SOLUCIÓN A PROBLEMAS SELECTOS DEL LIBRO FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS PARA CIENCIAS E INGENIERÍA

ALDO NÚÑEZ TOVAR

Este documento está en proceso de elaboración, actualización y revisión.

Por cualquier error o sugerencia puede escribir al correo:

aldo.nunez@yandex.com

El libro está disponible en el siguiente enlace:

GitHub

CAPÍTULO 1

Ejercicios 5
1. Demostrar el siguiente teorema mediante leyes.
Teorema 1.3.2.
a.) $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$ Negación de implicación

Demostración: desarrollamos el lado izquierdo

$$
\begin{array}{lr}
\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q & \\
\neg(\neg P \vee Q) \equiv & \text{implicación material-L6} \\
\neg\neg P \wedge \neg Q \equiv & \text{D'Morgan-L5} \\
P \wedge \neg Q \equiv P \wedge \neg Q & \text{doble negación-L1}
\end{array}
$$

b.) $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$ Contrarecíproca

Demostración: desarrollamos el lado derecho

$$
\begin{array}{lr}
P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P & \\
\equiv \neg\neg Q \vee \neg P & \text{implicación material-L6} \\
\equiv Q \vee \neg P & \text{doble negación-L1} \\
\equiv \neg P \vee Q & \text{conmutativa-L2} \\
P \Rightarrow Q \equiv P \Rightarrow Q & \text{implicación material-L6}
\end{array}
$$

c.) $(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ Casos

Demostración: desarrollamos el lado derecho

$$
\begin{array}{lr}
(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) & \\
\equiv (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) & \text{implicación material-L6} \\
\equiv (R \vee \neg P) \wedge (R \vee \neg Q) & \text{conmutativa-L2} \\
\equiv R \vee (\neg P \wedge \neg Q) & \text{distributiva-L4} \\
\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee R & \text{conmutativa-L2} \\
\equiv \neg(P \vee Q) \Rightarrow R & \text{D'Morgan-L5} \\
(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (P \vee Q) \Rightarrow R & \text{doble negación-L1}
\end{array}
$$

2. Justificar los pasos en la simplificación de: $(P \wedge Q) \vee ((R \vee P) \wedge \neg Q)$.

$$
\begin{aligned}
&(P \wedge Q) \vee ((R \vee P) \wedge \neg Q) \equiv && \\
&\equiv((P \wedge Q) \vee (P \vee R)) \vee ((P \wedge Q) \vee \neg Q) && \text{dist-L4, conm-L2} \\
&\equiv((P \vee (P \vee R)) \wedge (Q \vee (P \vee R)) \wedge ((P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg Q)) && \text{dist-L4} \\
&\equiv((P \vee (P \vee R)) \wedge (Q \vee (P \vee R)) \wedge ((P \vee \neg Q) \wedge T) && \text{tautología} \\
&\equiv(P \vee (P \vee R)) \wedge (Q \vee (P \vee R)) \wedge (P \vee \neg Q) && \text{simp-L9} \\
&\equiv((P \vee P) \vee R) \wedge ((Q \vee P) \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) && \text{asoc-L3} \\
&\equiv(P \vee R) \wedge ((Q \vee P) \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) && \text{idem-L7} \\
&\equiv[(P \vee R) \wedge ((Q \vee P) \vee R)] \wedge (P \vee \neg Q) && \text{asoc-L3}
\end{aligned}
$$

desglosamos la anterior equivalencia para mayor claridad

$$
\begin{aligned}
&\equiv[((P \vee R) \wedge (Q \vee P)) \vee ((P \vee R) \wedge R)] \wedge (P \vee \neg Q) && \text{dist-L4} \\
&\equiv[((P \vee R) \wedge (Q \vee P)) \vee R] \wedge (P \vee \neg Q) && \text{abso-L8} \\
&\equiv[(P \wedge (Q \vee P)) \vee (R \wedge (Q \vee P)) \vee R] \wedge (P \vee \neg Q) && \text{dist-L4} \\
&\equiv[(P \wedge (Q \vee P)) \vee ((R \wedge (Q \vee P)) \vee R)] \wedge (P \vee \neg Q) && \text{asoc-L3} \\
&\equiv[(P \wedge (Q \vee P)) \vee R] \wedge (P \vee \neg Q) && \text{abso-L8}
\end{aligned}
$$

termina desglose

$$
\begin{aligned}
&\equiv(P \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) && \text{abso-L8} \\
&\equiv P \vee (R \wedge \neg Q) && \text{dist-L4}
\end{aligned}
$$

3. Demostrar cada equivalencia con propiedades, incluyendo las del ejercicio 1.
a.) $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

Demostración: desarrollamos el lado izquierdo

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \Rightarrow r &\equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r) && \\
\neg(p \wedge q) \vee r &\equiv && \text{implicación material-L6} \\
(\neg p \vee \neg q) \vee r &\equiv && \text{D'Morgan-L5} \\
\neg p \vee (\neg q \vee r) &\equiv && \text{asociativa-L3} \\
p \Rightarrow (\neg q \vee r) &\equiv && \text{implicación-L6} \\
p \Rightarrow (q \Rightarrow r) &\equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r) && \text{implicación material-L6}
\end{aligned}
$$

b.) $(\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q) \equiv P$

Demostración: desarrollamos el lado izquierdo

$$
\begin{aligned}
(\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q) &\equiv P && \\
(\neg\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg P \vee \neg Q) &\equiv && \text{implicación material-L6} \\
(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) &\equiv && \text{doble negación-L1} \\
P \vee (Q \wedge \neg Q) &\equiv && \text{distributiva-L4} \\
P \vee C &\equiv && \text{contradicción} \\
P &\equiv P && \text{simplificación-L9}
\end{aligned}
$$

c.) $(P \vee Q \vee R) \Rightarrow A \equiv (P \Rightarrow A) \wedge (Q \Rightarrow A) \wedge (R \Rightarrow A)$

Demostración: desarrollamos el lado izquierdo

$$\begin{aligned}
(P \vee Q \vee R) \Rightarrow A &\equiv (P \Rightarrow A) \wedge (Q \Rightarrow A) \wedge (R \Rightarrow A)\\
\neg(P \vee Q \vee R) \vee A &\equiv\\
(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee A &\equiv\\
A \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) &\equiv\\
(A \vee \neg P) \wedge (A \vee \neg Q) \wedge (A \vee \neg R) &\equiv\\
(\neg P \vee A) \wedge (\neg Q \vee A) \wedge (\neg R \vee A) &\equiv\\
(P \Rightarrow A) \wedge (Q \Rightarrow A) \wedge (R \Rightarrow A) &\equiv (P \Rightarrow A) \wedge (Q \Rightarrow A) \wedge (R \Rightarrow A)
\end{aligned}$$

d.) $\neg[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \vee \neg r \equiv \neg r$

Demostración: desarrollamos el lado izquierdo

$$\begin{aligned}
\neg[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \vee \neg r &\equiv \neg r\\
\neg[p \Rightarrow (\neg q \vee r)] \vee \neg r &\equiv\\
\neg[\neg p \vee (\neg q \vee r)] \vee \neg r &\equiv\\
\neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee \neg r &\equiv\\
(\neg\neg p \wedge \neg\neg q \wedge \neg r) \vee \neg r &\equiv\\
(p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg r &\equiv\\
\neg r \vee (p \wedge q \wedge \neg r) &\equiv\\
(\neg r \vee p) \wedge (\neg r \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg r) &\equiv\\
(\neg r \vee p) \wedge (\neg r \vee q) \wedge \neg r &\equiv\\
(\neg r \vee (p \wedge q)) \wedge \neg r &\equiv\\
\neg r \wedge (\neg r \vee (p \wedge q)) &\equiv\\
\neg r &\equiv \neg r
\end{aligned}$$

4. En cada caso justificar que las proposiciones no son equivalentes.
a.) $(P_1 \vee P_2) \Rightarrow Q$ y $(P_1 \Rightarrow Q) \vee (P_2 \Rightarrow Q)$
Simplificamos las proposiciones

$$\begin{array}{ll}
(P_1 \vee P_2) \Rightarrow Q & (P_1 \Rightarrow Q) \vee (P_2 \Rightarrow Q)\\
\neg(P_1 \vee P_2) \vee Q & (\neg P_1 \vee Q) \vee (\neg P_2 \vee Q)\\
(\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee Q & \neg P_1 \vee Q \vee \neg P_2 \vee Q\\
Q \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2) & \neg P_1 \vee \neg P_2 \vee Q \vee Q\\
Q \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2) & (\neg P_1 \vee \neg P_2) \vee Q\\
\multicolumn{2}{l}{Q \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2) \not\equiv Q \vee (\neg P_1 \vee \neg P_2)}
\end{array}$$

Vemos que las proposiciones no son equivalentes pues:

$$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \not\equiv \neg P_1 \vee \neg P_2$$

b.) $(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q$ y $(P_1 \Rightarrow Q) \wedge (P_2 \Rightarrow Q)$

$$\begin{array}{rl}
(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q & (P_1 \Rightarrow Q) \wedge (P_2 \Rightarrow Q) \\
\neg(P_1 \wedge P_2) \vee Q & (\neg P_1 \vee Q) \wedge (\neg P_2 \vee Q) \\
(\neg P_1 \vee \neg P_2) \vee Q & (Q \vee \neg P_1) \wedge (Q \vee \neg P_2) \\
\multicolumn{2}{l}{Q \vee (\neg P_1 \vee \neg P_2) \not\equiv Q \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2)}
\end{array}$$

Vemos que las proposiciones no son equivalentes pues:

$$\neg P_1 \vee \neg P_2 \not\equiv \neg P_1 \wedge \neg P_2$$

2

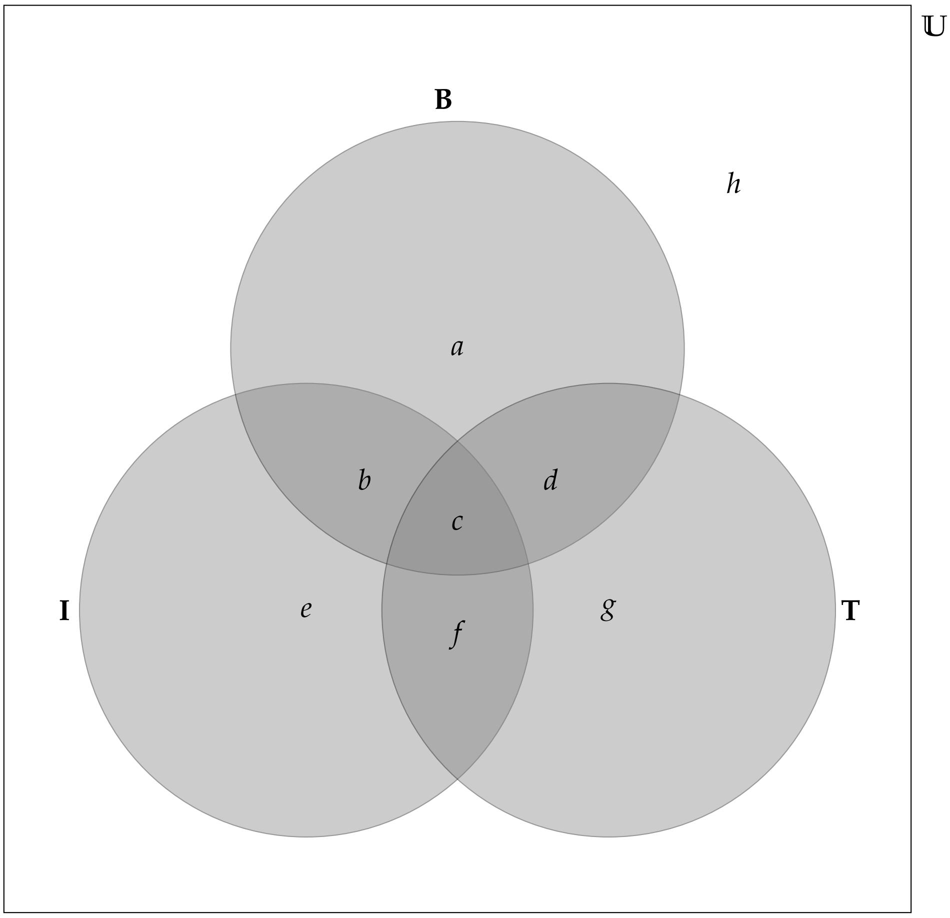
EJERCICIOS 13

2. En la Facultad de Ciencias de la Computación, se realizó una promoción de suscripción a tres importantes revistas: Bases de Datos, Ingeniería de Software y Telecomunicaciones. Se registró la siguiente información:

- 8 estudiantes se suscribieron a Ingeniería de Software y Telecomunicaciones.
- 6 estudiantes se suscribieron a Bases de Datos y Telecomunicaciones.
- 10 estudiantes se suscribieron a Bases de Datos e Ingeniería de Software.
- Solo 2 estudiantes, de los 70 encuestados, se suscribieron a las tres revistas.
- 20 estudiantes se suscribieron solo a una de las tres revistas.
- 3 estudiantes se inscribieron solo a Telecomunicaciones.
- 40 estudiantes no se inscribieron a Ingeniería de Software.

a.) Haga un diagrama de la situación planteada.
b.) ¿Cuántos estudiantes estarán suscritos solo a Ingeniería de Software?
c.) ¿Cuántos estudiantes, de los encuestados, no se suscribieron a ninguna?
Solución:
a.)
B - Base de datos
I - Ingeniería de software
T - Telecomunicaciones

1. 8 estudiantes se suscribieron a Ingeniería de Software y Telecomunicaciones.
   $c + f = 8$
2. 6 estudiantes se suscribieron a Bases de Datos y Telecomunicaciones.
   $c + d = 6$



3. 10 estudiantes se suscribieron a Bases de Datos e Ingeniería de Software.
   $b + c = 10$

4. Solo 2 estudiantes, de los 70 encuestados, se suscribieron a las tres revistas.
   $c = 2$

5. 20 estudiantes se suscribieron solo a una de las tres revistas.
   $a + e + g = 20$

6. 3 estudiantes se inscribieron solo a Telecomunicaciones.
   $g = 3$

7. 40 estudiantes no se inscribieron a Ingeniería de Software.
   $a + d + g + h = 40$

De 1. y 4., tenemos:

$$\begin{aligned} 2 + f &= 8 \\ f &= 8 - 2 \\ f &= 6 \qquad (8) \end{aligned}$$

De 2. y 4., tenemos:

$$\begin{aligned} 2 + d &= 6 \\ d &= 6 - 2 \\ d &= 4 \qquad (9) \end{aligned}$$

De 4. sabemos que son 70 encuestados. Entonces tenemos:

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 70$$

De 3., 5., 8. y 9. tenemos:

$$\begin{aligned} (a + e + g) + (b + c) + d + f + h &= 70 \\ 20 + 10 + 4 + 6 + h &= 70 \\ 40 + h &= 70 \\ h &= 70 - 40 \\ h &= 30 \qquad (10) \end{aligned}$$

De 6. y 9. y 10. tenemos:

$$\begin{aligned} a + d + g + h &= 40 \\ a + 4 + 3 + 30 &= 40 \\ a + 37 &= 40 \\ a &= 40 - 37 \\ a &= 3 \qquad (11) \end{aligned}$$

b.)

De 5., 6. y 11. tenemos:

$$\begin{aligned} a + e + g &= 20 \\ 3 + e + 3 &= 20 \\ e + 6 &= 20 \\ e &= 20 - 6 \\ e &= 14 \end{aligned}$$

Entonces, son 14 los estudiantes suscritos solo a Ingeniería de Software. c.) El número de estudiantes que no está suscrito a ninguna revista es: $h = 30$

3. Se dispone de la siguiente información correspodiente a los 75 empleados de las dos sucursales de la empresa "*FCC.com*":

- Todas las mujeres tienen menos de 10 años de servicio.
- Hay 45 hombres en total.
- Hay 25 empleados con 10 o más años de servicio.

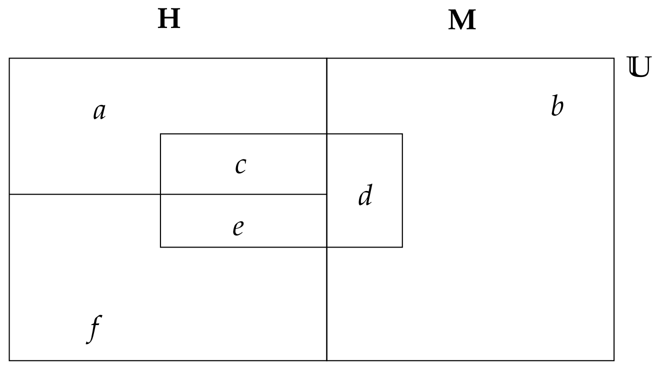
- 20 hombres trabajan en el departamento de informática.
- Hay 20 empleados en el departamento de informática con menos de 10 años de servicio de los cuales 5 son mujeres.

a.) ¿Cuántos hombres con 10 o más años de servicio trabajan en el departamento de informática?

b.) ¿Cuántos empleados trabajan en el departamento de informática?

c.) ¿Cuántos empleados tienen menos de 10 años de servico?

Solución



- **H**, subconjunto de todos los empleados hombres
- **M**, subconjunto de todos las empleadas mujeres
- a, hombres, con menos de 10 años de servicio, que no pertenecen al departamento de informática
- b, mujeres, todas tienen menos de 10 años de servicio, que no pertenecen al departamento de informática
- c, hombres, con menos de 10 años de servicio, del departamento de informática
- d, mujeres, con menos de 10 años de servicio, del departamento de informática
- e, hombres, con más de 10 años de servicio, del departamento del informática
- f, hombres, con más de 10 años de servicio, que no pertenecen al departamento de informática

El número total de empleados es 75

El número total de empleados hombres es:

$$H = 45$$

Entonces, el número total de empleadas es:

$$M = 75 - 45 = 30 \tag{1}$$

Número de mujeres en el departamento de informática:

$$d = 5 \tag{2}$$

Hay 20 empleados en el departamento de informática con menos de 10 años de servicio

$$\begin{aligned} c + d &= 20 \\ c &= 20 - d \end{aligned}$$

de (2)

$$\begin{aligned} c &= 20 - 5 \\ c &= 15 \end{aligned} \tag{3}$$

20 hombres trabajan en el departamento de informática

$$\begin{aligned} c + e &= 20 \\ e &= 20 - c \end{aligned}$$

de (3)

$$\begin{aligned} e &= 20 - 15 \\ e &= 5 \end{aligned} \tag{4}$$

a.) El número de hombres con más de 10 años de servicio que trabajan en el departamento de informática: 5

De (2), (3) y (4)

$$\begin{aligned} c + d + e &= 15 + 5 + 5 \\ c + d + e &= 25 \end{aligned}$$

b.) El número de empleados en el departamento de informática: 25

$$b + d = 30$$

Entonces, el número de mujeres es 30. Además, todas la mujeres tienen menos de 10 años de servicio

El número total de hombres es 45. Y, 25 empleados tienen más de 10 años de servicio

$$\begin{aligned} 45 - 25 &= 20 \\ a + c &= 20 \end{aligned} \tag{5}$$

El número de hombres que tiene menos de 10 años de servicio: 20

El número total de empleados que tiene menos de 10 años de servicio es: la suma de mujeres más el número de hombres con menos de 10 años de servicio. De (1) y (5)

$$a + c + b + d = 20 + 30 \tag{6}$$

$$20 + 30 = 50 \tag{7}$$

c.) El número de empleados con menos de 10 años de servicio: 50

Leyes de la idempotencia

- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$

Corolario 2.2.5 (Leyes de absorción) Sean A y B conjuntos cualesquiera. Entonces:

1. $A \cap (A \cup B) = A$
2. $A \cup (A \cap B) = A$

Corolario 2.2.6 Sea A un conjunto cualquiera

1. $A \cap \mathbb{U} = A$ y $A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$ Simplificación
2. $\varnothing \cap A = \varnothing$ y $\varnothing \cup A = A$ Simplificación
3. $A \cap A = A$ y $A \cup A = A$ Idempotencia

Teorema 2.3.2 Sean A, B conjuntos. Entonces

1. $(A^C)^C = A$ doble complemento
2. $A \cup A^C = \mathbb{U}$ y $A \cap A^C = \varnothing$ tautología y contradicción
3. $\mathbb{U}^C = \varnothing$ y $\varnothing^C = \mathbb{U}$ complemento de universo y vacío

Teorema 2.3.3 (Diferencia) $B \setminus A = B \cap A^C$
Propiedades de las Operaciones con Conjuntos
Sean X y Y conjuntos. Entonces:
1. *Propiedad conmutativa*

- $X \cup Y = Y \cup X$
- $X \cap Y = Y \cap X$

2. *Propiedad asociativa*

- $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$
- $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$

3. *Propiedad distributiva*

- $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z$
- $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z$

3. *Leyes de D'Morgan*

- $(X \cap Y)^C = X^C \cup Y^C$

- $(X \cup Y)^C = X^C \cap Y^C$

2.1 ejercicios 17

Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos:

1. $B = (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$

$$\begin{aligned} B &= (A \cap B) \cup (A^C \cap B) & \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap A^C) & \text{conmutativa} \\ &= B \cap (A \cup A^C) & \text{distributiva} \\ &= B \cap \mathbb{U} & \text{tautología} \\ B &= B & \text{simplificación} \end{aligned}$$

2. $E^C \setminus F^C = F \setminus E$

$$\begin{aligned} E^C \setminus F^C &= F \setminus E & \\ &= F \cap E^C & \text{teorema 2.3.3} \\ &= E^C \cap F & \text{conmutativa} \\ E^C \setminus F^C &= E^C \setminus F^C & \text{teorema 2.3.3} \end{aligned}$$

3. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

$$\begin{aligned} A \setminus B &= A \setminus (A \cap B) & \\ &= A \cap (A \cap B)^C & \text{teorema 2.3.3} \\ &= A \cap (A^C \cup B^C) & \text{D'Morgan} \\ &= (A \cap A^C) \cup (A \cap B^C) & \text{distributiva} \\ &= \varnothing \cup (A \cap B^C) & \text{contradicción} \\ &= A \cap B^C & \text{simplificación} \\ &= A \setminus B & \text{teorema 2.3.3} \end{aligned}$$

4. $A \cap (B \setminus D) = (A \cap B) \setminus (A \cap D)$

$$\begin{aligned} A \cap (B \setminus D) &= (A \cap B) \setminus (A \cap D) & \\ &= (A \cap B) \cap (A \cap D)^C & \text{teorema 2.3.3} \\ &= (A \cap B) \cap (A^C \cup D^C) & \text{D'Morgan} \\ &= (B \cap A) \cap (A^C \cup D^C) & \text{conmutativa} \\ &= B \cap (A \cap (A^C \cup D^C)) & \text{asociativa} \\ &= B \cap [(A \cap A^C) \cup (A \cap D^C)] & \text{distributiva} \\ &= B \cap [\varnothing \cup (A \cap D^C)] & \text{contradicción} \\ &= B \cap (A \cap D^C) & \text{simplificación} \\ &= (B \cap A) \cap D^C & \text{asociativa} \\ &= (A \cap B) \cap D^C & \text{conmutativa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= A\cap(B\cap D^C) && \text{asociativa}\\ A\cap(B\setminus D) &= A\cap(B\setminus D) && \text{teorema 2.3.3}\end{aligned}$$

5. $E=(B\cup(A\cap B^C)\cup(A^c\cap B^C))\cap E$

$$\begin{aligned} E &= (B\cup(A\cap B^C)\cup(A^c\cap B^C))\cap E\\ &= ((B\cup(A\cap B^C))\cup(A^c\cap B^C))\cap E && \text{asociativa}\\ &= ((B\cup A)\cap(B\cup B^C))\cup(A^C\cap B^C))\cap E && \text{distributiva}\\ &= ((B\cup A)\cap\mathbb{U})\cup(A^C\cap B^C))\cap E && \text{tautología}\\ &= ((B\cup A)\cup(A^C\cap B^C))\cap E && \text{simplificación}\\ &= ((A\cup B)\cup(A^C\cap B^C))\cap E && \text{conmutativa}\\ &= ((A\cup B)\cup(A\cup B)^C)\cap E && \text{D'Morgan}\\ &= \mathbb{U}\cap E && \text{tautología}\\ E &= E && \text{simplificación}\end{aligned}$$

6. $A\setminus(B\cap D)=(A\setminus B)\cup(A\setminus D)$

$$\begin{aligned} A\setminus(B\cap D) &= (A\setminus B)\cup(A\setminus D)\\ &= (A\cap B^C)\cup(A\cap D^C) && \text{teorema 2.3.3}\\ &= A\cap(B^C\cup D^C) && \text{distributiva}\\ &= A\cap(B\cap D)^C && \text{D'Morgan}\\ A\setminus(B\cap D) &= A\setminus(B\cap D) && \text{teorema 2.3.3}\end{aligned}$$

7. $A\cap[(A\cup B)^C\cup(B^C\cup A)]=A$

$$\begin{aligned} A\cap[(A\cup B)^C\cup(B^C\cup A)] &= A\\ A\cap[(A^C\cap B^C)\cup(B^C\cup A)] &= && \text{D'Morgan}\\ A\cap[(A^C\cap B^C)\cup(A\cup B^C)] &= && \text{conmutativa}\\ A\cap[((A^C\cap B^C)\cup A)\cup B^C] &= && \text{asociativa}\\ A\cap[((A^C\cup A)\cap(B^C\cup A))\cup B^C] &= && \text{distributiva}\\ A\cap[(\mathbb{U}\cap(B^C\cup A))\cup B^C] &= && \text{tautología}\\ A\cap[(B^C\cup A)\cup B^C] &= && \text{simplificación}\\ A\cap[(A\cup B^C)\cup B^C] &= && \text{conmutativa}\\ A\cap[A\cup(B^C\cup B^C)] &= && \text{asociativa}\\ A\cap[A\cup B^C] &= && \text{idempotencia}\\ A &= A && \text{absorción}\end{aligned}$$

3

EJERCICIOS 31

En cada caso, completar el trinomio cuadrado perfecto para resolver la ecuación dada.
Un trinomio cuadrado perfecto, se obtiene al elevar al cuadrado un binomio:
Ejemplos:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \tag{1}$$

o

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \tag{2}$$

1.)

$$x^2 - 16x + 63 = 0$$

Solución:

1er. paso. Nos fijamos en los factores de x de la ecuación (2) y en la ecuación que deseamos resolver e igualamos:

$$\begin{aligned} 2a &= 16 \\ a &= \frac{16}{2} \\ a &= 8 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el cuadrado del término independiente es

$$\begin{aligned} a^2 &= 8^2 \\ a^2 &= 64 \end{aligned}$$

2do. paso. Comparamos a^2 con el término constante de la ecuación que deseamos resolver y encontramos el valor que debemos sumar o restar para que estos sean iguales

$$\begin{aligned} 63 + z &= a^2 \\ 63 + z &= 64 \\ z &= 64 - 63 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

3er. paso. Sumar el valor encontrado de z en ambos miembros de la ecuación a resolver

$$\begin{aligned} x^2 - 16x + 63 + 1 &= 1 \\ x^2 - 16x + 64 &= 1 \\ x^2 - 2(8)x + 8^2 &= 1 \end{aligned} \tag{3}$$

4to. paso. Factorizar la ecuación (3). Observamos que el primer miembro de esta ecuación es el cuadrado de un binomio

$$(x-8)^2 = 1$$

5to. paso. Factorizar y encontrar las raíces. Recordemos la factorización de la suma por la diferencia: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\begin{aligned} (x-8)^2 - 1 &= 0 \\ [(x-8)+1)((x-8)-1)] &= 0 \\ (x-7)(x-9) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, las raíces son:

$$\begin{aligned} x - 7 &= 0 \\ x_1 &= 7 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x - 9 &= 0 \\ x_2 &= 9 \end{aligned}$$

2.)

$$x^2 + 12x - 3 = 0$$

Solución:

1er. paso. Nos fijamos en los factores de x de la ecuación (1) y en la ecuación que deseamos resolver e igualamos:

$$\begin{aligned} 2a &= 12 \\ a &= \frac{12}{2} \\ a &= 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el cuadrado del término independiente es

$$\begin{aligned} a^2 &= 6^2 \\ a^2 &= 36 \end{aligned}$$

2do. paso. Comparamos a^2 con el término constante de la ecuación que deseamos resolver y encontramos el valor que debemos sumar o restar para que estos sean iguales

$$\begin{aligned} -3+z &= a^2 \\ -3+z &= 36 \\ z &= 36+3 \\ z &= 39 \end{aligned}$$

3er. paso. Sumar el valor encontrado de z en ambos miembros de la ecuación a resolver

$$\begin{aligned} x^2+12x-3+39 &= 39 \\ x^2+12x+36 &= 39 \\ x^2+2(6)x+6^2 &= 39 \end{aligned} \tag{4}$$

4to. paso. Factorizar la ecuación (4). Observamos que el primer miembro de esta ecuación es el cuadrado de un binomio

$$(x+6)^2 = 39$$

5to. paso. Factorizar y encontrar las raíces. Recordemos la factorización de la suma por la diferencia: $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\begin{aligned} (x+6)^2-39 &= 0 \\ [(x+6)+\sqrt{39})((x+6)-\sqrt{39})] &= 0 \\ (x+6+\sqrt{39})(x+6-\sqrt{39}) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, las raíces son:

$$\begin{aligned} x+6+\sqrt{39} &= 0 \\ x_1 &= -6-\sqrt{39} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x+6-\sqrt{39} &= 0 \\ x_2 &= -6+\sqrt{39} \end{aligned}$$

3.)

$$x^2+x+1=0$$

Solución:

1er. paso. Nos fijamos en los factores de x de la ecuación (1) y en la ecuación que deseamos resolver e igualamos:

$$\begin{aligned} 2a &= 1 \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el cuadrado del término independiente es

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ a^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2do. paso. Comparamos a^2 con el término constante de la ecuación que deseamos resolver y encontramos el valor que debemos sumar o restar para que estos sean iguales

$$\begin{aligned} 1 + z &= a^2 \\ 1 + z &= \frac{1}{4} \\ z &= \frac{1}{4} - 1 \\ z &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

3er. paso. Sumar el valor encontrado de z en ambos miembros de la ecuación a resolver

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 - \frac{3}{4} &= -\frac{3}{4} \\ x^2 + x + \frac{1}{4} &= -\frac{3}{4} \\ x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

4to. paso. Factorizar la ecuación (4). Observamos que el primer miembro de esta ecuación es el cuadrado de un binomio

$$\left(x + \left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = -\frac{3}{4}$$

Sabemos que una expresión elevada al cuadrado es siempre mayor o igual a cero, por lo tanto esta última expresión no tiene solución

4

EJERCICIOS 34

Determinar el conjunto solución de cada ecuación.
Si tenemos desigualdades del tipo valor absoluto: y mayor que $>$, o mayor o igual que $\geq$. Y, menor que $<$, o menor o igual que $\leq$

$$|f(x)| \leq a \tag{1}$$

Esta desigualdad se puede expresar como:

$$-a \leq f(x) \leq a \tag{2}$$

o

$$f(x) \leq a \wedge f(x) \geq -a \tag{3}$$

Por otro lado

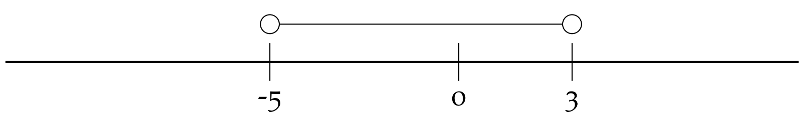
$$|f(x)| \geq a \tag{4}$$
$$f(x) \geq a \vee f(x) \leq -a \tag{5}$$

1.

$$|2y+2| < 8$$

Solución:

$$\begin{aligned} -8 < 2&y{+}2 < 8 \\ -8-2 < 2y&+2-2 < 8-2 \\ -10 < &2y < 6 \\ -\frac{10}{2} < &y < \frac{6}{2} \\ -5 < &y < 3 \end{aligned}$$



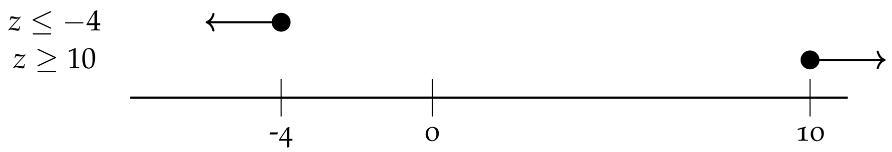
$$\begin{aligned} C_s &= \{y \in \mathbb{R} / \ -5 < y < 3\} \\ &= (-5, 3) \end{aligned}$$

2.

$$|z-3| \geq 7$$

Solución:

$$\begin{aligned} z-3 \geq 7 &\quad \vee \quad z-3 \leq -7 \\ z \geq 7+3 &\quad \vee \quad z \leq -7+3 \\ z \geq 10 &\quad \vee \quad z \leq -4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} C_s &= \{z \in \mathbb{R} / \ -\infty < z \leq -4 \vee -10 \leq z < \infty\} \\ &= (-\infty, -4] \cup [10, \infty) \end{aligned}$$

3.

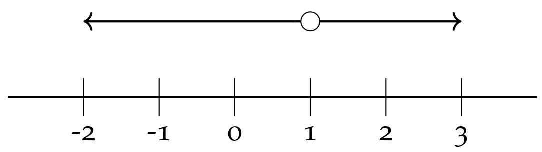
$$\frac{3}{|x-1|} \geq 0$$

En este caso, numerador y denominador son positivos, entonces el cociente será positivo para toda x, menos cuando el denominador es igual a 0

$$\begin{aligned} x-1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Enconces, excluimos este valor de la solución

$$x \neq 1$$



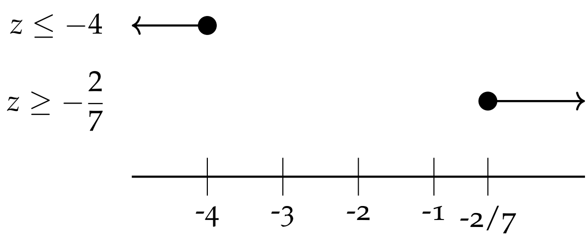
$$\begin{aligned} C_s &= \{x \in \mathbb{R} / \ -\infty < x < 1 \vee 1 < x < \infty\} \\ &= (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \end{aligned}$$

4.

$$|4x+3| + 3x \geq 1$$

Solución

$$
\begin{aligned}
|4x+3|+3x &\geq 1 \\
|4x+3| &\geq 1-3x \\
4x+3 \geq 1-3x \quad &\vee \quad 4x+3 \leq -(1-3x) \\
4x+3+3x \geq 1 \quad &\vee \quad 4x+3 \leq -1+3x \\
7x+3 \geq 1 \quad &\vee \quad 4x+3-3x \leq -1 \\
7x \geq 1-3 \quad &\vee \quad x+3 \leq -1 \\
7x \geq -2 \quad &\vee \quad x \leq -1-3 \\
x \geq -\frac{2}{7} \quad &\vee \quad x \leq -4
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
C_s &= \{x \in \mathbb{R}/ \ -\infty < x \leq 4 \vee -\frac{2}{7} \leq x < \infty\} \\
&= (-\infty, 4] \cup [-2/7, \infty)
\end{aligned}
$$

5.

$$\left|\frac{5x-2}{4-x}\right| < \frac{1}{3}$$

Solución

$$\left|\frac{5x-2}{4-x}\right| < \frac{1}{3}$$

Excluimos el valor que hace 0 el denominador

$$
\begin{aligned}
4-x &= 0 \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

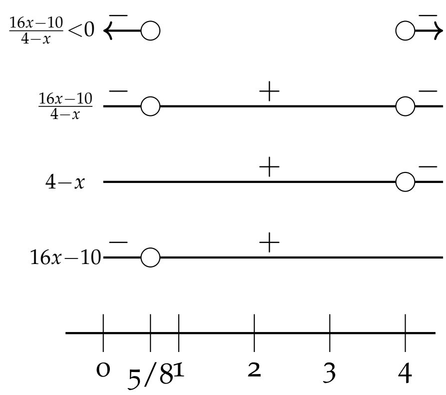


Figura 1: $\frac{16x-10}{4-x} < 0$

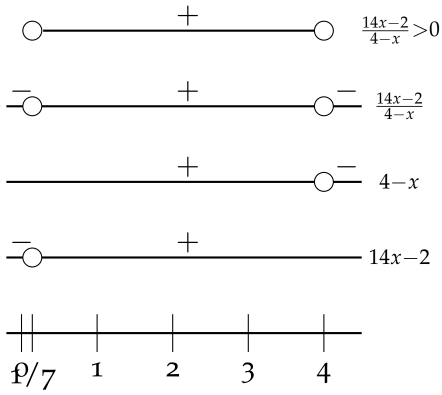


Figura 2: $\frac{14x-2}{4-x} > 0$

Entonces

$$\begin{aligned}
x &\neq 4 \\
\frac{5x-2}{4-x} < \frac{1}{3} \quad &\wedge \quad \frac{5x-2}{4-x} > -\frac{1}{3} \\
\frac{5x-2}{4-x} - \frac{1}{3} < 0 \quad &\wedge \quad \frac{5x-2}{4-x} + \frac{1}{3} > 0 \\
3\frac{5x-2}{4-x} - 1 < 0 \quad &\wedge \quad 3\frac{5x-2}{4-x} + 1 > 0 \\
\frac{15x-6-(4-x)}{4-x} < 0 \quad &\wedge \quad \frac{15x-6+4-x}{4-x} > 0 \\
\frac{15x-6-4+x}{4-x} < 0 \quad &\wedge \quad \frac{14x-2}{4-x} > 0 \\
\frac{16x-10}{4-x} < 0 \quad &\wedge \quad \frac{14x-2}{4-x} > 0
\end{aligned}$$

Calculamos para qué valores de x los numeradores son 0

$$\begin{aligned}
16x - 10 = 0 \qquad & 14x - 2 = 0 \\
16x = 10 \quad & 14x = 2 \\
x = \frac{10}{16} \qquad & x = \frac{2}{14} \\
x = \frac{5}{8} \qquad & x = \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

De los diagramas de intervalos hemos deducido los intervalos solución para cada una de las desigualdades:

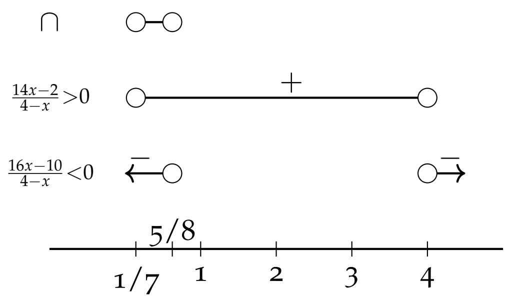
Para

$$\begin{aligned}
&\frac{16x-10}{4-x} < 0 \\
Cs &= \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < \frac{5}{8} \vee 4 < x < \infty\} \\
&= \left(-\infty, \frac{5}{8}\right) \cup (4, \infty)
\end{aligned}$$

Para

$$
\begin{aligned}
\frac{14x-2}{4-x} &> 0 \\
Cs &= \{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{7} < x < 4\} \\
&= \left(\frac{1}{7}, 4\right)
\end{aligned}
$$

Ahora, solo nos falta hacer la intersección entre ambos conjuntos solución



$$
\begin{aligned}
Cs &= \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{7} < x < \frac{5}{8}\right\} \\
&= \left(\frac{1}{7}, \frac{5}{8}\right)
\end{aligned}
$$

6.

$$|5x-3| - |3-x| < 4$$

Solución:

$$|5x-3| - |3-x| < 4$$

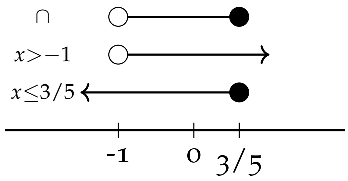
$$
|5x-3| = \begin{cases} 5x-3, & 5x-3>0 \\ & x > \frac{3}{5} \\ -5x+3, & 5x-3<0 \\ & x \leq \frac{3}{5} \end{cases}
\qquad
|3-x| = \begin{cases} 3-x, & 3-x>0 \\ & x \leq 3 \\ x-3, & 3-x<0 \\ & x > 3 \end{cases}
$$

Identificamos tres intervalos: $x \leq 3/5$, $3/5 < x \leq 3$ y $x > 3$.

Ahora vamos a encontrar el conjunto solución en cada intervalo:

Caso I, $x \leq 3/5$

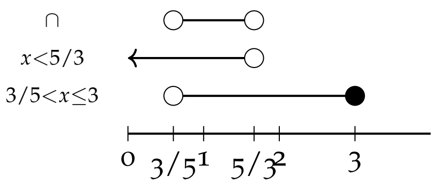
$$\begin{aligned} -5x+3-(3-x) &< 4 \\ -5x+3-3+x &< 4 \\ -4x &< 4 \\ x &< \frac{4}{-4} \\ x &> -1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} C_{s_I} &= \left\{ x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq \frac{3}{5} \right\} \\ &= \left(-1, \frac{3}{5} \right] \end{aligned}$$

Caso II, $3/5 < x \leq 3$

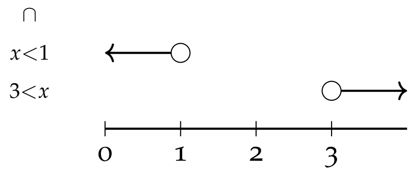
$$\begin{aligned} 5x-3-(3-x) &< 4 \\ 5x-3-3+x &< 4 \\ 6x-6 &< 4 \\ 6x &< 4+6 \\ x &< \frac{5}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} C_{s_{II}} &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{3}{5} < x < \frac{5}{3} \right\} \\ &= \left(\frac{3}{5}, \frac{5}{3} \right) \end{aligned}$$

Caso III ($3 < x$)

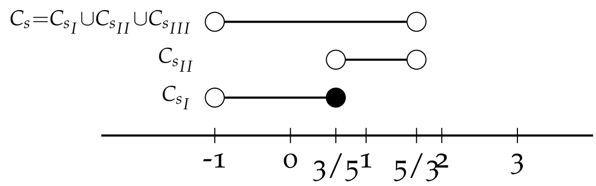
$$
\begin{aligned}
5x - 3 - (x - 3) &< 4 \\
5x - 3 - x + 3 &< 4 \\
4x &< 4 \\
x &< \frac{4}{4} \\
x &< 1
\end{aligned}
$$



La intersección entre ambos intervalos es el conjunto vacío: $\varnothing$

$$C_{s_{III}} = \varnothing$$

Finalmente, la solución es la unión de los conjuntos solución de $C_{s_I}, C_{s_{II}}$ y $C_{s_{III}}$



$$
\begin{aligned}
C_s &= C_{s_I} \cup C_{s_{II}} \cup C_{s_{III}} \\
C_s &= \left\{ x \in \mathbb{R} / -1 < x < \frac{5}{3} \right\} \\
C_s &= \left(-1, \frac{5}{3} \right)
\end{aligned}
$$

7.

$$3x^2 - 11|x| - 4 \geq 0$$

Solución

$$3x^2 - 11|x| - 4 \geq 0$$

De acuerdo a si x es positiva o negativa tenemos:

$$3x^2 - 11x - 4 \geq 0 \quad \wedge \quad 3x^2 - 11(-x) - 4 \geq 0$$

Para $x \geq 0$

$$3x^2 - 11x - 4 \geq 0$$

Igualamos a 0 para encontrar las raíces

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 11x - 4 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x_{1,2} &= \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 3 \times (-4)}}{2 \times 3} \\
x_{1,2} &= \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{6} \\
x_{1,2} &= \frac{11 \pm \sqrt{169}}{6} \\
x_{1,2} &= \frac{11 \pm 13}{6} \\
x_1 &= \frac{11 + 13}{6} \\
x_1 &= \frac{24}{6} \\
x_1 &= 4 \\
x_2 &= \frac{11 - 13}{6} \\
x_2 &= \frac{-2}{6} \\
x_2 &= -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

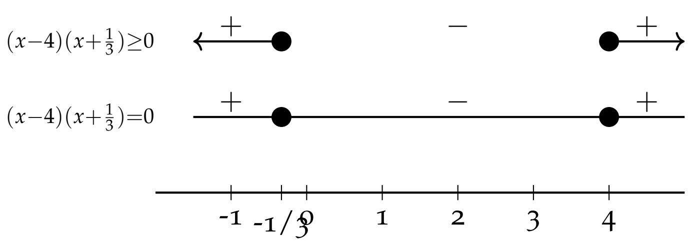
Entonces, tenemos

$$(x-4)(x+\frac{1}{3}) \geq 0$$

Para determinar en qué intervalos la ecuación es negativa o positiva, evaluamos la ecuación en $x = 0$

$$(0-4)(0+\frac{1}{3}) = (-4)(\frac{1}{3}) = -\frac{4}{3} < 0$$

localizamos el intervalo donde $x = 0$ y asignamos el anterior resultado, signo negativo. Y como tenemos dos raíces reales, los signos en los restante intervalos son positivos. En este caso tenemos $+ - +$



El conjunto solución, cuando $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} C_s &= \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x \leq -\frac{1}{3} \vee 4 \leq x < \infty\} \\ &= (-\infty, -1/3] \cup [4, \infty) \end{aligned}$$

Para $x < 0$

$$3x^2 - 11(-x) - 4 \geq 0$$

Igualamos a 0 para encontrar las raíces

$$\begin{aligned} 3x^2 &+ 11x - 4 = 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_{1,2} &= \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \times 3 \times (-4)}}{2 \times 3} \\ x_{1,2} &= \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 48}}{6} \\ x_{1,2} &= \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{6} \\ x_{1,2} &= \frac{-11 \pm 13}{6} \\ x_1 &= \frac{-11 + 13}{6} \\ x_1 &= \frac{2}{6} \\ x_1 &= \frac{1}{3} \\ x_2 &= \frac{-11 - 13}{6} \\ x_2 &= \frac{-24}{6} \\ x_2 &= -4 \end{aligned}$$

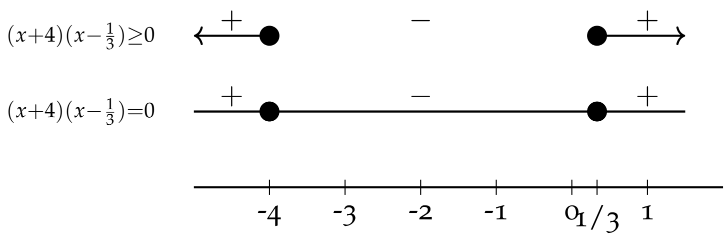
Entonces, tenemos

$$(x + 4)(x - \frac{1}{3}) \geq 0$$

Para determinar en qué intervalos la ecuación es negativa o positiva, evaluamos la ecuación en $x = 0$

$$(0 + 4)(0 - \frac{1}{3}) = (4)(-\frac{1}{3}) = -\frac{4}{3} < 0$$

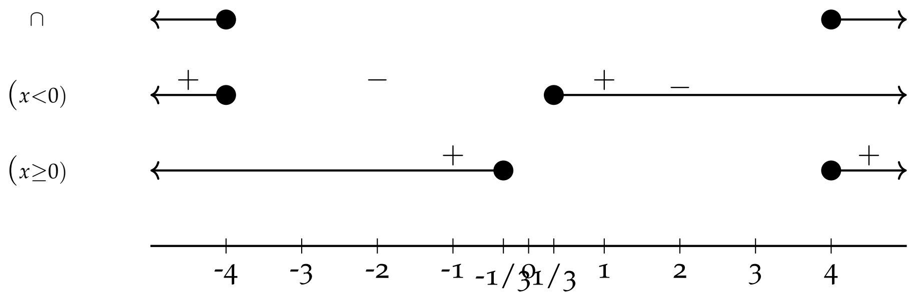
localizamos el intervalo donde $x = 0$ y asignamos el anterior resultado, signo negativo. Y como tenemos dos raíces reales, los signos en los restante intervalos son positivos. En este caso tenemos $+ - +$



El conjunto solución, cuando $x < 0$:

$$\begin{aligned} C_s &= \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x \leq -4 \vee \frac{1}{3} \leq x < \infty\} \\ &= (-\infty, -4] \cup [1/3, \infty) \end{aligned}$$

Finalmente, el conjunto solución es el intervalo donde ambas soluciones parciales son mayores o iguales a cero, ≥ 0. Es decir, hacemos la intersección de ambos conjuntos solución.



$$\begin{aligned} C_s &= \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x \leq -4 \vee 4 \leq x < \infty\} \\ &= (-\infty, -4] \cup [4, \infty) \end{aligned}$$