Учреждение образования

«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Основы защиты информации

Студент: Чепелева Е.Г.

ФИТ 2 курс 4 группа

Преподаватель: Барковский Е.В.

Минск 2022

**Практическое занятие №6**

**Тема «****Криптографическая защита информации»**

**Цель**: Овладение основными криптографическими алгоритмами асимметричного шифрования .

**Теоретические сведения**

# Реализация элементов криптосистемы RSA

RSA (аббревиатура от фамилий Rivest, Shamir и Adleman) — криптографический алгоритм с открытым ключом, основывающийся на вычислительной сложности задачи факторизации больших целых чисел.

Криптосистема RSA стала первой системой, пригодной и для шифрования, и для цифровой подписи. Алгоритм используется в большом числе криптографических приложений, включая PGP, S/MIME, TLS/SSL, IPSEC/IKE и других.

Весь алгоритм расписан в таблице:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Этап | Описание операции | Результат операции |
| Генерация ключей | Выбрать два простых различных числа | p=3557,  q=2579 |
| Вычислить модуль (произведение) | n = p \cdot q = 3557 \cdot 2579 = 9173503 |
| Вычислить функцию Эйлера | \varphi(n) = (p-1) (q-1) = 9167368 |
| Выбрать открытую экспоненту | e = 3 |
| Вычислить секретную экспоненту | d = e^{-1} \mod \varphi(n)  d = 6111579 |
| Опубликовать открытый ключ | \{e, n\} = \{3,9173503 \} |
| Сохранить закрытый ключ | \{d, n\} = \{6111579, 9173503 \} |
| Шифрование | Выбрать текст для зашифровки | m = 111111 |
| Вычислить шифротекст | \begin{align} c &= E(m) \\  &= m^e \mod n \\  &= 111111^3   \mod 9173503 \\  &= 4051753 \end{align} |
| Расшифрование | Вычислить исходное сообщение | \begin{align} m &= D(c) = \\   &= c^d \mod n \\   &= 4051753^{6111579} \mod 9173503 \\   &= 111111 \end{align} |

# Реализация элементов схемы шифрования Эль-Гамаля

## **Генерация ключей**

1. Генерируется случайное простое число ~p длины ~n [битов](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D1%82).
2. Выбирается случайный примитивный элемент ~g.
3. Выбирается случайное целое число ~x такое, что ~1 < x < p-1.
4. Вычисляется ~y = g^x\,\bmod\,p.
5. Открытым ключом является тройка \left( p,g,y \right), закрытым ключом — число ~x.

## **Шифрование**

Сообщение ~M шифруется следующим образом:

1. Выбирается сессионный [ключ](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BB%D1%8E%D1%87_(%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%BF%D1%82%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%B8%D1%8F)) — случайное целое число ~k такое, что ~1 < k < p - 1
2. Вычисляются числа a = g^k\,\bmod\,p и b = y^k M\,\bmod\,p.
3. Пара чисел \left( a, b \right) является [шифротекстом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%B8%D1%84%D1%80%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%BA%D1%81%D1%82" \o "Шифротекст).

Нетрудно видеть, что длина шифротекста в схеме Эль-Гамаля длиннее исходного сообщения M вдвое.

## **Расшифрование**

Зная закрытый ключ ~x, исходное сообщение можно вычислить из шифротекста \left( a, b \right) по формуле:

M = b(a^x)^{-1}\,\bmod\,p.

При этом нетрудно проверить, что

~(a^x)^{-1}\equiv g^{-kx}\pmod{p}

и поэтому

~b(a^x)^{-1}\equiv (y^kM)g^{-xk}\equiv (g^{xk}M) g^{-xk}\equiv M \pmod{p}.

Для практических вычислений больше подходит следующая формула:

M = b(a^x)^{-1}\,\bmod\,p = b \cdot a^{(p-1-x)}\,\bmod\,p 

## **Пример**

**Шифрование**

Допустим, что нужно зашифровать сообщение ~M=5.

Произведем генерацию ключей :

пусть ~p=11, g=2. Выберем ~x=8 - случайное целое число ~x такое, что ~1 < x < p.

Вычислим ~y= g^x\bmod{p}=2^8\bmod{11}=3.

Итак, открытым является тройка ~(p,g,y)=(11,2,3), а закрытым ключом является число ~x=8.

Выбираем случайное целое число ~k такое, что 1 < k < (p − 1). Пусть ~k=9.

Вычисляем число ~a=g^k\bmod{p}=2^9 \bmod{11}=512 \bmod{11}=6.

Вычисляем число ~b=y^k M\bmod{p}=3^9 5 \bmod{11}=19683 \cdot 5 \bmod{11}=9.

Полученная пара ~(a,b)=(6,9) является шифротекстом.

**Расшифрование**

Необходимо получить сообщение ~M=5 по известному шифротексту ~(a,b)=(6,9) и закрытому ключу ~x=8.

Вычисляем M по формуле : ~M=b(a^x)^{-1}\bmod{p}=9(6^8)^{-1}\mod{11}=5

Получили исходное сообщение ~M=5.

# Реализация элементов схемы шифрования Дифи-Хеллмана

## **Генерация ключей**

В 1976 году после публичной критики алгоритма DES и указания на сложность обработки секретных ключей Уитфилд Диффи (Whitfield Diffie) и Мартин Хеллман (Martin Hellman) опубликовали свой алгоритм обмена ключами. Это была первая публикация на тему криптографии с открытым ключом и, возможно, самый большой шаг вперед в области криптографии, сделанный когда‑либо.

Из‑за невысокого быстродействия, свойственного асимметричным алгоритмам, алгоритм Диффи‑Хеллмана не предназначен для шифрования данных. Он был ориентирован на передачу секретных ключей DES, ARS или других подобных алгоритмов через небезопасную среду. В большинстве случаев алгоритм Диффи‑Хеллмана не используется для шифрования сообщений, потому что он, в зависимости от реализации, от 10 до 1000 раз медленнее алгоритма DES.

До алгоритма Диффи‑Хеллмана было сложно совместно использовать зашифрованные данные из‑за проблем хранения ключей и передачи информации. В большинстве случаев передача информации по каналам связи небезопасна, потому что сообщение может пройти десятки систем, прежде чем оно достигнет потенциального адресата, и нет никаких гарантий, что по пути никто не сможет взломать секретный ключ. Уитфилд Диффи и Мартин Хеллман предложили зашифровывать секретный ключ DES по алгоритму Диффи‑Хеллмана на передающей стороне и пересылать его вместе с сообщением, зашифрованным с использованием DES. Тогда на другом конце его сможет расшифровать только получатель сообщения.

На практике **обмен ключами** по алгоритму Диффи‑Хеллмана происходит по следующей схеме.

1. Два участника обмена договариваются о двух числах. Один выбирает большое простое число, а другой – целое число, меньшее числа первого участника. Переговоры они могут вести открыто, и это никак не отразится на безопасности.
2. Каждый из двух участников, независимо друг от друга, генерирует другое число, которое они будут хранить в тайне. Эти числа выполняют роль секретного ключа. Далее в вычислениях используются секретный ключ и два предыдущих целых числа. Результат вычислений посылается участнику обмена, и он играет роль открытого ключа.
3. Участники обмена обмениваются открытыми ключами. Далее они, используя собственный секретный ключ и открытый ключ партнера, конфиденциально вычисляют ключ сессии. Каждый партер вычисляет один и тот же ключ сессии.
4. Ключ сессии может использоваться как секретный ключ для другого алгоритма шифрования, например DES. Никакое третье лицо, контролирующее обмен, не сможет вычислить ключ сессии, не зная один из секретных ключей.

**Самое сложное в алгоритме** Диффи‑Хеллмана обмена ключами – это понять, что в нем фактически два различных независимых цикла шифрования. Алгоритм Диффи‑Хеллмана применяется для обработки небольших сообщений от отправителя получателю. Но в этом маленьком сообщении передается секретный ключ для расшифровки большого сообщения.

**Сильная сторона алгоритма** - никто не сможет скомпрометировать секретное сообщение, зная один или даже два открытых ключа получателя и отправителя. В качестве секретных и открытых ключей используются очень большие целые числа. Алгоритм Диффи‑Хеллмана основан на полезных для криптографии свойствах дискретных логарифмов.

## **Пример**

Ева — криптоаналитик. Она читает пересылку Боба и Алисы, но не изменяет содержимого их сообщений.

* s = секретный ключ. s = 2
* g = простое число меньшее p. g = 5
* p = открытое простое число. p = 23
* a = секретный ключ Алисы. a = 6
* A = открытый ключ Алисы. A = ga mod p = 8
* b = секретный ключ Боба. b = 15
* B = открытый ключ Боба. B = gb mod p = 19



**Реализация элементов схемы шифрования Диффи-Хеллмана**

Обмен ключами с помощью протокола Диффи-Хеллмана (DH) — это метод безопасного обмена криптографическими ключами по общедоступному каналу. Это один из первых протоколов с открытым ключом, который изначально был концептуализирован Ральфом Мерклем и назван в честь Уитфилда Диффи и Мартина Хеллмана. DH является одним из первых практических примеров обмена открытыми ключами.

Алгоритм Диффи-Хеллмана не применяется для шифрования сообщений или формирования электронной подписи. Его назначение – в распределении ключей. Он позволяет двум или более пользователям обменяться без посредников ключом, который может быть использован затем для симметричного шифрования. Это была первая криптосистема, которая позволяла защищать информацию без использования секретных ключей, передаваемых по защищенным каналам. Схема открытого распределения ключей, предложенная Диффи и Хеллманом, произвела настоящую революцию в мире шифрования, так как снимала основную проблему классической криптографии – проблему распределения ключей. Алгоритм основан на трудности вычислений дискретных логарифмов.

На практике обмен ключами по алгоритму Диффи‑Хеллмана происходит по следующей схеме:

1. Два участника обмена договариваются о двух числах. Один выбирает большое простое число, а другой – целое число, меньшее числа первого участника. Переговоры они могут вести открыто, и это никак не отразится на безопасности.
2. Каждый из двух участников, независимо друг от друга, генерирует другое число, которое они будут хранить в тайне. Эти числа выполняют роль секретного ключа. Далее в вычислениях используются секретный ключ и два предыдущих целых числа. Результат вычислений посылается участнику обмена, и он играет роль открытого ключа.
3. Участники обмена обмениваются открытыми ключами. Далее они, используя собственный секретный ключ и открытый ключ партнера, конфиденциально вычисляют ключ сессии. Каждый партер вычисляет один и тот же ключ сессии.
4. Ключ сессии может использоваться как секретный ключ для другого алгоритма шифрования, например DES. Никакое третье лицо, контролирующее обмен, не сможет вычислить ключ сессии, не зная один из секретных ключей.

**Реализация элементов схемы шифрования алгоритма RSA**

Схема использования алгоритма Диффи-Хеллмана при большом модуле практически не позволяет злоумышленнику получить закрытый ключ и прочитать зашифрованное сообщение. Однако, она дает возможность злоумышленнику подменить сообщение от абонента А к абоненту Б, так как абонент А шифрует свое сообщение открытым ключом, полученным от Б по открытому каналу связи. А раз открытый ключ передается по открытому каналу, любой может получить его и использовать для подмены сообщения. Избежать этого можно, используя более сложные протоколы, например, RSA, который используется для создания цифровой подписи и для обмена ключами. Данная схема позволяет защититься от нескольких видов возможных нарушений, а именно:

* пользователь А не может отказаться от своего сообщения, если он признает, что секретный ключ известен только ему;
* нарушитель без знания секретного ключа не может ни сформировать, ни сделать осмысленное изменение сообщения, передаваемого по линии связи.

Алгоритм RSA расписан в таблице:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Этап | Описание операции | Результат операции |
| Генерация ключей | Выбрать два простых различных числа | p=3557,  q=2579 |
| Вычислить модуль (произведение) | n = p \cdot q = 3557 \cdot 2579 = 9173503 |
| Вычислить функцию Эйлера | \varphi(n) = (p-1) (q-1) = 9167368 |
| Выбрать открытую экспоненту | e = 3 (Простое число, меньше φ(n), взаимно простое с φ(n)) |
| Вычислить секретную экспоненту | d = e^{-1} \mod \varphi(n)  d = 6111579 |
| Опубликовать открытый ключ | \{e, n\} = \{3,9173503 \} |
| Сохранить закрытый ключ | \{d, n\} = \{6111579, 9173503 \} |
| Шифрование | Выбрать текст для зашифровки | m = 111111 |
| Вычислить шифротекст | \begin{align} c &= E(m) \\  &= m^e \mod n \\  &= 111111^3   \mod 9173503 \\  &= 4051753 \end{align} |
| Расшифровка | Вычислить исходное сообщение | \begin{align} m &= D(c) = \\   &= c^d \mod n \\   &= 4051753^{6111579} \mod 9173503 \\   &= 111111 \end{align} |

**Реализация элементов схемы шифрования алгоритма Эль-Гамаля**

Алгоритм Эль-Гамаля также можно использовать для формирования цифровой подписи. Группа пользователей выбирает общие параметры Р и А. Затем каждый абонент группы выбирает свое секретное число Хi, 1 < Хi< Р-1, и вычисляет соответствующее ему открытое число Yi = A ^ Xi mod P. Таким образом, каждый пользователь получает пару (закрытый ключ; открытый ключ) = (Хi, Yi). Открытые ключи пользователей могут храниться в общей базе системы распределения ключей и при необходимости предоставляться всем абонентам системы.

Сообщение, предназначенное для подписи, должно быть представлено в виде числа, меньшего модуля Р. При большом размере сообщение разбивается на блоки необходимого размера. В некоторых случаях подписывается не само сообщение, а значение хеш-функции от него. В любом варианте цифровая подпись вычисляется в зависимости от некоторого числа m (m < P).

Пусть пользователь 1 хочет подписать свое сообщение цифровой подписью и передать его пользователю 2. В этом случае алгоритм действий следующий:

1. Первый пользователь выбирает случайное секретное число k, взаимно простое с Р - 1, и вычисляет число a = A ^ k mod P
2. Затем с помощью расширенного алгоритма Евклида необходимо найти значение b в следующем уравнении:

m = (X1 \* a + k \* b) mod (P - 1)

1. Пара чисел (a, b) будет цифровой подписью сообщения m.
2. Сообщение m вместе с подписью (a, b) отправляется пользователю 2.
3. Пользователь 2 получает сообщение m и с использованием открытого ключа первого абонента Y1 вычисляет два числа по следующим формулам:

c1 = Y1 ^ a \* a ^ b mod P

c2 = A ^ m mod P

Если с1 = с2, то цифровая подпись первого пользователя верная. Для подписывания каждого нового сообщения должно каждый раз выбираться новое значение k.

Подписи, созданные с использованием алгоритма Эль-Гамаля, называются рандомизированными, так как для одного и того же сообщения с использованием одного и того же закрытого ключа каждый раз будут создаваться разные подписи (a, b), поскольку каждый раз будет использоваться новое значение k. Подписи, созданные с применением алгоритма RSA, называются детерминированными, так как для одного и того же сообщения с использованием одного и того же закрытого ключа каждый раз будет создаваться одна и та же подпись.