入 $l=\frac{f}{e^2}$:

$$b^2=l^2e^2\cdot(1-e^2) \tag{17}$$

$$b^2=fl\cdot(1-e^2) \tag{18}$$

$$b^2=\frac{f^2}{e^2}\cdot\left(1-e^2\right) \tag{19}$$

求解半焦距 c 并两次代入 $f=le^2$:

$$c^2=f^2 \tag{20}$$

$$c^2=fle^2 \tag{21}$$

$$c^2=l^2e^4 \tag{22}$$

椭圆中圆锥曲线标准方程的参量可以表示为:

$$\begin{cases} a^2=l^2e^2 \\ b^2=l^2e^2\cdot(1-e^2) \\ c^2=l^2e^4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2=fl \\ b^2=fl\cdot(1-e^2) \\ c^2=fle^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2=\dfrac{f^2}{e^2} \\ b^2=\dfrac{f^2}{e^2}\cdot(1-e^2) \\ c^2=f^2 \end{cases}$$

由此得到了椭圆中圆锥曲线标准方程的参量和圆锥曲线第二定义的参量的关系。

证明椭圆的离心率:

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{l^2e^4}{l^2e^2} \tag{23}$$

$$\frac{c^2}{a^2} = e^2 \tag{24}$$

$$\frac{c}{a} = e \tag{25}$$

证明椭圆的焦准距:

$$\frac{b^2}{f} = \frac{fl}{f} \cdot \left(1 - e^2\right) \tag{26}$$

$$\frac{b^2}{f} = l \cdot \left(1 - e^2\right) \tag{27}$$

$$\frac{b^2}{f} = l - le^2 \tag{28}$$

$$\frac{b^2}{f} = l - f \tag{29}$$

$$\frac{b^2}{f} = -p \tag{30}$$

证明椭圆的准线坐标:

$$\frac{a^2}{f} = \frac{f \cdot l}{f} \tag{31}$$

$$\frac{a^2}{f} = l \tag{32}$$

椭圆中圆锥曲线第二定义的参量可以表示为:

$$\begin{cases} e &= \dfrac{c}{a} \\ l &= +\dfrac{a^2}{f} \qquad\qquad \left(f = \pm c\right) \\ p &= -\dfrac{b^2}{f} \end{cases}$$

由此得到了椭圆中圆锥曲线第二定义的参量和圆锥曲线标准方程的参量的关系。

当焦点坐标 $f = \pm c$ 时分别可以得到:

$$\begin{cases} f = +c \\ l = +\dfrac{a^2}{c} \\ p = -\dfrac{b^2}{c} \end{cases} \qquad \begin{cases} f = -c \\ l = -\dfrac{a^2}{c} \\ p = +\dfrac{b^2}{c} \end{cases}$$

当焦点坐标 $f = +c$ 时的椭圆图像:

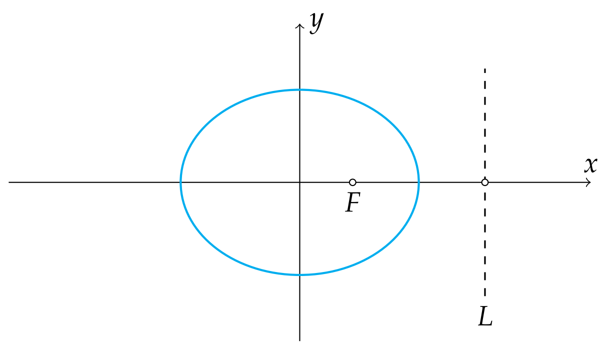


图 91: 对于 $f = +c$ 时的椭圆图像

当焦点坐标 $f = -c$ 时的椭圆图像:

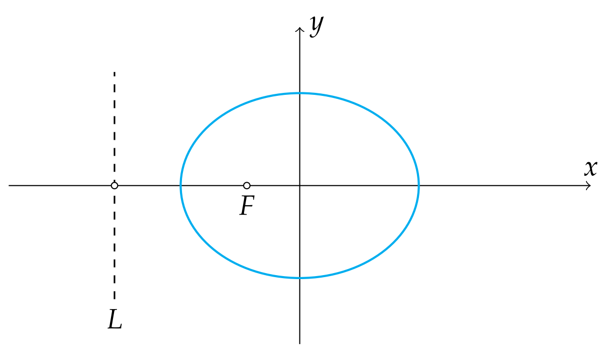


图 92: 对于 $f = -c$ 时的椭圆图像

对于中心点在原点的椭圆，公式指出焦点和准线总是在原点的同一侧。

当焦点坐标 $f = +c$ 时，公式指出 p 为负，即焦点在准线左侧，即焦点比准线更靠近原点。

当焦点坐标 $f = -c$ 时，公式指出 p 为正，即焦点在准线右侧，即焦点比准线更靠近原点。

12.6.2 圆锥曲线的第二定义在双曲线中的应用

对于中心点在原点的双曲线，其 x 的一次项系数必然为零。

因此在方程中：

$$\left(1-e^2\right)\cdot x^2+2\cdot\left(le^2-f\right)\cdot x+y^2=l^2e^2-f^2 \tag{1}$$

需要满足等式：

$$2(le^2-f)=0 \tag{2}$$

$$2le^2=2f \tag{3}$$

$$le^2=f \tag{4}$$

故双曲线的焦点和准线有以下关系：

$$f=le^2$$

故中心点在原点的双曲线，若离心率一定，已知焦点可以确定准线，已知准线也可以确定焦点。

将以上结论代入方程可得：

$$\left(1-e^2\right)\cdot x^2+y^2=l^2e^2-f^2 \tag{5}$$

$$\left(1-e^2\right)\cdot x^2+y^2=l^2e^2-m^2e^4 \tag{6}$$

$$\left(1-e^2\right)\cdot x^2+y^2=l^2e^2\cdot\left(1-e^2\right) \tag{7}$$

$$\frac{x^2}{l^2e^2}+\frac{y^2}{l^2e^2\cdot(1-e^2)}=1 \tag{8}$$

由此可推导离心率的范围：

$$l^2e^2\cdot\left(1-e^2\right)<0 \tag{9}$$

$$1-e^2<0 \tag{10}$$

$$e^2>1 \tag{11}$$

$$e>1 \tag{12}$$

由此证明了圆锥曲线的第二定义在 $e>1$ 时，得出的双曲线方程与原定义下的方程相同。

根据圆锥曲线第二定义下的双曲线方程:

$$\frac{x^2}{l^2e^2} - \frac{y^2}{l^2e^2 \cdot (e^2-1)} = 1 \tag{13}$$

求解半实轴 a 并两次代入 $l = \frac{f}{e^2}$:

$$a^2 = l^2e^2 \tag{14}$$

$$a^2 = fl \tag{15}$$

$$a^2 = \frac{f^2}{e^2} \tag{16}$$

求解半虚轴 b 并两次代入 $l = \frac{f}{e^2}$:

$$b^2 = l^2e^2 \cdot (e^2-1) \tag{17}$$

$$b^2 = fl \cdot (e^2-1) \tag{18}$$

$$b^2 = \frac{f^2}{e^2} \cdot (e^2-1) \tag{19}$$

求解半焦距 c 并两次代入 $f = le^2$:

$$c^2 = f^2 \tag{20}$$

$$c^2 = fle^2 \tag{21}$$

$$c^2 = l^2e^4 \tag{22}$$

双曲线中圆锥曲线标准方程的参量可以表示为:

$$\begin{cases} a^2 = l^2e^2 \\ b^2 = l^2e^2 \cdot (e^2-1) \\ c^2 = l^2e^4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = fl \\ b^2 = fl \cdot (e^2-1) \\ c^2 = fle^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = \frac{f^2}{e^2} \\ b^2 = \frac{f^2}{e^2} \cdot (e^2-1) \\ c^2 = f^2 \end{cases}$$

由此得到了双曲线中圆锥曲线标准方程的参量和圆锥曲线第二定义的参量的关系。

证明双曲线的离心率:

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{l^2e^4}{l^2e^2} \tag{23}$$

$$\frac{c^2}{a^2} = e^2 \tag{24}$$

$$\frac{c}{a} = e \tag{25}$$

证明双曲线的焦准距:

$$\frac{b^2}{f} = \frac{fl}{f} \cdot \left(e^2 - 1\right) \tag{26}$$

$$\frac{b^2}{f} = l \cdot \left(e^2 - 1\right) \tag{27}$$

$$\frac{b^2}{f} = le^2 - l \tag{28}$$

$$\frac{b^2}{f} = f - l \tag{29}$$

$$\frac{b^2}{f} = p \tag{30}$$

证明双曲线的准线坐标:

$$\frac{a^2}{f} = \frac{f \cdot l}{f} \tag{31}$$

$$\frac{a^2}{f} = l \tag{32}$$

双曲线中圆锥曲线第二定义的参量可以表示为:

$$\begin{cases} e &= \dfrac{c}{a} \\ l &= +\dfrac{a^2}{f} \qquad\qquad \left(f = \pm c\right) \\ p &= +\dfrac{b^2}{f} \end{cases}$$

由此得到了双曲线中圆锥曲线第二定义的参量和圆锥曲线标准方程的参量的关系。

当焦点坐标 $f = \pm c$ 时分别可以得到:

$$\begin{cases} f = +c \\ l = +\dfrac{a^2}{c} \\ p = +\dfrac{b^2}{c} \end{cases} \qquad \begin{cases} f = -c \\ l = -\dfrac{a^2}{c} \\ p = -\dfrac{b^2}{c} \end{cases}$$

当焦点坐标 $f = +c$ 时的双曲线图像:

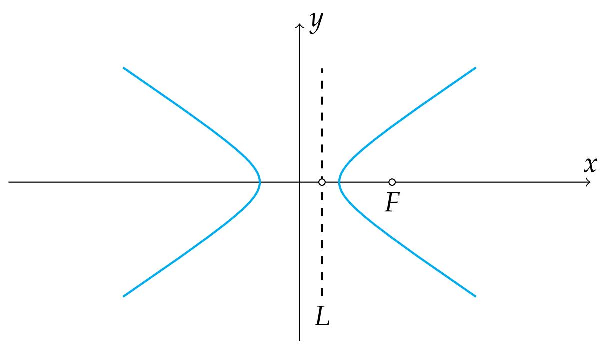


图 93: 对于 $f = +c$ 时的双曲线图像

当焦点坐标 $f = -c$ 时的双曲线图像:

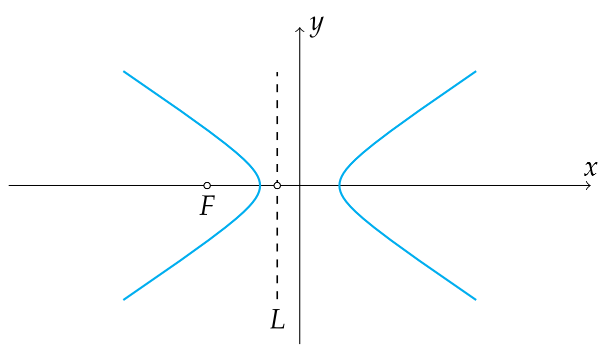


图 94: 对于 $f = -c$ 时的双曲线图像

对于中心点在原点的双曲线，公式指出焦点和准线总是在原点的同一侧。

当焦点坐标 $f = +c$ 时，公式指出 p 为正，即焦点在准线右侧，即焦点比准线更远离原点。

当焦点坐标 $f = -c$ 时，公式指出 p 为负，即焦点在准线左侧，即焦点比准线更远离原点。

12.6.3 圆锥曲线的第二定义在抛物线中的应用

在圆锥曲线的方程中:

$$\left(1-e^2\right)\cdot x^2+2\cdot\left(le^2-f\right)\cdot x+y^2=l^2e^2-f^2 \tag{1}$$

对于焦点在水平轴的抛物线，其二次项系数必然为零:

$$1-e^2=0 \tag{2}$$

$$e^2=1 \tag{3}$$

$$e=1 \tag{4}$$

对于中心点在原点的抛物线，其常数项系数必然为零:

$$l^2e^2-f^2=0 \tag{5}$$

$$f^2=l^2e^2 \tag{6}$$

$$f^2=l^2 \tag{7}$$

$$f=-l \tag{8}$$

故抛物线的焦点和准线有以下关系:

$$f=-l$$

故中心点在原点的抛物线，焦点横坐标总是和准线横坐标互为相反数。

将以上的结论代入方程可得:

$$2\cdot(le^2-f)\cdot x+y^2=0 \tag{9}$$

$$2\cdot(l-f)\cdot x+y^2=0 \tag{10}$$

$$y^2=2\cdot(f-l)\cdot x \tag{11}$$

$$y^2=2px \tag{12}$$

由此证明了圆锥曲线的第二定义在 $e=1$ 时，得出的抛物线方程与原定义下的方程相同。

根据焦准距 $p = f - l$ 的定义可知:

$$\begin{cases} f = +\dfrac{p}{2} \\ \\ l = -\dfrac{p}{2} \end{cases}$$

当焦准距 $p > 0$ 时的抛物线图像:

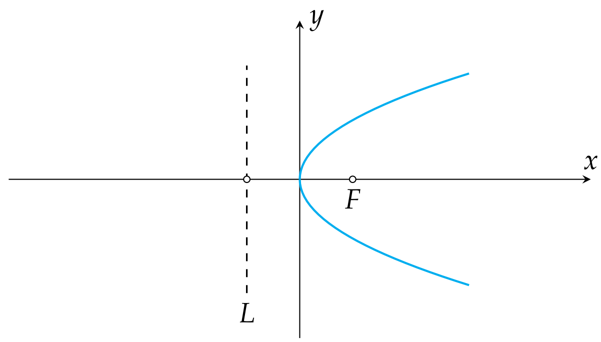


图 95: 对于 $p > 0$ 的抛物线图像

当焦准距 $p < 0$ 时的抛物线图像:

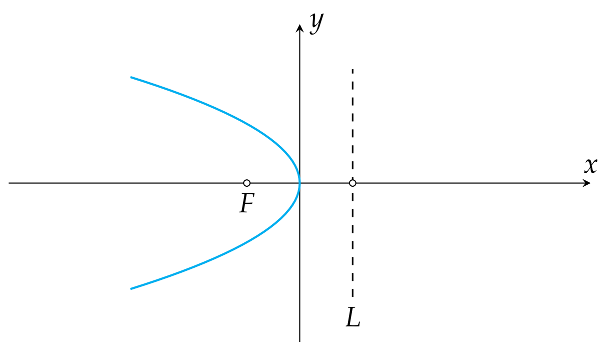


图 96: 对于 $p < 0$ 的抛物线图像

对于中心点在原点的抛物线，公式指出焦点和准线总是在原点的两侧且到原点距离相同。

当焦准距 $p > 0$ 时，公式指出焦点在原点右侧，公式指出准线在原点左侧。

当焦准距 $p < 0$ 时，公式指出焦点在原点左侧，公式指出准线在原点右侧。

12.6.4 椭圆的焦半径公式

椭圆的焦半径指的是椭圆上一点到两个焦点的距离，椭圆的焦半径有两个且不是定值。

椭圆的焦半径的示意图如下：

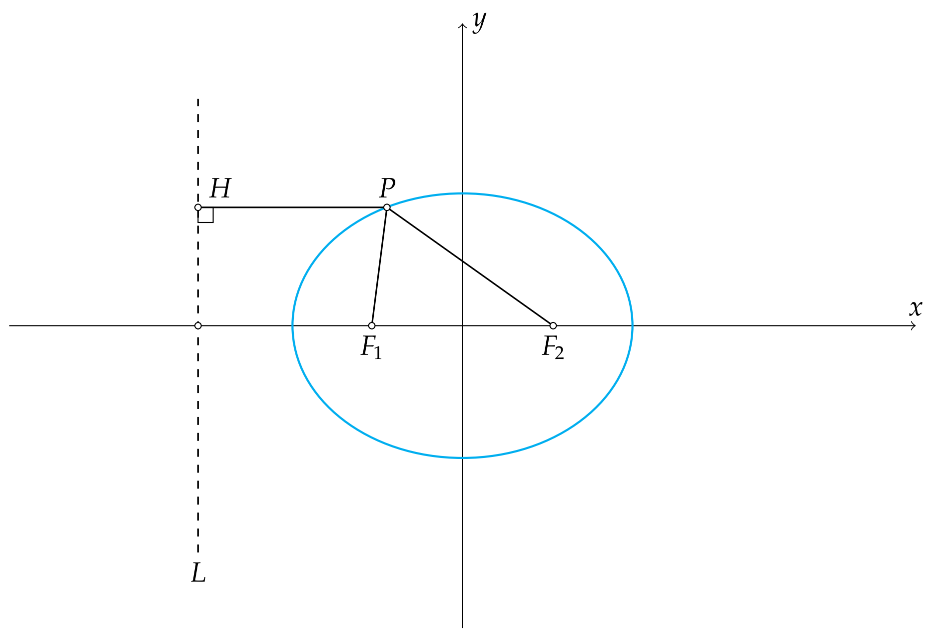


图 97: 椭圆的焦半径

椭圆上一点 $P(x_0, y_0)$ 至左焦点 F_1 的焦半径公式：

$$PF_1 = a + e \cdot x_0$$

椭圆上一点 $P(x_0, y_0)$ 至右焦点 F_2 的焦半径公式：

$$PF_2 = a - e \cdot x_0$$

以焦点在原点左侧的情况为例，设椭圆上一点为 $P(x_0, y_0)$，设其在准线上的投影为 $H(l, y_0)$。

由于焦点在原点的左侧，故此时 $f = -c$：

$$l = -\frac{a^2}{c} \tag{1}$$

此处焦点指的是在圆锥曲线第二定义下与左准线 L 搭配的左焦点 F_1。

据此可以得出点 P 至准线 L 的距离 PH:

$$PH = x_0 - l \tag{2}$$

$$PH = x_0 + \frac{a^2}{c} \tag{3}$$

根据离心率定义推导 PF_1:

$$PF_1 = e \cdot PH \tag{4}$$

$$PF_1 = e \cdot \left(x_0 + \frac{a^2}{c}\right) \tag{5}$$

$$PF_1 = e \cdot x_0 + \frac{c}{a} \cdot \frac{a^2}{c} \tag{6}$$

$$PF_1 = e \cdot x_0 + a \tag{7}$$

$$PF_1 = a + e \cdot x_0 \tag{8}$$

根据椭圆的定义推导 PF_2:

$$PF_2 = 2a - PF_1 \tag{9}$$

$$PF_2 = 2a - (a + e \cdot x_0) \tag{10}$$

$$PF_2 = a - e \cdot x_0 \tag{11}$$

由此证明了椭圆的焦半径公式。

12.6.5 双曲线左支的焦半径公式

双曲线的焦半径指的是双曲线上一点到两个焦点的距离，双曲线的焦半径有两个且不是定值。

双曲线的焦半径不同于椭圆，其在左支和右支时具有不同的函数表达式，本节讨论左支的情况。

双曲线左支的焦半径的示意图如下：

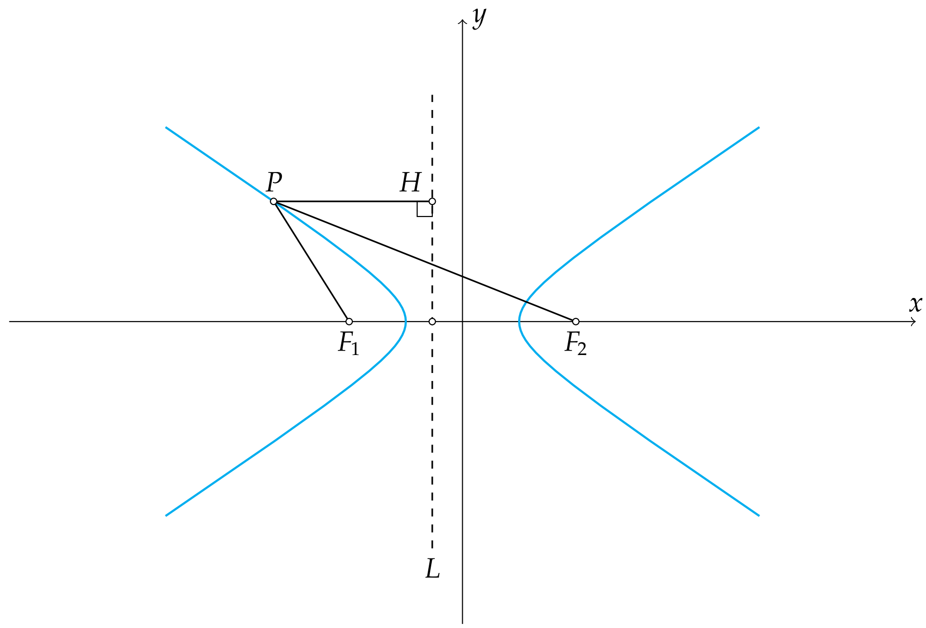


图 98: 双曲线左支的焦半径

双曲线左支上一点 $P(x_0, y_0)$ 至左焦点 F_1 的焦半径公式：

$$PF_1 = -e \cdot x_0 - a$$

双曲线左支上一点 $P(x_0, y_0)$ 至右焦点 F_2 的焦半径公式：

$$PF_2 = -e \cdot x_0 + a$$

以焦点在原点左侧的情况为例，设双曲线上一点为 $P(x_0, y_0)$，设其在准线上的投影为 $H(l, y_0)$。

由于焦点在原点的左侧，故此时 $f = -c$：

$$l = -\frac{a^2}{c} \tag{1}$$

此处焦点指的是在圆锥曲线第二定义下与左准线 L 搭配的左焦点 F_1。

据此可以得出点 P 至准线 L 的距离 PH:

$$PH = l - x_0 \tag{2}$$

$$PH = -\frac{a^2}{c} - x_0 \tag{3}$$

根据离心率定义推导 PF_1:

$$PF_1 = e \cdot PH \tag{4}$$

$$PF_1 = e \cdot \left(-\frac{a^2}{c} - x_0\right) \tag{5}$$

$$PF_1 = -e \cdot x_0 - \frac{c}{a} \cdot \frac{a^2}{c} \tag{6}$$

$$PF_1 = -e \cdot x_0 - a \tag{7}$$

根据双曲线定义推导 PF_2:

$$PF_2 = PF_1 + 2a \tag{8}$$

$$PF_2 = -e \cdot x_0 - a + 2a \tag{9}$$

$$PF_2 = -e \cdot x_0 + a \tag{10}$$

由此证明了双曲线左支的焦半径公式。

12.6.6 双曲线右支的焦半径公式

双曲线的焦半径指的是双曲线上一点到两个焦点的距离，双曲线的焦半径有两个且不是定值。

双曲线的焦半径不同于椭圆，其在左支和右支时具有不同的函数表达式，本节讨论右支的情况。

双曲线右支的焦半径的示意图如下：

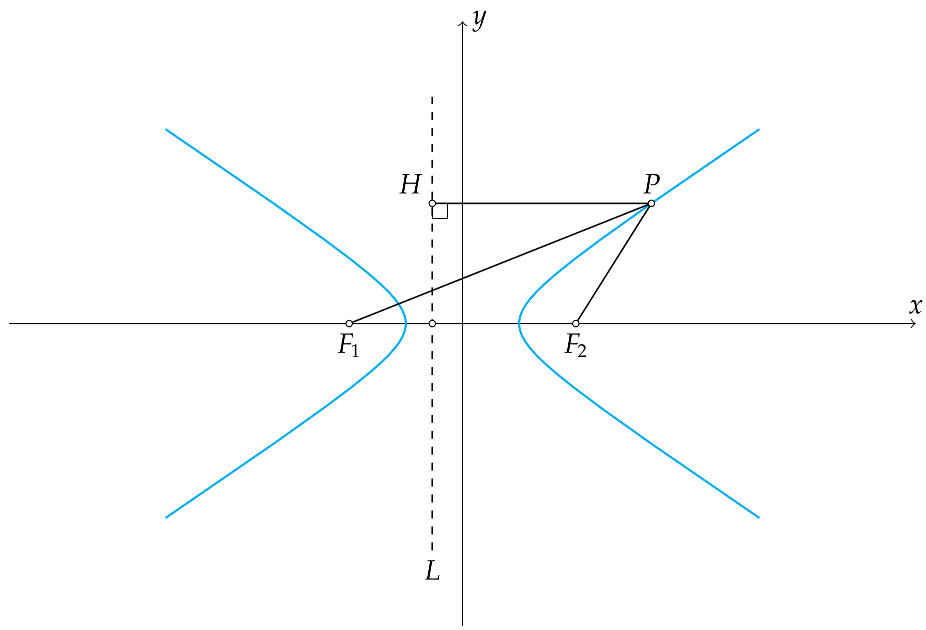


图 99: 双曲线右支的焦半径

双曲线右支上一点 $P(x_0, y_0)$ 至左焦点 F_1 的焦半径公式：

$$PF_1 = e \cdot x_0 - a$$

双曲线右支上一点 $P(x_0, y_0)$ 至右焦点 F_2 的焦半径公式：

$$PF_2 = e \cdot x_0 + a$$

以焦点在原点左侧的情况为例，设双曲线上一点为 $P(x_0, y_0)$，设其在准线上的投影为 $H(l, y_0)$。

由于焦点在原点的左侧，故此时 $f = -c$：

$$l = -\frac{a^2}{c} \tag{1}$$

此处焦点指的是在圆锥曲线第二定义下与左准线 L 搭配的左焦点 F_1。

据此可以得出点 P 至准线 L 的距离 PH:

$$PH = x_0 - l \tag{2}$$

$$PH = x_0 + \frac{a^2}{c} \tag{3}$$

根据离心率定义推导 PF_1:

$$PF_1 = e \cdot PH \tag{4}$$

$$PF_1 = e \cdot \left(x_0 + \frac{a^2}{c} \right) \tag{5}$$

$$PF_1 = e \cdot x_0 + \frac{c}{a} \cdot \frac{a^2}{c} \tag{6}$$

$$PF_1 = e \cdot x_0 + a \tag{7}$$

根据双曲线定义推导 PF_2:

$$PF_2 = PF_1 - 2a \tag{8}$$

$$PF_2 = e \cdot x_0 + a - 2a \tag{9}$$

$$PF_2 = e \cdot x_0 - a \tag{10}$$

由此证明了双曲线右支的焦半径公式。

12.6.7 关于椭圆的一个重要结论

椭圆上任意一点 P 和任意过原点的弦 AB 所构成的直线 PA 和 PB 的斜率之积为定值。

椭圆的该结论可以用以下示意图表示:

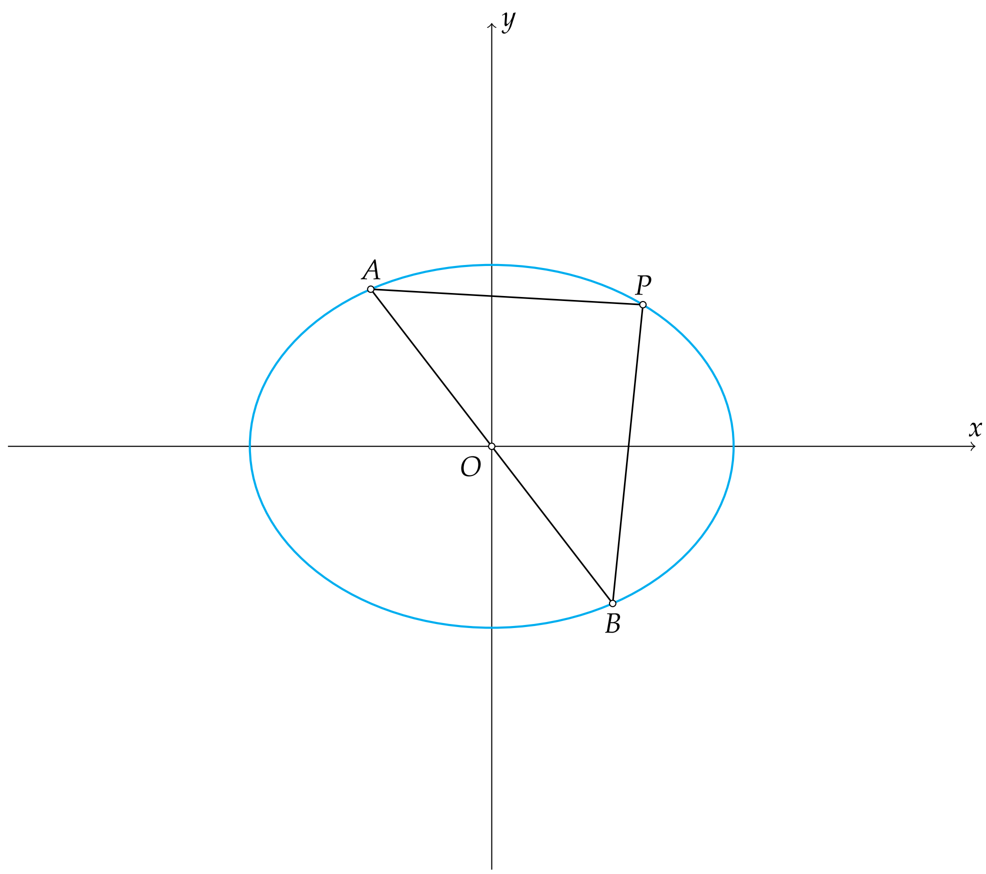


图 100: 关于椭圆的一个重要结论

对于焦点在 x 轴上的椭圆:

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = e^2 - 1$$

对于焦点在 y 轴上的椭圆:

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{1}{e^2 - 1}$$

接下来将通过点差法的思想证明这一结论。

由于直线 AB 原点，两点必然关于原点对称。

我们设椭圆方程为 $Ax^2+By^2+C=0$，点 $P(x_2,y_2)$，点 $A(x_1,y_1)$，点 $B(-x_1,-y_1)$。

因此直线 PA 的斜率可以表达为：

$$k_{PA}=\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2} \tag{1}$$

因此直线 PB 的斜率可以表达为：

$$k_{PB}=\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2} \tag{2}$$

对点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $P(x_2,y_2)$ 运用点差法可得：

$$\begin{cases} Ax_1^2+By_1^2+C=0 \\ Ax_2^2+By_2^2+C=0 \end{cases} \tag{3}$$

$$A\cdot\left({x_1}^2-{x_2}^2\right)+B\cdot\left({y_1}^2-{y_2}^2\right)=0 \tag{4}$$

$$A\cdot(x_1+x_2)\cdot(x_1-x_2)+B\cdot(y_1+y_2)\cdot(y_1-y_2)=0 \tag{5}$$

$$A\cdot(x_1+x_2)\cdot(x_1-x_2)=-B\cdot(y_1+y_2)\cdot(y_1-y_2) \tag{6}$$

$$-\frac{A}{B}=\frac{(y_1+y_2)\cdot(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)\cdot(x_1-x_2)} \tag{7}$$

$$-\frac{A}{B}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \tag{8}$$

$$-\frac{A}{B}=k_{PA}\cdot k_{PB} \tag{9}$$

由此得到了斜率之积的表达式。

根据焦点在 x 轴上的椭圆的一般方程的参数:

$$\begin{cases} A = b^2 \\ B = a^2 \end{cases} \tag{10}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{A}{B} \tag{11}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2} \tag{12}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} \tag{13}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{c^2}{a^2} - \frac{a^2}{a^2} \tag{14}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = e^2 - 1 \tag{15}$$

根据焦点在 y 轴上的椭圆的一般方程的参数:

$$\begin{cases} A = a^2 \\ B = b^2 \end{cases} \tag{16}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{A}{B} \tag{17}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{a^2}{b^2} \tag{18}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{a^2}{c^2 - a^2} \tag{19}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{1}{\frac{c^2}{a^2} - \frac{a^2}{a^2}} \tag{20}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{1}{e^2 - 1} \tag{21}$$

由此我们证明了这一结论。

12.6.8 关于双曲线的一个重要结论

双曲线上任意一点 P 和任意过原点的弦 AB 所构成的直线 PA 和 PB 的斜率之积为定值。

双曲线的该结论可以用以下示意图表示:

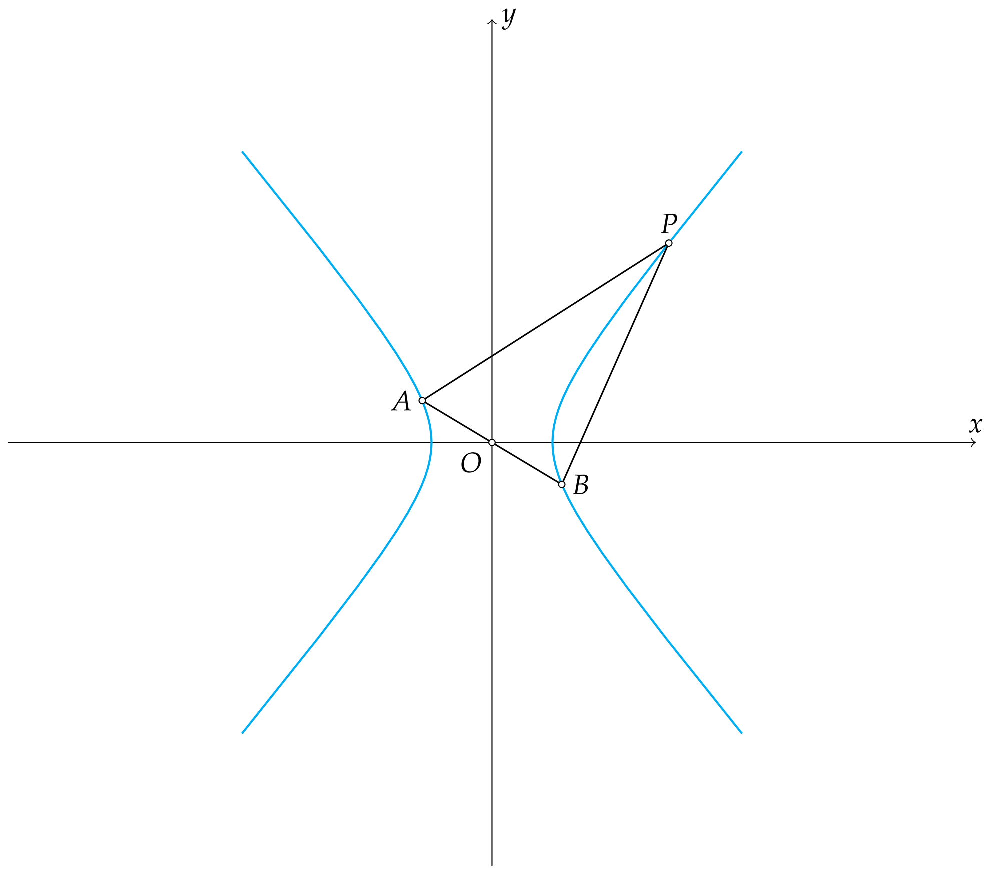


图 101: 关于双曲线的一个重要结论

对于焦点在 x 轴上的双曲线:

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = e^2 - 1$$

对于焦点在 y 轴上的双曲线:

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{1}{e^2 - 1}$$

接下来将通过点差法的思想证明这一结论。

由于直线 AB 过原点，两点必然关于原点对称。

设双曲线方程为 $Ax^2+By^2+C=0$，点 $P(x_2,y_2)$，点 $A(x_1,y_1)$，点 $B(-x_1,-y_1)$。

因此直线 PA 的斜率可以表达为：

$$k_{PA}=\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2} \tag{1}$$

因此直线 PB 的斜率可以表达为：

$$k_{PB}=\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2} \tag{2}$$

对点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $P(x_2,y_2)$ 运用点差法可得：

$$\begin{cases} Ax_1^2+By_1^2+C=0 \\ Ax_2^2+By_2^2+C=0 \end{cases} \tag{3}$$

$$A\cdot\left({x_1}^2-{x_2}^2\right)+B\cdot\left({y_1}^2-{y_2}^2\right)=0 \tag{4}$$

$$A\cdot(x_1+x_2)\cdot(x_1-x_2)+B\cdot(y_1+y_2)\cdot(y_1-y_2)=0 \tag{5}$$

$$A\cdot(x_1+x_2)\cdot(x_1-x_2)=-B\cdot(y_1+y_2)\cdot(y_1-y_2) \tag{6}$$

$$-\frac{A}{B}=\frac{(y_1+y_2)\cdot(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)\cdot(x_1-x_2)} \tag{7}$$

$$-\frac{A}{B}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \tag{8}$$

$$-\frac{A}{B}=k_{PA}\cdot k_{PB} \tag{9}$$

由此得到了斜率之积的表达式。

根据焦点在 x 轴上的双曲线的一般方程的参数：

$$\begin{cases} A = b^2 \\ B = -a^2 \end{cases} \tag{10}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{A}{B} \tag{11}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{b^2}{a^2} \tag{12}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} \tag{13}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{c^2}{a^2} - \frac{a^2}{a^2} \tag{14}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = e^2 - 1 \tag{15}$$

根据焦点在 y 轴上的双曲线的一般方程的参数：

$$\begin{cases} A = -a^2 \\ B = b^2 \end{cases} \tag{16}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{A}{B} \tag{17}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{a^2}{b^2} \tag{18}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{a^2}{c^2 - a^2} \tag{19}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{1}{\frac{c^2}{a^2} - \frac{a^2}{a^2}} \tag{20}$$

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{1}{e^2 - 1} \tag{21}$$

由此我们证明了这一结论。

13 参数方程

参数方程指的是通过一个参数 t，分别建立和坐标 x 和坐标 y 间的函数关系：

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{D}$$

13.1 直线的参数方程

设直线的点方向式方程：

$$v \cdot (x - x_0) - u \cdot (y - y_0) = 0 \tag{1}$$

我们不妨设：

$$x - x_0 = u \cdot t \tag{2}$$

$$y - y_0 = v \cdot t \tag{3}$$

代入验证，发现其满足直线的方程：

$$vu \cdot t - uv \cdot t = 0 \tag{4}$$

故假设成立，对其变形可得：

$$x - x_0 = u \cdot t \tag{5}$$

$$x = x_0 + u \cdot t \tag{6}$$

$$y - y_0 = v \cdot t \tag{7}$$

$$y = y_0 + v \cdot t \tag{8}$$

直线的参数方程：

$$\begin{cases} x = x_0 + ut \\ y = y_0 + vt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

13.2 圆的参数方程

设圆的标准方程：

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{1}$$

对其变形可以得到：

$$\left(\frac{x-a}{r}\right)^2+\left(\frac{y-b}{r}\right)^2=1 \tag{2}$$

我们不妨设：

$$\cos\varphi=\frac{x-a}{r} \tag{3}$$

$$\sin\varphi=\frac{y-b}{r} \tag{4}$$

代入验证，发现其满足圆的标准方程：

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1 \tag{5}$$

故假设成立，对其变形可得：

$$\cos\varphi=\frac{x-a}{r} \tag{6}$$

$$x-a=\cos\varphi\cdot r \tag{7}$$

$$x=a+\cos\varphi\cdot r \tag{8}$$

$$\sin\varphi=\frac{y-b}{r} \tag{9}$$

$$y-b=\sin\varphi\cdot r \tag{10}$$

$$y=b+\sin\varphi\cdot r \tag{11}$$

圆的参数方程：

$$\begin{cases} x=a+r\cdot\cos\varphi \\ y=b+r\cdot\sin\varphi \end{cases} \qquad \varphi\in[0,2\pi)$$

13.3 椭圆的参数方程

设椭圆的标准方程：

$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{s^2}=1 \tag{1}$$

对其变形可以得到：

$$\left(\frac{x}{l}\right)^2+\left(\frac{y}{s}\right)^2=1 \tag{2}$$

我们不妨设：

$$\cos\varphi=\frac{x}{l} \tag{3}$$

$$\sin\varphi=\frac{y}{s} \tag{4}$$

代入验证，发现其满足椭圆的标准方程：

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1 \tag{5}$$

故假设成立，对其变形可得：

$$\cos\varphi=\frac{x}{l} \tag{6}$$

$$x=l\cdot\cos\varphi \tag{7}$$

$$\sin\varphi=\frac{y}{l} \tag{8}$$

$$y=s\cdot\sin\varphi \tag{9}$$

椭圆的参数方程（焦点位于 x 轴）：

$$\begin{cases} x=l\cdot\cos\varphi \\ y=s\cdot\sin\varphi \end{cases} \qquad \varphi\in[0,2\pi)$$

椭圆的参数方程（焦点位于 y 轴）：

$$\begin{cases} x=s\cdot\cos\varphi \\ y=l\cdot\sin\varphi \end{cases} \qquad \varphi\in[0,2\pi)$$

13.4 双曲线的参数方程

设双曲线的标准方程:

$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{s^2} = 1 \tag{1}$$

对其变形可以得到:

$$\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{y}{s}\right)^2 = 1 \tag{2}$$

我们不妨设:

$$\sec\varphi = \frac{x}{l} \tag{3}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{s} \tag{4}$$

代入验证，发现其满足双曲线的标准方程:

$$\sec^2\varphi + \tan^2\varphi = 1 \tag{5}$$

故假设成立，对其变形可得:

$$\sec\varphi = \frac{x}{l} \tag{6}$$

$$x = l \cdot \sec\varphi \tag{7}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{l} \tag{8}$$

$$y = s \cdot \tan\varphi \tag{9}$$

双曲线的参数方程（焦点位于 x 轴）:

$$\begin{cases} x = l \cdot \sec\varphi \\ y = s \cdot \tan\varphi \end{cases} \qquad \varphi \in [0, 2\pi)$$

双曲线的参数方程（焦点位于 y 轴）:

$$\begin{cases} x = s \cdot \sec\varphi \\ y = l \cdot \tan\varphi \end{cases} \qquad \varphi \in [0, 2\pi)$$

13.5 抛物线的参数方程

设抛物线的参数方程:

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

我们不妨设:

$$t = \frac{x}{y} \tag{2}$$

变形代入抛物线的参数方程, 可以得到:

$$y^2 = 2p \cdot t \cdot y \tag{3}$$

$$y = 2pt \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{t^2} = 2px \tag{5}$$

$$\frac{x}{t^2} = 2p \tag{6}$$

$$x = 2p \cdot t^2 \tag{7}$$

抛物线的参数方程（焦点位于 x 轴）:

$$\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

抛物线的参数方程（焦点位于 y 轴）:

$$\begin{cases} x = 2pt \\ y = 2pt^2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

14 复数

14.1 复数的定义

为了解决负数的开方，我们定义虚数单位 i:

$$i^2 = -1$$

我们将符合以下形式的数称为复数:

$$z = a + bi \quad (a \in \mathbb{R} \;\; b \in \mathbb{R})$$

其中 a 和 b 分别称为复数的实部和虚部:

$$a = \operatorname{Re} z$$

$$b = \operatorname{Im} z$$

由所有复数构成的集合称为复数集，用符号 $\mathbb{C}$ 表示。

复数可以进行如下分类:

$$\text{复数}\ (z = a + bi) \begin{cases} \text{实数} & (b = 0) \\ \text{虚数} & (b \neq 0) \end{cases}$$

其中，实数集可以用符号 $\mathbb{R}$ 表示，虚数集可以用符号 $\mathbb{I}$ 表示。

14.2 复平面

对于任意实数，我们均可以在数轴上表示。

对于任意复数，我们均可以在复平面上表示。

复平面是一个平面直角坐标系，用于表示复数，在复平面中，x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴。

复平面上的点和复数一一对应，对于复数 $z = a + bi$，在复平面上的对应点为 $Z(a, b)$。

14.3 复数的相等

对于两个复数:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

当满足以下条件时:

$$a = c \qquad b = d$$

我们认为两个复数相等:

$$z_1 = z_2$$

14.4 复数的加法和减法

对于两个复数:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

我们定义复数的加法:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

我们定义复数的减法:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

复数的加法和减法运算仍然满足实数运算的所有性质。

14.5 复数的绝对值及其运算

对于一个复数:

$$z = a + bi$$

我们定义复数的绝对值:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

复数的绝对值运算有以下性质:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

14.6 复数的共轭及其运算

对于一个复数:

$$z = a + bi$$

我们定义复数的共轭:

$$\overline{z} = a - bi$$

复数的共轭有以下性质:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

14.7 复数的代数形式

复数的代数形式:

$$z = a + bi$$

14.8 复数的三角形式

对于任意复数 $z = a + bi$ 在复平面上的对应点 $Z(a, b)$，我们将向量 $\overrightarrow{OZ}$ 与 x 轴形成的角称为复数 z 的辐角，若辐角 θ 满足条件 $\theta \in [0, 2\pi)$，此时的辐角称为复数 z 的辐角主值:

$$\theta = \arg z$$

我们令 $r = |z| = |\overrightarrow{OZ}|$，根据三角比的定义:

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \tag{1}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r} \tag{2}$$

对上述式子变形可得:

$$a = r \cdot \cos\theta \tag{3}$$

$$b = r \cdot \sin\theta \tag{4}$$

代入复数的代数形式可得:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \quad (5) \\ &= r \cdot \cos\theta + r \cdot \sin\theta \cdot i \quad (6) \\ &= r \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot i) \quad (7) \end{aligned}$$

复数的三角形式:

$$z = r \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot i)$$

14.9 复数的乘法和除法

对于两个代数形式的复数:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

通过如下推导:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) && (1) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 && (2) \\ &= ac + adi + bci - bd && (3) \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)i && (4) \end{aligned}$$

我们定义代数形式下复数的乘法:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

通过如下推导:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + bi}{c + di} && (1) \\ &= \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} && (2) \\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} && (3) \\ &= \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}i && (4) \end{aligned}$$

我们定义代数形式下复数的除法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}i$$

复数的乘法和除法运算仍然满足实数运算的所有性质。

对于两个三角形式的复数:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha \cdot i)$$
$$z_2 = r_2 \cdot (\cos\beta + \sin\beta \cdot i)$$

通过如下推导:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha \cdot i) \cdot r_2 \cdot (\cos\beta + \sin\beta \cdot i) && (1) \\ &= r_1 r_2 \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha \cdot i) \cdot (\cos\beta + \sin\beta \cdot i) && (2) \\ &= r_1 r_2 \cdot [(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) + (\cos\alpha \cdot \sin\beta - \sin\alpha \cdot \cos\beta) \cdot i] && (3) \\ &= r_1 r_2 \cdot [\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) \cdot i] && (4) \end{aligned}$$

我们定义三角形式下复数的乘法:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot [\ \cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) \cdot i\ ]$$

通过如下推导:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha \cdot i)}{r_2 \cdot (\cos\beta + \sin\beta \cdot i)} && (1) \\ &= \frac{[r_1 \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha \cdot i)] \cdot [r_2 \cdot (\cos\beta - \sin\beta \cdot i)]}{[r_2 \cdot (\cos\beta + \sin\beta \cdot i)] \cdot [r_2 \cdot (\cos\beta - \sin\beta \cdot i)]} && (2) \\ &= \frac{r_1 r_2 \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha \cdot i) \cdot (\cos\beta - \sin\beta \cdot i)}{{r_2}^2} && (3) \\ &= \frac{r_1 r_2 \cdot [(\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta) + (\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta) \cdot i]}{{r_2}^2} && (4) \\ &= \frac{r_1 r_2 \cdot [\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha - \beta) i]}{{r_2}^2} && (5) \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha - \beta) \cdot i] && (6) \end{aligned}$$

我们定义三角形式下复数的除法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\ \cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha - \beta) \cdot i\ ]$$

两个复数相乘，积的绝对值等于绝对值的积，积的辐角等于两个辐角之和。

两个复数相除，商的绝对值等于绝对值的商，商的辐角等于两个辐角之差。

棣莫弗定理指的就是三角形式下的复数乘法。

14.10 复数的乘方和开方

对于一个三角形式的复数:

$$z = r \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot i)$$

通过如下推导求解复数的 n 次幂:

$$\begin{aligned}
z^n &= [r \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot i)]^n & (1)\\
&= [r \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot i)] \cdot [r \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot i)] \cdot [r \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot i)]^{n-2} & (2)\\
&= \left[r^2 \cdot (\cos(2\theta) + \sin(2\theta) \cdot i)\right] \cdot [r \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot i)] \cdot [r \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot i)]^{n-3} & (3)\\
&= \left[r^3 \cdot (\cos(3\theta) + \sin(3\theta) \cdot i)\right] \cdot [r \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot i)] \cdot [r \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot i)]^{n-4} & (4)\\
&= \left[r^4 \cdot (\cos(4\theta) + \sin(4\theta) \cdot i)\right] \cdot [r \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot i)] \cdot [r \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot i)]^{n-5} & (5)\\
&= r^n \cdot [\cos(n\theta) + \sin(n\theta) \cdot i] & (6)
\end{aligned}$$

我们定义复数的乘方:

$$z^n = r^n \cdot [\cos(n\theta) + \sin(n\theta) \cdot i]$$

通过如下推导求解复数的 n 次方:

设复数 z_0 的 n 次方根为复数 z，即两者满足 $z^n = z_0$，我们令:

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi \cdot i) \qquad z_0 = r \cdot (\cos\theta + \sin\theta \cdot i) \tag{1}$$

将复数 z 和复数 z_0 代入:

$$\rho^n \cdot (\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi) \cdot i) = r \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot i) \tag{2}$$

列出方程组并求解:

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \rho = \sqrt[n]{r} \qquad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \tag{3}$$

我们定义复数的开方:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \cdot i\right] \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

14.11 复数集内的一元二次方程

对于一元二次方程:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

对其变形可以得到:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \tag{2}$$

对其配方可以得到:

$$\left(x^2 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \tag{3}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \tag{4}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \tag{5}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{6}$$

方程两侧开平方根可得（此处的根号代表所有平方根）:

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \tag{7}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{8}$$

$$x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \tag{9}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{10}$$

当一元二次方程的系数为复数时，方程的求根公式（此处的根号代表所有平方根）:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (a, b, c \in \mathbb{C})$$

但是当一元二次方程的参数均为实数时，由于根号下的 b^2-4ac 为实数，所以可以对其分类讨论，从而得以使用一般意义上的根号来表达求根公式。

首先我们定义根的判别式：

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

当一元二次方程的系数为复数时，方程的求根公式（此处的根号代表算数平方根）：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (a,b,c \in \mathbb{R} \quad \Delta > 0)$$

$$x = -\frac{b}{2a} \qquad (a,b,c \in \mathbb{R} \quad \Delta = 0)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac-b^2}\, i}{2a} \qquad (a,b,c \in \mathbb{R} \quad \Delta < 0)$$

韦达定理表述了一元二次方程根与系数的关系，且无论系数为实数还是复数均成立：

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

15 空间直线与平面

公理 1：如果一条直线上有两个点在平面上，那么这条直线上所有点都在这个平面上。

公理 2：如果两个平面存在一个公共点，那么它们所有公共点组成了一条直线。

公理 3：经过不在同一直线上的三点的平面有且只有一个。

公理 4：平行于同一条直线的两条直线平行。

15.1 直线和平面

直线是无限延伸的，空间中直线的方向可以用它的方向向量 $\vec{d}$ 表示。

平面是无限延伸的，空间中平面的方向可以用它的法向量 $\vec{n}$ 表示。

15.1.1 确定一个平面的条件

条件 1：不在同一直线上的三点确定一个平面。

条件 1 的证明：由公理 3 可以直接得到。

条件 2：一条直线和直线外一点确定一个平面。

条件 2 的证明：

1. 设直线 l 外一点 C
2. 设直线 l 上任意两点 AB

由公理 3 可知，点 ABC 可以共同确定一个平面 α，故点 ABC 均在平面 α 上。

由公理 1 可知，点 BC 在平面 α 上，故直线 l 也在平面 α 上。

条件 3：两条相交的直线确定一个平面。

条件 3 的证明：

1. 设直线 l_a 和直线 l_b 的交点为点 C。
2. 设直线 l_a 上异于点 C 的任意一点为点 A。
3. 设直线 l_b 上异于点 C 的任意一点为点 B。

由公理 3 可知，点 ABC 可以共同确定一个平面 α，故点 ABC 均在平面 α 上。

由公理 1 可知，点 AC 在平面 α 上，故直线 l_a 也在平面 α 上。

由公理 1 可知，点 BC 在平面 α 上，故直线 l_b 也在平面 α 上。

条件 4：两条平行的直线确定一个平面。

条件 4 的证明:

1. 设直线 l_a 上两点 A_1A_2，设直线 l_b 上两点 B_1B_2
2. 由公理 3 可设，点 $A_1B_1B_2$ 在平面 α 上。
3. 由公理 3 可设，点 $A_2B_1B_2$ 在平面 β 上。

使用反证法，假设平面 α 和平面 β 不重合，则点 A_2 不在平面 α 上。

在平面 α 内，过 A 作直线 $l_{A_1A_3}$，使得 $l_{A_1A_3} \parallel l_{B_1B_2}$。

因为 $l_{A_1A_3} \parallel l_{B_1B_2}$，同时 $l_{A_1A_2} \parallel l_{B_1B_2}$，且两条直线均过点 A_1。

所以 $l_{A_1A_3}$ 和 $l_{A_1A_2}$ 是同一条直线，故点 A_2 在平面 α 上，矛盾，故假设不成立。

由公理 1 可知，点 A_1A_2 在平面 α 上，故直线 l_a 也在平面 α 上。

由公理 1 可知，点 B_1B_2 在平面 α 上，故直线 l_b 也在平面 α 上。

15.2 空间中直线与直线的关系

下表列出了空间中直线与直线的关系:

两条直线处在不同平面	两条直线间存在 0 个交点	异面
两条直线处在相同平面	两条直线间存在 0 个交点	共面（平行）
两条直线处在相同平面	两条直线间存在 1 个交点	共面（相交）
两条直线处在相同平面	两条直线间存在无数个交点	共面（重合）

表 14: 空间中直线与直线的关系

两条空间直线所成的角:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{d_a} \cdot \vec{d_b}|}{|\vec{d_a}| \cdot |\vec{d_b}|}$$

两条直线所成的角的定义：在空间中任取一点 O，过点 O 分别作两条直线 a b 的平行线 a_0 b_0，其中将直线 a_0 和直线 b_0 的夹角定义为两条空间直线所成的角。

两条直线间的距离的定义：对于两条平行直线或者两条异面直线 l_1 l_2，作直线 l_1 l_2 的公垂线 l_0，其中将公垂线 l_0 截两直线 l_1 l_2 的线段长度为两条直线间的距离。

对于两条不重合的直线，若其所成角满足 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$，那么这两条直线垂直。

对于两条垂直的直线 l_1 l_2，我们可以记作：$l_1 \perp l_2$

对于两条平行的直线 l_1 l_2，我们可以记作：$l_1 \parallel l_2$

等角定理: 若两条相交直线 a_1b_1 与另外两条相交直线 a_2b_2 分别平行，那么两组直线的夹角相等。

等角定理的证明:

因为 $O_1A_1 \parallel O_2A_2$，因为 $O_1A_1 = O_2A_2$

所以四边形 $O_1A_1A_2O_2$ 是平行四边形

所以 $O_1O_2 \parallel A_1A_2$，所以 $O_1O_2 = A_1A_2$

因为 $O_1B_1 \parallel O_2A_2$，因为 $O_1B_1 = O_2B_2$

所以四边形 $O_1B_1B_2O_2$ 是平行四边形

所以 $O_1O_2 \parallel B_1B_2$，所以 $O_1O_2 = B_1B_2$

所以 $A_1A_2 \parallel B_1B_2$，所以 $A_1A_2 = B_1B_2$

所以四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 是平行四边形

所以 $A_1B_1 = A_2B_2$

所以 $\triangle A_1O_1B_1 \cong \triangle A_2O_2B_2$ (S.S.S)

所以 $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$

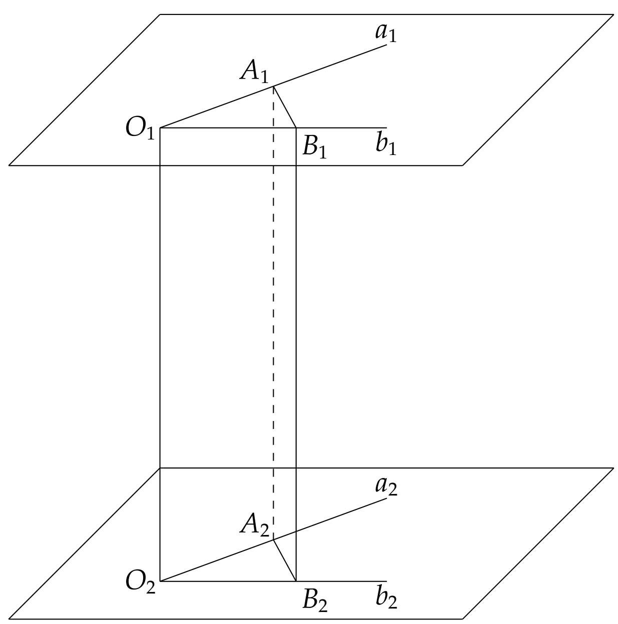


图 102: 等角定理的示意图

15.3 空间中直线与平面的关系

下表列出了空间中直线与平面的关系:

直线和平面间存在 0 个交点	平面外（平行）
直线和平面间存在 1 个交点	平面外（相交）
直线和平面间存在无穷多个交点	平面上

表 15: 空间中直线与平面的关系

空间直线和平面所成的角:

$$\sin\theta = \frac{|\vec{d}\cdot\vec{n}|}{|\vec{d}|\cdot|\vec{n}|}$$

空间直线和平面所成的角的定义：对于平面 α 外的直线 l，在平面 α 上作直线 l 的射影直线 l_0，其中将直线 l 和直线 l_0 的夹角定义为空间直线和平面所成的角。

对于平面外的直线，若其所成角满足 $\theta = \frac{\pi}{2}$，那么直线和平面垂直。

对于垂直的直线 l 和平面 α，我们可以记作：$l \perp \alpha$

对于平行的直线 l 和平面 α，我们可以记作：$l \parallel \alpha$

线面平行判定定理：对于任意平面 α，如果平面 α 外存在直线 l_1，同时平面 α 上存在直线 l_2，满足直线 l_1 平行于直线 l_2，那么直线 l_1 与平面 α 平行。

线面平行判定定理的证明:

使用反证法，假设直线 l_1 和平面 α 不平行，两者相交于点 O

过点 O 作直线 l_2 的平行线 l_0，显然 $l_2 \parallel l_0$，显然 $l_1 \parallel l_0$

过点 O 的直线 l_0 和过点 O 的直线 l_1 平行，但两条平行直线却存在交点

矛盾，故假设不成立，因此直线 l_1 和平面 α 平行

线面平行性质定理：对于任意直线 l，若存在平面 α 平行于直线 l，且存在平面 β 经过于直线 l，那么平面 α 和平面 β 的交线 l_0 平行于直线 l。

线面平行性质定理的证明:

使用反证法，假设直线 l 与交线 l_0 不平行，两者相交于点 O

由于交线 l_0 过点 O，所以平面 α 过点 O，所以平面 β 过点 O

由于平面 α 过点 O，同时直线 l 过点 O，但是平面 α 平行于直线 l

矛盾，故假设不成立，因此直线 l 和交线 l_0 平行

线面垂直判定定理： 如果直线 l 和平面 α 上两条相交直线 a b 垂直，那么直线 l 和平面 α 垂直。

线面垂直判定定理的证明:

设直线 a 和直线 b 的交点是 O，设直线 c 为平面上任意一条直线。

1. 若直线 l 和直线 c 均经过点 O

在直线 l 两侧取点 P Q，使得 $OP = OQ$

在平面 α 上作一条直线，使得它与直线 a b c 分别交于点 A B C

联结 PA，联结 PB，联结 PC，联结 QA，联结 QB，联结 QC

因为 OA 垂直平分 PQ，所以 $PQ = QA$

因为 OB 垂直平分 PQ，所以 $PQ = QB$

因为 $PA = QA$，因为 $PB = QB$，因为 $AB = AB$

所以 $\triangle PAB \cong \triangle QAB$ (S.S.S)

所以 $PC = QC$，所以 OC 垂直平分 PQ，所以 $PQ \perp OC$，即 $l \perp c$

2. 若直线 l 和直线 c 不经过点 O

过交点 O 作直线 l 的平行线 l_0，过交点 O 作直线 c 的平行线 c_0

由第一种情况可知 $l_0 \perp c_0$，根据等角定理可知 $l \perp c$

综上所述，直线 l 与平面 α 上任意一条直线 c 均垂直，故直线 l 与平面 α 垂直

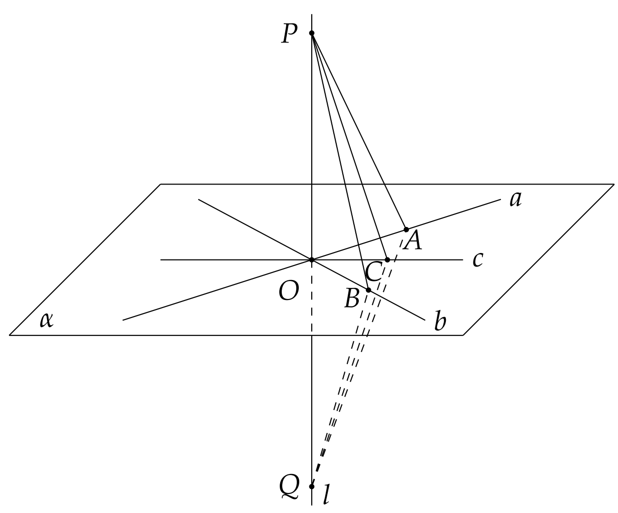


图 103: 线面垂直判定定理的示意图

线面垂直性质定理：如果直线 l_1 和直线 l_2 垂直于同一个平面 α，那么直线 l_1 平行于直线 l_2。

线面垂直性质定理证明:

设直线 l_1 和平面 α 相交于点 A，设直线 l_2 和平面 α 相交于点 B

过点 A 在平面 α 上作任意直线 a，过点 A 在平面 α 上作任意直线 b

使用反证法，假设 l_2 不平行于 l_1，过点 O 作 l_1 的平行线 l_0

因为 $l_0 \parallel l_1$，所以 $l_0 \perp a$，所以 $l_0 \perp b$

因为 l_0 垂直于平面 α 上的两条相交直线，所以 $l_0 \perp \alpha$

过点 O 的直线 l_0 垂直于平面 α，过点 O 的直线 l_2 垂直于平面 α

因为过同一点垂直于同一平面的直线只有一条，而直线 l_0 和直线 l_2 不是同一条直线

矛盾，故假设不成立，因此直线 l_1 平行于直线 l_2

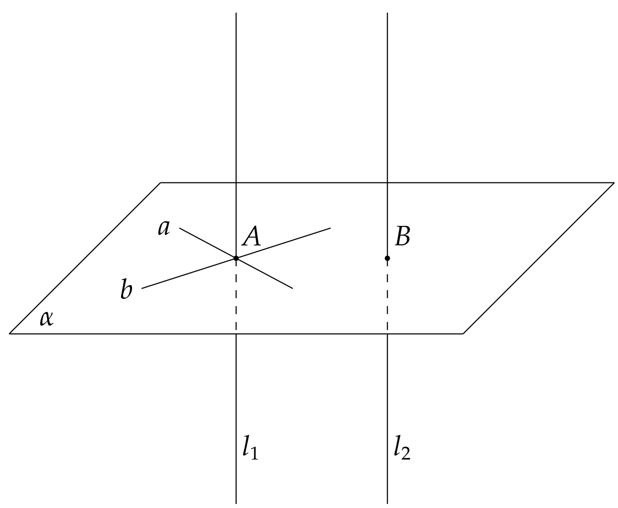


图 104: 线面垂直性质定理的示意图

三垂线定理：对于一个平面 α，设直线 a 在平面 α 上，设直线 l_1 是平面 α 的一条斜线，若直线 a 垂直于射影 l_0，那么直线 a 垂直于斜线 l_1。

三垂线定理的证明：

过直线 l_1 上任意一点 P 作 PQ 垂直于平面 α，设垂足为 Q，设斜线的斜足为 M

过点 Q 作直线 a 的平行线 b，过点 M 作直线 a 的平行线 c

因为 $MQ \perp a$，而直线 b 和直线 c 均平行于直线 a

所以 $b \perp MQ$，所以 $c \perp MQ$

因为 $PQ \perp \alpha$，而直线 b 和直线 c 均在平面 α 上

所以 $b \perp PQ$，所以 $c \perp PQ$

因为直线 c 同时垂直于平面 PQM 上的两条相交直线 PQ 和 MQ

所以根据线面平行判定定理，直线 c 垂直于平面 PMQ，所以 $c \perp PM$

因为直线 a 和直线 c 平行，所以 $a \perp PM$，即 $a \perp l_1$

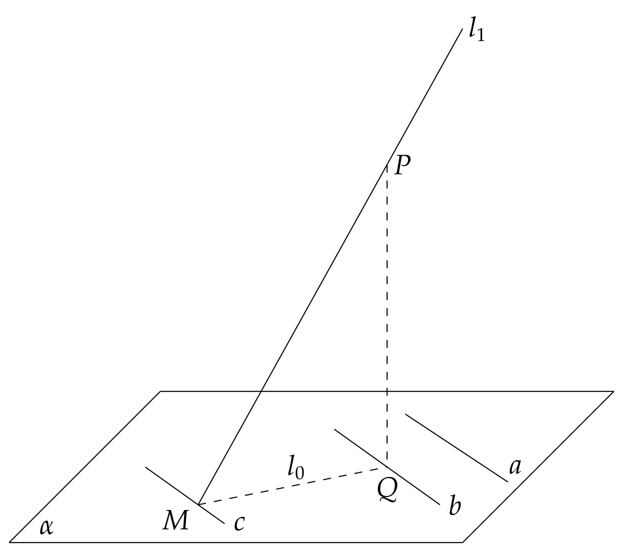


图 105: 三垂线定理的示意图

三垂线逆定理：对于一个平面 α，设直线 a 在平面 α 上，设直线 l_1 是平面 α 的一条斜线，若直线 a 垂直于斜线 l_1，那么直线 a 垂直于射影 l_0。

三垂线逆定理可以使用类似的方法加以证明。

15.4 空间中平面与平面的关系

下表列出了空间中平面与平面的关系：

两个平面间存在 0 条交线	平行
两个平面间存在 1 条交线	相交
两个平面间存在无数条交线	重合

表 16: 空间中平面与平面的关系

两个空间平面所成的角：

$$\cos\theta = -\frac{|\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta}|}{|\vec{n_\alpha}| \cdot |\vec{n_\beta}|}$$

两个空间平面所成的角的定义：对于平面 α 和平面 β，两者的交线 l 将平面分为了两个半平面，在交线 l 上取任意点 O，在半平面 α 和半平面 β 上分别过点 O 作交线 l 的垂线 OA 和垂线 OB，其中将垂线 OA 和垂线 OB 所成的角定义为两个空间平面所成的角。

我们将两个半平面直接构成的角称为二面角，将用于度量前者由两条垂线构成的角称为平面角。

对于两个不重合的平面 α 和平面 β，若其所成角满足 $\theta = \frac{\pi}{2}$，那么两个平面垂直。

对于两个垂直的平面 α β，我们可以记作：$\alpha \perp \beta$

对于两个平行的平面 α β，我们可以记作：$\alpha \parallel \beta$

由于半平面可以自由选择，故两个空间平面所成的角存在两种情况：

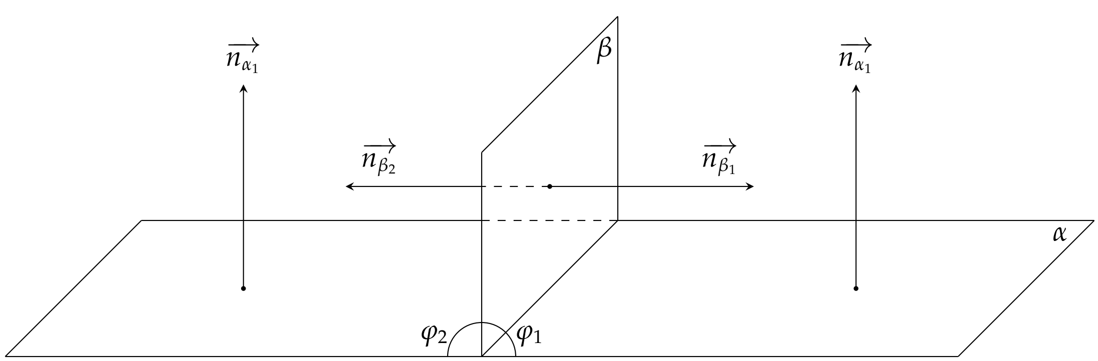


图 106: 两个空间平面所成的角

如果选择法向量 n_{α_1} 和法向量 n_{β_1}，所得的 $\theta = \varphi_1$。

如果选择法向量 n_{α_1} 和法向量 n_{β_2}，所得的 $\theta = \varphi_2$。

通过这个例子我们可以发现，两个法向量运算得到的二面角是位于两者所处的区域的二面角。

面面平行判定定理：对于一个平面 α 和一个平面 β，若平面 α 上存在两条相交直线 $l_1\ l_2$，满足直线 $l_1\ l_2$ 与平面 β 平行，那么平面 α 与平面 β 平行。

面面平行判定定理的证明:

使用反证法，假设平面 α 和平面 β 不平行，两者交线为 l

因为 $l_1 \parallel \beta$，所以直线 l_1 和平面 β 无交点

因为 $l_2 \parallel \beta$，所以直线 l_2 和平面 β 无交点

因为直线 l_1 与直线 l 无交点，所以直线 l_1 和直线 l 平行或异面

因为直线 l_2 与直线 l 无交点，所以直线 l_2 和直线 l 平行或异面

因为直线 l_1 与直线 l_2 以及直线 l 均在平面 α，所以直线 l_1 和直线 l_1 均平行于直线 l

由平行线的传递性可知，直线 l_1 与直线 l_2 平行，违背定理中直线 l_1 与直线 l_2 相交

矛盾，故假设不成立，因此平面 α 与平面 β 平行

面面平行性质定理：对于两个平行的平面 $\alpha\ \beta$，如果平面 α 和平面 β 同时与一个平面 γ 相交，将平面 $\alpha\ \beta$ 和平面 γ 的交线分别记作 $a\ b$，那么交线 a 与交线 b 平行。

面面平行性质定理的证明:

使用反证法，假设交线 a 与交线 b 不平行，记两条交线的交点为 O

因为交线 a 经过点 O，且交线 a 在平面 α 上，所以点 O 在平面 α 上

因为交线 b 经过点 O，且交线 b 在平面 β 上，所以点 O 在平面 β 上

因此点 O 同时在平面 α 和平面 β 上，违背定理中平面 α 平行于平面 β

矛盾，故假设不成立，因此交线 a 与交线 b 平行

面面垂直判定定理： 若平面 α 经过直线 l_1，且平面 β 垂直于直线 l_1，那么平面 α 和平面 β 垂直。

面面垂直判定定理的证明:

设直线 l_1 和平面 β 的交点是 O

过交点 O 在平面 β 上作直线 l_2 垂直于交线 l

因为直线 l_1 和平面 β 垂直

所以直线 l_1 和直线 l_2 垂直

所以平面 α 和平面 β 的平面角为 $\dfrac{\pi}{2}$

所以平面 α 和平面 β 的二面角为 $\dfrac{\pi}{2}$

所以平面 α 和平面 β 垂直

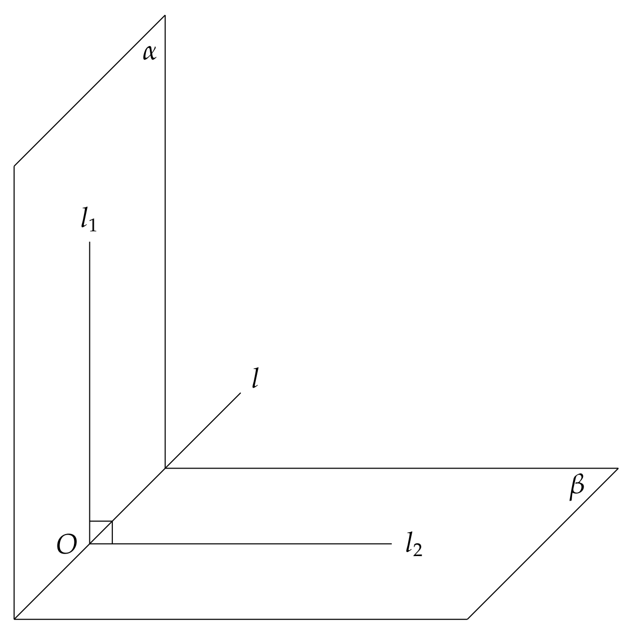


图 107: 面面垂直判定定理的示意图

面面垂直性质定理：若平面 α 和平面 β 垂直，设两个平面的交线为 l，对于平面 α 上的直线 l_1，若直线 l_1 垂直于交线 l，那么直线 l_1 垂直于平面 β。

面面垂直性质定理的证明:

设直线 l_1 和平面 β 的交点是 O

过交点 O 在平面 β 上作直线 l_2 垂直于交线 l

因为平面 α 和平面 β 垂直

所以平面 α 和平面 β 的平面角为 $\dfrac{\pi}{2}$

所以平面 α 和平面 β 的二面角为 $\dfrac{\pi}{2}$

因此直线 l_1 和直线 l_2 垂直

因为直线 l_1 和交线 l 垂直

所以直线 l_1 同时垂直于平面 β 上的两条相交直线

所以直线 l_1 垂直于平面 β

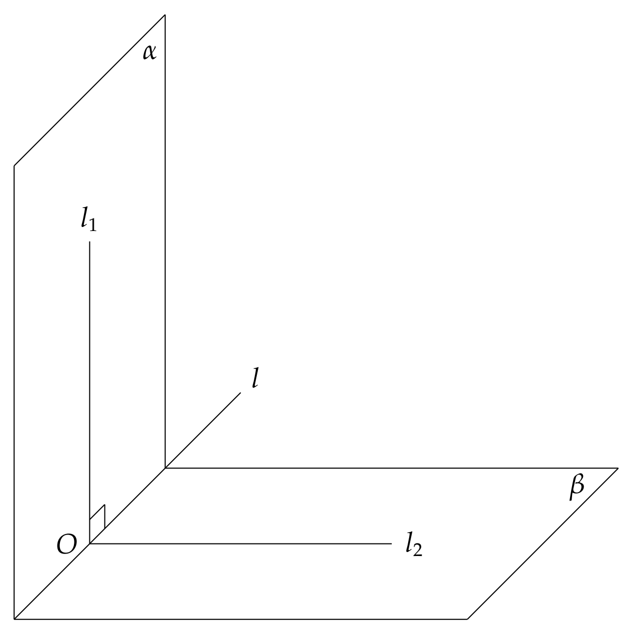


图 108: 面面垂直性质定理的示意图

15.5　点到平面的距离

求解点 P 到平面 α 的距离 h。

过点 P 作直线 PH 垂直于平面 α，其垂足为点 H。

在平面 α 上任取一点 Q，连接 QH，连接 PQ，显然 $PH \perp QH$。

我们可以将距离用向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的模和角 θ 的正弦表示：

$$h = |\overrightarrow{PQ}| \cdot \sin\theta \tag{1}$$

我们可以将角 θ 的正弦用直线的方向向量 $\overrightarrow{PQ}$ 和平面的法向量 $\vec{n}$ 表示：

$$h = |\overrightarrow{PQ}| \cdot \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\vec{n}|} \tag{2}$$

$$= \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{3}$$

点到平面的距离公式：

$$h = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

其中，点 P 代表平面 α 外一点，点 Q 代表平面 α 上任意一点。

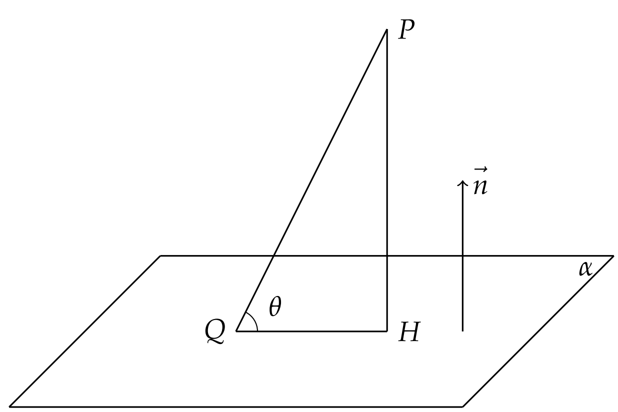


图 109: 点到平面的距离示意图

15.6 异面直线的距离

求解异面直线 a 和 b 间的距离 h。

在直线 a 上任取点 A，在直线 b 上任取点 B，过点 B 作直线 BH 垂直于平面 α。

显然线段 BH 的长度就是所求距离 h，运用点到平面的距离公式：

$$h = BH \tag{1}$$

$$= \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{2}$$

异面直线的距离：

$$h = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

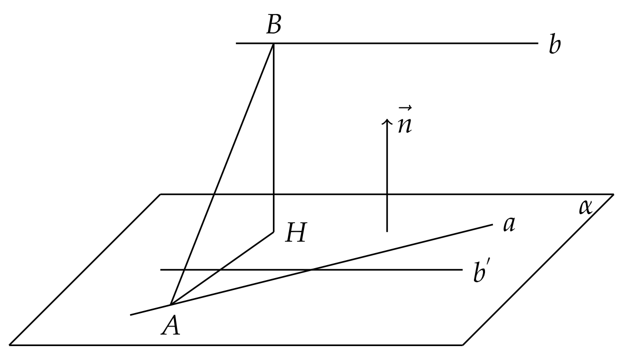


图 110: 异面直线的距离示意图

16 简单几何体

16.1 多面体

多面体：由若干个多边形围成的封闭立体图形。

多面体的面：构成多面体的多边形，其数量用字母 F 表示。

多面体的棱：相邻多边形的公共边，其数量用字母 E 表示。

多面体的顶点：棱与棱之间的交点，其数量用字母 V 表示。

多面体的命名遵循以下规则：若一个多面体有 F 面，那么称其为 F 面体。

另外我们将联结不在同一面上的两个顶点的线段，称为多面体的对角线。

若多面体满足对于任意面，其他各面都在该面的一侧，那么称为凸多面体，反之称为凹多面体。

16.1.1 正多面体

正多面体需要满足以下两个特征：

1. 每个面都是有相同边数的正多边形。

2. 每个顶点都有相同数量的棱数。

正多面体只有五种：正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体。

正多面体	顶点数 V-Vertex	棱数 E-Edge	面数 F-Face	组成多边形
正四面体	4	6	4	正三边形
正六面体	8	12	6	正四边形
正八面体	6	12	8	正三边形
正十二面体	20	30	12	正五边形
正二十面体	12	30	20	正三角形

表 17: 正多面体的性质

16.1.2 欧拉定理

简单多面体：满足表面经过拓扑变换可以变为球面的多面体。

简单多面体满足以下关系：

$$V - E + F = 2$$

简单多面体的该数量关系称为多面体的欧拉定理。

16.2 棱柱

棱柱：有两个平行面是多边形，其余各面都是四边形，且相邻四边形的公共边都平行的多面体。

下表列出了棱柱的相关概念：

棱柱的底面	棱柱中互相平行的两个面
棱柱的侧面	棱柱中其余的各四边形面
棱柱的侧棱	棱柱中相邻两个侧面的公共边
棱柱的高	两个底面间的距离

表 18: 棱柱的相关概念

棱柱的命名遵循以下规则：若一个棱柱的底面多边形有 n 边，那么称其为 n 棱柱。

侧棱柱：侧棱和底面斜交的棱柱。

直棱柱：侧棱和底面垂直的棱柱。

正棱柱：底面是正多边形，且侧棱和底面垂直的棱柱。

16.2.1 棱柱的性质

以下是棱柱的性质：

1. 棱柱的侧面都是平行四边形。

2. 棱柱中平行于底面的截面互为全等的多边形。

其中性质二也可以通过数学形式表达：

$$\frac{S_A}{S_B} = 1$$

即任意两个平行于底面的截面，其面积 S_A S_B 的比等于一。

以下是正棱柱的性质：

1. 正棱柱的侧面都是全等的矩形。

2. 正棱柱的高等于其侧棱的长度。

16.2.2 正棱柱的表面积

我们定义以下字母:

n 代表正棱柱底面的边数。

a 代表正棱柱底面的边长。

c 代表正棱柱底面的周长。

s 代表正棱柱底面的面积。

h 代表正棱柱的高，即正棱柱侧面矩形的高。

正棱柱的底面积:

$$S_B = s$$

正棱柱的侧面积:

$$S_A = c \cdot h$$

$$S_A = n \cdot a \cdot h$$

正棱柱侧面的展开图形是 n 个全等的矩形，故可以进行上述计算。

正棱柱的表面积:

$$S = S_A + 2 \cdot S_B$$

$$S = n \cdot a \cdot h + 2 \cdot s$$

很显然，正棱柱的表面积由一个侧面积和两个底面积组成。

16.3 棱锥

棱锥：有一个面是多边形，其余各面都是三角形，且其余的三角形都有一个公共顶点的多面体。

下表列出了棱锥的相关概念：

棱锥的底面	棱锥中为多边形的一个面
棱锥的侧面	棱锥中其余的各三角形面
棱锥的侧棱	棱锥中相邻两个侧面的公共边
棱锥的顶点	棱锥中所有的侧面的公共顶点
棱锥的高	顶点到底面的距离

表 19: 棱锥的相关概念

棱锥的命名遵循以下规则：若一个棱锥的底面多边形有 n 边，那么称其为 n 棱锥。

正棱锥：底面是正多边形，且顶点的射影在底面中心的棱锥。

16.3.1 棱锥的性质

以下是棱锥的性质：

1. 棱锥的侧面都是三角形。

2. 棱锥中平行于底面的界面互为相似的多边形。

其中性质二也可以通过数学形式表达：

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{h_A^2}{h_B^2}$$

即任意两个平行于底面的截面，其面积 S_A S_b 的比等于顶点到截面的距离 h_A h_B 的平行之比。

以下是正棱锥的性质：

1. 正棱锥的侧面都是全等的等腰三角形。

2. 正棱锥的高等于顶点到底面中心点的距离。

16.3.2 正棱锥的表面积

我们定义以下字母:

n 代表正棱锥底面的边数。

a 代表正棱锥底面的边长。

c 代表正棱锥底面的周长。

s 代表正棱锥底面的面积。

h 代表正棱锥的斜高，即正棱锥侧面等腰三角形的高。

正棱锥的底面积:

$$S_B = s$$

正棱锥的侧面积:

$$S_A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$

$$S_A = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a \cdot h$$

正棱锥侧面的展开图形是 n 个全等的等腰三角形，故可以进行上述计算。

正棱锥的表面积:

$$S = S_A + S_B$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a \cdot h + s$$

很显然，正棱锥的表面积由一个侧面积和一个底面积组成。

16.4 圆柱

圆柱：一个矩形绕一条边旋转一周所形成的几何体。

圆柱也可以看作一个底面多边形边数趋向于无穷大的正棱柱。

下表列出了圆柱的相关概念：

圆柱的轴	圆柱中矩形所绕的边
圆柱的底面	圆柱中与轴相邻的两条边旋转所形成的面
圆柱的侧面	圆柱中与轴相对的一条边旋转所形成的面
圆柱的母线	圆柱在矩形旋转形成侧面时留下的每一条线
圆柱的高	两个底面间的距离

表 20: 圆柱的相关概念

圆柱中通过轴的截面，称为圆柱的轴截面，显然圆柱的轴截面是一个矩形。

等边圆柱：轴截面是一个正方形的圆柱。

16.4.1 圆柱的性质

以下是圆柱的性质：

1. 圆柱的底面是两个全等平行的圆。

2. 圆柱的轴经过两个底面的圆心，且垂直于两个底面。

3. 圆柱的母线两两均相等，且均平行于圆柱的轴。

16.4.2 圆柱的表面积

我们定义以下字母:

r 代表圆柱底面的半径。

c 代表圆柱底面的周长。

h 代表圆柱的高，即圆柱母线的长度。

圆柱的底面积:

$$S_B = \pi \cdot r^2$$

圆柱的侧面积:

$$S_A = c \cdot h$$

$$S_A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

圆柱侧面的展开图形是一个矩形，矩形的长是周长 c，矩形的高是母线 h。

圆柱的表面积:

$$S = S_A + 2 \cdot S_B$$

$$S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

很显然，圆柱的表面积由一个侧面积和两个底面积组成。

16.5 圆锥

圆锥：一个直角三角形绕一条直角边旋转一周所形成的几何体。

圆锥也可以看作一个底面多边形边数趋向于无穷大的正棱锥。

下表列出了圆柱的相关概念:

圆锥的轴	圆锥中直角三角形所绕的直角边
圆锥的底面	圆锥中不同于轴的直角边旋转所形成的面
圆锥的侧面	圆锥中不同于轴的斜边旋转所形成的面
圆锥的母线	圆锥在直角三角形旋转形成侧面时留下的每一条线
圆锥的高	顶点到底面的距离

表 21: 圆锥的相关概念

圆锥中通过轴的截面，称为圆锥的轴截面，显然圆柱的轴截面是一个等腰三角形。

等边圆锥：轴截面是一个等边三角形的圆柱。

16.5.1 圆锥的性质

以下是圆锥的性质:

1. 圆锥的底面是一个垂直于轴的圆。

2. 圆锥的轴经过顶点和底面的圆心，且垂直于底面。

3. 圆锥的母线两两均相等，且与圆锥轴的夹角均相等。

16.5.2 圆锥的表面积

我们定义以下字母:

r 代表圆锥底面的半径。

c 代表圆锥底面的周长。

h 代表圆锥的斜高，即圆锥母线的长度。

圆锥的底面积:

$$S_B = \pi \cdot r^2$$

圆锥的侧面积:

$$S_A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$

$$S_A = \pi \cdot r \cdot h$$

圆锥侧面的展开图形是一个扇形，扇形的弧长是周长 c，扇形的半径是母线 h。

圆锥的表面积:

$$S = S_A + S_B$$

$$S = \pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r^2$$

很显然，圆锥的表面积由一个侧面积和一个底面积组成。

16.6 柱体的体积

柱体的体积可以通过对柱体截面的积分得到。

柱体截面面积 $f(x)$ 关于截面至底面距离 x 的函数关系如下:

$$f(x) = S \tag{1}$$

在上方的函数中，符号 S 表示柱体的底面积。

对函数 $f(x)$ 求解定积分可得:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^h f(x) \cdot \mathrm{d}x && (2)\\
&= \int_0^h S \cdot \mathrm{d}x && (3)\\
&= [S \cdot x]_0^h && (4)\\
&= S \cdot h && (5)
\end{aligned}
$$

柱体的体积公式:

$$V = S \cdot h$$

16.7 锥体的体积

锥体的体积可以通过对锥体截面的积分得到。

锥体截面面积 $f(x)$ 关于截面至底面距离 x 的函数关系如下:

$$f(x) = S \cdot \frac{(h-x)^2}{h^2} \tag{1}$$

在上方的函数中，符号 S 代表锥体的底面积，符号 h 代表锥体的高。

对函数 $f(x)$ 求解定积分可得:

$$V = \int_0^h f(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{2}$$

$$= \int_0^h S \cdot \frac{(h-x)^2}{h^2} \cdot \mathrm{d}x \tag{3}$$

$$= \frac{S}{h^2} \cdot \int_0^h (h-x)^2 \cdot \mathrm{d}x \tag{4}$$

$$= \frac{S}{h^2} \cdot \int_0^h \left(h^2 - 2hx + x^2\right) \cdot \mathrm{d}x \tag{5}$$

$$= \frac{S}{h^2} \cdot \left(\int_0^h h^2 \cdot \mathrm{d}x + \int_0^h -2hx \cdot \mathrm{d}x + \int_0^h x^2 \cdot \mathrm{d}x\right) \tag{6}$$

$$= \frac{S}{h^2} \cdot \left([h^2 \cdot x]_0^h + [-hx^2]_0^h + \left[\frac{1}{3} \cdot x^3\right]_0^h\right) \tag{7}$$

$$= \frac{S}{h^2} \cdot \left(h^3 - h^3 + \frac{1}{3} \cdot h^3\right) \tag{8}$$

$$= \frac{S}{h^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot h^3 \tag{9}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot S \cdot h \tag{10}$$

锥体的体积公式:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$$

16.8 球

球：一个半圆绕直径旋转一周所形成的几何体。

下表列出了球的相关概念:

球的半径	球中原半圆的半径
球的直径	球中原半圆的直径
球的球心	球中原半圆的圆心
球的球面	球中原半圆的圆弧所形成的曲面

表 22: 球的相关概念

对于通过球心的平面，其截取球面的圆称为球的大圆。

对于不过球心的平面，其截取球面的圆称为球的小圆。

16.8.1 球的性质

以下是球的性质:

1. 同一个球的半径都相等。

2. 同一个球的大圆互相平分。

3. 球被任意平面所截的截面都是圆。

4. 球心与球截面圆心的连线与球截面垂直。

我们用 R 表示球的半径，我们用 r 表示截面圆的半径，我们用 d 表示球心到截面圆的距离。

我们可以使用数学形式表达三者的关系:

$$d = \sqrt{R^2 - r^2}$$

在球面上，联结两点的最短路径称为两点的球面距离。

在球面上，过两点的球面距离等于过两点的球的大圆劣弧的长度。

16.8.2 球的表面积

球的表面积无法通过展开图形来计算。

球的表面积可以通过圆的周长对弧长的积分得到。

如图所示，外部的圆代表球，粗线代表被积圆：

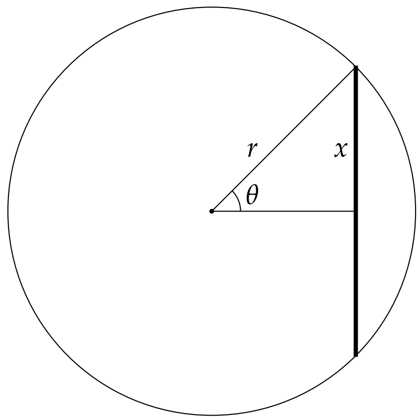


图 111: 球的表面积示意图

首先求解圆的周长：

$$L = 2 \cdot \pi \cdot x \tag{1}$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin\theta \tag{2}$$

然后将求解圆的周长对弧长的积分：

$$S = \int_0^{\pi r} L \cdot \mathrm{d}l \tag{3}$$

$$= \int_0^{\pi} L \cdot \mathrm{d}\theta \cdot r \tag{4}$$

$$= \int_0^{\pi} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin\theta \cdot \mathrm{d}\theta \cdot r \tag{5}$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} \tag{6}$$

$$= 4 \cdot \pi \cdot r^2 \tag{7}$$

球的表面积公式：

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

16.8.3 球的体积

球的体积可以通过对球截面的积分得到。

球截面面积 $f(x)$ 关于截面至球心距离 x 的函数关系如下:

$$f(x) = \pi r^2 - \pi x^2 \tag{1}$$

在上方的函数中，符号 r 代表球的半径。

对函数 $f(x)$ 求解定积分可得:

$$V = \int_{-r}^{+r} f(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{2}$$

$$= \int_{-r}^{+r} \left(\pi r^2 - \pi x^2\right) \cdot \mathrm{d}x \tag{3}$$

$$= \pi \cdot \int_{-r}^{+r} \left(r^2 - x^2\right) \cdot \mathrm{d}x \tag{4}$$

$$= \pi \cdot \left(\int_{-r}^{+r} r^2 \cdot \mathrm{d}x - \int_{-r}^{+r} x^2 \cdot \mathrm{d}x\right) \tag{5}$$

$$= \pi \cdot \left(\left[r^2 \cdot x\right]_{-r}^{+r} - \left[\frac{1}{3} \cdot x^3\right]_{-r}^{+r}\right) \tag{6}$$

$$= \pi \cdot \left(\left[r^3 + r^3\right] - \left[\frac{1}{3} \cdot r^3 + \frac{1}{3} \cdot r^3\right]\right) \tag{7}$$

$$= \pi \cdot \left(2 \cdot r^3 - \frac{2}{3} \cdot r^3\right) \tag{8}$$

$$= \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \tag{9}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \tag{10}$$

球的体积公式:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

16.8.4 球面距离

定义在 xOy 平面上，指向 y 正半轴方向的为东经，指向 y 负半轴方向的为西经。

定义在 xOz 平面上，指向 z 正半轴方向的为北纬，指向 z 负半轴方向的为南纬。

记经度为 α，东经取正，西经取负，记纬度为 β，北纬取正，南纬取负。

图中点 C 为所求点，大圆半径为 R，小圆的半径为 r:

$$r = OA \cdot \cos\beta \tag{1}$$

$$= R \cdot \cos\beta \tag{2}$$

根据单位圆的理论可以解得:

$$x = r \cdot \cos\alpha = R \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha \tag{3}$$

$$y = r \cdot \sin\alpha = R \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \tag{4}$$

根据三角比的关系可以得到:

$$z = R \cdot \cos\beta \tag{5}$$

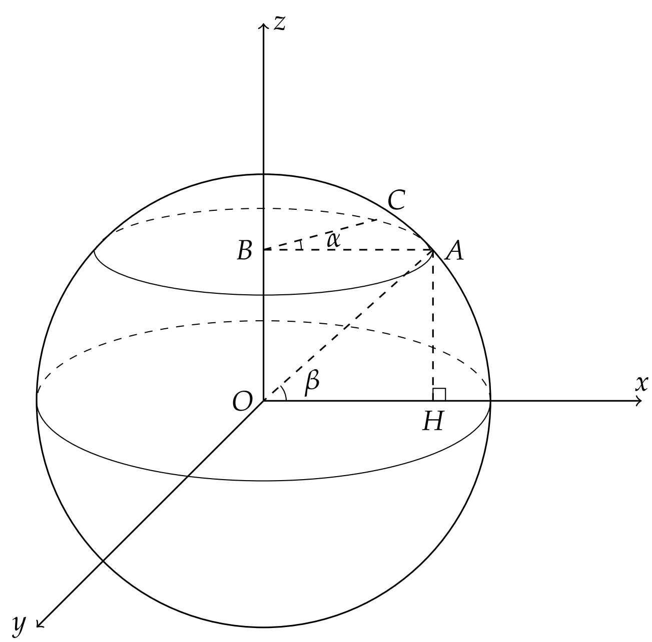


图 112: 球面距离的示意图

经纬度坐标和直角坐标的转换公式:

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha \\ y = R \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \\ z = R \cdot \cos\beta \end{cases}$$

求解球面距离时，第一步可以通过上述方法先将经纬度坐标转换为直角坐标。

求解球面距离时，第二步可以通过向量的方法求出大圆上的角度差。

设球面上的点 A 和点 B，设 $\theta = \angle AOB$:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} \tag{6}$$

$$= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{R^2} \tag{7}$$

使用反三角函数解出 θ，求解弧长 d:

$$d = \theta \cdot R \tag{8}$$

得到的弧长 l 就是所求的 AB 两点间的球面距离。

17 排列组合

17.1 乘法原理和加法原理

若完成一件事总共有 n 个步骤，第 i 个步骤有 m_i 种不同方法，那么完成这件事共有 N 种方法。

乘法原理可以用于解决形如上方形式的问题。

乘法原理的数学表达：

$$N = \prod_{i=1}^{n} m_i$$

若完成一件事总共有 n 类办法，第 i 类办法有 m_i 种不同方法，那么完成这件事共有 N 种方法。

加法原理可以用于解决形如上方形式的问题。

加法原理的数学表达：

$$N = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

考虑以下的示意图：

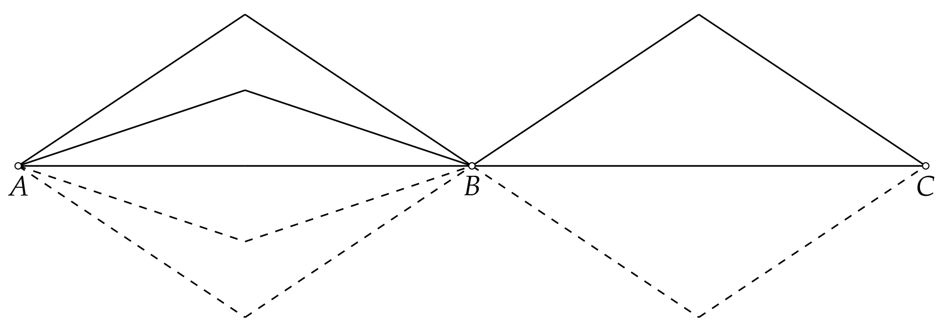


图 113: 乘法原理和加法原理的联用

如图所示，路径 $A - B$ 总共有两类办法，实线类有 3 种方法，虚线类有 2 种方法。

如图所示，路径 $B - C$ 总共有两类办法，实线类有 2 种方法，虚线类有 1 种方法。

根据加法原理可知，第一段路径上总共有 $N = 3 + 2 = 5$ 种方法。

根据加法原理可知，第二段路径上总共有 $N = 2 + 1 = 3$ 种方法。

根据乘法原理可知，由起点至终点总共有 $N = 5 \times 3 = 15$ 种方法。

由此可见，在解决某些较为复杂问题时，可以按照一定顺序联用乘法原理和加法原理。

17.2 排列

排列（Permutation）指的是从 n 个不同元素中取出 m 个元素排成一列。

排列的个数称为排列数，记作：

$$\mathrm{P}_n^m \qquad (m \le n)$$

17.2.1 排列数公式的累乘形式

从 4 个不同元素中取出 3 个元素，显然其排列数 $\mathrm{P}_4^3 = \underbrace{4 \times 3 \times 2}_{\text{共 3 项}}$。

从 6 个不同元素中取出 4 个元素，显然其排列数 $\mathrm{P}_6^4 = \underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3}_{\text{共 4 项}}$。

根据这样的思路，我们可以推测 P_n^m 的结果。

排列数公式（累乘形式）：

$$\mathrm{P}_n^m = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-m+1)}_{\text{共 } m \text{ 项}} = \prod_{i=n-m+1}^{n} i$$

17.2.2 排列数公式的阶乘形式

通过以下推导可以得到：

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{\prod_{i=1}^{n-m} i \cdot \prod_{i=n-m+1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n-m} i} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n-m} i} = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{1}$$

排列数公式（阶乘形式）：

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

特别的，当排列数中 $m = 1$ 时：

$$\mathrm{P}_n^1 = n$$

特别的，当排列数中 $m = n$ 时：

$$\mathrm{P}_n^n = n!$$

排列数公式的阶乘形式较为简洁也较为常用。

17.2.3 排列数公式 01

排列数公式 01:

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^n}{\mathrm{P}_{n-m}^{n-m}}$$

由排列数公式的阶乘形式可得:

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{1}$$

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^n}{\mathrm{P}_{n-m}^{n-m}} \tag{2}$$

17.2.4 排列数公式 02

排列数公式 02（强化形式）:

$$\mathrm{P}_n^n = \mathrm{P}_n^k \cdot \mathrm{P}_{n-k}^{n-k}$$

排列数公式 02（弱化形式）:

$$\mathrm{P}_n^n = n \cdot \mathrm{P}_{n-1}^{n-1}$$

由排列数公式 01 变形可得:

$$\mathrm{P}_n^k = \frac{\mathrm{P}_n^n}{\mathrm{P}_{n-k}^{n-k}} \tag{1}$$

$$\mathrm{P}_n^n = \mathrm{P}_n^k \cdot \mathrm{P}_{n-k}^{n-k} \tag{2}$$

特别的，令 $k = 1$ 可以得到:

$$\mathrm{P}_n^n = \mathrm{P}_n^k \cdot \mathrm{P}_{n-k}^{n-k} \tag{3}$$

$$\mathrm{P}_n^n = \mathrm{P}_n^1 \cdot \mathrm{P}_{n-1}^{n-1} \tag{4}$$

$$\mathrm{P}_n^n = n \cdot \mathrm{P}_{n-1}^{n-1} \tag{5}$$

由此证明了排列数公式 02 成立。

17.2.5 排列数公式 03

排列数公式 03（强化形式）:

$$\mathrm{P}_n^m = \mathrm{P}_n^k \cdot \mathrm{P}_{n-k}^{m-k}$$

排列数公式 03（弱化形式）:

$$\mathrm{P}_n^m = n \cdot \mathrm{P}_{n-1}^{m-1}$$

将排列数公式 01 代入可得:

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^n}{\mathrm{P}_{n-m}^{n-m}} \tag{1}$$

将排列数公式 02 代入可得:

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^k \cdot \mathrm{P}_{n-k}^{n-k}}{\mathrm{P}_{n-m}^{n-m}} \tag{2}$$

$$\mathrm{P}_n^m = \mathrm{P}_n^k \cdot \frac{\mathrm{P}_{n-k}^{n-k}}{\mathrm{P}_{n-m}^{n-m}} \tag{3}$$

$$\mathrm{P}_n^m = \mathrm{P}_n^k \cdot \frac{\mathrm{P}_{n-k}^{n-k}}{\mathrm{P}_{(n-k)-(m-k)}^{(n-k)-(m-k)}} \tag{4}$$

$$\mathrm{P}_n^m = \mathrm{P}_n^k \cdot \mathrm{P}_{n-k}^{m-k} \tag{5}$$

特别的，令 $k = 1$ 可以得到:

$$\mathrm{P}_n^m = \mathrm{P}_n^k \cdot \mathrm{P}_{n-k}^{m-k} \tag{6}$$

$$\mathrm{P}_n^m = \mathrm{P}_n^1 \cdot \mathrm{P}_{n-1}^{m-1} \tag{7}$$

$$\mathrm{P}_n^m = n \cdot \mathrm{P}_{n-1}^{m-1} \tag{8}$$

由此证明了排列数公式 03 成立。

17.2.6 排列数公式 04

排列数公式 04（强化形式）:

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^k}{\mathrm{P}_{n-m}^k} \cdot \mathrm{P}_{n-k}^m$$

排列数公式 04（弱化形式）:

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{n}{n-m} \cdot \mathrm{P}_{n-1}^m$$

将排列数公式 01 代入可得:

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^n}{\mathrm{P}_{n-m}^{n-m}} \tag{1}$$

将排列数公式 02 代入可得:

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^k}{\mathrm{P}_{n-m}^k} \cdot \frac{\mathrm{P}_{n-k}^{n-k}}{\mathrm{P}_{n-m-k}^{n-m-k}} \tag{2}$$

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^k}{\mathrm{P}_{n-m}^k} \cdot \mathrm{P}_{n-k}^m \tag{3}$$

特别的，令 $k = 1$ 可以得到:

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^k}{\mathrm{P}_{n-m}^k} \cdot \mathrm{P}_{n-k}^m \tag{4}$$

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^1}{\mathrm{P}_{n-m}^1} \cdot \mathrm{P}_{n-1}^m \tag{5}$$

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{n}{n-m} \cdot \mathrm{P}_{n-1}^m \tag{6}$$

由此证明了排列数公式 04 成立。

17.2.7 排列数公式 05

排列数公式 05（强化形式）：

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{1}{\mathrm{P}_{n-m}^k} \cdot \mathrm{P}_n^{m+k}$$

排列数公式 05（弱化形式）：

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{1}{n-m} \cdot \mathrm{P}_n^{m+1}$$

将排列数公式 01 代入可得：

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^n}{\mathrm{P}_{n-m}^{n-m}} \tag{1}$$

将排列数公式 02 代入可得：

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{1}{\mathrm{P}_{n-m}^k} \cdot \frac{\mathrm{P}_n^n}{\mathrm{P}_{n-m-k}^{n-m-k}} \tag{2}$$

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{1}{\mathrm{P}_{n-m}^k} \cdot \mathrm{P}_n^{m+k} \tag{3}$$

特别的，令 $k = 1$ 可以得到：

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{1}{\mathrm{P}_{n-m}^k} \cdot \mathrm{P}_n^{m+k} \tag{4}$$

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{1}{\mathrm{P}_{n-m}^1} \cdot \mathrm{P}_n^{m+1} \tag{5}$$

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{1}{n-m} \cdot \mathrm{P}_n^{m+1} \tag{6}$$

由此证明了排列数公式 05 成立。

17.2.8 排列数公式 06

排列数公式 06:

$$\mathrm{P}_n^m = \mathrm{P}_{n+1}^m - m \cdot \mathrm{P}_n^{m-1}$$

将排列数公式 04 进行递推可得:

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{n}{n-m} \cdot \mathrm{P}_{n-1}^m \tag{1}$$

$$\mathrm{P}_{n+1}^m = \frac{n+1}{n-m+1} \cdot \mathrm{P}_n^m \tag{2}$$

将排列数公式 05 进行递推可得:

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{1}{n-m} \cdot \mathrm{P}_n^{m+1} \tag{3}$$

$$\mathrm{P}_n^{m-1} = \frac{1}{n-m+1} \cdot \mathrm{P}_n^m \tag{4}$$

进行一些变形可以得到:

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{n-m+1}{n-m+1} \cdot \mathrm{P}_n^m \tag{5}$$

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{n+1}{n-m+1} \cdot \mathrm{P}_n^m - \frac{m}{n-m+1} \cdot \mathrm{P}_n^m \tag{6}$$

$$\mathrm{P}_n^m = \frac{n+1}{n-m+1} \cdot \mathrm{P}_n^m - m \cdot \frac{1}{n-m+1} \cdot \mathrm{P}_n^m \tag{7}$$

$$\mathrm{P}_n^m = \mathrm{P}_n^m = \mathrm{P}_{n+1}^m - m \cdot \mathrm{P}_n^{m-1} \tag{8}$$

由此证明了排列数公式 06 成立。

17.3　组合

组合（Combination）指的是从 n 个不同元素中取出 m 个元素组成一组。

组合的个数称为组合数，记作：

$$\mathrm{C}_n^m \qquad (m \le n)$$

17.3.1　组合数公式的累乘形式

因为对于一个组合数 C_n^m，其中每一个组合的元素个数为 m 个。

所以对于每一个组合，其在排列数 P_n^m 中均会变为 P_m^m 种不同的排列方式。

组合数和排列数的关系：

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^m}{\mathrm{P}_m^m}$$

组合数公式（累乘形式）：

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-m+1)}^{\text{共 } m \text{ 项}}}{\underbrace{m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times 1}_{\text{共 } m \text{ 项}}} = \frac{\prod_{i=n-m+1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{m} i}$$

17.3.2　组合数公式的阶乘形式

通过以下推导，我们可以得出排组合数公式的另一种形式：

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{\prod_{i=1}^{n-m} i \cdot \prod_{i=n-m+1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n-m} i \cdot \prod_{i=1}^{m} i} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n-m} i \cdot \prod_{i=1}^{m} i} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \tag{1}$$

组合数公式（阶乘形式）：

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

特别的，当组合数中 $m = 1$ 时：

$$\mathrm{C}_n^1 = n$$

特别的，当组合数中 $m = n$ 时：

$$\mathrm{C}_n^n = 1$$

组合数公式的的阶乘形式较为简洁也较为常用。

17.3.3 组合数公式 01

组合数公式 01:

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^n}{\mathrm{P}_m^m \cdot \mathrm{P}_{n-m}^{n-m}}$$

由组合数公式的阶乘形式可得:

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1}$$

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^n}{\mathrm{P}_m^m \cdot \mathrm{P}_{n-m}^{n-m}} \tag{2}$$

17.3.4 组合数公式 02

组合数公式 02:

$$\frac{\mathrm{P}_{n_1}^m}{\mathrm{P}_{n_2}^m} = \frac{\mathrm{C}_{n_1}^m}{\mathrm{C}_{n_2}^m}$$

左侧可以使用排列数公式 01 展开:

$$\frac{\mathrm{P}_{n_1}^m}{\mathrm{P}_{n_2}^m} = \frac{\frac{\mathrm{P}_{n_1}^{n_1}}{\mathrm{P}_{n_1-m}^{n_1-m}}}{\frac{\mathrm{P}_{n_2}^{n_2}}{\mathrm{P}_{n_2-m}^{n_2-m}}} \tag{1}$$

右侧可以使用组合数公式 01 展开:

$$\frac{\mathrm{C}_{n_1}^m}{\mathrm{C}_{n_2}^m} = \frac{\frac{\mathrm{P}_{n_1}^{n_1}}{\mathrm{P}_m^m \cdot \mathrm{P}_{n_1-m}^{n_1-m}}}{\frac{\mathrm{P}_{n_2}^{n_2}}{\mathrm{P}_m^m \cdot \mathrm{P}_{n_2-m}^{n_2-m}}} \tag{2}$$

观察可知左式等于右式:

$$\frac{\mathrm{P}_{n_1}^m}{\mathrm{P}_{n_2}^m} = \frac{\mathrm{C}_{n_1}^m}{\mathrm{C}_{n_2}^m} \tag{3}$$

由此证明了组合数公式 02 成立。

17.3.5 组合数公式 03

组合数公式 03（强化形式）:

$$C_n^m = \frac{C_n^k}{C_m^k} \cdot C_{n-k}^{m-k}$$

组合数公式 03（弱化形式）:

$$C_n^m = \frac{n}{m} \cdot C_{n-1}^{m-1}$$

将组合数公式 01 代入可得:

$$C_n^m = \frac{P_n^n}{P_m^m \cdot P_{n-m}^{n-m}} \tag{1}$$

将排列数公式 02 代入可得:

$$C_n^m = \frac{P_n^k}{P_m^k} \cdot \frac{P_{n-k}^{n-k}}{P_{m-k}^{m-k} \cdot P_{n-m}^{n-m}} \tag{2}$$

$$C_n^m = \frac{P_n^k}{P_m^k} \cdot C_{n-k}^{m-k} \tag{3}$$

$$C_n^m = \frac{C_n^k}{C_m^k} \cdot C_{n-k}^{m-k} \tag{4}$$

特别的，令 $k = 1$ 可以得到:

$$C_n^m = \frac{C_n^k}{C_m^k} \cdot C_{n-k}^{m-k} \tag{5}$$

$$C_n^m = \frac{C_n^1}{C_m^1} \cdot C_{n-1}^{m-1} \tag{6}$$

$$C_n^m = \frac{n}{m} \cdot C_{n-1}^{m-1} \tag{7}$$

由此证明了组合数公式 03 成立。

17.3.6 组合数公式 04

组合数公式 04（强化形式）:

$$C_n^m = \frac{C_n^k}{C_{n-m}^k} \cdot C_{n-k}^m$$

组合数公式 04（弱化形式）:

$$C_n^m = \frac{n}{n-m} \cdot C_{n-1}^m$$

将组合数公式 01 代入可得:

$$C_n^m = \frac{P_n^n}{P_m^m \cdot P_{n-m}^{n-m}} \tag{1}$$

将排列数公式 02 代入可得:

$$C_n^m = \frac{P_n^k}{P_{n-m}^k} \cdot \frac{P_{n-k}^{n-k}}{P_m^m \cdot P_{n-m-k}^{n-m-k}} \tag{2}$$

$$C_n^m = \frac{P_n^k}{P_{n-m}^k} \cdot C_{n-k}^{m-k} \tag{3}$$

$$C_n^m = \frac{C_n^k}{C_{n-m}^k} \cdot C_{n-k}^{m-k} \tag{4}$$

特别的，令 $k = 1$ 可以得到:

$$C_n^m = \frac{C_n^k}{C_{n-m}^k} \cdot C_{n-k}^{m-k} \tag{5}$$

$$C_n^m = \frac{C_n^1}{C_{n-m}^1} \cdot C_{n-1}^{m-1} \tag{6}$$

$$C_n^m = \frac{n}{n-m} \cdot C_{n-1}^m \tag{7}$$

由此证明了组合数公式 04 成立。

17.3.7 组合数公式 05

组合数公式 05（强化形式）：

$$C_n^m = \frac{C_{m+k}^k}{C_{n-m}^k} \cdot C_n^{m+k}$$

组合数公式 05（弱化形式）：

$$C_n^m = \frac{m+1}{n-m} \cdot C_n^{m+1}$$

将组合数公式 01 代入可得：

$$C_n^m = \frac{P_n^n}{P_m^m \cdot P_{n-m}^{n-m}} \tag{1}$$

将排列数公式 02 代入可得：

$$C_n^m = \frac{P_{m+k}^k}{P_{n-m}^k} \cdot \frac{P_n^n}{P_{m+k}^{m+k} \cdot P_{n-m-k}^{n-m-k}} \tag{2}$$

$$C_n^m = \frac{P_{m+k}^k}{P_{n-m}^k} \cdot C_n^{m+k} \tag{3}$$

$$C_n^m = \frac{C_{m+k}^k}{C_{n-m}^k} \cdot C_n^{m+k} \tag{4}$$

特别的，令 $k=1$ 可以得到：

$$C_n^m = \frac{C_{m+k}^k}{C_{n-m}^k} \cdot C_n^{m+k} \tag{5}$$

$$C_n^m = \frac{C_{m+k}^1}{C_{n-m}^1} \cdot C_n^{m+1} \tag{6}$$

$$C_n^m = \frac{m+1}{n-m} \cdot C_n^{m+1} \tag{7}$$

由此证明了组合数公式 05 成立。

17.3.8 组合数公式 06

组合数公式 06:

$$C_n^m = C_{n+1}^m - C_n^{m-1}$$

将组合数公式 04 进行递推可得:

$$C_n^m = \frac{n}{n-m} \cdot C_{n-1}^m \tag{1}$$

$$C_{n+1}^m = \frac{n+1}{n-m+1} \cdot C_n^m \tag{2}$$

将组合数公式 05 进行递推可得:

$$C_n^m = \frac{m+1}{n-m} \cdot C_n^{m-1} \tag{3}$$

$$C_n^{m-1} = \frac{m}{n-m+1} \cdot C_n^m \tag{4}$$

进行一些变形可以得到:

$$C_n^m = \frac{n-m+1}{n-m+1} \cdot C_n^m \tag{5}$$

$$C_n^m = \frac{n+1}{n-m+1} \cdot C_n^m - \frac{m}{n-m+1} \cdot C_n^m \tag{6}$$

$$C_n^m = C_{n+1}^m - C_n^{m-1} \tag{7}$$

由此证明了组合数公式 06 成立。

17.3.9 组合数公式 07

组合数公式 07:

$$\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_n^{n-m}$$

将组合数公式 01 代入左式可得:

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^n}{\mathrm{P}_m^m \cdot \mathrm{P}_{n-m}^{n-m}} \tag{1}$$

将组合数公式 01 代入右式可得:

$$\mathrm{C}_n^{n-m} = \frac{\mathrm{P}_n^n}{\mathrm{P}_{n-m}^{n-m} \cdot \mathrm{P}_m^m} \tag{2}$$

观察可知左式等于右式:

$$\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_n^{n-m} \tag{3}$$

由此证明了组合数公式 07 成立。

17.3.10 组合数公式 08

组合数公式 08:

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$$

集合 N 中含有 n 个元素，讨论其子集数量。

集合 N 中的每一个元素可以选择是否属于这个子集，有 2 种情况，共 n 个元素。

根据乘法原理可得:

$$2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n \tag{4}$$

集合 N 中有 0 个元素的子集的数量为 C_n^0。

集合 N 中有 1 个元素的子集的数量为 C_n^1。

集合 N 中有 2 个元素的子集的数量为 C_n^2。

集合 N 中有 n 个元素的子集的数量为 C_n^n。

根据加法原理可得:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \tag{1}$$

两种计数方式的结果应当是一致的，故组合数公式 08 成立。

17.3.11 组合数公式 09

组合数公式 09:

$$\sum_{i=0}^{m} \mathrm{C}_{n_1}^{i} \cdot \mathrm{C}_{n_2}^{m-i} = \mathrm{C}_{n_1+n_2}^{m}$$

集合 N_1 中含有 n_1 个元素，集合 N_2 中含有 n_2 个元素，现需选出 m 个元素。

集合 N_1 和集合 N_2 同时考虑，共有 $n_1 + n_2$ 个元素，需选出 m 个元素。

根据组合数的定义:

$$\mathrm{C}_{n_1+n_2}^{m} \tag{2}$$

集合 N_1 中选出 0 个元素，集合 N_2 中选出 $m - 0$ 个元素，组合数为 $\mathrm{C}_{n_1}^{0} \cdot \mathrm{C}_{n_2}^{m-0}$。

集合 N_1 中选出 1 个元素，集合 N_2 中选出 $m - 1$ 个元素，组合数为 $\mathrm{C}_{n_1}^{1} \cdot \mathrm{C}_{n_2}^{m-1}$。

集合 N_1 中选出 2 个元素，集合 N_2 中选出 $m - 2$ 个元素，组合数为 $\mathrm{C}_{n_1}^{2} \cdot \mathrm{C}_{n_2}^{m-2}$。

集合 N_1 中选出 m 个元素，集合 N_2 中选出 $m - m$ 个元素，组合数为 $\mathrm{C}_{n_1}^{m} \cdot \mathrm{C}_{n_2}^{m-m}$。

根据加法原理可得:

$$\mathrm{C}_{n_1}^{0} \cdot \mathrm{C}_{n_2}^{m-0} + \mathrm{C}_{n_1}^{1} \cdot \mathrm{C}_{n_2}^{m-1} + \cdots + \mathrm{C}_{n_1}^{m} \cdot \mathrm{C}_{n_2}^{m-m} = \sum_{i=0}^{m} \mathrm{C}_{n_1}^{i} \cdot \mathrm{C}_{n_2}^{m-i} \tag{1}$$

两种计数方式的结果应当是一致的，故组合数公式 09 成立。

17.3.12 组合数公式 10

组合数公式 10:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \mathrm{C}_n^i = n \cdot 2^{n-1}$$

使用组合数公式 03 变形可得:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \mathrm{C}_n^i = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{n}{i} \cdot \mathrm{C}_{n-1}^{i-1} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \mathrm{C}_n^i = \sum_{i=1}^{n} n \cdot \mathrm{C}_{n-1}^{i-1} \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \mathrm{C}_n^i = n \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{i-1} \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \mathrm{C}_n^i = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{i} \tag{4}$$

使用组合数公式 08 代入可得:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \mathrm{C}_n^i = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{i} \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \mathrm{C}_n^i = n \cdot 2^{n-1} \tag{6}$$

由此证明了组合数公式 10 成立。

17.3.13 组合数公式 11

组合数公式 11:

$$\sum_{i=0}^{n} {C_n^i}^2 = C_{2n}^n$$

在组合数公式 09 的基础上，令 $n = n_1$，令 $n = n_2$，令 $n = m$。

向组合数公式 09 代入条件:

$$\sum_{i=0}^{m} C_{n_1}^i \cdot C_{n_2}^{m-i} = C_{n_1+n_2}^m \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot C_n^{n-i} = C_{2n}^n \tag{2}$$

将组合数公式 07 代入可得:

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot C_n^{n-i} = C_{2n}^n \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot C_n^i = C_{2n}^n \tag{4}$$

$$\sum_{i=0}^{n} {C_n^i}^2 = C_{2n}^n \tag{5}$$

由此证明了组合数公式 11 成立。

17.3.14 组合数公式 12

组合数公式 12:

$$\sum_{i=m}^{n} \mathrm{C}_i^m = \mathrm{C}_{n+1}^{m+1}$$

使用组合数公式 06 循环迭代可得:

$$\sum_{i=m}^{n} \mathrm{C}_i^m = \mathrm{C}_m^m + \mathrm{C}_{m+1}^m + \sum_{i=m+2}^{n} \mathrm{C}_i^m \tag{1}$$

$$\sum_{i=m}^{n} \mathrm{C}_i^m = \mathrm{C}_{m+1}^{m+1} + \mathrm{C}_{m+1}^m + \sum_{i=m+2}^{n} \mathrm{C}_i^m \tag{2}$$

$$\sum_{i=m}^{n} \mathrm{C}_i^m = \mathrm{C}_{m+2}^{m+1} + \mathrm{C}_{m+2}^m + \sum_{i=m+3}^{n} \mathrm{C}_i^m \tag{3}$$

$$\sum_{i=m}^{n} \mathrm{C}_i^m = \mathrm{C}_{m+3}^{m+1} + \mathrm{C}_{m+3}^m + \sum_{i=m+4}^{n} \mathrm{C}_i^m \tag{4}$$

$$\vdots \tag{5}$$

$$\sum_{i=m}^{n} \mathrm{C}_i^m = \mathrm{C}_n^{m+1} + \mathrm{C}_n^{m+1} \tag{6}$$

$$\sum_{i=m}^{n} \mathrm{C}_i^m = \mathrm{C}_{n+1}^{m+1} \tag{7}$$

由此证明了组合数公式 12 成立。

17.4 二项式定理

二项式定理研究 $(a+b)^n$ 的展开式:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\cdots\cdot(a+b)\cdot(a+b)}_{\text{共}n\text{项}} \qquad (n\in\mathbb{Z}^+) \tag{1}$$

二项式 $(a+b)^n$ 展开后各项依次为:

$$\underbrace{a^n \quad a^{n-1}b^1 \quad a^{n-2}b^2 \quad \cdots \quad a^{n-r}b^r \quad \cdots \quad a^2b^{n-2} \quad a^1b^{n-1} \quad b^n}_{\text{共}n+1\text{项}} \tag{2}$$

这是因为展开式的每一项，都是由 n 个括号中的每一个选取一个字母相乘得到。

对于第 1 项 $a^{n-0}b^0$，其需从 n 个括号中选取 0 个 b，因此该项的系数为 C_n^0。

对于第 2 项 $a^{n-1}b^1$，其需从 n 个括号中选取 1 个 b，因此该项的系数为 C_n^1。

对于第 3 项 $a^{n-2}b^2$，其需从 n 个括号中选取 2 个 b，因此该项的系数为 C_n^2。

对于第 4 项 $a^{n-2}b^3$，其需从 n 个括号中选取 3 个 b，因此该项的系数为 C_n^3。

对于第 5 项 $a^{n-2}b^4$，其需从 n 个括号中选取 4 个 b，因此该项的系数为 C_n^4。

由此可以推定第 $r+1$ 项 $a^{n-r}b^r$ 的系数为 C_n^r，将 $n+1$ 项加和即可得到 $(a+b)^n$ 的展开式。

二项式定理可以表达为:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r \cdot a^{n-r} \cdot b^r$$

二项式定理中的 C_n^r 称为二项式系数。

二项式定理中的 $C_n^r \cdot a^{n-r} \cdot b^r$ 称为二项式展开式的通项。

通项可以使用下式表达:

$$T_{r+1} = C_n^r \cdot a^{n-r} \cdot b^r$$

通项中的 T_{r+1} 代表二项展开式中的循环变量为 r 的第 $r+1$ 项。

17.4.1 二项式定理的推论

二项式定理的推论:

$$\sum_{r=0}^{n} \mathrm{C}_n^r \cdot (k-1)^r = k^n$$

二项式定理中可以令变量:

$$a = 1 \qquad b = k-1 \tag{3}$$

$$\sum_{r=0}^{n} \mathrm{C}_n^r \cdot a^{n-r} \cdot b^r = (a+b)^n \tag{4}$$

$$\sum_{r=0}^{n} \mathrm{C}_n^r \cdot 1^{n-r} \cdot (k-1)^r = k^n \tag{5}$$

$$\sum_{r=0}^{n} \mathrm{C}_n^r \cdot (k-1)^r = k^n \tag{6}$$

若令二项式定理的推论中的 $k=2$ 则有:

$$\sum_{r=0}^{n} \mathrm{C}_n^r = 2^n$$

若令二项式定理的推论中的 $k=0$ 则有:

$$\sum_{r=0}^{n} \mathrm{C}_n^r \cdot (-1)^r = 0$$

上述公式揭示了三个重要性质:

1. 二项式系数的和为 2^n。

2. 二项式系数中的奇数项的和为 2^{n-1}。

3. 二项式系数中的偶数项的和为 2^{n-1}。

由于第二个公式中,当 r 为偶数即为奇数项时 $(-1)^r$ 取正。

由于第二个公式中,当 r 为奇数即为偶数项时 $(-1)^r$ 取负。

因此第二个公式表明了,二项式系数中的奇数项之和与偶数项之和的差为零,即两者是相等的。

17.5 排列组合问题 I

我们首先约定符号和背景，以便后续讨论。

设共有 p 个元素，需对其中 p 个元素进行排列。

此处的 p 个元素可以分至若干集合中，包含一个普通集合和若干个约束集合。

普通集合用符号 N 表示，其中共有 n 个元素：

$$N = \{n_1, n_2, \cdots, n_n\}$$

约束集合用符号 X 表示，其中共含有 x 个元素：

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_x\}$$

显然元素数 p 与 n 和 x 存在以下关系：

$$p = n + x$$

如果存在多个约束集合，则可以视情况分别使用符号 X_1 X_2 X_3 等表示。

我们认为，普通集合中的元素在排列时无要求，约束集合中的元素在排列时存在约束条件。

我们现在研究，在不同的约束条件下，总排列数 P 的值和约束条件的关系。

17.5.1 排列组合问题 I-01

排列组合问题 I-01 背景：存在 1 个约束集合 X，其中的元素分别不能置于某各不相同的位置上。

排列组合问题 I-01 公式（第一种形式）：

$$P = \mathrm{P}_p^p - \sum_{i=0}^{\min(n,x-1)} \mathrm{C}_x^{x-i} \cdot \mathrm{P}_n^i \cdot \mathrm{P}_n^n$$

排列组合问题 I-01 公式（第二种形式）：

$$P = \mathrm{P}_p^p - \sum_{i=0}^{\min(n,x-1)} \mathrm{C}_x^{i} \cdot \mathrm{P}_n^i \cdot \mathrm{P}_n^n$$

假设不考虑约束集合的约束条件，则共有 P_{n+x}^{n+x} 或者 P_p^p 种排列。

现在研究在此基础上违背约束集合的约束条件的情况，将这些情况数减去即可得到计算公式。

1. 首先考虑 $x-1<n$ 的情况：

当循环变量 $i=0$ 时:

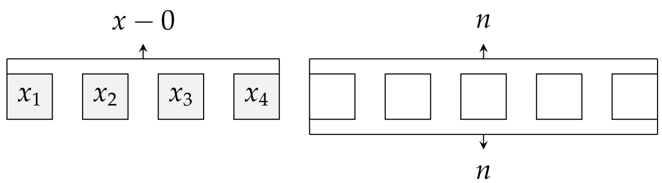


图 114: 排列组合问题 I-01 的示意图 - 0X

在 4 个约束元素中，保留 4 个在排斥位上，共有 C_4^4 种组合，即 C_x^{x-0}。

在 4 个约束元素中，移出 0 个至普通位上，共有 P_5^0 种排列，即 P_n^0。

对于 5 个普通元素，剩余 5 个空位，共有 P_5^5 种排列，即 P_n^n。

由乘法定理可得此时需减去的情况数为 $C_x^{x-0} \cdot P_n^0 \cdot P_n^n = C_x^0 \cdot P_n^0 \cdot P_n^n$。

当循环变量 $i=1$ 时:

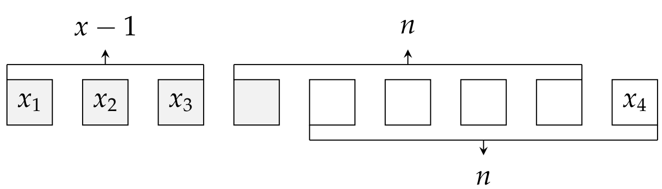


图 115: 排列组合问题 I-01 的示意图 - 1X

在 4 个约束元素中，保留 3 个在排斥位上，共有 C_4^3 种组合，即 C_x^{x-1}。

在 4 个约束元素中，移出 1 个至普通位上，共有 P_5^1 种排列，即 P_n^1。

对于 5 个普通元素，剩余 5 个空位，共有 P_5^5 种排列，即 P_n^n。

由乘法定理可得此时需减去的情况数为 $C_x^{x-1} \cdot P_n^1 \cdot P_n^n = C_x^1 \cdot P_n^1 \cdot P_n^n$。

以上示意图中，灰色的方块代表排斥位，即约束元素不能放置的位置。

以上示意图中，白色的方块代表普通位，即所有元素均可放置的位置。

1. 首先考虑 $x-1<n$ 的情况：

当循环变量 $i=2$ 时:

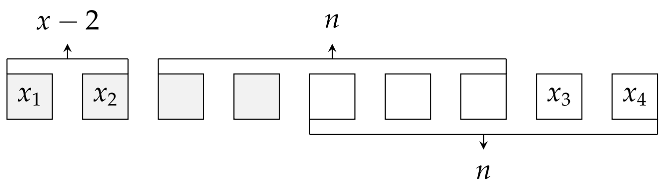


图 116: 排列组合问题 I-01 的示意图 - 2X

在 4 个约束元素中，保留 2 个在排斥位上，共有 C_4^2 种组合，即 C_x^{x-2}。

在 4 个约束元素中，移出 2 个至普通位上，共有 P_5^2 种排列，即 P_n^2。

对于 5 个普通元素，剩余 5 个空位，共有 P_5^5 种排列，即 P_n^n。

由乘法定理可得此时需减去的情况数为 $C_x^{x-2}\cdot P_n^2\cdot P_n^n=C_x^2\cdot P_n^2\cdot P_n^n$。

当循环变量 $i=3$ 时:

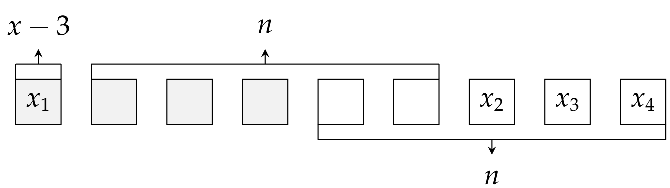


图 117: 排列组合问题 I-01 的示意图 - 3X

在 4 个约束元素中，保留 1 个在排斥位上，共有 C_4^1 种组合，即 C_x^{x-3}。

在 4 个约束元素中，移出 3 个至普通位上，共有 P_5^3 种排列，即 P_n^3。

对于 5 个普通元素，剩余 5 个空位，共有 P_5^5 种排列，即 P_n^n。

由乘法定理可得此时需减去的情况数为 $C_x^{x-3}\cdot P_n^3\cdot P_n^n=C_x^3\cdot P_n^3\cdot P_n^n$。

由于没有更多的约束元素可以移出，使循环无法继续，故循环终止。

因此当 $x-1<n$ 时，主要矛盾是约束元素，显然这种情况下累加会终止于 $i=x-1$。

2. 其次考虑 $n < x - 1$ 的情况：

当循环变量 $i = 0$ 时:

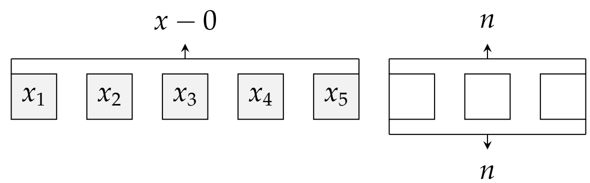


图 118: 排列组合问题 I-01 的示意图 - 0N

在 5 个约束元素中，保留 5 个在排斥位上，共有 C_5^5 种组合，即 C_x^{x-0}。

在 5 个约束元素中，移出 0 个至普通位上，共有 P_3^0 种排列，即 P_n^0。

对于 3 个普通元素，剩余 3 个空位，共有 P_3^3 种排列，即 P_n^n。

由乘法定理可得此时需减去的情况数为 $C_x^{x-0} \cdot P_n^0 \cdot P_n^n = C_x^0 \cdot P_n^0 \cdot P_n^n$。

当循环变量 $i = 1$ 时:

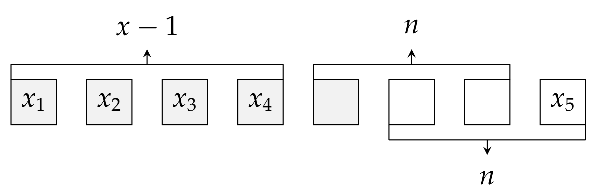


图 119: 排列组合问题 I-01 的示意图 - 1N

在 5 个约束元素中，保留 4 个在排斥位上，共有 C_5^4 种组合，即 C_x^{x-1}。

在 5 个约束元素中，移出 1 个至普通位上，共有 P_3^1 种排列，即 P_n^1。

对于 3 个普通元素，剩余 3 个空位，共有 P_3^3 种排列，即 P_n^n。

由乘法定理可得此时需减去的情况数为 $C_x^{x-1} \cdot P_n^1 \cdot P_n^n = C_x^1 \cdot P_n^1 \cdot P_n^n$。

以上示意图中，灰色的方块代表排斥位，即约束元素不能放置的位置。

以上示意图中，白色的方块代表普通位，即所有元素均可放置的位置。

2. 其次考虑 $n < x - 1$ 的情况：

当循环变量 $i = 2$ 时:

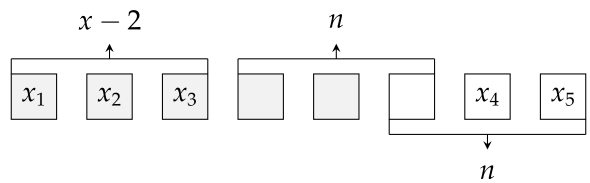


图 120: 排列组合问题 I-01 的示意图 - 2N

在 5 个约束元素中，保留 3 个在排斥位上，共有 C_5^3 种组合，即 C_x^{x-2}。

在 5 个约束元素中，移出 2 个至普通位上，共有 P_2^3 种排列，即 P_n^2。

对于 3 个普通元素，剩余 3 个空位，共有 P_3^3 种排列，即 P_n^n。

由乘法定理可得此时需减去的情况数为 $\mathrm{C}_x^{x-2} \cdot \mathrm{P}_n^2 \cdot \mathrm{P}_n^n = \mathrm{C}_x^2 \cdot \mathrm{P}_n^2 \cdot \mathrm{P}_n^n$。

当循环变量 $i = 3$ 时:

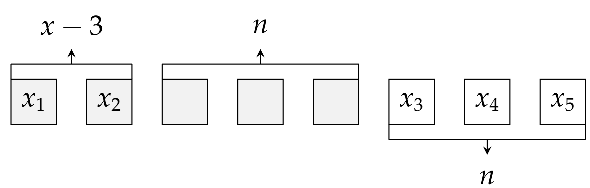


图 121: 排列组合问题 I-01 的示意图 - 3N

在 5 个约束元素中，保留 2 个在排斥位上，共有 C_5^2 种组合，即 C_x^{x-3}。

在 5 个约束元素中，移出 3 个至普通位上，共有 P_3^3 种排列，即 P_n^3。

对于 3 个普通元素，剩余 3 个空位，共有 P_3^3 种排列，即 P_n^n。

由乘法定理可得此时需减去的情况数为 $\mathrm{C}_x^{x-3} \cdot \mathrm{P}_n^3 \cdot \mathrm{P}_n^n = \mathrm{C}_x^3 \cdot \mathrm{P}_n^3 \cdot \mathrm{P}_n^n$。

由于没有更多的普通位置可供移出，使循环无法继续，故循环终止。

因此当 $n < x - 1$ 时，主要矛盾是普通位置，显然这种情况下累加会终止于 $i = n$。

17.5.2 排列组合问题 I-02

排列组合问题 I-02 背景：存在 1 个约束集合 X，其中的元素必须保持相对顺序固定。

排列组合问题 I-02 公式：

$$P = \frac{\mathrm{P}_p^p}{\mathrm{P}_x^x}$$

排列组合问题 I-02 示意图：

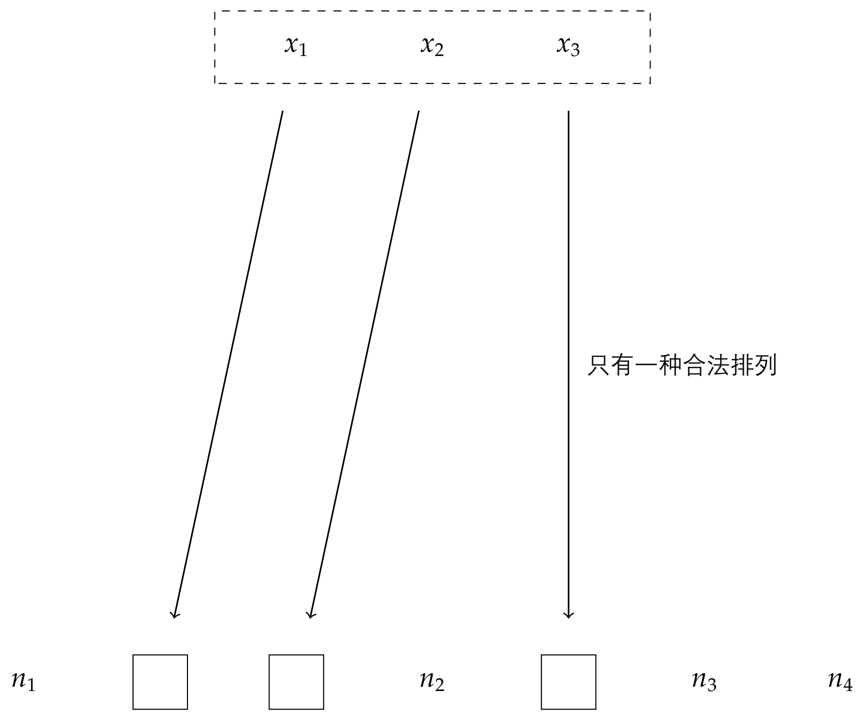


图 122: 排列组合问题 I-02 的示意图

该类情况下，约束元素只能置于位置固定的方框中，普通元素位置固定。

该类情况下，约束元素共有 P_x^x 种排列，但是根据约束条件只有 1 种是合法的。

由此可见对于每一类情况的 P_x^x 排列均中只有 1 种是合法的。

因此总数上除以 P_x^x 即可得到公式 $P = \dfrac{\mathrm{P}_p^p}{\mathrm{P}_x^x}$。

对于 λ 个约束集合 $X_1 \sim X_\lambda$ 要求相对顺序固定，可以用类似思路推广求解。

17.5.3 排列组合问题 I-03

排列组合问题 I-03 背景：存在 1 个约束集合 X，其中的元素必须相邻。

排列组合问题 I-03 公式：

$$P = \mathrm{P}_{n+1}^{n+1} \cdot \mathrm{P}_{x}^{x}$$

排列组合问题 I-03 示意图：

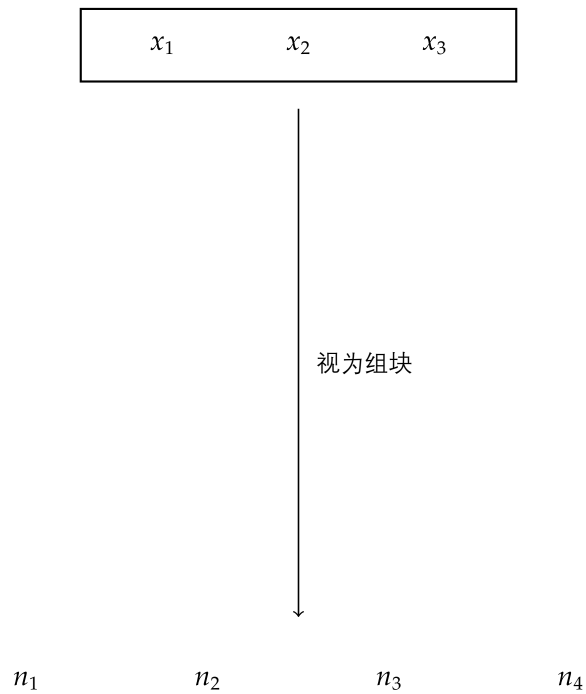


图 123: 排列组合问题 I-03 的示意图

该问题解决的核心思路是将约束集合的元素视为组块。

在整体上考虑，整体上共有 $n+1$ 个元素或组块进行全排列，其排列数为 P_{n+1}^{n+1}。

在组块内考虑，约束集合中共有 x 个元素，组块内共有 x 个位置，其排列数为 P_{x}^{x}。

根据乘法定理可得总情况数为 $P = \mathrm{P}_{n+1}^{n+1} \cdot \mathrm{P}_{x}^{x}$。

对于 λ 个约束集合 $X_1 \sim X_\lambda$ 要求必须相邻，可以用类似思路推广求解。

17.5.4 排列组合问题 I-04

排列组合问题 I-04 背景：存在 1 个约束集合 X，其中的元素必须隔开。

排列组合问题 I-04 公式：

$$P = \mathrm{P}_{n+1}^{n+1} \cdot \mathrm{P}_x^x$$

排列组合问题 I-04 示意图：

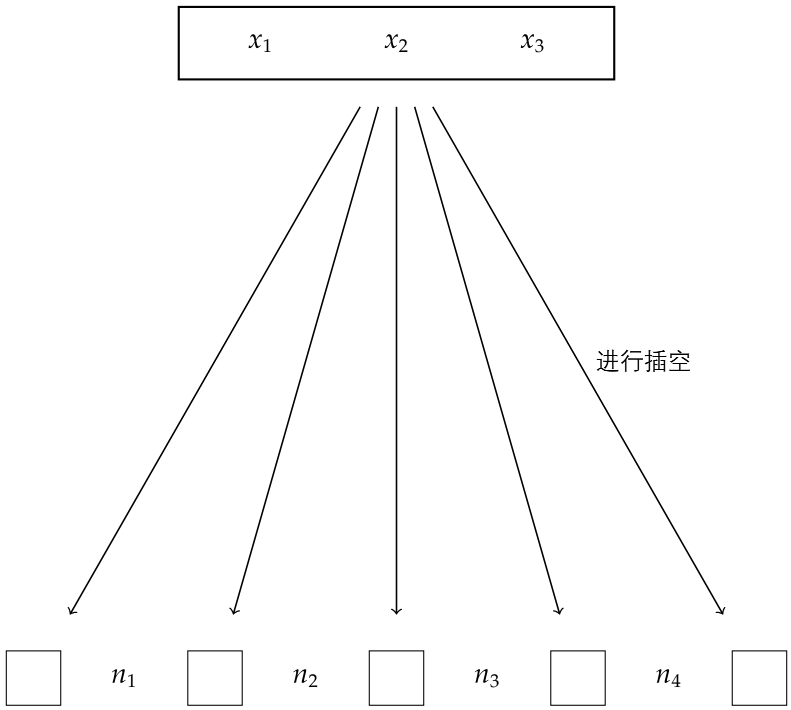


图 124: 排列组合问题 I-04 的示意图

该问题解决的核心思路是将约束集合的元素进行插空。

考虑普通元素，普通集合中共有 n 个元素进行全排列，其排列数为 P_{n+1}^{n+1}。

考虑约束元素，约束集合中共有 x 个元素，插空时共有 $n+1$ 个位置，其排列数为 P_x^x。

根据乘法定理可得总情况数为 $P = \mathrm{P}_{n+1}^x \cdot \mathrm{P}_n^n$。

对于 λ 个约束集合 $X_1 \sim X_\lambda$ 要求必须隔开，不能用类似思路推广求解。

17.6 排列组合问题 II

我们首先约定符号和背景，以便后续讨论。

设共有 p 个元素，需对其中 q 个元素进行组合。

此处的 p 个元素可以分至若干集合中，包含一个普通集合和若干个约束集合。

普通集合用符号 N 表示，其中共有 n 个元素：

$$N = \{n_1, n_2, \cdots, n_n\}$$

约束集合用符号 X 表示，其中共含有 x 个元素：

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_x\}$$

显然元素数 p 与 n 和 x 存在以下关系：

$$p = n + x$$

如果存在多个约束集合，则可以视情况分别使用符号 X_1 X_2 X_3 等表示。

我们认为，普通集合中的元素在排列时无要求，约束集合中的元素在排列时存在约束条件。

我们现在研究，在不同的约束条件下，总组合数 C 的值和约束条件的关系。

17.6.1 排列组合问题 II-01

排列组合问题 II-01 背景：存在 λ 个约束集合 $X_1 \sim X_\lambda$，其中的元素必须选取 m_i 个。

排列组合问题 II-01 公式：

$$C = \mathrm{C}_n^{q-\sum mi} \cdot \prod_{i=1}^{\lambda} \mathrm{C}_{x_i}^{m_i}$$

由于约束集合 X_1 要求必须从 x_1 个元素中选取 m_1 个元素，故有组合数 $\mathrm{C}_{x_1}^{m_1}$。

由于约束集合 X_2 要求必须从 x_2 个元素中选取 m_2 个元素，故有组合数 $\mathrm{C}_{x_2}^{m_2}$。

由于约束集合 X_λ 要求必须从 x_λ 个元素中选取 m_λ 个元素，故有组合数 $\mathrm{C}_{x_\lambda}^{m_\lambda}$。

最后普通集合 N 需要在其 n 个元素中选取剩余的 $q - \sum m_i$ 个元素，故有组合数 $\mathrm{C}_n^{q-\sum m_i}$。

根据乘法原理可得总情况数为 $C = \mathrm{C}_n^{q-\sum mi} \cdot \prod_{i=1}^{\lambda} \mathrm{C}_{x_i}^{m_i}$。

17.6.2 排列组合问题 II-02

排列组合问题 II-02 背景：存在 1 个约束集合 X，其中的元素至少选取 m 个。

排列组合问题 II-02 公式：

$$C = \sum_{i=m}^{q} \mathrm{C}_x^i \cdot \mathrm{C}_n^{q-i}$$

排列组合问题 II-02 的示意图：

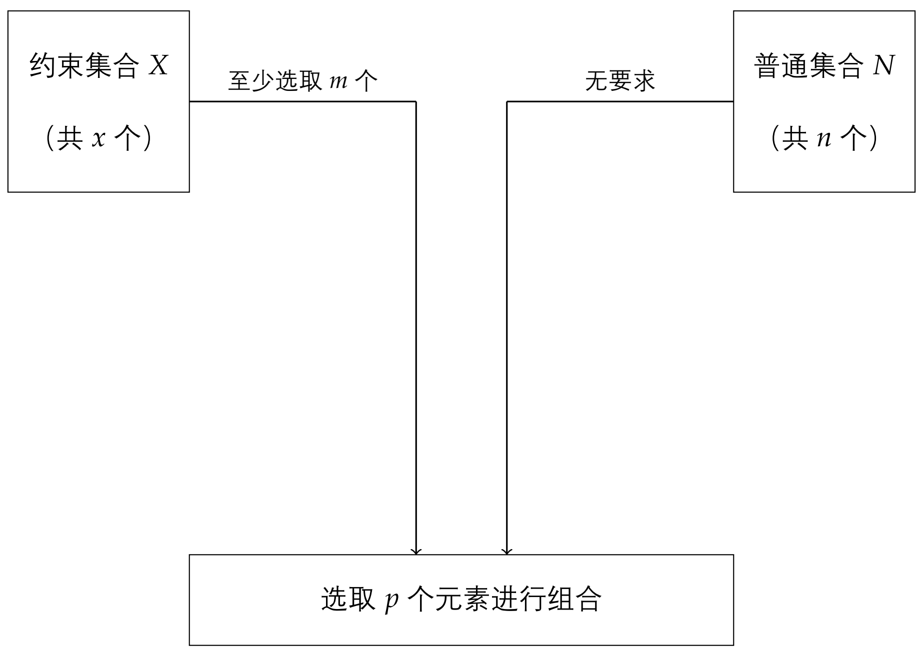


图 125: 排列组合问题 II-02 的示意图

显然符合约束条件的情况可以列举如下：

从 X 中选取 $m+0$ 个元素，从 N 中选取剩余 $q-(m+0)$ 个元素，情况数为 $\mathrm{C}_x^{m+0} \cdot \mathrm{C}_n^{q-(m+0)}$。

从 X 中选取 $m+1$ 个元素，从 N 中选取剩余 $q-(m+1)$ 个元素，情况数为 $\mathrm{C}_x^{m+1} \cdot \mathrm{C}_n^{q-(m+1)}$。

从 X 中选取 $m+2$ 个元素，从 N 中选取剩余 $q-(m+2)$ 个元素，情况数为 $\mathrm{C}_x^{m+2} \cdot \mathrm{C}_n^{q-(m+2)}$。

直至从 X 中选取的元素数达到上限 p 时终止，即范围为 $m \sim q$。

根据加法原理可得总情况数为 $C = \sum_{i=m}^{q} \mathrm{C}_x^i \cdot \mathrm{C}_n^{q-i}$。

17.6.3 排列组合问题 II-03

排列组合问题 II-03 背景：存在 1 个约束集合 X，其中的元素至多选取 m 个。

排列组合问题 II-03 公式：

$$C=\sum_{i=0}^{m}\mathrm{C}_{x}^{i}\cdot\mathrm{C}_{n}^{q-i}$$

排列组合问题 II-03 的示意图：

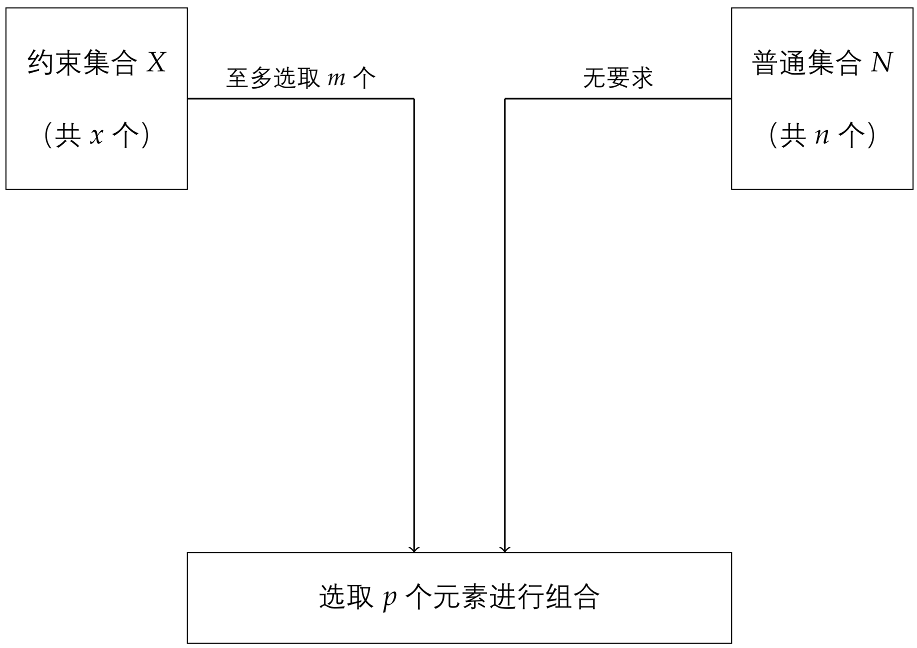


图 126: 排列组合问题 II-03 的示意图

显然符合约束条件的情况可以列举如下：

从 X 中选取 $m-0$ 个元素，从 N 中选取剩余 $q-(m-0)$ 个元素，情况数为 $\mathrm{C}_{x}^{m-0}\cdot\mathrm{C}_{n}^{q-(m-0)}$。

从 X 中选取 $m-1$ 个元素，从 N 中选取剩余 $q-(m-1)$ 个元素，情况数为 $\mathrm{C}_{x}^{m-1}\cdot\mathrm{C}_{n}^{q-(m-1)}$。

从 X 中选取 $m-2$ 个元素，从 N 中选取剩余 $q-(m-2)$ 个元素，情况数为 $\mathrm{C}_{x}^{m-2}\cdot\mathrm{C}_{n}^{q-(m-2)}$。

直至从 X 中选取的元素数达到下限 0 时终止，即范围为 $0\sim m$。

根据加法原理可得总情况数为 $C=\sum_{i=0}^{m}\mathrm{C}_{x}^{i}\cdot\mathrm{C}_{n}^{q-i}$。

17.7 球盒问题

球盒问题：现有 n 个（相同/不同）的小球，放入 m 个（相同/不同）的盒子，求总方案数 B。

球盒问题通常还带有附加条件，最常见的为盒子中至少需要放入一个小球。

17.7.1 球盒问题 01

球盒问题 01 背景：将 n 个**相同的**球放入 m 个**不同的**盒中，保证盒 m_i 个中至少 x_i 个。

球盒问题 01 公式：

$$B = \mathrm{C}_{n+m-1-\sum x_i}^{m-1}$$

球盒问题 01 示意图：

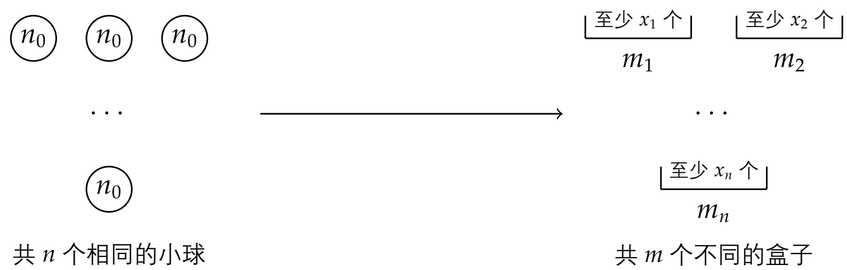


图 127: 球盒问题 01 的示意图

对于第 i 个盒子，其至少放入 x_i 个球，我们首先先放入 $x_i - 1$ 个球。

此时剩余球的数量 b 可以表达为：

$$b = n - \sum_{i=1}^{m} x_i - 1 \tag{1}$$

$$b = n + m - \sum_{i=1}^{m} x_i \tag{2}$$

随后在 b 个球间的 $b-1$ 个缝隙中，插入 $m-1$ 块板，将球分为 m 组，依次放入对应的盒子。

在插板时，规定两块板不能置于同一缝隙，规定两侧不能插板，因此分出的每组球至少有一个，然而先前的操作使得每个盒子只需一个即可满足要求，因此任意一种插板方式均能满足要求。

因而所求的总方案数就等同于该背景下插板的方案数。

因此代入相关数据可求得 $B = \mathrm{C}_{n+m-1-\sum x_i}^{m-1}$。

17.7.2 斯特林数

第二类斯特林数即 S_n^m，表示将 n 个不同元素分入 m 个相同集合的方案数，集合要求非空。

第二类斯特林数的计算公式：

$$S_n^m = \frac{1}{P_m^m} \cdot \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \cdot C_m^k \cdot (m-k)^n$$

接下来我们将证明第二类斯特林数的计算公式。

为了便于计算，编号相同集合，使其成为不同集合，后续所有的讨论均在该背景下进行。

为了便于推导，定义函数 $T(h)$，该函数代表空集数为 h 时有 $T(h)$ 种分配方案。

例如 $T(0)$ 代表空集数为 0 时的方案数。

例如 $T(5)$ 代表空集数为 5 时的方案数。

显然第二类斯特林数可以表示为：

$$T(0) = P_m^m \cdot S_n^m \tag{1}$$

这是因为斯特拉数 S_n^m 恰好代表空集为 0 时的分配方案数，此处的 P_m^m 是由于集合的编号造成的。

考虑空集数 $>= 1$ 的情况：

$$C_m^1 \cdot (m-1)^n = C_1^1 \cdot T(1) + C_2^1 \cdot T(2) + C_3^1 \cdot T(3) + \cdots + C_m^1 \cdot T(m) = \sum_{h=1}^{m} C_h^1 \cdot T(h) \tag{2}$$

左侧的思路是先从 m 个集合中选出一个作为空集，然后使 n 个元素自由分配至 $m-1$ 个集合。

右侧的思路是依次考虑空集数为 $1, 2, 3, \cdots, m$ 时的方案数 $T(1), T(2), T(3), \cdots, T(m)$ 并累加。

然而左侧的计数方法实际上是有重复的：

1. 当 C_m^1 选定 A 作为空集，后续自由分配使得 B, C 成为空集。

2. 当 C_m^1 选定 B 作为空集，后续自由分配使得 C, A 成为空集。

3. 当 C_m^1 选定 C 作为空集，后续自由分配使得 A, B 成为空集。

因而在空集数为 3 时发生了 3 倍的重复计数，故右侧 $T(3)$ 前要乘倍数 3 即 C_3^1 以抵消重复。

因此进一步推广可知，右侧在空集数为 h 时，左侧总是重复计数 C_h^1 倍。

推广可得空集数 $\geq k$ 时的情况:

$$C_m^k \cdot (m-k)^n = \sum_{h=k}^{m} C_h^k \cdot T(h) \tag{3}$$

由此可以构造得到一个恒等式:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \cdot C_m^k \cdot (m-k)^n = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \cdot \sum_{h=k}^{m} C_n^k \cdot T(h) \tag{4}$$

右侧很显然等于:

$$(-1)^0 \cdot \Big[\overbrace{C_0^0 \cdot T(0) + C_1^0 \cdot T(1) + C_2^0 \cdot T(2) + \cdots + C_m^0 \cdot T(m)}^{\text{共}m-0\text{项}}\Big] + \tag{5}$$

$$(-1)^1 \cdot \Big[\overbrace{C_1^1 \cdot T(1) + C_2^1 \cdot T(2) + C_3^1 \cdot T(3) + \cdots + C_m^1 \cdot T(m)}^{\text{共}m-1\text{项}}\Big] + \tag{6}$$

$$(-1)^2 \cdot \Big[\overbrace{C_2^2 \cdot T(2) + C_3^2 \cdot T(3) + C_4^2 \cdot T(4) + \cdots + C_m^2 \cdot T(m)}^{\text{共}m-2\text{项}}\Big] + \tag{7}$$

$$(-1)^3 \cdot \Big[\overbrace{C_3^3 \cdot T(3) + C_4^3 \cdot T(4) + C_5^3 \cdot T(5) + \cdots + C_m^3 \cdot T(m)}^{\text{共}m-3\text{项}}\Big] + \tag{8}$$

$$\vdots \tag{9}$$

$$(-1)^m \cdot \Big[C_m^m \cdot T(m)\Big] \tag{10}$$

右侧可以变形为:

$$T(0) \cdot \Big[(-1)^0 \cdot C_0^0\Big] + \tag{11}$$

$$T(1) \cdot \Big[(-1)^0 \cdot C_1^0 + (-1)^1 \cdot C_1^1\Big] + \tag{12}$$

$$T(2) \cdot \Big[(-1)^0 \cdot C_2^0 + (-1)^1 \cdot C_2^1 + (-1)^2 \cdot C_2^2\Big] + \tag{13}$$

$$T(2) \cdot \Big[(-1)^0 \cdot C_3^0 + (-1)^1 \cdot C_3^1 + (-1)^2 \cdot C_3^2 + (-1)^3 \cdot C_3^3\Big] + \tag{14}$$

$$\vdots \tag{15}$$

$$T(m) \cdot \Big[(-1)^0 \cdot C_m^0 + (-1)^1 \cdot C_m^1 + (-1)^2 \cdot C_m^2 + \cdots + (-1)^m \cdot C_m^m\Big] \tag{16}$$

接下来将用累加符号表示变形后的右侧式子。

包含 $T(h)$ 的行后的括号可以写为:

$$\sum_{k=0}^{h}(-1)^k \cdot \mathrm{C}_h^k \tag{17}$$

同时 $T(h)$ 中 h 的取值在 $0 \sim m$ 间:

$$\sum_{h=0}^{m} T(h) \cdot \sum_{k=0}^{h}(-1)^k \cdot \mathrm{C}_h^k \tag{18}$$

因此原恒等式可以变形为:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \cdot \mathrm{C}_m^k \cdot (m-k)^n = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \cdot \sum_{h=k}^{m} \mathrm{C}_n^k \cdot T(h) \tag{19}$$

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \cdot \mathrm{C}_m^k \cdot (m-k)^n = \sum_{h=0}^{m} T(h) \cdot \sum_{k=0}^{h}(-1)^k \cdot \mathrm{C}_h^k \tag{20}$$

然而由二项式定理的结论:

$$\sum_{k=0}^{h}(-1)^k \cdot \mathrm{C}_h^k = 0 \qquad (h \geq 1) \tag{21}$$

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \cdot \mathrm{C}_m^k \cdot (m-k)^n = T(0) \cdot (-1)^0 \cdot \mathrm{C}_0^0 \tag{22}$$

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \cdot \mathrm{C}_m^k \cdot (m-k)^n = T(0) \tag{23}$$

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \cdot \mathrm{C}_m^k \cdot (m-k)^n = \mathrm{P}_m^m \cdot \mathrm{S}_n^m \tag{24}$$

变形可得斯特林数公式:

$$\mathrm{S}_n^m = \frac{1}{\mathrm{P}_m^m} \cdot \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \cdot \mathrm{C}_m^k \cdot (m-k)^n \tag{25}$$

由此证明了第二类斯特林数的计算公式。

17.7.3 球盒问题 02

球盒问题 02 背景：将 n 个**不同的**球放入 m 个**相同的**盒中，保证至少 1 个。

球盒问题 02 公式：

$$B = \frac{1}{\mathrm{P}_m^m} \cdot \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \cdot \mathrm{C}_m^k \cdot (m-k)^n$$

球盒问题 02 示意图：

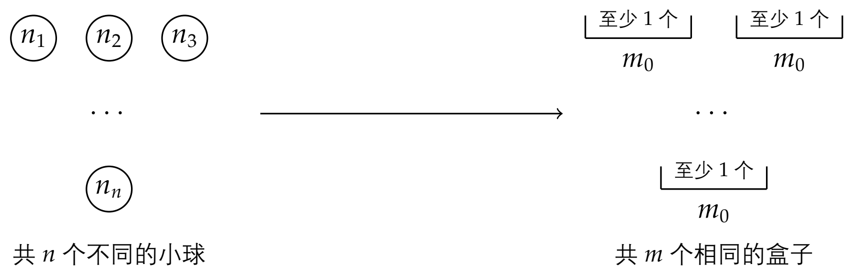


图 128: 球盒问题 02 的示意图

这一点可以直接由第二类斯特林数的计算公式得到：

1. 将斯特林数中的元素解读为小球。

2. 将斯特林数中的集合解读为盒子。

3. 由于该问题下盒子是相同的，因此对应的集合也是相同的。

根据第二类斯特林数公式：

$$\mathrm{S}_n^m = \frac{1}{\mathrm{P}_m^m} \cdot \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \cdot \mathrm{C}_m^k \cdot (m-k)^n \tag{1}$$

由于此时集合应是相同的：

$$B = \mathrm{S}_n^m \tag{2}$$

$$B = \frac{1}{\mathrm{P}_m^m} \cdot \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \cdot \mathrm{C}_m^k \cdot (m-k)^n \tag{3}$$

由此证明了该球盒问题的计算公式。

17.7.4 球盒问题 03

球盒问题 03 背景：将 n 个**不同的**球放入 m 个**不同的**盒中，保证至少 1 个。

球盒问题 03 公式：

$$B=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\cdot \mathrm{C}_m^k\cdot(m-k)^n$$

球盒问题 03 示意图：

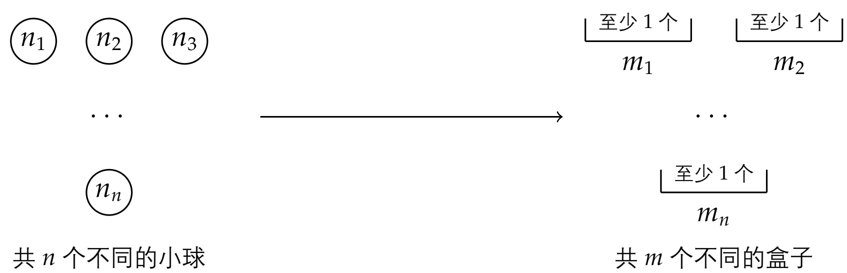


图 129: 球盒问题 03 的示意图

这一点可以直接由第二类斯特林数的计算公式得到：

1. 将斯特林数中的元素解读为小球。

2. 将斯特林数中的集合解读为盒子。

3. 由于该问题下盒子是不同的，因此对应的集合也是不同的。

根据第二类斯特林数公式：

$$\mathrm{S}_n^m=\frac{1}{\mathrm{P}_m^m}\cdot\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\cdot \mathrm{C}_m^k\cdot(m-k)^n \tag{4}$$

由于此时集合应是不同的：

$$B=\mathrm{P}_m^m\cdots \mathrm{S}_n^m \tag{5}$$

$$B=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\cdot \mathrm{C}_m^k\cdot(m-k)^n \tag{6}$$

由此证明了该球盒问题的计算公式。

18 概率论初步

18.1 随机事件

必然事件：在每次试验中一定发生，通常用符号 Ω 表示。

不可能事件：在每一次试验中一定不发生，通常用符号 $\emptyset$ 表示。

必然事件的概率为 1:

$$P(\Omega) = 1$$

不可能事件的概率为 0:

$$P(\emptyset) = 0$$

随机事件：在每次试验中可能发生可能不发生的事件，通常用 A B C 等大写字母表示。

随机事件的概率在 0 和 1 间:

$$P(A) \in [0,1]$$

一般来说，随机事件也可以简称为事件。

18.2 古典概型

我们将每次试验中最为简单不能再分的随机事件，称为基本事件，通常用符号 ω 表示。

所有的基本事件的概率和为 1:

$$\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$$

实际上，我们可以将所有随机事件看作若干个基本事件的组合。

若一个试验满足以下条件，我们将其称为古典概型:

有限性：在试验中，基本事件的数量是有限的。

等可能性：在试验中，每个基本事件发生的可能性均等。

古典概型的概率:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

此处的 $|A|$ 和 $|\Omega|$ 分别随机事件 A 和必然事件 Ω 中，包含的基本事件的数量。

18.3 事件关系的运算

任何一个事件都可以视作由基本事件组成的集合。

例如必然事件可以表示为:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$$

例如随机事件可以表示为:

$$A = \{\omega_1, \omega_2\} \quad B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

以此为基础, 可以将概率的运算, 对应为集合的运算。

18.3.1 积事件

我们这样定义两个事件的积事件:

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$$

我们这样定义多个事件的积事件:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \mid \omega \in A_1 \text{ 且 } \omega \in A_2 \text{ 且 } \cdots \text{ 且 } \omega \in A_n\}$$

即事件 A 发生**且**事件 B 发生, 其积事件 $A \cap B$ 才会发生。

18.3.2 和事件

我们这样定义两个事件的和事件:

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$$

我们这样定义多个事件的积事件:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \mid \omega \in A_1 \text{ 或 } \omega \in A_2 \text{ 或 } \cdots \text{ 或 } \omega \in A_n\}$$

即事件 A 发生**或**事件 B 发生, 其和事件 $A \cup B$ 就会发生。

18.3.3 差事件

我们这样定义两个事件的差事件：

$$A - B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}$$

即事件 A 发生**且**事件 B 不发生，其差事件 $A - B$ 才会发生。

18.3.4 互斥事件

如果两个事件满足以下条件，我们将其称为互斥事件：

$$P(A \cap B) = P(\varnothing)$$

所以事件 A 和事件 B 为互斥事件的条件是，其积事件为不可能事件。

18.3.5 对立事件

如果两个事件满足以下条件，我们将其称为对立事件：

$$P(A \cap B) = P(\varnothing)$$

$$P(A \cup B) = P(\Omega)$$

所以事件 A 和事件 B 为互斥事件的条件是，其积事件为不可能事件，其和事件为必然事件。

由于事件 A 的对立事件是唯一的，因此事件 A 的对立事件可以记作 $\bar{A}$。

18.4 概率的加法定理

对于两个普通事件 A B：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

对于两个互斥事件 A B：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

概率的加法定理给出了和事件概率的计算方法。

18.5 条件概率的计算

我们这样定义条件概率:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

其中等式左侧的符号代表，在事件 B 发生的条件下，此时事件 A 发生的条件概率。

设积事件 $A \cap B$ 中基本事件数量为 a，设事件 B 中基本事件数量为 b，设基本事件的总数为 n。

由于需在事件 B 发生的条件下使得事件 A 发生，因此我们可以得到以下等式:

$$P(A \mid B) = \frac{a}{b} = \frac{a/n}{b/n} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1}$$

由此证明了条件概率的计算公式。

18.5.1 独立事件

如果两个事件满足以下条件，我们将其称为独立事件:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

$$P(B \mid A) = P(B)$$

即当事件 A 和事件 B 的发生都不会影响对方的条件概率时，称其互为独立事件。

上述列出的两个条件实际上是等价的，只要其中任何一个成立另一个也一定成立。

18.6 概率的乘法定理

对于两个普通事件 A B:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

对于两个独立事件 A B

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

概率的乘法定理给出了积事件概率的计算方法。

19 基本统计方法

19.1 总体均值和总体方差

在统计问题中，我们将研究对象的全体称为总体，我们将每一个研究对象称为个体。

设个体数量为 n，设个体的取值分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。

我们定义总体均值：

$$\mu = \frac{1}{n} \cdot [x_1 + x_2 + \cdots + x_n]$$

我们定义总体方差：

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \cdots + (x_n - \mu)^2\right]$$

总体均值表现了总体中个体的平均大小，总体方差表现了总体中个体的离散程度。

19.1.1 总体方差的两种形式

实际上总体方差有两种计算方式：

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \cdots + (x_n - \mu)^2\right]$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2\right] - \mu^2$$

其中第二种形式可以由第一种形式推导而来：

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\right] \tag{1}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} (2 \cdot x_i \cdot \mu) + \sum_{i=1}^{n} (\mu)^2\right] \tag{2}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - 2 \cdot n \cdot \mu^2 + n \cdot \mu^2\right] \tag{3}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right] - \mu^2 \tag{4}$$

19.2 样本均值和样本方差

在统计问题中，我们将总体中抽出的一部分个体称为样本，其包含个体的数量称为样本容量。

设样本容量为 m，设个体的取值分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_m$。

我们定义样本均值：

$$\nu = \frac{1}{m} \cdot [x_1 + x_2 + \cdots + x_m]$$

我们定义样本方差：

$$s^2 = \frac{1}{m-1} \cdot \left[(x_1 - \nu)^2 + (x_2 - \nu)^2 + \cdots + (x_n - \nu)^2\right]$$

样本均值表现了样本中个体的平均大小，样本方差表现了样本对总体离散程度的估计。