Analiza 1

za študente Finančne matematike

Zapiski predavanj

Sašo Strle

2021

Kazalo

Poglavje 1. Množice in preslikave 5
1. Osnovno o množicah 5
2. Osnovno o funkcijah 6

Poglavje 2. Števila 11
1. Naravna števila 11
2. Matematična indukcija 11
3. Operacije in urejenost v $\mathbb{N}$ 12
4. Cela števila 13
5. Racionalna števila 14
6. Realna števila 16

Poglavje 3. Zaporedja 21
1. Osnovni pojmi 21
2. Razdalja in okolica 24
3. Limita in stekališče zaporedja 25

Poglavje 4. Konvergentna zaporedja 29
1. Monotona zaporedja 29
2. Operacije z zaporedji 30
3. Primeri konvergentnih zaporedij 33
4. Rekurzivna zaporedja 36

Poglavje 5. Odprte, zaprte in kompaktne množice 39
1. Podmnožice realnih števil 39
2. Podmnožice prostora $\mathbb{R}^k$ 41

Poglavje 6. Limita funkcije 45
1. Pojem limite 45
2. Funkcije ene spremenljivke 45
3. Funkcije več spremenljivk 47
4. Operacije s funkcijami 48

Poglavje 7. Zvezne funkcije 51
1. Pojem zveznosti 51
2. Elementarne funkcije 53
3. Zveznost inverzne funkcije 58

Poglavje 8. Lastnosti zveznih funkcij 61
1. Zveznost in zaporedja 61
2. Obstoj globalnih ekstremov 61
3. Izrek o vmesni vrednosti 63

Poglavje 9. Odvod funkcij ene spremenljivke 67
1. Motivacija: povprečna in trenutna hitrost 67

2. Odvod in odvedljivost 68

Poglavje 10. Pravila za odvajanje in diferencial 73
1. Osnovna pravila za odvajanje 73
2. Tangentna aproksimacija in diferencial 74
3. Odvod sestavljene in odvod inverzne funkcije 76
4. Odvodi eksponentnih in logaritemskih funkcij 78

Poglavje 11. Uporaba odvoda 81
1. Odvod in obnašanje funkcije 81
2. l'Hôpitalovo pravilo 85

Poglavje 12. Višji odvodi in Taylorjeva formula 89
1. Višji odvodi 89
2. Konveksnost 90
3. Taylorjeva formula 92
4. Primitivna funkcija in nedoločeni integral 95

Poglavje 13. Odvod funkcij več spremenljivk 101
1. Parcialni odvodi 101
2. Totalni diferencial in diferenciabilnost 105
3. Taylorjeva formula in verižno pravilo 110

Poglavje 14. Ekstremi funkcij več spremenljivk 115
1. Lokalni ekstremi 115
2. Globalni ekstremi in vezani ekstremi 119
3. Izrek o implicitni funkciji 125
4. Ekstremi funkcij več kot dveh spremenljivk 129

POGLAVJE 1

Množice in preslikave

1. Osnovno o množicah

Definicija 1.1. *Množica* je skupek objektov, določenih z neko lastnostjo.

$M = \{$ elementi množice $\mid$ lastnosti, ki določajo elemente $\}$

Primer 1.2. Primeri množic.

- $M = \{$dnevi v letu 2000, ko je vrednost borznega indeksa zrasla$\}$
- $M = \{$vsi avtomobili rumene barve, izdelani pred letom 1999$\}$
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}:$ številske množice
- $M = \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, n^2 + 1$ je deljivo s $5 \,\}$
- $M = (-1, 3] = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, -1 < x \leq 3 \,\}$
- $M = [-\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q} = (-\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cap \mathbb{Q}$
- $\emptyset = \{\}:$ prazna množica
- $I = [0, 1]:$ enotski interval

$\diamondsuit$

Definicija 1.3. *Produkt* $X \times Y$ množic X in Y je množica vseh *urejenih parov*

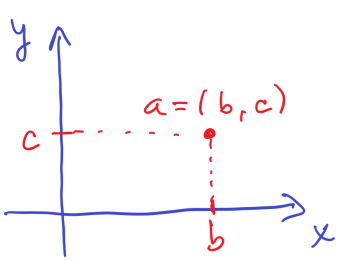
$$(x, y), \quad x \in X, y \in Y,$$

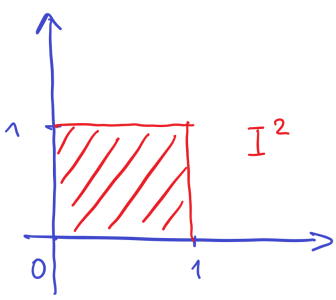
torej

$$X \times Y = \{\, (x, y) \,|\, x \in X, y \in Y \,\}.$$

Primer 1.4. Primeri produktov.

(a) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$: ravnina
(b) $I^2 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x, y \leq 1 \,\}$: enotski kvadrat



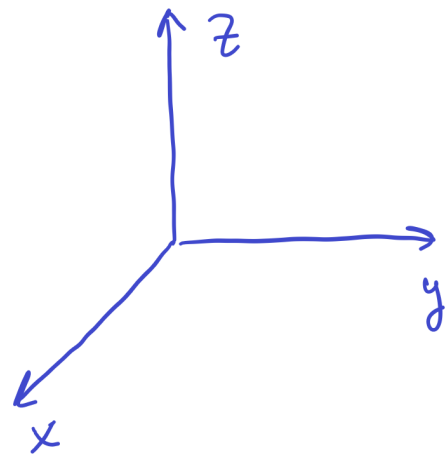


$\diamondsuit$

Bolj splošno lahko tvorimo produkt več množic: za naravno število k in množice $X_1, X_2, \ldots, X_k$ je njihov *produkt*

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k = \Big\{ \underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_k)}_{\text{urejena } k\text{-terica}} \,\Big|\, x_1 \in X_1, \ldots, x_k \in X_k \Big\}.$$

Primer 1.5. $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\, (x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R} \,\}$: (3-razsežni) prostor



$\diamondsuit$

Za poljubno naravno število k lahko definiramo k-razsežni prostor, ki je produkt k kopij realnih števil:

$$\mathbb{R}^k = \{\, (x_1, \ldots, x_k) \mid x_i \in \mathbb{R} \,\}.$$

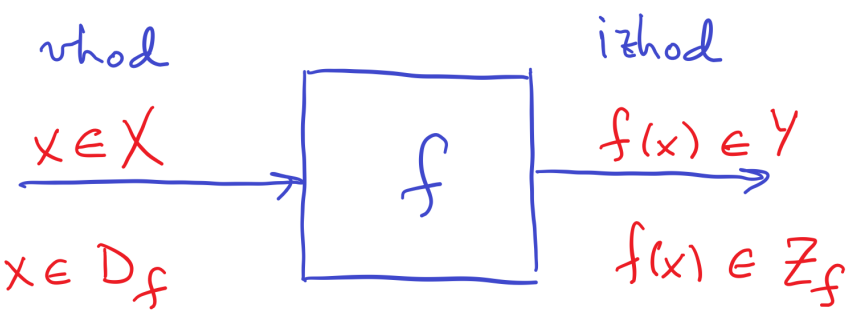
V $\mathbb{R}^k$ opisujemo pojave, ki so odvisni od večjega števila spremenljivk, npr. vreme (določeno s temperaturo, vlago, zračnim tlakom, vetrom ...) ali vrednost portfelja (odvisna od vrednosti posameznih delnic in obveznic).

2. Osnovno o funkcijah

Definicija 1.6. *Preslikava* f iz množice X v množico Y, $f\colon X \to Y$, je pravilo, ki vsakemu $x \in X$ priredi en sam, natanko določen element množice Y, ki ga označimo s $f(x)$.

Zaloga vrednosti ali *slika* funkcije f je

$$Z_f = \{\, f(x) \mid x \in X \,\} = f(X) \subseteq Y.$$



Preslikavo, ki slika v množico realnih števil, imenujemo *funkcija*, torej $f\colon X \to \mathbb{R}$. Včasih dopuščamo, da preslikava f ni definirana na celotni množici X, ampak le na neki njeni podmnožici, ki jo imenujemo *definicijsko območje*:

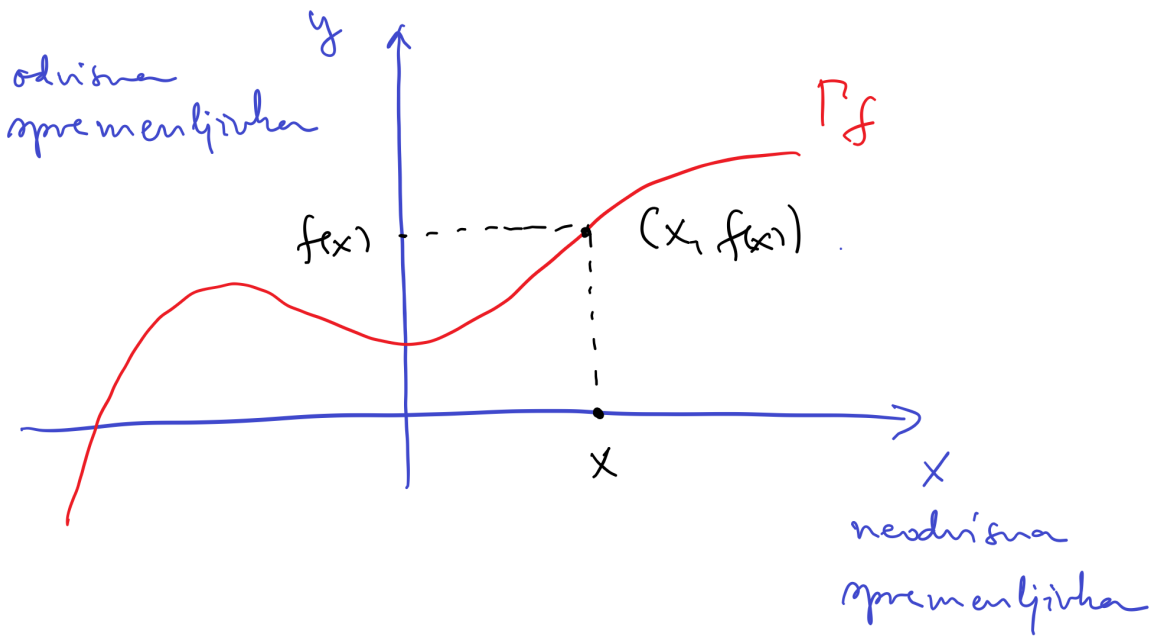
$$D_f = \{\, x \in X \mid f(x) \text{ obstaja} \,\}.$$

To je posebej pogosto v primeru $X = \mathbb{R}$, ko funkcijo podamo s formulo.

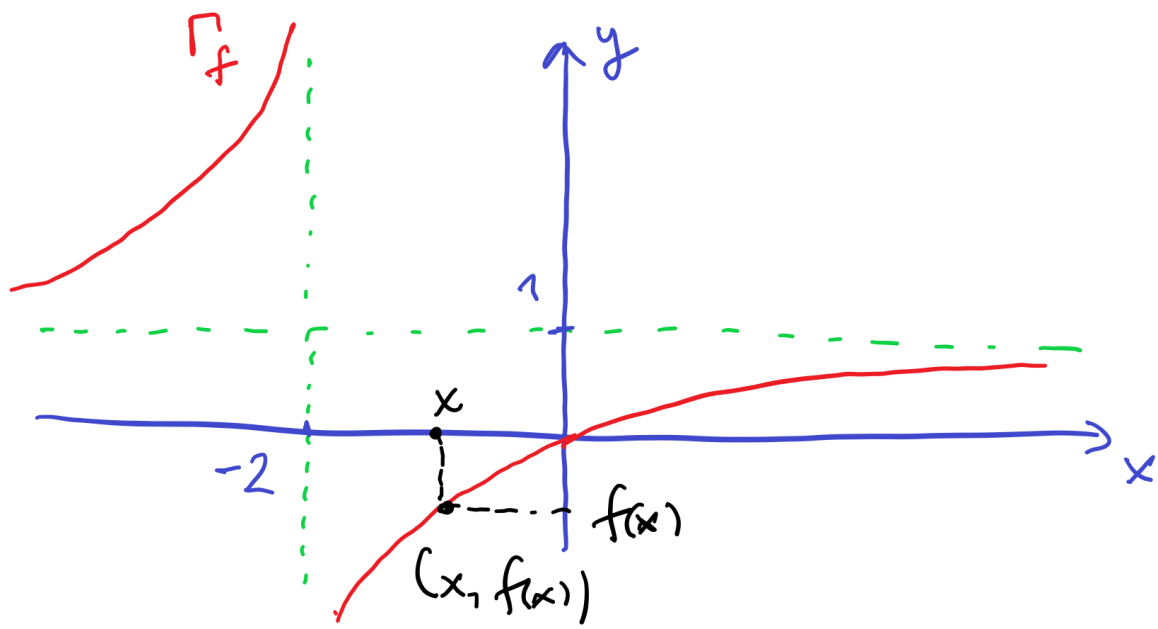
Primer 1.7. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s predpisom $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$. Potem je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. $\diamondsuit$

Definicija 1.8. *Graf* preslikave $f\colon X \to Y$ je množica vseh urejenih parov $(x, f(x))$ za $x \in D_f$:

$$\Gamma_f = \{\, (x, f(x)) \mid x \in D_f \,\} \subset X \times Y.$$

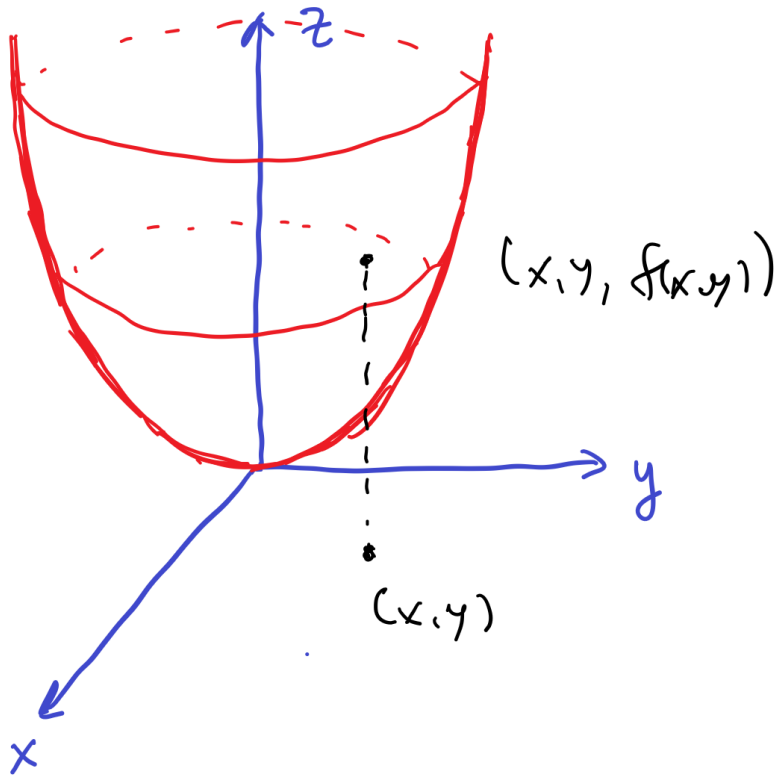


Primer 1.9. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s predpisom $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$. Potem je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ in $Z_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.



$\diamondsuit$

Primer 1.10. Naj bo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana s predpisom $f(x,y) = x^2 + y^2$. Potem je $D_f = \mathbb{R}^2$ in $Z_f = [0, \infty)$.



$\diamondsuit$

Če je definicijsko območje D_f funkcije f podmnožica realnih števil, torej $D_f \subseteq \mathbb{R}$, f imenujemo *funkcija ene spremenljivke*. Če pa je $D_f \subseteq \mathbb{R}^k$ za $k > 1$, imenujemo f *funkcija k-spremenljivk*; kadar ne želimo poudariti števila spremenljivk, ji rečemo kar *funkcija več spremenljivk*.

Za graf funkcije dveh spremenljivk $z = f(x, y)$ imamo nazorno geometrijsko predstavo: točka $(x, y) \in D_f$ predstavlja točko na višini 0, vrednost funkcije $f(x, y) \in \mathbb{R}$ pa dejansko višino točke na grafu funkcije. Graf tako predstavlja relief, torej del površja; spremembe v vrednosti funkcije določajo razgibanost terena, večje vrednosti ustrezajo vzpetinam (hribom), manjše pa nižinam (dolinam).

Poleg višine lahko tudi druge funkcije na površju opišemo s funkcijami dveh spremenljivk, saj je točka na površju $(x, y, f(x, y))$ povsem določena s prvima dvema koordinatama (x, y) (ali z zemljepisno širino in dolžino). Tako lahko na primer vrednost temperature T v točki $(x, y, f(x, y))$ podamo kot funkcijo $T = g(x, y)$.

Če pa merimo temperaturo na različnih višinah z nad točko (x, y), se temperatura izraža kot funkcija treh spremenljivk $T = g(x, y, z)$.

Da so funkcije več spremenljivk res pomembne in uporabne za opisovanje vsakodnevnih pojavov, kaže tudi naslednji primer.

Primer 1.11. V banko ob času $t = 0$ vložimo depozit v vrednosti D EUR. Letna obrestna mera, ki jo ponuja banka, je r, vsakoletne obresti pa se pripišejo glavnici. Potem je vrednost depozita V po t letih enaka

$$V = D(1 + r)^t,$$

torej je V funkcija treh spremenljivk: D, r in t. Pišemo $V = h(D, r, t)$. $\diamondsuit$

Za konec si oglejmo še nekatere standardne okrajšave/simbole, ki jih v matematičnem pisanju pogosto uporabljamo.

$\in$: znak za *element* množice, npr. $a \in \mathbb{Q}$: a je racionalno število
$\subset$: znak za *podmnožico*, tudi $\subseteq$, npr. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$: cela števila so podmnožica realnih
$\cup$: znak za *unijo* množic: $A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ ali } x \in B \,\}$, npr. $(-1,4) \cup [2,5] = (-1,5]$
$\cap$: znak za *presek* množic: $A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ in } x \in B \,\}$, npr. $(-1,4) \cap [2,5] = [2,4)$
$\setminus$: znak za *razliko* množic: $A \setminus B = \{\, a \in A \mid a \notin B \,\}$, npr. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{\, \text{iracionalna števila} \,\}$ ali $(-1,4) \setminus [2,5] = (-1,2)$
$\exists$: *obstaja*, npr. $\exists n \in \mathbb{N}$: obstaja tako naravno število n
$\exists!$: *obstaja natanko en*, npr. $\exists! n \in \mathbb{N}$: obstaja natanko eno tako naravno število n
$\forall$: *za vsak*, npr. $\forall x \in \mathbb{R}$: za vsa realna števila x
$\Longrightarrow$: *sledi*, npr. $x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4$: če je x večji od 2, je njegov kvadrat večji od 4
$\Longleftrightarrow$: *natanko tedaj*, npr. $n \in \mathbb{N}$ je liho $\Longleftrightarrow$ n je oblike $2k-1$ za neki $k \in \mathbb{N}$
$\rightarrow\!\leftarrow$: oznaka za protislovje
$:=$: definicija nove oznake, npr. $f \circ g(x) := f(g(x))$
$\square$: oznaka za konec dokaza
$\diamondsuit$: oznaka za konec primera

POGLAVJE 2

Števila

1. Naravna števila

Primeri števil: $11 \in \mathbb{N}$, $-37 \in \mathbb{Z}$, $2/19 \in \mathbb{Q}$, $e - \sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\pi + 3\mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Številske množice se razlikujejo tudi po tem, katere operacije so izvedljive v njih.

Množica naravnih števil je $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Kaj pomenijo ti simboli, kakšne lastnosti imajo? Da lahko s števili računamo in jih med sabo primerjamo, moramo simbolom dati pomen.

Ideja je, da množico naravnih števil opišemo z njenimi osnovnimi lastnostmi – *aksiomi*, iz katerih lahko izpeljemo vse nadaljnje lastnosti, definiramo operacije in relacijo urejenosti.

Definicija 2.1 (Peanovi aksiomi). Množica naravnih števil je množica N, opremljena s funkcijo $\varphi\colon N \to N$, ki vsakemu naravnemu številu n priredi njegovega *neposrednega naslednika* $\varphi(n)$. Pri tem veljajo naslednji aksiomi:

(P1) N vsebuje število ϵ, ki ni neposredni naslednik nobenega naravnega števila;
(P2) neposredna naslednika dveh različnih naravnih števil sta različna, tj. funkcija φ je injektivna: če je $n \neq m$, je $\varphi(n) \neq \varphi(m)$;
(P3) Če za podmnožico $A \subseteq N$ veljata lastnosti:
  (a) $\epsilon \in A$ in
  (b) če je $n \in A$, je tudi $\varphi(n) \in A$,
  potem je $A = N$.

V običajni množici naravnih števil $\mathbb{N}$ je $\epsilon = 1$, za funkcijo neposrednega naslednika pa velja $\varphi(n) = n + 1$. Z vpeljavo oznak

$$\varphi(1) = 1 + 1 =: 2,\ \varphi(2) = 2 + 1 =: 3,\ \varphi(3) = 3 + 1 =: 4, \dots$$

dobimo zgornjo množico $\mathbb{N}$. Opazimo, da je v tem zapisu število n predstavljeno z vsoto n enic. Pri tem ne moremo vpeljati različnih simbolov za vsa naravna števila, zato uporabljamo *mestni zapis*, ki je odvisen od izbire *osnove*: za običajni desetiški sistem je to število deset, za dvojiški sistem dve, za šestnajstiškega šestnajst ... Ko izberemo osnovo c, potrebujemo le simbole za števila od nič do neposrednega predhodnika osnove, ki jim rečemo *števke*. S pomočjo teh je poljubno naravno število n v mestnem zapisu izraženo kot

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 := a_k c^k + a_{k-1} c^{k-1} + \dots + a_1 c + a_0,$$

kjer so a_i števke.

2. Matematična indukcija

Med Peanovimi aksiomi izstopa (P3), ki pove, da so vsa naravna števila nasledniki tistega posebnega naravnega števila ($\epsilon = 1$), opisanega v (P1). Če namreč tvorimo podmnožico naravnih števil tako, da vanjo damo število 1 in nato dodamo vse naslednike (naslednikov) števila 1, iz (P3) sledi, da smo dobili celotno množico naravnih števil. Ta aksiom imenujemo *princip popolne indukcije*. Popolna ali matematična indukcija je torej po definiciji naravnih števil osnovna metoda za preverjanje, ali neka podmnožica naravnih števil vsebuje vsa naravna števila. Preveriti moramo dve lastnosti:

(a) ali 1 pripada tej podmnožici in

(b) če n pripada tej podmnožici, ali tedaj tudi njegov neposredni naslednik $n+1$ pripada tej množici.

Prvi korak preverjanja imenujemo *baza indukcije* in ga običajno označimo z $\boxed{n=1}$, drugega pa *indukcijski korak* in ga označimo z $\boxed{n \to n+1}$.

Predpostavko v (b), da n pripada podmnožici, imenujemo *indukcijska predpostavka* – na kratko jo označimo z IP.

Velikokrat indukcijo uporabimo za preverjanje, ali neka trditev velja za vsa naravna števila. V tem primeru je pripadajoča množica, za katero preverjamo, ali vsebuje vsa naravna števila, množica vseh tistih števil, za katera trditev velja.

Naj bo $\mathcal{T}(n)$ neka trditev o naravnem številu n in $A = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{T}(n) \text{ velja} \,\}$. Z indukcijo preverimo, ali $\mathcal{T}(n)$ velja za vsa naravna števila n, takole:

$\boxed{n=1}$**:** Preverimo, ali velja $\mathcal{T}(1)$, torej ali trditev za $n=1$ velja, tj. ali je $1 \in A$.

$\boxed{n \to n+1}$**:** Predpostavimo, da velja $\mathcal{T}(n)$, tj. $n \in A$ (to je IP). Preverimo, ali ob tej predpostavki velja tudi $\mathcal{T}(n+1)$, tj. $n+1 \in A$.

Če je odgovor v obeh primerih pritrdilen, aksiom (P3) pove, da je $A = \mathbb{N}$, torej da trditev $\mathcal{T}(n)$ velja za vse $n \in \mathbb{N}$.

Primer 2.2. Za $n \in \mathbb{N}$ naj bo S_n vsota lihih naravnih števil od 1 do $2n-1$. Ugani formulo za S_n in jo dokaži.

Izračunajmo $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ za nekaj naravnih števil:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + 3 = 4 \\ S_3 &= 1 + 3 + 5 = 9 \\ S_4 &= 1 + 3 + 5 + 7 = 16 \end{aligned}$$

Na osnovi zgornjih primerov ugibamo, da bi lahko veljalo $S_n = n^2$. Preverimo to domnevo z indukcijo.

$\boxed{n=1}$ $S_1 = 1 = 1^2$, torej za $n=1$ formula velja.

$\boxed{n \to n+1}$ IP: denimo, da za naravno število n velja $S_n = n^2$. Dokazati želimo, da tedaj velja tudi $S_{n+1} = (n+1)^2$. Računamo:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 3 + \cdots + (2(n+1)-3) + (2(n+1)-1), \\ S_{n+1} &= 1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1), \\ S_{n+1} &= S_n + (2n+1) \overset{\text{IP}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2, \end{aligned}$$

kar smo želeli dokazati. $\diamondsuit$

3. Operacije in urejenost v $\mathbb{N}$

V zgornjem primeru smo računali z naravnimi števili, kot smo navajeni iz šole. A operaciji seštevanja in množenja je potrebno vpeljati na osnovi Peanovih aksiomov, saj je le tako mogoče preveriti njune lastnosti. Seštevanje in množenje definiramo induktivno, kar nam omogoča aksiom (P3). Za vsak izbran n definiramo vsoto $n+m$ induktivno po m:

$\boxed{m=1}$**:** $n + 1 := \varphi(n)$.

$\boxed{m \to m+1}$**:** Predpostavimo, da je vsota $n+m$ že definirana. Potem postavimo

$$n + (m+1) := (n+m) + 1 = \varphi(n+m).$$

Asociativnost seštevanja sledi neposredno iz definicije, komutativnost pa je potrebno dokazati.

Podobno za vsak izbran n definiramo produkt $n \cdot m$ induktivno po m (v to vgradimo distributivnost):

$\boxed{m = 1}$: $n \cdot 1 := n$.

$\boxed{m \to m+1}$: Predpostavimo, da je produkt $n \cdot m$ že definiran. Potem postavimo

$$n \cdot (m+1) := n \cdot m + n.$$

TRDITEV 2.3. *Operaciji seštevanja in množenja sta komutativni in asociativni ter povezani z distributivnostjo.*

$n + m = m + n$	$n \cdot m = m \cdot n$	*komutativnost*
$(n + m) + k = n + (m + k)$	$(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$	*asociativnost*
	$n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$	*distributivnost*

Nasprotni operaciji (odštevanje in deljenje) v množici naravnih števil nista vedno izvedljivi, veljata pa *pravili krajšanja*: če za $n, m, k \in \mathbb{N}$ velja

- $n + k = m + k$, potem velja tudi $n = m$;
- $n \cdot k = m \cdot k$, potem velja tudi $n = m$.

Seštevanje porodi *urejenost* naravnih števil: za $n, m \in \mathbb{N}$ velja $n < m$ (n je *manjše* kot m), če obstaja tak $r \in \mathbb{N}$, da je $n + r = m$.

Če velja $n < m$, potem za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $n + k < m + k$ in $n \cdot k < m \cdot k$. Tudi v tem primeru veljata pravili krajšanja, torej lahko iz neenakosti na desni sklepamo na tisto na levi. Pri tem je seveda pomembno, da je k naravno število.

Poleg stroge neenakosti poznamo tudi relacijo $\leq$ (*manjše ali enako*):

$$n \leq m \iff n < m \text{ ali } n = m.$$

Ta urejenost je *linearna*, kar pomeni, da lahko poljubni dve števili primerjamo med sabo: za poljubna $n, m \in \mathbb{N}$ velja natanko ena od možnosti:

$$n < m, \quad n = m \text{ ali } m < n;$$

v slednjem primeru pišemo tudi $n > m$.

Naravna števila torej lahko uredimo po velikosti in jih narišemo na številsko premico.

4. Cela števila

Kot smo že omenili, v množici naravnih števil niso rešljive vse enačbe z naravnimi koeficienti. Posebej to velja za linearno enačbo $n + x = m$ pri danih $n, m \in \mathbb{N}$. Rešitev $x \in \mathbb{N}$ obstaja le, če je $m > n$: res, če obstaja rešitev $x \in \mathbb{N}$, je po definiciji urejenosti $n < m$. Po drugi strani pa v primeru, ko velja $n < m$, obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $n + k = m$, in tedaj je $x = k$ iskana rešitev.

To težavo rešimo tako, da k naravnim dodamo nova števila. Cilj je, da bo v tako nastali večji množici enačba $n + x = m$ za n, m iz te množice vedno rešljiva.

Najprej dodamo število x, ki reši enačbo $n + x = n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. To število označimo z 0 in imenujemo *nič*. Definicijska lastnost pomeni, da je nič nevtralni element za seštevanje – prištevanje tega števila ne spremeni vrednosti.

V naslednjem koraku za vsak $n \in \mathbb{N}$ dodamo število y, ki reši enačbo $n + y = 0$. To število označimo z $-n$ in imenujemo *nasprotno število* k n. Števila oblike $-n$ za $n \in \mathbb{N}$ s skupnim imenom imenujemo *negativna števila*.

Tako dobimo množico *celih števil*

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\, -n \mid n \in \mathbb{N} \,\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Ker je $n + (-n) = 0$ in želimo ohraniti komutativnost seštevanja, je potem nasprotno število k številu $-n$ kar n. Če zahtevamo še, da je 0 nevtralni element za seštevanje v $\mathbb{Z}$, sta v $\mathbb{Z}$ rešljivi

obe zgornji enačbi ($a+x=a$ in $a+y=0$ za vsak $a \in \mathbb{Z}$). Še več, rešljiva je vsaka enačba oblike $a+x=b$ za $a,b \in \mathbb{Z}$, kot smo želeli. A za to moramo najprej razširiti operacijo seštevanja na množico celih števil. Za poljubni naravni števili n, m definiramo:

$$n+(-m)=(-m)+n := \begin{cases} k & ; \quad \text{če je } n>m \text{ in je } n=m+k \\ -k & ; \quad \text{če je } n<m \text{ in je } n+k=m \end{cases},$$

$$(-n)+(-m) := -(n+m).$$

Sedaj lahko vpeljemo operacijo *odštevanja*, ki je prištevanje nasprotnega števila: za $a,b \in \mathbb{Z}$ je

$$a-b := a+(-b).$$

Od tod sedaj takoj vidimo, da ima enačba $a+x=b$ za $a,b \in \mathbb{Z}$ vedno rešitev $x=b-a$, ki je celo število.

Razširimo še množenje z naslednjimi pravili:

- $0 \cdot a = a \cdot 0 := 0$ za vsak $a \in \mathbb{Z}$: Ker je $0+0=0$, iz želene distributivnosti sledi $0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a \Longrightarrow 0 \cdot a = 0$.
- $1 \cdot a := a$ za vsak $a \in \mathbb{Z}$: Ker je $n+(-n)=0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in je $1 \cdot n = n$, je $1 \cdot (-n)$ nasprotni element k n, torej $-n$.
- $(-1) \cdot a := -a$ za vsak $a \in \mathbb{Z}$: Ker je $1+(-1)=0$, množenje z a da $a+(-1) \cdot a = 0$, torej je $(-1) \cdot a$ nasprotni element k a.
- $n \cdot (-m) = (-m) \cdot n := -(n \cdot m)$ za poljubna $n, m \in \mathbb{N}$.
- $(-n) \cdot (-m) := n \cdot m$ za poljubna $n, m \in \mathbb{N}$.

Enako kot v naravnih številih lahko definiramo tudi *urejenost* celih števil: za $a,b \in \mathbb{Z}$ velja $a<b$, če obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da je $a+k=b$.

Premislimo še, kaj se zgodi z neenakostjo, če jo pomnožimo z negativnim številom. Naj za $a,b \in \mathbb{Z}$ velja $a<b$, torej obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $a+k=b$. Če od te enakosti odštejemo $a+b$, dobimo $-b+k=-a$, torej je $-a>-b$: po pričakovanju se neenačaj obrne.

Povzemimo lastnosti množice celih števil.

Trditev 2.4. *V množici celih števil $\mathbb{Z}$ je definirano seštevanje, množenje in odštevanje celih števil. Seštevanje in množenje sta komutativni in asociativni operaciji, ki sta povezani z distributivnostjo. Množica $\mathbb{Z}$ je linearno urejena.*

5. Racionalna števila

Podobno kot vpeljavo celih števil lahko tudi vpeljavo racionalnih motiviramo z reševanjem enačbe: za dana $a,b \in \mathbb{Z}$ nas zanima obstoj rešitve enačbe $b \cdot x = a$. Rešitev $x \in \mathbb{Z}$ obstaja le, če b deli a (torej je $a = b \cdot c$ za neko celo število c in tedaj je rešitev seveda enaka $x=c$, saj lahko b pokrajšamo). Ker to v splošnem ne velja, dodamo število, ki reši zgornjo enačbo – to število zapišemo v obliki $\frac{a}{b}$ in ga imenujemo *ulomek* – število nad črto imenujemo *števec*, tisto pod črto pa *imenovalec*. Seveda tvorimo le ulomke z $b \neq 0$, saj pri $b=0$ zgornja enačba postane

$$0 \cdot x = a;$$

če še naprej vztrajamo pri zahtevi, da je produkt števila z nič enak nič, ta enačba za $a \neq 0$ ne more imeti rešitve, za $a=0$ pa je rešitev vsako število (v nobenem primeru torej enačba nima ene same rešitve).

Pri ulomkih se pojavi še ena težava. Denimo, da začnemo z enačbo

$$2 \cdot x = 3, \text{ ki ji po zgornjem pripada ulomek } \frac{3}{2}.$$

Če dano enačbo pomnožimo s 7, pa dobimo

$$14 \cdot x = 21, \text{ ki ji po zgornjem pripada ulomek } \frac{21}{14}.$$

A ker smo enačbo le pomnožili z neničelnim številom, to na rešitev ne vpliva, saj lahko faktor 7 v enačbi pokrajšamo (uporabimo pravilo krajšanja). <u>Različna ulomka</u> $\frac{3}{2}$ in $\frac{21}{14}$ torej predstavljata <u>isto število</u>.

Opazimo še, da lahko za imenovalec vedno izberemo pozitivno število: če je negativen, števec in imenovalec pomnožimo z -1 in dobimo ulomek, ki predstavlja isto število, a ima pozitiven imenovalec.

Definicija 2.5. *Racionalna števila* so predstavljena z ulomki oblike $\frac{a}{n}$, kjer je a celo in n naravno število. Pri tem ulomka $\frac{a}{n}$ in $\frac{b}{m}$ *predstavljata isto število*, če velja

$$a \cdot m = b \cdot n.$$

Množica racionalnih števil je torej enaka

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{n} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}_{\sim},$$

kjer $\sim$ označuje, da je eno število predstavljeno z različnimi ulomki v skladu z zgornjim pravilom.

V praksi to težavo obidemo tako, da ulomke okrajšamo in tako dobimo izbranega predstavnika za vsako racionalno število (zahtevamo torej, da sta števili a in n tuji). A vseeno smo prisiljeni dopuščati različne predstavnike istega števila, saj kot rezultat neke računske operacije lahko dobimo neokrajšan ulomek, npr.

$$\frac{5}{3} + \frac{7}{3} = \frac{12}{3} = \frac{4}{1} = 4.$$

Posebej se dogovorimo, da števila, ki jih lahko predstavimo kot ulomke z imenovalcem 1, enačimo s celimi števili in tako cela števila postanejo podmnožica racionalnih števil:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ enačimo z } \frac{a}{1} \in \mathbb{Q}.$$

Operaciji seštevanja in množenja v $\mathbb{Q}$ uvedemo s praviloma:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{m} := \frac{am + bn}{nm}, \quad \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{m} := \frac{ab}{nm}.$$

Ti operaciji sta dobro definirani za ulomke (v imenovalcu je lahko poljubno neničelno celo število), preveriti pa je potrebno, da ne glede na to, kako izberemo predstavnike racionalnih števil, ki jih seštevamo ali množimo, dobimo kot rezultat ulomke, ki predstavljajo isto število.

Izberimo po dva predstavnika za racionalni števili $q, r \in \mathbb{Q}$:

$$q = \frac{a}{n} \text{ in } q = \frac{a_1}{n_1} \quad \text{ter} \quad r = \frac{b}{m} \text{ in } r = \frac{b_1}{m_1},$$

torej velja

$$(\star) \qquad an_1 = a_1 n \text{ ter } bm_1 = b_1 m.$$

Preveriti moramo, da

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{m} \text{ predstavlja isto število kot } \frac{a_1}{n_1} + \frac{b_1}{m_1};$$

tedaj oba ulomka predstavljata vsoto $q + r$.

Vsoti sta enaki

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{m} = \frac{am + bn}{nm} \text{ in } \frac{a_1}{n_1} + \frac{b_1}{m_1} = \frac{a_1 m_1 + b_1 n_1}{n_1 m_1}.$$

Primerjajmo navzkrižna produkta:

$$(am + bn)n_1m_1 = amn_1m_1 + bnn_1m_1 = (an_1)mm_1 + (bm_1)nn_1$$
$$(a_1m_1 + b_1n_1)nm = a_1m_1nm + b_1n_1nm = (a_1n)mm_1 + (b_1m)nn_1.$$

Vsoti na desni sta enaki, saj so istoležni členi v oklepajih po enačbi ($\star$) enaki. Še lažje je preveriti, da produkt racionalnih števil, definiran s predstavniki, res določa racionalno število.

Iz formule za produkt sledi, da ima vsako od nič različno racionalno število *inverzno število*:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \quad \text{tj.} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a},$$

če sta le $a, b \neq 0$. Deljenje z racionalnim številom definiramo kot množenje z inverznim številom.

Vpeljati moramo še *urejenost* racionalnih števil:

$$\frac{a}{n} < \frac{b}{m} \iff am < bn,$$

kjer neenačaj na desni predstavlja relacijo urejenosti v množici celih števil. Ponovno je potrebno preveriti, da to pravilo določa urejenost racionalnih števil (torej je urejenost neodvisna od izbire predstavnikov). Pri tem je pomembno, da so imenovalci pozitivna števila. Opazimo tudi, da se zgornje pravilo za cela števila ujema z urejenostjo celih števil.

Trditev 2.6. *V množici racionalnih števil $\mathbb{Q}$ so izvedljive vse osnovne računske operacije: seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje razen deljenja z 0. Seštevanje in množenje sta komutativni in asociativni, povezani z distributivnostjo. Množica $\mathbb{Q}$ je linearno urejena.*

V $\mathbb{Q}$ so rešljive vse linearne enačbe $qx + r = s$ za dane $q, r, s \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$. To pa ne velja za enačbe višjih redov, saj npr. že kvadratne enačbe $x^2 = 2$, $x^2 - x - 1 = 0$ in $x^2 + 1 = 0$ nimajo racionalnih rešitev. Na osnovi grafov pričakujemo, da bi prvi dve enačbi morali imeti rešitve, za zadnjo pa ne pričakujemo (realnih) rešitev. Na racionalni številski premici torej še vedno manjkajo števila!

6. Realna števila

Trditev 2.7. *Enačba $x^2 = 2$ nima rešitve $x \in \mathbb{Q}$.*

Dokaz. Trditev bomo dokazali z *metodo protislovja*. Predpostavili bomo nasprotno od tega, kar trdimo, to pa bo pripeljalo do protislovja – dveh nasprotujočih si izjav, ki naj bi obe veljali. Denimo torej, da je $q \in \mathbb{Q}$ rešitev zgornje enačbe in zapišimo $q = a/n$ za neka $a \in \mathbb{Z}$ ter $n \in \mathbb{N}$. Privzemimo, da je ulomek okrajšan, torej da a in n nimata skupnih celoštevilskih deliteljev, različnih od ± 1. Ker q reši enačbo, dobimo:

$$q^2 = 2 \Longrightarrow \frac{a^2}{n^2} = 2 \Longrightarrow a^2 = 2n^2.$$

Torej je a^2 sodo število in zato tudi a sodo število: $a = 2b$ za neki $b \in \mathbb{Z}$. Vstavimo to v zadnjo enačbo in dobimo:

$$4b^2 = 2n^2 \Longrightarrow 2b^2 = n^2.$$

Od tod sledi, da je tudi n sodo število, kar pa je v nasprotju z našo izbiro ulomka, ki predstavlja q, saj je ta okrajšan. To pomeni, da je začetna predpostavka, da ima enačba racionalno rešitev, napačna. $\square$

Množico $\mathbb{Q}$ dopolnimo do množice realnih števil $\mathbb{R}$ tako, da dodamo zelo veliko števil (npr. $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}+1, e, \pi, \ldots$), ki jih imenujemo *iracionalna števila*. A tokrat konstrukcija (drugače kot pri $\mathbb{Z}$ ali $\mathbb{Q}$) ne gre preko dodajanja konkretnih števil, ampak si pomagamo s sledečimi pojmi, ki temeljijo na linearni urejenosti racionalnih števil. Naslednjo definicijo bomo podali za poljubno linearno urejeno množico števil, a bomo zaenkrat imeli v mislih $\mathbb{Q}$. Na koncu pa bo ta definicija veljala tudi za realna števila $\mathbb{R}$.

Definicija 2.8. Naj bo $\mathbb{S}$ množica števil, opremljena z relacijo linearne urejenosti $\leq$ in naj bo $A \subset \mathbb{S}$ neprazna podmnožica.

(a) Število $M \in \mathbb{S}$ je *zgornja meja* za množico A, če za vsak $a \in A$ velja $a \leq M$.
(b) Množica A je *navzgor omejena*, če ima kakšno zgornjo mejo.
(c) Naj bo A navzgor omejena. Če obstaja *najmanjša* zgornja meja α za A, jo imenujemo *supremum* množice A in označimo $\alpha =: \sup A$.
(d) Če $\sup A$ pripada množici A, ga imenujemo *maksimum* množice A in označimo $\max A$.

Če je α supremum množice A, potem zanj velja naslednje:

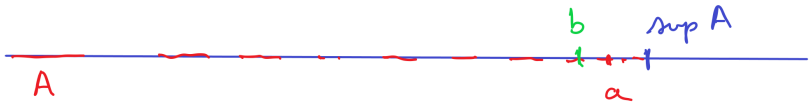
- za vsak $a \in A$ je $a \leq \alpha$ (α je zgornja meja);
- če je M poljubna zgornja meja za A, je $\alpha \leq M$ (α je najmanjša zgornja meja).

Ker je $\sup A$ najmanjša zgornja meja za A, nobeno število $b < \sup A$ ni zgornja meja za A, torej:

$$\forall b < \sup A \;\; \exists a \in A, \quad \text{da velja} \;\; b < a.$$

Drugače, če $\sup A$ še tako malo zmanjšamo, obstaja neko število v A, ki je večje od tako dobljenega števila:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists a \in A, \quad \text{da velja} \quad \sup A - \varepsilon < a.$$



Če obstaja $\max A$, je ta največji element množice A: za vsak $a \in A$ je $a \leq \max A$ in $\max A \in A$.

Analogno definiramo spodnjo mejo, omejenost navzdol, infimum inf ter minimum min.

supremum: je najmanjša zgornja meja = natančna zgornja meja
infimum: je največja spodnja meja = natančna spodnja meja

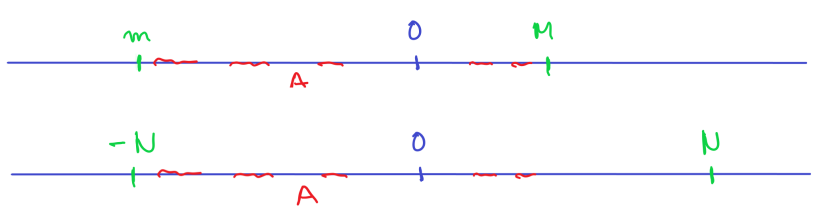
Definicija 2.9. Množica $A \subset \mathbb{S}$ je *omejena*, če je omejena navzgor in navzdol.

Za omejeno množico A torej obstajata spodnja meja m in zgornja meja M:

$$\forall a \in A \;\; \text{velja} \;\; m \leq a \leq M.$$

Ekvivalentno: obstaja tak $N > 0$, da za vsak $a \in A$ velja

$$-N \leq a \leq N \;\; \text{oziroma} \;\; |a| \leq N.$$



Primer 2.10. Naj bo $A = \left\{ \dfrac{3}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$. Določi tista od števil $\sup A$, $\max A$, $\inf A$ in $\min A$, ki obstajajo.

Zapišimo nekaj elementov množice A: $A = \left\{ \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \dots \right\}$. Zdi se, da je prvi element največji, torej je ta verjetno maksimum in hkrati supremum množice A. Pokazati moramo le, da je $\frac{3}{2}$ zgornja meja za A, torej da za vsak n velja

$$\frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Če to pomnožimo z $\frac{2(n+1)}{3}$, dobimo ekvivalentno neenakost

$$2 \leq n+1 \iff n \geq 1,$$

slednji pogoj pa je izpolnjen za vsak $n \in \mathbb{N}$. Torej tudi prvotna neenakost velja za vse n.

Očitno so vsi elementi množice A pozitivni, torej je 0 spodnja meja. Preverimo še, da je to največja spodnja meja. Za poljuben (racionalen) $\varepsilon > 0$ moramo pokazati, da je vsaj en element množice A manjši od $0 + \varepsilon = \varepsilon$. Poiskati moramo torej tak $n \in \mathbb{N}$, da bo veljalo

$$\frac{3}{n+1} < \varepsilon \iff \frac{3}{\varepsilon} - 1 < n.$$

Temu ustreza vsak dovolj velik $n \in \mathbb{N}$ (saj je vsako racionalno število manjše od nekega naravnega števila). To pomeni, da je 0 res infimum množice A. Ker pa $0 \notin A$, množica A nima minimuma.

Sklep: $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$, $\inf A = 0$ in $\min A$ ne obstaja. ♢

Primer 2.11. Naj bo $B = \left\{ \frac{a}{n} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a < n \right\}$. Določi tista od števil $\sup B$, $\max B$, $\inf B$ in $\min B$, ki obstajajo.

Pogoj v opisu množice B je ekvivalenten $\frac{a}{n} < 1$, torej B vsebuje vsa racionalna števila, ki so strogo manjša od 1. Od tod podobno kot v prejšnjem primeru sledi, da je $\sup B = 1$ in da $\max B$ ne obstaja. Ker B ni navzdol omejena, $\inf B$ ne obstaja (in zato seveda tudi $\min B$ ne obstaja). To, da je množica navzdol neomejena, pa simbolično zapišemo z $\inf B = -\infty$. ♢

Najpomembnejša lastnost, ki loči realna števila od racionalnih, je *polnost*. To je tista lastnost, ki med ostalim zagotavlja obstoj limit (v primerih, ko pričakujemo, da bi limita morala obstajati) in obstoj ekstremov funkcij (spet takrat, ko bi upravičeno pričakovali, da ekstremi obstajajo).

Definicija 2.12. Linearno urejena množica števil $\mathbb{S}$ je *polna*, če ima vsaka neprazna, navzgor omejena podmnožica $A \subset \mathbb{S}$ supremum, ki je element množice $\mathbb{S}$, tj. obstaja $\sup A \in \mathbb{S}$.

Primer 2.13. V množici $\mathbb{S} := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ podmnožica $A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \}$ nima supremuma, čeprav ga ima v $\mathbb{Q}$. ♢

Opomba 2.14. V polni množici ima tudi vsaka neprazna, navzdol omejena množica B infimum.

Res, naj bo m spodnja meja za B, torej za vsak $b \in B$ velja $m \leq b$ in zato tudi $-b \leq -m$. To pomeni, da je množica $A = \{ -b \mid b \in B \}$ navzgor omejena, zato ima po polnosti $\mathbb{S}$ supremum. Zlahka se lahko prepričamo, da je tedaj $\inf B = -\sup A$, saj vsaka spodnja meja za B porodi zgornjo mejo za A in obratno. □

Izrek 2.15. *Množica racionalnih števil <u>ni</u> polna.*

Ideja: najti moramo neko neprazno, navzgor omejeno podmnožico $A \subset \mathbb{Q}$, ki v $\mathbb{Q}$ nima supremuma. Iz trditve 2.7 vemo, da v $\mathbb{Q}$ ni števila, katerega kvadrat je enak 2, zato izberemo množico tako, da bi moralo biti tako število njen supremum.

Dokaz. Naj bo

$$A := \{\, x \in \mathbb{Q} \,|\, x > 0 \ \text{ in } \ x^2 < 2 \,\}.$$

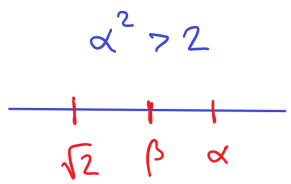
Najprej preverimo, da bi v polni množici števil A morala imeti supremum.

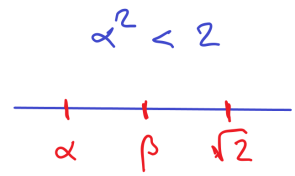
$A \neq \emptyset$: Očitno je $1 \in A$.

A je navzgor omejena: Število 2 je zgornja meja za A. Če bi namreč za neki $x \in A$ veljalo $x > 2$, potem bi veljalo tudi $x^2 > 2^2 = 4$, kar je v nasprotju z lastnostmi elementov množice A (veljati mora $x^2 < 2$).

Zadnji sklep pokaže, da je vsako pozitivno število $M \in \mathbb{Q}$, za katerega velja $M^2 > 2$, zgornja meja za A: če je namreč $x > M\,(> 0)$, potem je $x^2 > M^2 > 2$, torej $x \notin A$. Za vsak $x \in A$ tako velja $x \leq M$.

Izrek bomo dokazali z metodo protislovja: denimo, da obstaja $\alpha := \sup A \in \mathbb{Q}$. Iz trditve 2.7 sledi, da $\alpha^2 \neq 2$, torej velja bodisi $\alpha^2 > 2$ bodisi $\alpha^2 < 2$. Pokazali bomo, da v prvem primeru α ni najmanjša zgornja meja, v drugem pa sploh ni zgornja meja.





Oglejmo si število

$$\beta = \frac{2\alpha + 2}{\alpha + 2}.$$

Ker je $\alpha \in \mathbb{Q}$, je tudi $\beta \in \mathbb{Q}$. Primerjajmo β z α in β^2 z 2:

$$\beta - \alpha = \frac{2\alpha + 2}{\alpha + 2} - \alpha = \frac{2 - \alpha^2}{\alpha + 2} = \begin{cases} < 0 & \text{če je} \quad \alpha^2 > 2 \\ > 0 & \text{če je} \quad \alpha^2 < 2 \end{cases}$$

$$\beta^2 - 2 = \frac{4\alpha^2 + 8\alpha + 4}{(\alpha + 2)^2} - 2 = \frac{2(\alpha^2 - 2)}{(\alpha + 2)^2} = \begin{cases} > 0 & \text{če je} \quad \alpha^2 > 2 \\ < 0 & \text{če je} \quad \alpha^2 < 2 \end{cases}$$

Sklep: če je $\alpha^2 > 2$, je tudi $\beta^2 > 2$, zato je β zgornja meja za A in ker je $\beta < \alpha$, α ni supremum: $\rightarrow\!\leftarrow$(protislovje); če pa je $\alpha^2 < 2$, je tudi $\beta^2 < 2$, torej je $\beta \in A$ (saj je $\beta > 0$ racionalno število) in ker je $\beta > \alpha$, α ni zgornja meja za A: $\rightarrow\!\leftarrow$. $\square$

Na kratko si oglejmo še idejo konstrukcije realnih števil. Vsaki neprazni, navzgor omejeni podmožici $A \subset \mathbb{Q}$ želimo prirediti realno število α, ki je supremum množice A. Če ima množica A supremum že v $\mathbb{Q}$, je α to racionalno število, npr. za $A = \{\, x \in \mathbb{Q} \,|\, x < 1 \,\}$ je $\alpha = 1$. Podobno velja za vsako racionalno število:

$$\frac{a}{n} = \sup \left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x < \frac{a}{n} \right\}.$$

Novo število dobimo v primeru, ko množica A v $\mathbb{Q}$ nima supremuma. Množici

$$A = \{\, x \in \mathbb{Q} \,|\, x > 0 \ \text{ in } \ x^2 < 2 \,\}$$

tako pripada novo število α, za katerega velja $\alpha^2 = 2$ – to število označimo s simbolom $\sqrt{2}$.

Opisana ideja pa ima eno slabost: različnim množicam lahko pripada isti supremum:

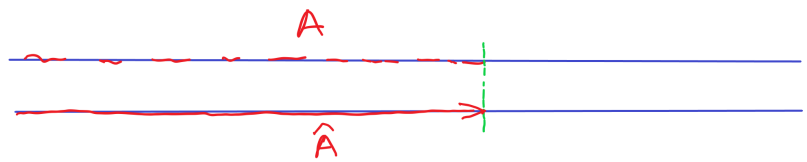
$$\sup \left\{ \frac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = 1$$

$$\sup \{\, x \in \mathbb{Q} \,|\, x > 1 \ \text{ in } \ x^2 < 2 \,\} = \sqrt{2}$$

Situacija je torej podobna kot pri racionalnih številih, kjer je vsako racionalno število predstavljeno z različnimi ulomki. Tokrat je rešitev v tem, da za vsako realno število izberemo po eno podmnožico v $\mathbb{Q}$, ki ga predstavlja – vsako realno število α ima torej kanoničnega predstavnika, ki je največja izmed podmnožic v $\mathbb{Q}$, za katere je α supremum.

Definicija 2.16. Za poljubno neprazno, navzgor omejeno podmnožico $A \subset \mathbb{Q}$ naj bo

$$\widehat{A} := \{\, x \in \mathbb{Q} \,|\, \exists q \in A : \ x < q \,\}.$$



Definicija 2.17. Množica realnih števil je

$$\mathbb{R} := \left\{ \widehat{A} \,\middle|\, A \subset \mathbb{Q} \ \text{ neprazna, navzgor omejena} \right\}.$$

Po zgornji definiciji je realno število podmnožica racionalnih števil, a ga enačimo s številom, ki je supremum te podmnožice.

V tako vpeljani množici realnih števil lahko definiramo *računske operacije*. Najlažje je to storiti za vsoto:

$$\widehat{A} + \widehat{B} := \left\{ x + y \,\middle|\, x \in \widehat{A},\ y \in \widehat{B} \right\}.$$

Pri definiciji ostalih operacij je potrebno malo paziti.

Urejenost v $\mathbb{R}$ definiramo z zahtevo:

$$\widehat{A} \leq \widehat{B} \iff \widehat{A} \subseteq \widehat{B}.$$

Naj bo $\left\{ \widehat{A}_\lambda \in \mathbb{R} \,\middle|\, \lambda \in \Lambda \right\}$ množica realnih števil, ki je navzgor omejena: obstaja torej $\widehat{B} \in \mathbb{R}$, da velja $\widehat{A}_\lambda \subset \widehat{B}$ za vsak $\lambda \in \Lambda$. Potem je supremum te množice enak

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \widehat{A}_\lambda \subset \widehat{B}.$$

Izrek 2.18. *Za množico realnih števil $\mathbb{R}$ velja naslednje:*

(a) *Računske operacije imajo enake lastnosti kot v $\mathbb{Q}$.*
(b) *$\mathbb{R}$ je linearno urejena in polna.*
(c) *$\mathbb{R}$ ima* Arhimedsko lastnost*: za poljuben $x \in \mathbb{R}$ obstajata $a, b \in \mathbb{Z}$, da velja $a \leq x \leq b$.*
(d) *$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ je* gosta *podmnožica, tj. vsak odprt interval okoli poljubnega realnega števila vsebuje racionalna števila.*

Iz Arhimedske lastnosti sledi, da je na $\mathbb{R}$ dobro definirana funkcija *celi del*, ki vsakemu realnemu številu x priredi največje celo število $\lfloor x \rfloor$, ki ne presega x:

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \ \text{ in } \ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

POGLAVJE 3

Zaporedja

1. Osnovni pojmi

Ideja: zaporedje je izbira neskončno mnogo realnih števil, ki jih nanizamo v izbranem vrstnem redu. Bolj natančno, vsakemu naravnemu številu n (ki ga imenujemo *indeks*) priredimo realno število a_n (ki ga imenujemo *člen zaporedja*), vrstni red teh števil je določen z urejenostjo indeksov.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & \dots \end{array}$$

Definicija 3.1. *Zaporedje* (realnih) števil je pravilo, ki vsakemu naravnemu številu n priredi realno število a_n, tj. funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Skupek vseh členov zaporedja označimo z $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ali kar $(a_n)_n$. Simbol a_n imenujemo *n-ti člen zaporedja* ali tudi *splošni člen zaporedja*. Množico vseh členov zaporedja označimo z $A = \{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.

Primer 3.2. Za vsako od naslednjih zaporedij zapiši nekaj začetnih členov in množico vseh členov zaporedja.

$$\begin{array}{llll} (1) & a_n = n & 1, 2, 3, 4, \dots & A = \mathbb{N} \\ (2) & a_n = n^2 & 1, 4, 9, 16, \dots & A = \{\, 1, 4, 9, 16, \dots \,\} = \{\, n^2 \mid n \in \mathbb{N} \,\} \\ (3) & a_n = 1 & 1, 1, 1, 1, \dots & A = \{\, 1 \,\} \\ (4) & a_n = (-1)^n & -1, 1, -1, 1, \dots & A = \{\, -1, 1 \,\} \\ (5) & a_n = \dfrac{n}{n+1} & \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dots & A = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \end{array}$$

$\diamondsuit$

Obnašanje členov zaporedja lahko opišemo s splošnimi lastnostmi zaporedja – osnovni taki lastnosti sta *monotonost*, ki pove, ali členi vseskozi naraščajo ali padajo, in *omejenost*, ki se nanaša na omejenost množice členov.

Definicija 3.3. Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je $\left\{ \begin{array}{l} \textit{naraščajoče} \\ \textit{strogo naraščajoče} \\ \textit{padajoče} \\ \textit{strogo padajoče} \end{array} \right.$, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} \geq a_n \\ a_{n+1} > a_n \\ a_{n+1} \leq a_n \\ a_{n+1} < a_n \end{array} \right.$ oziroma $\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} - a_n \geq 0 \\ a_{n+1} - a_n > 0 \\ a_{n+1} - a_n \leq 0 \\ a_{n+1} - a_n < 0 \end{array} \right.$. Če je zaporedje naraščajoče ali padajoče, rečemo, da je *monotono*.

Če so vsi členi a_n strogo pozitivni, lahko definicijski pogoj preoblikujemo tudi tako, da delimo z a_n in ulomek $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ primerjamo z 1.

Ali je lahko zaporedje hkrati naraščajoče in padajoče? Da, če je konstantno, npr. $a_n = 3$.

Definicija 3.4. Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je $\begin{cases} \textit{navzgor omejeno} \\ \textit{navzdol omejeno} \\ \textit{omejeno} \end{cases}$, če je takšna množica njegovih členov $A = \{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.

Če je zaporedje $(a_n)_n$ navzgor omejeno, ima torej množica njegovih členov neko zgornjo mejo:

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \text{da za vsak } n \in \mathbb{N} \text{ velja } \; a_n \leq M.$$

V tem primeru je *supremum zaporedja* $\sup a_n$ enak supremumu množice njegovih členov – ker je ta množica neprazna in navzgor omejena podmnožica realnih števil, seveda ima supremum, saj so realna števila polna. Analogno ima navzdol omejeno zaporedje infimum.

Primer 3.5. Obravnavaj monotonost in omejenost zaporedja $a_n = n^2$. Določi njegovo natančno zgornjo in spodnjo mejo (če obstajata).

Monotonost: Izračunamo razliko dveh zaporednih členov:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 > 0,$$

zato je strogo naraščajoče.

Omejenost: Navzdol je omejeno z $a_1 = 1$, saj je naraščajoče. Posebej je $\inf a_n = \min a_n = 1$. Navzgor je neomejeno. Denimo, da je $M \in \mathbb{R}$ zgornja meja. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$a_n = n^2 \leq M \Longrightarrow n \leq \sqrt{M} \in \mathbb{R}.$$

To pa je v nasprotju z Arhimedsko lastnostjo, saj za vsako realno število obstaja naravno število, ki je večje od njega. To pomeni, da zaporedje ni navzgor omejeno. To zapišemo kot $\sup a_n = \infty$.

$\diamondsuit$

Primer 3.6. Obravnavaj monotonost in omejenost zaporedja $a_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$. Določi njegovo natančno zgornjo in spodnjo mejo (če obstajata).

Najprej zapišimo nekaj členov, da dobimo vtis o njihovem obnašanju: $\dfrac{3}{3} = 1, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{7}, \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}, \ldots$ Zdi se, da je zaporedje padajoče in omejeno.

Monotonost:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+3}{2n+3} - \frac{n+2}{2n+1} = \frac{(n+3)(2n+1) - (n+2)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{-3}{(2n+3)(2n+1)} < 0$$

za vse $n \in \mathbb{N}$. Torej je zaporedje strogo padajoče.

Omejenost: Ker je padajoče, je navzgor omejeno s prvim členom $a_1 = 1$ in velja $\sup a_n = \max a_n = 1$.

Očitno je tudi navzdol omejeno, saj so vsi členi pozitivni. Ali je torej 0 natančna spodnja meja? Če bi bila, bi moral biti člen $a_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$ za velike indekse n zelo blizu 0. Preverimo nekaj vrednosti:

$$a_{1000} = \frac{1002}{2001} \doteq 0{,}50075$$

$$a_{1\,000\,000} = \frac{1\,000\,002}{2\,000\,001} \doteq 0{,}50000075$$

Zdi se, da so za velike n členi zelo blizu $1/2$, kar lahko premislimo tudi takole: če je n res veliko število, prištevanca 2 in 1 zelo malo vplivata na števec in imenovalec, zato približno velja

$$a_n = \frac{n+2}{2n+1} \doteq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Zdi se torej verjetno, da je $\inf a_n = 1/2$. To bomo preverili po definiciji infimuma. Najprej pokažimo, da je $1/2$ res spodnja meja:

$$a_n - \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4n+2} > 0 \quad \text{za vse} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Preverimo, da je $1/2$ največja spodnja meja: Za poljuben $\varepsilon > 0$ moramo najti tak indeks n, da bo veljalo

$$a_n < \frac{1}{2} + \varepsilon \iff a_n - \frac{1}{2} < \varepsilon \iff \frac{3}{4n+2} < \varepsilon.$$

Zadnjo neenakost preoblikujemo tako, da dobimo pogoj na n:

$$\frac{3}{\varepsilon} < 4n + 2 \iff \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} < n.$$

Ustreza torej vsak dovolj velik n, npr. $n = \left\lfloor \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right\rfloor + 1$. Ker a_n ni enak $1/2$ za noben n, je $\inf a_n = 1/2$, $\min a_n$ pa ne obstaja. $\diamondsuit$

Primer 3.7. Obravnavaj monotonost in omejenost zaporedja $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Določi njegovo natančno zgornjo in spodnjo mejo (če obstajata).

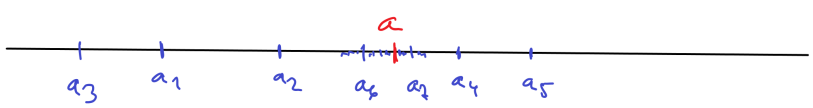
Zapišimo nekaj začetnih členov zaporedja: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ Zaporedje očitno ni monotono, je pa omejeno, saj velja

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq 1.$$

Ker členi po absolutni vrednosti padajo, je $\inf a_n = \min a_n = -1$ in $\sup a_n = \max a_n = 1/2$. $\diamondsuit$

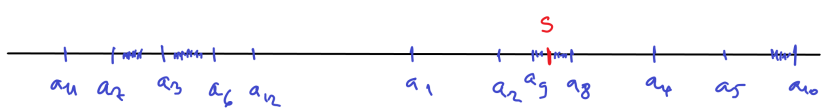
Pri zaporedju nas pogosto zanima obnašanje členov za velike indekse n, tj. kaj se godi s členi a_n, ko n postaja vse večji – to vodi do pojmov limite in stekališča zaporedja.

Ideja: limita zaporedja $(a_n)_n$ je število a, ki so mu vsi členi z velikimi indeksi zelo blizu.



To ne pomeni, da je vsak naslednji člen bližje limiti kot prejšnji. Prav tako ni nujno, da se členi bližajo limiti le z ene strani.

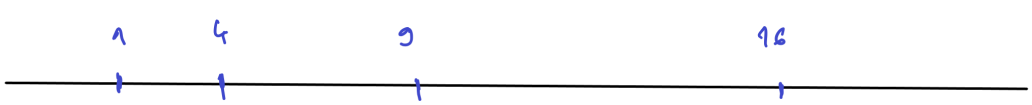
Ideja: stekališče zaporedja $(a_n)_n$ je število s, ki mu je zelo blizu neskončno členov zaporedja.



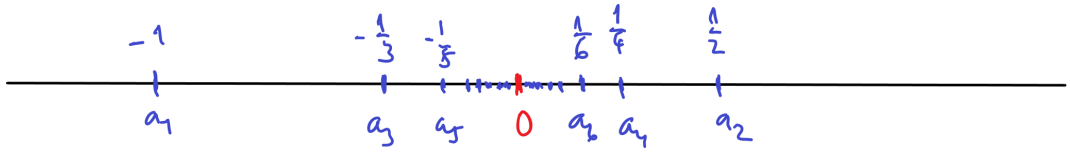
Je pa lahko neskončno členov zaporedja tudi poljubno daleč stran od stekališča.

Primer 3.8. Za vsako od naslednjih zaporedij poišči njegova stekališča in limite.

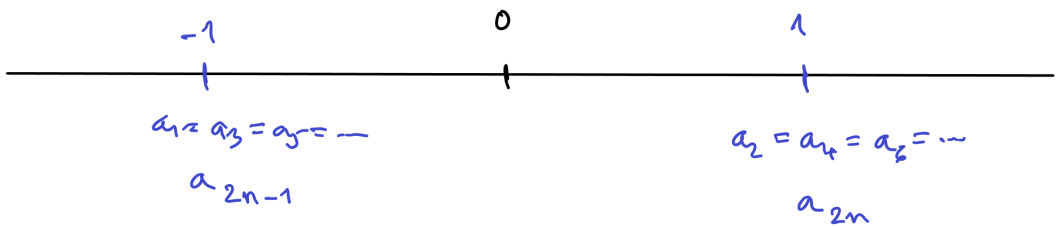
(1) $a_n = n^2$: Členi naraščajo preko vseh meja, ni niti limit niti stekališč.



(2) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$: Vsi členi se bližajo $a = 0$, ki je edina limita in edino stekališče.



(3) $a_n = 1$: Vsi členi so enaki 1, torej so poljubno blizu 1, zato je 1 edina limita in edino stekališče.
(4) $a_n = (-1)^n$: Vsi lihi členi so enaki -1, vsi sodi pa 1, torej ni limit, stekališči sta $s_1 = -1$ in $s_2 = 1$.



◇

2. Razdalja in okolica

Pri natančnem opisu zgornjih idej si bomo pomagali s pojmoma razdalje med točkama na številski premici in okolice točke na premici.

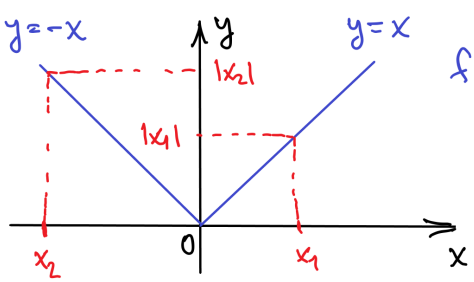
Definicija 3.9. *Absolutna vrednost* števila $x \in \mathbb{R}$ je

$$|x| := \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

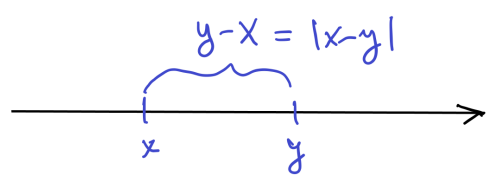
in meri oddaljenost števila x od izhodišča oziroma njegovo velikost ali *dolžino*.

Razdalja števil $x, y \in \mathbb{R}$ je $|x - y|$ in je enaka dolžini intervala med x in y:

$$|x - y| = \begin{cases} x - y & ; \quad x \geq y \\ y - x & ; \quad x < y \end{cases} .$$



$f(x) = |x|$



Opazimo, da je $|x| \geq 0$ in $|-x| = |x|$, torej je absolutna vrednost soda funkcija. Velja tudi $\pm x \leq |x|$, saj je $|x|$ enak večjemu od števil x in $-x$. Očitno je absolutna vrednost tudi multiplikativna: $|xy| = |x|\,|y|$.

Trditev 3.10. *Absolutna vrednost ustreza naslednjima neenakostma za poljubni realni števili x in y:*

(a) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (trikotniška neenakost)
(b) $|x + y| \geq \big||x| - |y|\big|$

Dokaz. (a) Ločimo primere glede na predznačenost števil x in y:

- $x, y \geq 0 \Longrightarrow x + y \geq 0 \Longrightarrow |x + y| = x + y = |x| + |y|$;

- $x, y < 0 \Longrightarrow x + y < 0 \Longrightarrow |x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$;
- $x \geq 0, y < 0$ ali $x < 0, y \geq 0$: ti možnosti sta simetrični, obravnava obeh je analogna – mi bomo obravnavali le prvo. Težava nastopi, ker ne vemo, ali je v tem primeru vsota pozitivno ali negativno število; nastopita lahko obe možnosti. Zato ponovno ločimo primera: če je $x + y \geq 0$, velja

$$|x + y| = x + y = x - (-y) = |x| - |y| \leq |x| + |y|.$$

Če pa je $x + y < 0$, velja

$$|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) = -|x| + |y| \leq |x| + |y|.$$

(b) Pomagamo si z že dokazano trikotniško neenakostjo. V to vstavimo $x = a + b$ in $y = -b$:

$$\big|(a + b) - b\big| \leq |a + b| + |-b| \Longrightarrow |a| \leq |a + b| + |b| \Longrightarrow |a + b| \geq |a| - |b|.$$

Če zamenjamo vlogi a in b, dobimo še

$$|a + b| \geq |b| - |a| = -\big(|a| - |b|\big).$$

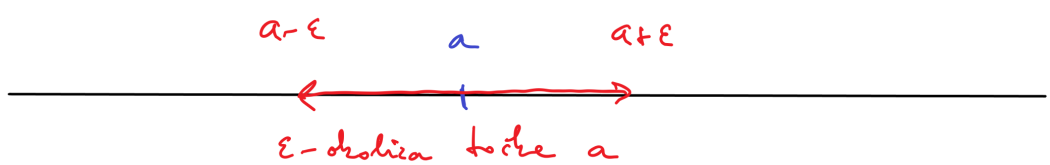
Od tod sledi želena neenakost

$$|a + b| \geq \big||a| - |b|\big|.$$

□

Definicija 3.11. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in $\varepsilon > 0$. *ε-okolica* točke a je množica vseh tistih realnih števil x, ki so od a oddaljena manj kot ε:

$$\{\, x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon \,\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$



Pojem bližine v definiciji limite in stekališča bomo opisali s pomočjo okolic. Ideja je, da so dovolj pozni členi vse bližje limiti (ali stekališču), torej v vse manjših okolicah te točke.

3. Limita in stekališče zaporedja

Definicija 3.12. Realno število a je *limita* zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, če so v poljubni ε-okolici števila a vsi členi zaporedja od nekega dalje, torej:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \text{da } \forall n \geq n_\varepsilon \text{ velja } \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Oznaka: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Če ima zaporedje limito, rečemo, da je *konvergentno*, sicer pa, da je *divergentno*.

Definicija 3.13. Realno število s je *stekališče* zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, če je v poljubni ε-okolici števila s neskončno členov zaporedja.

Pogoj v definiciji stekališča pomeni, da so v poljubni okolici števila s členi zaporedja s poljubno velikimi indeksi:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \text{ in } \ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n_{\varepsilon,m} > m, \quad \text{da velja } \ |a_{n_{\varepsilon,m}} - s| < \varepsilon.$$

Primer 3.14. Pokaži, da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

Splošni člen zaporedja je $a_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$, kandidat za limito pa $a = \frac{1}{2}$. Preverimo po definiciji limite: izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Iščemo tak indeks $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da bo za vsak $n \geq n_\varepsilon$ veljalo

$$\left| \frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Po računu v primeru 3.6 je ta neenakost ekvivalentna

$$\frac{3}{4n+2} < \varepsilon \iff n > \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

Če izberemo

$$n_\varepsilon := \left\lfloor \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right\rfloor + 1,$$

bo želeni pogoj izpolnjen. ♢

Opomba 3.15.

- Če ima zaporedje limito, je s tem podatkom zelo dobro opisano obnašanje njegovih členov za velike indekse – nič pa to ne pove o začetnih členih zaporedja, saj ti niso povezani z limito.
- Obstoj stekališča o obnašanju celotnega zaporedja ne pove veliko – zaporedje ima lahko več stekališč, lahko je tudi neomejeno, npr.
$$1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots$$
- Zaporedje ima lahko zelo veliko stekališč, npr.
$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \ldots$$
ima za stekališča vsa realna števila na intervalu $[0, 1]$.

Izrek 3.16. *Naj bo zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno. Potem velja:*

(a) *zaporedje je omejeno in*

(b) *ima natanko eno limito, ki je tudi njegovo edino stekališče.*

Dokaz. (a) Ideja: vsi členi od nekega dalje so v izbrani okolici limite, zato so omejeni, preostalih členov pa je le končno mnogo, torej so tudi omejeni.

Označimo $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ in izberimo $\varepsilon = 1$. Po definiciji limite tedaj obstaja tak indeks n_1, da za vsak $n \geq n_1$ velja

$$|a_n - a| < 1 \Longrightarrow a_n \in (a-1, a+1),$$

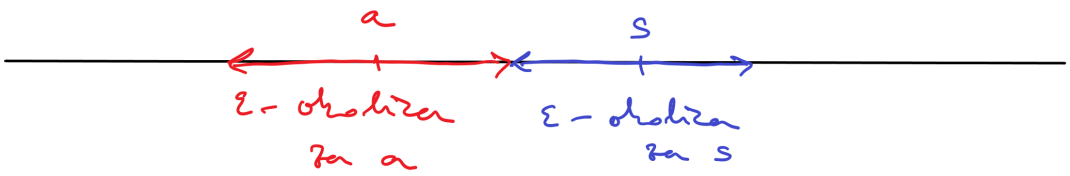
torej so ti členi navzdol omejeni z $a - 1$, navzgor pa z $a + 1$. To ne velja kvečjemu za člene $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1-1}$. Zato je spodnja meja za celotno zaporedje

$$m = \min\{\, a-1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_1-1} \,\},$$

zgornja meja pa

$$M = \max\{\, a+1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_1-1} \,\}.$$

(b) Dokazujemo s protislovjem: denimo, da ima poleg limite a zaporedje še eno stekališče s, $a \neq s$. Naj bo $\varepsilon := |a - s|/2$, torej sta ε-okolici števil a in s disjunktni.



Po definiciji limite so v ε-okolici števila a vsi členi od nekega dalje, torej je v ε-okolici števila s lahko le končno mnogo členov. To pa je protislovje, saj je s stekališče in bi torej vsaka njegova okolica morala vsebovati neskončno členov. □

Glavni izrek tega razdelka govori o obstoju stekališč – ta rezultat bo v nadaljevanju zelo pomemben. Seveda nima vsako zaporedje stekališča, npr. $a_n = n$ je brez stekališč. To se zgodi zato, ker členi zbežijo v neskončnost.

Izrek 3.17. *Vsako omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče.*

Dokaz. Ideja: Dokazali bomo obstoj najmanjšega stekališča zaporedja $(a_n)_n$. Pri tem si bomo pomagali s polnostjo realnih števil. Ogledati si moramo torej množico, katere supremum bo najmanjše stekališče zaporedja. V tej množici bodo le taka števila, da je od njih manjših kvečjemu končno mnogo členov zaporedja.

Naj bo torej

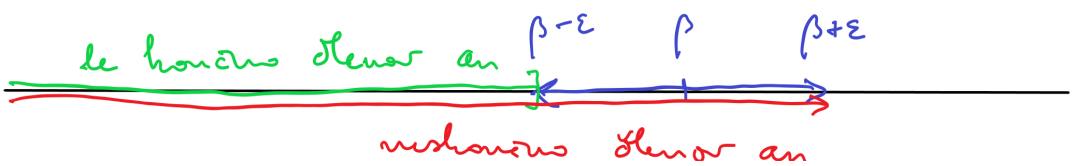
$$B := \{\, b \in \mathbb{R} \mid a_n < b \ \text{ velja kvečjemu za končno mnogo } n \,\}.$$

Ker je po predpostavki zaporedje $(a_n)_n$ omejeno, obstajata realni števili m, M, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$m < a_n < M.$$

Očitno je $m \in B$, saj so vsi členi zaporedja večji od m, zato je $B \neq \emptyset$. Prav tako je jasno, da je M zgornja meja za B, saj so vsi členi zaporedja manjši od M in zato tudi manjši od vsakega večjega števila, torej tako število ne more biti v B. Iz polnosti realnih števil sledi, da obstaja $\sup B =: \beta$.

Trdimo, da je β stekališče zaporedja $(a_n)_n$, torej da je v vsaki ε-okolici števila β neskončno členov zaporedja. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Na intervalu $(-\infty, \beta - \varepsilon]$ je le končno členov zaporedja $(a_n)_n$, saj bi bilo sicer število $\beta - \varepsilon$ zgornja meja za B in β ne bi bil supremum. Na intervalu $(-\infty, \beta + \varepsilon)$ pa je neskončno členov zaporedja, saj bi bilo sicer $\beta + \varepsilon \in B$ in β ne bi bil niti zgornja meja za B.



Sklep: na intervalu $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ je neskončno členov zaporedja. □

Vemo že, da ima zaporedje največ eno limito, lahko pa ima več stekališč. Limita je tudi stekališče zaporedja, obratno pa ne velja – celo zaporedje z enim stekališčem ni nujno konvergentno; je pa, če je tudi omejeno. Vseeno pa želimo stekališče povezati z limito. To naredimo tako, da opazujemo le nekatere člene zaporedja.

Naj bo s stekališče zaporedja $(a_n)_n$, torej poljubna ε-okolica števila s vsebuje neskončno členov zaporedja, zato vsebuje (nekatere) člene s poljubno velikimi indeksi. Iz zaporedja bomo izbrali člene tako, da bodo vse bližje s (torej bomo izbirali vse manjše okolice), njihovi indeksi pa bodo naraščali. Na ta način bomo sestavili novo zaporedje (sestavljeno iz nekaterih členov prvotnega zaporedja) z limito s.

- Za $\varepsilon_1 = 1$ obstaja n_1, da je $a_{n_1} \in (s-1, s+1)$.
- Za $\varepsilon_2 = 1/2$ obstaja $n_2 > n_1$, da je $a_{n_2} \in (s - 1/2, s + 1/2)$.
- Za $\varepsilon_3 = 1/3$ obstaja $n_3 > n_2$, da je $a_{n_3} \in (s - 1/3, s + 1/3)$.
- Ta konstrukcija je induktivna; predpostavimo, da smo že izbrali n_{k-1}. Potem za $\varepsilon_k = 1/k$ obstaja $n_k > n_{k-1}$, da je $a_{n_k} \in (s - 1/k, s + 1/k)$.

Definicija 3.18. Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje in $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil (indeksov). Potem $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ imenujemo *podzaporedje* zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Členi podzaporedja so: $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4}, \ldots$, npr. $a_3, a_{34}, a_{511}, a_{2317}, \ldots$

Trditev 3.19. *Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima stekališče s natanko tedaj, ko obstaja podzaporedje $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ z limito s.*

Dokaz. Dokažimo najprej implikacijo v desno. Konstrukcijo takega podzaporedja smo naredili že zgoraj. Preverimo, da je s res njegova limita. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tako naravno število k_ε, da je $\frac{1}{k_\varepsilon} < \varepsilon$ (to sledi iz Arhimedske lastnosti, saj obstaja tak k_ε, da velja $\frac{1}{\varepsilon} < k_\varepsilon$). Po konstrukciji podzaporedja potem za vsak $k \geq k_\varepsilon$ velja

$$|a_{n_k} - s| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_\varepsilon} < \varepsilon,$$

kar pomeni, da je s limita podzaporedja.

Implikacija v nasprotno smer je jasna: v poljubni okolici števila s so vsi členi podzaporedja od nekega dalje, torej neskončno členov prvotnega zaporedja, zato je s stekališče prvotnega zaporedja. $\square$

POGLAVJE 4

Konvergentna zaporedja

1. Monotona zaporedja

Za obstoj stekališča smo v prejšnjem poglavju že izpeljali zadostni pogoj – če je zaporedje omejeno, ima stekališče. Ne poznamo pa še nobenega pogoja, ki bi zagotavljal, da ima zaporedje limito. Vemo že, da je konvergentno zaporedje omejeno – torej je to potrebni pogoj za obstoj limite, seveda pa ni zadostni, saj poznamo omejena zaporedja, ki niso konvergentna. V tem razdelku pa bomo videli, da je omejeno zaporedje ob dodatnem pogoju monotonosti konvergentno.

Premislimo, kaj lahko povemo o obnašanju členov omejenega naraščajočega zaporedja. Ker je zaporedje omejeno, ima stekališče. A ker je zaporedje naraščajoče, to stekališče ne more biti strogo manjše od nobenega člena zaporedja. To stekališče je torej zgornja meja za zaporedje. Ker pa je v vsaki okolici stekališča neskončno členov zaporedja, je najmanjša zgornja meja. Pokazali bomo, da je v tem primeru supremum limita zaporedja.

Izrek 4.1 (konvergenca monotonih zaporedij). *Monotono omejeno zaporedje je konvergentno. Bolj natančno:*

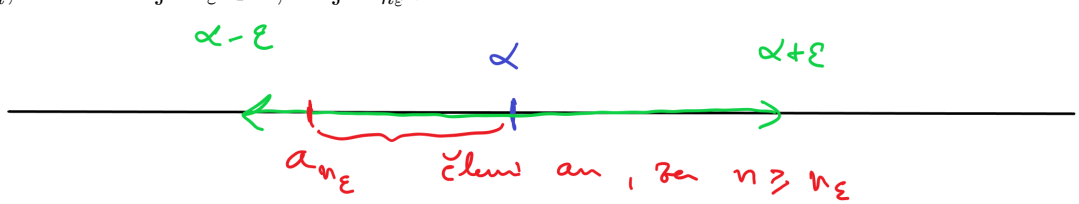
(a) *Naraščajoče zaporedje $(a_n)_n$ je konvergentno natanko tedaj, ko je navzgor omejeno. Tedaj velja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$.*

(b) *Padajoče zaporedje $(a_n)_n$ je konvergentno natanko tedaj, ko je navzdol omejeno. Tedaj velja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$.*

Ob privzetku omejenosti ima torej monotonost za posledico konvergenco. Obratno seveda ne velja nujno: zaporedje je lahko konvergentno, četudi ni monotono, npr. $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_n$.

Dokaz. Obe možnosti sta analogni, zato bomo izrek dokazali le za naraščajoča zaporedja. Vemo že, da je konvergentno zaporedje omejeno, torej moramo dokazati še implikacijo v drugo smer. Po predpostavki je $(a_n)_n$ navzgor omejeno, zato obstaja $\sup a_n =: \alpha$. Torej za vsak n velja $a_n \leq \alpha$.

Dokazujemo, da je α limita: izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Iščemo tak indeks n_ε, da bo za vsak $n \geq n_\varepsilon$ veljalo $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Po definiciji supremuma $\alpha - \varepsilon$ ni več zgornja meja za zaporedje $(a_n)_n$, zato obstaja $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da je $a_{n_\varepsilon} > \alpha - \varepsilon$.



Ker je zaporedje naraščajoče, za vsak $n \geq n_\varepsilon$ velja

$$a_n \geq a_{n_\varepsilon} > \alpha - \varepsilon \Longrightarrow a_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha] \subset (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon),$$

torej n_ε izpolnjuje pogoj iz definicije limite. □

Posledica 4.2. *Naj bo $[a_n, b_n]$ padajoče zaporedje intervalov, tj. za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja*

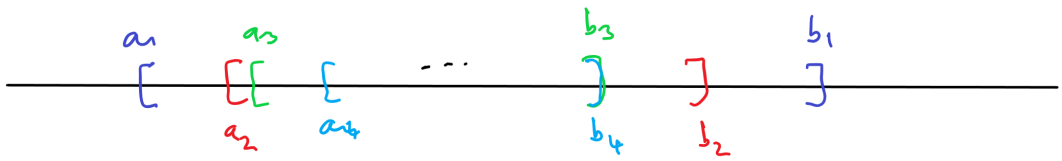
$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n].$$

Potem je presek vseh teh intervalov neprazen: $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \emptyset$. *Če gredo dolžine* $b_n - a_n$ *intervalov* $[a_n, b_n]$ *proti* 0, *potem presek vsebuje natanko eno število.*

Opomba 4.3. Predpostavka, da so intervali zaprti in omejeni, je bistvena:

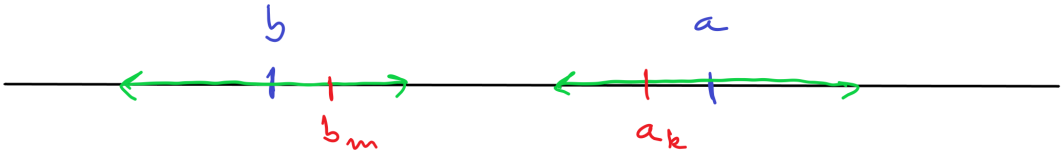
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty}[n, \infty) = \emptyset.$$

Dokaz. Iz pogoja $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ sledi, da je $a_{n+1} \geq a_n$ za vsak n, torej je zaporedje



$(a_n)_n$ naraščajoče. Prav tako velja $b_{n+1} \leq b_n$, torej je zaporedje $(b_n)_n$ padajoče. Ker so vsi intervali vsebovani v $[a_1, b_1]$, sta zaporedji $(a_n)_n$ in $(b_n)_n$ omejeni in zato konvergentni. Označimo $a := \lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$ in $b := \lim_{n\to\infty} b_n = \inf b_n$. Od tod sledi $a_n \leq a$ in $b_n \geq b$.

Poleg tega je $a \leq b$, saj bi v nasprotnem primeru za neki n veljalo $b_n < a_n$, kar pa je v



nasprotju s predpostavko, da je $[a_n, b_n]$ interval. Za vsak n torej velja

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = [a, b].$$

Če gredo dolžine intervalov proti 0, velja

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

zato je $b - a = 0$ oziroma $a = b$: to je v tem primeru edina točka v preseku. □

2. Operacije z zaporedji

Operacije s števili lahko prenesemo na zaporedja tako, da jih uporabimo na istoležnih členih zaporedja.

Definicija 4.4. Naj bosta $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedji. Potem je:

- *vsota* teh zaporedij zaporedje $(v_n)_n$, katerega splošni člen je $v_n := a_n + b_n$;
- *razlika* teh zaporedij zaporedje $(r_n)_n$, katerega splošni člen je $r_n := a_n - b_n$;
- *produkt* teh zaporedij zaporedje $(p_n)_n$, katerega splošni člen je $p_n := a_n b_n$;
- *kvocient* teh zaporedij zaporedje $(q_n)_n$, katerega splošni člen je $q_n := \dfrac{a_n}{b_n}$; to zaporedje je definirano le, če je $b_n \neq 0$ za vsak n.

Zanima nas, kako operacije vplivajo na konvergenco – ali iz konvergentnih zaporedij (vedno) dobimo konvergentna zaporedja?

Izrek 4.5 (računanje z limitami). *Naj bosta $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni zaporedji. Potem so konvergenta tudi vsota, razlika in produkt teh zaporedij in zanje veljajo naslednja pravila:*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,\\ \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n,\\ \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) &= \Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big)\cdot\Big(\lim_{n\to\infty} b_n\Big).\end{aligned}$$

Če je $b_n \neq 0$ za vsak $n\in\mathbb{N}$ in je tudi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, potem je konvergentno tudi zaporedje kvocientov in zanj velja

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Dokaz. Dovolj je dokazati formule za limite, saj iz teh sledi, da so ustrezna zaporedja konvergentna. Označimo $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ in $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Dokazi formul za vsoto, razliko in produkt so podobni; najzahtevnejši je tisti za produkt, zato si bomo ogledali tega. Dokazati torej želimo

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = ab.$$

Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Poiskati moramo tak n_ε, da bo za vsak $n \geq n_\varepsilon$ veljalo

$$(\star)\qquad |a_nb_n - ab| < \varepsilon.$$

Uporabimo predpostavko, da sta zaporedji $(a_n)_n$ in $(b_n)_n$ konvergentni:

$$\forall\eta>0\ \ \exists n_{\eta,a},\ \ \text{da}\ \ \forall n\geq n_{\eta,a}\ \ \text{velja}\ \ |a_n-a|<\eta,$$

$$\forall\eta>0\ \ \exists n_{\eta,b},\ \ \text{da}\ \ \forall n\geq n_{\eta,b}\ \ \text{velja}\ \ |b_n-b|<\eta.$$

Število η bomo izbrali v nadaljevanju tako, da bomo zadostili želenemu pogoju $(\star)$. Ocenimo:

$$\begin{aligned}|a_nb_n-ab| &= |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab|\\ &= \big|(a_nb_n-a_nb)+(a_nb-ab)\big|\\ (\star\star)\qquad &\leq \big|a_n(b_n-b)\big| + \big|(a_n-a)b\big| && \text{(trikotniška neenakost)}\\ &= |a_n|\,|b_n-b| + |a_n-a|\,|b| && \text{(multiplikativnost } |\cdot|)\\ &< L\,\eta + \eta\,L = 2L\,\eta.\end{aligned}$$

V zadnji vrstici smo najprej upoštevali, da je zaporedje $(a_n)_n$ omejeno, zato obstaja tak $M\in\mathbb{R}$, da za vse $n\in\mathbb{N}$ velja $|a_n|\leq M$, nato pa smo vzeli $L := \max\{\,M, |b|\,\}$; privzeti smemo, da je $L>0$. Poleg tega smo razliko med splošnim členom zaporedja in limito za obe začetni zaporedji ocenili z η, kar velja za $n\geq n_{\eta,a}$ oziroma $n\geq n_{\eta,b}$. Izbrati moramo še η. Iz neenakosti $(\star\star)$ bo sledila želena neenakost $(\star)$, če izberemo

$$2L\,\eta = \varepsilon\ \ \text{oziroma}\ \ \eta = \frac{\varepsilon}{2L}.$$

Sklep: za tako izbrani η po definiciji limite obstajata števili $n_{\eta,a}$ in $n_{\eta,b}$, da za vsak $n\geq n_\varepsilon := \max\{\,n_{\eta,a}, n_{\eta,b}\,\}$ velja

$$|a_n-a|<\eta\ \ \text{in}\ \ |b_n-b|<\eta,$$

od koder iz $(\star\star)$ zaradi izbire η sledi $(\star)$.

Preverimo še pravilo za kvocient. Ker je $\dfrac{a_n}{b_n} = a_n\dfrac{1}{b_n}$ in smo že dokazali pravilo za produkt, je dovolj obravnavati zaporedje $\dfrac{1}{b_n}$. Dokazati moramo, da je njegova limita enaka $\dfrac{1}{b}$. Ocenimo

razliko med splošnim členom zaporedja in domnevno limito:

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b-b_n}{b_n b}\right| = \frac{|b_n-b|}{|b_n|\,|b|}.$$

Ker je $b \neq 0$, za vsak x iz $|b|/2$-okolice števila b velja

$$|x| = \big|(x-b)+b\big| \geq |b| - |x-b| > \frac{|b|}{2} > 0.$$

Ker so v tej okolici vsi členi z indeksi večjimi od nekega n_0, za te člene velja

$$\frac{|b_n-b|}{|b_n|\,|b|} < 2\frac{|b_n-b|}{|b|^2}.$$

Če naj bo za poljubno izbran $\varepsilon > 0$ razlika med splošnim členom in domnevno limito manjša od ε, je dovolj, da je izraz na desni v zadnji neenakosti manjši od ε:

$$2\frac{|b_n-b|}{|b|^2} < \varepsilon \iff |b_n-b| < \frac{\varepsilon|b|^2}{2} =: \eta.$$

Za ta η pa obstaja n_η, da zadnja neenakost velja za vse $n \geq n_\eta$. Tedaj torej velja tudi prvi pogoj, upoštevati pa moramo, da smo že prej privzeli $n \geq n_0$, torej je pogoj za limito izpolnjen za vse $n \geq n_\varepsilon := \max\{\, n_0, n_\eta \,\}$. □

Opomba 4.6.

- Zgornje formule za računanje z limitami smemo uporabiti le, če sta zaporedji $(a_n)_n$ in $(b_n)_n$ konvergentni.
- Če zaporedji $(a_n)_n$ in $(b_n)_n$ nista konvergentni, se vseeno lahko zgodi, da je sestavljeno zaporedje konvergentno, npr. $a_n = 2n+1$ je neomejeno (ker vsi členi rastejo preko vsake meje, včasih pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$), prav tako je $b_n = \dfrac{3}{n} - 2n$ neomejeno ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$), a vsota $a_n + b_n = 1 + \dfrac{3}{n}$ teh dveh zaporedij konvergira proti 1.
- Zgornji primer kaže, da iz divergence prvotnih zaporedij ne moremo sklepati na divergenco sestavljenega zaporedja. To je primer *nedoločenega izraza* v pravilu za limito vsote, saj na desni strani pravila dobimo izraz

  $$\infty - \infty,$$

  ki seveda nima določene vrednosti – limita na levi je lahko poljubno realno število (v zgornjem primeru 1) ali $\pm\infty$. Pri uporabi pravil za računanje z limitami se lahko pojavijo še naslednji nedoločeni izrazi:

  $$\frac{0}{0},\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \text{in} \quad 0\cdot\pm\infty.$$

  V primeru nedoločenega izraza se moramo limite lotiti drugače, npr. preoblikovati izraz tako, da lahko uporabimo pravila. Za razliko od zgornjih pa naslednji izrazi niso nedoločeni, saj znamo za vsakega premisliti, ali limita obstaja ali ne:

  $$\infty+\infty,\quad -\infty-\infty,\quad \pm\infty\cdot\pm\infty,\quad \frac{\pm\infty}{0} \quad \text{in} \quad \frac{0}{\pm\infty}$$

  ter za realno število a tudi:

  $$\pm\infty + a,\quad \pm\infty\cdot a \quad (a \neq 0),\quad \frac{\pm\infty}{a} \quad \text{in} \quad \frac{a}{\pm\infty}.$$

Povejmo še bolj natančno, kakšno obnašanje zaporedja označuje simbol $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Kot smo že zgoraj neformalno omenili, to pomeni, da vsi členi zaporedja rastejo preko vseh meja (a ne nujno monotono). Tudi to lahko opišemo s pojmom okolice, le da tokrat govorimo o okolici neskončnosti. Dogovorimo se, da je *okolica neskončnosti* določena z nekim (velikim) realnim številom M in vsebuje vsa števila večja od M:

$$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x > M \,\} = (M, \infty).$$

Potem analogno kot definicijo (realne) limite vpeljemo simbol $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ z zahtevo:

$$\forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists n_M, \;\; \text{da za vsak } n \geq n_M \text{ velja } \;\; a_n > M.$$

Podobno opišemo tudi simbol $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Primer 4.7. Izračunaj limito $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+n^2}{3n^2-2}$, če obstaja.

Če poskusimo neposredno uporabiti pravilo za limito kvocienta, dobimo nedoločen izraz $\dfrac{\infty}{\infty}$. To težavo lahko odpravimo tako, da ulomek preoblikujemo na ta način, da števec in imenovalec ulomka delimo z največjo potenco števila n, ki nastopa v imenovalcu, torej v našem primeru z n^2. Tako dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+n^2}{3n^2-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2}{n}+1}{3-\dfrac{2}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}+1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{2}{n^2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

$\diamondsuit$

3. Primeri konvergentnih zaporedij

Ogledali si bomo nekaj pomembnih tipov zaporedij in ob tem spoznali še en splošen rezultat.

(1) Poljubno realno število c določa konstantno zaporedje: $a_n = c$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in za to zaporedje velja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c = c.$$

Ker so vsi členi zaporedja enaki c, vsi členi zaporedja ležijo v poljubni ε-okolici števila c, zato je c res limita.

(2) Za poljubno realno število p velja $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} \infty & ; \; p > 0 \\ 1 & ; \; p = 0 \\ 0 & ; \; p < 0 \end{cases}$.

Če je $p = 0$, je zaporedje konstantno enako 1, torej tedaj formula velja.

Predpostavimo, da je $p > 0$. Pokazati želimo, da so v poljubni okolici neskončnosti vsi členi od nekega dalje. Izberimo poljuben $M > 0$. Potem je

$$n^p > M \iff n > M^{1/p}$$

in ta pogoj res velja za vse dovolj velike n.

Če je $p < 0$, lahko pišemo $p = -q$ za neki pozitiven q, torej je $n^p = \dfrac{1}{n^q}$. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Potem je

$$\left|\frac{1}{n^q} - 0\right| = \frac{1}{n^q} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon^{1/q}},$$

kar velja za vse dovolj velike n.

Posebej smo tako dokazali $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, kar smo že večkrat uporabili.

(3) Za poljubno realno število a velja $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & ; \; |a| < 1 \\ \infty & ; \; a > 1 \\ 1 & ; \; a = 1 \\ \text{ne obstaja} & ; \; a \leq -1 \end{cases}$. Za $a = -1$ že vemo, da ima zaporedje dve stekališči 1 in -1, za $a < -1$ pa členi po absolutni vrednosti naraščajo v neskončno, a spreminajo predznak – zaporedna člena sta nasprotnega predznaka, zato rečemo, da je zaporedje *alternirajoče*.

Privzemimo, da je $|a| < 1$. Dokazati želimo, da je limita zaporedja enaka 0. To očitno velja za $a = 0$, zato smemo odslej privzeti $0 < |a| < 1$. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Potem je

$$|a^n - 0| < \varepsilon \iff |a|^n < \varepsilon \iff n \ln |a| < \ln \varepsilon \iff n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |a|},$$

kar velja za vse dovolj velike n.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Ocenimo razliko med splošnim členom in domnevno limito. Ker je splošni člen očitno večji od 1, ne potrebujemo absolutne vrednosti. Pri preoblikovanju razlike $\sqrt[n]{n} - 1$ si bomo pomagali s formulo za razcep razlike potenc. Za realni števili a, b in naravno število k velja

$$a^k - b^k = (a - b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right)$$

$$\Longrightarrow a - b = \frac{a^k - b^k}{a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}}.$$

Vzeli bomo $a = \sqrt[n]{n}$, $b = 1$ in $k = n$:

$$(\star) \qquad \sqrt[n]{n} - 1 = \frac{n-1}{n^{\frac{n-1}{n}} + n^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + n^{\frac{1}{n}} + 1}.$$

Ulomek na desni želimo oceniti navzgor, torej moramo imenovalec oceniti navzdol. To bomo naredili tako, da bomo najprej izpustili nekaj najmanjših členov, nato pa bomo vse člene zamenjali z najmanjšim preostalim členom. Če je n sodo število, ocenimo takole:

$$n^{\frac{n-1}{n}} + n^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + n^{\frac{1}{n}} + 1 > n^{\frac{n-1}{n}} + n^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + n^{\frac{n-n/2}{n}},$$

v primeru lihega n pa takole:

$$n^{\frac{n-1}{n}} + n^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + n^{\frac{1}{n}} + 1 > n^{\frac{n-1}{n}} + n^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + n^{\frac{n-(n-1)/2}{n}}.$$

Zgornja vsota na desni ima $n/2$ členov, spodnja pa $(n-1)/2$. Najmanjši člen v zgornji vsoti je $n^{\frac{n/2}{n}}$, v spodnji pa $n^{\frac{(n+1)/2}{n}}$. V obeh primerih zato velja ocena

$$n^{\frac{n-1}{n}} + n^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + n^{\frac{1}{n}} + 1 > \frac{n-1}{2}\, n^{\frac{n/2}{n}} = \frac{n-1}{2}\sqrt{n}.$$

Če to upoštevamo v enakosti $(\star)$, dobimo

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \frac{n-1}{\frac{n-1}{2}\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Zadnjo neenakost lahko z upoštevanjem pozitivnosti leve strani preoblikujemo v

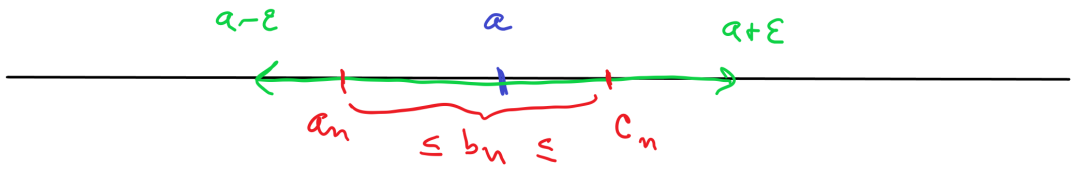
$$1 \le \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Ker gre ulomek na desni z naraščanjem n proti 0, gre $\sqrt[n]{n}$ proti 1.

V zadnjem sklepu smo uporabili splošen princip, ki pravi, da zaporedje, ki je ukleščeno med dve konvergentni zaporedji z isto limito, konvergira proti tej limiti.

Izrek 4.8 (princip sendviča). *Naj za vsako naravno število n velja $a_n \le b_n \le c_n$ in naj poleg tega velja še $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n =: a$. Potem je tudi zaporedje $(b_n)_n$ konvergentno in velja $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.*

Dokaz. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Potem obstaja $n_{\varepsilon,a}$, da za vsak $n \ge n_{\varepsilon,a}$ velja $|a_n - a| < \varepsilon \Longrightarrow a - \varepsilon < a_n$. Prav tako obstaja $n_{\varepsilon,c}$, da za vsak $n \ge n_{\varepsilon,c}$ velja $|c_n - a| < \varepsilon \Longrightarrow c_n < a + \varepsilon$. Potem za vsak $n \ge n_\varepsilon := \max\{\, n_{\varepsilon,a}, n_{\varepsilon,c} \,\}$ velja $b_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. $\square$



(5) Za poljubno pozitivno realno število a velja $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Privzemimo najprej, da je $a > 1$. Ker za vsa dovolj velika naravna števila n velja $a \leq n$, za takšne n velja ocena

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Od tod po izreku o sendviču sledi rezultat.

Naj bo sedaj $0 < a < 1$. Potem lahko zapišemo $a = \dfrac{1}{b}$ za neko realno število $b > 1$. Zato je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1.$$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n =: e = 2{,}71828\ldots$

Pokazati moramo, da je zaporedje $a_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ konvergentno. Oglejmo si nekaj prvih členov: $a_1 = 2$, $a_2 = 2{,}25$, $a_3 \doteq 2{,}370$. Zdi se, da je zaporedje naraščajoče.

Preverimo, da je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno.

$(a_n)_n$ je naraščajoče:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}\,\frac{n+1}{n} \\
&= \frac{n+1}{n} \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&\geq \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Pri prehodu v zadnjo vrstico smo upoštevali Bernoullijevo neenakost:

$$(1+x)^k \geq 1 + kx \quad \text{za vsak } x > -1 \text{ in vsak } k \in \mathbb{N}.$$

$(a_n)_n$ je navzgor omejeno:

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\underbrace{\frac{n(n-1)}{n^2}}_{<1} + \frac{1}{3!}\underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}}_{<1} + \cdots + \frac{1}{n!}\underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{<1} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 3.
\end{aligned}$$

Dokazali smo, da je zaporedje konvergentno, hkrati pa smo izpeljali tudi oceno za velikost njegove limite:

$$2{,}37 \leq e \leq 3.$$

Iz zgornje limite lahko izpeljemo še naslednje:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)} = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

Opomba 4.9. Zgornje limite za e so primeri limit, ki jim ob poskusu izračuna limite v osnovi in eksponentu pripada nedoločeni izraz 1^{∞}. Vrednost take limite je lahko poljubno pozitivno število, 0 ali ∞.

4. Rekurzivna zaporedja

Posebej zanimivo in pomembno družino zaporedij tvorijo rekurzivna zaporedja, pri katerih se vsak člen izraža s predhodnimi členi, podani pa morajo biti tudi začetni členi.

Primer 4.10. *Fibonaccijevo zaporedje* $(F_n)_n$ je podano z rekurzivno zvezo

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \quad \text{za vsak} \quad n \in \mathbb{N}$$

in začetnima členoma $F_0 := 0$ in $F_1 := 1$. Zapiši prvih nekaj členov tega zaporedja.

Vrednost vsakega člena je preko rekurzivne zveze določena z vrednostma predhodnih dveh členov – rečemo, da je rekurzivna formula *dvočlena*. Zato morata biti podana prva dva člena. Iz teh z uporabo rekurzivne zveze dobimo: $F_2 = 0 + 1 = 1$, $F_3 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = 1 + 2 = 3$, $F_5 = 2 + 3 = 5$, $F_6 = 3 + 5 = 8$, $F_7 = 5 + 8 = 13, \ldots$

Opomba: Za zaporedja, kot je Fibonaccijevo, obstaja postopek, s katerim poiščemo formulo za splošni člen; za Fibonaccijevo zaporedje velja

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right).$$

$\diamondsuit$

Za naravno število k je *k-členo rekurzivno zaporedje* pravilo, po katerem je vsak člen zaporedja določen s predhodnimi k členi, poleg tega mora biti podanih prvih k členov. Tako zaporedje je torej določeno s funkcijo f, odvisno od k spremenljivk, in členi $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Členi a_n za $n > k$ pa so določeni z rekurzivno zvezo

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}).$$

Enočlena rekurzivna zaporedja lahko obravnavamo geometrično in tako dobimo predstavo o obnašanju členov (ali je zaporedje monotono, omejeno, konvergentno ...).

Primer 4.11. Naj bo dano rekurzivno zaporedje $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+3}{4}$ z začetnim členom $a_1 = 2$. Ugotovi, ali je zaporedje konvergentno in če je, izračunaj njegovo limito.

Iz rekurzivne zveze in $a_1 = 2$ lahko izračunamo nekaj začetnih členov:

$$a_2 = \frac{7}{4}, \quad a_3 = \frac{97}{64}.$$

Na osnovi teh členov lahko domnevamo, da je zaporedje padajoče in ker so njegovi členi pozitivni, tudi konvergentno. A kaj bi lahko bila limita?

Predpostavimo, da obstaja limita tega zaporedja in jo označimo z $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Možne vrednosti limite a lahko izračunamo s pomočjo rekurzivne zveze tako, da izračunamo limito leve in desne strani v rekurzivni zvezi:

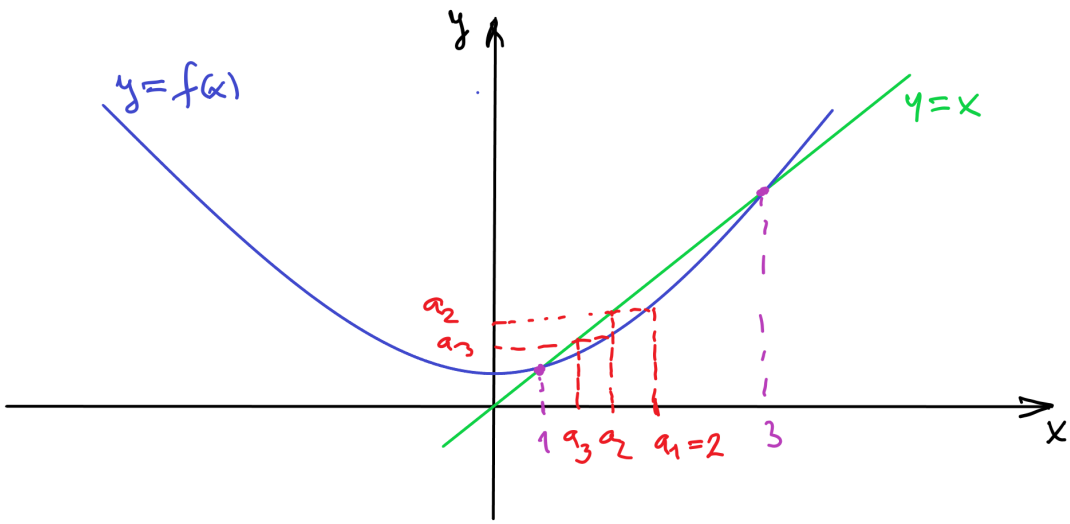
$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 + 3}{4}.$$

Na levi upoštevamo, da ima zaporedje $(a_{n+1})_n$ isto limito kot $(a_n)_n$, saj so členi le zamaknjeni za eno mesto, na desni pa uporabimo pravila za računanje z limitami:

$$a = \frac{a^2 + 3}{4} \implies a^2 - 4a + 3 = 0 \implies (a-1)(a-3) = 0.$$

Če je zaporedje konvergentno, je njegova limita lahko enaka le $a = 1$ ali $a = 3$ – to velja neodvisno od vrednosti začetnega člena a_1. V splošnem zgornja enakost ustreza enakosti $a = f(a)$, kjer je f funkcija v rekurzivni zvezi, torej v našem primeru $f(x) = \dfrac{x^2+3}{4}$. Kandidati za limito zato ustrezajo presečiščem grafa funkcije f in premice $y = x$.

Oglejmo si konstrukcijo členov zaporedja in kandidatov za limite še grafično:



Iz slike sklepamo, da je zaporedje res padajoče in konvergira proti 1. Seveda je to potrebno utemeljiti.

Prednost grafične analize je, da nam da vpogled v obnašanje členov zaporedja za poljuben začetni člen a_1:

- če je $1 < a_1 < 3$, je zaporedje padajoče in konvergira proti 1;
- če je $a_1 = 3$, je $a_n = 3$ za vse n, torej je 3 limita;
- če je $a_1 > 3$, členi zaporedja naraščajo čez vse meje;
- če je $a_1 = 1$, je $a_n = 1$ za vse n, torej je 1 limita;
- če je $0 \le a_1 < 1$, je zaporedje naraščajoče in konvergira proti 1;
- če je $a_1 < 0$, je $a_2 > 0$ in od tega člena dalje se zaporedje obnaša enako kot tisto s prvim členom $|a_1|$.

$\diamondsuit$

POGLAVJE 5

Odprte, zaprte in kompaktne množice

1. Podmnožice realnih števil

Vpeljali smo že pojem ε-okolice števila $a \in \mathbb{R}$ za poljuben $\varepsilon > 0$. Bolj splošno je *okolica* števila a vsaka množica, ki vsebuje kakšno ε-okolico števila a. Za množico bomo rekli, da je odprta, če je okolica za vsako svojo točko, saj tedaj vsebuje odprt interval okoli vsake svoje točke in je torej unija odprtih intervalov.

Definicija 5.1. Množica $U \subseteq \mathbb{R}$ je *odprta*, če ima vsak $x \in U$ kakšno ε-okolico, ki cela leži v U. Množica $Z \subseteq \mathbb{R}$ je *zaprta*, če je njen komplement $\mathbb{R} \smallsetminus Z$ odprta množica.

Odprto množico lahko predstavimo kot unijo disjunktnih odprtih intervalov, saj je za poljubna odprta intervala z nepraznim presekom njuna unija tudi odprt interval.

Primeri odprtih množic:

$$U_1 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, n\right) = (0, \infty),$$

$$U_2 := (-3, -1) \cup (-1, \pi)$$

in

$$U_3 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right).$$

Poljubna zaprta množica je (kot komplement odprte) disjunktna unija zaprtih intervalov (in točk, ki so zaprti intervali dolžine 0), a vsaka disjunktna unija točk in zaprtih intervalov ni zaprta množica (vsaka množica je disjunktna unija svojih točk, a vsaka množica ni zaprta). Komplementi zgornjih odprtih množic so po definiciji zaprte množice:

$$Z_1 = (-\infty, 0],$$

$$Z_2 = (-\infty, -3] \cup \{\, -1 \,\} \cup [\pi, \infty)$$

in

$$Z_3 = (-\infty, 0] \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]\right) \cup [1, \infty).$$

Oglejmo si še naslednji množici: $A := \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ in $B := \{\, 0 \,\} \cup A$. Ker je komplement množice A enak

$$\mathbb{R} \smallsetminus A = (-\infty, 0] \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)\right) \cup (1, \infty),$$

kar ni odprta množica, množica A ni zaprta. Komplement množice B pa je

$$\mathbb{R} \smallsetminus B = (-\infty, 0) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)\right) \cup (1, \infty),$$

kar je odprta množica, zato je množica B zaprta.

Opomba 5.2.
- Večina množic ni niti odprtih niti zaprtih – posebej ne velja, da je množica, ki ni odprta, nujno zaprta (ali obratno).

- Zgornji primer množic A in B pokaže, da mora zaprta množica vsebovati vsa števila, ki se jim lahko poljubno približamo s števili iz te množice.

TRDITEV 5.3. *Množica $A \subseteq \mathbb{R}$ je zaprta natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(a_n)_n$ s členi v A velja: če je s stekališče tega zaporedja, je $s \in A$.*

DOKAZ. ($\Longrightarrow$) Naj bo $s \in \mathbb{R}$ stekališče zaporedja $(a_n)_n$ s členi v A, tj. $a_n \in A$ za vsak n. Denimo, da $s \notin A$, torej je $s \in \mathbb{R} \setminus A$. Ker je $\mathbb{R} \setminus A$ po predpostavki odprta, obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus A$. V tej okolici števila s torej ni nobenega člena zaporedja, zato s ni stekališče zaporedja $(a_n)_n$: $\rightarrow\!\leftarrow$.

($\Longleftarrow$) Naj za $A \subseteq \mathbb{R}$ velja, da poljubno stekališče poljubnega zaporedja s členi v A pripada A. Dokazujemo, da je A zaprta, torej da je $B := \mathbb{R} \setminus A$ odprta. Po definiciji odprtosti moramo za poljubno število $x \in B$ najti okolico, ki cela leži v B. Če torej B ni odprta, obstaja vsaj eno število $x \in B$, da vsaka njegova ε-okolica seka $\mathbb{R} \setminus B = A$. Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ torej v $\frac{1}{n}$-okolici števila x obstaja neko število $a_n \in A$. Potem je $(a_n)_n$ zaporedje s členi v A, ki ima x za limito, torej tudi za stekališče: $\rightarrow\!\leftarrow$, saj bi moralo stekališče po predpostavki ležati v A. $\square$

OPOMBA 5.4. Zgornja trditev ne zagotavlja, da ima zaporedje s členi v zaprti množici v tej množici nujno stekališče – pravi le, da če zaporedje ima stekališče, potem to stekališče leži v množici. Npr. $Z = [0, \infty)$ je zaprta, a zaporedje $a_n = n$ s členi v Z nima stekališča.

DEFINICIJA 5.5. Množica $K \subset \mathbb{R}$ je *kompaktna*, če ima vsako zaporedje s členi v K stekališče, ki pripada K.

PRIMER 5.6. Omejen zaprt interval $[a, b]$ je kompakten.

Ker je množica $A := [a, b]$ omejena, je vsako zaporedje s členi v A omejeno, zato ima stekališče. Ker je A zaprta, je to stekališče vsebovano v A – torej je A res kompaktna.

Opomba: Zaprt omejen interval je prototip kompaktne množice in hkrati najpomembnejši primer take množice na realni osi. $\diamondsuit$

PRIMER 5.7. Intervala $[a, \infty)$ in $(a, b]$ nista kompaktna.

Za prvo množico to pokaže zaporedje $a_n := a + n$, za drugo pa $a_n := a + \frac{1}{n}$. $\diamondsuit$

PRIMER 5.8. Ali je množica $\{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]$ kompaktna?

Odgovor je pritrdilen, kot sledi iz naslednjega izreka – preveriti moramo, da je množica omejena in zaprta. Očitno je omejena, saj je vsebovana v intervalu $[0, 1]$. Zaprta je, ker je njen komplement unija odprtih intervalov:

$$(-\infty, 0) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right) \right) \cup (1, \infty).$$

$\diamondsuit$

IZREK 5.9. *Množica $A \subset \mathbb{R}$ je kompaktna natanko tedaj, ko je omejena in zaprta.*

DOKAZ. ($\Longleftarrow$) To implikacijo dokažemo enako kot kompaktnost zaprtega omejenega intervala. Izberimo poljubno zaporedje $(a_n)_n$ s členi v A. Ker je A omejena, je zaporedje omejeno, zato ima vsaj eno stekališče s. Ker pa je A tudi zaprta, je $s \in A$. To pomeni, da je A kompaktna, saj ima poljubno zaporedje s členi v A stekališče, ki leži v A.

($\Longrightarrow$) Predpostavimo, da je A kompaktna. Dokazati moramo omejenost in zaprtost množice A.

A je omejena: Denimo, da A ni navzgor omejena; analogno obravnavamo omejenost navzdol. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja $a_n \in A$, za katerega velja $a_n \geq n$. Za tako dobljeno zaporedje $(a_n)_n$ velja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, zato to zaporedje nima stekališča v A: $-\!\!\times\!\!-$. Ker je po predpostavki A kompaktna, bi namreč vsako zaporedje s členi v A moralo imeti stekališče v A.

A je zaprta: Naj bo $(a_n)_n$ poljubno zaporedje s členi v A in $s \in \mathbb{R}$ neko njegovo stekališče. Dokazati želimo, da $s \in A$. Ker je s stekališče, ima dano zaporedje podzaporedje $(a_{n_k})_k$ z limito s, ki je torej njegovo edino stekališče. Ker je množica A kompaktna, mora imeti zaporedje $(a_{n_k})_k$ vsaj eno stekališče v A – torej mora biti $s \in A$. $\square$

Opomba 5.10. Iz zgornjega dokaza sledi, da so vsa stekališča zaporedja s členi v kompaktni množici vsebovana v tej množici, kot velja za zaprte množice. Pomembna razlika med kompaktnostjo in zaprtostjo pa je, da v kompaktni množici vsako zaporedje ima stekališče, v zaprti pa ne nujno.

2. Podmnožice prostora $\mathbb{R}^k$

Za vpeljavo pojma limite in sorodnih pojmov v množici urejenih k-teric

$$\mathbb{R}^k = \{\, x = (x_1, \ldots, x_k) \,|\, x_i \in \mathbb{R} \ \text{ za } \ i = 1, \ldots, k \,\}$$

potrebujemo pojem okolice, tega pa bomo kot v $\mathbb{R}$ vpeljali s pomočjo pojma razdalje. Elemente množice $\mathbb{R}^k$ včasih pišemo kot vektorje, torej $\vec{x}$; tega pravila se večinoma držimo pri linearni algebri, mi pa bomo puščico praviloma izpuščali. V skladu s tem bomo tudi vektor nič, $\vec{0}$, ki je izhodišče prostora $\mathbb{R}^k$, zapisali kar s simbolom 0. Do zmede pri tem praviloma ne more priti, saj je iz konteksta jasno, ali gre za število ali vektor 0.

Spomnimo se, da točke v $\mathbb{R}^k$ (vektorje) seštevamo po komponentah: za $x = (x_1, \ldots, x_k)$ in $y = (y_1, \ldots, y_k)$ je

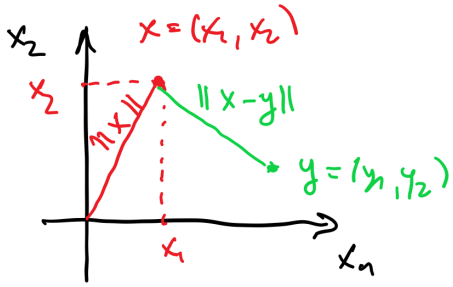
$$x + y = (x_1, \ldots, x_k) + (y_1, \ldots, y_k) = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k).$$

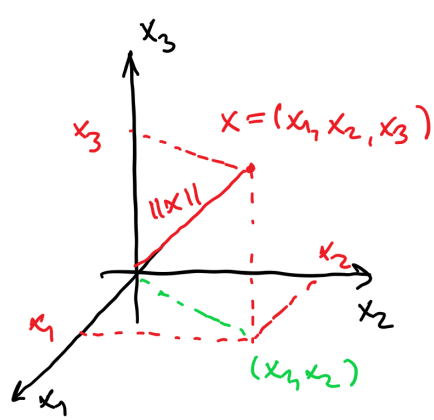
Definicija 5.11. *Oddaljenost* točke $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ od izhodišča 0 je

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}.$$

To število imenujemo tudi *dolžina* vektorja x ali *norma* vektorja x. *Razdalja* med dvema točkama $x, y \in \mathbb{R}^k$ je

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_k - y_k)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2}.$$



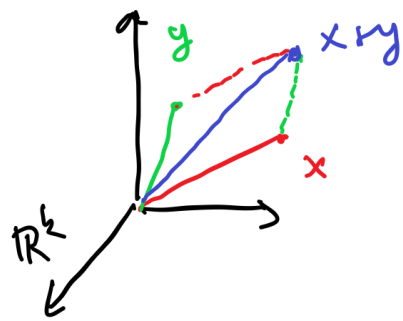


V ravnini $\mathbb{R}^2$ koordinati x_1 in x_2 običajno označimo z x in y. Podobno v prostoru $\mathbb{R}^3$ koordinate x_1, x_2 in x_3 običajno označimo z x, y in z.

TRDITEV 5.12 (trikotniška neenakost). *Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}^k$ veljata naslednji neenakosti:*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$
$$\|x+y\| \geq \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big|$$

Druga neenakost sledi iz prve na enak način kot v primeru absolutne vrednosti. Geometrijska ideja dokaza prve neenakosti: vektorja x in y razpenjata ravnino, v tej ravnini pa x, y ter $x+y$ predstavljajo tri stranice trikotnika. Neenakost sledi iz znanega dejstva v evklidski geometriji, da je v trikotniku vsaka stranica krajša od vsote preostalih dveh. Enakost lahko nastopi le v primeru, ko sta vektorja x in y kolinearna – takrat je trikotnik izrojen v daljico.



DOKAZ. Zapišimo x in y po komponentah: $x = (x_1, \ldots, x_k)$ in $y = (y_1, \ldots, y_k)$. Ker so dolžine nenegativna števila, je trikotniška neenakost ekvivalentna kvadrirani neenakosti:

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2\,.$$

Če v to vstavimo definicijo norme, dobimo ekvivalentno obliko neenakosti:

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2) \leq \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \sum_{i=1}^{k} y_i^2.$$

Tu se kvadrata norm vektorjev x in y odštejeta, torej je trikotniška neenakost ekvivalentna

$$\sum_{i=1}^{k} x_iy_i \leq \|x\|\,\|y\|\,.$$

Pripomnimo, da je vsota na levi skalarni produkt vektorjev x in y. Pokazali bomo, da velja strožja oblika zadnje neenakosti, kjer levo stran nadomestimo z njeno absolutno vrednostjo – dobljeno neenakost imenujemo *Cauchy-Schwarzova neenakost:* $|x \cdot y| \leq \|x\|\,\|y\|$ in je pomemben rezultat sama po sebi. To neenakost

$$\left|\sum_{i=1}^{k} x_iy_i\right| \leq \|x\|\,\|y\|$$

smemo kvadrirati:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_iy_ix_jy_j \leq \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \sum_{j=1}^{k} y_j^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_i^2y_j^2.$$

Spomnimo se, da za poljubni realni števili a, b velja

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2),$$

saj je ta neenakost ekvivalentna pogoju

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,$$

ki očitno velja. Zato je

$$\sum_{i,j=1}^{k} x_iy_ix_jy_j = \sum_{i,j=1}^{k}(x_iy_j)(x_jy_i) \leq \sum_{i,j=1}^{k}\frac{1}{2}\left((x_iy_j)^2 + (x_jy_i)^2\right) = \sum_{i,j=1}^{k} x_i^2y_j^2,$$

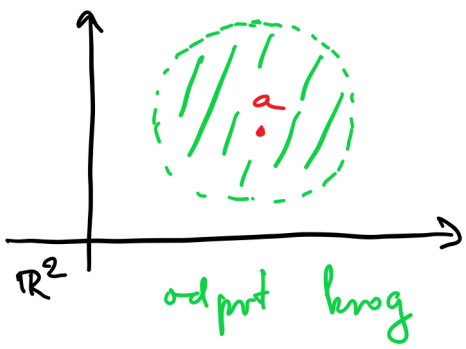
kar smo morali dokazati. $\square$

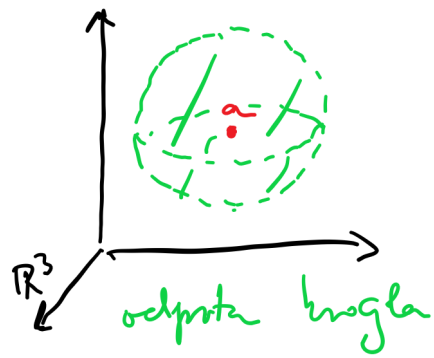
Sedaj lahko pojme okolice, omejene, odprte in zaprte množice v $\mathbb{R}^k$ vpeljemo povsem analogno kot za podmnožice $\mathbb{R}$, le vlogo absolutne vrednosti prevzame norma.

Definicija 5.13. Za poljuben $\varepsilon > 0$ je *ε-okolica* točke $a \in \mathbb{R}^k$ množica vseh točk $x \in \mathbb{R}^k$, ki so od a oddaljene za manj kot ε. To množico označimo s

$$K(a, \varepsilon) = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| < \varepsilon \right\}$$

in jo imenujemo tudi *odprta krogla* s polmerom ε in središčem a.





Definicija 5.14. (a) $A \subset \mathbb{R}^k$ je *omejena*, če je $\{ \|x\| \mid x \in A \}$ omejena, tj. če obstaja tak $M > 0$, da za vsak $x \in A$ velja $\|x\| \leq M$. Ekvivalentno: A je omejena, če je vsebovana v kaki krogli (s središčem v 0).

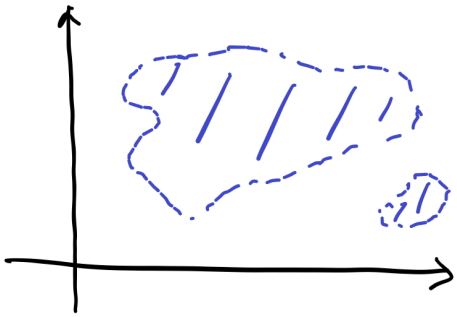
(b) $U \subseteq \mathbb{R}^k$ je *odprta*, če za vsak $x \in U$ obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je $K(x, \varepsilon) \subset A$.

(c) $Z \subseteq \mathbb{R}^k$ je *zaprta*, če je $\mathbb{R}^k \setminus Z$ odprta.

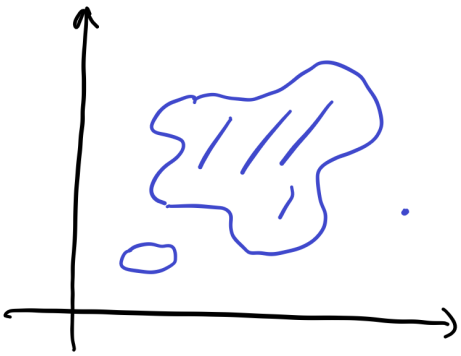
(d) Točka $a \in A \subseteq \mathbb{R}^k$ je *notranja točka* množice A, če je v A vsebovana <u>kakšna</u> ε-okolica točke a.

(e) Točka $x \in \mathbb{R}^k$ je *stekališče* množice $A \subseteq \mathbb{R}^k$, če <u>vsaka</u> ε-okolica točke x seka množico $A \setminus \{ x \}$.

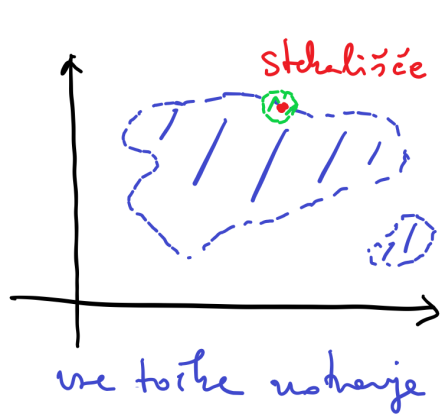
(f) Točka $a \in A \subseteq \mathbb{R}^k$, ki ni stekališče množice A, se imenuje *izolirana točka* množice A.

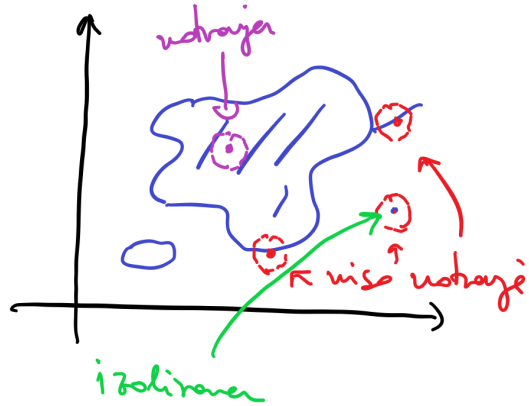


odprta množica



zaprta množica





Definicija 5.15. *Zaporedje* s členi v $\mathbb{R}^k$ je funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$,

$$n \mapsto a_n = \left(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(k)}\right).$$

Definicija 5.16. Točka $a \in \mathbb{R}^k$ je *limita* zaporedja $(a_n)_n$ s členi v $\mathbb{R}^k$, če

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \;\; \text{da} \;\; \forall n \geq n_\varepsilon \;\; \text{velja} \;\; \|a - a_n\| < \varepsilon,$$

tj. $a_n \in K(a, \varepsilon)$; tedaj pišemo $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Če ima zaporedje limito, ga imenujemo *konvergentno*, sicer pa *divergentno*.

Definicija 5.17. Točka $s \in \mathbb{R}^k$ je *stekališče* zaporedja $(a_n)_n$ s členi v $\mathbb{R}^k$, če je v vsaki ε-okolici točke s neskončno členov zaporedja $(a_n)_n$.

Kot v $\mathbb{R}$ tudi v $\mathbb{R}^k$ veljajo naslednje trditve:

- Konvergentno zaporedje je omejeno in ima natanko eno limito, ki je njegovo edino stekališče.
- Omejeno zaporedje ima stekališče.
- Stekališče zaporedja je limita nekega njegovega podzaporedja in obratno.
- $A \subseteq \mathbb{R}^k$ je zaprta natanko tedaj, ko je vsako stekališče zaporedja s členi v A vsebovano v A.

Definicija 5.18. Množica $K \subset \mathbb{R}^k$ je *kompaktna*, če ima vsako zaporedje s členi v K vsaj eno stekališče, ki leži v K.

Izrek 5.19. (a) *Množica $A \subset \mathbb{R}^k$ je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.*
(b) *Če so $K_1, K_2, \ldots, K_k \subset \mathbb{R}$ kompaktne, je tudi njihov produkt $K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_k \subset \mathbb{R}^k$ kompakten.*

Primer 5.20. Zaprt pravokotnik $[a, b] \times [c, d]$ je kompakten.

Ker je zaprt omejen interval kompakten, sta oba faktorja kompaktna, zato je po prejšnjem izreku kompakten tudi pravokotnik. $\diamondsuit$

Primer 5.21. Za $a \in \mathbb{R}^k$ in $r > 0$ je *zaprta krogla* s polmerom r in središčem v a

$$\overline{K}(a, r) := \left\{ x \in \mathbb{R}^k \;\middle|\; \|a - x\| \leq r \right\}$$

kompaktna množica.

Krogla je po definiciji omejena. Lahko je videti, da je zaprta, tj. da ima vsaka točka v komplementu kako okolico, ki je cela vsebovana v komplementu (s pomočjo trikotniške neenakosti). Iz izreka potem sledi, da je kompaktna. $\diamondsuit$

POGLAVJE 6

Limita funkcije

1. Pojem limite

Ideja limite funkcije: opazujemo vrednosti funkcije f v okolici točke a, ki ni nujno v definicijskem območju funkcije. Če so funkcijske vrednosti $f(x)$ zelo blizu nekega števila L za vse $x \in D_f$ dovolj blizu a (razen morda za a), je L limita funkcije f v točki a. Ker zahtevamo, da točke iz D_f pridejo poljubno blizu a, mora biti a stekališče definicijskega območja. Pri tem ne zahtevamo, da je f definirana na celotni okolici točke a, saj niti ni nujno definirana v točki a.

Opomba: to je povsem analogno limiti zaporedja – pri tisti opazujemo obnašanje vrednosti a_n funkcije $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ko so indeksi $n \in \mathbb{N}$ zelo veliki, torej v okolici ∞. Tudi v primeru zaporedja funkcija v »točki«, v kateri iščemo limito (tj. ∞), ni definirana.

Prav tako enak argument kot pri zaporedjih pokaže, da je limita – če obstaja – ena sama.

Definicija 6.1. Naj bo f funkcija k spremenljivk in $a \in \mathbb{R}^k$ stekališče D_f. Število $L \in \mathbb{R}$ je *limita* funkcije f v točki a, če

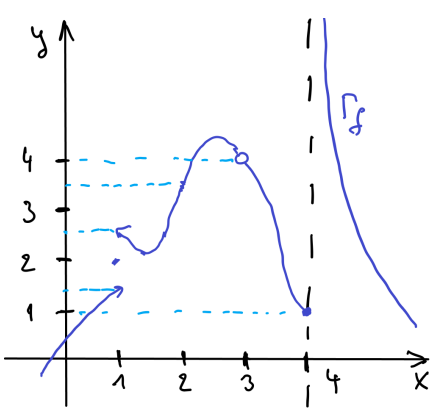
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta_{a,\varepsilon} > 0, \quad \text{da} \;\; \forall x \in D_f, \; x \neq a, \|x - a\| < \delta \;\; \text{velja} \;\; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

To zapišemo s simbolom $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ in preberemo: limita $f(x)$, ko gre x proti a, je L.

Opomba 6.2.
- V primeru funkcije ene spremenljivke normo razumemo kot absolutno vrednost, torej $\|x - a\| = |x - a|$ za $x, a \in \mathbb{R}$.
- Pri funkciji ene spremenljivke lahko posebej opazujemo obnašanje funkcije levo in desno od točke a. Tako dobimo pojma leve in desne limite funkcije v točki a:
  leva limita: $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x)$, kjer $x \nearrow a$ pomeni $x < a$ in $x \to a$, torej je $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = L$, če
  $$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0, \quad \text{da} \;\; \forall x \in D_f, \; x \in (a - \delta, a) \;\; \text{velja} \;\; |f(x) - L| < \varepsilon;$$
  desna limita: $\lim\limits_{x \searrow a} f(x)$, kjer $x \searrow a$ pomeni $x > a$ in $x \to a$.
  Za obstoj enostranske limite v točki a mora biti število a stekališče točk definicijskega območja funkcije z ustrezne strani.

2. Funkcije ene spremenljivke

Primer 6.3. Poišči limite funkcije na spodnjem grafu v točkah 1, 2, 3 in 4.



$\underline{x = 1}$: $f(1) = 2$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ne $\exists$, $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = 1{,}5$, $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = 2{,}5$

$\underline{x = 2}$: $f(2) = 3{,}5$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3{,}5$

$\underline{x = 3}$: $f(3)$ ne $\exists$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$

$\underline{x = 4}$: $f(4) = 1$, $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ ne $\exists$, $\lim\limits_{x \nearrow 4} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \searrow 4} f(x) = \infty$ $\diamondsuit$

Osnovne funkcijske limite računamo zelo podobno kot limite zaporedij, upoštevati moramo le, da se spremenljivka x bliža neki točki a, kar lahko porodi nedoločene izraze v drugih primerih kot pri limitah zaporedij.

Primer 6.4. Poišči $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2-1}$.

Ko se x bliža -1, se števec $x+1$ bliža 0, x^2 pa se bliža 1, zato se imenovalec x^2-1 bliža 0. Limita torej porodi nedoločen izraz $\dfrac{0}{0}$. Vseeno jo lahko izračunamo tako, da preoblikujemo izraz: imenovalec razstavimo $x^2-1=(x-1)(x+1)$ in pokrajšamo skupni faktor $x+1$. To smemo storiti, saj pri računanju limite $x\to -1$ spremenljivka x ni enaka -1, zato ta faktor ni enak 0. Dobimo

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}.$$

$\diamondsuit$

Pri funkcijah ene spremenljivke je smiselno govoriti tudi o limiti v neskončnosti ali negativni neskončnosti; ∞ seveda ni realno število, a smo definirali okolico neskončnosti (ki vsebuje vsa števila od nekega dalje), zato analogno kot limito v točki a vpeljemo limito v neskončnosti (in podobno v negativni neskončnosti): $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, če

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists M > 0, \;\; \text{da} \;\; \forall x \in D_f, \; x > M \;\; \text{velja} \;\; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Seveda je ta definicija smiselna le, če je D_f navzgor neomejeno.

Zapišimo še odnos med limito v točki a in enostranskima limitama v tej točki.

Trditev 6.5. *Naj bo f funkcija ene spremenljivke in $a \in \mathbb{R}$ stekališče točk definicijskega območja D_f z leve in z desne. Potem velja*

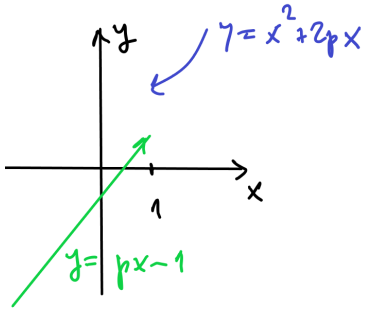
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\nearrow a} f(x) = L \;\; \textit{in} \;\; \lim_{x\searrow a} f(x) = L.$$

Dokaz. Če obstaja dvostranska limita, očitno obstajata tudi enostranski in vrednosti vseh teh limit so enake. Obratno, če obstajata enostranski limiti in sta enaki L, po definiciji enostranskih limit za poljuben $\varepsilon > 0$ obstajata enostranski »okolici« $(a-\beta, a)$ in $(a, a+\gamma)$, na katerih se funkcijske vrednosti od L razlikujejo za manj kot ε. Potem enako velja za vse $x \in D_f$, za katere je $0 < |x-a| < \delta := \min\{\beta, \gamma\}$. $\square$

Primer 6.6. Poišči tak $p \in \mathbb{R}$, da bo imela funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2+2px & ; \; x > 1 \\ px - 1 & ; \; x < 1 \end{cases}$ limito v $x = 1$.

Ker sta funkcijska predpisa levo in desno od $x = 1$ različna, bomo izračunali enostranski limiti. Pogoj za obstoj limite je potem, da sta ti dve limiti enaki.

$\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 1} (px-1) = p-1$
$\lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 1} (x^2+2px) = 1+2p$
Limita obstaja, če velja $p-1 = 1+2p \implies p = -2$. Tedaj je limita enaka -3. $\diamondsuit$

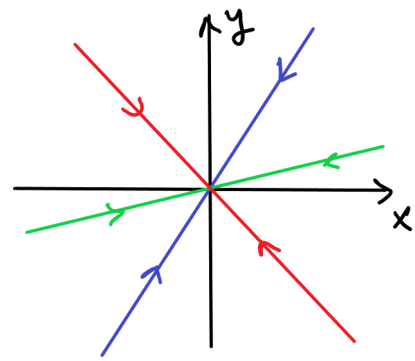


3. Funkcije več spremenljivk

Pri funkcijah več spremenljivk je obnašanje bolj zapleteno, saj obstaja veliko različnih smeri in načinov približevanja točki $a \in \mathbb{R}^k$. V tem primeru zato ni posebnih pojmov enostranskih limit ali česa podobnega. Poleg tega pa moramo biti pri sklepih o obstoju limit veliko bolj pazljivi: če se ob nekem načinu približevanja točki a zdi, da limita obstaja, to še ne pomeni, da res obstaja. Če različni načini približevanja dajo različne vrednosti, lahko sklepamo, da ne obstaja. Za dokaz obstoja pa bi morali preveriti »vse možne načine približevanja«, kar praktično ni mogoče, zato je dokaz po definiciji velikokrat edina možnost.

Primer 6.7. Poišči limito funkcije $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ v točki $(0,0)$.

Opazimo, da f ni definirana v izhodišču (to o limiti ne pove nič), $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Da dobimo idejo o obnašanju vrednosti funkcije f blizu izhodišča, opazujemo vrednosti funkcije na premicah skozi izhodišče (približevanje izhodišču vzdolž takih premic je ena možnost). Oglejmo si najprej vrednosti funkcije vzdolž koordinatnih osi:
os x: $y = 0$, $f(x,0) = 0$, zato je limita vzdolž te osi enaka 0
os y: $x = 0$, $f(0,y) = 0$, zato je limita vzdolž te osi enaka 0
Na osnovi zgornjega vemo, da če limita obstaja, je enaka 0. Ne vemo pa še, ali obstaja. Oglejmo si še vrednosti funkcije vzdolž ostalih premic skozi izhodišče. Take premice so oblike $y = kx$ za $k \in \mathbb{R}$:



$$f(x,kx) = \frac{x \cdot kx}{x^2 + (kx)^2} = \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Ker je vrednost na premici konstantna (neodvisna od x), je tudi limita vzdolž premice s smernim koeficientom k enaka $\dfrac{k}{1+k^2}$. Število, ki se mu funkcijske vrednosti približujejo, je odvisno od premice, vzdolž katere se bližamo izhodišču, zato iskana limita funkcije ne obstaja. ♢

Primer 6.8. Poišči limito funkcije $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ v točki $(0,0)$.

Tudi za to funkcijo velja $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Prav tako so vrednosti vzdolž koordinatnih osi enake 0. Oglejmo si še vrednosti vzdolž premic $y = kx$ za $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$f(x,kx) = \frac{kx^3}{x^4 + k^2x^2} = \frac{kx}{x^2+k^2}.$$

Izračunati želimo limito tega izraza, ko gre x proti 0, saj gre tedaj točka (x,kx) proti $(0,0)$.

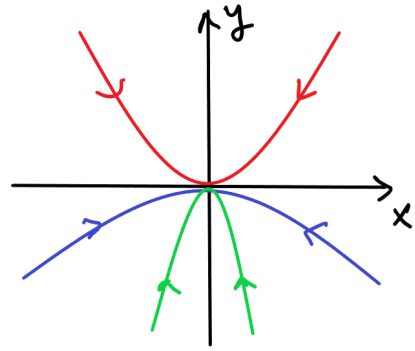
$$\lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0,$$

torej se vrednosti funkcije f vzdolž vseh premic skozi izhodišče bližajo 0, ko se točke po premicah bližajo izhodišču. Ali to že pomeni, da je limita funkcije dveh spremenljivk enaka 0? Ne! Če obstaja, je limita lahko enaka le 0, a ni nujno, da obstaja. Če smo prepričani, da je limita enaka 0, moramo to preveriti po definiciji limite, če nismo, pa lahko poskusimo še kak drug način približevanja izhodišču.

V primeru te funkcije je smiselno opazovati vrednosti vzdolž parabol s temenom v izhodišču, torej vrednosti na parabolah $y = kx^2$ za $k \in \mathbb{R}$:

$$f(x, kx^2) = \frac{x^2 \cdot kx^2}{x^4 + k^2x^4} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Ponovno je vrednost odvisna od načina približevanja, zato funkcija nima limite v izhodišču. $\diamondsuit$



Primer 6.9. Poišči limito funkcije $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$ v točki $(0, 0)$.

Kot v prejšnjih primerih z opazovanjem vrednosti vzdolž premic skozi izhodišče vidimo, da je kandidat za limito število 0. Tudi pri drugih načinih približevanja izhodišču (npr. vzdolž drugih krivulj) se vrednosti funkcije približujejo 0. Opazimo tudi, da bo za poljubna majhna x in y števec mnogo manjši od imenovalca, saj je v števcu produkt dveh majhnih števil, v imenovalcu pa vsota. Zato upravičeno domnevamo, da je v tem primeru limita funkcije enaka 0. Preverimo to po definiciji limite. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Iščemo tak $\delta > 0$, da bo za vsako točko $(x, y) \neq (0, 0)$, za katero velja

$$\|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta,$$

veljalo $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$. Ocenimo:

$$|f(x, y) - 0| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}\right| = \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{\leq 1} y^2 \leq y^2.$$

Dovolj je torej, da je desna stran v zgornji neenakosti manjša od ε. Ker pa je

$$y^2 \leq x^2 + y^2,$$

lahko izberemo $\delta^2 = \varepsilon$ oziroma $\delta := \sqrt{\varepsilon}$. Tedaj za točke (x, y) z $\|(x, y)\| < \delta$ res velja

$$|f(x, y) - 0| \leq y^2 \leq x^2 + y^2 < \delta^2 = \varepsilon.$$

Tako smo potrdili, da je 0 res limita funkcije v izhodišču. $\diamondsuit$

4. Operacije s funkcijami

Podobno kot operacije s števil prenesemo na zaporedja, jih lahko prenesemo tudi na funkcije. Za funkciji k spremenljivk f in g želimo torej definirati njuno vsoto, razliko, produkt in kvocient. Ker pri tem operacije izvedemo pri vsaki vrednosti neodvisne spremenljivke x na številih $f(x)$ in $g(x)$, rečemo, da so operacije definirane *po točkah*. Upoštevati moramo še, da se ob izvedbi operacij lahko spremeni definicijsko območje. Ker morata biti za izvedbo operacije definirani obe funkciji, je definicijsko območje tako dobljene funkcije podmnožica preseka $D_f \cap D_g$; smiselno je privzeti, da je ta presek neprazen.

- *Vsota* funkcij f in g je funkcija $f+g$ s predpisom $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ in definicijskim območjem $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
- *Razlika* funkcij f in g je funkcija $f - g$ s predpisom $(f - g)(x) := f(x) - g(x)$ in definicijskim območjem $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
- *Produkt* funkcij f in g je funkcija $f \cdot g$ s predpisom $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ in definicijskim območjem $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$.

- *Kvocient* funkcij f in g je funkcija $\frac{f}{g}$ s predpisom $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ in definicijskim območjem $D_{f/g} = \{\, x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0 \,\}$.

Izrek 6.10 (računanje z limitami). *Naj bosta f in g funkciji k spremenljivk in $a \in \mathbb{R}^k$ stekališče množice $D_f \cap D_g$. Če obstajata limiti $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ in $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, potem obstajajo tudi limite vsote, razlike in produkta teh funkcij v točki a in veljajo naslednje identitete:*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a}(f-g)(x) = \lim_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Če je še $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ in je a stekališče množice $D_{f/g}$, ima tudi $\frac{f}{g}$ limito v a ter velja

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g}(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Opomba 6.11.
- Dokaz zgornjega izreka poteka analogno kot dokaz pravil za računanje z limitami zaporedij.
- Tudi pri tem izreku se moramo zavedati, da formule veljajo le, če obstajata predpostavljeni limiti funkcij f in g.
- Pri funkcijah ene spremenljivke zgornji izrek velja tudi za enostranske limite in za limite v neskončnosti.

POGLAVJE 7

Zvezne funkcije

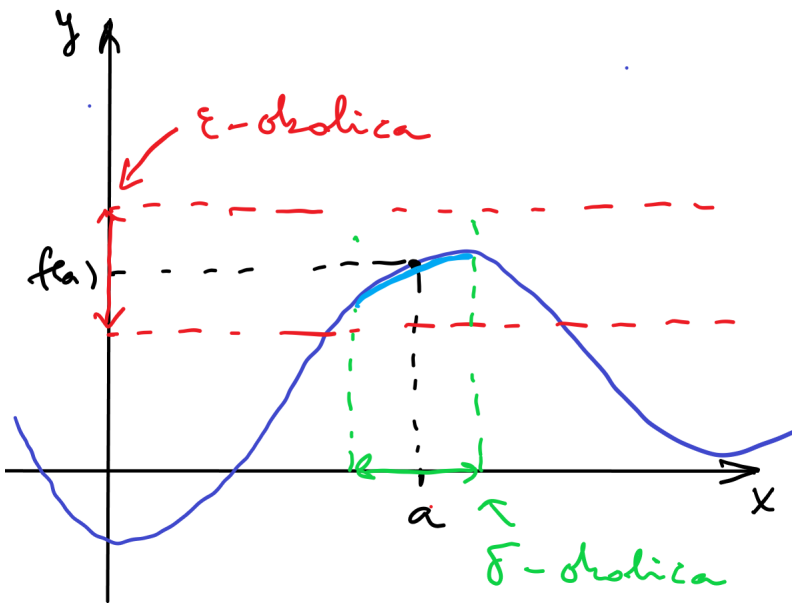
1. Pojem zveznosti

Ideja zveznosti: funkcija f je zvezna v točki a, če je njen graf nepretrgan v a, torej so za točke x zelo blizu a funkcijske vrednosti $f(x)$ zelo blizu $f(a)$. To je podobno pojmu limite, le da tokrat zahtevamo, da je funkcija definirana v točki a, funkcijske vrednosti pa se bližajo $f(a)$.

Definicija 7.1. Naj bo f funkcija k spremenljivk in $a \in D_f$. Funkcija f je *zvezna v točki* a, če

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0, \;\; \text{da} \;\; \forall x \in D_f, \; \|x - a\| < \delta \;\; \text{velja} \;\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Funkcija f je *zvezna*, če je zvezna v vsaki točki iz D_f. Bolj splošno, za $A \subseteq D_f$ je $f\colon A \to \mathbb{R}$ zvezna, če je zvezna v vsaki točki iz A – rečemo tudi, da je f zvezna na A.



Opomba 7.2.
- Kot v definiciji limite je tudi tu velikost okolice točke a odvisna tako od točke a kot od predpisane velikosti ε okolice slike $f(a)$, torej $\delta = \delta_{a,\varepsilon}$.
- Če je a stekališče množice D_f, je pogoj zveznosti v a ekvivalenten $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$: zveznost torej pomeni, da obe ti števili obstajata in sta enaki. Na to lahko pogledamo še drugače: limito zvezne funkcije v neki točki lahko izračunamo tako, da izračunamo vrednost funkcije v tej točki.
- Če je a izolirana točka množice D_f, je f v a avtomatično zvezna, saj pogoj zveznosti tedaj preverjamo le v točki a; točka a ima namreč okolico, ki seka D_f le v točki a.
- Pogosto je spremenljivko x ugodno nadomestiti s *spremembo* h, kjer je $x = a + h$. Opazujemo torej vrednosti $f(a + h)$ za majhne h. Pogoj zveznosti se tedaj glasi

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0, \;\; \text{da} \;\; \forall h, \; \|h\| < \delta, \; a + h \in D_f, \quad \text{velja} \;\; |f(a + h) - f(a)| < \varepsilon.$$

Izrek 7.3 (operacije z zveznimi funkcijami). *Če sta f in g funkciji k spremenljivk, ki sta zvezni v točki $a \in \mathbb{R}^k$, potem so tudi vsota, razlika in produkt teh funkcij zvezne v a. Če je še $g(a) \neq 0$, je tudi kvocient f/g zvezen v a.*

Dokaz. Obravnavati je potrebno le primer, ko je a stekališče definicijskega območja, tedaj pa je zveznost opisana z limito, zato rezultat sledi iz lastnosti limit.

Zveznost f in g v taki točki a pomeni, da je $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ in $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$. Preverimo npr. zveznost vsote in razlike:

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a),$$

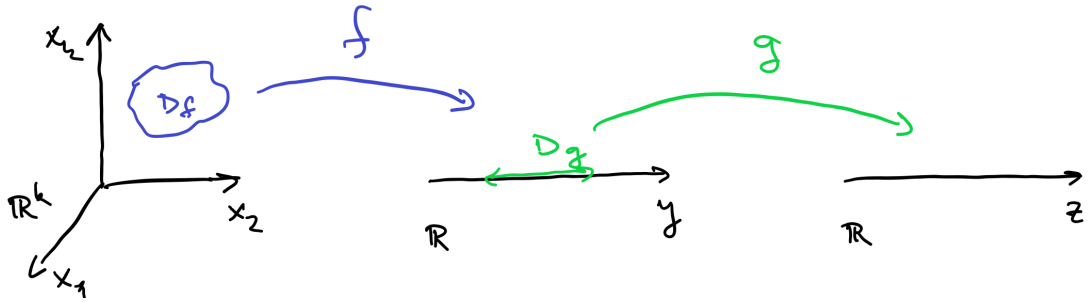
kjer smo pri prvem enačaju upoštevali pravilo za računanje z limitami, pri drugem pa zveznost f in g v točki a. □

Pomemben način tvorbe novih funkcij je poleg zgornjih operacij tudi komponiranje funkcij. Spomnimo se, da je kompozitum $g \circ f$ funkcij f in g določen s pravilom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

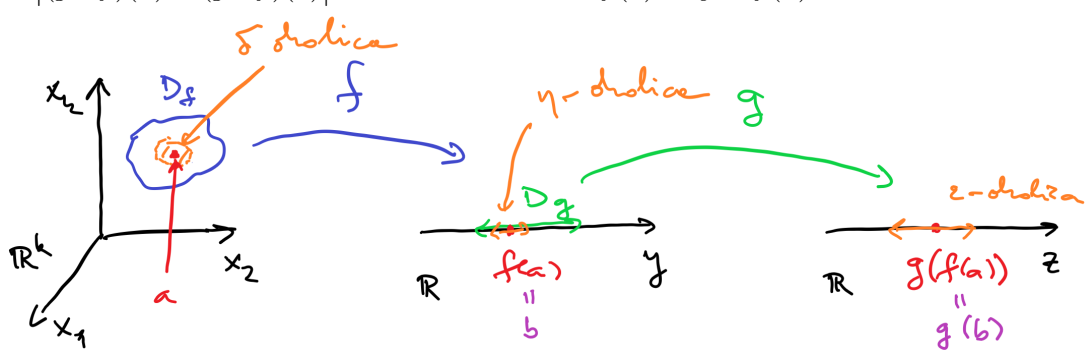
To je seveda smiselno le tedaj, ko vrednosti funkcije f pripadajo definicijskemu območju funkcije g. Bolj splošno lahko tvorimo sestavljene funkcije tudi iz funkcij več spremenljivk.

Definicija 7.4. Naj bo f funkcija k spremenljivk in g funkcija ene spremenljivke. *Kompozitum* ali *sestavljena funkcija* $g \circ f$ funkcij f in g je funkcija k spremenljivk, določena s pravilom $(g \circ f)(x) := g(f(x))$. Njeno definicijsko območje je $D_{g\circ f} = \{\, x \in D_f \mid f(x) \in D_g \,\} \subseteq \mathbb{R}^k$.



Izrek 7.5 (zveznost kompozituma). *Naj bo f funkcija k spremenljivk, zvezna v $a \in \mathbb{R}^k$, in g funkcija ene spremenljivke, zvezna v $f(a) \in \mathbb{R}$. Potem je kompozitum $g \circ f$ zvezen v a. Torej: kompozitum zveznih funkcij je zvezen.*

Dokaz. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Iščemo tak $\delta > 0$, da bo za vsak $x \in D_{g\circ f}$, $\|x - a\| < \delta$ veljalo $\big|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)\big| < \varepsilon$. Označimo $b := f(a)$ in $y = f(x)$.

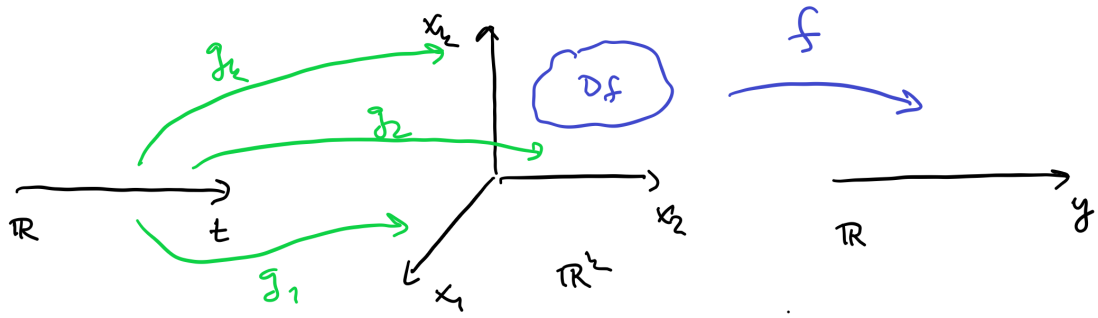


Najprej uporabimo zveznost funkcije g v točki $b = f(a)$: za izbrani $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\eta > 0$, da za vsak $y \in D_g$, $|y - b| < \eta$ velja $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$.

Ob upoštevanju $b = f(a)$ in $y = f(x)$ je zadnja neenakost tista, ki jo želimo zagotoviti. Da bo veljala, pa mora biti $|f(x) - f(a)| < \eta$. Upoštevamo še zveznost funkcije f v točki a: za zgoraj dobljeni η obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in D_f$, $\|x - a\| < \delta$ velja $|f(x) - f(a)| < \eta$. Našli smo torej ustrezni δ, saj za $\|x - a\| < \delta$ velja $\big|g(f(x)) - g(f(a))\big| < \varepsilon$. $\square$

S pomočjo funkcije k spremenljivk lahko tvorimo kompozitum tudi tako, da v funkcijo na mesto posamezne koordinate vstavimo funkcijo ene spremenljivke. Naj bo f funkcija k spremenljivk in $g_1, g_2, \ldots, g_k$ funkcije ene spremenljivke. Potem je kompozitum $t \mapsto f\big(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_k(t)\big)$ funkcija ene spremenljivke, definirana za vse tiste

$$t \in \bigcap_{i=1}^{k} D_{g_i}\,, \quad \text{za katere je} \quad \big(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_k(t)\big) \in D_f.$$



Podobno kot za prejšnji kompozitum sledi: če so vse funkcije g_i zvezne v neki točki $t \in \mathbb{R}$ in je f zvezna v točki $\big(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_k(t)\big)$, potem je tudi kompozitum zvezen v točki t. Bolj splošno so lahko funkcije g_i funkcije m spremenljivk in tedaj je tudi kompozitum funkcija m spremenljivk, ki je zvezna, če so f in vse funkcije g_i zvezne.

2. Elementarne funkcije

Osnovni primeri zveznih funkcij so elementarne funkcije, katerih gradniki so vsem dobro znane funkcije, ki jih lahko zapišemo s predpisom, podanim z enim simbolom ali eno formulo, npr. $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin x$ ali $f(x) = e^x$. Prav tako med elementarne funkcije štejemo inverzne funkcije teh osnovnih funkcij. Bolj komplicirane primere elementarnih funkcij dobimo iz osnovnih z uporabo algebraičnih operacij ter s komponiranjem. Videli bomo, da so vse elementarne funkcije zvezne povsod, kjer so definirane.

(1) Konstantne funkcije: za poljuben $c \in \mathbb{R}$ je funkcija $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ za vsak $x \in \mathbb{R}^k$, zvezna na $\mathbb{R}^k$. Za poljuben $a \in \mathbb{R}^k$ namreč velja $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ za vsak $\varepsilon > 0$ in vsak $x \in \mathbb{R}^k$.

(2) Identiteta $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}(x) = x$, je zvezna na $\mathbb{R}$: $|\,\mathrm{id}(x) - \mathrm{id}(a)| = |x - a|$, zato lahko v definiciji zveznosti izberemo $\delta := \varepsilon$.

Bolj splošno, projekcije na koordinatne osi so zvezne. Za poljuben $j = 1, \ldots, k$ naj bo $p_j\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ projekcija na j-to koordinato, $p_j(x_1, x_2, \ldots, x_k) := x_j$. Ker velja

$$|p_j(x) - p_j(a)| = |x_j - a_j| = \sqrt{(x_j - a_j)^2} \le \|x - a\|\,,$$

lahko v definiciji zveznosti vzamemo $\delta := \varepsilon$.

(3) Potenčne funkcije: ker je za poljubno naravno število n funkcija $f(x) = x^n$ n-kratni produkt identitete same s sabo, je zvezna, saj je identiteta zvezna in je produkt zveznih funkcij zvezen. Za lihe n je funkcija f injektivna na $\mathbb{R}$ in njeno inverzno funkcijo imenujemo n-ti koren, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. Podobno je za sode n funkcija f injektivna na $[0, \infty)$. Če jo torej gledamo kot funkcijo $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, ima inverz, ki ga prav tako imenujemo n-ti koren, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

Kot bomo videli, je inverz zvezne funkcije, katere definicijsko območje je interval, tudi zvezna funkcija, zato sta zgornji korenski funkciji zvezni, kjer sta definirani. Od tod pa sledi tudi

zveznost vseh pozitivnih racionalnih potenc: $f(x) = x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m$ $(m, n \in \mathbb{N})$, saj je to kompozitum zveznih funkcij. Za lihe n je ta potenca definirana na $\mathbb{R}$, za sode n pa le na $[0, \infty)$.

Negativne potence vpeljemo s pomočjo obratne vrednosti: $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, ki je zvezna povsod razen pri $x = 0$, kjer ni definirana (saj je kvocient zveznih funkcij). Potem je za $m, n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = x^{-m/n} = \left(x^{m/n}\right)^{-1} = \frac{1}{x^{m/n}}$$

tudi zvezna povsod, kjer je definirana.

Kako pa je definirana splošna potenca $f(x) = x^r$ za iracionalno število r? Kaj sploh pomeni $x^{\sqrt{2}}$, x^{π} ali x^e?

Za r po definiciji realnih števil lahko izberemo naraščajoče zaporedje racionalnih števil $(a_n)_n$ z limito r. Potem definiramo $x^r := \lim\limits_{n\to\infty} x^{a_n}$. Potrebno je preveriti, da ta limita obstaja in je neodvisna od izbire zaporedja $(a_n)_n$.

Obstoj sledi iz monotonosti zaporedja potenc $\left(x^{a_n}\right)_n$, kjer pa je potrebno ločiti primere: če je npr. $x > 1$ in $r > 0$, je zaporedje $\left(x^{a_n}\right)_n$ (za dovolj velike n) naraščajoče. Prav tako je navzgor omejeno, saj za $r \in \mathbb{R}$ obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $r < k$ in zato tudi $a_n < k$, posledično pa je $x^{a_n} < x^k$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Podobno obravnavamo ostale možnosti. Tudi pri dokazu neodvisnosti od izbire zaporedja si pomagamo z monotonostjo zaporedij.

Za tako definirane potence veljajo vse običajne lastnosti:

$$x^{a+b} = x^a x^b \quad \text{in} \quad \left(x^a\right)^b = x^{ab}.$$

Zveznost potenc z iracionalnim eksponentom na njihovem definicijskem območju bomo dokazali kasneje.

Bolj splošno lahko definiramo potenčne funkcije več spremenljivk: za $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$ je $f(x_1, \ldots, x_k) := x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k}$ funkcija k spremenljivk, ki je (vsaj za $x_i > 0$) zvezna, saj je produkt potenc projekcij na koordinate. Takšno funkcijo imenujemo *monom*.

(4) Polinomi in racionalne funkcije: polinomi v eni spremenljivki so (končne) linearne kombinacije potenc neodvisne spremenljivke, v katerih je eksponent naravno število ali 0, torej element $\mathbb{N}_0$. Splošen polinom stopnje n je torej določen s koeficienti $c_i \in \mathbb{R}$ za $i = 0, 1, \ldots, n$:

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0,$$

kjer c_n $(\neq 0)$ imenujemo *vodilni koeficient*, c_0 pa *prosti člen*. Primeri polinomov:

$$f(x) = x^{11} - \sqrt{3}x^4 + 21x - 42, \quad g(x) = \prod_{i=1}^{10} (x - 2i).$$

Ker je polinom vsota zveznih funkcij, je zvezna funkcija.

Bolj splošno je polinom v k spremenljivkah končna vsota monomov, v katerih so vsi eksponenti naravna števila ali 0, torej

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0} c_{n_1, \ldots, n_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}.$$

Primer polinoma v dveh spremenljivkah:

$$f(x, y) = 5x^2y^3 - 2xy^4 + \pi y^2 - \pi.$$

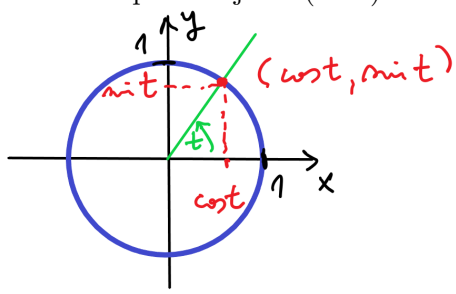
Tudi polinomi v več spremenljivkah so zvezni povsod.

Racionalna funkcija je kvocient dveh polinomov, zato je zvezna povsod, kjer je definirana. Primeri racionalnih funkcij:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 1}{x^2 + 2x + 3}, \quad f(x, y) = \frac{x^2y - 5}{x^3 - 4xy^2}.$$

Pozor: ni vsaka funkcija, zapisana kot ulomek, racionalna, npr. $f(x) = \dfrac{1+\sin x}{x+1}$ ni racionalna, saj sin ni polinom (ker ima neskončno ničel).

(5) Kotne ali trigonometrične funkcije: osnovna definicija teh funkcij je v pravokotnem trikotniku za kote na intervalu $(0, \pi/2)$, potem pa definicijo razširimo na poljubno realno vrednost neodvisne spremenljivke (kota). Pri tem si pomagamo z enotsko krožnico.

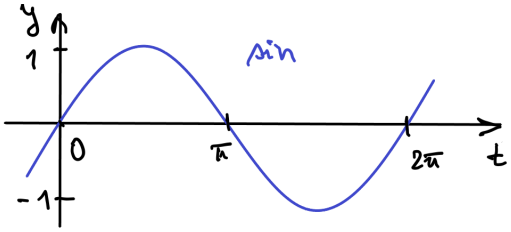


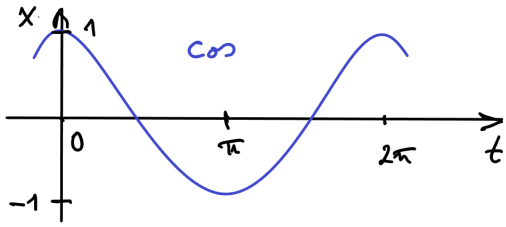
Presečišče krožnice in poltraka iz izhodišča, ki s pozitivnim poltrakom osi x oklepa kot t (merjen v pozitivni smeri, tj. nasprotni od smeri urinih kazalcev), je točka

$$(\cos t, \sin t).$$

Torej je vrednost funkcije $\sin t$ dobljena kot y koordinata te točke, ko točka s spreminjanjem kota t potuje po krožnici. Vrednost $\cos t$ pa je enaka x koordinati te točke.

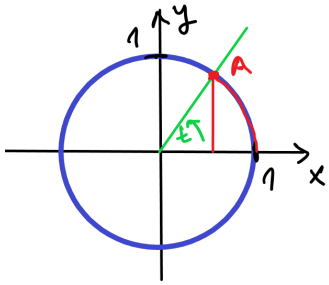
Če sledimo gibanju točke po krožnici, lahko v grobem skiciramo grafa teh funkcij. Funkciji sta periodični s periodo 2π – dovolj je torej poznati njuna grafa na intervalu $[0, 2\pi]$. Opazimo tudi, da je funkcija sin pozitivna za poltrake v prvem in drugem kvadrantu, torej za kote v $(0, \pi)$, funkcija cos pa za poltrake v prvem in četrtem kvadrantu, torej za kote v $(0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$.





Za merjenje kotov lahko izberemo poljubne enote (stopinje, radiane, grade ...), a to vpliva na graf funkcije, saj se s spreminjanjem enot razteguje oziroma krči graf v smeri osi x. V primeru radianov je dolžina periode $2\pi \doteq 6{,}3$, pri stopinjah pa znaša $360°$. V slednjem primeru je torej graf veliko bolj raztegnjen vzdolž osi x, če uporabimo enako merilo kot pri grafu, kjer kote merimo v radianih.

Preverimo, da je funkcija sin zvezna. Za to bomo najprej izpeljali naslednjo oceno, ki je veljavna, če kote merimo v radianih. Spomnimo se, da je dolžina krožnega loka sorazmerna s središčnim kotom, ki mu pripada. Velikost kota v radianih je enaka dolžini loka na krožnici s polmerom 1, ki pripada temu kotu.



Naj bo kot $t \in (0, \pi/2)$. Koordinati točke A sta $(\cos t, \sin t)$. Oddaljenost točke A od osi x je zato enaka $\sin t$. Dolžina krožnega loka od A do točke $(1, 0)$ je enaka t in je večja od oddaljenosti točke A od osi x:

$$\sin t \leq t.$$

Ta neenakost velja tudi pri $t = 0$.

Ker sta funkciji sin in id lihi, za vse $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ velja

$$|\sin t| \leq |t|.$$

Izberimo sedaj poljubno število $a \in \mathbb{R}$ in naj bo $t = a + h$ bližnja točka. Pokazati želimo, da gre razlika $\sin t - \sin a$ proti 0, ko gre t proti a. Da bomo to razliko lahko ocenili, pa moramo izraz najprej preoblikovati. Pomagali si bomo s fomulo za razliko dveh sinusov, ki jo lahko izpeljemo iz adicijskega izreka za sinus:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Če ti identiteti odštejemo, dobimo

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta.$$

Vstavimo $u=\alpha+\beta$ in $v=\alpha-\beta$, torej $\alpha=\dfrac{u+v}{2}$ in $\beta=\dfrac{u-v}{2}$, zato je

$$\sin u-\sin v=2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}.$$

Ocenimo:

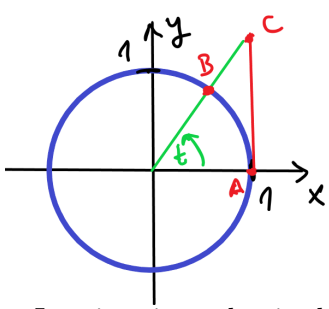
$$|\sin t-\sin a|=|\sin(a+h)-\sin a|=\left|2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{h}{2}\right|\le 2\left|\frac{h}{2}\right|=|h|.$$

Da bo leva stran v zadnji neenakosti manjša od ε, je dovolj zahtevati $|h|<\varepsilon$, torej v definiciji zveznosti v točki a lahko izberemo $\delta:=\varepsilon$.

Ker je funkcija kosinus le premik funkcije sinus, $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, torej kompozitum dveh zveznih funkcij, je tudi zvezna. Iz lastnosti operacij med zveznimi funkcijami sedaj sledi, da je funkcija tangens, definirana s predpisom $\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, zvezna za vse x, za katere je $\cos x\neq 0$. Vse trigonometrične funkcije so torej zvezne povsod, kjer so definirane.

Izračunajmo še eno pomembno limito, ki je osnova za izračun mnogih limit, posebej tudi za izračun odvoda funkcije sinus.

Zanima nas $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$. Ker je funkcija $\dfrac{\sin x}{x}$ soda, je dovolj izračunati desno limito. Iz neenakosti $\sin x\le x$ za $x\in(0,\pi/2)$, ki smo jo izpeljali pri obravnavi zveznosti funkcije sinus, sledi $\dfrac{\sin x}{x}\le 1$ za te x. Za izračun vrednosti limite bomo funkcijo ocenili še navzdol s funkcijo, ki ima v 0 limito 1, od koder po principu sendviča sledi, da je iskana limita enaka 1.



Tokrat si bomo pomagali z dejstvom, da je ploščina krožnega izseka $0AB$ manjša od ploščine trikotnika $0AC$. Točka C ima koordinati $(1,\operatorname{tg}t)$, zato je ploščina trikotnika enaka $\dfrac{\operatorname{tg}t}{2}$.

Ploščina krožnega izseka pa je proporcionalna središčnemu kotu; pri središčnem kotu 2π je ob radiju 1 enaka π, zato je pri središčnem kotu t enaka $\dfrac{t}{2\pi}\pi=\dfrac{t}{2}$.

Iz primerjave ploščin dobimo

$$\frac{t}{2}\le\frac{\operatorname{tg}t}{2}\Longrightarrow\cos t\le\frac{\sin t}{t},$$

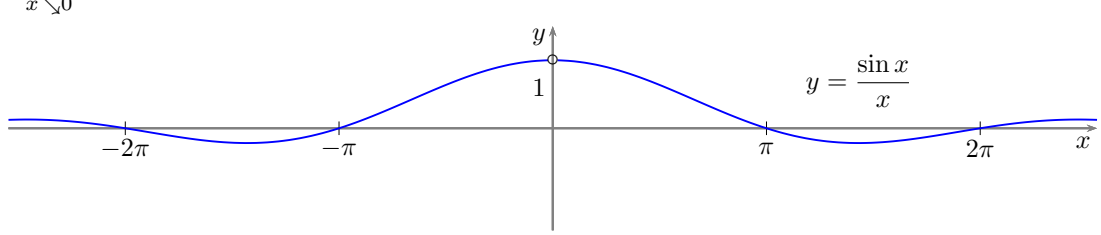
skupaj s prejšnjo neenakostjo pa

$$\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le 1\quad\text{za}\quad x\in(0,\pi/2),$$

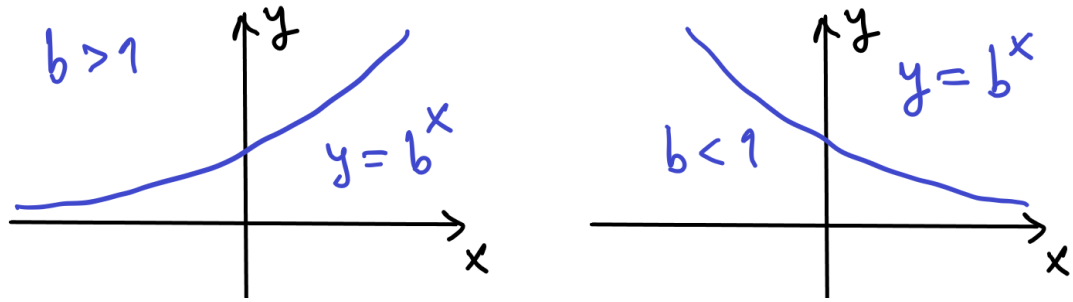
od koder sledi

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{\sin x}{x}=1\quad\text{in zato}\quad\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

saj je $\lim\limits_{x\searrow 0}\cos x=\cos 0=1$ ob upoštevanju zveznosti kosinusa.



(6) Eksponentne funkcije: Eksponentna funkcija z osnovo $b > 0$ je funkcija $f(x) = b^x$. Pri $b = 1$ je to konstantna funkcija $f(x) = 1$, za $b > 1$ je strogo naraščajoča in za $b < 1$ strogo padajoča.



Preverimo, da je za $b > 1$ funkcija res naraščajoča. Za poljubna $x < y$ velja

$$\frac{f(y)}{f(x)} = \frac{b^y}{b^x} = b^{y-x} > 1,$$

saj je $y - x > 0$ in je osnova $b > 1$. Od tod preprosto sledi tudi, da je za $b < 1$ funkcija padajoča.

Dokažimo zveznost v poljubni točki $a \in \mathbb{R}$. Privzemimo najprej, da je $b > 1$. Za $x = a + h$ izračunajmo

$$f(x) - f(a) = b^x - b^a = b^a \left(b^h - 1\right).$$

Če želimo, da bo za majhne h (tj. za x blizu a) zadnji izraz majhen, mora biti majhno število znotraj oklepaja, saj je b^a neko fiksno število (neodvisno od h). Ta pogoj pa ustreza zveznosti funkcije $f(x) = b^x$ v točki 0, saj je $f(0) = b^0 = 1$.

Pri dokazu zveznosti v 0 si bomo pomagali z zaporedjem $\left(\sqrt[n]{b}\right)_n$, za katerega vemo, da je konvergentno z limito $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$. Torej za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_\varepsilon$ velja

$$\left|\sqrt[n]{b} - 1\right| < \varepsilon.$$

Potem za vsak $x \in [0, 1/n_\varepsilon)$ zaradi naraščanja funkcije $f(x) = b^x$ velja

$$1 = b^0 \leq b^x \leq b^{1/n_\varepsilon} = \sqrt[n_\varepsilon]{b}$$

in zato

$$0 \leq b^x - 1 \leq \sqrt[n_\varepsilon]{b} - 1 < \varepsilon.$$

Tako smo dokazali, da je $\lim\limits_{x\searrow 0} b^x = 1$. Ker je $b^0 = 1$, to pomeni, da je funkcija $f(x) = b^x$ zvezna z desne v 0. Limito (oziroma zveznost) z leve preprosto dobimo z uporabo lastnosti eksponentne funkcije in lastnosti limit:

$$\lim_{x\nearrow 0} b^x \underbrace{=}_{t=-x} \lim_{t\searrow 0} b^{-t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{b^t} = \frac{1}{\lim\limits_{t\searrow 0} b^t} = 1.$$

Vrnimo se k zveznosti v splošni točki a. Dokazati želimo, da je

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \iff \lim_{x\to a} \big(f(x) - f(a)\big) = 0.$$

Izračunajmo:

$$\lim_{x\to a} \big(f(x) - f(a)\big) \underbrace{=}_{x=a+h} \lim_{h\to 0} \big(f(a+h) - f(a)\big) = \lim_{h\to 0} b^a \left(b^h - 1\right) = 0.$$

Obravnavajmo še zveznost eksponentne funkcije z osnovo $b \in (0,1)$. Tedaj je $b = \dfrac{1}{c}$ za neki $c > 1$, zato je $b^x = \left(\dfrac{1}{c}\right)^x = \dfrac{1}{c^x}$. Ker je $x \mapsto c^x$ povsod od nič različna zvezna funkcija, je taka tudi njena obratna vrednost.

3. Zveznost inverzne funkcije

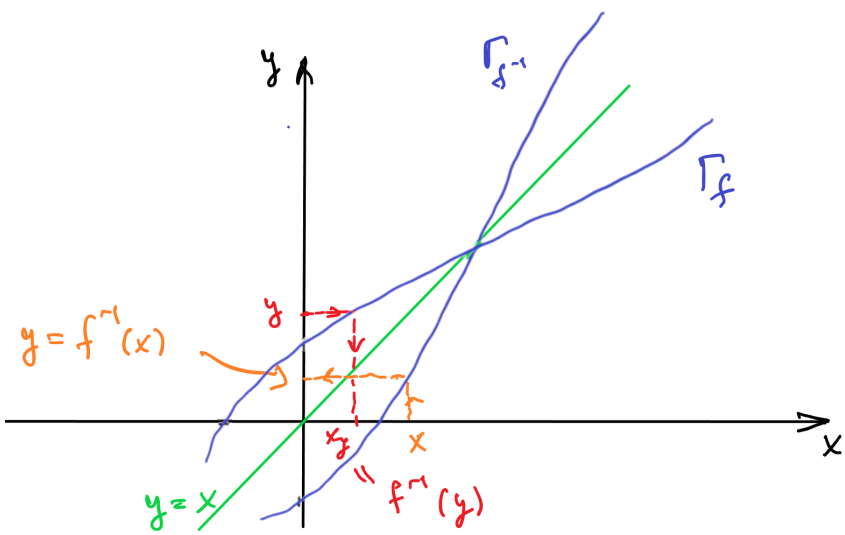
Naj bo f funkcija ene spremenljivke, ki je injektivna. Potem je f kot funkcija iz svojega definicijskega območja v svojo zalogo vrednosti bijektivna. Torej ima $f\colon D_f \to Z_f$ inverzno funkcijo, določeno z naslednjim pravilom:

$$\forall y \in Z_f \quad \exists!\, x_y \in D_f, \quad \text{da velja} \quad f(x_y) = y; \quad \text{označimo} \quad f^{-1}(y) := x_y.$$

Definicijsko območje inverzne funkcije je torej $D_{f^{-1}} = Z_f$, njena zaloga vrednosti pa $Z_{f^{-1}} = D_f$. Vloga spremenljivk x in y kot neodvisne in odvisne spremenljivke je torej pri f^{-1} ravno obratna kot pri f. Za $x \in D_f$ in $y \in Z_f$ velja:

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Graf inverzne funkcije je torej dan z isto krivuljo kot graf funkcije, le da je neodvisna spremenljivka y, odvisna pa x. Če želimo tudi graf inverzne funkcije predstaviti na običajen način, torej da je neodvisna spremenljivka x in odvisna spremenljivka y, to naredimo tako, da graf funkcije prezrcalimo preko premice $y = x$.



Grafično je nazorno, da nepretrgan graf za f porodi nepretrgan graf za f^{-1}. Dokažimo, da to res velja, če je definicijsko območje funkcije interval.

Izrek 7.6 (zveznost inverza). *Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ interval in $f\colon J \to \mathbb{R}$ zvezna in injektivna. Potem je tudi inverzna funkcija f^{-1} zvezna.*

Dokaz. Privzemimo najprej, da je $J \subset \mathbb{R}$ kompakten interval in označimo zalogo vrednosti funkcije f na J s $f(J)$. Dokazujemo s protislovjem: denimo, da $f^{-1}\colon f(J) \to J$ ni zvezna v točki b. Potem obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak $\delta > 0$ velja: obstaja

$$y \in f(J) \quad \text{z} \quad |y - b| < \delta \quad \text{in} \quad \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\right| \geq \varepsilon.$$

Označimo $x := f^{-1}(y)$ ter $a := f^{-1}(b)$, torej je $y = f(x)$ in $b = f(a)$. S temi oznakami lahko zgornji pogoj zapišemo drugače: obstaja $\varepsilon > 0$, da za vsak $\delta > 0$ obstaja

$$x \in J, \quad \text{za katerega velja} \quad |f(x) - f(a)| < \delta \quad \text{in} \quad |x - a| \geq \varepsilon.$$

Ker to velja za vsak $\delta > 0$, lahko za poljuben $n \in \mathbb{N}$ izberemo $\delta := \dfrac{1}{n}$. Potem za ta δ obstaja $x_n \in J$ z $|x_n - a| \geq \varepsilon$ in $|f(x_n) - f(a)| < \dfrac{1}{n}$. Za zaporedje $(x_n)_n$ je torej $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Zaradi kompaktnosti J ima zaporedje $(x_n)_n$ stekališče $c \in J$ in konvergentno podzaporedje $(x_{n_k})_k$ z limito c. V naslednjem poglavju bomo dokazali, da v tem primeru zaradi zveznosti f zaporedje $\big(f(x_{n_k})\big)_k$ konvergira proti $f(c)$ (izrek 8.1), tj. da lahko zamenjamo zvezno funkcijo in limito:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \underbrace{=}_{f \text{ zvezna}} f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = f(c).$$

Zgoraj pa smo videli, da zaporedje $\big(f(x_{n_k})\big)_k$ konvergira proti $f(a)$. Ker je f injektivna, iz $f(a) = f(c)$ sledi $a = c$. Neenakost $|x_{n_k} - a| \geq \varepsilon$, ki velja za vse k, pa ima za posledico, da tudi za limito c velja $|c - a| \geq \varepsilon$, torej je $c \neq a$. To pa je protislovje.

Naj bo sedaj J poljuben interval. Pomagali si bomo z izrekom 8.9, ki pove, da je slika intervala pri zvezni funkciji interval. To pomeni, da je $f(J)$ interval. Pokažimo najprej, da je funkcija f monotona. Denimo, da bi v nasprotju s tem obstajala števila $a < b < c$ na J, za katera bi veljalo $f(a) < f(b) > f(c)$ (podobno obravnavamo primer, ko je vrednost funkcije f v točki b manjša kot v ostalih dveh). Po omenjenem izreku se sliki $f([a, b])$ in $f([b, c])$ sekata vsaj v intervalu $[f(a), f(b)) \cap [f(c), f(b))$, kar je v nasprotju z injektivnostjo funkcije f. V nadaljevanju bomo privzeli, da je f naraščajoča (primer padajoče funkcije obravnavamo podobno).

Dokazati moramo, da je funkcija f^{-1} zvezna v poljubni točki $b \in f(J)$. Označimo $a := f^{-1}(b)$. Če je $a \in J$ notranja točka intervala J, potem je za vsak dovolj majhen $\varepsilon > 0$ interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ vsebovan v J. Točka $b = f(a)$ je vsebovana v notranjosti intervala $f\big((a-\varepsilon, a+\varepsilon)\big)$, zato obstaja tak $\delta > 0$, da velja

$$(b - \delta, b + \delta) \subset f\big((a - \varepsilon, a + \varepsilon)\big) \implies f^{-1}\big((b - \delta, b + \delta)\big) \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Zadnji pogoj pomeni zveznost funkcije f^{-1} v točki b, saj smo za predpisano (majhno) ε-okolico točke $a = f^{-1}(b)$ našli δ-okolico točke b, ki se preslika vanjo.

Naj bo sedaj a krajišče intervala J; obravnavajmo primer levega krajišča. Ker po predpostavki funkcija f narašča, je $f(a) = b$ njena najmanjša vrednost. Za poljuben (dovolj majhen) $\varepsilon > 0$ je potem $f([a, a + \varepsilon))$ interval oblike $[b, b + \delta)$, od koder kot zgoraj sledi zveznost f^{-1} v točki b, saj je $[b, b + \delta) = (b - \delta, b + \delta) \cap f(J)$ presek δ-okolice točke b z definicijskim območjem $f(J)$ funkcije f^{-1}. $\square$

Vrnimo se k pregledu elementarnih funkcij. Obravnavati moramo še inverzne funkcije trigonometričnih in eksponentnih funkcij.

(7) Inverzne kotne (ali ciklometrične) funkcije: funkcije sin, cos in tg niso injektivne (na svojem definicijskem območju), zato nimajo inverznih funkcij. Lahko pa za vsako od teh funkcij izberemo definicijsko območje tako, da je nova funkcija (z manjšim definicijskim območjem in enakim funkcijskim predpisom) injektivna.

Če za $f(x) = \sin x$ izberemo $D_f := [-\pi/2, \pi/2]$, je f injektivna, njena zaloga vrednosti je $Z_f = [-1, 1]$. Zato ima f inverzno funkcijo, ki jo imenujemo arkus sinus:

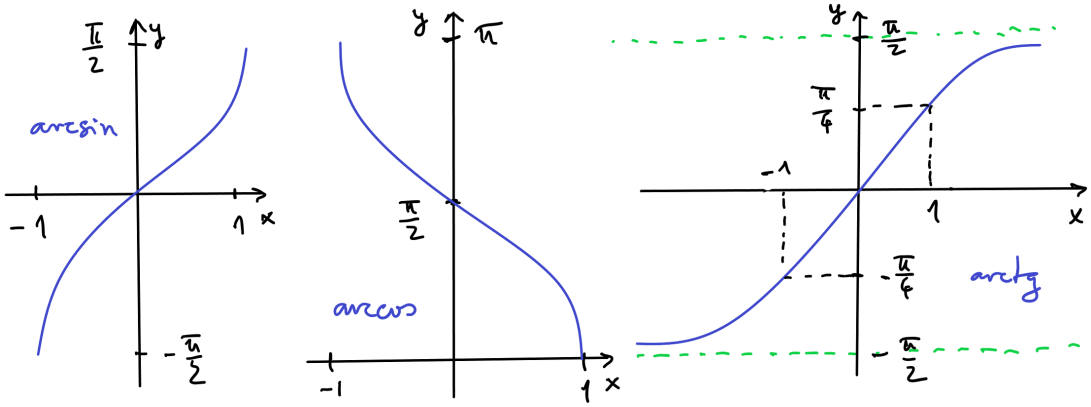
$$f^{-1}\colon [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2], \quad f^{-1}(x) = \arcsin x.$$

Če za $f(x) = \cos x$ izberemo $D_f := [0, \pi]$, je f injektivna, njena zaloga vrednosti je $Z_f = [-1, 1]$. Zato ima f inverzno funkcijo, ki jo imenujemo arkus kosinus:

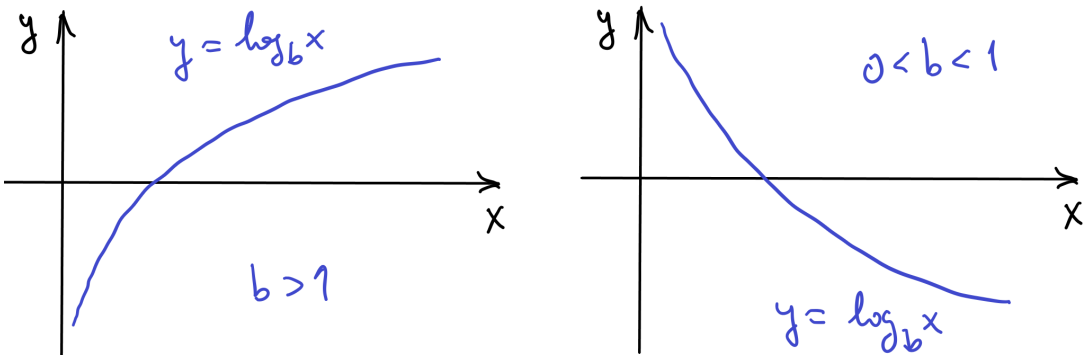
$$f^{-1}\colon [-1, 1] \to [0, \pi], \quad f^{-1}(x) = \arccos x.$$

Če za $f(x) = \operatorname{tg} x$ izberemo $D_f := (-\pi/2, \pi/2)$, je f injektivna, njena zaloga vrednosti je $Z_f = \mathbb{R}$. Zato ima f inverzno funkcijo, ki jo imenujemo arkus tangens:

$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2), \quad f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x.$$



(8) Logaritemske funkcije: za $b > 0$, $b \neq 1$ je eksponentna funkcija z osnovo b, $f(x) = b^x$, strogo monotona. Zato je tudi injektivna, torej ima inverz, ki ga imenujemo logaritemska funkcija z osnovo b. Ker je zaloga vrednosti $Z_f = (0, \infty)$, za inverzno funkcijo velja $f^{-1}\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_b x$. Za $b > 1$ je ta funkcija naraščajoča, za $b < 1$ pa padajoča.



Sedaj lahko preprosto dokažemo zveznost potenčne funkcije $f(x) = x^r$ z iracionalnim eksponentom r za $x > 0$. To funkcijo lahko namreč zapišemo kot kompozitum zveznih funkcij:

$$f(x) = x^r = e^{r \ln x}.$$

Če je $r > 0$, je funkcija definirana tudi v 0 z zahtevo $0^r := 0$ in tedaj lahko zveznost v 0 preprosto preverimo po definiciji.

Izrek 7.7 (zveznost elementarnih funkcij). *Vse elementarne funkcije so zvezne povsod, kjer so definirane.*

Pripomnimo, da med elementarne funkcije sodi tudi absolutna vrednost, saj je $|x| = \sqrt{x^2}$.

POGLAVJE 8

Lastnosti zveznih funkcij

1. Zveznost in zaporedja

Poravnajmo najprej dolg iz prejšnjega poglavja. Naj bo f funkcija k spremenljivk, definirana v točki a in naj bo $(a_n)_n$ poljubno zaporedje s členi v D_f in limito a. Potem je definirano tudi zaporedje slik $\big(f(a_n)\big)_n$. Ker so členi a_n zelo blizu a za velike n, iz zveznosti f v a sledi, da so števila $f(a_n)$ blizu $f(a)$. Torej zaporedje slik konvergira proti $f(a)$.

Izrek 8.1 (zamenjava zvezne funkcije in limite). *Naj bo f funkcija k spremenljivk in $(a_n)_n$ konvergentno zaporedje s členi v D_f in limito $a \in D_f$. Če je f zvezna v točki a, je tudi zaporedje $\big(f(a_n)\big)_n$ konvergentno in njegova limita je enaka $f(a)$. Velja torej formula o zamenjavi zvezne funkcije in limite:*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \underbrace{=}_{f\ zvezna} f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(a).$$

Opomba 8.2.
- Dokaz izreka je analogen dokazu zveznosti kompozituma zveznih funkcij.
- Dobljena formula pravi, da limito zaporedja, ki ga preslikamo z zvezno funkcijo, izračunamo tako, da s to funkcijo preslikamo limito zaporedja.
- Pri tem sta pomembni obe predpostavki: zaporedje mora imeti limito in funkcija mora biti zvezna (vsaj v tej limiti).

Primer 8.3. Izračunaj limito zaporedja $b_n = \dfrac{\sin a_n}{a_n^2+2}$, kjer je $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$.

Ker je funkcija $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+2}$ zvezna povsod in je $b_n = f(a_n)$, vrednost limite zaporedja $(b_n)_n$ dobimo tako, da vrednost limite zaporedja $(a_n)_n$ vstavimo v f, torej

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = f(1) = \frac{\sin 1}{3}.$$

$\diamondsuit$

2. Obstoj globalnih ekstremov

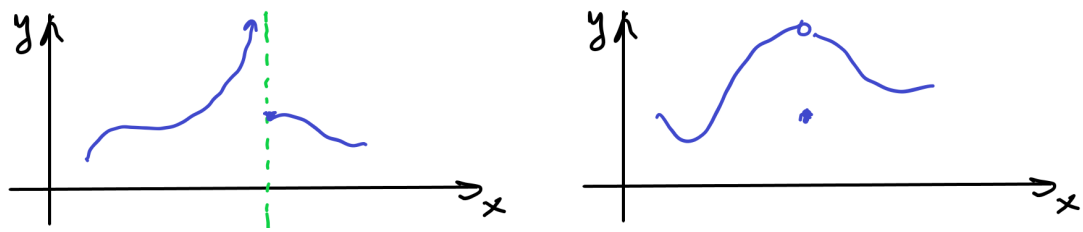
Pri funkciji nas pogosto zanima, kakšna je njena zaloga vrednosti, torej katere vrednosti lahko zavzame. Osnovni podatek o zalogi vrednosti je, ali je omejena – če je, rečemo, da je *funkcija omejena*. Denimo, da je funkcija f navzgor omejena, torej je njena zaloga vrednosti Z_f navzgor omejena. Potem ima Z_f supremum in to število imenujemo *supremum funkcije* f:

$$\sup f := \sup Z_f = \sup_{x\in D_f} f(x).$$

Če supremum funkcije pripada Z_f, torej je tudi funkcijska vrednost, ga imenujemo *maksimum funkcije* f in označimo $\max f$ – to je torej največja vrednost, ki jo funkcija zavzame. Podobno za navzdol omejeno funkcijo definiramo $\inf f$ in $\min f$. Ker je maksimum/minimum (če obstaja) največja/najmanjša vrednost funkcije na celotnem definicijskem območju, ga imenujemo tudi

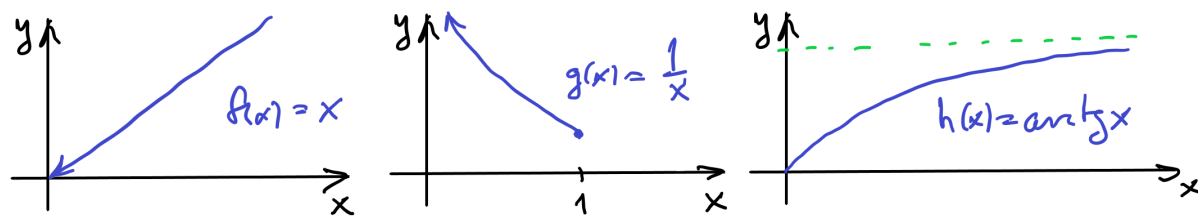
globalni maksimum/globalni minimum; skupno ime za obe ti števili je *globalni ekstrem*, saj je maksimum oziroma minimum ekstremna vrednost funkcije.

Vprašamo se lahko, kakšni so zadostni pogoji za obstoj globalnih ekstremov, torej kaj mora veljati za funkcijo, da bo gotovo imela globalne ekstreme. Izkaže se, da na to vplivajo lastnosti definicijskega območja (oziroma množice, na kateri funkcijo opazujemo) in zveznost funkcije. Če funkcija ni zvezna, ni nujno, da ima globalne ekstreme, ne glede na lastnosti definicijskega območja – lahko se zgodi, da funkcija ni omejena ali pa je vrednost funkcije v točki, kjer bi moral biti npr. maksimum, precej manjša od vrednosti v bližnjih točkah, tako da funkcija maksimuma ne zavzame.



Takšno obnašanje je posledica obnašanja funkcije v okolici neke točke in lastnosti definicijskega območja nanj ne vplivajo.

A samo zveznost ni dovolj, saj npr. $f(x) = x$ na $(0, \infty)$ ni navzgor omejena, zato nima maksimuma, prav tako pa nima minimuma, čeprav je navzdol omejena; $g(x) = \dfrac{1}{x}$ na $(0, 1]$ ni navzgor omejena, ima pa minumum $f(1) = 1$; $h(x) = \operatorname{arctg} x$ pa je na $[0, \infty)$ sicer omejena, a ne zavzame maksimuma.



V vseh teh primerih je razlog za odsotnost ekstrema zvezne funkcije nekompaktnost množice, na kateri opazujemo funkcijo.

Izrek 8.4 (obstoj globalnih ekstremov). *Naj bo $f\colon A \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija k spremenljivk in $A \subset \mathbb{R}^k$ kompaktna. Potem je f omejena ter zavzame maksimum in minimum.*

Dokaz. Najprej dokažimo, da je funkcija f omejena. Denimo, da ni navzgor omejena (omejenost navzdol dokažemo podobno ali pa obravnamo funkcijo $-f$), torej množica funkcijskih vrednosti nima zgornje meje. Potem za vsako naravno število n obstaja $a_n \in A$, za katerega velja $f(a_n) > n$. Ker je množica A kompaktna, ima zaporedje $(a_n)_n$ stekališče $a \in A$ in zato tudi podzaporedje $(a_{n_k})_k$ z limito a. Potem velja

$$\underbrace{\lim_{k\to\infty} f(a_{n_k})}_{=\infty} \underbrace{=}_{f \text{ zvezna}} f(a) \in \mathbb{R} : \rightarrow\!\leftarrow .$$

Ker je f omejena, obstajata $m := \inf f$ ter $M := \sup f$. Pokazati želimo, da sta ti števili funkcijski vrednosti, torej da obstajata točki $x_m, x_M \in A$, za kateri velja

$$f(x_m) = m \quad \text{in} \quad f(x_M) = M.$$

Obravnavajmo infimum (dokaz za supremum je analogen). Po definiciji infimuma za vsako naravno število n obstaja taka točka $b_n \in A$, da velja

$$m \leq f(b_n) < m + \frac{1}{n}.$$

Od tod po principu sendviča sledi $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = m$. Zaporedje (b_n) pa ima zaradi kompaktnosti množice A konvergentno podzaporedje $(b_{n_k})_k$ z limito $b \in A$. Zato po formuli o zamenjavi zvezne funkcije in limite sledi

$$f(b) \underbrace{=}_{f \text{ zvezna}} \lim_{k\to\infty} f(b_{n_k}) = m.$$

To pa pomeni, da je $m \in Z_f$ – iskana točka x_m je točka b. $\square$

Zgornji izrek zagotavlja le obstoj globalnih ekstremov, nič pa ne pove o tem, kako bi ekstremne vrednosti poiskali. Kasneje bomo spoznali metodo za iskanje ekstremov, ki pa bo temeljila na odvodu funkcije – ker je obstoj odvoda močnejši pogoj kot zveznost, tista metoda ni uporabna za vsako zvezno funkcijo.

3. Izrek o vmesni vrednosti

Če poznamo $\inf f$ ter $\sup f$, nas nadalje zanima, katere vrednosti med tema številoma zavzame funkcija f, torej za katere $c \in (\inf f, \sup f)$ obstaja kak $x_c \in D_f$, za katerega velja $f(x_c) = c$. Iščemo torej rešitve x enačbe $f(x) = c$, ki jo lahko preoblikujemo v $f(x) - c = 0$. Če levo stran vzamemo za novo funkcijo, torej $g(x) := f(x) - c$, potem iščemo ničle funkcije g:

$$f(x) = c \quad \Longleftrightarrow \quad g(x) = 0.$$

Izrek 8.5 (obstoj ničle). *Naj bo $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija ene spremenljivke. Če sta vrednosti $g(a)$ in $g(b)$ nasprotno predznačeni, potem ima g na intervalu $[a,b]$ vsaj eno ničlo, torej:*

$$\exists t \in [a,b], \quad \textit{da je} \quad g(t) = 0.$$

Opomba 8.6.

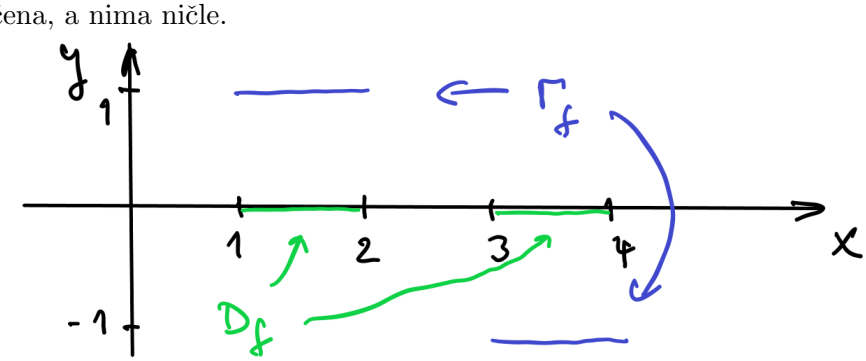
- Izrek v takšni obliki velja le za funkcije ene spremenljivke.
- Če so predpostavke izreka izpolnjene, ima funkcija lahko tudi več ničel. Prav tako se lahko zgodi, da funkcija ima ničlo, čeprav predpostavke izreka niso izpolnjene. Izrek torej podaja zadostni pogoj za obstoj ničle, ki pa ni nujen (potreben) za to, da ničla obstaja.
- Predpostavka, da je funkcija zvezna, je bistvena, saj npr.

$$g(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x \in [-1, 0) \\ 1 & ; \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

izpolnjuje vse ostale predpostavke izreka na intervalu $[-1, 1]$, a nima ničle.
- Prav tako je pomembno, da je funkcija definirana na intervalu. Funkcija

$$g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [1, 2] \\ -1 & ; \quad x \in [3, 4] \end{cases}$$

je zvezna na svojem definicijskem območju $[1,2] \cup [3,4]$ in v »krajiščih« 1 in 4 nasprotno predznačena, a nima ničle.

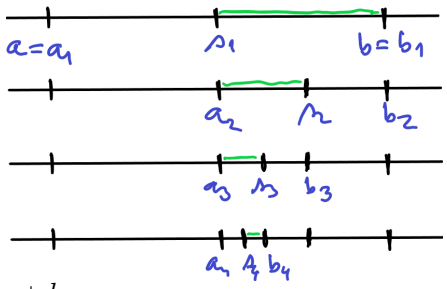


Dokaz. Obstoj ničle bomo dokazali z *metodo bisekcije*, ki je tudi praktična metoda za iskanje ničel. To pomeni, da lahko s to metodo najdemo poljubno natančen približek za ničlo.

Označimo $a_1 := a$ in $b_1 := b$. Sestavili bomo padajoče zaporedje takih intervalov

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset [a_4, b_4] \supset \ldots,$$

katerih dolžine gredo proti 0, da je g v krajiščih vsakega intervala nasprotno predznačena.



Naj bo $s_1 := \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Če je $g(s_1) = 0$, smo našli ničlo ($t = s_1$), sicer pa je $g(s_1)$ nasprotnega predznaka kot eno od števil $g(a_1)$ in $g(b_1)$. Naj bo $[a_2, b_2]$ tisti izmed intervalov $[a_1, s_1]$ in $[s_1, b_1]$, na katerem je g v krajiščih nasprotno predznačena.

Ta postopek induktivno ponavljamo: vzamemo $s_2 := \dfrac{a_2 + b_2}{2}$ in če ta ni ničla, je $[a_3, b_3]$ tisti izmed intervalov $[a_2, s_2]$ in $[s_2, b_2]$, na katerem je g v krajiščih nasprotno predznačena. Ko tako nadaljujemo, lahko na nekem koraku najdemo ničlo, v nasprotnem primeru pa dobimo padajoče zaporedje intervalov, katerih dolžina se na vsakem koraku prepolovi. Po izreku o padajočem zaporedju intervalov zato obstaja natanko ena točka t, ki je vsebovana v vseh intervalih in zanjo velja

$$t = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Iz konstrukcije zaporedja intervalov vemo, da je g v krajiščih vsakega intervala nasprotno predznačena, torej za vsako naravno število n velja

$$g(a_n)g(b_n) < 0.$$

Če na zadnji neenakosti izračunamo limito in upoštevamo izrek o zamenjavi zvezne funkcije in limite, dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \big(g(a_n)g(b_n)\big) = \Big(\lim_{n\to\infty} g(a_n)\Big)\Big(\lim_{n\to\infty} g(b_n)\Big) = g(t)^2 \le 0,$$

od koder sledi $g(t) = 0$. □

Primer 8.7. Poišči interval dolžine največ 1, na katerem ima enačba

$$e^x = x + 3$$

vsaj eno rešitev.

Dano enačbo preuredimo tako, da damo vse na eno stran: $e^x - x - 3 = 0$. Iščemo torej ničle funkcije $g(x) := e^x - x - 3$. Ta funkcija je zvezna, saj je elementarna. Ker želimo najti interval dolžine največ 1, ki vsebuje ničlo, preverimo vrednosti funkcije v točkah, ki se razlikujejo za (največ) 1:

$$g(0) = -2, \quad g(1) = e - 4 \doteq -1{,}3, \quad g(2) = e^2 - 5 \doteq 2{,}4.$$

Vidimo, da sta vrednosti funkcije v krajiščih intervala $[1, 2]$ nasprotno predznačeni, torej ima funkcija po izreku o obstoju ničle na tem intervalu ničlo.

Če izračunamo še vrednost $g(1{,}5) \doteq -0{,}02$, lahko sklepamo, da je ničla malo večja kot 1,5. ♢

Iz izreka o obstoju ničle preprosto sledi, da funkcija zavzame vse vrednosti med svojima vrednostma v krajiščih. Bolj splošno pa sledi še, da je zaloga vrednosti zvezne funkcije na (kompaktnem) intervalu (kompakten) interval.

Posledica 8.8 (izrek o vmesni vrednosti). *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna in c poljubno število med $f(a)$ in $f(b)$. Potem obstaja $t \in (a,b)$, za katerega velja $f(t) = c$.*

Dokaz. Vrednosti funkcije $g(x) = f(x) - c$ v krajiščih intervala $[a,b]$ sta nasprotno predznačeni, saj je eno od števil

$$g(a) = f(a) - c \ \text{ in } \ g(b) = f(b) - c$$

pozitivno, drugo pa negativno, ker c leži med $f(a)$ in $f(b)$. Zveznost funkcije g je posledica zveznosti funkcije f, zato ima g ničlo v neki točki $t \in (a,b)$, torej velja

$$g(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = c.$$

□

Izrek 8.9. *Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ interval in $f\colon J \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je zaloga vrednosti $Z_f = f(J)$ interval, ki vsebuje interval $(\inf f, \sup f)$. Če ima funkcija maksimum ali minimum, ustrezno krajišče pripada zalogi vrednosti. Posebej: če je interval J kompakten, je zaloga vrednosti kompakten interval $[\min f, \max f]$.*

Dokaz. Po definiciji infimuma in supremuma za vsak $\varepsilon > 0$ obstajata točki $a, b \in J$, da je $f(a) < \inf f + \varepsilon$ in $f(b) > \sup f - \varepsilon$. Ker je na intervalu med a in b funkcija f zvezna, po izreku o vmesni vrednosti zaloga vrednosti vsebuje ves interval $[f(a), f(b)]$. Ker to velja za vsak $\varepsilon > 0$, pa vsebuje vse točke intervala $(\inf f, \sup f)$.

Če f zavzame minimum v točki $a \in J$, potem je v Z_f vsebovan interval

$$[f(a), \sup f) = [\min f, \sup f) = [\inf f, \sup f).$$

Podobno velja za maksimum. □

Opomba 8.10. Analogen rezultat velja tudi za funkcije več spremenljivk, če le ima definicijsko območje ustrezne lastnosti. Bistvena lastnost intervala, ki smo jo uporabili v zgornjem dokazu, je *povezanost*: da znotraj intervala lahko zvezno preidemo od ene do druge poljubno izbrane točke; drugače, interval je iz enega kosa. Če je $A \subseteq \mathbb{R}^k$ povezana podmnožica in je $f\colon A \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, potem je zaloga vrednosti Z_f interval.

POGLAVJE 9

Odvod funkcij ene spremenljivke

1. Motivacija: povprečna in trenutna hitrost

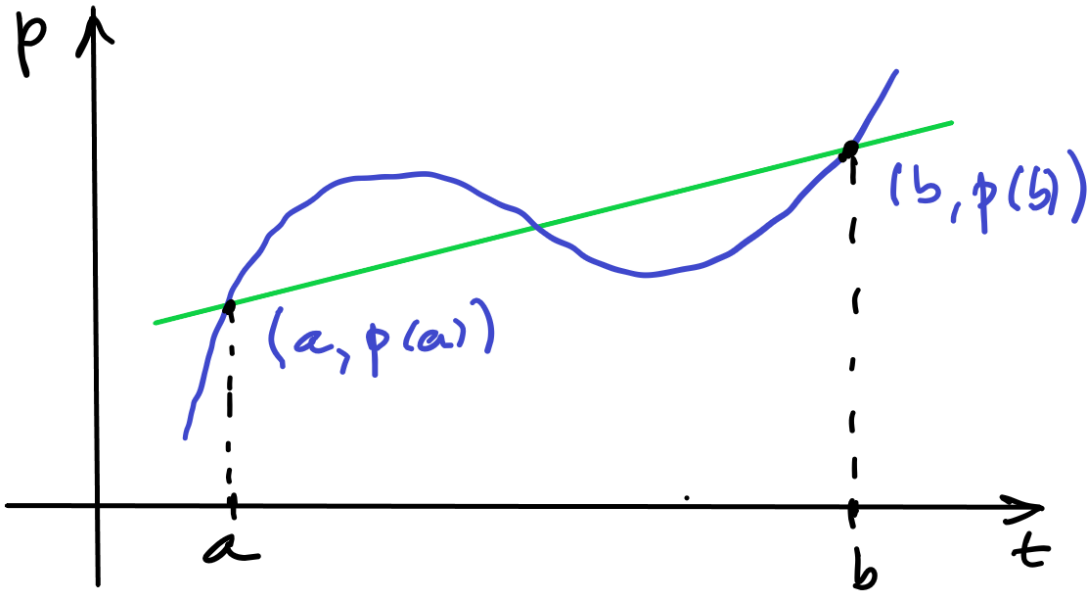
Kot motivacijo za vpeljavo odvoda opazujmo premočrtno gibanje objekta, npr. električnega vlakca na ravnih tirnicah. Če se ta giblje s konstantno hitrostjo v, v času t prepotuje pot $s = vt$. Hitrost gibanja vlakca se v praksi seveda spreminja, lahko pa z uporabo zgornje formule iz spremembe njegovega položaja v danem časovnem intervalu izračunamo, s kolikšno konstantno hitrostjo $\overline{v}$ bi se moral gibati, da bi v danem času opravil enako pot – tej hitrosti pravimo *povprečna hitrost*:

$$\overline{v} := \frac{\text{opravljena pot}}{\text{porabljen čas}}.$$

Naj bo položaj vlakca ob času t dan s funkcijo $p(t)$. Njegova povprečna hitrost na časovnem intervalu od $t = a$ do $t = b$ je

$$\overline{v} = \frac{p(b) - p(a)}{b - a}.$$

Ta izraz ima tudi geometrično interpretacijo: to je smerni koeficient sekante grafa funkcije p skozi točki $(a, p(a))$ in $(b, p(b))$.

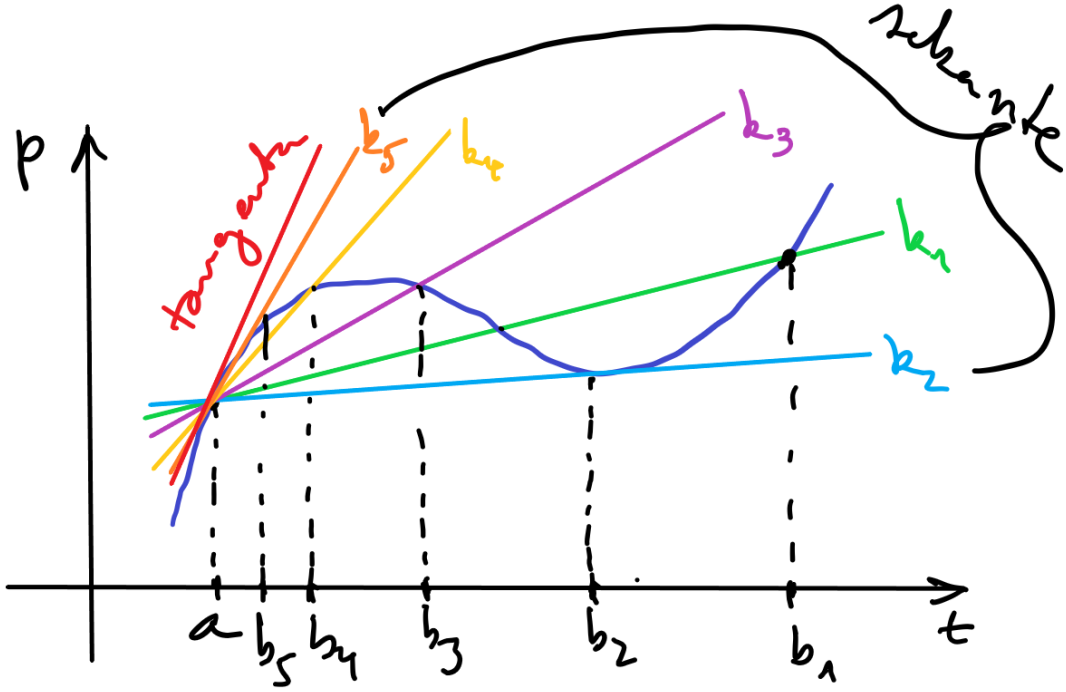


Kako pa bi iz spreminjanja položaja vlakca ocenili velikost *trenutne hitrosti* $v(a)$, s katero se giblje ob času $t = a$? Predvidevamo lahko, da bo za b dovolj blizu a povprečna hitrost na časovnem intervalu $[a, b]$ dober približek za $v(a)$. Še več, bližje ko je b trenutku a, boljši približek pričakujemo. To sloni na predpostavki, da se hitrost vlakca ne spreminja zelo hitro, kar se zdi smiseln privzetek. Za trenutno hitrost zato vzamemo limitno vrednost povprečnih hitrosti na intervalu $[a, b]$, ko pošljemo b proti a:

$$v(a) := \lim_{b \to a} \frac{p(b) - p(a)}{b - a},$$

če le ta limita obstaja.

Geometrična interpretacija zgornje limite je, da se premice sekante na graf funkcije p skozi točki $(a, p(a))$ in $(b, p(b))$ ob približevanju b proti a bližajo neki premici (ki je limitna lega sekant). To premico imenujemo *tangenta* na graf funkcije p v točki a. Geometrično torej trenutna hitrost $v(a)$ predstavlja smerni koeficient tangente na graf funkcije p v točki $t = a$.



Na sliki so narisane le sekante z ene strani, a za obstoj limite moramo preveriti tudi obnašanje sekant na drugi strani.

Primer 9.1. Naj bo $p(t) = 3 + t - 2t^2$ cm, kjer t merimo v sekundah. Izračunaj povprečno hitrost med $t = 1$ s in $t = 2$ s ter trenutno hitrost pri $t = 1$ s.

Določimo najprej položaj ob času $t = 1$ in ob času $t = 2$:

$$p(1) = 2, \quad p(2) = -3 \implies \overline{v} = \frac{p(2) - p(1)}{2 - 1} = \frac{-3 - 2}{1} = -5 \text{ cm/s}.$$

Za izračun trenutne hitrosti pri $t = 1$ najprej izračunajmo povprečno hitrost med časoma 1 in t za poljuben $t \neq 1$:

$$\overline{v} = \frac{p(t) - p(1)}{t - 1} = \frac{(3 + t - 2t^2) - 2}{t - 1} = \frac{1 + t - 2t^2}{t - 1} = \frac{(1 - t)(1 + 2t)}{t - 1} = -1 - 2t.$$

Trenutna hitrost v času $t = 1$ je limita zgornjega izraza, ko pošljemo t proti 1:

$$v(1) = \lim_{t \to 1}(-1 - 2t) = -3 \text{ cm/s}.$$

$\diamondsuit$

V zgornjem premisleku ni bilo pomembno, kaj je predstavljala funkcija p. Enako lahko torej naredimo za poljubno funkcijo in tako dobimo pojem odvoda.

2. Odvod in odvedljivost

Čeprav je pogoj za to, da govorimo o limiti funkcije f v točki a, da je točka a stekališče definicijskega območja D_f, pa bomo v primeru odvoda zahtevali, da je funkcija definirana v

okolici točke a. To je smiselno, saj mora biti definirana tako v a (da je točka $(a, f(a))$ na grafu) kot v bližnjih točkah (da obstajajo sekante, katerih limitna lega je tangenta).

Definicija 9.2. Naj bo f funkcija ene spremenljivke, definirana v okolici števila $a \in \mathbb{R}$. *Odvod funkcije f v točki a* je

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

če ta limita obstaja. Če odvod funkcije f v točki a obstaja, rečemo, da je funkcija f *odvedljiva v točki a*. Če je f odvedljiva v a, ima graf f *tangento* pri $x = a$, dano z enačbo

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Opomba 9.3.

- Namesto s spremenljivko x lahko odvod izrazimo tudi s pomočjo spremembe h, kjer je $x = a + h$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

- V definiciji je mišljeno, da »gre x kakorkoli proti a«. Včasih pa je smiselno obravnavati le enostranske limite, npr. če je funkcija definirana le na eni strani točke a ali če se v a spremeni njen predpis. Tako dobimo pojem enostranskega odvoda:

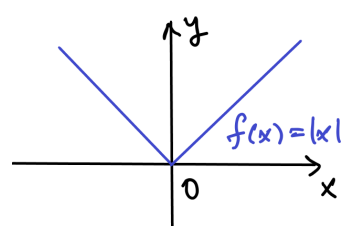
  levi odvod: $f'(a^-) := \lim_{x \nearrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

  desni odvod: $f'(a^+) := \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

  Zveza med enostranskima odvodoma in odvodom je enaka kot pri limitah:

$$f'(a) \text{ obstaja } \iff f'(a^-) \text{ in } f'(a^+) \text{ obstajata in sta enaka.}$$

Primer 9.4. Za vse $a \in \mathbb{R}$ ugotovi, ali je funkcija $f(x) = |x|$ odvedljiva v a in če je, izračunaj njen odvod v točki a.



Spomnimo se, da je $f(x) = x$ za $x \geq 0$ ter $f(x) = -x$ za $x < 0$. Ker se funkcijski predpis spremeni pri $x = 0$, bomo posebej obravnavali primere $a > 0$, $a = 0$ in $a < 0$.

Naj bo najprej $a > 0$. Ker je odvod odvisen le od vrednosti funkcije v neki okolici točke a, smemo privzeti, da je $f(x) = x$, saj to velja npr. za $x \in (0, 2a)$. Zato je

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1.$$

Podobno je za $a < 0$ funkcija $f(x) = -x$ v okolici a, zato je

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{-x - (-a)}{x - a} = -1.$$

Naj bo sedaj $a = 0$. Potem je

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}.$$

Tokrat moramo posebej izračunati levi in desni odvod, saj se pri 0 formula za f spremeni:

$$f'(0^-) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \searrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Levi in desni odvod sta različna, zato odvod ne obstaja. Funkcija $f(x) = |x|$ je odvedljiva povsod razen pri $x = 0$. ♢

Primer 9.5. Za poljubno naravno število n in poljubno realno število a izračunaj odvod funkcije $f(x) = x^n$ v točki $x = a$.

Izračunajmo:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x-a} = na^{n-1} \end{aligned}$$

za vsak $a \in \mathbb{R}$. Odvod funkcije f torej obstaja v vsaki točki $a \in \mathbb{R}$ – f je torej povsod odvedljiva. Namesto v a lahko odvod zapišemo v točki x:

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad \text{za vsak} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Opazimo, da je tudi odvod funkcija. ♢

Opomba 9.6.

- Enako velja za poljubno funkcijo f: njen odvod f' je pravilo, ki vsakemu $x \in D_f$, za katerega odvod obstaja, priredi vrednost odvoda $f'(x)$. Vrednost odvoda se praviloma od točke do točke spreminja, saj se naklon tangente s točko spreminja. Torej je odvod f' nova funkcija, njeno definicijsko območje $D_{f'}$ pa je podmnožica D_f. V splošnem moramo odvod izračunati po definiciji,

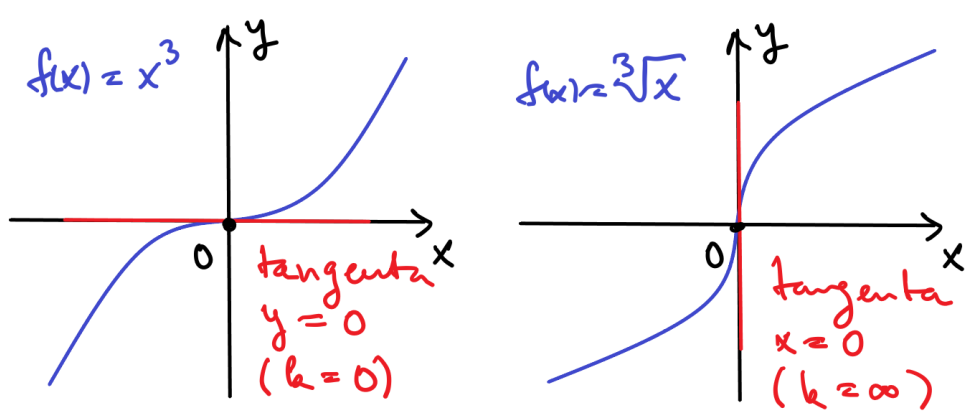
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

  bomo pa izpeljali formule za odvode vseh osnovnih elementarnih funkcij in splošna pravila za odvajanje.
- Za funkcijo f rečemo, da je *odvedljiva na množici* A, če je odvedljiva v vsaki točki $a \in A$.
- Poleg oznake f' za odvod uporabljamo še druge simbole. Za $y = f(x)$ tako pišemo

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}(x).$$

Primer 9.7. Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ni odvedljiva v 0.

Funkcija f je inverzna funkcija za $x \mapsto x^3$, ki ima v izhodišču vodoravno tangento (odvod te funkcije je $x \mapsto 3x^2$ in je v izhodišču enak 0). Ker graf inverzne funkcije dobimo z zrcaljenjem preko premice $y = x$, ki os x preslika v os y, je tangenta na graf f v izhodišču navpična premica, ki ima »neskončen naklon.« Odvod funkcije f v izhodišču zato ne obstaja. ♢



Pri izračunu odvoda absolutne vrednosti in tretjega korena smo opazili, da elementarne funkcije niso nujno odvedljive povsod, kjer so definirane, čeprav so tam zvezne. Enako velja v splošnem: če je funkcija v neki točki zvezna, tam ni nujno odvedljiva. Velja pa obratna implikacija: odvedljiva funkcija je tudi zvezna.

Izrek 9.8 (odvedljivost $\Longrightarrow$ zveznost). *Če je funkcija f odvedljiva v točki a, je tudi zvezna v a.*

Dokaz. Po predpostavki obstaja $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, zato je

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right) = f'(a)\cdot 0 = 0.$$

To pa pomeni, da je funkcija zvezna v a, saj je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. $\square$

Primer 9.9. Odvod funkcij sin in cos.

Odvod funkcije $f(x) = \sin x$ izračunamo po definiciji:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x.$$

Torej je $\sin' = \cos$ oziroma $\sin' x = \cos x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Ker je $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ le premaknjena funkcija sinus, enako velja tudi za odvod:

$$\cos' x = \sin'\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

$\diamondsuit$

POGLAVJE 10

Pravila za odvajanje in diferencial

1. Osnovna pravila za odvajanje

V prejšnjem poglavju smo že izračunali odvode nekaterih osnovnih elementarnih funkcij:

$f(x) =$	x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x) =$	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$

K temu seznamu lahko dodamo še odvod konstantne funkcije, ki je ničelna funkcija, saj so vse sekante vodoravne, zato so tudi tangente vodoravne, torej imajo smerni koeficient enak 0:

$$f(x) = c \implies f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Če upoštevamo, da je $x^0 = 1$, je ta rezultat v bistvu zajet v formuli za odvod potence, če v tej vzamemo $n = 0$.

Odvode ostalih osnovnih elementarnih funkcij bomo izpeljali v tem poglavju, najprej pa si poglejmo pravila za odvajanje vsot, razlik, produktov in kvocientov funkcij. Podobno kot zveznost omenjene operacije ohranjajo tudi odvedljivost.

Izrek 10.1. *Naj bosta funkciji f in g odvedljivi v točki $a \in \mathbb{R}$. Potem so tudi $f + g$, $f - g$ in $f \cdot g$ odvedljive v točki a in velja:*

$$\begin{aligned}
(f + g)'(a) &= f'(a) + g'(a) \\
(f - g)'(a) &= f'(a) - g'(a) \\
(f \cdot g)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)
\end{aligned}$$

Če je $g(a) \neq 0$, je v točki a odvedljiva tudi $\dfrac{f}{g}$ in velja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Dokaz. Pravili za vsoto in razliko sledita z uporabo lastnosti limit.

Pri izpeljavi pravila za produkt si pomagamo podobno kot pri izpeljavi formule za limito produkta:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\
&= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).
\end{aligned}$$

Tudi pri izpeljavi pravila za kvocient si sposodimo idejo od limit:

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g},$$

zato moramo po definiciji odvoda izpeljati le pravilo za odvod obratne vrednosti funkcije.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \left(-\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\frac{1}{g(x)g(a)}\right) \\
&= -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}
\end{aligned}$$

Od tod sledi:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot \left(-\frac{g'(a)}{(g(a))^2}\right) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

□

Primer 10.2. Odvod funkcije tangens.

$$\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

♢

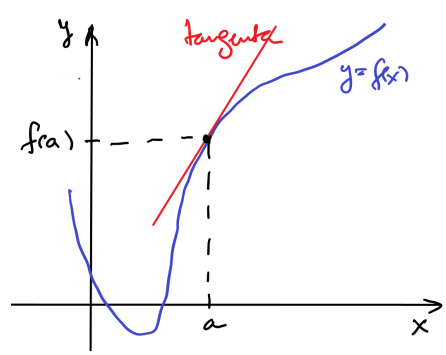
Posledica 10.3. *Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$ odprta množica. Množica vseh odvedljivih funkcij na A je vektorski prostor in odvajanje funkcij je linearna preslikava iz tega prostora v prostor vseh funkcij na A: za poljubni odvedljivi funkciji f, g na A in število $c \in \mathbb{R}$ velja*

$$(f+g)' = f' + g', \quad (cf)' = cf'.$$

2. Tangentna aproksimacija in diferencial

Naj bo funkcija f odvedljiva v točki $a \in \mathbb{R}$. Tangenta na graf funkcije f v točki a je premica skozi točko $(a, f(a))$ s smernim koeficientom $f'(a)$:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad \text{oziroma} \quad y = f(a) + f'(a)(x-a).$$



Tangenta in graf funkcije f imata torej v točki $x = a$ enako funkcijsko vrednost ($f(a)$) in enak smerni koeficient oziroma odvod ($f'(a)$). Grafično se to odraža tako, da se tangenta za vrednosti spremenljivke x blizu a zelo dobro prilega grafu funkcije f.

Oglejmo si razliko med vrednostjo funkcije in vrednostjo tangente v točki x:

$$R_a(x) := f(x) - \big(f(a) + f'(a)(x-a)\big).$$

Pričakujemo, da bomo o obnašanju te razlike lahko nekaj izvedeli iz predpostavke, da je funkcija odvedljiva v a, tj. da obstaja odvod $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \implies \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = 0$$
$$\implies \lim_{x\to a} \frac{R_a(x)}{x-a} = 0$$

Obstoj te limite pomeni, da gre $R_a(x)$ proti 0, ko gre x proti a. Ker pa je limita enaka 0, mora iti števec $R_a(x)$ proti 0 mnogo hitreje kot imenovalec $x-a$; lahko bi rekli, da je stopnja ničle razlike $R_a(x)$ večja kot 1. Drugače, razliko lahko zapišemo v obliki $R_a(x) = h(x)(x-a)$, kjer je h funkcija, ki ima v a limito enako 0. Za »lepe« funkcije to pomeni, da ima funkcija h ničlo stopnje ena, tako da je $h(x) = g(x)(x-a)$ za neko funkcijo g, ki je v a omejena; tedaj se razlika $R_a(x) = g(x)(x-a)^2$ bliža 0 kvadratno.

Grafični odraz diferenciabilnosti je, da je funkcija za x blizu a skoraj »zlepljena« s tangento, saj velja

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+R_a(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+h(x)(x-a) = f(a)+\big(f'(a)+h(x)\big)(x-a).$$

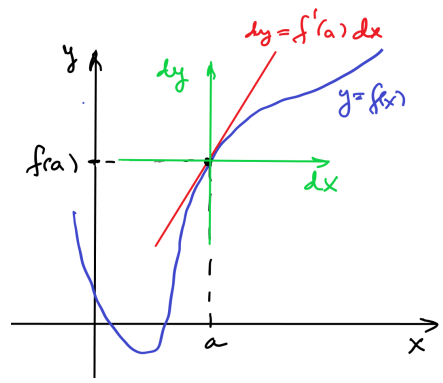
Za x blizu a lahko torej vrednosti funkcije aproksimiramo z vrednostmi tangente – napaka, ki jo pri tem zagrešimo, je enaka $R_a(x)$, zato $R_a(x)$ pogosto imenujemo *napaka* ali *ostanek*. Pri bolj oddaljenih točkah x pa seveda vrednosti funkcije niso nujno kakorkoli povezane z vrednostmi tangente. Tangenta je lahko tam blizu grafa funkcije, ga seka, ali pa je poljubno daleč stran od njega.

Posebej preprosto obliko dobi enačba tangente na graf f v točki a, če izhodišče koordinatnega sistema postavimo v točko tangentnosti $(a, f(a))$. Označimo novi koordinati z

$$dx = x-a \quad \text{in} \quad dy = y - f(a).$$

Glede na ti koordinati je enačba tangente

$$dy = f'(a)dx.$$



dx imenujemo *diferencial* neodvisne spremenljivke x, dy pa *diferencial* odvisne spremenljivke oziroma funkcije $y = f(x)$ v točki a; če želimo poudariti točko, včasih pišemo $dy = df(a)$. V poljubni točki x tako velja

$$dy = f'(x)dx \quad \text{oziroma} \quad df(x) = f'(x)dx \implies f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{oziroma} \quad f'(x) = \frac{df}{dx}(x).$$

To tudi pojasni alternativno oznako za odvod.

Definicija 10.4. Tangenta oziroma diferencial funkcije je *linearna aproksimacija* za funkcijo f, ki jo imenujemo tudi *tangentna aproksimacija*.

Primer 10.5. Izračunaj približno vrednost za $\sin 62^\circ$ s pomočjo diferenciala.

Za izračun moramo kot zapisati v radianih:

$$62^\circ \equiv \frac{\pi}{3} + 2\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90} =: x.$$

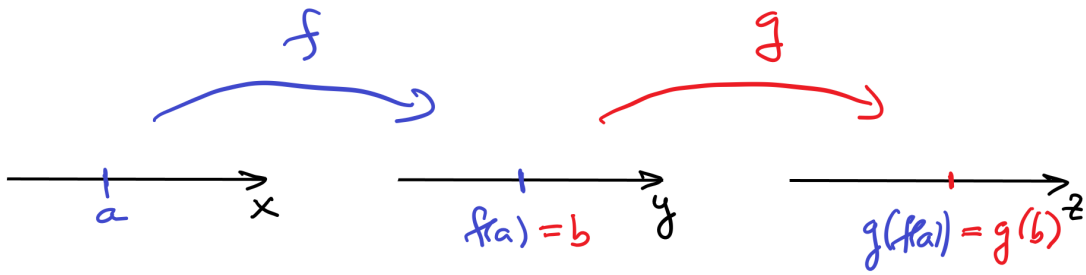
Ker poznamo vrednost $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, je smiselno vzeti $a = \frac{\pi}{3}$. Po tangentni aproksimaciji je

$$\sin x \doteq \sin a + \sin'(a)\,(x-a) = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{\pi}{90} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180},$$

kar je enako 0,8834787, prava vrednost pa je $\sin 62^\circ = 0{,}8829476$. To je precej boljši približek kot $\sin 60^\circ = 0{,}8660254$. ♢

3. Odvod sestavljene in odvod inverzne funkcije

Naj bosta dani funkciji ene spremenljivke f in g. Če je f odvedljiva v točki a, je definirana v okolici te točke. Denimo, da je g odvedljiva v točki $b = f(a)$, torej je definirana v okolici te točke.



Potem je kompozitum $g \circ f$ definiran v okolici točke a, saj se zaradi zveznosti f v a dovolj majhne okolice točke a preslikajo v izbrano okolico točke b. Zato se je smiselno vprašati, ali je tedaj tudi kompozitum $g \circ f$ odvedljiv v točki a.

Izrek 10.6 (verižno pravilo). *Naj bo f odvedljiva v a in g odvedljiva v $f(a)$. Potem je $g \circ f$ odvedljiva v a in velja* verižno pravilo*:*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Verižno pravilo lahko zapišemo tudi s pomočjo diferencialov. Uporabimo oznake z zgornje slike:

$$y = f(x), \quad z = g(y), \quad \text{torej} \quad z = g(f(x)).$$

Po verižnem pravilu je odvod sestavljene funkcije (kot funkcije spremenljivke x) enak

$$z' = g'(f(x))f'(x) = g'(y)f'(x) \implies \frac{dz}{dx} = \frac{dg}{dy}\frac{df}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Dokaz. Ker je f odvedljiva v a, za

$$R_a(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \quad \text{velja} \quad \lim_{x \to a} \frac{R_a(x)}{x-a} = 0.$$

Prav tako iz odvedljivosti g v $b = f(a)$ za

$$R_b(y) = g(y) - g(b) - g'(b)(y-b) \quad \text{sledi} \quad \lim_{y \to b} \frac{R_b(y)}{y-b} = 0.$$

Izračunajmo razliko vrednosti funkcije $g \circ f$ v točkah a in x; pri tem bomo označili $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(a)) &= g(y) - g(b) \\ &= g'(b)(y-b) + R_b(y) \\ &= g'(b)(f(x) - f(a)) + R_b(y) \\ &= g'(b)\big(f'(a)(x-a) + R_a(x)\big) + R_b(y) \\ &= g'(b)f'(a)(x-a) + g'(b)R_a(x) + R_b(y). \end{aligned}$$

Potem je

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = g'(b)f'(a) + g'(b)\frac{R_a(x)}{x-a} + \frac{R_b(y)}{y-b}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Pokazati želimo, da obstaja limita tega izraza, ko gre x proti a – vrednost te limite je odvod $(g \circ f)'(a)$. Drugi člen na desni gre proti $g'(b) \cdot 0$ zaradi odvedljivosti funkcije f v a. Pri tretjem pa upoštevamo, da gre zaradi zveznosti f v a razlika $y - b = f(x) - f(a)$ proti 0, ko gre x proti a, zato gre ta člen proti $0 \cdot f'(a) = 0$ po odvedljivosti funkcije g v b. Od tod sledi, da obstaja tudi limita leve strani in je enaka

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

$\square$

Primer 10.7. Izračunaj odvod funkcije $h(x) = \sin(x^3)$.

Funkcija h je sestavljena iz notranje funkcije $f(x) = x^3$ in zunanje funkcije $g(y) = \sin y$, tj. $h = g \circ f$. Po verižnem pravilu je zato

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = \cos(f(x)) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3),$$

kjer smo upoštevali $f'(x) = 3x^2$ in $g'(y) = \cos y$. $\diamondsuit$

Primer 10.8. Izračunaj $\dfrac{d}{dx} \cos^2(5x - 7)$.

Dana funkcija je kompozitum treh funkcij. Notranja je $f(x) = 5x - 7$, srednja $g(y) = \cos y$ in zunanja $h(z) = z^2$. Odvod dvojnega kompozituma izračunamo v dveh korakih, ki pa ju lahko izvedemo hkrati:

$$((h \circ g) \circ f)'(x) = (h \circ g)'(f(x))\, f'(x) = h'(g(f(x)))\, g'(f(x))\, f'(x).$$

V konkretnem primeru tako dobimo

$$\frac{d}{dx} \cos^2(5x - 7) = 2\cos(5x - 7) \cdot (-\sin(5x - 7)) \cdot 5 = -5\sin(10x - 14).$$

$\diamondsuit$

Izpeljimo še pravilo za odvod inverzne funkcije. Naj bo f funkcija ene spremenljivke, injektivna na množici $A \subseteq \mathbb{R}$ in označimo njeno zalogo vrednosti $Z_f = f(A)$ z B. Potem ima $f\colon A \to B$ inverzno funkcijo $f^{-1}\colon B \to A$. Za $x \in A$ in $y \in B$ velja

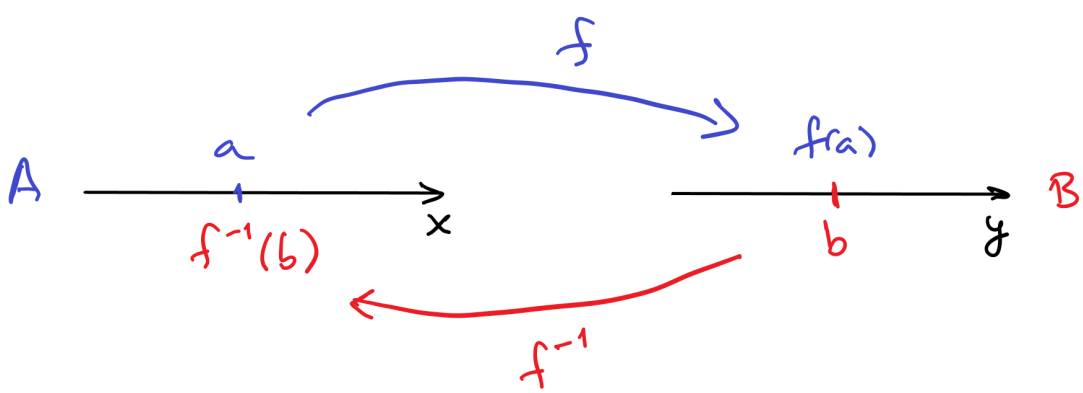
$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Od tod z vstavljanjem ene zveze v drugo dobimo

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A, \quad \text{tj.} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$$

in

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in B, \quad \text{tj.} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B\,.$$



Izračunajmo odvod inverzne funkcije v točki $b = f(a)$:

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} \underbrace{=}_{y = f(x)} \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)},$$

če le $f'(a)$ obstaja in ni enak 0. Privzeli smo tudi zveznost inverzne funkcije v b, ko smo pogoj $y \to b$ nadomestili z $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(b) = a$.

Izrek 10.9. *Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ odprt interval, $f\colon J \to \mathbb{R}$ injektivna in odvedljiva v točki $a \in J$. Če je $f'(a) \neq 0$, potem je f^{-1} odvedljiva v točki $b = f(a)$ in velja*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Ob privzetku, da je inverzna funkcija odvedljiva, lahko formulo za odvod izpeljemo iz identitete $f(f^{-1}(x)) = x$ z uporabo verižnega pravila:

$$f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}\right)'(x) = 1 \implies \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Primer 10.10. Odvod funkcije arkus sinus.

Funkcija $f(x) = \sin x$ je injektivna na množici $A = [-\pi/2, \pi/2]$, njena zaloga vrednosti je $B = [-1, 1]$, inverzna funkcija pa $f^{-1}(x) = \arcsin x$. Ker je $f'(x) = \cos x$, je po zgornji formuli

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Zaloga vrednosti funkcije arkus sinus je interval A, na katerem je funkcija kosinus pozitivna, zato jo lahko izrazimo s funkcijo sinus preko Pitagorovega izreka:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Tako dobimo

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Funkcija arkus sinus v krajiščih intervala $[-1, 1]$ ni odvedljiva; največ, kar bi lahko pričakovali v krajišču, je obstoj enostranskega odvoda, a tudi ta ne obstaja. Tangenta v krajišču je namreč navpična. $\diamondsuit$

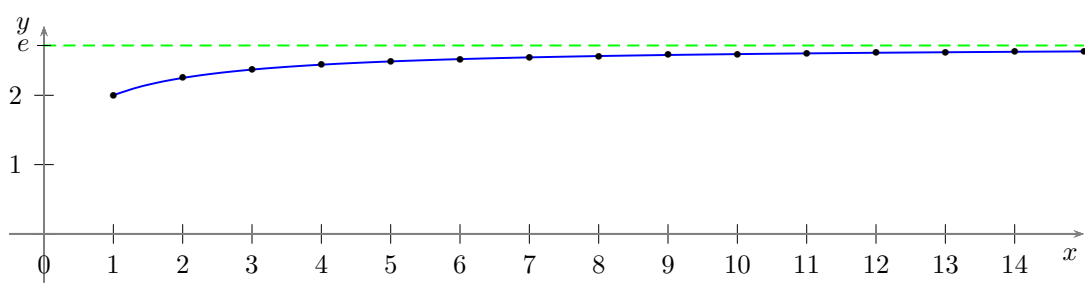
Podobno izpeljemo še

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{in} \quad \operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. Odvodi eksponentnih in logaritemskih funkcij

Število e je definirano kot limita zaporedja $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Za to zaporedje smo dokazali, da je strogo naraščajoče in navzgor omejeno. Enako velja tudi za funkcijo $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, ki ima torej v neskončnosti enako limito kot zaporedje:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$



Če v to limito vpeljemo novo spremenljivko $t = \dfrac{1}{x}$, dobimo

$$\lim_{t \searrow 0} (1+t)^{1/t} = e.$$

Preverimo, da je tudi leva limita enaka e:

$$\lim_{t \nearrow 0} (1+t)^{1/t} \underbrace{=}_{u=-t} \lim_{u \searrow 0} (1-u)^{-1/u} = \lim_{u \searrow 0} \left(\frac{1}{1-u} \right)^{1/u}$$

$$= \lim_{u \searrow 0} \left(1 + \frac{u}{1-u} \right)^{1+(1-u)/u} \underbrace{=}_{s=\frac{u}{1-u}} \lim_{s \searrow 0} (1+s)^{1+1/s} = e.$$

To pomeni, da je

$$\lim_{t \to 0} (1+t)^{1/t} = e.$$

Če dobljeno enakost logaritmiramo in upoštevamo zveznost funkcije naravni logaritem, dobimo

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

S pomočjo zgornje limite lahko izračunamo odvod funkcije $f(x) = e^x$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

V zadnjo limito uvedemo novo spremenljivko $t = e^h - 1$, torej je $h = \ln(1+t)$:

$$f'(x) = e^x \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = e^x.$$

Z uporabo formule za odvod inverzne funkcije pa dobimo še odvod inverzne funkcije $f^{-1}(x) = \ln x$:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Iz formul za odvod naravne eksponentne in logaritemske funkcije je preprosto izpeljati odvod eksponentne in logaritemske funkcije s poljubno osnovo $b > 0$:

$$b^x = e^{x \ln b} \implies \frac{d}{dx} b^x = e^{x \ln b} \ln b = b^x \ln b,$$

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} \implies \frac{d}{dx} \log_b x = \frac{1}{x \ln b}.$$

Podobno pa lahko izračunamo tudi odvod splošne potence. Za poljuben $r \in \mathbb{R}$ za $x > 0$ velja $x^r = e^{r \ln x}$, zato je

$$\frac{d}{dx} x^r = e^{r \ln x} \frac{r}{x} = x^r \frac{r}{x} = r x^{r-1}.$$

Sedaj znamo izračunati odvod vsake elementarne funkcije. Pri tem si pomagamo z izpeljanimi pravili in odvodi osnovnih elementarnih funkcij, ki so zbrani v spodnji tabeli.

$f(x) =$	x^r	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	b^x	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\log_b x$
$f'(x) =$	$r x^{r-1}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$b^x \ln b$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{1}{x \ln b}$

POGLAVJE 11

Uporaba odvoda

1. Odvod in obnašanje funkcije

Zanima nas, kaj lahko povemo o obnašanju funkcije ene spremenljivke na podlagi njenega odvoda. Denimo, da je f odvedljiva v točki $a \in \mathbb{R}$. Če je $f'(a) > 0$, je tangenta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ naraščajoča in ker se graf funkcije f blizu a dobro prilega grafu tangente, predvidevamo, da je blizu točke a tudi funkcija f naraščajoča. Podobno pri $f'(a) < 0$ pričakujemo, da je v okolici točke a funkcija padajoča. Če pa je $f'(a) = 0$, je tangenta vodoravna premica, torej se graf v taki točki zravna. Čeprav ne moremo nič reči o obnašanju funkcije v okolici take točke, pa so take točke posebne, saj se tam obnašanje funkcije lahko spremeni.

Definicija 11.1. Naj bo f funkcija ene spremenljivke, odvedljiva v točki $a \in \mathbb{R}$. Če je $f'(a) = 0$, točko a imenujemo *stacionarna* ali *kritična* točka funkcije f.

Izkaže se, da so stacionarne točke kandidati za lokalne ekstreme. Pojem lokalnega ekstrema bomo vpeljali za poljubne funkcije.

Definicija 11.2. Naj bo $f\colon A \to \mathbb{R}$ funkcija k spremenljivk, $A \subseteq \mathbb{R}^k$ in $a \in A$. Funkcija f ima v točki a *lokalni minimum* (*lokalni maksimum*), če obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je ε-okolica točke a vsebovana v množici A in za vsak $x \in K(a, \varepsilon)$ velja $f(x) \geq f(a)$ ($f(x) \leq f(a)$). Skupno ime za lokalni minimum in lokalni maksimum je *lokalni ekstrem*.

Drugače, funkcija f ima v točki a lokalni minimum, če v bližnjih točkah ne zavzame manjše vrednosti kot v a – vrednost $f(a)$ je torej najmanjša vrednost funkcije v neki okolici točke a.

Zanima nas, ali obstoj lokalnega ekstrema v neki točki kaj pove o odvodu funkcije v tej točki.

Lema 11.3. *Naj bo f funkcija ene spremenljivke, odvedljiva v točki a, v kateri ima lokalni ekstrem. Potem je odvod v tej točki enak nič, $f'(a) = 0$.*

Dokaz. Denimo, da ima funkcija f v točki a lokalni maksimum: potem za vse x blizu a velja $f(x) \leq f(a)$ in zato $f(x) - f(a) \leq 0$. Ker je f odvedljiva v a, obstaja odvod

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Po predpostavki je števec v tem ulomku nepozitiven, predznak imenovalca pa je odvisen od tega, na kateri strani glede na a leži točka x. Določimo torej lahko predznaka enostranskih odvodov v točki a.

Pri izračunu levega odvoda je $x < a$, torej $x - a < 0$, zato je

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\leq 0}{< 0} \geq 0 \implies f'(a^-) \geq 0.$$

Pri izračunu desnega odvoda pa je $x > a$, torej $x - a > 0$, zato je

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\leq 0}{> 0} \leq 0 \implies f'(a^+) \leq 0.$$

Ker je f odvedljiva v a, morata biti enostranska odvoda v a enaka. Edina možnost je, da sta oba enaka 0, posledično pa je $f'(a) = 0$. $\square$

Posledica 11.4. *Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a, v kateri ima lokalni ekstrem. Potem bodisi f ni odvedljiva v a bodisi je $f'(a) = 0$ (če je f odvedljiva v a).*

Opomba 11.5.
- Da funkcija v točki, kjer ima (lokalni) ekstrem, ni nujno odvedljiva, pokaže npr. primer absolutne vrednosti, $f(x) = |x|$. Ta funkcija ima pri $x = 0$ globalni (in zato tudi lokalni) minimum, a v tej točki ni odvedljiva.
- Vsebina posledice je, da so kandidati za lokalne ekstreme
  (1) stacionarne točke ($f'(x) = 0$) in
  (2) točke, kjer funkcija ni odvedljiva ($f'(x)$ ne obstaja).
- Globalni ekstrem funkcije $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ pa lahko nastopi v točki, ki je lokalni ekstrem, ali pa v krajišču intervala (npr. funkcija $f(x) = x$ ima na intervalu $[1, 2]$ oba ekstrema v krajiščih). Kandidati za globalne ekstreme so torej:
  (1) stacionarne točke,
  (2) točke, kjer f ni odvedljiva in
  (3) krajišči a in b intervala.
- Če je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna, potem vemo, da ima globalne ekstreme. V tem primeru jih lahko poiščemo tako, da najprej poiščemo kandidate, nato pa primerjamo vrednosti funkcije f v teh točkah:
  $\max f$ je največja vrednost $f(c)$, ko c preteče vse kandidate,
  $\min f$ je najmanjša vrednost $f(c)$, ko c preteče vse kandidate.

Primer 11.6. Poišči (globalne) ekstreme funkcije $f(x) = 3x^{2/3} - x + 1$ na intervalu $[-1, 1]$.

Ker je dana funkcija zvezna (je elementarna in povsod definirana), ima na kompaktnem intervalu $[-1, 1]$ globalne ekstreme. Najprej poiščemo kandidate za lokalne ekstreme, torej izračunamo odvod.

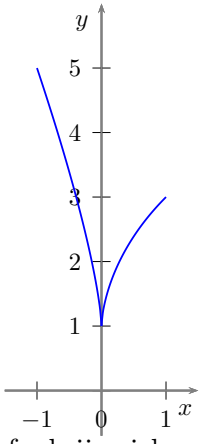
$$f'(x) = 2x^{-1/3} - 1 = \frac{2 - x^{1/3}}{x^{1/3}}$$

Poiščimo stacionarne točke:

$$f'(x) = 0 \iff 2 - x^{1/3} = 0 \implies x = 8.$$

Ker ta točka ne leži na intervalu $[-1, 1]$, kjer iščemo ekstreme, ni kandidat za ekstrem. Preverimo še, ali obstajajo točke, kjer funkcija ni odvedljiva:

$$f'(x) \text{ ne obstaja} \iff x^{1/3} = 0 \implies x = 0.$$



Kandidati za točke, v katerih lahko funkcija zavzame ekstrem, so torej $x = 0$ ter krajišči $x = -1$ in $x = 1$. Izračunajmo funkcijske vrednosti v teh točkah:

$$f(-1) = 5, \quad f(0) = 1 \text{ in } f(1) = 3.$$

Vidimo, da je $\max f = 5$ in je dosežen pri $x = -1$ (v krajišču), $\min f = 1$ in je dosežen pri $x = 0$ (kjer funkcija ni odvedljiva). ♢

Pri izpeljavi povezave med odvodom in naraščanjem oziroma padanjem funkcije si bomo pomagali z naslednjim rezultatom, ki je tudi sicer zelo uporaben in nam bo še mnogokrat prišel prav, ne le pri tem predmetu ampak tudi kasneje. Kot motivacijo si zastavimo naslednje vprašanje:

Če je povprečna hitrost gibanja na nekem časovnem intervalu enaka $\overline{v}$, ali potem nujno obstaja tak čas t, da je trenutna hitrost $v(t)$ ob tem času enaka povprečni hitrosti?

Posebej, če je povprečna hitrost gibanja enaka 0, ali je potem nujno trenutna hitrost ob nekem času enaka 0?

Če je povprečna hitrost enaka $\overline{v}$, to pomeni, da se objekt ob nekaterih časih giblje s hitrostjo večjo od $\overline{v}$, ob drugih pa z manjšo (če se ne giblje s konstantno hitrostjo $\overline{v}$). Če predpostavimo, da je hitrost zvezna funkcija, potem iz izreka o vmesni vrednosti sledi, da je odgovor na prvo vprašanje pritrdilen. Enako velja tudi za odgovor na drugo vprašanje, saj ima po izreku o obstoju ničle zvezna funkcija, ki zavzame tako pozitivne kot negativne vrednosti, ničlo. Kaj pa, če ne predpostavimo zveznosti?

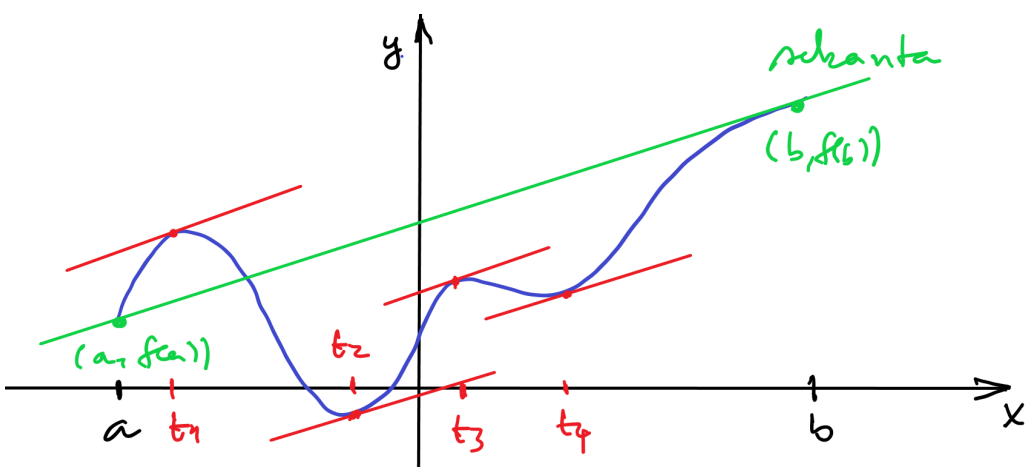
Izrek 11.7 (Rolle). *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je odvedljiva na (a,b). Če je $f(a) = f(b)$, potem obstaja tak $t \in (a,b)$, da je $f'(t) = 0$.*

Dokaz. Ker je funkcija f zvezna na kompaktnem intervalu $[a,b]$, ima maksimum $M = f(x_M)$ in minimum $m = f(x_m)$. Če je $M = m$, je funkcija f konstantna in $f'(x) = 0$ za vsak $x \in (a,b)$. Sicer pa je $M \neq m$ in vsaj eno od teh števil je različno od vrednosti $f(a) = f(b)$ funkcije v krajiščih intervala. Denimo, da je $M > f(a)$. Potem je $x_M \in (a,b)$ in f ima v x_M lokalni ekstrem. Ker je f po predpostavki odvedljiva na intervalu (a,b), je $f'(x_M) = 0$. V tem primeru lahko vzamemo $t = x_M$. $\square$

Podobno kot smo iz izreka o obstoju ničle izpeljali izrek o vmesni vrednosti, tudi tu iz zgornjega izreka o ničelni povprečni hitrosti sledi rezultat za poljubno povprečno hitrost.

Izrek 11.8 (Lagrange). *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je odvedljiva na (a,b). Potem obstaja tak $t \in (a,b)$, da je $f'(t) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Opomba 11.9. Zgornjemu rezultatu lahko damo tudi geometrično interpretacijo. Izraz $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ predstavlja smerni koeficient sekante na graf funkcije v krajiščih intervala $[a,b]$, Lagrangeev izrek pa zagotavlja obstoj take točke t, v kateri je smerni koeficient tangente enak smernemu koeficientu omenjene sekante. Drugače, obstaja točka, v kateri je tangenta vzporedna sekanti. Takih točk je seveda lahko več.



Dokaz. Situacijo v Lagrangeevem izreku lahko prevedemo na tisto v Rollovem izreku tako, da od funkcije f odštejemo funkcijski predpis za sekanto skozi krajišči. Tako dobimo funkcijo, ki ima v krajiščih enaki vrednosti, torej ustreza pogojem Rollovega izreka.

Enačba sekante skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$ je

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ker je funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$ in odvedljiva na intervalu (a, b), linearna funkcija pa je odvedljiva povsod, je tudi funkcija

$$g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Preverimo še vrednosti v krajiščih:

$$g(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0, \quad g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

Funkcija g res izpolnjuje vse pogoje Rollovega izreka, zato obstaja tak $t \in (a, b)$, da je $g'(t) = 0$. Odvod funkcije g je enak

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

zato iz $g'(t) = 0$ sledi

$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

kar smo želeli dokazati. □

Vemo že, da je odvod konstantne funkcije enak nič. Vprašajmo se, ali velja tudi obratni sklep: če je odvod funkcije enak nič, ali je ta potem nujno konstantna? Hitro se lahko prepričamo, da to v splošnem ne velja. Naj bo $f(x) = \begin{cases} 2 & ; \quad x < -1 \\ 5 & ; \quad x > 1 \end{cases}$. Ta funkcija je odvedljiva na svojem definicijskem območju $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ in njen odvod je enak 0 v vsaki točki, a funkcija ni konstantna.

Posledica 11.10. *Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ interval in $f\colon J \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je odvedljiva v notranjih točkah intervala J. Če je $f'(x) = 0$ za vsako notranjo točko $x \in J$, potem je f konstantna funkcija na J.*

Dokaz. Naj bosta $a < b$ poljubni točki intervala J. Funkcija f izpolnjuje pogoje Lagrangeevega izreka na intervalu $[a, b]$, zato obstaja tak $t \in (a, b)$, da je

$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f(b) - f(a) = f'(t)(b - a) = 0.$$

Ker sta bili točki a in b poljubni, od tod sledi, da je vrednost funkcije f v vseh točkah enaka. □

Posvetimo se sedaj osrednjemu vprašanju tega razdelka, pomenu odvoda za rast funkcije.

Definicija 11.11. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$ in $f\colon A \to \mathbb{R}$ funkcija ene spremenljivke. Funkcija f je $\begin{cases} \textit{naraščajoča} \\ \textit{strogo naraščajoča} \\ \textit{padajoča} \\ \textit{strogo padajoča} \end{cases}$ na množici A, če za poljubna $a < b$ iz A velja $\begin{cases} f(a) \leq f(b) \\ f(a) < f(b) \\ f(a) \geq f(b) \\ f(a) > f(b) \end{cases}$. Če je funkcija naraščajoča ali padajoča, rečemo, da je *monotona*.

Izrek 11.12. *Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ interval in $f\colon J \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je odvedljiva v notranjih točkah intervala J.*

(1) *Če je $\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases}$ za vsako notranjo točko $x \in J$, potem je funkcija f $\begin{cases} \textit{naraščajoča} \\ \textit{strogo naraščajoča} \end{cases}$ na J.*

(2) *Če je* $\begin{cases} f'(x) \leq 0 \\ f'(x) < 0 \end{cases}$ *za vsako notranjo točko* $x \in J$, *potem je funkcija* f $\begin{cases} \text{padajoča} \\ \text{strogo padajoča} \end{cases}$ *na* J.

Dokaz. Izberimo poljubna $a < b$ iz J. Funkcija f na intervalu $[a, b]$ izpolnjuje pogoje Lagrangeevega izreka, zato obstaja tak $t \in (a, b)$, da velja

$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Longrightarrow \quad f(b) - f(a) = f'(t)(b - a).$$

Ker je $b - a > 0$, je predznak razlike $f(b) - f(a)$ določen s predznakom odvoda $f'(t)$. Če je odvod f' (strogo) pozitiven, je ta razlika (strogo) pozitivna; ker to velja za vsako izbiro $a < b$, je funkcija f (strogo) naraščajoča. Če pa je odvod f' (strogo) negativen, je ta razlika (strogo) negativna, kar pomeni, da je funkcija f (strogo) padajoča. □

S pomočjo tega že lahko povemo, ali ima v točki, ki je kandidat za lokalni ekstrem, funkcija res lokalni ekstrem. Če je odvod na eni strani te točke pozitiven, na drugi pa negativen, potem funkcija na eni strani narašča, na drugi pa pada, zato ima ekstrem.

Posledica 11.13 (kriterij za lokalni ekstrem). *Naj bo* $J \subseteq \mathbb{R}$ *interval in* $f \colon J \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija, ki je odvedljiva v okolici notranje točke* $c \in J$ *razen morda v točki* c. *Če odvod* f' *pri* c *spremeni predznak, ima funkcija* f *v točki* c *lokalni ekstrem.*

Z zahtevo, da odvod spremeni predznak pri c, je mišljeno, da obstaja taka ε-okolica točke c, da je na $(c - \varepsilon, c)$ odvod enega predznaka, na $(c, c + \varepsilon)$ pa drugega.

To je najsplošnejši pogoj, ki zagotavlja obstoj lokalnega ekstrema. Kasneje bomo spoznali tudi kriterij z drugim odvodom, ki pa je uporaben le takrat, ko drugi odvod obstaja.

2. l'Hôpitalovo pravilo

Z l'Hôpitalovim pravilom si lahko pomagamo pri računanju limit odvedljivih funkcij. Neposredno ga lahko uporabimo za nedoločene izraze oblike $\frac{0}{0}$ ali $\frac{\infty}{\infty}$, za druge nedoločene izraze pa tako, da jih prevedemo na enega od omenjenih.

Denimo, da nas zanima limita $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, v kateri je $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Če ta limita obstaja, mora biti tudi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, torej limiti ustreza nedoločeni izraz $\frac{0}{0}$ in pravil za računanje z limitami ne moremo uporabiti. Predpostavimo sedaj, da sta funkciji f in g odvedljivi v točki a, torej obstajata $f'(a)$ in $g'(a)$, ter da je $g'(a) \neq 0$. Ker sta funkciji f in g tedaj zvezni v a in imata limiti v točki a enaki 0, sta tudi njuni vrednosti v točki a enaki nič. Zato velja

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \frac{x - a}{x - a} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \frac{x - a}{g(x) - g(a)} \right) = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

V nekaterih primerih pa funkciji f in g nista odvedljivi v točki a ali pa je $g'(a) = 0$. Tedaj pa si lahko pomagamo z naslednjim splošnejšim rezultatom.

Izrek 11.14 (l'Hôpitalovo pravilo). *Naj bosta funkciji* f *in* g *odvedljivi v okolici točke* $a \in \mathbb{R}$ *razen morda v* a *in naj bo* $g'(x) \neq 0$ *za vse* x *blizu* a *razen morda v* a.

$\left(\text{tip } \frac{0}{0}\right)$ *Če velja* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *in* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *ter obstaja* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *ali pa je ta limita enaka* $+\infty$ *ali* $-\infty$*, potem je*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\left(\text{tip } \frac{\infty}{\infty}\right)$ *Če je* $\lim_{x\to a} f(x)$ *enaka* $+\infty$ *ali* $-\infty$ *in* $\lim_{x\to a} g(x)$ *enaka* $+\infty$ *ali* $-\infty$ *ter obstaja* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *ali pa je ta limita enaka* $+\infty$ *ali* $-\infty$*, potem je*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Opomba 11.15.
- Izrek velja tudi za enostranske limite. Pri tem le vse limite spremenimo v desne limite oziroma v leve limite.
- Izrek velja tudi za limite v pozitivni ali negativni neskončnosti.
- Pri izračunu limite lahko l'Hôpitalovo pravilo uporabimo večkrat zapored.

Dokaz izreka sloni na naslednji posplošitvi Lagrangeevega izreka.

Lema 11.16 (Cauchy). *Naj bosta* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *zvezni funkciji, ki sta odvedljivi na* (a,b)*. Če je* $g(b) \neq g(a)$*, potem obstaja tak* $t \in (a,b)$*, da velja*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Dokaz. Tvorimo novo funkcijo $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$h(x) := g(x)(f(b)-f(a)) - f(x)(g(b)-g(a)).$$

Funkcija h na intervalu $[a,b]$ ustreza pogojem Rollovega izreka; posebej velja, da sta vrednosti v krajiščih intervala enaki:

$$h(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b) \quad \text{in} \quad h(b) = -g(b)f(a) + f(b)g(a).$$

Zato po Rollovem izreku obstaja tak $t \in (a,b)$, da je $h'(t) = 0$. Iz slednje enačbe sledi želena formula. □

Dokaz izreka 11.14. Obravnavali bomo le nedoločeni izraz $\frac{0}{0}$. Ker sta limiti funkcij f in g v točki a enaki 0, privzemimo, da sta tudi vrednosti funkcij v tej točki enaki 0. Če nista (bodisi tam funkciji nista definirani ali pa imata kakšno drugo vrednost), postavimo $f(a) := 0$ in $g(a) := 0$. S tem privzetkom sta funkciji v točki a zvezni, zato za x dovolj blizu a na intervalu med a in x izpolnjujeta pogoje Cauchyjevega izreka. Obstaja torej tak t_x, ki leži med a in x, da velja

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)};$$

ker je odvod funkcije g v točkah blizu a različen od 0, je $g(x) \neq g(a)$ za x blizu a.

Ko pošljemo x proti a, gre tudi t_x proti a. Ker po predpostavki obstaja limita $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, obstaja tudi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Pripomnimo, da v zadnji enakosti limiti na levi in v sredini lahko obstajata, tudi če limita na desni ne obstaja, saj srednja limita teče le po nekaterih vrednostih t_x, ne pa po vseh x kot desna.

Primer 11.17.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(\cos x)^{-2/3}\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{-2/3}}{6}\,\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}$$

$\diamondsuit$

Primer 11.18. Izračunaj limito funkcije $f(x)=x\left(\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2}\right)$, ko x narašča čez vse meje.

Funkcija arkus tangens ima v neskončnosti limito $\pi/2$, zato gre izraz v oklepaju proti 0. Iskana limita torej porodi nedoločen izraz $\infty\cdot 0$. Da bi lahko uporabili l'Hôpitalovo pravilo, moramo funkcijski predpis preoblikovati v ulomek. Ker je identična funkcija $x\mapsto x$ bolj preprosta kot izraz v oklepaju, števec in imenovalec delimo z x in dobimo

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2}\right)\overset{\infty\cdot 0}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}=-1.$$

Od tod sledi, da za velike x velja $\operatorname{arctg} x\doteq\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}$. $\diamondsuit$

Primer 11.19. Izračunaj limito $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x+\cos x}$.

Ker sta funkciji sinus in kosinus omejeni, iskani limiti ustreza nedoločeni izraz tipa $\frac{\infty}{\infty}$. Zato lahko poskusimo uporabiti l'Hôpitalovo pravilo. Tako dobimo limito

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{2-\sin x},$$

ki pa ne obstaja, saj je funkcija znotraj limite periodična. Vseeno pa prvotna limita obstaja in jo preprosto izračunamo tako, da števec in imenovalec delimo s funkcijo, ki najhitreje narašča, torej z x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{2+\frac{\cos x}{x}}=\frac{1}{2}.$$

$\diamondsuit$

S pomočjo l'Hôpitalovega pravila lahko primerjamo tudi hitrost naraščanja funkcij, ko spremenljivka narašča čez vse meje. Tako velja, da poljubna logaritemska funkcija narašča počasneje od poljubne potenčne funkcije, ta pa narašča počasneje od poljubne eksponentne funkcije:

$$\log_a x \ll x^r \ll b^x$$

za poljubna $a,b>1$ in poljuben $r>0$. Ta izjava pomeni, da je limita kvocienta funkcij, kjer tista v števcu narašča počasneje od tiste v imenovalcu, ko spremenljivko x pošljemo v neskončnost, enaka 0.

POGLAVJE 12

Višji odvodi in Taylorjeva formula

1. Višji odvodi

Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ (odprt) interval in $f\colon J \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Torej je odvod funkcija $f'\colon J \to \mathbb{R}$. Če je funkcija f' odvedljiva na J, njen odvod imenujemo *drugi odvod* funkcije f in ga označimo

$$\left(f'\right)' =: f'' = f^{(2)}.$$

Če je f'' prav tako odvedljiva na J, njen odvod imenujemo *tretji odvod* funkcije f in ga označimo

$$\left(f''\right)' =: f''' = f^{(3)}.$$

Na ta način lahko induktivno definiramo odvode poljubno visokega reda, če le obstajajo. Denimo, da na J obstaja $f^{(n-1)}$ za neko naravno število n. Če je ta funkcija ponovno odvedljiva, njen odvod imenujemo *n-ti odvod* ali *odvod reda n* funkcije f:

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Če na J obstaja odvod reda n, rečemo, da je funkcija f *n-krat odvedljiva* na J; če je poleg tega n-ti odvod še zvezen na J, pa rečemo, da je f *n-krat zvezno odvedljiva* na J. Množico vseh n-krat zvezno odvedljivih funkcij na J označimo s $C^n(J)$:

$$C^n(J) = \left\{ f\colon J \to \mathbb{R} \,\middle|\, f^{(n)} \text{ je zvezen na } J \right\}.$$

Dodatno definiramo $f^{(0)} := f$ in množico vseh zveznih funkcij na J označimo s $C(J) = C^0(J)$.

V nadaljevanju bodo pomembne tudi funkcije, ki imajo odvode vseh redov. Ker je odvedljiva funkcija zvezna, to pomeni, da je poljuben odvod zvezen, saj je odvedljiv. Take funkcije so torej poljubno mnogokrat zvezno odvedljive – množico vseh takih funkcij označimo s

$$C^\infty(J) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(J).$$

Poleg zgornjih oznak tudi za višje odvode uporabljamo zapis z diferenciali. Pri tem je ugodno na odvod gledati kot na operacijo (linearno preslikavo), ki deluje na funkcijo:

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f, \quad \text{torej } \ ' = \frac{d}{dx}.$$

Potem za drugi odvod dobimo

$$f'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f\right) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f = \frac{d^2}{dx^2} f = \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Odvod reda n torej lahko zapišemo na naslednje načine:

$$f^{(n)} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n f = \frac{d^n}{dx^n} f = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Primer 12.1. Funkcija $f(x) = \ln x$ je poljubno mnogokrat odvedljiva na $D_f = (0, \infty)$.

Vemo že, da je $f'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ in ta funkcija je odvedljiva (in zvezna) na D_f. Od tod izračunamo

$$f''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}, \ldots$$

Na osnovi zgornjih primerov uganemo formulo za odvod reda n, ki jo lahko preprosto preverimo z indukcijo:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

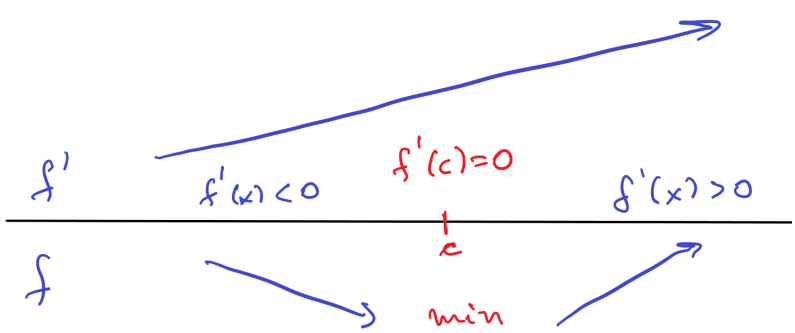
Vsi odvodi so zvezni na D_f, zato je $f \in C^\infty((0,\infty))$. $\diamondsuit$

S pomočjo drugega odvoda lahko odločimo, ali ima funkcija v stacionarni točki lokalni ekstrem in določimo tudi tip tega ekstrema.

Trditev 12.2 (kriterij za lokalni ekstrem). *Naj bo funkcija f dvakrat zvezno odvedljiva v okolici svoje stacionarne točke c. Če je* $\begin{cases} f''(c) > 0 \\ f''(c) < 0 \end{cases}$, *ima funkcija f v točki c* $\begin{cases} \text{lokalni minimum} \\ \text{lokalni maksimum} \end{cases}$.

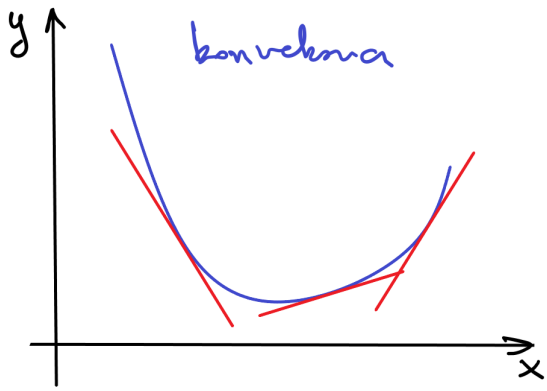
Opomba 12.3. Če je $f''(c) = 0$, potem zgornji kriterij ne pove nič. V tem primeru ima funkcija v točki $x = c$ lahko lokalni ekstrem ali pa ne. Na primer za funkciji $f(x) = x^3$ in $g(x) = x^4$ je točka $c = 0$ stacionarna točka, v kateri imata obe funkciji drugi odvod enak 0, funkcija f v c nima lokalnega ekstrema (saj v vsaki okolici točke 0, kjer je $f(0) = 0$, zavzame tako pozitivne kot negativne vrednosti), funkcija g pa ima v tej točki (globalni) minimum.

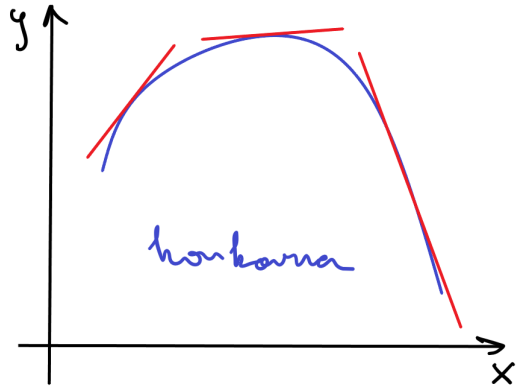
Dokaz. Ker je drugi odvod odvod prvega odvoda, lahko iz predznaka drugega odvoda na nekem intervalu sklepamo o rasti prvega odvoda. Denimo, da je $f''(c) > 0$. Iz predpostavljene zveznosti drugega odvoda tedaj sledi, da je $f''(x) > 0$ za vse x iz neke okolice točke c. Na tej okolici je torej f' strogo naraščajoča funkcija. Ker je po predpostavki $f'(c) = 0$, je $f'(x) < 0$ za $x < c$ in $f'(x) > 0$ za $x > c$. To pomeni, da je funkcija f levo od c padajoča, desno od c pa naraščajoča, torej ima v c lokalni minimum. Primer, ko je $f''(c) < 0$, obravnavamo analogno. $\square$



2. Konveksnost

Za natančno skiciranje grafa funkcije je poleg naraščanja in padanja pomemben podatek tudi, ali se graf krivi navzgor ali navzdol. To informacijo nosi konveksnost.





Definicija 12.4. Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ interval in $f\colon J \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Funkcija f je $\left\{\begin{array}{l}\textit{konveksna}\\ \textit{konkavna}\end{array}\right.$ na J, če za vsak $x \in J$ tangenta na graf funkcije f v točki x leži $\left\{\begin{array}{l}\text{pod}\\ \text{nad}\end{array}\right.$ grafom funkcije f na celotnem intervalu J.

V definiciji je seveda v obeh primerih mišljeno, da se tangenta in graf lahko v nekaterih točkah tudi ujemata. Posebej je vsaka premica tako konveksna kot konkavna.

Trditev 12.5. *Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ interval in $f\colon J \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Če je odvod f' $\left\{\begin{array}{l}\textit{naraščajoča}\\ \textit{padajoča}\end{array}\right.$ funkcija na J, potem je f $\left\{\begin{array}{l}\textit{konveksna}\\ \textit{konkavna}\end{array}\right.$ funkcija na J.*

Dokaz. Obravnavajmo primer, ko je funkcija f' naraščajoča na J. Za poljubno točko $a \in J$ je tangenta na graf funkcije f v točki a:

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Pokazati želimo, da za vse $x \in J$ velja $f(x) \geq g(x)$. Izračunajmo razliko:

$$f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a).$$

Ker funkcija f na intervalu med a in x izpolnjuje pogoje Lagrangeevega izreka, obstaja tak t, ki leži med a in x, da velja

$$f(x) - f(a) = f'(t)(x-a) \quad \Longrightarrow \quad f(x) - g(x) = (f'(t) - f'(a))(x-a).$$

Če je $x > a$, je tudi $t > a$, zato je $f'(t) \geq f'(a)$ in oba člena na desni v zadnji formuli za $f(x) - g(x)$ sta nenegativna, torej je $f(x) - g(x) \geq 0$: graf funkcije f leži nad tangento.

Če pa je $x < a$, je tudi $t < a$, zato je $f'(t) \leq f'(a)$ in oba člena na desni v zadnji formuli za $f(x) - g(x)$ sta nepozitivna, njun produkt pa je nenegativen: ponovno sledi, da leži graf funkcije f nad tangento. □

Posledica 12.6. *Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ interval in $f\colon J \to \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva funkcija. Če je $\left\{\begin{array}{l}f''(x) \geq 0\\ f''(x) \leq 0\end{array}\right.$ za vsak $x \in J$, potem je f $\left\{\begin{array}{l}\textit{konveksna}\\ \textit{konkavna}\end{array}\right.$ funkcija na J.*

Dokaz. Spomnimo se, da ima pozitivnost/negativnost drugega odvoda za posledico naraščanje/padanje prvega odvoda. Rezultat torej sledi neposredno iz predhodne trditve. □

Definicija 12.7. Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ interval in $f\colon J \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Točka $c \in J$ je *prevojna točka* ali *prevoj* funkcije f, če ima takšno okolico, da je f znotraj te okolice na eni strani c konveksna, na drugi pa konkavna.

Prevoj funkcije torej ustreza lokalnemu ekstremu odvoda. Tudi kriterij za nastop prevoja je zato analogen.

TRDITEV 12.8. *Naj bo funkcija f dvakrat odvedljiva v okolici točke c razen morda v c. Če f'' spremeni predznak v c, ima funkcija f v točki c prevoj. V taki točki velja bodisi $f''(c) = 0$ bodisi $f''(c)$ ne obstaja.*

Pogoj, da f'' spremeni predznak v c, zagotavlja, da je f na eni strani c konveksna, na drugi pa konkavna. Takšna sprememba se lahko zgodi le, če je $f''(c)$ enak 0 ali ne obstaja, torej so slednje točke kandidati za prevoj.

3. Taylorjeva formula

Vemo že, da je tangentna aproksimacija dober približek za funkcijo v okolici točke tangentnosti. Cilj tega razdelka je poiskati boljše približke za vrednosti funkcije v okolici izbrane točke. Poleg tega bomo izpeljali tudi formulo za velikost napake približka, s pomočjo katere je mogoče določiti ustrezen približek ob predpisani natančnosti.

Spomnimo se, da je za funkcijo f, ki je odvedljiva v točki a, tangentna aproksimacija dober približek za vrednosti funkcije v okolici točke a v naslednjem smislu:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_a(x), \quad \text{kjer je} \quad \lim_{x\to a} \frac{R_a(x)}{x-a} = 0.$$

Tangenta $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ ima v točki a enako vrednost in odvod kot funkcija f:

$$g(a) = f(a) \ \text{ in } \ g'(a) = f'(a).$$

Ker želimo najti boljši približek za funkcijo f kot je tangenta, poskusimo s funkcijo, ki ima v točki a enako funkcijsko vrednost ter vrednost prvih nekaj odvodov kot funkcija f. Najbolj preprosta takšna funkcija je polinom. Za dano naravno število n torej iščemo tak polinom g stopnje n, za katerega velja

$$(\star) \qquad g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a), \quad g''(a) = f''(a), \ldots, \quad g^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Polinom g bomo zapisali po potencah $x-a$, kot je zapisana tudi tangenta:

$$g(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$$

za neke koeficiente $c_i \in \mathbb{R}$. Koeficiente c_i bomo določili tako, da bodo izpolnjeni pogoji $(\star)$.

Ker je $g(a) = c_0$, iz zahteve $g(a) = f(a)$ sledi $\boxed{c_0 = f(a)}$. Iz odvoda funkcije g

$$g'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1}$$

sledi $g'(a) = c_1$ in pogoj $g'(a) = f'(a)$ da $\boxed{c_1 = f'(a)}$. Podobno iz drugega odvoda funkcije g

$$g''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + 4\cdot 3c_4(x-a)^2 + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}$$

dobimo $f''(a) = g''(a) = 2c_2$, torej je $\boxed{c_2 = \dfrac{f''(a)}{2}}$. Tretji odvod

$$g'''(x) = 3\cdot 2c_3 + 4\cdot 3\cdot 2c_4(x-a) + \cdots + n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3}$$

da $f'''(a) = g'''(a) = 3!\,c_3$, od koder sledi $\boxed{c_3 = \dfrac{f'''(a)}{3!}}$. Podobno s še enim odvajanjem dobimo $f^{(4)}(a) = g^{(4)}(a) = 4!\,c_4$, torej $\boxed{c_4 = \dfrac{f^{(4)}(a)}{4!}}$. Od tod lahko uganemo splošno pravilo, ki ga je

preprosto preveriti z indukcijo:

$$g^{(k)}(a) = k!\, c_k \quad \Longrightarrow \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

za vse $k \leq n$.

Pri zgornji izpeljavi smo privzeli, da ima funkcija f odvode vseh redov do n v točki a in je posebej definirana v okolici točke a.

Definicija 12.9. Naj ima funkcija f odvod reda n v točki a. *Taylorjev polinom* stopnje n s središčem v a za funkcijo f je

$$T_{a,n}(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Kako dobra aproksimacija za funkcijo f v okolici točke a je Taylorjev polinom stopnje n, meri razlika

$$R_{a,n}(x) := f(x) - T_{a,n}(x), \quad \text{torej je} \quad f(x) = T_{a,n}(x) + R_{a,n}(x).$$

Po analogiji s tangentno aproksimacijo, ki je Taylorjev polinom stopnje 1, pričakujemo, da gre ostanek $R_{a,n}(x)$ proti 0 hitreje kot $(x-a)^n$, ko gre x proti a.

Izrek 12.10 (Taylorjeva formula). *Naj bo funkcija f $(n+1)$-krat odvedljiva na odprtem intervalu J in naj bo $a \in J$. Potem za vsak $x \in J$ obstaja tak t_x med a in x, da velja*

$$R_{a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dokaz. Izberimo $x \in J$ in definirajmo funkcijo $g\colon J \to \mathbb{R}$ s predpisom:

$$g(s) := f(s) + (x-s)f'(s) + \frac{(x-s)^2}{2!}f''(s) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(x-s)^n}{n!}f^{(n)}(s) + \left(\frac{x-s}{x-a}\right)^{n+1} R_{a,n}(x).$$

Ker je f na J $(n+1)$-krat odvedljiva, so vsi odvodi, ki nastopajo v formuli za g, še vsaj enkrat odvedljive funkcije, zato je g na J odvedljiva in posledično tudi zvezna. Izračunajmo vrednosti funkcije g v točkah a in x:

$$g(a) = T_{a,n}(x) + R_{a,n}(x) = f(x), \quad g(x) = f(x).$$

Funkcija g na intervalu med a in x torej izpolnjuje pogoje Rollovega izreka, zato obstaja tak $t = t_x$ med a in x, da velja $g'(t) = 0$. Izračunajmo odvod funkcije g:

$$g'(s) = \underline{f'(s)} + \left(\underline{-f'(s)} + \underset{\cdots\cdots\cdots}{(x-s)f''(s)}\right)$$
$$+ \left(\underset{\cdots\cdots\cdots}{-(x-s)f''(s)} + \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{(x-s)^2}{2!}f^{(3)}(s)}\right) + \underset{\sim\sim\sim}{\qquad} + \cdots$$
$$\cdots + \underset{=\!=\!=}{\qquad} + \left(\underset{=\!=\!=\!=}{-\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(s)} + \frac{(x-s)^n}{n!}f^{(n+1)}(s)\right)$$
$$- (n+1)\frac{(x-s)^n}{(x-a)^{n+1}}R_{a,n}(x).$$

Če vstavimo $s = t$ in upoštevamo $g'(t) = 0$, dobimo

$$\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) = (n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}R_{a,n}(x),$$

od tod pa lahko izrazimo ostanek $R_{a,n}(x)$:

$$R_{a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$\square$

Zgornja formula za ostanek ni praktično uporabna, saj ne vemo, v kateri točki t_x je potrebno izračunati vrednost odvoda. Če pa je odvod reda $(n+1)$ zvezen in se omejimo na kompaktno množico, lahko to vrednost navzgor ocenimo z maksimumom odvoda in tako dobimo formulo, v kateri lahko izračunamo (ali vsaj ocenimo) vse člene.

Posledica 12.11. *Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ odprt interval, $K \subset J$ kompakten interval in $a \in K$ notranja točka. Naj bo $f \in C^{n+1}(J)$ in označimo $M := \max_{x\in K} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$. Potem za vsak $x \in K$ velja ocena*

$$|R_{a,n}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

To pomeni, da gre ostanek $R_{a,n}(x)$ proti 0 tako hitro kot $(x-a)^{n+1}$; posebej velja

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{a,n}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Primer 12.12. Oceni vrednost $\sin 0{,}1$ z napako manjšo od $5 \cdot 10^{-6}$.

Točka $x = 0{,}1$ je blizu $a = 0$, kjer poznamo vrednost funkcije sinus in vrednosti njenih odvodov. Spomnimo se, da so odvodi sodega reda funkcije $f(x) = \sin x$ enaki $\pm \sin x$, odvodi lihega reda pa $\pm \cos x$. V točki $a = 0$ so zato vrednosti odvodov sodega reda enake 0, odvodov lihega reda pa ± 1; bolj natančno, za poljuben $k \in \mathbb{N}_0$ je $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Poleg tega za poljuben x in poljuben n velja $|f^{(n)}(x)| \leq 1$.

Ocenimo velikost napake, ki je zagrešimo, če za približek $f(0{,}1)$ vzamemo vrednost Taylorjevega polinoma stopnje n s središčem v $a = 0$:

$$|R_{0,n}(0{,}1)| = \frac{|\sin^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!}0{,}1^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}10^{-n-1}.$$

Preverimo nekaj vrednosti za stopnjo n:

$n = 1: \quad |R_{0,1}(0{,}1)| \leq \frac{1}{2}\,10^{-2} = 5 \cdot 10^{-3}$

$n = 2: \quad |R_{0,2}(0{,}1)| \leq \frac{1}{6}\,10^{-3} < 1{,}7 \cdot 10^{-4}$

$n = 3: \quad |R_{0,3}(0{,}1)| \leq \frac{1}{24}\,10^{-4} < 5 \cdot 10^{-6}$

Ustrezen približek torej da Taylorjev polinom stopnje 3:

$$T_{0,3}(x) = \sin 0 + \sin' 0\,(x-0) + \frac{\sin''(0)}{2}\,(x-0)^2 + \frac{\sin'''(0)}{6}\,(x-0)^3 = x - \frac{1}{6}x^3.$$

Tako dobimo

$$T_{0,3}(0{,}1) = \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} = \frac{599}{6000} \doteq 0{,}\underline{099833}333,$$

prava vrednost pa je

$$\sin(0{,}1) \doteq 0{,}\underline{099833}416.$$

$\diamondsuit$

Včasih je ugodno Taylorjev polinom in pripadajočo Taylorjevo formulo izraziti s spremembo $h = x - a$. Z majhno zlorabo oznak tedaj pišemo

$$f(a+h) = T_{a,n}(h) + R_{a,n}(h),$$

kjer je

$$T_{a,n}(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k$$

in

$$R_{a,n}(h) = \frac{f^{(n+1)}(a+th)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

za neki $t \in (0,1)$.

4. Primitivna funkcija in nedoločeni integral

Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$ unija intervalov. Za funkcijo $g\colon A \to \mathbb{R}$ bomo rekli, da je *odvedljiva na množici* A, če je odvedljiva v vsaki notranji točki množice A in če ima ustrezen enostranski odvod v poljubnem krajišču poljubnega intervala iz A. Za takšno funkcijo g je njen odvod g' tudi funkcija $g'\colon A \to \mathbb{R}$. Za funkcijo $f = g'$ torej obstaja funkcija $F = g$, katere odvod je enak začetni funkciji f – funkciji F v tem primeru rečemo primitivna funkcija funkcije f.

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "\text{odvod}"] \arrow[d, equal] & g' \arrow[d, equal] \\ F & f \arrow[l, "\text{primitivna funkcija}"'] \end{tikzcd}$$

Ta pojem vpeljemo tudi za funkcije, za katere vnaprej ne vemo, da so odvod neke funkcije.

Definicija 12.13. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$ unija intervalov. Funkcija $f\colon A \to \mathbb{R}$ ima na množici A *primitivno funkcijo*, če obstaja taka odvedljiva funkcija $F\colon A \to \mathbb{R}$, da je $F' = f$.

Ko iščemo primitivno funkcijo za dano funkcijo f, se torej sprašujemo, odvod katere funkcije je funkcija f. Pri tem nam je v pomoč poznavanje odvodov osnovnih elementarnih funkcij. Prav tako pa si lahko pomagamo s pravili za odvod – pravilo, ki ga je zelo preprosto uporabiti, je linearnost odvoda.

Primer 12.14. Primeri primitivnih funkcij.

- Primitivna funkcija za $f(x) = 1$ je $F(x) = x$ ali $F(x) = x + 3$.
- Primitivna funkcija za $f(x) = x$ je $F(x) = \frac{x^2}{2}$ ali $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\sqrt{7}}{13}$.
- Ena primitivna funkcija za $f(x) = 11 - 7x$ je $F(x) = 11x - \frac{7x^2}{2}$.
- Ena primitivna funkcija za $f(x) = \sin x$ je $F(x) = -\cos x$
- Ena primitivna funkcija za $f(x) = e^{5x}$ je $F(x) = \frac{1}{5}e^{5x}$.

V primeru smo videli, da primitivna funkcija ni enolično določena, saj lahko primitivni funkciji prištejemo poljubno konstanto $C \in \mathbb{R}$ in dobimo drugačno primitivno funkcijo. Vprašamo se lahko, ali je to edina možnost – ali se dve primitivni funkciji vedno razlikujeta le za konstanto, ali obstajajo bistveno različne primitivne funkcije?

Trditev 12.15. *Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ interval in $f\colon J \to \mathbb{R}$ funkcija. Če sta F in G primitivni funkciji za f na J, potem obstaja taka konstanta $C \in \mathbb{R}$, da velja $F = G + C$, tj.*

$$F(x) = G(x) + C \quad \text{za vse} \quad x \in J.$$

Dokaz. Ker sta funkciji F in G obe primitivni za f, imata na J enak odvod. Zato ima funkcija $H := F - G$ na J odvod enak 0:

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Po posledici 11.10 Lagrangeevega izreka je zato funkcija H konstanta na intervalu J: $H(x) = C \in \mathbb{R}$ za vsak $x \in J$. $\square$

Opomba 12.16. Če definicijsko območje funkcije f sestoji iz več disjunktnih intervalov, pa primitivni funkciji na vsakem od teh intervalov lahko prištejemo drugačno konstanto. V tem primeru se dve primitivni funkciji <u>ne</u> razlikujeta nujno za konstanto na <u>celotnem</u> definicijskem območju.

Definicija 12.17. Naj bo $f\colon J \to \mathbb{R}$ funkcija, definirana na intervalu J. Družino vseh primitivnih funkcij funkcije f na J imenujemo *nedoločeni integral* funkcije f in jo označimo

$$\int f(x)\,dx;$$

funkcijo f imenujemo *integrand*.

Če je F ena primitivna funkcija za f na intervalu J, je torej

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubno število, ki ga imenujemo *splošna konstanta* ali *integracijska konstanta*.

Iz tabele odvodov osnovnih elementarnih funkcij lahko sestavimo tabelo primitivnih funkcij in s tem nedoločenih integralov (na intervalu). Pri tem je izhodiščna funkcija za izračun primitivne funkcije odvod v tabeli odvodov.

$g(x) =$	x^r	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	b^x	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\log_b x$
$g'(x) =$	rx^{r-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$b^x \ln b$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{1}{x \ln b}$

Iz tabele sledi, da je primitivna funkcija za $f(x) = rx^{r-1}$ enaka $F(x) = x^r$. Namesto tega pravila pa želimo poiskati primitivno funkcijo za splošno potenco. Ker je odvajanje linearna preslikava, se deljenje funkcije F z r prenese na deljenje funkcije f z r, zato je primitivna funkcija za $f(x) = x^{r-1}$ enaka $F(x) = \dfrac{x^r}{r}$ – to seveda velja le, če je $r \neq 0$. Z vpeljavo nove oznake $s := r - 1$ končno vidimo, da je primitivna funkcija za $f(x) = x^s$ enaka $F(x) = \dfrac{x^{s+1}}{s+1}$, če je le $s \neq -1$.

Kaj pa je primitivna funkcija za $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$? Iz tabele odvodov vidimo, da je to $F(x) = \ln x$, ki pa je definirana le na intervalu $(0, \infty)$. Ali to pomeni, da ta funkcija f nima primitivne funkcije za $x < 0$? Logaritemsko funkcijo lahko razširimo tudi levo od izhodišča npr. tako, da jo komponiramo z absolutno vrednostjo. Odvod funkcije $F(x) = \ln|x|$ za $x > 0$ že poznamo. Obravnavajmo še $x < 0$:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$$

Ena primitivna funkcija za $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je torej $F(x) = \ln|x|$. Pripomnimo, da lahko pri poljubni primitivni funkciji za f konstanti levo in desno od izhodišča izberemo neodvisno eno od druge.

Vemo že, da lahko poljubno eksponentno funkcijo izrazimo z naravno $f(x) = e^x$, zato so vse eksponentne funkcije zajete v $f(x) = e^{ax}$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ neko število. Ker je odvod te funkcije

enak $f'(x) = ae^{ax}$, lahko pri $a \neq 0$ za njeno primitivno funkcijo izberemo $F(x) = \dfrac{e^{ax}}{a}$. Podobno vidimo, da zadošča obravnavati le naravno logaritemsko funkcijo.

Ugodno je poznati tudi primitivni funkciji za funkciji $x \mapsto \sin(ax)$ in $x \mapsto \cos(ax)$ za $a \neq 0$. Ker sta odvoda teh funkcij zapovrstjo $x \mapsto a\cos(ax)$ in $x \mapsto -a\sin(ax)$, podobno kot pri eksponentni funkciji primitivni funkciji dobimo z deljenjem primitivnih funkcij z a oziroma $-a$.

Iz tabele odvodov ob upoštevanju zgornjih opomb sledi naslednja tabela primitivnih funkcij. Pri tem sta $r \neq -1$ in $a \neq 0$ realni števili.

$f(x) =$	x^r	$\dfrac{1}{x}$	$\sin(ax)$	$\cos(ax)$	$\dfrac{1}{\cos^2(ax)}$	e^{ax}	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$F(x) =$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$-\dfrac{\cos(ax)}{a}$	$\dfrac{\sin(ax)}{a}$	$\dfrac{\operatorname{tg}(ax)}{a}$	$\dfrac{e^{ax}}{a}$	$\arcsin x$	$\operatorname{arctg} x$

Opazimo, da je primitivna funkcija za $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ tudi $F(x) = -\arccos x$, torej se funkciji arcsin in $-\arccos$ razlikujeta za neko konstanto.

Podobno kot iz tabele odvodov sledi tabela primitivnih funkcij, tudi iz pravil za odvajanje sledijo pravila za računanje s primitivnimi funkcijami oziroma pravila nedoločenega integrala.

Trditev 12.18 (linearnost integrala). *Naj imata funkciji $f, g\colon J \to \mathbb{R}$ primitivni funkciji na intervalu J in naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ poljubni števili. Potem velja*

$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx.$$

Dokaz. To sledi neposredno iz linearnosti odvoda. Če je F primitivna funkcija za f in G primitivna funkcija za g, potem je

$$(aF + bG)' = aF' + bG' = af + bg,$$

zato je $aF + bG$ primitivna funkcija za $af + bg$. □

Iz verižnega pravila za odvod sledi naslednje pravilo, ki ga s tujko na kratko imenujemo *substitucija*.

Izrek 12.19 (uvedba nove spremenljivke). *Naj bo $g\colon J \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija na intervalu J in naj ima $f\colon g(J) \to \mathbb{R}$ primitivno funkcijo F na intervalu $g(J)$. Potem je $F \circ g$ primitivna funkcija za $x \mapsto f(g(x))g'(x)$ na J, torej velja*

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt,$$

kjer je $t = g(x)$ nova spremenljivka.

Dokaz. Da je $F \circ g$ res primitivna funkcija za zgornjo funkcijo, preverimo z odvodom:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Zato je

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C \underbrace{=}_{t=g(x)} F(t) + C = \int f(t)\,dt.$$

Če upoštevamo, da je diferencial funkcije $t = g(x)$ enak $dt = g'(x)\,dx$, lahko formulo dobimo neposredno s preoblikovanjem prvotnega integrala:

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{t})\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{dt} = \int f(t)\,dt.$$

$\square$

Izrek 12.20 (integracija po delih). *Za odvedljivi funkciji $f, g\colon J \to \mathbb{R}$ na intervalu J velja*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

Pravilo v izreku lahko napišemo krajše, če uvedemo novi spremenljivki

$$u = f(x) \quad \text{in} \quad v = g(x),$$

za kateri velja

$$du = f'(x)\,dx \quad \text{in} \quad dv = g'(x)\,dx.$$

Pravilo potem postane

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Glavna naloga pri uporabi te formule je izbira ustreznih delov u in dv v integralu na levi strani. Iz teh pa potem izračunamo du in v, ki ju potrebujemo na desni. Uporabo pravila lahko shematično predstavimo takole:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int u\,dv & = & uv - \displaystyle\int v\,du \\ u = f(x) & \Big| & du = f'(x)\,dx \\ dv = g'(x)\,dx & \Big| & v = g(x) \end{array}$$

Dokaz. Pravilo sledi neposredno iz formule za odvod produkta funkcij.

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \Longrightarrow$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) + C \quad \Longrightarrow$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

$\square$

To pravilo na kratko s tujko imenujemo *per-partes*.

Primer 12.21. Izračunaj integral $\displaystyle\int x\sin(x^2)\,dx$.

Integrand je produkt dveh funkcij, kjer pa je druga funkcija kompozitum $x \mapsto \sin(x^2)$. Integral lahko zato poskusimo poenostaviti z vpeljavo nove spremenljivke $t = x^2$. Za to velja $dt = 2x\,dx$, torej je $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dt$. Z upoštevanjem tega sledi

$$\int x\sin(x^2)\,dx = \int \frac{1}{2}\sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C.$$

$\diamondsuit$

Primer 12.22. Izračunaj integral $\displaystyle\int x\sin x\,dx$.

Tudi tokrat je integrand produkt dveh funkcij, a nobena od teh ni kompozitum. Zato poskusimo uporabiti pravilo za integracijo po delih. Izberemo lahko

$$u = x \quad \text{in} \quad dv = \sin x\,dx,$$

od koder izračunamo

$$du = dx \quad \text{in} \quad v = -\cos x.$$

Z uporabo pravila dobimo

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

$\diamondsuit$

Vprašajmo se, ali bi v zgornjem primeru lahko dela izbrali drugače. Če integrand zapišemo drugače

$$\int x \sin x \, dx = \int \sin(x) \cdot x \, dx,$$

bi bila naravna izbira delov

$$u = \sin x \quad \text{in} \quad dv = x \, dx,$$

od koder izračunamo

$$du = \cos x \, dx \quad \text{in} \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Z uporabo pravila dobimo

$$\int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x \, dx.$$

Zadnji integral ni nič preprostejši od začetnega (v resnici je bolj kompliciran, saj ima poleg trigonometrične funkcije kvadratni člen, prvotni integral pa je imel linearnega), kar nakazuje, da naša izbira delov ni bila dobra (ob predpostavki, da bomo integral lahko izračunali s to metodo).

Za konec povejmo še nekaj o obstoju primitivne funkcije. Drugače kot pri odvodih elementarnih funkcij, ki so vedno elementarne funkcije, primitivna funkcija elementarne funkcije ni nujno elementarna. Tak primer je npr. funkcija $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. A če ne obstaja primitivna funkcija, ki bi bila elementarna, to še ne pomeni, da funkcija nima primitivne funkcije. Pri Analizi 2 boste spoznali, da ima vsaka zvezna funkcija primitivno funkcijo. Obstajajo pa tudi funkcije, ki na danem intervalu nimajo primitivne funkcije. Na primer funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x < 0 \\ a & ; \quad x = 0 \\ 1 & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

za nobeno izbiro števila a nima primitivne funkcije na $\mathbb{R}$ (oziroma na kateremkoli intervalu, ki vsebuje 0). Edina možna primitivna funkcija (do aditivne konstante natanko) bi bila namreč $F(x) = |x|$, ki pa ni odvedljiva v 0.

POGLAVJE 13

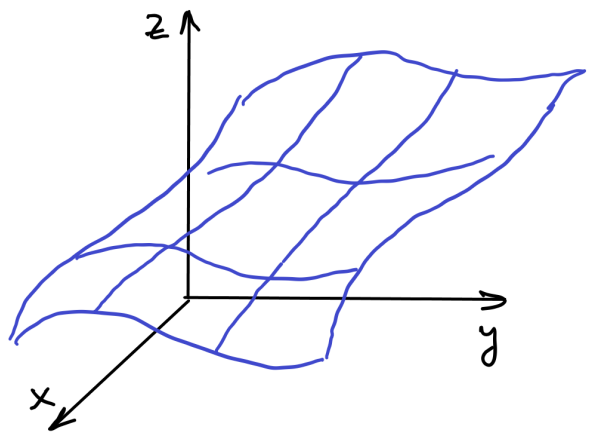
Odvod funkcij več spremenljivk

1. Parcialni odvodi

Začnimo s funkcijo dveh spremenljivk: naj bo $A \subset \mathbb{R}^2$ in $f\colon A \to \mathbb{R}$. Neodvisni spremenljivki označimo z $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, odvisno pa z z, torej je $z = f(x, y)$. Spomnimo se, da je graf funkcije f podmnožica prostora $\mathbb{R}^3$:

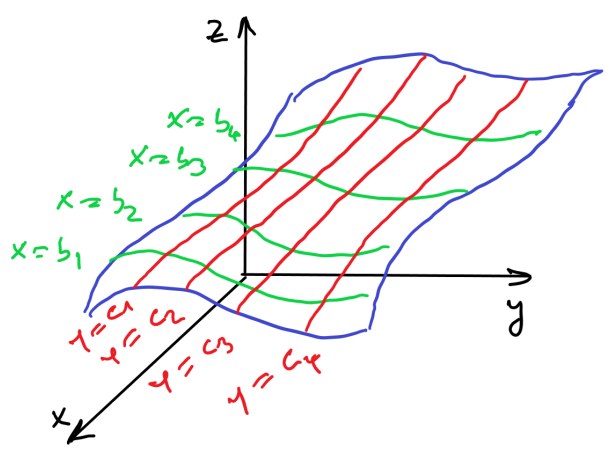
$$\Gamma_f = \{\, (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in A \,\}\,.$$

Vrednost funkcije lahko interpretiramo kot višino z točke na grafu funkcije nad točko (x, y). Graf tako predstavlja površje (ploskev) oziroma relief.



Ideja parcialnega odvoda je, da iz funkcije f pridobimo funkcijo ene spremenljivke, ki jo potem odvajamo. To naredimo tako, da spreminjamo le eno od neodvisnih spremenljivk x in y, drugo pa fiksiramo. Na ta način iz f pridobimo različne *koordinatne funkcije*:

- če postavimo $y = c$ za neki $c \in \mathbb{R}$, dobimo *x-koordinatno funkcijo* $x \mapsto f(x, c)$;
- podobno pri $x = b$ za poljuben $b \in \mathbb{R}$ dobimo *y-koordinatno funkcijo* $y \mapsto f(b, y)$.



Graf koordinatne funkcije imenujemo *koordinatna krivulja*.

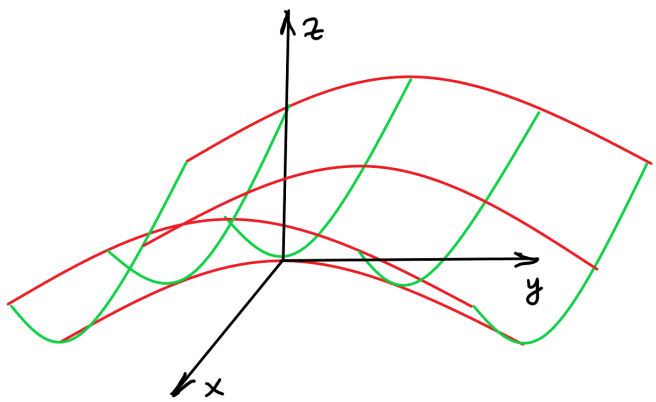
Primer 13.1. Koordinatne krivulje funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Izberimo nekaj vrednosti spremenljivke y. Pripadajoče x-koordinatne krivulje so parabole s pozitivnim vodilnim koeficientom.

$y =$	-2	-1	0	1	2
$f(x,y) =$	x^2-4	x^2-1	x^2	x^2-1	x^2-4

Za izbrane vrednosti spremenljivke x so pripadajoče y-koordinatne krivulje parabole z negativnim vodilnim koeficientom.

$x =$	-2	-1	0	1	2
$f(x,y) =$	$4-y^2$	$1-y^2$	$-y^2$	$1-y^2$	$4-y^2$

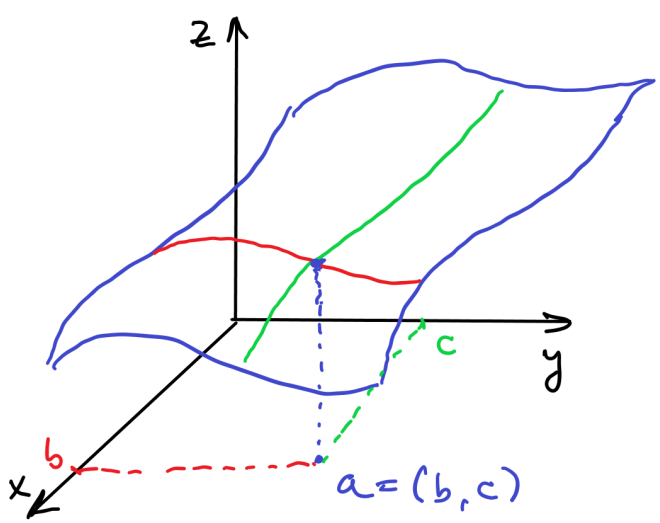


$\diamondsuit$

Parcialni odvod funkcije f v točki $a = (b,c) \in \mathbb{R}^2$ je odvod koordinatne funkcije skozi to točko. Skozi pripadajočo točko $(a, f(a))$ na grafu potekata dve koordinatni krivulji, vsaki ustreza parcialni odvod po eni spremenljivki.

Fiksirajmo najprej spremenljivko $y = c$, spremenljivka x pa naj teče po okolici točke b; odvod pripadajoče x-koordinatne funkcije $x \mapsto f(x,c)$ v točki $x = b$ je *parcialni odvod funkcije f po spremenljivki x v točki $a = (b,c)$*:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(b,c) := \lim_{x \to b} \frac{f(x,c) - f(b,c)}{x-b}.$$



Če fiksiramo spremenljivko $x = b$ in pustimo, da spremenljivka y teče po okolici točke c, dobimo y-koordinatno funkcijo $y \mapsto f(b, y)$, katere odvod v točki $y = c$ je *parcialni odvod funkcije f po spremenljivki y v točki $a = (b, c)$*:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(b, c) := \lim_{y \to c} \frac{f(b, y) - f(b, c)}{y - c}.$$

Podobno iz funkcije k spremenljivk dobimo njene koordinatne funkcije tako, da fiksiramo vse neodvisne spremenljivke razen ene. Tako nastala koordinatna funkcija je funkcija ene spremenljivke. Odvod te funkcije ene spremenljivke je parcialni odvod celotne funkcije k spremenljivk po prosti spremenljivki. Funkcija k spremenljivk ima v vsaki točki torej k parcialnih odvodov.

Definicija 13.2. Naj bo f funkcija k spremenljivk, definirana v okolici točke $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$. *Parcialni odvod* funkcije f v točki a po spremenljivki x_i $(i = 1, \ldots, k)$ je odvod *i-te koordinatne funkcije*

$$x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_k)$$

v točki $x_i = a_i$, torej

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) - f(a)}{x_i - a_i},$$

če ta limita obstaja.

Opomba 13.3. Pri parcialnem odvajanju torej vse neodvisne spremenljivke razen tiste, po kateri odvajamo, obravnavamo kot konstante (ali kot dodatne parametre, ki so neodvisni od spremenljivke, po kateri odvajamo).

Primer 13.4. Poišči parcialna odvoda funkcije $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & ; \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ v poljubni točki iz $\mathbb{R}^2$.

V točkah $(x, y) \neq (0, 0)$ si pri izračunu parcialnega odvoda lahko pomagamo z običajnimi pravili za odvajanje funkcij ene spremenljivke, saj je v okolici take točke funkcija f elementarna funkcija v vsaki spremenljivki posebej.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

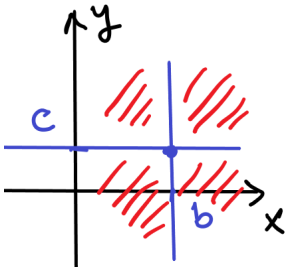
Parcialna odvoda v izhodišču pa moramo izračunati po definiciji.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$$

$\diamondsuit$

Opomba 13.5. Funkcija v primeru <u>ni</u> zvezna v točki $(0, 0)$, saj vemo, da v tej točki nima limite. Vseeno pa ima v tej točki parcialna odvoda. To je zelo drugače kot pri funkcijah ene spremenljivke, kjer obstoj odvoda zagotavlja zveznost funkcije. Razlog za to, da je obstoj parcialnih odvodov v neki točki tako šibek pogoj, je, da parcialni odvod vidi le obnašanje funkcije na koordinatni krivulji. Unija definicijskih območij obeh koordinatnih krivulj skozi dano točko pa pokrije le majhen del okolice te točke.



Tudi za parcialni odvod obstaja več različnih oznak. Naj bo f funkcija k spremenljivk in i indeks med 1 in k. Potem parcialni odvod po i-ti spremenljivki x_i označujemo:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = \partial_{x_i} f = \partial_i f.$$

Vpeljimo še parcialne odvode višjih redov. Parcialni odvod je funkcija in če je ta parcialno odvedljiva, njen parcialni odvod imenujemo parcialni odvod drugega reda. Oglejmo si najprej situacijo pri funkcijah dveh spremenljivk. Naj ima $z = f(x, y)$ parcialna odvoda 1. reda

$$z_x = f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{in} \quad z_y = f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Če je f_x parcialno odvedljiva po spremenljivki x, ta parcialni odvod imenujemo *drugi parcialni odvod funkcije f po x* ali *parcialni odvod* 2. *reda funkcije f po x* in ga označimo:

$$z_{xx} = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Če je f_x parcialno odvedljiva po spremenljivki y, ta parcialni odvod imenujemo *drugi parcialni odvod funkcije f, najprej po x, nato po y* ali *mešani parcialni odvod* 2. *reda funkcije f* in ga označimo:

$$z_{xy} = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Podobno, če je f_y parcialno odvedljiva po spremenljivki x, ta mešani parcialni odvod 2. reda označimo

$$z_{yx} = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Če pa je f_y še enkrat parcialno odvedljiva po y, je definiran tudi drugi parcialni odvod po y:

$$z_{yy} = f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Če so vsi parcialni odvodi 2. reda naprej parcialno odvedljivi po x in y, so definirani naslednji odvodi 3. reda:

$$f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \quad f_{xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \quad f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x},$$

$$f_{yxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad f_{yxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \quad f_{yyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad f_{yyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Funkcija k spremenljivk ima tako lahko v točki $x \in \mathbb{R}^k$ naslednje parcialne odvode reda dva:

$$f_{x_i x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \text{za} \quad i, j = 1, 2, \ldots, k$$

ter naslednje parcialne odvode reda tri:

$$f_{x_i x_j x_l}(x) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_l \partial x_j \partial x_i}(x) \quad \text{za} \quad i, j, l = 1, 2, \ldots, k.$$

Primer 13.6. Izračunaj parcialne odvode drugega reda funkcije $f(x, y) = xe^{xy}$.

Za izračun odvodov 2. reda moramo najprej izračunati odvoda 1. reda:

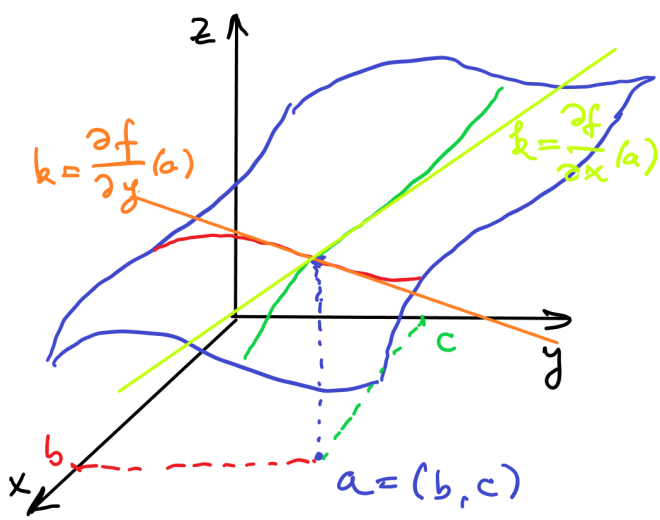
$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= e^{xy} + xye^{xy} = (1+xy)e^{xy} \\
f_y(x,y) &= x^2e^{xy} \\
f_{xx}(x,y) &= ye^{xy} + (1+xy)ye^{xy} = y(2+xy)e^{xy} \\
f_{xy}(x,y) &= xe^{xy} + (1+xy)xe^{xy} = x(2+xy)e^{xy} \\
f_{yx}(x,y) &= 2xe^{xy} + x^2ye^{xy} = x(2+xy)e^{xy} \\
f_{yy}(x,y) &= x^3e^{xy}
\end{aligned}$$

Opazimo, da sta mešana parcialna odvoda 2. reda enaka. To ni zgolj slučaj, ampak – kot bomo videli – vedno velja, če je le funkcija dovolj lepa. ♢

2. Totalni diferencial in diferenciabilnost

Naj bo f funkcija dveh spremenljivk, definirana v okolici točke $a = (b,c) \in \mathbb{R}^2$. Denimo, da je f v točki a parcialno odvedljiva po obeh neodvisnih spremenljivkah. Tangentni premici na koordinatni krivulji sta dani z enačbama:

$$z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-b) \quad \text{in} \quad z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-c).$$



Ti premici skupaj razpenjata ravnino skozi točko $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^3$ z enačbo

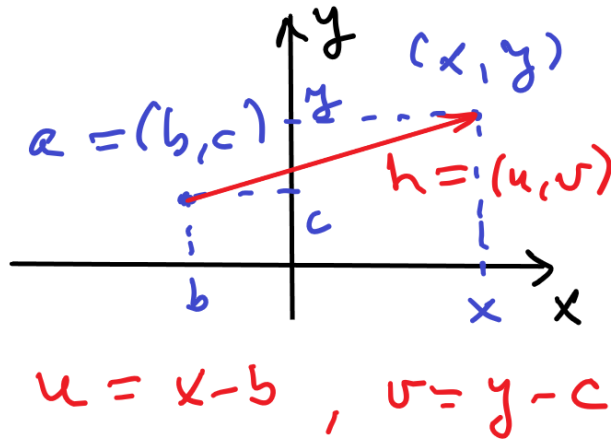
$$z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-c),$$

ki podaja ravnino v parametrični obliki. Tej ravnini rečemo *tangentna ravnina* na graf funkcije f v točki a. Po analogiji z odvedljivostjo funkcije ene spremenljivke, ki je ekvivalentna temu, da tangentna premica dobro aproksimira graf funkcije blizu točke tangentnosti, za odvedljivost funkcije dveh spremenljivk zahtevamo, da tangentna ravnina dobro aproksimira graf funkcije v okolici točke a. Kako dobra je aproksimacija, meri razlika:

$$R_a(x,y) := f(x,y) - \left(f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-c) \right).$$

Točko (x,y) lahko glede na točko $a = (b,c)$ izrazimo s pomočjo spremembe $h = (u,v)$:

$$(x,y) = a + h = (b,c) + (u,v) \implies x = b+u,\ y = c+v$$



oziroma

$$h = (x, y) - a = (x, y) - (b, c), \quad \Longrightarrow \quad u = x - b, \ v = y - c.$$

Potem lahko formulo za spremembo vrednosti funkcije f, ko se iz točke $a = (b, c)$ premaknemo v točko $a + h$, kjer je $h = (u, v)$, izrazimo v obliki

$$R_a(h) = f(a + h) - (f(a) + f_x(a)u + f_y(a)v)\,.$$

Pogoj, da je točka $a + h$ blizu a, pa ustreza temu, da je h blizu $0 = (0, 0)$. V pogoju za odvedljivost zato primerjamo vrednosti razlike z $\|h\|$.

Definicija 13.7. Funkcija f je *odvedljiva* ali *diferenciabilna* v točki $a = (b, c)$, če gre razlika $R_a(x, y)$ proti 0 hitreje kot oddaljenost točke (x, y) od točke a, ko pošljemo točko (x, y) proti točki a:

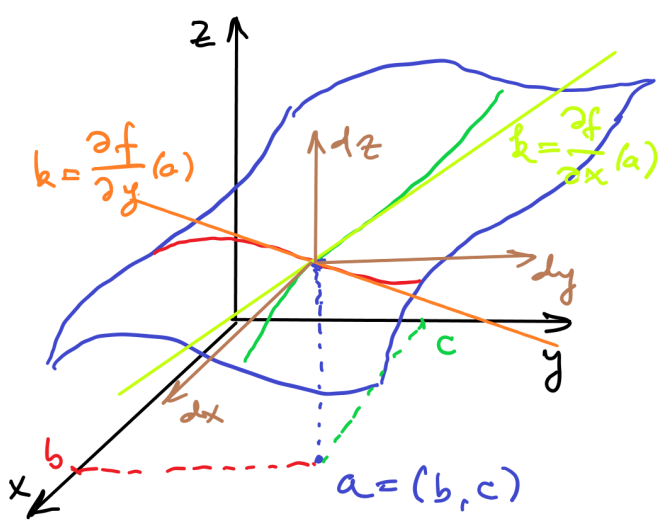
$$\lim_{(x,y)\to a} \frac{R_a(x, y)}{\|(x, y) - a\|} = \lim_{(x,y)\to(b,c)} \frac{R_{(b,c)}(x, y)}{\sqrt{(x - b)^2 + (y - c)^2}} = 0.$$

Ekvivalentno, f je odvedljiva v a, če velja

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_a(h)}{\|h\|} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{R_a(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0.$$

Formulo za razliko R_a lahko zapišemo krajše, če uvedemo oznako za diferencial funkcije, kot smo to storili pri funkcijah ene spremenljivke. Prestavimo izhodišče koordinatnega sistema v točko $(a, f(a))$, kjer je $a = (b, c)$, in označimo koordinate glede na to izhodišče kot diferenciale:

$$dx = x - b, \quad dy = y - c, \quad \text{in} \quad dz = z - f(a).$$



Glede na te koordinate je enačba tangentne ravnine enaka

$$dz = f_x(a)dx + f_y(a)dy.$$

Zadnji izraz imenujemo tudi *diferencial* funkcije $z = f(x, y)$ v točki a in ga označimo z $df(a)$. Diferencial $df(a)$ je linearna preslikava, katere vrednost pri spremembi $h = (u, v)$ označimo z

$$df(a)h = f_x(a)u + f_y(a)v = (f_x(a), f_y(a)) \cdot (u, v).$$

Vektor na levi v skalarnem produktu imenujemo *gradient funkcije f v točki a* in ga označimo z

$$\nabla f(a) = (f_x(a), f_y(a)), \quad \text{torej je} \quad df(a)h = \nabla f(a) \cdot h.$$

S pomočjo diferenciala lahko zapišemo pogoj diferenciabilnosti funkcije f v točki a takole:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - df(a)h}{\|h\|} = 0.$$

Vse zgornje pojme lahko sedaj posplošimo na funkcije več spremenljivk.

Definicija 13.8. Naj bo f funkcija k spremenljivk, ki je parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah v točki $a \in \mathbb{R}^k$. *(Totalni) diferencial* funkcije f v točki a je

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)dx_k.$$

Vrednost diferenciala funkcije f pri spremembi $h = (h_1, h_2, \ldots, h_k) \in \mathbb{R}^k$ neodvisne spremenljivke je enaka

$$df(a)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k = \nabla f(a) \cdot h,$$

kjer je vektor $\nabla f(a) = (f_{x_1}(a), f_{x_2}(a), \ldots, f_{x_k}(a))$ *gradient* funkcije f v točki a. Funkcija f je *odvedljiva* ali *diferenciabilna* v točki a, če velja

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - df(a)h}{\|h\|} = 0,$$

kjer je $R_a(h) = f(a + h) - f(a) - df(a)h$ napaka pri aproksimaciji vrednosti funkcije $f(a + h)$ z vrednostjo na *tangentnem prostoru*

$$z = f(a) + df(a)h$$

v točki a pri spremembi $h \in \mathbb{R}^k$.

Kot pri funkcijah ene spremenljivke iz odvedljivosti sledi zveznost. Obstoj limite v pogoju za diferenciabilnost ima za posledico, da gre izraz v števcu proti 0. Ker je diferencial $df(a)$ linearna preslikava in zato zvezna, je

$$\lim_{h \to 0} df(a)h = df(a)0 = 0 \implies \lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a).$$

Trditev 13.9. *Če je funkcija več spremenljivk diferenciabilna v neki točki, je v tej točki tudi zvezna.*

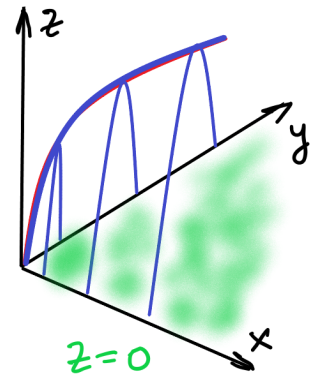
Kot smo videli, le obstoj parcialnih odvodov ni dovolj za zveznost funkcije v točki, zato tudi ne za njeno diferenciabilnost. Kaj pa, če je v neki točki funkcija zvezna in ima v tej točki tudi vse parcialne odvode – ali je potem tudi diferenciabilna? Odgovor je tudi v tem primeru negativen, kot pokaže npr. funkcija $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$. Funkcija je zvezna na $\mathbb{R}^2$, saj je sestavljena iz elementarnih funkcij. Poleg tega so njene vrednosti vzdolž koordinatnih osi enake 0, zato sta oba parcialna odvoda v izhodišču enaka 0. Limita v pogoju diferenciabilnosti v izhodišču tako postane

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0) - df(0)h}{\|h\|} = \lim_{(u,v) \to (0,0)} \frac{\sqrt[3]{uv}}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Oglejmo si izraz pod limito vzdolž premice $v = u$:

$$\frac{\sqrt[3]{uv}}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{u^{2/3}}{|u|\sqrt{2}} = \frac{1}{|u|^{1/3}\sqrt{2}}.$$

Ker ta limita pri $u \to 0$ ne obstaja, tudi celotna limita ne obstaja. Ravnina $z = 0$ je v tem primeru zelo slaba aproksimacija za graf funkcije f v okolici izhodišča. Poimenovanje tangentna ravnina je zato smiselno le, ko je funkcija diferenciabilna, saj sta tedaj graf funkcije in tangentna ravnina v okolici točke tangentnosti »zlepljena«, tj. graf funkcije »leži vzdolž« tangentne ravnine.



Diferenciabilnost je po definiciji težko preverjati, po drugi strani pa je parcialne odvode praviloma relativno lahko izračunati. Zato želimo poiskati kak pogoj, ki zagotavlja odvedljivost funkcije na osnovi lastnosti njenih parcialnih odvodov.

Izrek 13.10 (kriterij za diferenciabilnost). *Naj bo f funkcija k spremenljivk, ki je parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah v neki okolici točke $a \in \mathbb{R}^k$. Če so vsi prvi parcialni odvodi funkcije f v točki a zvezni, potem je f diferenciabilna v točki a.*

Dokaz. Pogoj diferenciabilnosti pravi, da mora iti razlika

$$R_a(h) = f(a+h) - f(a) - df(a)h$$

proti 0 hitreje kot $\|h\|$, ko pošljemo h proti 0. Ideja dokaza je razvidna že pri funkcijah dveh spremenljivk, zato bomo v nadaljevanju privzeli $k = 2$. Pišimo $a = (b, c)$ in $h = (u, v)$.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(b+u, c+v) - f(b, c) \\ &= f(b+u, c+v) - f(b, c+v) + f(b, c+v) - f(b, c). \end{aligned}$$

Po predpostavki je koordinatna funkcija $x \mapsto f(x, c+v)$ odvedljiva v okolici točke b, zato po Lagrangeevem izreku obstaja tako število s med 0 in u, da je

$$f(b+u, c+v) - f(b, c+v) = f_x(b+s, c+v) \cdot u.$$

Prav tako je v okolici točke c odvedljiva koordinatna funkcija $y \mapsto f(b, y)$, zato obstaja tak t med 0 in v, da je

$$f(b, c+v) - f(b, c) = f_y(b, c+t) \cdot v.$$

Če to upoštevamo v zgornji formuli za $f(a+h) - f(a)$, dobimo

$$f(a+h) - f(a) = f_x(b+s, c+v)u + f_y(b, c+t)v.$$

V formuli za razliko $R_a(h)$ poleg tega upoštevamo še, da je

$$df(a)h = f_x(b, c)u + f_y(b, c)v.$$

Tako je

$$\begin{aligned} R_a(h) &= f(a+h) - f(a) - df(a)h \\ &= (f_x(b+s, c+v) - f_x(b, c))u + (f_y(b, c+t) - f_y(b, c))v. \end{aligned}$$

Ker je $\|h\| = \sqrt{u^2+v^2} \geq |u|, |v|$, lahko ocenimo

$$\begin{aligned} \left|\frac{R_a(h)}{\|h\|}\right| &\leq |f_x(b+s, c+v) - f_x(b, c)|\frac{|u|}{\|h\|} + |f_y(b, c+t) - f_y(b, c)|\frac{|v|}{\|h\|} \\ &\leq |f_x(b+s, c+v) - f_x(b, c)| + |f_y(b, c+t) - f_y(b, c)|. \end{aligned}$$

Ko pošljemo $h = (u, v)$ proti 0, gresta tudi s in t proti 0, zato gresta točki $(b + s, c + v)$ in $(b, c + t)$ proti $(b, c) = a$. Po predpostavki sta parcialna odvoda v tej točki zvezna, zato gresta izraza znotraj absolutnih vrednosti proti 0. To pomeni

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{R_a(h)}{\|h\|}\right| = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{h\to 0}\frac{R_a(h)}{\|h\|} = 0,$$

torej je f res diferenciabilna v točki a. □

Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^k$ odprta množica in $f\colon U \to \mathbb{R}$. Denimo, da ima f v vsaki točki množice U prve parcialne odvode po vseh spremenljivkah in da so vsi ti odvodi funkcije f zvezni na U. Tedaj je po zgornjem izreku funkcija f diferenciabilna v vsaki točki iz U. Za takšno funkcijo f rečemo, da je *enkrat zvezno odvedljiva* na množici U, in pišemo $f \in C^1(U)$.

Podobno terminologijo vpeljemo za odvode višjega reda: če na U obstajajo vsi parcialni odvodi drugega reda funkcije f in so zvezni, rečemo, da je f *dvakrat zvezno odvedljiva* na U in pišemo $f \in C^2(U)$. Splošno: če za neki $r \in \mathbb{N}$ na U obstajajo vsi parcialni odvodi reda r in so zvezni, je f *r-krat zvezno odvedljiva* na U, $f \in C^r(U)$. Kot pri funkcijah ene spremenljivke lahko vpeljemo tudi pojem poljubno mnogokrat odvedljivih funkcij:

$$C^\infty(U) := \bigcap_{r=0}^{\infty} C^r(U),$$

kjer $C^0(U) = C(U)$ označuje množico zveznih funkcij na U.

Oglejmo si še, pod kakšnimi pogoji so mešani parcialni odvodi enaki, tj. kdaj vrstni red parcialnih odvodov ne vpliva na rezultat.

Izrek 13.11 (enakost mešanih odvodov). *Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^k$ odprta in $f \in C^2(U)$. Potem za vsak $x \in U$ in poljubna $i, j = 1, \ldots, k$ velja*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Bolj splošno, če je $f \in C^r(U)$ za neki $r \in \mathbb{N}$, potem vrstni red parcialnih odvodov reda največ r ne vpliva na rezultat.

Dokaz. Ker v formuli nastopata le dve neodvisni spremenljivki, jo je dovolj dokazati za funkcijo dveh spremenljivk. Izberimo točko $a = (b, c)$ in naj bo $h = (u, v)$ (dovolj majhen) vektor spremembe z neničelnima komponentama. Oglejmo si naslednji izraz:

$$F := f(b + u, c + v) - f(b, c + v) - f(b + u, c) + f(b, c).$$

Če označimo $g(y) = f(b + u, y) - f(b, y)$, lahko F izrazimo z g:

$$F = g(c + v) - g(c).$$

Funkcija g je razlika koordinatnih funkcij funkcije f, zato je po predpostavki odvedljiva v okolici točke c. Po Lagrangeevem izreku potem obstaja taka točka t med 0 in v, da je

$$F = g(c + v) - g(c) = g'(c + t)v = (f_y(b + u, c + t) - f_y(b, c + t))v.$$

Po predpostavki je parcialni odvod f_y na U odvedljiva funkcija, zato ponovno po Lagrangeevem izreku obstaja taka točka s med 0 in u, da velja

$$F = (f_y(b + u, c + t) - f_y(b, c + t))v = f_{yx}(b + s, c + t)uv.$$

Če v izrazu F preuredimo člene

$$F = f(b + u, c + v) - f(b + u, c) - f(b, c + v) + f(b, c),$$

lahko ponovimo zgornji argument z zamenjano vlogo spremenljivk x in y (posebej vzamemo $g(x) = f(x, c + v) - f(x, c)$). Obstajata torej taki števili s' med 0 in u ter t' med 0 in v, da je

$$F = f_{xy}(b + s', c + t')uv.$$

Od tod sledi

$$f_{yx}(b+s,c+t)uv = f_{xy}(b+s',c+t')uv \quad \Longrightarrow \quad f_{yx}(b+s,c+t) = f_{xy}(b+s',c+t').$$

Ko pošljemo $h=(u,v)$ proti 0, gredo tudi s,s',t,t' proti 0, zato iz predpostavljene zveznosti odvodov drugega reda sledi želena enakost mešanih odvodov:

$$f_{yx}(b,c) = f_{xy}(b,c).$$

Splošnejši rezultat sledi iz dokazanega, saj zgornja formula pomeni, da lahko zamenjamo vrstni red parcialnih odvodov

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

če le ti delujejo na (vsaj) dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo. □

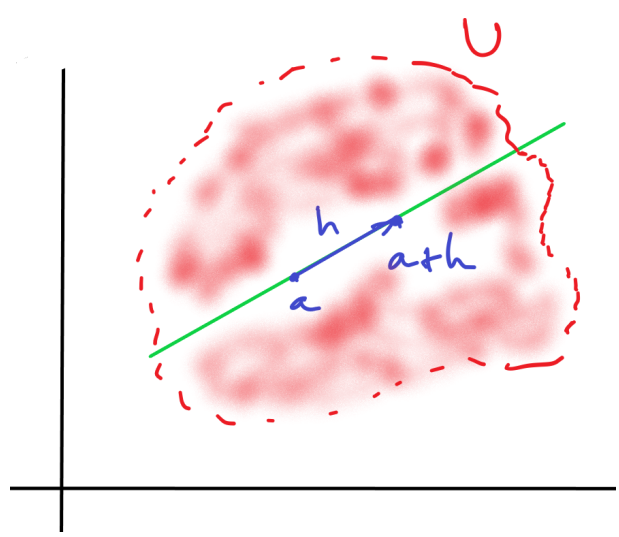
3. Taylorjeva formula in verižno pravilo

Naj bo f funkcija k spremenljivk, ki je diferenciabilna v točki $a \in \mathbb{R}^k$. Potem je v bližnjih točkah $a+h$, torej za majhne vektorje spremembe $h=(h_1,\ldots,h_k) \in \mathbb{R}^k$, tangentna aproksimacija dober približek za vrednosti funkcije f:

$$f(a+h) \doteq f(a) + df(a)h = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k.$$

Kot za funkcije ene spremenljivke želimo poiskati boljši približek z upoštevanjem odvodov višjih redov. Ideja konstrukcije Taylorjevega polinoma za funkcijo več spremenljivk je, da nalogo prevedemo na funkcijo ene spremenljivke.

Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^k$ odprta množica in $f\colon U \to \mathbb{R}$. Izberimo središče $a \in U$ in tako neničelno spremembo $h \in \mathbb{R}^k$, da celotna daljica s krajiščema a in $a+h$ leži v U. Zožitev funkcije f na to daljico (ali na njeno nosilko) je funkcija ene spremenljivke. Ker je h smerni vektor nosilke, so točke na nosilki oblike $a+sh$ za $s \in \mathbb{R}$.



S predpisom $F(s) := f(a+sh)$ je torej določena funkcija ene spremenljivke, ki je definirana na intervalu $[0,1]$ (oziroma na nekem večjem odprtem intervalu, ki vsebuje interval $[0,1]$). Vrednost funkcije F pri $s=0$ je začetni podatek $F(0)=f(a)$, njena vrednost pri $s=1$ pa je iskana vrednost $F(1)=f(a+h)$. Če je funkcija f $(n+1)$-krat odvedljiva na množici U, je tudi F $(n+1)$-krat odvedljiva na okolici intervala $[0,1]$, zato lahko zapišemo Taylorjevo formulo za $F(1)$

s središčem v 0:

$$F(1) = \underbrace{F(0) + F'(0) + \frac{F^{(2)}(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}}_{\text{Taylorjev polinom stopnje } n} + \underbrace{\frac{F^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}}_{\text{ostanek}}$$

za neki $t \in (0,1)$. Na načelni ravni je s tem naloga rešena, a mi bi želeli podatke v Taylorjevi formuli izraziti neposredno z odvodi funkcije f. Vemo že, da je $F(0) = f(a)$. Poleg tega pričakujemo, da prvi odvod $F'(0)$ ustreza diferencialu funkcije, tako da prva dva člena v Taylorjevem polinomu skupaj predstavljata tangentno aproksimacijo. Poglejmo, kaj bi to pomenilo za iskani odvod v primeru funkcije dveh spremenljivk. Kot običajno pišimo $a = (b, c)$ in $h = (u, v)$. Pričakujemo torej, da bo $F'(0) = f_x(b, c)u + f_y(b, c)v$. Po drugi strani pa je

$$F'(0) = \frac{d}{ds}F(s)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}f(a + sh)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}f(b + su, c + sv)\Big|_{s=0},$$

torej naj bi veljalo

$$\frac{d}{ds}f(b + su, c + sv)\Big|_{s=0} = f_x(b, c)u + f_y(b, c)v.$$

Če je naša domneva pravilna, ta odvod torej izračunamo kot odvod kompozituma tako, da funkcijo f parcialno odvajamo po vsaki njeni spremenljivki, kar je na mestu te spremenljivke, pa naprej odvajamo po s, nato dobljene rezultate seštejemo.

Izrek 13.12 (verižno pravilo). *Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^k$ odprta množica in $f\colon U \to \mathbb{R}$ diferenciabilna funkcija. Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ odprt interval in $g_1, \ldots, g_k\colon J \to \mathbb{R}$ odvedljive funkcije, za katere je $g(t) := (g_1(t), \ldots, g_k(t)) \in U$ za vsak $t \in J$. Potem je funkcija $F(t) := f(g_1(t), \ldots, g_k(t)) = f(g(t))$ odvedljiva na J in velja*

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t))g_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(t))g_k'(t) = df(g(t))\, g'(t),$$

kjer smo označili $g'(t) = (g_1'(t), \ldots, g_k'(t))$.

V izreku so lahko funkcije g_i odvisne tudi od več spremenljivk, le da je potem dobljeni kompozitum tudi funkcija več spremenljivk in nas zanimajo njeni parcialni odvodi.

Posledica 13.13. *Naj bo f kot v izreku, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ odprta množica in $g_1, \ldots, g_k\colon V \to \mathbb{R}$ diferenciabilne funkcije m spremenljivk, za katere je $g(t) := (g_1(t), \ldots, g_k(t)) \in U$ za vsak $t = (t_1, \ldots, t_m) \in V$. Potem je tudi*

$$F(t_1, \ldots, t_m) = f(\underbrace{g_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, g_k(t_1, \ldots, t_m)}_{g(t)})$$

diferenciabilna funkcija na V in za vsak $j = 1, \ldots, m$ je njen parcialni odvod po t_j enak

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t))\frac{\partial g_i}{\partial t_j}(t).$$

Dokaz izreka. Ker je f diferenciabilna v $x \in U$, za spremembo $h \in \mathbb{R}^k$ velja

$$f(x + h) = f(x) + df(x)h + R_x(h), \quad \text{kjer je} \quad \lim_{h \to 0} \frac{R_x(h)}{\|h\|} = 0.$$

Ker je za vsak $i = 1, \ldots, k$ funkcija g_i odvedljiva v $t \in J$, za spremembo $s \in \mathbb{R}$ velja

$$g_i(t + s) = g_i(t) + g_i'(t)s + R_{i,t}(s), \quad \text{kjer je} \quad \lim_{s \to 0} \frac{R_{i,t}(s)}{s} = 0.$$

Vzemimo

$$x = g(t) = (g_1(t), \ldots, g_k(t)) \quad \text{in}$$
$$x + h = g(t + s) = (g_1(t + s), \ldots, g_k(t + s)).$$

Torej je $h = g(t+s) - g(t)$ in zato

$$h_i = g_i(t+s) - g_i(t) = g_i'(t)s + R_{i,t}(s).$$

Formulo za odvod funkcije F bomo izpeljali po definiciji odvoda:

$$F'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{F(t+s) - F(t)}{s}.$$

Izračunajmo izraz v števcu:

$$\begin{aligned}
F(t+s) - F(t) &= f(g(t+s)) - f(g(t)) = f(x+h) - f(x) \\
&= df(x)h + R_x(h) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)h_k + R_x(h) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(g_i'(t)s + R_{i,t}(s)) + R_x(h) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, g_i'(t)s + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)R_{i,t}(s) + R_x(h)
\end{aligned}$$

Ko ta izraz delimo s s in pošljemo s proti 0, gre drugi člen v zadnji vsoti proti 0 zaradi odvedljivosti funkcij g_i v točki t. Pri tretjem členu pa upoštevamo, da gre skupaj s s tudi h proti 0, zato je

$$\lim_{s\to 0} \frac{R_x(h)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{R_x(h)}{\|h\|} \frac{\|h\|}{s} = 0,$$

saj je

$$\frac{h_i}{s} = g_i'(t) + \frac{R_{i,t}(s)}{s} \quad \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \quad g_i'(t)$$

in zato $\|h\| / s$ omejena v okolici $s = 0$. □

Vrnimo se k izpeljavi Taylorjeve formule. Izračunati moramo odvode $F^{(i)}(0)$, kjer je $F(s) = f(a + sh)$. Naj bo najprej f funkcija dveh spremenljivk; pišimo $a = (b, c)$ in $h = (u, v)$. Potem je

$$F(s) = f(b + su, c + sv)$$

in zato po verižnem pravilu

$$F'(s) = f_x(b + su, c + sv) \cdot u + f_y(b + su, c + sv) \cdot v$$

$$\Longrightarrow \quad F'(0) = f_x(a)u + f_y(a)v.$$

S ponovno uporabo verižnega pravila lahko izračunamo tudi drugi odvod

$$F''(s) = (f_{xx}u + f_{xy}v)u + (f_{yx}u + f_{yy}v)v = f_{xx}u^2 + 2f_{xy}uv + f_{yy}v^2,$$

kjer so odvodi funkcije f izračunani v točki $a + sh$, pri zadnji enakosti pa smo privzeli, da je f dvakrat zvezno odvedljiva v okolici daljice med a in $a + h$. Torej je

$$F''(0) = f_{xx}(a)u^2 + 2f_{xy}(a)uv + f_{yy}(a)v^2.$$

Če privzamemo, da je $f \in C^3$ v okolici daljice, lahko izračunamo

$$F'''(s) = f_{xxx}u^3 + 3f_{xxy}u^2v + 3f_{xyy}uv^2 + f_{yyy}v^3,$$

kjer so odvodi funkcije f izračunani v točki $a + sh$, zato je

$$F'''(0) = f_{xxx}(a)u^3 + 3f_{xxy}(a)u^2v + 3f_{xyy}(a)uv^2 + f_{yyy}(a)v^3.$$

V izrazih za zgornje odvode sicer lahko opazimo pravilo, a ti izrazi postajajo zelo dolgi, zato želimo najti bolj strnjen zapis. Oglejmo si še enkrat formulo za prvi odvod:

$$\frac{dF}{ds}(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(b+su, c+sv)u + \frac{\partial f}{\partial y}(b+su, c+sv)v$$

oziroma

$$\frac{d}{ds}F(s) = \left[\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right) f\right](b+su, c+sv),$$

torej je

$$\frac{d}{ds} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y},$$

kjer je odvod na levi izračunan v točki s, odvoda na desni pa v točki $(b+su, c+sv) = a+sh$. Sedaj lahko zapišemo:

$$F''(s) = \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}F(s) = \left[\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right) f\right](a+sh),$$

torej je

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^2 = \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)^2.$$

Če je funkcija, na kateri uporabimo odvod, dvakrat zvezno odvedljiva, vrstni red odvodov ni pomemben, zato lahko desno stran kvadriramo kot vsoto števil in dobimo

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^2 = u^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2uv\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + v^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Sedaj induktivno sledi, da za vsak i velja

$$F^{(i)}(s) = \left[\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f\right](a+sh)$$

in

$$F^{(i)}(0) = \left[\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f\right](a).$$

Tako smo dokazali naslednji izrek.

Izrek 13.14 (Taylorjeva formula). *Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta, $f \in C^{n+1}(U)$, $a \in U$ in $h = (u,v) \in \mathbb{R}^2$ tak, da je daljica s krajiščema a in $a+h$ vsebovana v U. Potem je* Taylorjev polinom stopnje n *za f s središčem v a pri spremembi h enak*

$$T_{a,n}(h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f}{i!}(a),$$

ostanek $R_{a,n}(h) = f(a+h) - T_{a,n}(h)$ *pa je enak*

$$R_{a,n}(h) = \frac{\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f}{(n+1)!}(a+th)$$

za neki $t \in (0,1)$. Za poljubno zaprto kroglo $\overline{K}(a,r) \subset U$, kjer je $r > 0$, obstaja taka konstanta $M > 0$, da za h z $\|h\| < r$ velja

$$|R_{a,n}(h)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\|h\|^{n+1},$$

torej gre ostanek tako hitro proti 0 kot $\|h\|^{n+1}$.

Povsem enako postopamo pri funkciji k spremenljivk. V tem primeru je vektor spremembe $h = (h_1, \ldots, h_k) \in \mathbb{R}^k$ in za odvod funkcije $F(s) = f(a + sh)$ po verižnem pravilu dobimo

$$F'(s) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) f(a + sh).$$

Za krajši zapis vpeljimo naslednjo oznako

$$h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_k \frac{\partial}{\partial x_k} = h \cdot \nabla,$$

kjer je ∇ vektor parcialnih odvodov po vseh spremenljivkah:

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right).$$

Potem je

$$F^{(i)}(s) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^i f(a + sh) = (h \cdot \nabla)^i f(a + sh).$$

Pripadajoči Taylorjev polinom stopnje n je tako enak

$$T_{a,n}(h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(h \cdot \nabla)^i f}{i!}(a),$$

formula za ostanek pa postane

$$R_{a,n}(h) = \frac{(h \cdot \nabla)^{n+1} f}{(n+1)!}(a + th)$$

za neki $t \in (0, 1)$. Za konec pripomnimo, da $h \cdot \nabla$ imenujemo *smerni odvod* v smeri vektorja h.

POGLAVJE 14

Ekstremi funkcij več spremenljivk

1. Lokalni ekstremi

Spomnimo se, da ima funkcija f v točki a lokalni minimum/maksimum, če je $f(a)$ najmanjša/največja vrednost funkcije f na neki okolici točke a. Če ima funkcija k spremenljivk lokalni ekstrem v točki a, potem imajo v tej točki lokalni ekstrem istega tipa tudi njene koordinatne funkcije. Od tod takoj sledi naslednja trditev.

TRDITEV 14.1. *Naj bo f funkcija k spremenljivk, ki je definirana v okolici točke $a \in \mathbb{R}^k$. Če ima f v točki a lokalni ekstrem, potem je za vsak $i = 1, \ldots, k$ bodisi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ bodisi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ne obstaja.*

Točke, v katerih je vsak prvi parcialni odvod bodisi enak 0 bodisi ne obstaja, so torej kandidati za lokalne ekstreme. Če so vsi odvodi 1. reda v točki a enaki 0, to točko imenujemo *stacionarna točka* ali *kritična točka* – v taki točki je torej $df(a) = 0$. Kot pri funkcijah ene spremenljivke pa seveda ni nujno, da v taki točki ekstrem dejansko nastopi.

PRIMER 14.2. Naj bo $p \in \mathbb{R}$ in $f(x, y) = x^2 + py^2$. Poišči lokalne ekstreme funkcije f.

Najprej poiščimo kandidate:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2py.$$

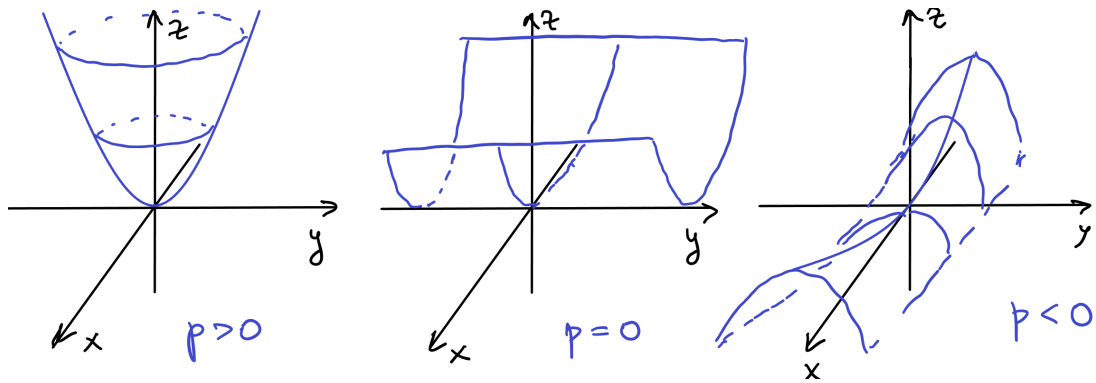
Ker parcialna odvoda povsod obstajata, so kandidati le stacionarne točke, tj. točke, v katerih sta oba parcialna odvoda enaka 0. Iz $2x = 0$ sledi $x = 0$, pogoj $2py = 0$ pa je za $p = 0$ izpolnjen za vsak $y \in \mathbb{R}$, za $p \neq 0$ pa le za $y = 0$.

Posebej bomo obravnavali primere, ko je p negativen, enak 0 ali pozitiven.

$\boxed{p = 0}$ V tem primeru je funkcija $f(x, y) = x^2$ neodvisna od spremenljivke y. Množica njenih stacionarnih točk je celotna os y. Ker je $f(0, y) = 0$ in $f(x, y) \geq 0$, ima f v vseh stacionarnih točkah (lokalni) minimum (ki ni strogi minimum, saj ima v nekaterih bližnjih točkah enake vrednosti).

$\boxed{p > 0}$ V tem primeru je $f(x, y) = x^2 + py^2 \geq 0$ za vse $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, poleg tega pa je $f(x, y) = 0$ le v izhodišču $(0, 0)$, ki je edina stacionarna točka. Funkcija f ima torej v stacionarni točki (strogi) minimum.

$\boxed{p < 0}$ Označimo $p = -q$, kjer je $q > 0$. Potem funkcija $f(x, y) = x^2 - qy^2$ v vsaki okolici stacionarne točke $(0, 0)$, v kateri ima vrednost $f(0, 0) = 0$, zavzame tako pozitivne vrednosti ($f(x, 0) > 0$ za vsak $x \neq 0$) kot negativne vrednosti ($f(0, y) < 0$ za vsak $y \neq 0$), zato v stacionarni točki nima ekstrema. Tam je sedlo, saj ima f vzdolž osi x tam minimum, vzdolž osi y pa maksimum. $\diamondsuit$



Naš cilj je poiskati pogoje, ki zagotavljajo, da ima funkcija v stacionarni točki ekstrem. Za funkcijo ene spremenljivke smo spoznali dva taka zadostna pogoja:

- prvi odvod spremeni predznak v stacionarni točki in
- drugi odvod v stacionarni točki je različen od nič.

Ker ima funkcija več spremenljivk več odvodov prvega reda in več odvodov drugega reda, ni jasno, kako bi interpretirali ta pogoja. Izkaže se, da obstaja smiselna posplošitev drugega pogoja, ki pa je bolj zapletena kot pri funkcijah ene spremenljivke – razlog za to je, da mora ta pogoj smiselno združiti vse odvode drugega reda.

Privzemimo ponovno, da je f funkcija dveh spremenljivk in $a = (b, c)$ njena stacionarna točka. To pomeni, da je za poljubno spremembo $h = (u, v)$ diferencial $df(a)h = f_x(a)u + f_y(a)v = 0$ in zato je tangentna aproksimacija enaka $z = f(a)$. Da bomo lahko primerjali vrednosti funkcije v okolici stacionarne točke, si pomagamo s Taylorjevo formulo stopnje 2. Privzeli bomo, da je funkcija f v okolici točke a 3-krat zvezno odvedljiva (enak rezultat lahko izpeljemo tudi za 2-krat zvezno odvedljive funkcije, a je dokaz nekoliko zahtevnejši). Za dovolj majhne spremembe $h = (u, v)$ torej velja

$$f(a+h) = f(a) + 0 + \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(a)u^2 + 2f_{xy}(a)uv + f_{yy}(a)v^2\right) + R_{a,2}(h),$$

kjer smo upoštevali, da so linearni členi enaki 0. Opazovali bomo spremembo vrednosti funkcije f, tj. $\Delta f(h) := f(a+h) - f(a)$. Funkcija f ima v točki a $\begin{cases} \text{lokalni minimum} \\ \text{lokalni maksimum} \end{cases}$ natanko tedaj, ko je $\begin{cases} \Delta f(h) \geq 0 \\ \Delta f(h) \leq 0 \end{cases}$ za vse dovolj majhne h. Označimo

$$A := f_{xx}(a), \quad B := f_{xy}(a) \quad \text{in} \quad C := f_{yy}(a)$$

ter

$$Q(h) = Q(u, v) := Au^2 + 2Buv + Cv^2.$$

Potem je sprememba vrednosti funkcije

$$\Delta f(h) = \frac{1}{2}Q(h) + R_{a,2}(h).$$

Funkcija Q je kvadratna v h, ostanek pa je reda $\|h\|^3$, saj po Taylorjevi formuli obstaja taka konstanta $K > 0$, da je

$$|R_{a,2}(h)| \leq K\,\|h\|^3\,.$$

Zato pričakujemo, da je obnašanje spremembe Δf določeno z obnašanjem funkcije Q, če le ta ni enaka 0 v kakšni smeri.

Razumeti torej želimo, pri kakšnih pogojih funkcija Q zavzame le vrednosti enega predznaka. Privzeli bomo, da funkcija Q ni ničelna, torej da je vsaj eno od števil A, B, C neničelno. V primeru $A = C = 0$ je $Q(u, v) = 2Buv$ in Q očitno zavzame tako pozitivne kot negativne

vrednosti: če sta u in v oba istega predznaka, je $Q(u,v)$ istega predznaka kot B, če sta u in v nasprotnega predznaka, pa je $Q(u,v)$ nasprotnega predznaka kot B.

Vsaj eno od števil A in C mora biti torej različno od 0, če ima funkcija f v točki a lokalni ekstrem. Denimo, da je $A \neq 0$ in poskusimo funkcijo Q zapisati kot linearno kombinacijo popolnih kvadratov:

$$\begin{aligned} Q(u,v) &= Au^2 + 2Buv + Cv^2 \\ &= \frac{1}{A}\left(A^2u^2 + 2ABuv + ACv^2\right) \\ &= \frac{1}{A}\Big(\underbrace{(Au+Bv)^2}_{\geq 0} + (AC-B^2)\underbrace{v^2}_{\geq 0}\Big). \end{aligned}$$

Izraz v oklepaju je pri $v = 0$ nenegativen in strogo večji od 0 za $u \neq 0$, zato je lahko v vseh točkah enakega predznaka le, če je koeficient pred v^2 nenegativen:

$$AC - B^2 \geq 0.$$

V tem primeru je funkcija Q enakega predznaka kot A:

- če je $A > 0$, je $Q(h) \geq 0$ za vse h in zato pričakujemo, da ima f v točki a lokalni minimum,
- če pa je $A < 0$, je $Q(h) \leq 0$ za vse h in zato pričakujemo, da ima f v točki a lokalni maksimum.

Če je $AC - B^2 < 0$, funkcija Q zavzame tako pozitivne kot negativne vrednosti: $Q(u,0)$ je enakega predznaka kot A, $Q(-Bv/A, v)$ pa nasprotnega, zato pričakujemo, da v tem primeru funkcija f v točki a nima lokalnega ekstrema. Izločiti moramo tudi možnost, da je $AC - B^2 = 0$, saj je tedaj $Q(-Bv/A, v) = 0$ in vzdolž te premice obnašanje spremembe $\Delta f(-Bv/A, v)$ določa razlika $R_{a,2}(-Bv/A, v)$, o obnašanju katere ne vemo nič (lahko zavzame pozitivne in/ali negativne vrednosti), zato ne moremo sklepati o obstoju ekstrema.

Izrek 14.3 (obstoj lokalnega ekstrema). *Naj bo f funkcija dveh spremenljivk, ki je dvakrat zvezno odvedljiva v okolici stacionarne točke $a \in \mathbb{R}^2$. Označimo $A := f_{xx}(a)$, $B := f_{xy}(a)$ in $C := f_{yy}(a)$. Če velja*

(1) *$AC - B^2 > 0$ in $A > 0$ (ter $C > 0$), ima f v točki a strogi lokalni minimum;*
(2) *$AC - B^2 > 0$ in $A < 0$ (ter $C < 0$), ima f v točki a strogi lokalni maksimum;*
(3) *$AC - B^2 < 0$, funkcija f v točki a nima lokalnega ekstrema;*
(4) *$AC - B^2 = 0$, na osnovi odvodov drugega reda ne moremo sklepati o obstoju lokalnega ekstrema v točki a – funkcija v tej točki lahko ima ekstrem ali pa ne.*

Dokaz. V dokazu bomo privzeli, da je $f \in C^3$ v okolici točke a. Zgoraj smo izpeljali formulo za spremembo funkcijskih vrednosti:

$$\Delta f(u,v) = \frac{1}{2}Q(u,v) + R_{a,2}(u,v).$$

Poleg tega vemo, da obstaja taka konstanta $K > 0$, da za vse dovolj majhne $h = (u,v)$ velja

$$|R_{a,2}(h)| \leq K\,\|h\|^3.$$

(1) Naj velja $AC - B^2 > 0$ in $A > 0$. V tem primeru je $Q(u,v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 \geq 0$ za poljuben $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Poleg tega enakost lahko velja le za $(u,v) = (0,0)$:

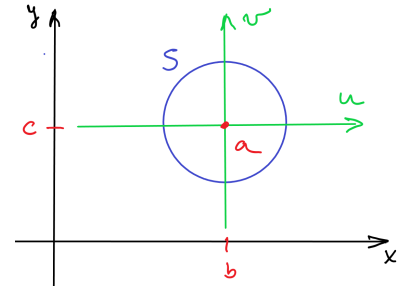
$$(Au+Bv)^2 + \underbrace{(AC-B^2)}_{>0}v^2 = 0 \implies Au + Bv = 0 \text{ in } v = 0 \implies u = 0.$$

Edina ničla funkcije Q je torej izhodišče. Naj bo S krožnica s središčem v stacionarni točki a in polmerom 1:

$$S = \left\{ (u,v) \,\middle|\, u^2 + v^2 = 1 \right\}.$$

Ker je S omejena in zaprta, je kompaktna, zato ima funkcija Q na množici S minimum $m > 0$. Za poljuben $h = (u,v)$ označimo

$$r := \|h\| = \|(u,v)\| = \sqrt{u^2 + v^2}.$$



Potem je za $h \neq (0,0)$ dolžina vektorja

$$\frac{h}{r} = \frac{(u,v)}{r} = \left(\frac{u}{r}, \frac{v}{r}\right)$$

enaka 1, zato vektor h/r leži na krožnici S. S pomočjo tega opažanja in zgornje ocene za funkcijo Q na krožnici S lahko ocenimo vrednost funkcije Q v poljubni točki $h = (u,v) \neq (0,0)$:

$$Q(u,v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 = r^2 \left(A\left(\frac{u}{r}\right)^2 + 2B\frac{u}{r}\frac{v}{r} + C\left(\frac{v}{r}\right)^2 \right) = r^2 Q\left(\frac{u}{r}, \frac{v}{r}\right) \geq mr^2.$$

Ta ocena velja tudi za $h = 0$, saj sta tedaj obe strani enaki 0. Sedaj lahko ocenimo spremembo vrednosti funkcije f v okolici točke a:

$$\begin{aligned} \Delta f(h) &= \frac{1}{2}Q(h) + R_{a,2}(h) \geq \frac{1}{2}Q(h) - |R_{a,2}(h)| \\ &\geq \frac{1}{2}mr^2 - Kr^3 = r^2\left(\frac{m}{2} - Kr\right). \end{aligned}$$

Izraz v oklepaju je strogo pozitiven za $\|h\| = r < \dfrac{m}{2K}$, torej na tej okolici funkcija f zavzame najmanjšo vrednost v točki a. Ker v nobeni drugi točki v tej okolici f ne zavzame enake vrednosti, ima f v a strogi lokalni minimum.

(2) Dokaz tega primera poteka podobno zgornjemu, razlika je le, da funkcijo Q na krožnici S ocenimo navzgor z neko negativno vrednostjo. Prav tako moramo celotno spremembo Δf oceniti navzgor.

(3) Že zgoraj smo premislili, da v tem primeru funkcija Q zavzame tako negativne kot pozitivne vrednosti v poljubno majhni okolici točke $h = 0$. Podobno kot v zgornjem dokazu vidimo, da Q v dovolj majhni okolici prevlada nad napako $R_{a,2}(h)$ (vsaj vzdolž premic $v = 0$ in $u = -Bv/A$), zato tudi $\Delta f(h)$ zavzame tako negativne kot pozitivne vrednosti v poljubno majhni okolici točke $h = 0$.

(4) Pokažimo s primeroma, da če velja $AC - B^2 = 0$, funkcija lahko ima ekstrem v stacionarni točki ali pa ne. Oglejmo si najprej funkcijo $f(x,y) = x^3 + y^2$. Ker je

$$f_x(x,y) = 3x^2 \quad \text{in} \quad f_y(x,y) = 2y,$$

je izhodišče $(0,0)$ stacionarna točka funkcije f. Za druge odvode velja

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{xy}(x,y) = 0 \quad \text{in} \quad f_{yy}(x,y) = 2,$$

zato je $A = 0$, $B = 0$ in $C = 2$. Torej res velja $AC - B^2 = 0$. Funkcija f v točki $(0,0)$ nima lokalnega ekstrema, saj je $f(0,0) = 0$, za $x > 0$ je $f(x,0) > 0$, za $x < 0$ pa $f(x,0) < 0$.

Oglejmo si sedaj funkcijo $f(x,y) = x^4 + y^2 \geq 0$. Kot zgoraj vidimo, da je $(0,0)$ stacionarna točka, v kateri velja $A = B = 0$ in $C = 2$, torej $AC - B^2 = 0$. A za to funkcijo je $f(0,0) = 0$ njena najmanjša vrednost. $\square$

Števila $A = f_{xx}(a)$, $B = f_{xy}(a)$ in $C = f_{yy}(a)$ iz zgornjega izreka določajo Hessejevo matriko funkcije f in s pomočjo te lahko pogoje za nastop lokalnega ekstrema opišemo bolj vsebinsko.

Definicija 14.4. Naj bo f funkcija dveh spremenljivk, ki je dvakrat zvezno odvedljiva v okolici točke $a \in \mathbb{R}^2$. *Hessejeva matrika* funkcije f v točki a je

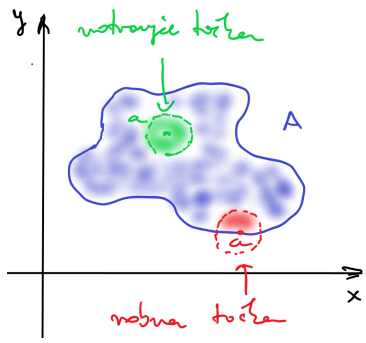
$$H(f,a) := \begin{bmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) \\ f_{xy}(a) & f_{yy}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}.$$

Izraz $AC - B^2$, ki nastopa v pogoju za obstoj lokalnega ekstrema, je enak determinanti Hessejeve matrike. Ker morata biti za obstoj lokalnega ekstrema števili A in C istega predznaka, je pogoj na A (ali C) ekvivalenten pogoju na sled Hessejeve matrike.

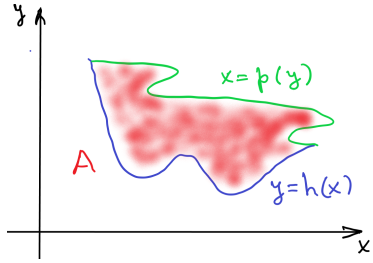
Posledica 14.5. *Naj bo funkcija f dvakrat zvezno odvedljiva v okolici svoje stacionarne točke a. Funkcija f ima v točki a lokalni ekstrem, če je determinanta njene Hessejeve matrike pozitivna. V tem primeru ima v točki a lokalni minimum, če je sled Hessejeve matrike pozitivna, oziroma lokalni maksimum, če je sled Hessejeve matrike negativna.*

2. Globalni ekstremi in vezani ekstremi

Če je $A \subset \mathbb{R}^k$ kompaktna množica in $f\colon A \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, potem ima f na A globalne ekstreme, torej zavzame maksimum in minimum. Kako bi poiskali ti vrednosti? Situacija je podobna kot pri funkcijah ene spremenljivke. Če ima f ekstrem v notranji točki $a \in A$, potem ima f v a lokalni ekstrem. Kandidati za te so točke, kjer so parcialni odvodi enaki 0 oziroma ne obstajajo. Lahko pa ekstrem nastopi v *robni točki* $a \in A$, tj. taki točki, katere vsaka okolica vsebuje tudi točke, ki niso v A.

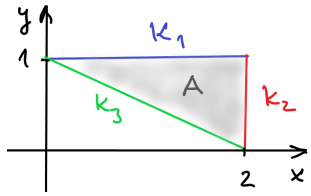


Omejimo ponovno obravnavo na funkcije dveh spremenljivk. Če je množica $A \subset \mathbb{R}^2$ dovolj »lepa«, njene robne točke sestavljajo neko krivuljo (ali unijo krivulj) v ravnini. Ekstremu funkcije na krivulji pa rečemo *vezani ekstrem*: krivulja predstavlja *vez* oziroma pogoj, ki mu morajo ustrezati točke. V enostavnih primerih množica robnih točk sestoji iz nekaj daljic ali drugih preprostih krivulj, ki so grafi funkcij ene ali druge spremenljivke, torej $y = h(x)$ ali $x = p(y)$.



Tedaj iz funkcije dveh spremenljivk z upoštevanjem zgornje zveze med spremenljivkama dobimo funkcijo ene spremenljivke, katere ekstreme znamo poiskati. Kot pri funkcijah ene spremenljivke tudi pri funkcijah več spremenljivk pri iskanju globalnih ekstremov poiščemo le kandidate za lokalne ekstreme v notranjosti območja A ter kandidate za ekstreme na robu območja A, nato pa primerjamo funkcijske vrednosti v teh točkah.

Primer 14.6. Poišči ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$ na trikotnem območju A z oglišči $(2,0)$, $(0,1)$ in $(2,1)$.



Ker je funkcija f zvezna na kompaktni množici A, vemo, da ima na A globalne ekstreme. Najprej poiščemo kandidate za lokalne ekstreme. Ker je $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, moramo poiskati le stacionarne točke:

$$f_x(x,y) = 2x + y = 0, \quad f_y(x,y) = x + 4y = 0.$$

Rešimo dobljeni sistem enačb:

$$y = -2x \implies x - 8x = 0 \implies x = 0 \implies y = 0.$$

Edina stacionarna točka funkcije f je $(0,0)$, ki ne pripada množici A. Funkcija f na A torej nima lokalnih ekstremov, globalne ekstreme pa zavzame v robnih točkah.

Obravnavajmo vsako daljico, ki sestavlja rob množice A, posebej.

$\boxed{K_1:}$ Za točko $(x,y) \in K_1$ velja $0 \le x \le 2$ in $y = 1$. Če to upoštevamo v funkcijskem predpisu, dobimo funkcijo ene spremenljivke

$$f(x,y) = f(x,1) = x^2 + x + 2, \quad x \in [0,2].$$

Poiščimo njene stacionarne točke:

$$\frac{d}{dx} f(x,1) = 2x + 1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2} \notin [0,2].$$

Ekstrema funkcije f na daljici K_1 zato nastopita v njenih krajiščih $(0,1)$ in $(2,1)$:

$$\underline{f(0,1) = 2} \ \text{ in } \ \underline{f(2,1) = 8}.$$

$\boxed{K_2:}$ Za točko $(x,y) \in K_2$ velja $x = 2$ in $0 \le y \le 1$. Če to upoštevamo v funkcijskem predpisu, dobimo funkcijo ene spremenljivke

$$f(x,y) = f(2,y) = 4 + 2y + 2y^2, \quad y \in [0,1].$$

Poiščimo njene stacionarne točke:

$$\frac{d}{dy} f(2,y) = 2 + 4y = 0 \implies y = -\frac{1}{2} \notin [0,1].$$

Ekstrema funkcije f na daljici K_2 zato nastopita v njenih krajiščih $(2,0)$ in $(2,1)$:

$$\underline{f(2,0) = 4} \ \text{ in } \ \underline{f(2,1) = 8}.$$

$\boxed{K_3:}$ Daljica K_3 je del premice skozi točki $(0,1)$ in $(2,0)$. Smerni koeficient te premice je $-1/2$, njena enačba pa je

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0) \implies y = 1 - \frac{x}{2} \ \text{ ali } \ x = 2 - 2y.$$

Daljico K_3 torej lahko predstavimo kot graf funkcije na dva načina:

$$y = 1 - \frac{x}{2}, \quad x \in [0,2] \ \text{ ali } \ x = 2 - 2y, \quad y \in [0,1].$$

Izberimo eno od možnosti, npr. drugo. Tako dobimo funkcijo ene spremenljivke

$$f(x,y) = f(2-2y,y) = (2-2y)^2 + (2-2y)y + 2y^2 = 4y^2 - 6y + 4, \quad y \in [0,1],$$

ki ima stacionarno točko

$$\frac{d}{dy} f(2-2y, y) = 8y - 6 = 0 \implies y = \frac{3}{4} \in [0,1].$$

Ekstremi funkcije f na daljici K_3 lahko nastopijo v točkah $(0,1)$, $(2,0)$ in $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$:

$$\underline{f(0,1) = 2}, \quad \underline{f(2,0) = 4} \quad \text{in} \quad \underline{f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}}.$$

Sklep: najmanjša vrednost funkcije f, ki smo jo našli, je $7/4$, največja pa 8, zato je

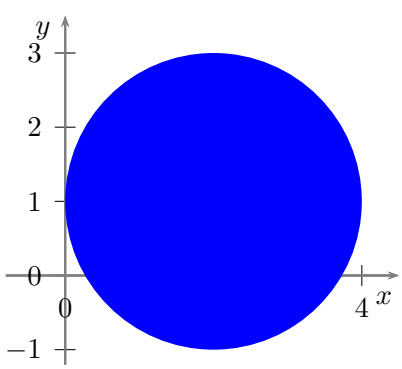
$$\min f = \frac{7}{4} \quad \text{dosežen v točki} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \quad \text{in}$$

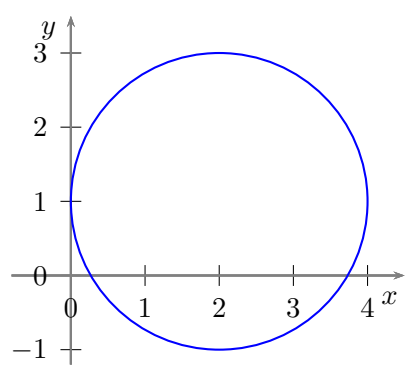
$$\max f = 8 \quad \text{dosežen v točki} \quad (2,1).$$

$\diamondsuit$

V primeru smo množico robnih točk območja lahko predstavili kot unijo preprostih krivulj, ki so bile grafi preprostih funkcij $y = h(x)$ ali $x = p(y)$. Velikokrat pa to ni mogoče oziroma je pripadajoča funkcija zapletena, tako da je računanje stacionarnih točk pripadajoče funkcije ene spremenljivke zahtevno. Pogosto je krivulja, ki predstavlja množico robnih točk, podana *implicitno* z enačbo $g(x,y) = 0$, torej z nekakšno zvezo med spremenljivkama x in y. Takšna enačba je lahko relativno preprosta, a je iz nje včasih težko izraziti eno od spremenljivk kot funkcijo druge ali pa takšna izražava z elementarnimi funkcijami sploh ne obstaja – slednje ne pomeni, da krivulja (ali vsaj njen del) ni graf funkcije, le mi nimamo na razpolago formul, s katerimi bi jo opisali.

Primer 14.7. Naj bo A zaprt krog s središčem v $(2,1)$ in polmerom 2.





Robne točke sestavljajo krožnico s središčem v $(2,1)$ in polmerom 2, ki je dana z implicitno enačbo

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2^2 \iff (x-2)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0.$$

Robne točke množice A so torej natanko ničle funkcije

$$g(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 4.$$

Rešitev zgornje enačbe ni funkcija $y = h(x)$ (ali $x = p(y)$), saj vsakemu $x \in (0,4)$ pripadata dve vrednosti y na krožnici. Če iz $g(x,y) = 0$ izrazimo y, dobimo

$$y = 1 \pm \sqrt{4 - (x-2)^2}, \quad x \in [0,4].$$

To lahko opišemo z dvema zveznima funkcijama

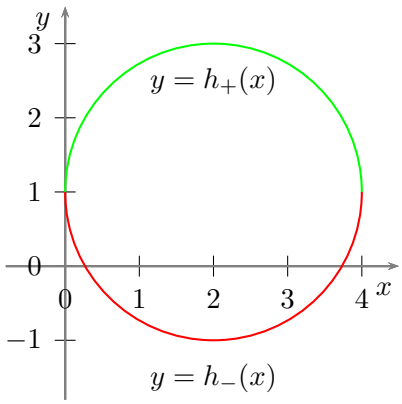
$$h_+(x) = 1 + \sqrt{4-(x-2)^2} \quad \text{in} \quad h_-(x) = 1 - \sqrt{4-(x-2)^2}.$$

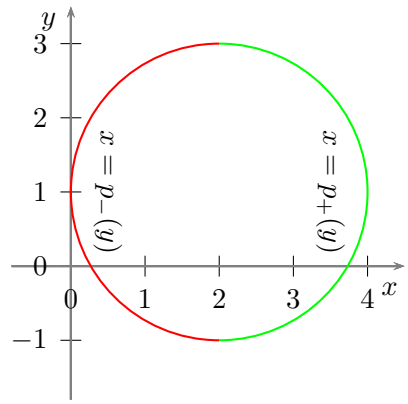
Podobno lahko izrazimo tudi x:

$$x = 2 \pm \sqrt{4-(y-1)^2}, \quad y \in [-1,3],$$

kar določa dve zvezni funkciji

$$p_+(y) = 2 + \sqrt{4-(y-1)^2} \ \text{ in } \ p_-(y) = 2 - \sqrt{4-(y-1)^2}.$$

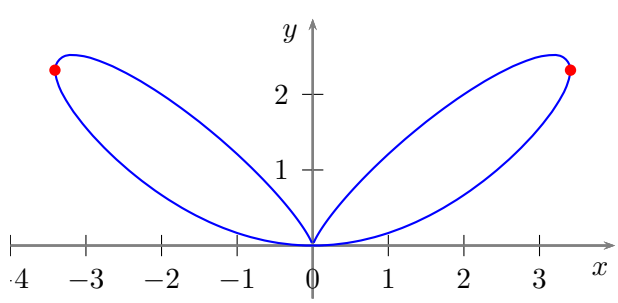




Opazimo lahko, da ima vsaka točka na krožnici okolico, znotraj katere je krožnica predstavljena kot graf funkcije $y = h(x)$ ali $x = p(y)$; za večino točk obstajata obe izražavi. Izjeme so le točke z ekstremnimi vrednostmi x ali y koordinate, v katerih je tangentna premica navpična oziroma vodoravna. ♢

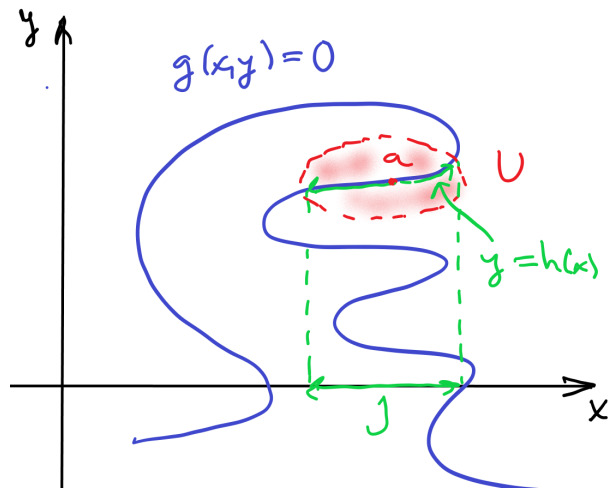
Razlog, da želimo opisati robno krivuljo v okolici poljubne točke kot graf neke funkcije, je, da se pri iskanju vezanih ekstremov s tem izognemo obravnavi krajišč krivulj, torej vedno iščemo le kandidate za lokalne ekstreme.

Primer 14.8. Enačba $x^6 - 6x^4y + 2y^6 = 0$ določa krivuljo, ki je v okolici večine točk graf neke komplicirane elementarne funkcije $x = p(y)$. Prav tako iz slike lahko sklepamo, da je v okolici večine točk krivuljo mogoče zapisati tudi kot graf neke funkcije $y = h(x)$, a ustrezna funkcija h ni elementarna, torej ne znamo zapisati eksplicitne formule zanjo.



♢

Denimo, da iščemo ekstreme funkcije $z = f(x,y)$ pri pogoju (vezi) $g(x,y) = 0$. Predpostavimo, da je mogoče v okolici U neke točke $a = (b,c)$ na krivulji (za katero torej velja $g(a) = g(b,c) = 0$) iz $g(x,y) = 0$ izraziti $y = h(x)$, kjer je $h\colon J \to \mathbb{R}$ definirana na odprtem intervalu J, ki vsebuje točko b, in velja $h(b) = c$.



To pomeni, da znotraj U točka (x, y) leži na krivulji natanko tedaj, ko leži na grafu funkcije h:

$$\forall (x, y) \in U \quad \text{velja:} \quad g(x, y) = 0 \iff y = h(x).$$

Posebej velja

$$g(x, h(x)) = 0 \quad \forall x \in J.$$

S pomočjo funkcije $h\colon J \to \mathbb{R}$ lahko iskanje (lokalnih) ekstremov funkcije f znotraj U pri pogoju $g(x, y) = 0$ prevedemo na iskanje lokalnih ekstremov funkcije $H\colon J \to \mathbb{R}$:

$$H(x) := f(x, h(x)), \quad x \in J.$$

Privzeli bomo, da so vse funkcije odvedljive, tako da so kandidati za lokalne ekstreme stacionarne točke. Iščemo torej rešitve $x \in J$ enačbe $H'(x) = 0$:

$$(\star) \qquad f_x(x, h(x)) + f_y(x, h(x))h'(x) = 0.$$

Namesto s funkcijo h, ki je ne poznamo, bi ta pogoj želeli izraziti s funkcijo g.

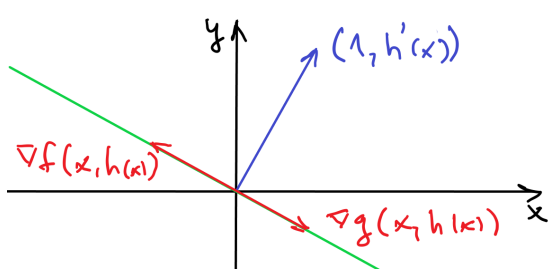
Ker za vsak $x \in J$ velja $g(x, h(x)) = 0$, je tudi odvod te funkcije enak 0 za vsak $x \in J$:

$$(\star\star) \qquad g_x(x, h(x)) + g_y(x, h(x))h'(x) = 0.$$

Enakosti $(\star)$ in $(\star\star)$ lahko izrazimo s skalarnim produktom gradientov funkcij:

$$\nabla f(x, h(x)) \cdot (1, h'(x)) = 0 \quad \text{in} \quad \nabla g(x, h(x)) \cdot (1, h'(x)) = 0.$$

Geometrično ta pogoja pomenita, da sta oba gradienta pravokotna na isti neničelni vektor $(1, h'(x))$ v ravnini, zato sta kolinearna.



Denimo, da obstaja tak $x_0 \in J$, da velja enakost $(\star)$; označimo še $y_0 := h(x_0)$, torej je $g(x_0, y_0) = 0$. Predpostavimo še, da je $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Ker za kolinearna vektorja velja, da je neka njuna netrivialna linearna kombinacija enaka 0, obstaja tako število $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, da je

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0) = 0.$$

Razpišimo zadnji pogoj po komponentah:

$$\frac{\partial(f + \lambda_0 g)}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial(f + \lambda_0 g)}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Vidimo, da je naravno vpeljati novo funkcijo treh spremenljivk

$$F(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Točka (x_0, y_0, λ_0) je stacionarna točka te funkcije:

$$\begin{aligned} F_x(x_0, y_0, \lambda_0) &= f_x(x_0, y_0) + \lambda_0 g_x(x_0, y_0) = 0 \\ F_y(x_0, y_0, \lambda_0) &= f_y(x_0, y_0) + \lambda_0 g_y(x_0, y_0) = 0 \\ F_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) &= g(x_0, y_0) = 0 \end{aligned}$$

Velja pa tudi obratno: če je (x_0, y_0, λ_0) stacionarna točka funkcije F, potem zadnja enačba zgoraj zagotavlja, da točka (x_0, y_0) ustreza pogoju $g(x, y) = 0$, prvi dve enačbi pa skupaj pomenita, da je (x_0, y_0) stacionarna točka za f pri pogoju $g(x, y) = 0$.

Povsem analogno lahko sklepamo, če je v okolici točke a iz pogoja $g(x, y) = 0$ mogoče izraziti $x = p(y)$, torej če je krivulja, ki predstavlja pogoj, predstavljena z grafom funkcije spremenljivke y. Tako smo (ob dodatni predpostavki, ki jo bomo upravičili v naslednjem razdelku) dokazali naslednji izrek.

Izrek 14.9 (metoda Lagrangeevih multiplikatorjev). *Naj bo $U \subset \mathbb{R}^2$ odprta in $f, g \in C^1(U)$. Če ima funkcija f pri pogoju $g(x, y) = 0$ lokalni ekstrem v točki $(x_0, y_0) \in U$ in je $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, potem obstaja tako število $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, da je (x_0, y_0, λ_0) kritična točka* Lagrangeeve funkcije $F(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda g(x, y)$. *Število λ imenujemo* Lagrangeev multiplikator *ali* Lagrangeev množitelj.

Opomba 14.10. Kandidati za lokalne ekstreme funkcije f pri pogoju $g = 0$ so torej:

- točke, kjer f ali g ni zvezno odvedljiva;
- točke, kjer je $\nabla g = (0, 0)$ in
- stacionarne točke Lagrangeeve funkcije $F = f + \lambda g$.

Primer 14.11. Poišči ekstreme funkcije $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ na krivulji $x^2 + y^2 = 2x$.

Ker sta funkciji f in $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$ povsod zvezno odvedljivi, iščemo stacionarne točke Lagrangeeve funkcije

$$F(x, y, \lambda) = x^3 - 3xy^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2x) :$$

$$F_x(x, y, \lambda) = 3x^2 - 3y^2 + \lambda(2x - 2) = 0 \tag{1}$$

$$F_y(x, y, \lambda) = -6xy + 2\lambda y = 0 \implies y(-3x + \lambda) = 0 \tag{2}$$

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 2x = 0 \implies x^2 + y^2 = 2x \tag{3}$$

Pogoj v (2) razdelimo na dve možnosti.

$\boxed{y = 0:}$ Iz (3) sledi

$$x^2 = 2x \implies x = 0 \text{ ali } x = 2.$$

Izračunajmo vrednosti funkcije f v pripadajočih točkah

$$\underline{f(0, 0) = 0} \text{ in } \underline{f(2, 0) = 8}.$$

$\boxed{\lambda = 3x:}$ Če to upoštevamo v (1), dobimo

$$3x^2 - 3y^2 + 6x(x - 1) = 0 \implies 3x^2 - y^2 - 2x = 0$$

Upoštevati moramo še enačbo (3):

$$x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

Če ti enačbi seštejemo, dobimo

$$4x^2 - 4x = 0 \implies x = 0 \text{ ali } x = 1.$$

Pri $x = 0$ iz enačbe (3) sledi $y = 0$, pri $x = 1$ pa dobimo $y^2 = 1$, torej $y = \pm 1$. Izračunajmo vrednosti funkcije f v teh točkah:

$$\underline{f(0,0) = 0} \quad \text{in} \quad \underline{f(1, \pm 1) = -2}.$$

Preverimo še, ali je $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ za kakšno točko na krivulji $g(x, y) = 0$.

$$\begin{aligned} g_x(x,y) &= 2x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \\ g_y(x,y) &= 2y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \\ g(1,0) &= -1 \neq 0 \end{aligned}$$

Ker edina točka, v kateri je gradient enak 0, ne leži na krivulji, smo zgoraj našli vse kandidate za ekstreme funkcije f pri pogoju $g = 0$. Vemo tudi, da f res ima ekstreme, saj je zvezna, množica $g(x, y) = 0$ pa je kompaktna (saj je krožnica). Zato je

$$\begin{aligned} &\max f = 8 \ \text{ dosežen v točki } \ (2,0) \ \text{ in} \\ &\min f = -2 \ \text{ dosežen v točkah } \ (1, \pm 1). \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

3. Izrek o implicitni funkciji

Za dano funkcijo g dveh spremenljivk in točko $a = (b, c)$, za katero velja $g(a) = g(b, c) = 0$, nas zanima, ali je mogoče v okolici točke a iz enačbe $g(x, y) = 0$ izraziti eno spremenljivko kot funkcijo druge, torej $y = h(x)$ ali $x = p(y)$. Bolj geometrično, razumeti želimo, pri kakšnih pogojih je krivulja, določena z enačbo $g(x, y) = 0$, v okolici točke a enaka grafu neke funkcije.

Primer 14.12. Enačba

$$e^{xy} + \sin x = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{xy} + \sin x - 2 = 0$$

določa funkcijo

$$y = \frac{\ln(2 - \sin x)}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\, 0 \,\}.$$

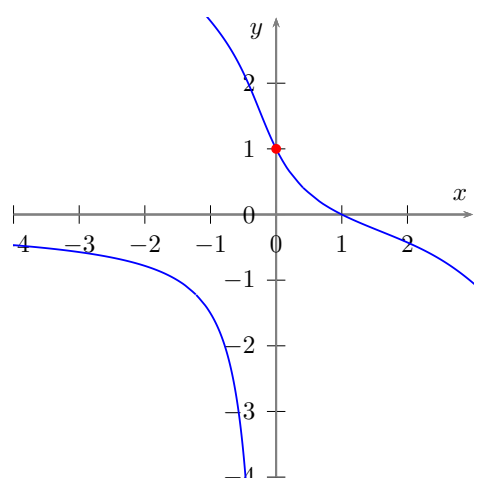
Ker pri $x = 0$ zgornja enačba ni rešljiva, je množica rešitev enačbe enaka grafu te funkcije. $\diamondsuit$

Primer 14.13. Iz enačbe

$$e^{xy} + x + y = 2$$

ne znamo izraziti niti x niti y.

Vprašamo se lahko, ali ima enačba sploh kakšno rešitev. Zlahka uganemo kakšno točko, ki ji ustreza: če poskusimo $x = 0$, dobimo enačbo $1 + y = 2$, torej $y = 1$. Naprej pa se lahko vprašamo, ali enačba določa funkcijo $y = h(x)$, katere graf gre skozi točko $(0, 1)$, tj. za katero velja $h(0) = 1$. Iz slike sklepamo, da je odgovor na vprašanje pritrdilen. A v tem primeru množica vseh rešitev enačbe ni graf funkcije, saj negativnim vrednostim spremenljivke x ustrezata po dve vrednosti spremenljivke y. Graf funkcije je ekvivalenten le delu množice rešitev v okolici točke $(0, 1)$. Enak sklep velja v okolici poljubne točke na krivulji. $\diamondsuit$



Poseben primer reševanja enačbe $g(x,y)=0$ je iskanje inverzne funkcije. Za injektivno funkcijo $y=f(x)$ poiščemo predpis za njeno inverzno funkcijo tako, da iz te enačbe izrazimo x, nato pa preimenujemo spremenljivki x in y. Da bo naloga bolj podobna naši, najprej preimenujmo spremenljivki: iz

$$x=f(y) \iff g(x,y):=x-f(y)=0$$

želimo izraziti $y=f^{-1}(x)$. Kako lahko zagotovimo, da bo takšna izražava obstajala, torej da bo funkcija f injektivna? Če je f zvezno odvedljiva v okolici točke c in je $f'(c)\neq 0$, potem je odvod od 0 različen (in konstantnega predznaka) še v neki okolici točke c, zato je f v tej okolici strogo monotona, torej injektivna. Za funkcijo g ta pogoj pomeni, da je njen parcialni odvod po spremenljivki y v točki $(f(c),c)$ neničeln. Enak pogoj zadošča v splošnem – če je g funkcija k spremenljivk, ki je zvezno odvedljiva v okolici točke $a\in\mathbb{R}^k$ in je $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)\neq 0$, potem lahko iz $g(x_1,\ldots,x_k)=0$ izrazimo spremenljivko x_i v okolici točke a.

Izrek 14.14 (o implicitni funkciji). *Naj bo g funkcija k spremenljivk, ki je r-krat zvezno odvedljiva v okolici točke $a=(a_1,\ldots,a_k)\in\mathbb{R}^k$ za neki $r\geq 1$. Če velja*

$$g(a)=0 \quad in \quad \frac{\partial g}{\partial x_k}(a)\neq 0,$$

potem obstajajo okolica U točke $b=(a_1,\ldots,a_{k-1})\in\mathbb{R}^{k-1}$, okolica V točke $c=a_k$ ter r-krat zvezno odvedljiva funkcija $(k-1)$-spremenljivk $h\colon U\to V$, za katere velja:

(1) $h(b)=c$,

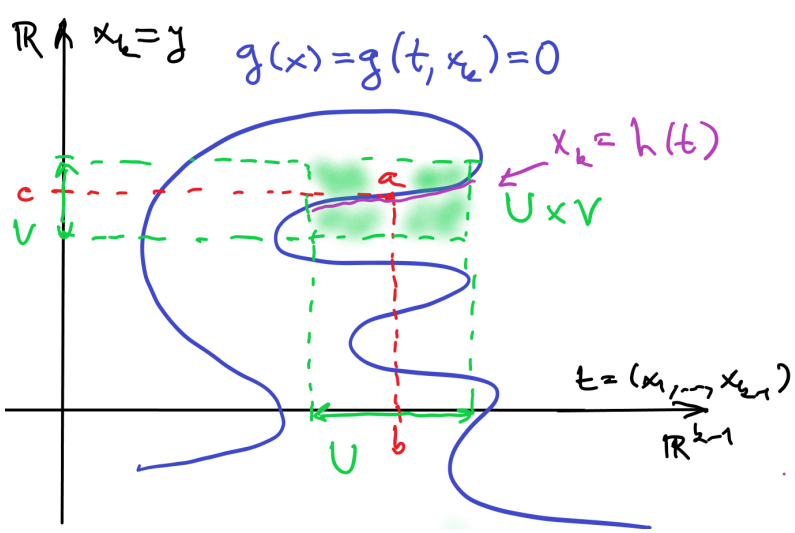
(2) *za vsak $t=(x_1,\ldots,x_{k-1})\in U$ in $x_k\in V$ je*

$$g(t,x_k)=0 \iff x_k=h(t),$$

(3) *za poljuben $i=1,\ldots,k-1$ je za vsak $t\in U$*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(t)=-\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(t,h(t))}{\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(t,h(t))}.$$

Opomba 14.15. Izrek torej zagotavlja obstoj take funkcije h, da je znotraj »pravokotnika« $U\times V$ množica ničel funkcije g enaka grafu funkcije h. Pri tem morata biti obe okolici, U in V, dovolj majhni: znotraj pasu $U\times\mathbb{R}$ nad U je lahko več delov množice ničel funkcije g, ki ustrezajo različnim funkcijam h.



Primer 14.16. Pokaži, da enačba $e^{xy} + x + y = 2$ določa neko funkcijo $y = h(x)$ v okolici točke $a = (0, 1)$ in določi Taylorjev polinom stopnje 3 za funkcijo h s središčem v 0.

Označimo $g(x, y) = e^{xy} + x + y - 2$. Vemo že, da točka $a = (0, 1)$ ustreza enačbi, torej da velja $g(0, 1) = 0$. Ker želimo iz enačbe v okolici točke a izraziti y, moramo preveriti, ali je parcialni odvod funkcije g po spremenljivki y v točki a različen od nič:

$$g_y(x, y) = xe^{xy} + 1 \implies g_y(0, 1) = 1 \neq 0.$$

Zgornji izrek sedaj zagotavlja, da v okolici točke $x = 0$ obstaja taka funkcija h, da točke na njenem grafu ustrezajo enačbi $g = 0$; posebej velja $h(0) = 1$. Čeprav formule za h ne znamo zapisati, pa lahko izračunamo nekaj njenih odvodov v točki 0 in tako določimo Taylorjev polinom, ki je približek za h. Ker enakost $g(x, h(x)) = 0$ velja za vse x v neki okolici točke $x = 0$, lahko to enakost odvajamo in iz nje izrazimo odvod. Enakost

$$e^{xh(x)} + x + h(x) - 2 = 0$$

velja za vsak x blizu 0. Ko jo odvajamo po x, tudi dobljena enakost velja za vsak x blizu 0:

$$e^{xh(x)}(h(x) + xh'(x)) + 1 + h'(x) = 0.$$

Vstavimo $x = 0$ in izračunamo vrednost odvoda v 0:

$$e^0(h(0) + 0) + 1 + h'(0) = 0 \implies h'(0) = -2.$$

Za izračun (vrednosti) drugega odvoda ponovno odvajamo zgornji odvod:

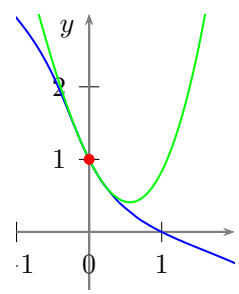
$$e^{xh(x)}(h(x) + xh'(x))^2 + e^{xh(x)}(2h'(x) + xh''(x)) + h''(x) = 0$$

ter vstavimo $x = 0$:

$$1 + (-4) + h''(0) = 0 \implies h''(0) = 3.$$

Ponovno odvajamo:

$$\begin{aligned} &e^{xh(x)}(h(x) + xh'(x))^3 \\ &\qquad + 3e^{xh(x)}(h(x) + xh'(x))(2h'(x) + xh''(x)) \\ &\qquad\qquad + e^{xh(x)}(3h''(x) + xh'''(x)) + h'''(x) = 0 \end{aligned}$$



ter vstavimo $x = 0$:

$$1 + 3(-4) + 9 + h'''(0) = 0 \implies h'''(0) = 2.$$

Taylorjev polinom stopnje 3 funkcije h s središčem v 0 je torej

$$T_{0,3}(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + \frac{h'''(0)}{6}x^3 = 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

$\diamondsuit$

Dokaz izreka. Dokažimo najprej obstoj funkcije h. Pišimo $x = (t, y) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^k$, kjer je

$$t = (x_1, \ldots, x_{k-1}) \text{ in } y = x_k.$$

Podobno naj bo $a = (b, c) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}$. Po predpostavki velja

$$g(a) = 0 \text{ in } 2\alpha := \frac{\partial g}{\partial y}(a) \neq 0.$$

Privzeti smemo, da je $\alpha > 0$, saj v nasprotnem primeru lahko funkcijo g nadomestimo s funkcijo $-g$, ki ima isto množico ničel. Ker je g zvezno odvedljiva v okolici a, obstaja tak $r > 0$, da za vsak $x \in K(a, r)$ velja

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x) > \alpha.$$

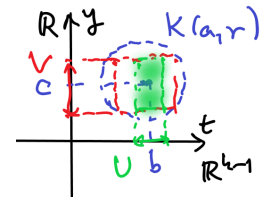
Vzemimo

$$\varepsilon := \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \text{in} \quad \delta \in (0, \varepsilon)$$

tako majhen, da za vsak $t \in U := K(b, \delta)$ velja

$$|g(t, c)| < \alpha\varepsilon.$$

Za okolico točke c vzemimo $V := (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$.



Pokazali bomo, da za vsak $t \in U$ obstaja natanko en $y_t \in V$, da velja $g(t, y_t) = 0$ – s tem pa je definirana iskana funkcija $h(t) := y_t$.

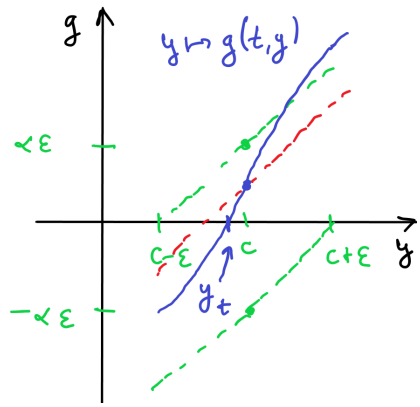
Izberimo poljuben $t \in U$. Funkcija

$$y \mapsto g(t, y), \quad y \in V$$

je strogo naraščajoča, saj je njen odvod $g_y(t, y) > \alpha > 0$. Ta funkcija je torej injektivna, njena zaloga vrednosti pa vsebuje interval

$$[g(t, c) - \alpha\varepsilon, g(t, c) + \alpha\varepsilon].$$

Ker smo okolico U izbrali tako, da za $t \in U$ velja $|g(t, c)| < \alpha\varepsilon$, zgornji interval vsebuje 0, zato ima funkcija $y \mapsto g(t, y)$ natanko eno ničlo $y_t \in V$. S predpisom $h(t) := y_t$ je torej določena funkcija $h\colon U \to V$, ki ustreza pogojema (1) in (2) v izreku.



Pokazati moramo še, da je dobljena funkcija h r-krat zvezno odvedljiva na U in izračunati njene prve parcialne odvode. Preverimo najprej, da je h zvezna na U. Izberimo spet poljuben $t \in U$ ter (dovolj majhno) spremembo $s = (s_1, \ldots, s_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$; potem je daljica med t in $t + s$ vsebovana v U. Po definiciji funkcije h velja

$$g(t, h(t)) = 0 \quad \text{in} \quad g(t + s, h(t + s)) = 0.$$

Označimo

$$\Delta h(s) := h(t + s) - h(t)$$

in si oglejmo naslednjo funkcijo ene spremenljivke:

$$G(v) := g(t + vs, h(t) + v\Delta h(s)), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Ta funkcija je odvedljiva na intervalu $[0, 1]$ in zanjo velja $G(0) = 0$ ter $G(1) = 0$. Zato po Rollovem izreku za neki $v \in (0, 1)$ velja $G'(v) = 0$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}(t + vs, h(t) + v\Delta h(s))s_i + \frac{\partial g}{\partial x_k}(t + vs, h(t) + v\Delta h(s))\Delta h(s) = 0.$$

Torej je

$$\Delta h(s) = -\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}(t + vs, h(t) + v\Delta h(s))s_i}{\displaystyle\frac{\partial g}{\partial x_k}(t + vs, h(t) + v\Delta h(s))}.$$

Ker so parcialni odvodi funkcije g zvezni in je njen parcialni odvod po x_k različen od nič, gre izraz na desni proti 0, ko pošljemo s proti 0. To pomeni, da je h zvezna v točki t.

Iz zadnje formule pa lahko izračunamo tudi parcialne odvode funkcije h v točki t. Naj bo $s = (0, \ldots, 0, s_i, 0, \ldots, 0)$ za neki $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Potem je

$$\Delta h(s) = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(t + vs, h(t) + v\Delta h(s))}{\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(t + vs, h(t) + v\Delta h(s))} s_i.$$

in zato

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(t) = \lim_{s_i \to 0} \frac{\Delta h(s)}{s_i} = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(t, h(t))}{\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(t, h(t))}.$$

Dobljeni izraz za h_{x_i} je zvezna funkcija, saj so parcialni odvodi funkcije g zvezni, funkcija h je zvezna in parcialni odvod g_{x_k} je različen od 0. To pomeni, da je funkcija h zvezno odvedljiva, torej $h \in C^1(U)$. Če je funkcija $g \in C^2$, so njeni odvodi C^1 funkcije, zato so parcialni odvodi $h_{x_i} \in C^1(U)$, posledično pa je $h \in C^2(U)$. Sedaj induktivno sledi, da je $h \in C^r(U)$, če je $g \in C^r$. $\square$

Na tem mestu lahko upravičimo privzetek, ki smo ga naredili v izpeljavi metode Lagrangeevih množiteljev. Privzeli smo, da je iz enačbe $g(x, y) = 0$ mogoče v okolici vsake točke, ki ustreza tej enačbi, izraziti eno od spremenljivk kot funkcijo druge. Po izreku o implicitni funkciji je to res mogoče, če je vsaj eden od parcialnih odvodov prvega reda funkcije g neničeln: če velja $g_y(a) \neq 0$, lahko izrazimo $y = h(x)$, če velja $g_x(a) \neq 0$, pa $x = p(y)$. Neničelnost vsaj enega od teh odvodov pa je ekvivalentna neničelnosti gradienta $\nabla g(a)$, kar smo v izpeljavi dodatno privzeli.

4. Ekstremi funkcij več kot dveh spremenljivk

Naj bo f funkcija k spremenljivk, ki je trikrat zvezno odvedljiva v okolici stacionarne točke $a \in \mathbb{R}^k$. Taylorjeva formula reda 2 pri spremembi $h \in \mathbb{R}^k$ je

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2 f(a) + R_{a,2}(h).$$

Poleg tega obstaja konstanta $K > 0$, da za napako velja ocena

$$|R_{a,2}(h)| \leq K \|h\|^3.$$

Za razliko funkcijskih vrednosti velja

$$\Delta f(h) = f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + R_{a,2}(h).$$

Členi reda 2 tvorijo *kvadratno formo*

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{k} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

in kot za funkcije dveh spremenljivk sledi, da ta določa obnašanje spremembe $\Delta f(h)$ za majhne h, če le ni enaka 0 v kakšni smeri (tj. za kak neničeln h). Ta kvadratna forma je določena s *Hessejevo matriko*

$$H(f, a) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(a) & f_{x_1x_2}(a) & \ldots & f_{x_1x_k}(a) \\ f_{x_2x_1}(a) & f_{x_2x_2}(a) & \ldots & f_{x_2x_k}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_kx_1}(a) & f_{x_kx_2}(a) & \ldots & f_{x_kx_k}(a) \end{bmatrix}$$

preko formule

$$Q(h) = h^\top H(f,a)h,$$

kjer smo vektor spremembe h obravnavali kot stolpec

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_k \end{bmatrix}.$$

Kar je bolj zapleteno kot pri funkcijah dveh spremenljivk, je, kako preverimo, da je $Q(h) > 0$ za vsak $h \neq 0$ (takrat ima f v točki a lokalni minimum) oziroma da je $Q(h) < 0$ za vsak $h \neq 0$ (takrat ima f v točki a lokalni maksimum). Ti lastnosti najprej poimenujmo.

Definicija 14.17. Naj bo $H \in \mathbb{R}^{k\times k}$ simetrična $k \times k$ matrika in $Q(h) = h^\top Hh$ pripadajoča kvadratna forma. Rečemo, da je matrika H

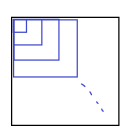
- *pozitivna*, če je $Q(h) \geq 0$ za vsak $h \in \mathbb{R}^k$;
- *pozitivno definitna*, če je $Q(h) > 0$ za vsak <u>neničeln</u> $h \in \mathbb{R}^k$;
- *negativna*, če je $Q(h) \leq 0$ za vsak $h \in \mathbb{R}^k$;
- *negativno definitna*, če je $Q(h) < 0$ za vsak <u>neničeln</u> $h \in \mathbb{R}^k$;
- *nedefinitna*, če obstajata taka $h_+, h_- \in \mathbb{R}^k$, da je $Q(h_+) > 0$ in $Q(h_-) < 0$.

Izrek 14.18 (obstoj in tip lokalnega ekstrema). *Naj bo f funkcija k spremenljivk, ki je dvakrat zvezno odvedljiva v okolici svoje stacionarne točke $a \in \mathbb{R}^k$. Označimo s $H = H(f,a)$ Hessejevo matriko funkcije f v točki a. Potem velja*

(1) *če je H pozitivno definitna, ima f v a lokalni minimum;*
(2) *če je H negativno definitna, ima f v a lokalni maksimum;*
(3) *če je H nedefinitna, f v a nima lokalnega ekstrema;*
(4) *v vseh ostalih primerih na osnovi odvodov drugega reda ni mogoče odločiti, ali f v točki a ima lokalni ekstrem ali ne.*

Dokaz tega izreka je v bistvu enak kot za funkcije dveh spremenljivk; krožnico $S \subset \mathbb{R}^2$ nadomesti enotska sfera v prostoru $\mathbb{R}^k$, ki sestoji iz množice vseh vektorjev z dolžino 1. Za uporabo pa je seveda pomembno, kako preverimo, ali je Hessejeva matrika definitna. Za simetrično matriko H velja naslednje:

- H je negativno definitna natanko tedaj, ko je $-H$ pozitivno definitna;
- H je pozitivno (negativno) definitna natanko tedaj, ko so vse njene lastne vrednosti pozitivne (negativne) – to je sicer konkreten pogoj, ki pa v praksi zahteva veliko dela, saj je lastne vrednosti težko izračunati;
- H je pozitivno definitna natanko tedaj, ko so vse njene glavne poddeterminante strogo pozitivne – to je pogoj, ki ga je relativno preprosto preveriti;



- H je nedefinitna, če ima tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti;
- H je pozitivna (negativna), a ni definitna, natanko tedaj, ko je vsaj ena od njenih lastnih vrednosti enaka 0.

Primer 14.19. Poišči lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} - \frac{8}{z}.$$

Ker je funkcija povsod, kjer je definirana, poljubno mnogokrat odvedljiva, so kandidati za lokalne ekstreme le stacionarne točke.

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \implies \frac{y}{2x} = \pm 1 \\
f_y(x,y,z) &= \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \implies \frac{z^2}{y^2} = \frac{y}{2x} = \pm 1 \\
&\implies y = 2x, \quad z = \pm y \\
f_z(x,y,z) &= \frac{2z}{y} + \frac{8}{z^2} = 0 \implies z^2 = -4\frac{y}{z} \\
&\implies z = -y, \quad z^2 = 4 \implies z = \pm 2
\end{aligned}$$

Stacionarni točki sta torej

$$a_1 = (1, 2, -2) \ \text{ in } \ a_2 = (-1, -2, 2).$$

Izračunajmo Hessejevi matriki funkcije f v teh dveh točkah.

$$f_{xx}(x,y,z) = \frac{y^2}{2x^3}, \quad f_{xy}(x,y,z) = -\frac{y}{2x^2}, \quad f_{xz}(x,y,z) = 0,$$

$$f_{yy}(x,y,z) = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}, \quad f_{yz}(x,y,z) = -\frac{2z}{y^2},$$

$$f_{zz}(x,y,z) = \frac{2}{y} - \frac{16}{z^3}.$$

Vstavimo točki in dobimo

$$H(f,a_1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1{,}5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \ \text{ in } \ H(f,a_2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1{,}5 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Preverimo, ali je $H(f,a_1)$ pozitivno definitna, torej izračunajmo njene glavne poddeterminante:

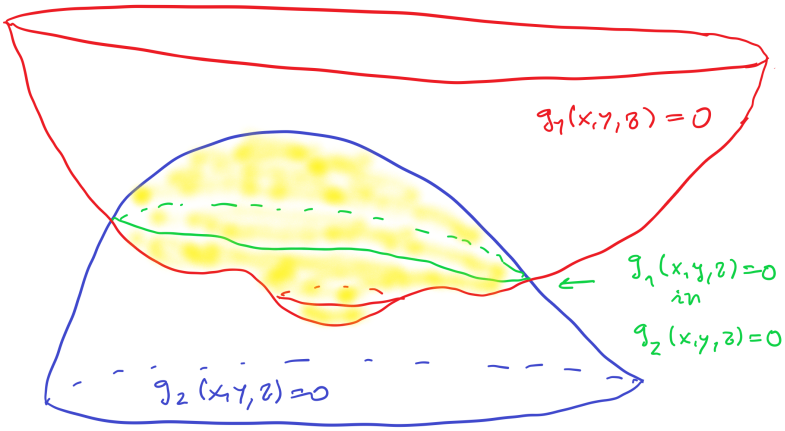
$$2 > 0, \quad 3 - 1 = 2 > 0, \quad 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 4 > 0.$$

Ker so vse glavne poddeterminante strogo pozitivne, je $H(f,a_1)$ pozitivno definitna, zato ima funkcija f lokalni minimum v točki a_1, $f(a_1) = 8$. Za matriko $H(f,a_2)$ velja $H(f,a_2) = -H(f,a_1)$, zato je negativno definitna in funkcija f ima lokalni maksimum v točki a_2, $f(a_2) = -8$. $\diamondsuit$

Tudi pri globalnih ekstremih funkcije več kot dveh spremenljivk je situacija podobna kot pri funkcijah dveh spremenljivk (ekstrem lahko nastopni v notranji točki kot lokalni ekstrem ali pa na robu), le da so množice, na katerih iščemo ekstreme, večrazsežne in zato težje predstavljive in težje opisljive. Na spodnji sliki so krogla, katere rob je sfera (dana z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$), polni torus, katerega rob je torus (ali svitek) ter štiristrana piramida.

Naslednja slika pa predstavlja območje med dvema ploskvama, določenima z enačbama

$$g_1(x,y,z) = 0 \quad \text{ter} \quad g_2(x,y,z) = 0.$$



Pri iskanju ekstremov neke funkcije f na robu tega območja moramo obravnavati točke na vsaki od ploskev posebej, torej vezana ekstrema, kjer velja naenkrat le eden od zgornjih pogojev. Poleg tega pa moramo posebej obravnavati tudi točke, kjer se ploskvi sekata, torej vezani ekstrem, kjer veljata oba pogoja hkrati.

Izrek 14.20 (vezani ekstremi). *Naj bo $U \subset \mathbb{R}^k$ odprta množica in naj bodo $f, g_1, \ldots, g_l$ ($l < k$) zvezno odvedljive funkcije na U. Kandidati za vezane ekstreme funkcije f pri pogojih*

$$g_1(x) = 0, \quad g_2(x) = 0, \ \ldots, \ g_l(x) = 0 \quad \text{za} \quad x \in U$$

so stacionarne točke Lagrangeeve funkcije

$$F(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_l) := f(x) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j g_j(x)$$

in točke $x \in U$, v katerih vektorji

$$\nabla g_1(x), \quad \nabla g_2(x), \ \ldots, \ \nabla g_l(x)$$

<u>niso</u> linearno neodvisni.