SOLUCIÓN A PROBLEMAS SELECTOS DEL LIBRO FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS PARA CIENCIAS E INGENIERÍA

ALDO NÚÑEZ TOVAR

Este documento está en proceso de elaboración, actualización y revisión.

Por cualquier error o sugerencia puede escribir al correo:
aldo.nunez@yandex.com

El libro está disponible en el siguiente enlace:

GitHub

1

CAPÍTULO 1

Ejercicios 5
1. Demostrar el siguiente teorema mediante leyes.
Teorema 1.3.2.
a.) $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$ Negación de implicación

Demostración: desarrollamos el lado izquierdo

$$\begin{array}{rr} \neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q & \\ \neg(\neg P \vee Q) \equiv & \text{implicación material-L6} \\ \neg\neg P \wedge \neg Q \equiv & \text{D'Morgan-L5} \\ P \wedge \neg Q \equiv P \wedge \neg Q & \text{doble negación-L1} \end{array}$$

b.) $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$ Contrarecíproca

Demostración: desarrollamos el lado derecho

$$\begin{array}{lr} P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P & \\ \equiv \neg\neg Q \vee \neg P & \text{implicación material-L6} \\ \equiv Q \vee \neg P & \text{doble negación-L1} \\ \equiv \neg P \vee Q & \text{conmutativa-L2} \\ P \Rightarrow Q \equiv P \Rightarrow Q & \text{implicación material-L6} \end{array}$$

c.) $(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ Casos

Demostración: desarrollamos el lado derecho

$$\begin{array}{lr} (P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) & \\ \equiv (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) & \text{implicación material-L6} \\ \equiv (R \vee \neg P) \wedge (R \vee \neg Q) & \text{conmutativa-L2} \\ \equiv R \vee (\neg P \wedge \neg Q) & \text{distributiva-L4} \\ \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee R & \text{conmutativa-L2} \\ \equiv \neg(P \vee Q) \vee R & \text{D'Morgan-L5} \\ \equiv \neg(\neg(P \vee Q)) \Rightarrow R & \text{implicación material-L6} \\ (P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (P \vee Q) \Rightarrow R & \text{doble negación-L1} \end{array}$$

2. Justificar los pasos en la simplificación de: $(P \wedge Q) \vee ((R \vee P) \wedge \neg Q)$.

$$
\begin{aligned}
&(P \wedge Q) \vee ((R \vee P) \wedge \neg Q) \equiv & \\
&\equiv((P \wedge Q) \vee (P \vee R)) \vee ((P \wedge Q) \vee \neg Q) & \text{dist-L4, conm-L2} \\
&\equiv((P \vee (P \vee R)) \wedge (Q \vee (P \vee R)) \wedge ((P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg Q)) & \text{dist-L4} \\
&\equiv((P \vee (P \vee R)) \wedge (Q \vee (P \vee R)) \wedge ((P \vee \neg Q) \wedge T) & \text{tautología} \\
&\equiv(P \vee (P \vee R)) \wedge (Q \vee (P \vee R)) \wedge (P \vee \neg Q) & \text{simp-L9} \\
&\equiv((P \vee P) \vee R) \wedge ((Q \vee P) \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) & \text{asoc-L3} \\
&\equiv(P \vee R) \wedge ((Q \vee P) \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) & \text{idem-L7} \\
&\equiv[(P \vee R) \wedge ((Q \vee P) \vee R)] \wedge (P \vee \neg Q) & \text{asoc-L3}
\end{aligned}
$$

desglosamos la anterior equivalencia para mayor claridad

$$
\begin{aligned}
&\equiv[((P \vee R) \wedge (Q \vee P)) \vee ((P \vee R) \wedge R)] \wedge (P \vee \neg Q) & \text{dist-L4} \\
&\equiv[((P \vee R) \wedge (Q \vee P)) \vee R] \wedge (P \vee \neg Q) & \text{abso-L8} \\
&\equiv[(P \wedge (Q \vee P)) \vee (R \wedge (Q \vee P)) \vee R] \wedge (P \vee \neg Q) & \text{dist-L4} \\
&\equiv[(P \wedge (Q \vee P)) \vee ((R \wedge (Q \vee P)) \vee R)] \wedge (P \vee \neg Q) & \text{asoc-L3} \\
&\equiv[(P \wedge (Q \vee P)) \vee R] \wedge (P \vee \neg Q) & \text{abso-L8}
\end{aligned}
$$

termina desglose

$$
\begin{aligned}
&\equiv(P \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) & \text{abso-L8} \\
&\equiv P \vee (R \wedge \neg Q) & \text{dist-L4}
\end{aligned}
$$

3. Demostrar cada equivalencia con propiedades, incluyendo las del ejercicio 1.
a.) $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

Demostración: desarrollamos el lado izquierdo

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r) & \\
\neg(p \wedge q) \vee r \equiv & \quad \text{implicación material-L6} \\
(\neg p \vee \neg q) \vee r \equiv & \quad \text{D'Morgan-L5} \\
\neg p \vee (\neg q \vee r) \equiv & \quad \text{asociativa-L3} \\
p \Rightarrow (\neg q \vee r) \equiv & \quad \text{implicación material-L6} \\
p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r) & \quad \text{implicación material-L6}
\end{aligned}
$$

b.) $(\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q) \equiv P$

Demostración: desarrollamos el lado izquierdo

$$
\begin{aligned}
(\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q) \equiv P & \\
(\neg\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg P \vee \neg Q) \equiv & \quad \text{implicación material-L6} \\
(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \equiv & \quad \text{doble negación-L1} \\
P \vee (Q \wedge \neg Q) \equiv & \quad \text{distributiva-L4} \\
P \vee C \equiv & \quad \text{contradicción} \\
P \equiv P & \quad \text{simplificación-L9}
\end{aligned}
$$

c.) $(P \vee Q \vee R) \Rightarrow A \equiv (P \Rightarrow A) \wedge (Q \Rightarrow A) \wedge (R \Rightarrow A)$

Demostración: desarrollamos el lado izquierdo

$$\begin{aligned}
(P \vee Q \vee R) \Rightarrow A &\equiv (P \Rightarrow A) \wedge (Q \Rightarrow A) \wedge (R \Rightarrow A)\\
\neg(P \vee Q \vee R) \vee A &\equiv\\
(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee A &\equiv\\
A \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) &\equiv\\
(A \vee \neg P) \wedge (A \vee \neg Q) \wedge (A \vee \neg R) &\equiv\\
(\neg P \vee A) \wedge (\neg Q \vee A) \wedge (\neg R \vee A) &\equiv\\
(P \Rightarrow A) \wedge (Q \Rightarrow A) \wedge (R \Rightarrow A) &\equiv (P \Rightarrow A) \wedge (Q \Rightarrow A) \wedge (R \Rightarrow A)
\end{aligned}$$

d.) $\neg[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \vee \neg r \equiv \neg r$

Demostración: desarrollamos el lado izquierdo

$$\begin{aligned}
\neg[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \vee \neg r &\equiv \neg r\\
\neg[p \Rightarrow (\neg q \vee r)] \vee \neg r &\equiv\\
\neg[\neg p \vee (\neg q \vee r)] \vee \neg r &\equiv\\
\neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee \neg r &\equiv\\
(\neg\neg p \wedge \neg\neg q \wedge \neg r) \vee \neg r &\equiv\\
(p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg r &\equiv\\
\neg r \vee (p \wedge q \wedge \neg r) &\equiv\\
(\neg r \vee p) \wedge (\neg r \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg r) &\equiv\\
(\neg r \vee p) \wedge (\neg r \vee q) \wedge \neg r &\equiv\\
(\neg r \vee (p \wedge q)) \wedge \neg r &\equiv\\
\neg r \wedge (\neg r \vee (p \wedge q)) &\equiv\\
\neg r &\equiv \neg r
\end{aligned}$$

4. En cada caso justificar que las proposiciones no son equivalentes.
a.) $(P_1 \vee P_2) \Rightarrow Q$ y $(P_1 \Rightarrow Q) \vee (P_2 \Rightarrow Q)$
Simplificamos las proposiciones

$$\begin{array}{ll}
(P_1 \vee P_2) \Rightarrow Q & (P_1 \Rightarrow Q) \vee (P_2 \Rightarrow Q)\\
\neg(P_1 \vee P_2) \vee Q & (\neg P_1 \vee Q) \vee (\neg P_2 \vee Q)\\
(\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee Q & \neg P_1 \vee Q \vee \neg P_2 \vee Q\\
Q \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2) & \neg P_1 \vee \neg P_2 \vee Q \vee Q\\
Q \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2) & (\neg P_1 \vee \neg P_2) \vee Q\\
\multicolumn{2}{l}{Q \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2) \not\equiv Q \vee (\neg P_1 \vee \neg P_2)}
\end{array}$$

Vemos que las proposiciones no son equivalentes pues:

$$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \not\equiv \neg P_1 \vee \neg P_2$$

b.) $(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q$ y $(P_1 \Rightarrow Q) \wedge (P_2 \Rightarrow Q)$

$$\begin{array}{rl}
(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow Q & \quad (P_1 \Rightarrow Q) \wedge (P_2 \Rightarrow Q) \\
\neg(P_1 \wedge P_2) \vee Q & \quad (\neg P_1 \vee Q) \wedge (\neg P_2 \vee Q) \\
(\neg P_1 \vee \neg P_2) \vee Q & \quad (Q \vee \neg P_1) \wedge (Q \vee \neg P_2) \\
\multicolumn{2}{l}{Q \vee (\neg P_1 \vee \neg P_2) \not\equiv Q \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2)}
\end{array}$$

Vemos que las proposiciones no son equivalentes pues:

$$\neg P_1 \vee \neg P_2 \not\equiv \neg P_1 \wedge \neg P_2$$

2

EJERCICIOS 13

2. En la Facultad de Ciencias de la Computación, se realizó una promoción de suscripción a tres importantes revistas: Bases de Datos, Ingeniería de Software y Telecomunicaciones. Se registró la siguiente información:

- 8 estudiantes se suscribieron a Ingeniería de Software y Telecomunicaciones.
- 6 estudiantes se suscribieron a Bases de Datos y Telecomunicaciones.
- 10 estudiantes se suscribieron a Bases de Datos e Ingeniería de Software.
- Solo 2 estudiantes, de los 70 encuestados, se suscribieron a las tres revistas.
- 20 estudiantes se suscribieron solo a una de las tres revistas.
- 3 estudiantes se inscribieron solo a Telecomunicaciones.
- 40 estudiantes no se inscribieron a Ingeniería de Software.

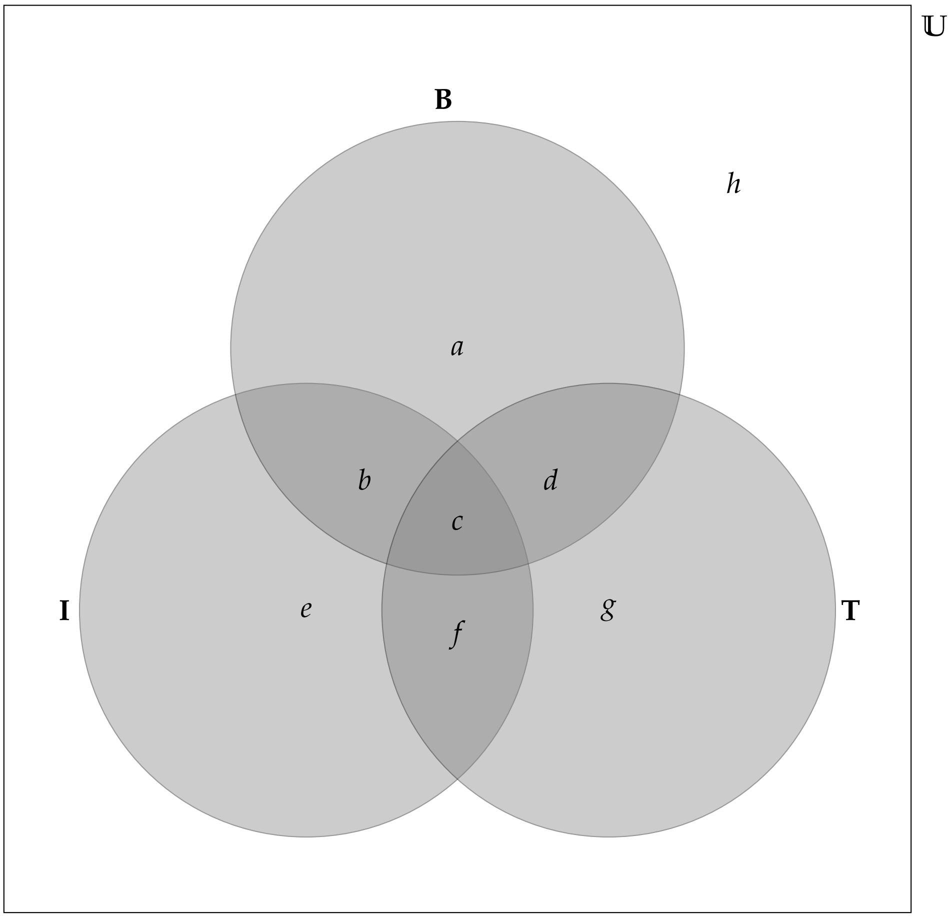
a.) Haga un diagrama de la situación planteada.
b.) ¿Cuántos estudiantes estarán suscritos solo a Ingeniería de Software?
c.) ¿Cuántos estudiantes, de los encuestados, no se suscribieron a ninguna?
Solución:
a.)
B - Base de datos
I - Ingeniería de software
T - Telecomunicaciones

-8 estudiantes se suscribieron a Ingeniería de Software y Telecomunicaciones

$$c + f = 8 \tag{1}$$

-6 estudiantes se suscribieron a Bases de Datos y Telecomunicaciones

$$c + d = 6 \tag{2}$$



-10 estudiantes se suscribieron a Bases de Datos e Ingeniería de Software

$$b + c = 10 \tag{3}$$

-Solo 2 estudiantes, de los 70 encuestados, se suscribieron a las tres revistas

$$c = 2 \tag{4}$$

-20 estudiantes se suscribieron solo a una de las tres revistas

$$a + e + g = 20 \tag{5}$$

-3 estudiantes se inscribieron solo a Telecomunicaciones

$$g = 3 \tag{6}$$

-40 estudiantes no se inscribieron a Ingeniería de Software

$$a + d + g + h = 40 \tag{7}$$

De (1) y (4), tenemos:

$$\begin{aligned} 2 + f &= 8 \\ f &= 8 - 2 \\ f &= 6 \end{aligned} \tag{8}$$

De (2) y (4), tenemos:

$$\begin{aligned} 2 + d &= 6 \\ d &= 6 - 2 \\ d &= 4 \qquad (9) \end{aligned}$$

De (4) sabemos que son 70 encuestados. Entonces tenemos:

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 70$$

De (3), (5), (8) y (9), tenemos:

$$\begin{aligned} (a + e + g) + (b + c) + d + f + h &= 70 \\ 20 + 10 + 4 + 6 + h &= 70 \\ 40 + h &= 70 \\ h &= 70 - 40 \\ h &= 30 \qquad (10) \end{aligned}$$

De (6) y (9 y (10), tenemos:

$$\begin{aligned} a + d + g + h &= 40 \\ a + 4 + 3 + 30 &= 40 \\ a + 37 &= 40 \\ a &= 40 - 37 \\ a &= 3 \qquad (11) \end{aligned}$$

b.)

De (5), (6) y (11) tenemos:

$$\begin{aligned} a + e + g &= 20 \\ 3 + e + 3 &= 20 \\ e + 6 &= 20 \\ e &= 20 - 6 \\ e &= 14 \end{aligned}$$

Entonces, son 14 los estudiantes suscritos solo a Ingeniería de Software.

c.) El número de estudiantes que no está suscrito a ninguna revista es: $h = 30$

3. Se dispone de la siguiente información correspodiente a los 75 empleados de las dos sucursales de la empresa "*FCC.com*":

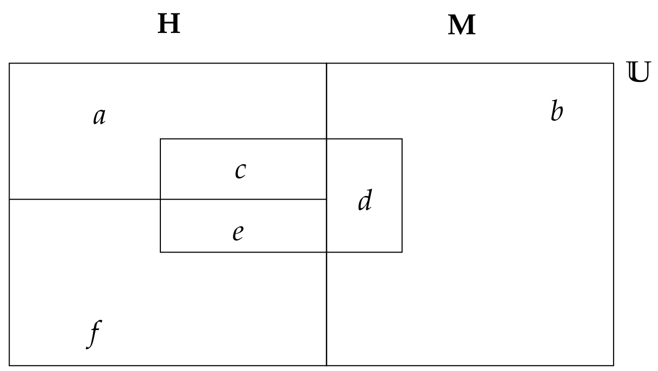
- Todas las mujeres tienen menos de 10 años de servicio.
- Hay 45 hombres en total.
- Hay 25 empleados con 10 o más años de servicio.
- 20 hombres trabajan en el departamento de informática.
- Hay 20 empleados en el departamento de informática con menos de 10 años de servicio de los cuales 5 son mujeres.

a.) ¿Cuántos hombres con 10 o más años de servicio trabajan en el departamento de informática?

b.) ¿Cuántos empleados trabajan en el departamento de informática?

c.) ¿Cuántos empleados tienen menos de 10 años de servicio?

Solución



- **H**, subconjunto de todos los empleados hombres
- **M**, subconjunto de todos las empleadas mujeres
- a, hombres con menos de 10 años de servicio, que no pertenecen al departamento de informática
- b, mujeres, todas tienen menos de 10 años de servicio, que no pertenecen al departamento de informática
- c, hombres con menos de 10 años de servicio, del departamento de informática
- d, mujeres con menos de 10 años de servicio, del departamento de informática
- e, hombres con más de 10 años de servicio, del departamento del informática

- f, hombres con más de 10 años de servicio, que no pertenecen al departamento de informática

El número total de hombres y mujeres es 75

El número total de hombres es:

$$H = 45 \tag{1}$$

Entonces, el número total de mujeres es:

$$M = 75 - 45 = 30 \tag{2}$$

a.) Hay 20 hombres que trabajan en el departamento de informática

$$c + e = 20 \tag{3}$$

Hay 20 hombres y mujeres del departamento de informática con menos de 10 años de servicio. De las cuales 5 son mujeres

$$c + d = 20 \tag{4}$$

Número de mujeres que trabajan en el departamento de informática

$$d = 5 \tag{5}$$

De (4) y (5)

$$\begin{aligned} c &= 20 - d \\ c &= 20 - 5 \\ c &= 15 \end{aligned} \tag{6}$$

Sustituyendo (6) en (3), tenemos:

$$\begin{aligned} 15 + e &= 20 \\ e &= 20 - 15 \\ e &= 5 \end{aligned} \tag{7}$$

La respuesta es, hay 5 hombres con más de 10 años de servicio que trabajan en el departamento de informática.

b.) El número total de hombres y mujeres del departamento de informática, I, es

$$I = c + d + e \tag{8}$$

De (6), (5) y (7), tenemos

$$\begin{aligned} I &= 15 + 5 + 5 \\ I &= 25 \end{aligned} \tag{9}$$

Entonces, el número de hombres y mujeres del departamento de informática es 25

c.) El número total de hombres y mujeres que tienen menos de 10 años de servicio, S, es

$$S = a + b + c + d \tag{10}$$

Todas las mujeres tienen menos de 10 años de servicio. De (2)

$$b + d = 30 \tag{11}$$

Sabemos que hay 25 hombres con más de 10 años de servicio. Entonces, de (1)

$$H = a + c + e + f \tag{12}$$
$$e + f = 25 \tag{13}$$

Sustituyendo (13) en (12)

$$45 = a + c + 25$$
$$a + c = 45 - 25$$
$$a + c = 20 \tag{14}$$

De (10), (11) y (14), tenemos

$$S = (a + c) + (b + d)$$
$$S = 20 + 30$$
$$S = 50 \tag{15}$$

El número total de hombres y mujeres que tienen menos de 10 años de servicio es 50.

Leyes de la idempotencia

- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$

Corolario 2.2.5 (Leyes de absorción) Sean A y B conjuntos cualesquiera. Entonces:

1. $A \cap (A \cup B) = A$
2. $A \cup (A \cap B) = A$

Corolario 2.2.6 Sea A un conjunto cualquiera

1. $A \cap \mathbb{U} = A$ y $A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$ Simplificación
2. $\varnothing \cap A = \varnothing$ y $\varnothing \cup A = A$ Simplificación
3. $A \cap A = A$ y $A \cup A = A$ Idempotencia

Teorema 2.3.2 Sean A, B conjuntos. Entonces

1. $(A^C)^C = A$ doble complemento
2. $A \cup A^C = \mathbb{U}$ y $A \cap A^C = \varnothing$ tautología y contradicción
3. $\mathbb{U}^C = \varnothing$ y $\varnothing^C = \mathbb{U}$ complemento de universo y vacío

Teorema 2.3.3 (Diferencia) $B \setminus A = B \cap A^C$
Propiedades de las Operaciones con Conjuntos
Sean X y Y conjuntos. Entonces:
1. *Propiedad conmutativa*

- $X \cup Y = Y \cup X$
- $X \cap Y = Y \cap X$

2. *Propiedad asociativa*

- $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$
- $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$

3. *Propiedad distributiva*

- $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z$
- $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z$

3. *Leyes de D'Morgan*

- $(X \cap Y)^C = X^C \cup Y^C$

- $(X \cup Y)^C = X^C \cap Y^C$

2.1 EJERCICIOS 17

Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos:

1. $B = (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$

$$\begin{aligned} B &= (A \cap B) \cup (A^C \cap B) \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap A^C) && \text{conmutativa} \\ &= B \cap (A \cup A^C) && \text{distributiva} \\ &= B \cap \mathbb{U} && \text{tautología} \\ B &= B && \text{simplificación} \end{aligned}$$

2. $E^C \setminus F^C = F \setminus E$

$$\begin{aligned} E^C \setminus F^C &= F \setminus E \\ &= F \cap E^C && \text{teorema 2.3.3} \\ &= E^C \cap F && \text{conmutativa} \\ E^C \setminus F^C &= E^C \setminus F^C && \text{teorema 2.3.3} \end{aligned}$$

3. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

$$\begin{aligned} A \setminus B &= A \setminus (A \cap B) \\ &= A \cap (A \cap B)^C && \text{teorema 2.3.3} \\ &= A \cap (A^C \cup B^C) && \text{D'Morgan} \\ &= (A \cap A^C) \cup (A \cap B^C) && \text{distributiva} \\ &= \varnothing \cup (A \cap B^C) && \text{contradicción} \\ &= A \cap B^C && \text{simplificación} \\ &= A \setminus B && \text{teorema 2.3.3} \end{aligned}$$

4. $A \cap (B \setminus D) = (A \cap B) \setminus (A \cap D)$

$$\begin{aligned} A \cap (B \setminus D) &= (A \cap B) \setminus (A \cap D) \\ &= (A \cap B) \cap (A \cap D)^C && \text{teorema 2.3.3} \\ &= (A \cap B) \cap (A^C \cup D^C) && \text{D'Morgan} \\ &= (B \cap A) \cap (A^C \cup D^C) && \text{conmutativa} \\ &= B \cap (A \cap (A^C \cup D^C)) && \text{asociativa} \\ &= B \cap [(A \cap A^C) \cup (A \cap D^C)] && \text{distributiva} \\ &= B \cap [\varnothing \cup (A \cap D^C)] && \text{contradicción} \\ &= B \cap (A \cap D^C) && \text{simplificación} \\ &= (B \cap A) \cap D^C && \text{asociativa} \\ &= (A \cap B) \cap D^C && \text{conmutativa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= A \cap (B \cap D^C) && \text{asociativa} \\ A \cap (B \setminus D) &= A \cap (B \setminus D) && \text{teorema 2.3.3} \end{aligned}$$

5. $E = (B \cup (A \cap B^C) \cup (A^c \cap B^C)) \cap E$

$$\begin{aligned} E &= (B \cup (A \cap B^C) \cup (A^c \cap B^C)) \cap E \\ &= ((B \cup (A \cap B^C)) \cup (A^c \cap B^C)) \cap E && \text{asociativa} \\ &= ((B \cup A) \cap (B \cup B^C)) \cup (A^C \cap B^C)) \cap E && \text{distributiva} \\ &= ((B \cup A) \cap \mathbb{U}) \cup (A^C \cap B^C)) \cap E && \text{tautología} \\ &= ((B \cup A) \cup (A^C \cap B^C)) \cap E && \text{simplificación} \\ &= ((A \cup B) \cup (A^C \cap B^C)) \cap E && \text{conmutativa} \\ &= ((A \cup B) \cup (A \cup B)^C) \cap E && \text{D'Morgan} \\ &= \mathbb{U} \cap E && \text{tautología} \\ E &= E && \text{simplificación} \end{aligned}$$

6. $A \setminus (B \cap D) = (A \setminus B) \cup (A \setminus D)$

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap D) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus D) \\ &= (A \cap B^C) \cup (A \cap D^C) && \text{teorema 2.3.3} \\ &= A \cap (B^C \cup D^C) && \text{distributiva} \\ &= A \cap (B \cap D)^C && \text{D'Morgan} \\ A \setminus (B \cap D) &= A \setminus (B \cap D) && \text{teorema 2.3.3} \end{aligned}$$

7. $A \cap [(A \cup B)^C \cup (B^C \cup A)] = A$

$$\begin{aligned} A \cap [(A \cup B)^C \cup (B^C \cup A)] &= A \\ A \cap [(A^C \cap B^C) \cup (B^C \cup A)] &= && \text{D'Morgan} \\ A \cap [(A^C \cap B^C) \cup (A \cup B^C)] &= && \text{conmutativa} \\ A \cap [((A^C \cap B^C) \cup A) \cup B^C] &= && \text{asociativa} \\ A \cap [((A^C \cup A) \cap (B^C \cup A)) \cup B^C] &= && \text{distributiva} \\ A \cap [(\mathbb{U} \cap (B^C \cup A)) \cup B^C] &= && \text{tautología} \\ A \cap [(B^C \cup A) \cup B^C] &= && \text{simplificación} \\ A \cap [(A \cup B^C) \cup B^C] &= && \text{conmutativa} \\ A \cap [A \cup (B^C \cup B^C)] &= && \text{asociativa} \\ A \cap [A \cup B^C] &= && \text{idempotencia} \\ A &= A && \text{absorción} \end{aligned}$$

3

EJERCICIOS 31

En cada caso, completar el trinomio cuadrado perfecto para resolver la ecuación dada.
Un trinomio cuadrado perfecto, se obtiene al elevar al cuadrado un binomio:
Ejemplos:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \tag{1}$$

o

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \tag{2}$$

1.)

$$x^2 - 16x + 63 = 0$$

Solución:

1er. paso. Nos fijamos en los factores de x de la ecuación (2) y en la ecuación que deseamos resolver e igualamos:

$$\begin{aligned} 2a &= 16 \\ a &= \frac{16}{2} \\ a &= 8 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el cuadrado del término independiente es

$$\begin{aligned} a^2 &= 8^2 \\ a^2 &= 64 \end{aligned}$$

2do. paso. Comparamos a^2 con el término constante de la ecuación que deseamos resolver y encontramos el valor que debemos sumar o restar para que estos sean iguales

$$\begin{aligned} 63 + z &= a^2 \\ 63 + z &= 64 \\ z &= 64 - 63 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

3er. paso. Sumar el valor encontrado de z en ambos miembros de la ecuación a resolver

$$\begin{aligned} x^2 - 16x + 63 + 1 &= 1 \\ x^2 - 16x + 64 &= 1 \\ x^2 - 2(8)x + 8^2 &= 1 \end{aligned} \tag{3}$$

4to. paso. Factorizar la ecuación (3). Observamos que el primer miembro de esta ecuación es el cuadrado de un binomio

$$(x-8)^2 = 1$$

5to. paso. Factorizar y encontrar las raíces. Recordemos la factorización de la suma por la diferencia: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\begin{aligned} (x-8)^2 - 1 &= 0 \\ [(x-8)+1)((x-8)-1)] &= 0 \\ (x-7)(x-9) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, las raíces son:

$$\begin{aligned} x - 7 &= 0 \\ x_1 &= 7 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x - 9 &= 0 \\ x_2 &= 9 \end{aligned}$$

2.)

$$x^2 + 12x - 3 = 0$$

Solución:

1er. paso. Nos fijamos en los factores de x de la ecuación (1) y en la ecuación que deseamos resolver e igualamos:

$$\begin{aligned} 2a &= 12 \\ a &= \frac{12}{2} \\ a &= 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el cuadrado del término independiente es

$$\begin{aligned} a^2 &= 6^2 \\ a^2 &= 36 \end{aligned}$$

2do. paso. Comparamos a^2 con el término constante de la ecuación que deseamos resolver y encontramos el valor que debemos sumar o restar para que estos sean iguales

$$\begin{aligned} -3+z &= a^2 \\ -3+z &= 36 \\ z &= 36+3 \\ z &= 39 \end{aligned}$$

3er. paso. Sumar el valor encontrado de z en ambos miembros de la ecuación a resolver

$$\begin{aligned} x^2+12x-3+39 &= 39 \\ x^2+12x+36 &= 39 \\ x^2+2(6)x+6^2 &= 39 \qquad (4) \end{aligned}$$

4to. paso. Factorizar la ecuación (4). Observamos que el primer miembro de esta ecuación es el cuadrado de un binomio

$$(x+6)^2 = 39$$

5to. paso. Factorizar y encontrar las raíces. Recordemos la factorización de la suma por la diferencia: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$\begin{aligned} (x+6)^2-39 &= 0 \\ [(x+6)+\sqrt{39})((x+6)-\sqrt{39})] &= 0 \\ (x+6+\sqrt{39})(x+6-\sqrt{39}) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, las raíces son:

$$\begin{aligned} x+6+\sqrt{39} &= 0 \\ x_1 &= -6-\sqrt{39} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x+6-\sqrt{39} &= 0 \\ x_2 &= -6+\sqrt{39} \end{aligned}$$

3.)

$$x^2+x+1=0$$

Solución:

1er. paso. Nos fijamos en los factores de x de la ecuación (1) y en la ecuación que deseamos resolver e igualamos:

$$\begin{aligned} 2a &= 1 \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el cuadrado del término independiente es

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ a^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2do. paso. Comparamos a^2 con el término constante de la ecuación que deseamos resolver y encontramos el valor que debemos sumar o restar para que estos sean iguales

$$\begin{aligned} 1 + z &= a^2 \\ 1 + z &= \frac{1}{4} \\ z &= \frac{1}{4} - 1 \\ z &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

3er. paso. Sumar el valor encontrado de z en ambos miembros de la ecuación a resolver

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 - \frac{3}{4} &= -\frac{3}{4} \\ x^2 + x + \frac{1}{4} &= -\frac{3}{4} \\ x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

4to. paso. Factorizar la ecuación (4). Observamos que el primer miembro de esta ecuación es el cuadrado de un binomio

$$\left(x + \left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = -\frac{3}{4}$$

Sabemos que una expresión elevada al cuadrado es siempre mayor o igual a cero, por lo tanto esta última expresión no tiene solución

4

EJERCICIOS 34

Determinar el conjunto solución de cada ecuación.
Si tenemos desigualdades del tipo valor absoluto: y mayor que $>$, o mayor o igual que $\geq$. Y, menor que $<$, o menor o igual que $\leq$

$$|f(x)| \leq a \tag{1}$$

Esta desigualdad se puede expresar como:

$$-a \leq f(x) \leq a \tag{2}$$

o

$$f(x) \leq a \wedge f(x) \geq -a \tag{3}$$

Por otro lado

$$|f(x)| \geq a \tag{4}$$
$$f(x) \geq a \vee f(x) \leq -a \tag{5}$$

1.

$$|2y+2| < 8$$

Solución:

$$\begin{aligned} -8 < 2y{+}2 &< 8 \\ -8-2 < 2y+2-2 &< 8-2 \\ -10 < 2y &< 6 \\ -\frac{10}{2} < y &< \frac{6}{2} \\ -5 < y &< 3 \end{aligned}$$

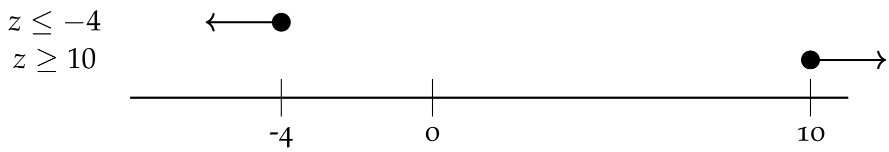
$$\begin{aligned} C_s &= \{y \in \mathbb{R} / \ -5 < y < 3\} \\ &= (-5, 3) \end{aligned}$$

2.

$$|z-3| \geq 7$$

Solución:

$$\begin{aligned} z-3 \geq 7 &\quad \vee \quad z-3 \leq -7 \\ z \geq 7+3 &\quad \vee \quad z \leq -7+3 \\ z \geq 10 &\quad \vee \quad z \leq -4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} C_s &= \{z \in \mathbb{R} / \ -\infty < z \leq -4 \vee -10 \leq z < \infty\} \\ &= (-\infty, -4] \cup [10, \infty) \end{aligned}$$

3.

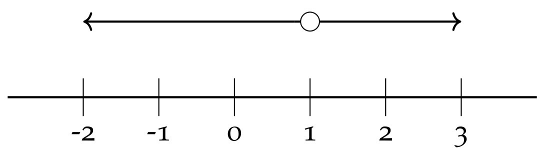
$$\frac{3}{|x-1|} \geq 0$$

En este caso, numerador y denominador son positivos, entonces el cociente será positivo para toda x, menos cuando el denominador es igual a 0

$$\begin{aligned} x-1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Enconces, excluimos este valor de la solución

$$x \neq 1$$



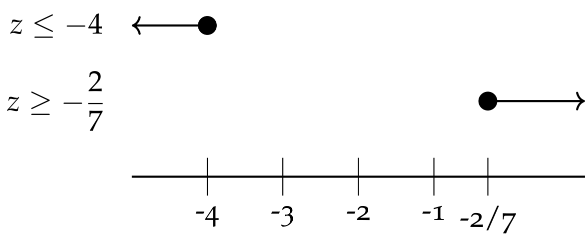
$$\begin{aligned} C_s &= \{x \in \mathbb{R} / \ -\infty < x < 1 \vee 1 < x < \infty\} \\ &= (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \end{aligned}$$

4.

$$|4x+3| + 3x \geq 1$$

Solución

$$\begin{aligned}
|4x+3|+3x &\geq 1 \\
|4x+3| &\geq 1-3x \\
4x+3 \geq 1-3x \quad &\vee \quad 4x+3 \leq -(1-3x) \\
4x+3+3x \geq 1 \quad &\vee \quad 4x+3 \leq -1+3x \\
7x+3 \geq 1 \quad &\vee \quad 4x+3-3x \leq -1 \\
7x \geq 1-3 \quad &\vee \quad x+3 \leq -1 \\
7x \geq -2 \quad &\vee \quad x \leq -1-3 \\
x \geq -\frac{2}{7} \quad &\vee \quad x \leq -4
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
C_s &= \{x \in \mathbb{R}/ \ -\infty < x \leq 4 \vee -\frac{2}{7} \leq x < \infty\} \\
&= (-\infty, 4] \cup [-2/7, \infty)
\end{aligned}$$

5.

$$\left|\frac{5x-2}{4-x}\right| < \frac{1}{3}$$

Solución

$$\left|\frac{5x-2}{4-x}\right| < \frac{1}{3}$$

Excluimos el valor que hace 0 el denominador

$$\begin{aligned}
4-x &= 0 \\
x &= 4
\end{aligned}$$

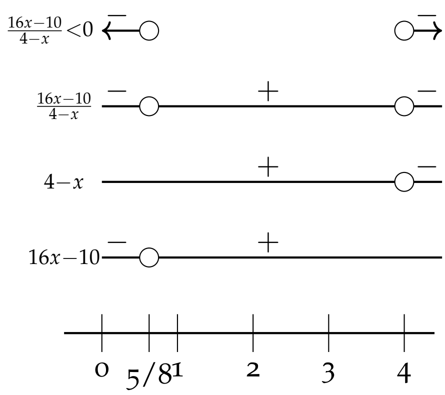


Figura 1: $\frac{16x-10}{4-x} < 0$

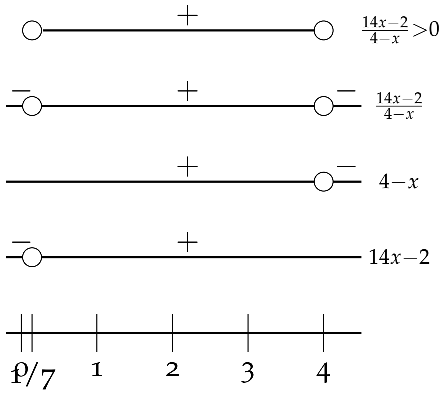


Figura 2: $\frac{14x-2}{4-x} > 0$

Entonces

$$
\begin{aligned}
x &\neq 4 \\
\frac{5x-2}{4-x} < \frac{1}{3} \quad &\wedge \quad \frac{5x-2}{4-x} > -\frac{1}{3} \\
\frac{5x-2}{4-x} - \frac{1}{3} < 0 \quad &\wedge \quad \frac{5x-2}{4-x} + \frac{1}{3} > 0 \\
3\frac{5x-2}{4-x} - 1 < 0 \quad &\wedge \quad 3\frac{5x-2}{4-x} + 1 > 0 \\
\frac{15x-6-(4-x)}{4-x} < 0 \quad &\wedge \quad \frac{15x-6+4-x}{4-x} > 0 \\
\frac{15x-6-4+x}{4-x} < 0 \quad &\wedge \quad \frac{14x-2}{4-x} > 0 \\
\frac{16x-10}{4-x} < 0 \quad &\wedge \quad \frac{14x-2}{4-x} > 0
\end{aligned}
$$

Calculamos para qué valores de x los numeradores son 0

$$
\begin{aligned}
16x - 10 = 0 \qquad & 14x - 2 = 0 \\
16x = 10 \quad & 14x = 2 \\
x = \frac{10}{16} \qquad & x = \frac{2}{14} \\
x = \frac{5}{8} \qquad & x = \frac{1}{7}
\end{aligned}
$$

De los diagramas de intervalos hemos deducido los intervalos solución para cada una de las desigualdades:

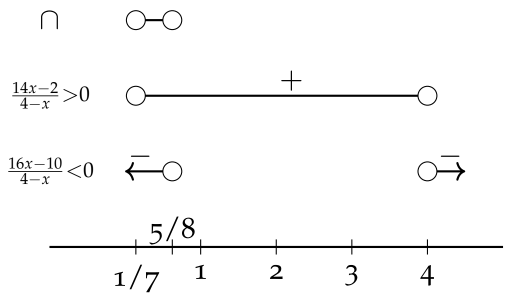
Para

$$
\begin{aligned}
&\frac{16x-10}{4-x} < 0 \\
Cs &= \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < \frac{5}{8} \vee 4 < x < \infty\} \\
&= \left(-\infty, \frac{5}{8}\right) \cup (4, \infty)
\end{aligned}
$$

Para

$$\begin{aligned}
\frac{14x-2}{4-x} &> 0\\
Cs &= \{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{7} < x < 4\}\\
&= \left(\frac{1}{7}, 4\right)
\end{aligned}$$

Ahora, solo nos falta hacer la intersección entre ambos conjuntos solución



$$\begin{aligned}
Cs &= \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{7} < x < \frac{5}{8}\right\}\\
&= \left(\frac{1}{7}, \frac{5}{8}\right)
\end{aligned}$$

6.

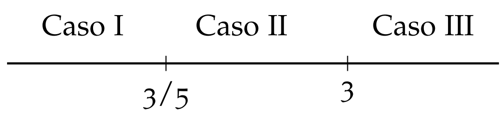
$$|5x-3| - |3-x| < 4$$

Solución:

$$|5x-3| - |3-x| < 4$$

$$|5x-3| = \begin{cases} 5x-3, & 5x-3>0 \\ & x > \frac{3}{5} \\ -5x+3, & 5x-3<0 \\ & x \leq \frac{3}{5} \end{cases} \qquad |3-x| = \begin{cases} 3-x, & 3-x>0 \\ & x \leq 3 \\ x-3, & 3-x<0 \\ & x>3 \end{cases}$$

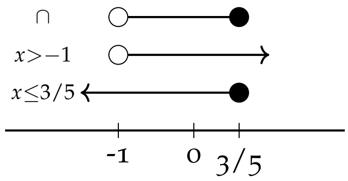
Identificamos tres intervalos: $x \leq 3/5$, $3/5 < x \leq 3$ y $x > 3$.



Ahora vamos a encontrar el conjunto solución en cada intervalo:

Caso I, $x \leq 3/5$

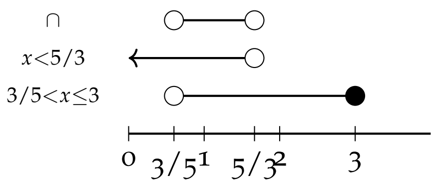
$$\begin{aligned}
-5x + 3 - (3 - x) &< 4 \\
-5x + 3 - 3 + x &< 4 \\
-4x &< 4 \\
x &< \frac{4}{-4} \\
x &> -1
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
C_{s_I} &= \left\{ x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq \frac{3}{5} \right\} \\
&= \left(-1, \frac{3}{5} \right]
\end{aligned}$$

Caso II, $3/5 < x \leq 3$

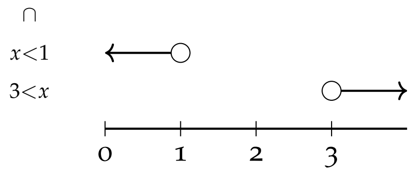
$$\begin{aligned}
5x - 3 - (3 - x) &< 4 \\
5x - 3 - 3 + x &< 4 \\
6x - 6 &< 4 \\
6x &< 4 + 6 \\
x &< \frac{5}{3}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
C_{s_{II}} &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{3}{5} < x < \frac{5}{3} \right\} \\
&= \left(\frac{3}{5}, \frac{5}{3} \right)
\end{aligned}$$

Caso III $(3 < x)$

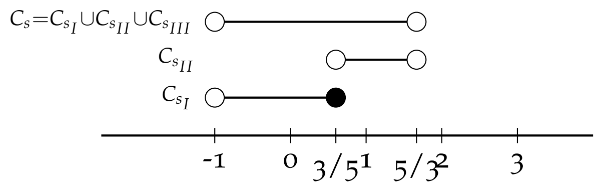
$$\begin{aligned} 5x - 3 - (x - 3) &< 4 \\ 5x - 3 - x + 3 &< 4 \\ 4x &< 4 \\ x &< \frac{4}{4} \\ x &< 1 \end{aligned}$$



La intersección entre ambos intervalos es el conjunto vacío: $\varnothing$

$$C_{s_{III}} = \varnothing$$

Finalmente, la solución es la unión de los conjuntos solución de $C_{s_I}, C_{s_{II}}$ y $C_{s_{III}}$



$$\begin{aligned} C_s &= C_{s_I} \cup C_{s_{II}} \cup C_{s_{III}} \\ C_s &= \left\{ x \in \mathbb{R} / -1 < x < \frac{5}{3} \right\} \\ C_s &= \left(-1, \frac{5}{3} \right) \end{aligned}$$

7.

$$3x^2 - 11|x| - 4 \geq 0$$

Solución

$$3x^2 - 11|x| - 4 \geq 0$$

De acuerdo a si x es positiva o negativa tenemos:

$$3x^2 - 11x - 4 \geq 0 \quad \wedge \quad 3x^2 - 11(-x) - 4 \geq 0$$

Para $x \geq 0$

$$3x^2 - 11x - 4 \geq 0$$

Igualamos a 0 para encontrar las raíces

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 11x - 4 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x_{1,2} &= \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 3 \times (-4)}}{2 \times 3} \\
x_{1,2} &= \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{6} \\
x_{1,2} &= \frac{11 \pm \sqrt{169}}{6} \\
x_{1,2} &= \frac{11 \pm 13}{6} \\
x_1 &= \frac{11 + 13}{6} \\
x_1 &= \frac{24}{6} \\
x_1 &= 4 \\
x_2 &= \frac{11 - 13}{6} \\
x_2 &= \frac{-2}{6} \\
x_2 &= -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

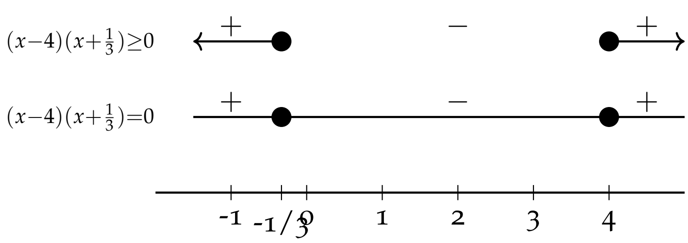
Entonces, tenemos

$$(x - 4)(x + \frac{1}{3}) \geq 0$$

Para determinar en qué intervalos la ecuación es negativa o positiva, evaluamos la ecuación en $x = 0$

$$(0 - 4)(0 + \frac{1}{3}) = (-4)(\frac{1}{3}) = -\frac{4}{3} < 0$$

localizamos el intervalo donde $x = 0$ y asignamos el anterior resultado, signo negativo. Y como tenemos dos raíces reales, los signos en los restante intervalos son positivos. En este caso tenemos $+ - +$



El conjunto solución, cuando $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} C_s &= \{x \in \mathbb{R}/ -\infty < x \leq -\frac{1}{3} \vee 4 \leq x < \infty\} \\ &= (-\infty, -1/3] \cup [4, \infty) \end{aligned}$$

Para $x < 0$

$$3x^2 - 11(-x) - 4 \geq 0$$

Igualamos a 0 para encontrar las raíces

$$\begin{aligned} 3x^2 + 11x - 4 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_{1,2} &= \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \times 3 \times (-4)}}{2 \times 3} \\ x_{1,2} &= \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 48}}{6} \\ x_{1,2} &= \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{6} \\ x_{1,2} &= \frac{-11 \pm 13}{6} \\ x_1 &= \frac{-11 + 13}{6} \\ x_1 &= \frac{2}{6} \\ x_1 &= \frac{1}{3} \\ x_2 &= \frac{-11 - 13}{6} \\ x_2 &= \frac{-24}{6} \\ x_2 &= -4 \end{aligned}$$

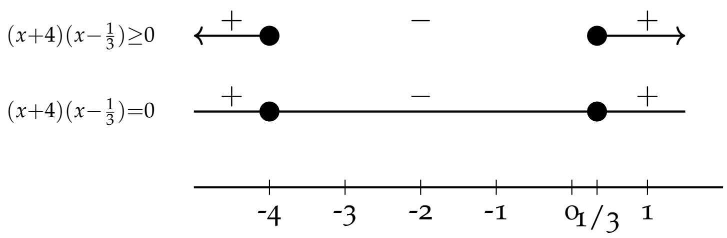
Entonces, tenemos

$$(x+4)(x - \frac{1}{3}) \geq 0$$

Para determinar en qué intervalos la ecuación es negativa o positiva, evaluamos la ecuación en $x = 0$

$$(0+4)(0 - \frac{1}{3}) = (4)(-\frac{1}{3}) = -\frac{4}{3} < 0$$

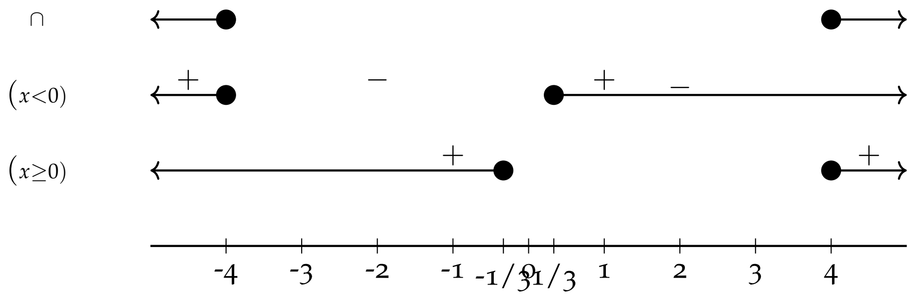
localizamos el intervalo donde $x = 0$ y asignamos el anterior resultado, signo negativo. Y como tenemos dos raíces reales, los signos en los restante intervalos son positivos. En este caso tenemos $+ - +$



El conjunto solución, cuando $x < 0$:

$$\begin{aligned} C_s &= \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x \leq -4 \vee \frac{1}{3} \leq x < \infty\} \\ &= (-\infty, -4] \cup [1/3, \infty) \end{aligned}$$

Finalmente, el conjunto solución es el intervalo donde ambas soluciones parciales son mayores o iguales a cero, ≥ 0. Es decir, hacemos la intersección de ambos conjuntos solución.



$$\begin{aligned} C_s &= \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x \leq -4 \vee 4 \leq x < \infty\} \\ &= (-\infty, -4] \cup [4, \infty) \end{aligned}$$