Билеты по матану

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

1. Интегральное исчисление

А разве можно всё упростить, всё обобщить? И вообще, разве по чужому желанию можно обобщать и упрощать?

Джером Дэвид Сэлинджер, "Над пропастью во ржи"

Привет, Путник! Я рад сопровождать тебя в начале твоего долгого и тяжёлого пути к (не) отчислению. Запасись терпениеим. А лучше корвалолом.

1.1. Билет 1: ! Дробление, ранг, оснащение, сумма Римана.

***Определение* 1.1.**

Дробление отрезка $[a, b]$ – это набор точек τ, такой что

$\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n} : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

Ранг (мелкость) дробления – $\max\limits_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = |\tau|$

Оснащение – набор точек, такой что

$\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$

Пара (τ, ξ) – оснащённое дробление

***Определение* 1.2.**

Сумма Римана (интегральная сумма)

$f : [a, b] \mapsto R$ и оснащённое дробление (τ, ξ)

$S(f, \tau, \xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$

Какой короткий и классный билет :)

Ну, удачи...

1.2. Билет 2: Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману.

Теорема 1.1.

$|S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f| \leqslant (b-a)\omega_f(|\tau|)$

(ω_f – модуль непрерывности)

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\Delta &:= S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \int\limits_a^b f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k) - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t))\ dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\Delta| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t))\ dt| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |f(\xi_k) - f(t)|\ dt \qquad \text{по определению } \omega_f : |\xi_k - t| < |\tau| \Rightarrow |f(\xi_k) - f(t)| < |\omega_f(|\tau|)| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_f(|\tau|)\ dt \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_f(|\tau|)(x_{k+1}-x_k) \\
&\leqslant \omega_f(|\tau|)(b-a)
\end{aligned}$$

□

Следствие.

$f \in C([a,b])$, тогда

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau,\xi)_n$, такой что $|\tau_n| \to 0$, верно:

$\lim S(f,\tau_n,\xi_n) = \int\limits_a^b f$

Доказательство.

$f \in C([a,b]) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \omega_f(x) = 0 \Rightarrow \lim \omega_f(|\tau_n|)(b-a) = 0$

□

***Определение* 1.3.**

Функция интегрируема по Риману, если:

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau,\xi)_n$, такой что $|\tau_n| \to 0$, верно:

$\lim S(f,\tau_n,\xi_n) = I$

И для всех последовательностей I – одинаковый

I – интеграл Римана

1.3. Билет 3: Эквивалентная для суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$. Формула трапеций.

Пример.

$S_n(p) = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$

Ограничим $S_n(p)$ сверху: $S_n(p) < n \cdot n^p = n^{p+1}$

Чтобы ограничить снизу, возьмем только вторую половину слагаемых. Заметим, что каждое слагаемое $\geq \frac{n}{2}$. Получаем: $S_n(p) > \frac{n}{2}(\frac{n}{2})^p = \frac{n^{1+p}}{2^{1+p}}$

$\frac{n^{1+p}}{2^{1+p}} < S_n(p) < n^{p+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(\frac{k}{n})^p = \int\limits_0^1 f(t)\,dt$

$f : [0,1] \to \mathbb{R} \;\; f(t) = t^p$

$\xi_k = \frac{k}{n}$

Мелкость дробления $\frac{1}{n} \to 0$.

$\implies \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} \to \int\limits_0^1 t^p\,dt = \frac{1}{p+1} \implies S_n(p) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$

При $p = -1$ считаем, что $\frac{1}{p+1} = \infty$.

Лемма.

$f \in C^2[a,b]$. Тогда:

$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt$

Доказательство.

$\gamma := \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int\limits_\alpha^\beta f(t)(t-\gamma)'\,dt = f(t)(t-\gamma)\Big|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\,dt = f(\beta)(\beta-\gamma) - f(\alpha)(\alpha-\gamma) - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\,dt = \frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}(\beta-\alpha) - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\frac{\alpha+\beta}{2})\,dt$

$((t-\alpha)(\beta-t))' = \alpha+\beta-2t = -2(t-\gamma)$

$\Delta = -\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\,dt = -\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(-\frac{1}{2})((t-\alpha)(\beta-t))'\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f'(t)((t-\alpha)(\beta-t))'\,dt =$

$= \frac{1}{2}f'(t)(t-\alpha)(\beta-t)\Big|_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt$ □

***Определение* 1.4** (Метод трапеций)**.** Разбиваем отрезок интегрирования $[a,b]$ точками x_i. $a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Считаем на каждом отрезке площадь прямоугольной трапеции $S_k = \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})$. Складываем полученные S_i. Получаем приближенное значение площади подграфика.

$S = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})$

Теорема 1.2 (оценка погрешности в ф-ле трапеций)**.**

$f \in C^2[a,b]$ и $\tau-$ дробление. Тогда:

$$\left|\int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^n \tfrac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| \leqslant \tfrac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$$

В частности, если дробление на равные отрезки

$$\left|\int\limits_a^b f - \tfrac{b-a}{n}(\tfrac{f(x_0)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \tfrac{f(x_n)}{2})\right| \leqslant \tfrac{(b-a)^2}{8n^2}\int\limits_a^b |f''|$$

Доказательство.

$$\Delta := \int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^n \tfrac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^n (\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \tfrac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})) =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t-x_{k-1})(x_k - t)\,dt$$

$$|t - x_{k-1}|\,|x_k - t| \leqslant \tfrac{(x_k - x_{k-1})^2}{4} \leqslant \tfrac{|\tau|^2}{4}$$

Первое неравенство выполняется, поскольку $a = |t - x_{k-1}|\,, b = |x_k - t|\,.$ $t \in [x_k, x_{k-1}]$. $a + b = |x_k - x_{k-1}|$

$\implies$ ab максимально при $a = b = \frac{(x_k - x_{k-1})}{2}$(чтобы доказать это можно найти вершину параболы $y = (t - x_{k-1})(t - x_k)$).

$$|\Delta| \leqslant \tfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|\,(t - x_{k-1})(x_k - t)\,dt \leqslant \tfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|\,\tfrac{|\tau|^2}{4}\,dt = \tfrac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$$

При делении на равные отрезки $|\tau| = \frac{b-a}{n}$.

□

1.4. Билет 4: Формула Эйлера-Маклорена (для второй производной).

Теорема 1.3. (Формула Эйлера-Маклорена для второй производной)

$f \in C^2[m,n]$ $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\sum\limits_{k=m}^n f(k) = \tfrac{f(m)+f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1 - \{t\})\,dt$$

Доказательство.

Подставим в формулу $m = k, n = k+1$. Получим:

$$f(k) + f(k+1) = \tfrac{f(k)+f(k+1)}{2} + \int\limits_k^{k+1} f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_k^{k+1} f''(t)\cdot\{t\}(1 - \{t\})\,dt$$

Выразим отсюда $f(k)$:

$$f(k) = \int\limits_k^{k+1} f(t)\,dt + \tfrac{f(k)-f(k+1)}{2} + \tfrac{1}{2}\int\limits_k^{k+1} f''(t)\cdot\{t\}(1 - \{t\})\,dt$$

Просуммируем от m до $n-1$.

$$\sum\limits_{k=m}^{n-1} f(k) = \tfrac{f(m)-f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1 - \{t\})\,dt$$

$$f(n) + \sum\limits_{k=m}^{n-1} f(k) = f(n) + \tfrac{f(m)-f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1 - \{t\})\,dt =$$

$$= \tfrac{f(m)+f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1 - \{t\})\,dt$$

Достаточно лишь проверить формулу для $f(k) = ...$(при суммировании таких формул мы получаем исходную. Т.е. доказав, что она верна, мы докажем теорему)

Заметим, что выражение не зависит от k $(f(t+k) = g(t)) \implies$ можно "сдвинуть". Будем считать, что $k = 0$. Тогда $\{t\} = t$.

Пояснения от Юры: "почему выражение не зависит от k: просто можем взять другую функцию - g - равную сдвинутой f, и подставить, для неё докажем, тогда и для свдинутой f докажем, то есть для любого сдвига верна и потому можно рассматривать для сдвига нулевого, так удобно

но при этом как бы для каждого элемента суммы мы будем делать собственную функцию, сдвинутую. Для неё будет доказано, так что для всей суммы вместе будет доказано"

$f(0) = \int\limits_0^1 f(t)\,dt + \frac{f(0)-f(1)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f''(t)\cdot t(1-t)\,dt$

$\int\limits_0^1 f(t)\,dt - \frac{f(0)+f(1)}{2} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f''(t-0)\cdot t(1-t)\,dt$

Верно по лемме из билета 3: $\alpha = 0, \beta = 1$. □

1.5. Билет 5: Оценка сумм вида $\sum_{k=1}^n k^p$ при различных р. Постоянная Эйлера.

Будем использовать формулу Эйлера-Маклорена

Пример.

1. $S_p(n) := \sum\limits_{k=1}^n k^p$

   Пусть $f(t) = t^p$, тогда $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$

   $S_p(n) = \int\limits_1^n t^p\,dt + \frac{1+n^p}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt$

   $\int\limits_1^n t^p\,dt = \frac{t^{p+1}}{p+1}\Big|_{t=1}^{t=n} = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}$

   Случай $-1 < p < 1$

   $0 \leqslant \int\limits_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_1^n t^{p-2} = \frac{1}{4}\ \frac{t^{p-1}}{p-1}\Big|_{t=1}^{t=n} = \frac{1}{4(1-p)}\left(1 - \frac{1}{n^{1-p}}\right) \leqslant \frac{1}{4(1-p)}$

   $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$

   Случай $p > 1$

   $0 \leqslant \int\limits_1^n t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_1^n t^{p-2} = \frac{n^{p-1}-1}{4(p-1)} = O(n^{p-1})$

2. **Гармонический ряд**

   $H_n = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

   Пусть $f(t) = \frac{1}{t}$, тогда $f''(t) = \frac{2}{t^3}$

   По формуле Эйлера-Маклорена

   $H_n = \int\limits_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1+1/n}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{2}{t^3}\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$

   $a_n := \int\limits_1^n \frac{1}{t^3}\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$

$a_{n+1} = a_n + \int\limits_n^{n+1} \frac{1}{t^3} \cdot \{t\}(1-\{t\})\, dt \geqslant a_n \Rightarrow$ это возрастающая последовательность.

$a_n = \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}\, dt \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_1^n \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2}\right)\Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} \leqslant \frac{1}{8} \Rightarrow$ предел последовательности существует. $\Rightarrow a := \lim a_n \Rightarrow a_n = a + o(1)$

$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a + o(1)$ в пределе $\frac{1}{2n}$ сокращается $o(1)$, и все кроме логарифма – постоянная Эйлера-Маскерони.

$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) \approx 0.5772156649\ldots$

1.6. Билет 6: Формула Стирлинга

Продолжаем примеры для формулы Эйлера-Маклорена

Пример.

3. **Формула Стирлинга**

   Хотим найти $\ln(n!)$

   Пусть $f(t) = \ln t$, тогда $f''(t) = -\frac{1}{t^2}$

   $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k = \ln(n!) = \int\limits_1^n \ln t\, dt + \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n -\frac{1}{t^2}\cdot\{t\}(1-\{t\})\, dt$

   $b_n := \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\, dt \leqslant b_{n+1} \Rightarrow b_n$ возрастает.

   $b_n = \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_{t=1}^{t=n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} \leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow b_n$ сходятся. $\Rightarrow b := \lim b_n \Rightarrow b_n = b + o(1)$

   $\ln(n!) = n\ln n + \frac{\ln n}{2} - n + 1 - \frac{b}{2} + o(1)$

   $n! = n^n e^{-n}\sqrt{n} e^{1-\frac{b}{2}} e^{o(1)} \sim n^n e^{-n}\sqrt{n} e^{1-\frac{b}{2}}$, т.к. $e^{o(1)} \to 1$

   Хотим понять, что такое $c := e^{1-\frac{b}{2}}$.

   $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ следствие из формулы Валлиса.

   $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}c}{n^{2n}e^{-2n}nc^2} = \frac{2^{2n}\sqrt{2n}}{n\cdot c} = \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}\cdot c} \Rightarrow c = \sqrt{2\pi}$

   Итого формула Стирлинга:

   $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

1.7. Билет 7: ! Определение несобственного интеграла. Критерий Коши. Примеры.

***Определение* 1.5.**

Если $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и $f \in C[a,b)$,

Пусть $L := \lim\limits_{c\to b-} \int\limits_a^c f(x)\, dx$.

Аналогично если $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ и $f \in C(a,b]$,

Пусть $L := \lim\limits_{c\to a+} \int\limits_c^b f(x)\, dx$

Тогда если L существует в $\overline{\mathbb{R}}$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx := L$

Если он конечен, скажем, что интеграл сходится, иначе – если предел не существует или бесконечен – интеграл расходится.

Определённый интеграл называется несобственным, если выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий:

1) Область интегрирования является бесконечной.

2) Функция является неограниченной в окрестности некоторых точек области интегрирования.

Замечание.

Если $f \in C[a,b]$, то определение не дает ничего нового, потому что:

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{c\to b-} \int\limits_a^c f(x)\,dx$

Доказательство: $\left|\int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f\right| = \left|\int\limits_c^b f\right| \leqslant \int\limits_c^b |f| \leqslant \int\limits_c^b M = M(b-c) \to 0$ при $c \to b-$

Теорема 1.4 (Критерий Коши сходимости интегралов)**.**

$-\infty < a < b \leqslant +\infty \;\; f \in C[a,b)$

$\int\limits_a^b f$ сходится $\iff \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \tilde{b} \in (a,b): \;\; \forall c,d \in (\tilde{b}, b) \;\; \left|\int\limits_c^d f\right| < \varepsilon$

Доказательство.

"$\Longrightarrow$"

По определению интеграл сходится $\iff \lim\limits_{c\to b-} \int\limits_a^c = \int\limits_a^b f$ – существует и конечен.

Тогда $\lim\limits_{d\to b-} \int\limits_d^b f = \int\limits_a^b f - \lim\limits_{d\to b-} \int\limits_a^d f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b f = 0$

Значит $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall d \in (b-\delta, b) \;\; \left|\int\limits_d^b f\right| = \left|\int\limits_a^b f - \int\limits_a^d f\right| < \varepsilon$

Тогда наш $\left|\int\limits_c^d f\right| = \left|\int\limits_a^d f - \int\limits_a^c f\right| \leqslant \left|\int\limits_a^d f - \int\limits_a^b f\right| + \left|\int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f\right| < 2\varepsilon$

"$\Longleftarrow$"

Обозначим $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$

Переписанное условие: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \tilde{b} \in (a,b) \;\; \forall c,d \in (\tilde{b}, b) \implies |F(c) - F(d)| < \varepsilon$

Пусть наша $\tilde{b} = b - \delta$

Тогда перепишем условие как $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall c,d \in (b-\delta, b) \implies |F(c) - F(d)| < \varepsilon$

Это и есть критерий Коши для $\lim\limits_{c\to b-} F(c)$. □

Замечание.

Для $b = +\infty$:

$\int\limits_a^{+\infty}$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists c > a : \;\; \forall A, B > c \;\; \left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon$

Для $b \in \mathbb{R}$:

$\int\limits_a^b$ сходится $\iff \forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0 :\ \forall A, B < b\ \ |A - b| < \delta, |B - b| < \delta \implies \left|\int\limits_A^B f\right| < \varepsilon$

Следствие.

$-\infty < a < b \leqslant +\infty\ \ f \in C[a, b)$

Если $\exists c_n, d_n \in [a, b)$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = b$

и $\int\limits_{c_n}^{d_n} f \not\to 0$, то $\int\limits_a^b f$ расходится.

Доказательство.

От противного. Пусть $\int\limits_a^b f$ сходится. Докажем, что $\int\limits_{c_n}^{d_n} f \to 0$ при $n \to \infty$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и по нему найдем $\tilde{b} \in (a, b)$ из критерия Коши.

Т.к. $c_n, d_n \to b \implies \exists N\ \ \forall n > N\ \ c_n, d_n > \tilde{b}$

$\implies$ по критерию Коши $\left|\int\limits_{c_n}^{d_n} f\right| < \varepsilon$.

Значит, $\int\limits_{c_n}^{d_n} f \to 0$, что противоречит условию. □

Замечание.

$f \in C[a, b)\ \ -\infty < a < b \leqslant +\infty$.

Тогда на $[a, b)$ существует первообразная F.

Значит существование $\int\limits_a^b f$ – это существование $\lim\limits_{c\to b-}(F(c) - F(a)) = \lim\limits_{c\to b-} F(c) - F(a)$.

Т.е. существование интеграла равносильно тому, что первообразная $F(x)$ имеет предел в точке b(слева).

Соглашение: если F не определена в точке b, считать, что $F\Big|_a^b := \lim\limits_{c\to b-} F(c) - F(a)$

Тогда если $\int\limits_a^b f$ существует, то $\int\limits_a^b f = F\Big|_a^b$

Пример.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_1^c \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{c\to+\infty} \frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{-1}{p-1}\Big|_1^c & p \neq 1 \\ \lim\limits_{c\to+\infty} \ln x\Big|_1^c & p = 1 \end{cases}$

   1) При $p = 1$

   $\int\limits_1^c \frac{dx}{x} = \ln c \to +\infty$

   Тогда интеграл расходится.

   2) При $p \neq 1$

   $\int\limits_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)c^{p-1}} \to \frac{1}{p-1}$, если $p > 1$

   Если же $p < 1$, то $\to +\infty$.

   Получили, что $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p > 1$.

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{c\to 0+} \int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p}$

1) Если $p = 1$

$\int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p} = \ln x\Big|_c^1 = -\ln c = +\infty$

Значит, интеграл расходится.

2) Если же $p \neq 1$

$\int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}}\frac{1}{1-p}\Big|_c^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{(1-p)c^{p-1}}$

Если $p > 1 \implies \to +\infty$

Если $p < 1 \implies \frac{1}{1-p}$

Получили, что $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p < 1$

1.8. Билет 8: Свойства несобственных интегралов.

Свойства.

Везде $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ $f \in C[a, b)$

1. Аддитивность.

$\int\limits_a^b f$ сходится $\implies \forall c \in (a, b)$ $\int\limits_c^b f$ сходится.

Доказательство.

$\int\limits_a^b f$ – сходится $\implies \exists \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B f =: \int\limits_a^b f$

$\int\limits_a^B f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^B f \implies \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_a^B f = \int\limits_a^c f + \lim\limits_{B\to b-} \int\limits_c^B f$

Тогда $\lim\limits_{B\to b-} \int\limits_c^B f$ должен сходится.

Получили, что $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$. □

2. $\int\limits_a^b f$ сходится $\implies \int\limits_c^b f \to 0$ при $c \to b-$.

$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

$\int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f$

$\implies \lim\limits_{c\to b-} \int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \lim\limits_{c\to b-} \int\limits_a^c f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b f = 0$

3. Линейность. $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ сходятся $\implies \int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится тоже.

   И $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$

   Доказательство.
   $\int\limits_a^B (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^B f + \beta \int\limits_a^B g.$

   Перейдём к пределу $B \to b-$.

   $\implies$ предел существует, конечен $\implies$ интеграл сходится и

   $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$ $\square$

   Замечание.
   $\int\limits_a^b f$ сходится $\int\limits_a^b g$ расходится $\implies \int\limits_a^b (f \pm g)$ расходится.

   Доказательство – от противного.

4. Монотонность $f, g \in C[a, b)$ $f \leqslant g \implies \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$

   Доказательство.
   $c \in [a, b) \implies f, g \in C[a, c]$

   $\int\limits_a^c f \leqslant \int\limits_a^c g$

   Переходим к пределу в неравенстве. $c \to b-$

   $\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$

   $\square$

5. Интегрирование по частям.

   $f, g \in C^1[a, b)$

   Если $\int\limits_a^b f'g$ сходится и $\exists \lim\limits_{c \to b-} f(c) \cdot g(c)$, то $\int\limits_a^b fg'$ сходится и

   $\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$

   Доказательство.
   $c \in [a, b)$ $f, g \in C^1[a, c]$

   $\int\limits_a^c fg' = fg\Big|_a^c - \int\limits_a^c f'g$

   Теперь напишем предел $c \to b-$

   $\implies \lim\limits_{c \to b-} \int\limits_a^c fg' = \lim\limits_{c \to b-} (fg\Big|_a^c - \int\limits_a^c f'g) = \lim\limits_{c \to b-} fg\Big|_a^c - \lim\limits_{c \to b-} \int\limits_a^c f'g = \lim\limits_{c \to b-} f(c) \cdot g(c) - f(a) \cdot g(a) - \int\limits_a^b f'g$

   $\implies \int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$

при существовании $\lim\limits_{c\to b-} f(c)\cdot g(c)$ и $\int\limits_a^b f'g$, что есть в условии.

□

6. Замена переменной.

   $f \in C[a,b)$ $\varphi : [\alpha,\beta) \to [a,b)$ и φ непрерывна и дифференцируема

   $\varphi(\beta) := c := \lim\limits_{\gamma\to\beta-} \varphi(\gamma)$

   Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)\,dx$

   Если существует интеграл в одной из частей, то существует и в другой, и они равны.

   Доказательство.

   $F(y) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^y f(x)\,dx \quad y \in [a,b)$

   $\Phi(\gamma) = \int\limits_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \quad \gamma \in [\alpha,\beta)$

   $\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$

   Если существует предел в правой части. Т.е. $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)\,dx$

   Тогда $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)\,dx = \lim\limits_{y\to c-} F(y) - F(\varphi(\alpha)) = \lim\limits_{y\to c-} F(y) - \Phi(\alpha)$

   $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \lim\limits_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma) - \Phi(\alpha)$

   Это было бы верно, если бы предел существовал. Поймем, почему существует.

   $\lim\limits_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma) = \lim\limits_{\gamma\to\beta-} F(\varphi(\gamma))$

   $a \leqslant \varphi(\gamma) < b \implies c \in [a,b]$

   Если $c \neq b$, то предел существует и равен $F(c)$.

   Если $c = b$, то предел тоже существует.

   (В силу непрерывности)

   Теперь надо понять, что $\lim\limits_{y\to c-} F(y) = \lim\limits_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma) = \lim\limits_{\gamma\to\beta-} F(\varphi(\gamma))$

   Возьмем $\gamma_n \to \beta \implies \varphi(\gamma_n) \to c$ оба стремятся слева

   $F(c_n) \to \lim\limits_{y\to c} F(y)$

   $F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \to \lim\limits_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma)$

   Случай второй. Существует $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

   Т.е. существует $\lim\limits_{\gamma\to\beta-} \Phi(\gamma)$

   Если $c < b$, то $f \in C[\varphi(a), c]$ и $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)\,dx$ существует и мы попали в первый случай.

   Поэтому $c = b$.

Возьмем последовательность $\gamma_n \to \beta$. Тогда $\varphi(\gamma_n) \to b$

Пусть $y_n \to b$. Надо доказать, что $F(y_n)$ имеет предел.

Поймем, что $\exists \delta_n \in [\alpha, \beta) \;\; \varphi(\delta_n) = y_n$.

$\varphi(\alpha) \leqslant y_n \leqslant \varphi(\gamma_m)$

$\implies$ по непрерывности φ существует $\delta_n \in [\alpha, \gamma_m]$, т.ч. $y_n = \varphi(\delta_n)$.

Покажем, что $\delta_n \to \beta$. Пусть это не так.

Тогда $\delta_{n_k} < \beta - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

$\varphi : [\alpha, \beta - \varepsilon] \to [a, b)$ и непрерывна на отрезке. Значит, по теореме Вейерштрасса в какой-то точке достигается максимум.

$\varphi(\delta_{n_k}) \leqslant \varphi(p) < b$.

Но это противоречит с тем, что $y_{n_k} \to b$.

Тогда $F(y_n) = F(\varphi(\delta_n)) = \Phi(\delta_n)$ имеет предел.

□

Пример.

Замена $x = \sin t \implies dx = \cos t \, dt$.

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cos t \, dt = \int\limits_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$.

Замечание.

$f \in C[a, b)$

$\int\limits_a^b f(x)\, dx$

Сделаем замену. $x = b - \frac{1}{t}$. Тогда

$\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t}) \frac{dt}{t^2}$

Т.е. теперь есть связь с бесконечностями – конечностями.

1.9. Билет 9: ! Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения. Следствия.

Теорема 1.5.

$f \geqslant 0 \;\; f \in C[a, b)$

Тогда сходимость $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ равносильна ограниченности сверху первообразной F.

Доказательство.

$F(y) := \int\limits_a^y f$

$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim\limits_{c \to b-} F(c) - F(a)$, $F(a) = 0$ (из утверждения выше)

$F(z) = F(y) + \int\limits_y^z f \geqslant F(y)$, где $\int\limits_y^z f \geqslant 0$ при $y < z \implies F(y)$ монотонно возрастает.

Итого, $F(y)$ имеет предел и монотонно возрастает. Для монотонно возрастающих функция существование предела равносильно ограниченности сверху

$\square$

Следствие.
$f, g \in C[a, b) \;\; 0 \leqslant f \leqslant g$

1. Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится.

2. Если $\int\limits_a^b f$ расходится, то $\int\limits_a^b g$ расходится.

Доказательство.
$G(y) := \int\limits_a^y g, \;\; F(y) := \int\limits_a^y f \implies F \leqslant G$

1. $\int\limits_a^b g$ сходится $\implies$ G ограничена сверху $\implies$ F ограничена сверху $\implies$ $\int\limits_a^b f$ сходится.

2. От противного. Пусть $\int\limits_a^b g$ сходится, тогда и $\int\limits_a^b f$ сходится по первому пункту. Противоречие.

$\square$

`Замечание.` 1. Неравенству $f \leqslant g$ достаточно выполнения для аргументов, близких к b.

Доказательство.
$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$
Для второго слагаемого $f \leqslant g$, используем следствие. $\square$

2. Вместо $f \leqslant g$ можно использовать и $f = O(g)$

Доказательство.
$\int\limits_a^b Cg = C\int\limits_a^b g$ – сходится.

$\square$

3. Если $f \geqslant 0$, $f \in C[a, +\infty)$ и $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ при $\varepsilon > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится.

Доказательство.
$f \in O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}) \implies f \leqslant M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} =: g$

Надо доказать, что $\int\limits_a^{+\infty} g$ сходится.

$\int\limits_a^{+\infty} M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} = M \int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ – сходится.

$\square$

Следствие.

$f, g \geqslant 0 \quad f, g \in C[a, b)$ и $f \sim g$ при $x \to b-$

Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково.

Доказательство.

$f \sim g \implies$ найдется такое c, что $\frac{g}{2} \leqslant f \leqslant 2g$ при $x > c$

Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $f \leqslant 2g \implies \int\limits_a^b f$ сходится.

Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $g \leqslant 2f \implies \int\limits_a^b g$ сходится.

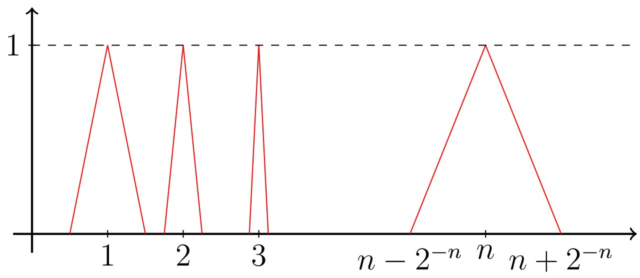
$\square$

Замечание.

$f \geqslant 0 \quad f \in C[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} f$ сходится.

Это НЕ значит $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$

Дана функция, изображенная на графике (спасибо за это Герману). Площади треугольников убывают: $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{1}{8}$, $\ldots$, $S_n = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$



1.10. Билет 10: Абсолютная сходимость. Признак Дирихле.

***Определение* 1.6** (Абсолютная сходимость.)**.**

$f \in C[a, b)$

$\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int\limits_a^b |f|$ сходится.

Теорема 1.6.

Если $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится.

Доказательство.

$0 \leqslant f_\pm \leqslant |f|$

$\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится $\implies \int\limits_a^b |f|$ сходится $\implies \int\limits_a^b f_\pm$ сходится

$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b (f_+ - f_-) = \int\limits_a^b f_+ - \int\limits_a^b f_- \implies \int\limits_a^b f$ сходится.

$\square$

Теорема 1.7 (признак Дирихле)**.**

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\exists M: \ |\int\limits_a^c f| \leqslant M$ при всех $c > a$.
2. g – монотонная функция.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится.

Доказательство.

Лишь для $g \in C^1[a, +\infty)$.

Пусть $F(y) := \int\limits_a^y f$

По условию $|F| \leqslant M$

$\int\limits_a^c fg = \int\limits_a^c F'g = Fg|_a^c - \int\limits_a^c Fg'$

Надо доказать, что существует предел при $c \to +\infty$

Распишем первое слагаемое как: $F(c)g(c) - F(a)g(a)$. Тогда $F(c)g(c) \to 0$ при $c \to +\infty$, так как это произведение бесконечно малой на ограниченную.

Надо доказать, что $\int\limits_a^c Fg'$ сходится. Докажем, что он абсолютно сходится, то есть, что $\int\limits_a^c |F|\cdot|g'|$ сходится.

$\int\limits_a^c |F|\cdot|g'| \leqslant M\int\limits_a^c |g'| = M|\int\limits_a^c g'| = M|\ g|_a^c\ | = M|g(c) - g(a)| \leqslant M|g(a)| \implies \int\limits_a^{+\infty} |F'g|$ сходится.

□

1.11. Билет 11: Признак Абеля. Интеграл от произведения монотонной и периодической функций. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$

Теорема 1.8 (признак Абеля)**.**

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ – сходится
2. $|g(x)|$ - ограничена, то есть $|g(x)| \leqslant K \ \ \forall x > a$
3. g монотонна

Из этого всего следует, что $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится

Доказательство.

Будем доказывать через Дирихле, то есть заделаем себе такие функции из f, g, что они будут сходится по признаку Дирихле.

Напомним его условия: у одной из функций интеграл должен быть ограничен, другая монотонно стремится к 0. С помощью $f(x)$ мы получим ограниченный интеграл, с помощью g - монотонно стремяющуюся к 0 функцию.

Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то есть по определению получаем, что существует конечный предел: $\exists \lim\limits_{y\to+\infty} \int\limits_a^y f(x)\,dx$.

Нам в определении нужно, чтобы $\exists C : \forall b : \left|\int\limits_a^b f(x)\right| < C$, то есть ограниченность интеграла. Выберем какой-нибудь отрезок $[a, B]$.

1. $b \leqslant B$. То есть мы хотим ограничить интеграл на отрезке. Он на нём непрерывен (вроде очев, но допустим, потому что дифференцируем :), так что по т. Вейерштрасса, ограничен, что и хотели.

2. $b > B$. То есть b где-то в окрестности бесконечности. Но у нас есть предел интеграла на бесконечности - он достигается и конечный. Так что можно ограничить $\left|\int\limits_a^b f(x)\right|$ через предел + константу при достаточно больших b.

   Отсюда вроде получаем, что B надо брать достаточно большое, то есть чтобы можно было такую константу вообще найти.

(у Храброва и Ани так подробно про выбор отрезка не было, там просто говорилось, то на маленьких непрерывность даёт ограниченность, а на бесконечности предел, я попробовал раскрыть. Возможно, что так подробно не стоит рассказывать на экзе)

Далее: g монотонна и ограничена $\implies \exists A := \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ и $|A| \leqslant K$. То есть возьмём и найдём её предел, он конечный.

$\widetilde{g}(x) := g(x) - A$ монотонна и стремится к 0 на бесконечности.

Т.е. показали, что f и $\widetilde{g}$ удовлетворяют условию принципа Дирихле.

$\implies \int\limits_a^{+\infty} f(x)\widetilde{g}(x)\,dx$ – сходится

$fg = fA + f\widetilde{g}$. А в интеграле: $\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} fA + \int\limits_a^{+\infty} f\widetilde{g}$

$\int\limits_a^{+\infty} fA$ сходится, так как A - константа и её можно вынести, а $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится по условию признака.

А второго слагаемое сходится по доказаному выше. Итого оба слагаемых сходятся, то есть и интеграл сходится, ура. □

Следствие (интеграл от произведения монотонной и периодической функции).
$f, g \in C[a, +\infty)$ и f периодична с периодом T, g - монотонна.

1. $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ – сходится.

   Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ – сходится абсолютно.

2. $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ – расходится. Дополнительное условие: $g(x) \to 0$ на бесконечности.

   Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ – сходится $\iff \int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = 0$

   (кстати, в этом условии хватит и того, что $\int\limits_a^{+\infty} |g(x)|\,dx$ расходится абсолютно: об этом в доказательстве)

Это следствие из признака Дирихле (не Абеля)

Доказательство.

1. Первый случай: интеграл g сходится

   $f \in C[a, a+T]$, то есть непрерывна на отрезке, то есть ограничена на нём по т. Вейерштрасса. При этом она периодическая, так что те же ограниченные значения будут и на всей прямой. То есть, она ограничена везде.

   g монотонна, то есть только 1 раз может пересечь 0, а дальше она знакопостоянна. То есть на неком луче $[b, +\infty)$ она знакопостоянна. Допустим, что она на нём положительна, отсюда $|g| = g$, пригодится ниже. Если же она отрицательна, то можем рассматривать $-g$ в условии, интеграл просто поменяет знак, то есть на сходимость это не влияет.

   Нам теперь интересно: $\int\limits_b^{+\infty} |fg|$ - сходится? Но f ограничена, то есть не больше какой-то константы M; а $|g| = g$, так что:

   $\int\limits_b^{+\infty} |fg| \leqslant \int\limits_b^{+\infty} Mg = M \int\limits_b^{+\infty} g$

   По условию этого случая, интеграл g сходится, то есть получили, то и исходный интеграл $|fg|$ тоже сходится, ура.

   Небольшое пояснение: мы же доказали сходимость на луче $[b, +\infty)$? Да, а на полуинтервале $[a, b)$ интеграл просто конечен и на сходимость на $[a, +\infty)$ не влияет.

2. Второй случай: интеграл g абсолютно расходится, $g \to 0$.

   "$\Longleftarrow$"

   $$F(y) := \int\limits_a^y f(x)\,dx = \underbrace{\int\limits_a^{a+kT} f(x)\,dx}_{=0} + \int\limits_{a+kT}^{y} f(x)\,dx = \int\limits_{a+kT-kT}^{y-kT} f(x)\,dx = \int\limits_a^{y-kT} f(x)\,dx$$

   $a \leqslant y - kT \leqslant a + T$.

   То есть мы хотим посчитать интеграл. Разобьём его на интеграл, который включает в себя целое число периодов: на каждом из таких периодов он 0 (интеграл по периоду 0, не забываем), так что и весь интеграл по целому числу периодов равен 0. Оставшийся интеграл - остаток от $a + kT$ до y. Так как функция у нас периодическая, то мы можем сдвинуть границы на T и ничего не изменится, так что можно сдвинуть и на kT влево, и получить интеграл от a до $y - kT \in [a, a+T]$.

   То есть получили, что множество значений $F(y)$ при $y \in \mathbb{R}$ и множество значений $F(y)$ при $y \in [a, a+T]$ совпадает: $\forall y \in \mathbb{R}$ мы найдём значение функции, которая считалась только на отрезке $[a, a+T]$.

Но F непрерывна $\implies$ ограничена на $[a, a+T]$ по т. Вейерштрасса $\implies$ F ограничена на $\mathbb{R}$, ведь множество значений совпадает, а значит максимальное значения функции и на $[a, a+T]$, и на $\mathbb{R}$ совпадают, то есть максимум ограничен и там, и там. (и минимум тоже ограничен, если функция очень маленькя и в минус уходит)

$\implies$ по принципу Дирихле $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ограничен, а g монотонна и стремится к 0.

"$\implies$"

От противного.

Докажем, что если $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx =: A \neq 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} fg$ расходится. (то есть если интеграл по периоду не 0, то расходится)

$\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{A}{T}$ – периодическая, так как просто отняли константу (A, T - константы).

$\int\limits_a^{a+T} \tilde{f} = \int\limits_a^{a+T} f - \int\limits_a^{a+T} \frac{A}{T} = A - A = 0$. (просто $f(x) = \tilde{f}(x) + \frac{A}{T}$ и мы разбили интеграл)

Значит, $\int\limits_a^{+\infty} \tilde{f}g$ сходится по следствию $\Longleftarrow$, так как интеграл $\tilde{f}$ равен 0 по периоду, а g монотонно стремится к 0.

Но $\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} \tilde{f}g + A\int\limits_a^{+\infty} g$

Первое слагаемое сходится, как только что доказали. Второе слагаемое расходится - по условию, $\int\limits_a^{+\infty} g$ расходится. То есть сходящийся интеграл = сходящийся + расходящийся, что невозожно, противоречие, что и нужно было.

Теперь о том, почему хватит расходимости $\int\limits_a^{+\infty} |g|$, а не $\int\limits_a^{+\infty} g$, как в условии.

Ну вообще, из расходимости интеграла следует и абсолютная расходимость: интеграл абсолютно сходится $\implies$ интеграл сходится, и не может быть так, что интеграл не сходится просто, но сходится абсолютно

Но на самом деле, из абсолютной расходимости в данной задаче следует и обычная расходимость, потому что g монотонна. Она лишь 1 раз может пересечь 0 и поменять знак. И после пересечения 0 она будет знакопостоянна. То есть интеграл на хвосте будет совпадать с абсолютным интегралом в точности до знака. А значит, у них будет одновременная сходимость и расходимость

То есть если бы мы в условии написали абсолютную расходимость, то из неё бы мы получили и обычную расходимость, для которой мы теорему доказали.

$\square$

Пример.

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$

Случай 1.

$p > 1$ $\frac{|\sin x|}{x^p} \leqslant \frac{1}{x^p}$ $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится

$\implies \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ – абсолютно сходится.

Случай 2.

$0 < p \leqslant 1$

$\sin x$ – периодическая функция $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$

$\frac{1}{x^p} \to 0$ и монотонна.

$\implies$ по следствию из признака Дирихле $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ сходится.

Покажем, что в этом случае нет абсолютной сходимости.

$|\sin x|$ – периодическая функция, $\int\limits_0^{2\pi} |\sin(x)|\,dx \neq 0$, так что по тому же следствию, получаем, что интеграл расходится.

$\implies$ нет абсолютной сходимости.

Случай 3.

$p \leqslant 0$

Воспользуемся критерием Коши.

$\int\limits_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{\sin x}{x^p}\,dx \geqslant \int\limits_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1/2}{x^p}\,dx \geqslant \int\limits_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1}{2}\,dx = \frac{\pi}{3}$

$\implies$ нет сходимости, так как не стремится к 0.

2. Метрические и нормированные пространства

2.1. Билет 12: ! Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.

***Определение* 2.1.**

Метрическое пространства - пара $\langle X, \rho \rangle$, где X - множество, $\rho : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ - метрика, ρ обладает следующими свойствами:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, и $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника, $\triangle$)

Пример.

Обычная метрика на $\mathbb{R}$: $\langle \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y| \rangle$.

Пример.

«Метрика лентяя» на произвольном множестве: $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Пример.

Обычная метрика на $\mathbb{R}^2$ - длина отрезка: $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Пример.

Множество - точки на поверхности сферы, метрика - кратчайшая дуга межту точками.

Пример.

Манхэттанская метрика на $\mathbb{R}^2$: $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Пример.

Французкая железнодорожная метрка: Есть центральный объект, от него есть несколько «лучей».

Если A и B на одном луче, то $\rho(A, B) = AB$

Если на разных: $\rho(A, B) = AP + PB$, где P - центральный объект.

Доказательство.

При условии что расстояния между объектами на одном луче являются метрикой, докажем что ФЖМ - метрика:

Если A и B находятся на одном луче, всё тривиально следует из того, что расстояние на луче - метрика.

Пусть A, B - на разных лучах $\implies A \neq B,\ A, B \neq P$.

$$\rho(A, B) = AP + PB > 0 \impliedby AP, PB > 0.$$
$$\rho(A, B) = AP + PB = PB + AP = BP + PA = \rho(B, A).$$

Пусть C лежит на одной ветке с A:

$$\rho(A, C) + \rho(C, B) = AC + (CP + PB) = (AC + CP) + PB \geqslant AP + PB = \rho(A, B).$$

Пусть C лежит на собственной ветке:

$$\rho(A, C) + \rho(C, B) = (AP + PC) + (CP + PB) \geqslant AP + PB = \rho(A, B).$$ □

***Определение* 2.2.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Открытым шаром радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a \in X$ называется $B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) < r\}$.

Замкнутым шаром радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a \in X$ называется $\overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) \leqslant r\}$.

Свойства.

$B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$

Если $a \neq b$, то $\exists r > 0 \quad B_r(a) \cap B_r(b) = \varnothing$.

Доказательство.

Возьмём $r = \frac{\rho(a,b)}{2}$.

Пусть $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$.

Тогда $\rho(a, x) < \frac{\rho(a,b)}{2}$ и $\rho(x, b) < \frac{\rho(a,b)}{2}$.

Но тогда $\rho(a, x) + \rho(x, b) < \rho(a, b)$, противоречие с $\triangle$. □

Аналогичная пара свойств есть и у $\overline{B}$.

2.2. Билет 13: ! Открытые множества: определение и свойства.

***Определение* 2.3.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

Точка $a \in A$ называется внутренней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\operatorname{Int} A$.

***Определение* 2.4.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется открытым, если все его точки внутренние.

Свойства.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

1. $\varnothing$, X - открытые множества.

2. Объединение любого количества открытых множеств открыто

   Доказательство.

   Пусть $\forall \alpha \in I \quad A_\alpha$ - открытое множество. $A := \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. Возьмём точку a, $\exists \beta \in I \quad a \in A_\beta$.

   Так-как A_β открытое, $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A_\beta \subset A$. □

3. Пересечение конечного количества открытых множеств открыто

   Доказательство.
   Пусть $I = [1; n]$, $\forall k \in I \quad a \in A_k$, A_k - открытое.

   Тогда $\forall k \in I \quad \exists r_k > 0 \quad B_{r_k}(a) \subset A_k$.

   Пусть $r = \min\limits_k r_k > 0$.

   Тогда $\forall k \in I \quad B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \implies B_r(a) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. □

   Замечание.
   Конечность важна.

   Возьмём последовательность $U_n = B_{\frac{1}{n}}(a)$. Все эти множества открытые, но их пересечение- $\{a\}$ - не обязательно открыто. (Например, $X = \mathbb{R}$, $a = 0$. $\{0\}$ не открыто).

4. $\forall a \in X \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad B_r(a)$ - открытое множество.

   Доказательство.
   Пусть $x \in B_r(a)$, $\tilde{r} = r - \rho(x, a)$.

   Покажем что $B_{\tilde{r}}(x) \subset B_r(a)$:

$$\begin{aligned} y \in B_{\tilde{r}}(x) &\implies \rho(y, x) < \tilde{r} \\ &\implies \rho(y, x) < r - \rho(x, a) \\ &\implies \rho(y, x) + \rho(x, a) < r \\ &\overset{\triangle}{\implies} \rho(y, a) < r \\ &\implies y \in B_r(a) \end{aligned}$$

□

2.3. Билет 14: ! Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.

***Определение* 2.5** (повтор)**.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

Точка $a \in A$ называется внутренней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\operatorname{Int} A$.

Свойства.
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

1. $\operatorname{Int} A \subset A$

2. $\operatorname{Int} A$ - объеденение всех открытых множеств содержащихся в A.

   Доказательство.
   Пусть $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, где $U_\alpha \subset A$ - открытое.

   $G \subset \operatorname{Int} A$:

$$\begin{aligned} x \in G &\implies \exists \alpha \in I \quad x \in U_\alpha \\ &\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U_\alpha \subset A \\ &\implies x \in \operatorname{Int} A \end{aligned}$$

$\operatorname{Int} A \subset G$: $x \in \operatorname{Int} A \implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset A$. $B_r(x)$ - открытое множество, значит $\exists \alpha \in I \quad U_\alpha = B_r(x) \implies x \in G$. □

3. $\operatorname{Int} A$ - откртое множество

Доказательство.
$\operatorname{Int} A$ - объединение открытых множеств, значит открыто. □

4. $\operatorname{Int} A = A \iff A$ - открыто

Доказательство.
Необходимость ($\implies$): $\operatorname{Int} A$ открыто.

Достаточность ($\impliedby$): A открыто $\implies$ все точки внутренние $\implies A = \operatorname{Int} A$. □

5. $A \subset B \implies \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$

6. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$

Доказательство.
В сторону $\subset$:

$$\left.\begin{aligned} A \cap B \subset A &\implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \\ A \cap B \subset B &\implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} B \end{aligned}\right\} \implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$$

В сторону $\supset$:

$$x \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \implies \left\{\begin{aligned} x \in \operatorname{Int} A &\implies \exists r_1 : B_{r_1}(x) \subset A \\ x \in \operatorname{Int} B &\implies \exists r_2 : B_{r_2}(x) \subset B \end{aligned}\right\} \implies B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) \subset A \cap B \implies$$
$$\implies x \in \operatorname{Int}(A \cap B)$$

□

7. $\operatorname{Int} \operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$

Доказательство.
Заметим, что $\operatorname{Int} A$ - открытое по 3, дальше по 4 видно равенство. □

2.4. Билет 15: Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью.

***Определение* 2.6.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется замкнутым, если $X \setminus A$ - открыто.

Свойства.

1. $\varnothing, X$ - замкнуты.

2. Пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто

Доказательство.

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

□

Так как $\forall \alpha \quad X \setminus A_\alpha$ - открытое, то $\bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$ - открытое, значит $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ - замкнутое.

3. Объединение конечного количества замкнутых множеств замкнуто

Доказательство.

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus A_k)$$

□

$X \setminus A_k$ открыто, значит их конечное пересечение открыто, значит $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ - замкнуто.

Замечание.
Конечность важна.

Пусть $C_n = \overline{B}_{1-\frac{1}{n}}(a)$. Каждое из этих множеств замкнуто, но их объединение - $B_1(a)$ - не обязательно. (Например, $X = \mathbb{R}$, $C_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$, объединение - $(-1, 1)$).

4. $\forall a \in X \quad \forall r > 0 \quad \overline{B}_r(a)$ - замкнутое множество.

Доказательство.
Покажем что $X \setminus \overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) > r\}$ - открыто.

Пусть $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$. $\tilde{r} = \rho(x, a) - r$. Тогда докажем что $B_{\tilde{r}}(x) \cap B_r(a) = \varnothing$:

Пусть $y \in B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a)$, тогда $\rho(x, y) < \tilde{r}$, $\rho(y, a) < r$.

$$\rho(x, a) \overset{\triangle}{\leqslant} \rho(x, y) + \rho(y, a) < \tilde{r} + r = \rho(x, a).$$

Получили противоречие, значит $B_{\tilde{r}}(x) \cap B_r(a) = \varnothing \implies B_{\tilde{r}}(x) \subset X \setminus \overline{B}_r(a)$, значит $X \setminus \overline{B}_r(a)$ - открытое. □

Определение 2.7.
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Замыкание множества $A \subset X$ - пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Обозначается $\operatorname{Cl} A$ или $\overline{A}$.

Теорема 2.1.

$$\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A).$$

Доказательство.
Будем доказывать в виде $X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$:

Знаем, что $\operatorname{Int}(X \setminus A) = \bigcup_\alpha U_\alpha$ по всем U_α таким, что $U_\alpha \subset (X \setminus A)$ и U_α открыто.

Пусть C - замкнутое множество, такое, что $A \subset C$. Тогда $X \setminus C$ - открытое, и $(X \setminus C) \subset (X \setminus A) \implies \exists \alpha \quad U_\alpha = X \setminus C$.

Аналогично в другую сторону - $\forall\alpha \quad X \setminus U_\alpha$ - замкнутое надмножество A.
Пусть $C_\alpha = X \setminus U_\alpha$.

$$X \setminus \operatorname{Cl} A = X \setminus \bigcap_\alpha C_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus C_\alpha) = \bigcup_\alpha U_\alpha = \operatorname{Int}(X \setminus A).$$

□

2.5. Билет 16: ! Свойства замыкания. Предельные точки. Связь с замыканием множества.

Свойства.

1. $A \subset \operatorname{Cl} A$
2. $\operatorname{Cl} A$ - замкнутое множество

   Доказательство.
   По определению, $\operatorname{Cl} A$ - пересечение замкнутых множетв. □

3. $\operatorname{Cl} A = A \iff A$ замкнуто

   Доказательство.

$$\begin{aligned} A = \operatorname{Cl} A &\iff X \setminus A = X \setminus \operatorname{Cl} A \\ &\iff X \setminus A = \operatorname{Int}(X \setminus A) \\ &\iff X \setminus A \text{ открыто} \\ &\iff A \text{ замкнуто} \end{aligned}$$

□

4. $A \subset B \implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} A \subset B &\implies (X \setminus B) \subset (X \setminus A) \\ &\implies \operatorname{Int}(X \setminus B) \subset \operatorname{Int}(X \setminus A) \\ &\implies X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B) \\ &\implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B \end{aligned}$$

□

5. $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} \operatorname{Cl}(A \cup B) &= X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus (A \cup B) \\ &= X \setminus \operatorname{Int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \\ &= X \setminus (\operatorname{Int}(X \setminus A) \cap \operatorname{Int}(X \setminus B)) \\ &= (X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)) \cup (X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B)) \\ &= \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B \end{aligned}$$

□

6. $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}\, A) = \mathrm{Cl}\, A$

   Доказательство.
   $\mathrm{Cl}\, A$ замкнуто по свойству 2, равенство следует из свойства 3. □

Теорема 2.2.
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in \mathrm{Cl}\, A \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \neq \varnothing.$$

Доказательство.
Необходимость ($\implies$):

Предположим что $\exists r > 0 \quad B_r(a) \cap A = \varnothing$.

Тогда $a \notin A$ и $B_r(a) \subset X \setminus A$, значит $a \in \mathrm{Int}(X \setminus A) \implies a \notin X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A) \implies a \notin \mathrm{Cl}\, A$.

Достаточность ($\impliedby$):

Пусть $a \notin \mathrm{Cl}\, A$, тогда $\exists F$ - замкнутое надмножество A, такое, что $a \notin F \implies a \in X \setminus F$. При этом, $X \setminus F$ открыто.

Тогда $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset X \setminus F \subset X \setminus A$.

Но тогда $B_r(a) \cap A = \varnothing$. □

Следствие.
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$, а $U \subset X$ - открытое множетсво. При этом $A \cap U = \varnothing$.

Тогда $\mathrm{Cl}\, A \cap U = \varnothing$

Доказательство.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Cl}\, A \cap U &\implies x \in U \\ &\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U \\ &\implies B_r(x) \cap A \subset U \cap A = \varnothing \\ &\implies x \notin \mathrm{Cl}\, A \\ &\implies x \notin \mathrm{Cl}\, A \cap U \end{aligned}$$

Получили противоречие, значит таких x не существует. □

***Определение* 2.8.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Проколотой окрестностью радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центров в $a \in X$ называется $\mathring{B}_r(a) := B_r(a) \setminus \{a\} = \{x \in X \mid 0 < \rho(x, a) < r\}$.

***Определение* 2.9.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$a \in X$ называется предельной точкой, если $\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$.

Множества предельных точек множества A обозначается A'.

Свойства.

1. $\mathrm{Cl}\, A = A \cup A'$

Доказательство.

$$\begin{aligned} a \in \operatorname{Cl} A &\iff \forall r > 0 \quad B_a(a) \cap A \neq \varnothing \\ &\iff \left[\begin{aligned} &a \in A \\ &\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \end{aligned}\right. \\ &\iff \left[\begin{aligned} &a \in A \\ &a \in A' \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

□

2. $A \subset B \implies A' \subset B'$

Доказательство.

$$\begin{aligned} a \in A' &\implies \forall r \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \\ &\implies \mathring{B}_r(a) \cap B \neq \varnothing \\ &\implies a \in B' \end{aligned}$$

□

3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Доказательство.

$$\begin{aligned} A \subset A \cup B &\implies A' \subset (A \cup B)' \\ B \subset A \cup B &\implies B' \subset (A \cup B)' \\ &\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)' \end{aligned}$$

Покажем другое включение: возьмём $x \in (A \cup B)'$.

Пусть $x \notin A'$: Тогда $\exists R > 0 \quad \mathring{B}_R(x) \cap A = \varnothing$.

Заметим, что $\forall 0 < r \leqslant R \quad \mathring{B}_r(x) \cap A \subset \mathring{B}_R(x) \cap A = \varnothing$, значит $\forall r > 0 \quad \exists 0 < R_r < r \quad \mathring{B}_{R_r}(x) \cap A = \varnothing$ (если $r < R$, то подойдёт он сам, иначе подойдёт $R - \varepsilon$).

Так-как $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$, значит $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \varnothing$ (если пересекаемся с объединением, но не с A, значит с B). Тогда

$$\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(x) \cap B \supset \mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \varnothing \text{ вложение так-как } r > R_r.$$

Значит, $x \in B'$ □

4. $A' \subset A \iff A$ - замкнутое

Доказательство.

$$\begin{aligned} A \text{ - замкнутое} &\iff A = \operatorname{Cl} A \\ &\iff A = A \cup A' \\ &\iff A' \subset A \end{aligned}$$

□

Теорема 2.3.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in A' \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \text{ содержит бесконечно много точек.}$$

Доказательство.

Необходимость ($\Longrightarrow$):

Знаем, что $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$, возьмём точку $x_1 \in \mathring{B}_r(a) \cap A$, возьмём $r_2 = \rho(x_1, a)$, знаем, что $\mathring{B}_{r_2}(a) \cap A \neq \varnothing$, можем взять точку оттуда, и вообще повторять бесконечное число раз.

Достаточность ($\leqslant$): $B_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Longrightarrow$ $\mathring{B}_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Longrightarrow$ $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \Longrightarrow a \in A'$. □

2.6. Билет 17: Индуцированная метрика. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве.

***Определение* 2.10.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $Y \subset X$.

Тогда пара $\left\langle Y, \rho|_{Y \times Y} \right\rangle$ называется метрическим подпространством X.

Далее, при разговое о подпростравах обычно будет указываться только множество, а метрика использоваться та-же что и для основного пространства.

Теорема 2.4.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, Y - его подпространство.

$A \subset Y$ открыто в Y тогда и только тогда, когда $\exists G$ открытое в X, такое, что $A = G \cap Y$

Доказательство.

Необходимость ($\Longrightarrow$):

$$\begin{aligned} A \text{ - открыто в } Y &\Longrightarrow \forall a \in A \quad \exists r_a > 0 \quad B^Y_{r_a}(a) \subset A \\ &\Longrightarrow A = \bigcup_{a \in A} B^Y_{r(a)}(A) \subset \bigcup_{a \in A} B^X_{r(a)}(a) =: G \end{aligned}$$

G - подходящее множество - оно открыто как объединение открытых, покажем что $A = G \cap Y$:

$$B^Y_r(x) = B^X_r(x) \cap Y.$$

$$G \cap Y = Y \cap \bigcup_{a \in A} B^X_{r(a)}(a) = \bigcup_{a \in A} B^Y_{r(a)}(a) = A.$$

Достаточность ($\Longleftarrow$):

Пусть $A = G \cap Y$. Возьмём $a \in A$.

$$\begin{aligned} G \text{ открыто в } X &\Longrightarrow \exists r > 0 \quad B^X_r(a) \subset G \\ &\Longrightarrow B^X_r(a) \cap Y \subset G \cap Y \\ &\Longrightarrow B^Y_r(a) \subset A \\ &\Longrightarrow A \text{ открыто в } Y \end{aligned}$$

□

Теорема 2.5.

Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, Y - его подпространство.

$A \subset Y$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\exists F$ замкнутое в X, такое, что $A = F \cap Y$.

Доказательство.

$F := X \setminus G$, где G - открытое в X такое, что $G \cap Y = Y \setminus A$ существование которого экивалентно открытости $Y \setminus A \iff$ замкнутости A.

$$\begin{aligned} F \cap Y &= (X \setminus G) \cap Y \\ &= (X \cap Y) \setminus G \\ &= Y \setminus G \\ &= Y \setminus (G \cap Y) \\ &= Y \setminus (Y \setminus A) \\ &= A \end{aligned}$$

□

Пример.

Пусть $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, 2)$.

$[0, 1)$ открыто в Y, например $[0, 1) = (-1, 1) \cap Y$.

При $r \leqslant 2$, $B_r^Y(0) = [0, r)$.

$[1, 2)$ замкнуто в Y, например $[1, 2) = [1, 2] \cap Y$.

2.7. Билет 18: ! Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского.

***Определение* 2.11.**

Нормированным пространством над $\mathbb{R}$ называется пара $\langle X, \|\cdot\|\rangle$, где X - линейное пространство над $\mathbb{R}$ (далее одно и тоже обозначение используется для линейного пространства и его множества векторов), а $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}$ - норма, обладающая следующими свойствами $\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ $(\triangle)$

Пример.

$X = \mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$

Пример.

На $X = \mathbb{R}^d$ можно задать бесконечно много норм:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|.$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2}.$$

$$\|x\|_n = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^n}.$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i\in 1,\ldots,d} |x_i|.$$

Пример.

$X = C[a,b]$, $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Доказательство.

Докажем неравенство треугольника:

$$\begin{aligned}\|f+g\| &= \max_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \\ &= |f(x_0)+g(x_0)| \\ &\leqslant |f(x_0) + |g(x_0)| \\ &\leqslant \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |g(x)| \\ &= \|f\| + \|g\|\end{aligned}$$

□

***Определение* 2.12.**

Пусть X - линейное пространство, тогда функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если удовлетворяет следующим свойствам $\forall x, y, z \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad :$

1. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ и $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \vec{0}$.
2. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
4. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

Замечание.

Аналогичные определения можно дать над $\mathbb{C}$, тогда надо ещё потребовать $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$, и третий пункт примет вид $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

Пример.

$X = \mathbb{R}^d$, $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i y_i$

Пример.

Пусть $w_1, \ldots, w_d > 0$, тогда

$X = \mathbb{R}^d$, $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{d} w_i x_i y_i$

Пример.

$X = C[a,b]$, $\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt$

Свойства.

1. $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda \langle x, z\rangle + \mu \langle y, z\rangle$ и $\langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \lambda \langle x, y\rangle + \mu \langle x, z\rangle$
2. Неравенство Коши-Буняковского: $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$

Доказательство.
Пусть $t \in \mathbb{R}$.

$$\langle x + ty, x + ty \rangle \geqslant 0.$$

$$\langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle .$$

Это квадратное уровнение имеет корень только если $x + ty = 0$, значит не более одного корня. Его дискриминат $\leqslant 0$:

$$(2 \langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leqslant 0 \implies \langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle .$$ □

3. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ - норма

Доказательство.

(a) Первое свойство переносится напрямую, из аналогичных свойств для $\langle x, x \rangle$ и $\sqrt{\ }$.

(b) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$

(c)

$$\begin{aligned}
\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| &\iff \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \\
&\overset{\cdot^2}{\iff} \langle x + y, x + y \rangle \leqslant \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\
&\iff \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\
&\iff \langle x, y \rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} \\
&\iff \langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle
\end{aligned}$$

Последнее неравенство - неравенство Коши-Буняковского. □

Свойства.

1. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ - метрика

Доказательство.

(a) Первое свойство переходит прямо

(b) $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)| \|x - y\| = \rho(x, y)$

(c) $\|x - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\|$ ($\triangle$ для нормы).

□

2. $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$

Доказательство.

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \overset{\triangle}{\leqslant} \|x - y\| + \|y\|.$$

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \overset{\triangle}{\leqslant} \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|.$$

$$\|x\| \leqslant \|x - y\| + \|y\| \implies \|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|.$$

$$\|y\| \leqslant \|x - y\| + \|x\| \implies \|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|.$$

□

2.8. Билет 19: ! Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства.

***Определение* 2.13.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $x_n \in X$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

***Определение* 2.14.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $E \subset X$.

E называется ограниченным если $\exists r > 0 \quad \exists a \in X \quad E \subset B_r(a)$.

Свойства.

1. Предел единственнен

   Доказательство.

   Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $a \neq b$.

   Возьмём $\varepsilon = \frac{\rho(a,b)}{2}$, $a \neq b \implies \varepsilon > 0$, возьмём $N = \max\{N_a, N_b\}$, где N_a, N_b - N из соответствующих определений предела при подстановке ε.

   Тогда, $\rho(x_N, a) < \varepsilon$ и $\rho(x_N, b) < \varepsilon$.

   Но тогда $\rho(a,b) \overset{\triangle}{\leqslant} \rho(a, x_N) + \rho(x_N, b) < 2\varepsilon = \rho(a,b)$. Противоречие, значит предел единственненн. $\square$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$

   Доказательство.

   Определения посимвольно совпадают. $\square$

3. Если последовательность имеет предел, она ограничена

   Доказательство.

   $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = a &\implies \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0 \\ &\implies \rho(x_n, a) \text{ - ограниченная последовательность вещественных чисел} \\ &\implies \exists R > 0 \quad \rho(x_n, a) < R \\ &\implies \{x_n\} \subset B_R(a)\end{aligned}$$ $\square$

4. Если a - предельная точка множества A, то можно выбрать последовательность $x_n \in A$, такую что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и $\rho(x_n, a)$ строго монотонно убывает.

   Доказательство.

   По определению предельной точки, $\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(a) \neq \varnothing$.

   Пусть $r_1 = 1$, $r_n = \min\{\frac{1}{n}, \rho(x_{n-1}, a)\}$, $x_n \in \mathring{B}_{r_n}(a)$ - такой x_n всегда можно выбрать, так-как окрестность непуста. Тогда $\rho(x_n, a) < r \implies \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \implies \rho(x_n, a) \to 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и при этом $\rho(x_n, a) < r_n < \rho(x_{n-1}, a)$. $\square$

5. $A \subset X,\ x_n \in A,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies a \in A \cup A' = \operatorname{Cl} A.$

   Доказательство.
   Если $a \notin A$:

   Предположим что $a \notin A' \implies \exists \varepsilon > 0 \quad \mathring{B}_\varepsilon(a) \cap A = \varnothing \implies \nexists x \in A \quad 0 < \rho(x, a) < \varepsilon$.

   Но, если подставить этот ε в определение предела, то получим что $\exists N \quad \rho(x_N, a) < \varepsilon$ и $x_N \in A \implies x_N \neq a \implies \rho(x_N, a) > 0$. Противоречие, значит $a \in A'$. □

2.9. Билет 20: Арифметические свойства пределов последовательности векторов. Покоординатная сходимость.

Теорема 2.6.
Пусть $\langle X, \|\cdot\| \rangle$ - нормированное пространство, $x_n, y_n, a, b \in X,\ \lambda_n, \lambda \in \mathbb{R},\ x_n \to a,\ y_n \to b,\ \lambda_n \to \lambda$.

Тогда:

$$\|x_n - a\| \to 0.$$
$$\|y_n - b\| \to 0.$$

1. $x_n + y_n \to a + b$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \\ &= \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \\ &\overset{\triangle}{\leqslant} \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \\ &\to 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$ □

2. $\lambda_n x_n \to \lambda a$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n (x_n - a) + (\lambda_n - \lambda) a\| \\ &\leqslant \|\lambda_n (x_n - a)\| + \|(\lambda_n - \lambda) a\| \\ &= |\lambda_n| \|x_n - a\| + |(\lambda_n - \lambda)| \|a\| \\ &\to |\lambda| \cdot 0 + 0 \cdot \|a\| = 0 \end{aligned}$$ □

3. $x_n - y_n \to a - b$

   Доказательство.
   $-y_n = -1 \cdot y_n \implies -1 \cdot b = -b,\ x_n + (-y_n) \to a + (-b) = a - b.$ □

4. $\|x_n\| \to \|a\|$

Доказательство.
По свойству нормы:

$$0 \leqslant |\|x\| - \|a\|| \leqslant \|x - a\| \to 0. \qquad \square$$

5. Если задано скалярное произведение и $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, то $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle a, b\rangle$.

Доказательство.
Заметим следующий факт:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) &= \frac{1}{4}\left(\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle - (\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle)\right) \\
&= \frac{1}{4}\cdot 4\langle x,y\rangle \\
&= \langle x,y\rangle
\end{aligned}$$

Теперь:

$$\begin{aligned}
\langle x_n, y_n\rangle - \langle a,b\rangle &= \langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, b\rangle + \langle x_n, b\rangle - \langle a, b\rangle \\
&= \langle x_n, y_n - b\rangle - \langle x_n - a, b\rangle \\
&= \frac{1}{4}\left(\|x_n + y_n - b\|^2 - \|x_n - y_n + b\|^2 - \|x_n - a + b\|^2 + \|x_n - a - b\|^2\right) \\
&\to \frac{1}{4}\left(\|a\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2 + \|b\|^2\right) = 0
\end{aligned} \qquad \square$$

***Определение* 2.15.**
Пусть $x_n \in \mathbb{R}^d$, $x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(d)})$.
Тогда x_n покоординатно сходится к x_0, если

$$\forall k \in [1, d] \quad \lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)}.$$

Теорема 2.7.
В $\mathbb{R}^d$ с евклидовой нормой $\left(\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{d} x_k^2}\right)$ сходимость по норме эквивалентна координатной.

Доказательство.
Необходимость (норма $\implies$ коорд):

$$\forall k \in [1, d] \quad 0 \leqslant (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \leqslant \sum_{j=1}^{d}(x_n^{(j)} - x_0^{(j)})^2 = \|x_n - x_0\|^2 \to 0.$$

Достаточноость (коорд $\implies$ норма)

$$0 \leqslant \|x - x_0\|^2 = \sum_{k=1}^{d}(x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \to 0. \qquad \square$$

2.10. Билет 21: ! Фундаментальные последовательности. Свойства. Полнота. Полнота $\mathbb{R}^d$

Тут что-то странное с порядком билетов, рекомендуется сначала прочитать билет 22

***Определение* 2.16.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространоство.

Последовательность x_n называется фундаментальной

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Лемма.

Фундаментальная последовательность ограничена

Доказательство.

Подставим $\varepsilon = 1$, получим $\forall n \geqslant N \quad \rho(x_N, x_n) < 1 \implies x_n \in B_1(x_N)$, пусть

$$r = \max\{1, \max_{k<N}\{\rho(x_N, x_k)\}\}.$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in B_r(x_N)$. □

Лемма.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

$x_n \in X$, $\exists a \in X \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Тогда x_n фундаментальна.

Доказательство.

Из предела получаем следующие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\forall n, m \geqslant N \quad \rho(x_n, x_m) \overset{\triangle}{\leqslant} \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < \varepsilon.$$

□

***Определение* 2.17.**

Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Лемма.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Пусть $x_n \in X$ - фундаментальна, а $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall k \geqslant M \quad \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

$$x_n \text{ - фундаментальна } \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Пусть $L = \max\{N, M\}$.

Тогда $\forall n > L \quad \exists k \quad \rho(x_n, a) < \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$.

Значит, $\rho(x_n, a) \to 0 \implies x_n \to a$. □

Следствие.

1. $\mathbb{R}^d$ - полное

   Доказательство.
   Пусть $x_n \in \mathbb{R}^d$ - фундаментальная последовательность.

   Тогда x_n ограничена $\implies$ $\exists x_{n_k}$ - сходящаяся к точке из $\mathbb{R}^d$ подпоследовательность (Больцано-Вейерштрасс из следующего билета), пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

   Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}^d$. □

2. K - компакт в $\langle X, \rho\rangle \implies \langle K, \rho\rangle$ - полное.

   Доказательство.
   K - компакт, $x_n \in K$ - фундаментальна.

   $\exists x_{n_k} \in K \quad \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \in K \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in K$. □

2.11. Билет 22: ! Покрытия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве. Простейшие свойства компактных множеств.

***Определение* 2.18.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство.

Семейство множеств $U_\alpha \subset X$ называется открытым покрытием множества A (покрытием A открытыми множествами), если

1. $A \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$
2. $\forall \alpha \in I \quad U_\alpha$ - открытое.

***Определение* 2.19.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство.

$K \subset X$ называется компактом, если из любого отркытого покрытия можно выбрать конечное открытое покрытие.

Теорема 2.8.
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространтсво, $Y \subset X$ - подпространство.

Тогда компактность $K \subset Y$ в Y и в X равносильны.

Доказательство.
$Y \implies X$:

Пусть $G_\alpha \subset X$ - открытое покрытие K в X.

Тогда $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$ - открытое покрытие K в Y.

Можем выбрать конечное U_{α_k}.

$U_{\alpha_k} \subset G_{\alpha_k} \implies G_{\alpha_k}$ - конечное открытое покрытие.

$X \implies Y$:

Пусть $U_\alpha \subset Y$ - открытое покрытие K в Y.

Тогда $\exists G_\alpha$ открытое в $X \quad U_\alpha = G_\alpha \cap Y$.

$U_\alpha \subset G_\alpha \implies G_\alpha$ - открытое покрытие K в X.

Значит, можем выбрать конечное G_{α_k}. Тогда

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} = \bigcup_{k=1}^{n} (G_{\alpha_k} \cap Y) = Y \cap \bigcup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k} \supset Y \cap K = K.$$

Значит, U_{α_k} - конечное покрытие K в Y. $\square$

Теорема 2.9.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, K - компакт. Тогда

1. K - замкнуто

   Доказательство.
   Возьмём $a \in X \setminus K$.

   Заметим, что $\forall x \in K \quad B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(a) \cap B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x) = \varnothing$.

   Возьмём открытое покрытие K: $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$.

   Выберем конечное: $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_{\frac{\rho(a,x_k)}{2}}(x_k)$.

   Тогда, при $r := \min\limits_k \{\frac{\rho(x_k,a)}{2}\}$, $B_r(a) \cap K = \varnothing \implies B_r(a) \subset X \setminus K \implies a \in \mathrm{Int}(X \setminus K) \implies X \setminus K$ открыто $\implies K$ замкнуто. $\square$

2. K - ограничено

   Доказательство.
   Возьмём $a \in K$.

   Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$ - открытое покрытие.

   Выберем конечное: $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_{n_k}(a) = B_r(a)$, $r := \max\limits_k \{n_k\}$. $\square$

Следствие.

Если K - компакт и $\tilde{K} \subset K$ - замкнуто, то $\tilde{K}$ - компакт.

Доказательство.

Пусть U_α - открытое покрытие $\tilde{K}$.

Тогда, если добавить к нему $X \setminus \tilde{K}$ (которое открыто так-как $\tilde{K}$ замкнуто), получится открытое покрытие K. Выберем конечное.

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} \cup (X \setminus \tilde{K}) \supset K \supset \tilde{K} \implies \bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} \supset \tilde{K} \qquad \square.$$

2.12. Билет 23: Теорема о пересечении семейства компактов. Следствие о вложенных компактах.

Теорема 2.10.

Пусть K_α - семейство компактов, и для любого конечного набора компактов пересечение непусто.

Тогда $\bigcap\limits_{\alpha\in I} K_\alpha \neq \varnothing$.

Доказательство.

Предположим $\bigcap\limits_{\alpha\in I} K_\alpha = \varnothing$.

Тогда $\exists \alpha_0 \in I \quad K_{\alpha_0} \subset X \setminus \bigcap\limits_{\alpha\in I}^{\alpha\neq\alpha_0} K_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in I}^{\alpha\neq\alpha_0} (X \setminus K_\alpha)$ - получилось открытое покрытие.

Выберем конечное: $K_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (X \setminus K_{\alpha_k}) = X \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{n} K_{\alpha_k}$.

Но тогда $\bigcap\limits_{k=0}^{n} K_{\alpha_k} = \varnothing$, противоречие. □

Следствие.

Пусть $K_1 \supset K_2 \supset K_3, \dots$ - непустые компакты.

Тогда $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k \neq \varnothing$.

Доказательство.

Пересечение конечного числа компактов - компакт с максимальным номером $\neq \varnothing$. □

2.13. Билет 24: ! Секвенциальная компактность. Компактность и предельные точки. Секвенциальная компактность компакта.

***Определение* 2.20.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

$K \subset X$ называется секвенциально компактным, если из любой последовательности точек из K можно выбрать подпоследовательность сходящуюся к точке из K.

Теорема 2.11.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $K \subset X$ секвенциально компактно.

Тогда всякое бесконечное множество точек из K имеет хотя-бы одну предельную точку в K.

Доказательство.

Выберем последовательность x_n из этого подмножества, $x_n \in K$, значит можем выбрать сходящуюся подпоследовательность, а сходится она может только к предельной точке. □

Теорема 2.12.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $K \subset X$ - компакт.

Тогда K секвенциально компактно.

Доказательство.

Пусть $x_n \in K$ - последовательность. $D = \{x_n\}$ (множество элементов).

Если D конечно, то какая-то точка встречается в последовательности бесконечное количество раз, выберем подпоследовательность состоящую только из этой точки, она сходится.

Заметим, что в D обязательно есть предельная точка:

Пусть нету. Тогда $D = D \cup \varnothing = D \cup D' = \operatorname{Cl} D \implies D$ замкнуто. Замкнутое подмножество компакт - компакт.

Так-как $\forall n \quad x_n$ не предельная в D, можем выбрать r_n, такие, что $\mathring{B}_{r_n}(x_n) \cap D = \varnothing \implies B_{r_n}(x_n) \cap D = \{x_n\}$.

Покроем D такими шарами. Каждый шар покрывает ровно одну точку и точек бесконечно $\implies$ нельзя выбрать конечное покрытие. Противоречие.

Значит, $\exists a \in D'$.

Возьмём произвольную точку из последовательности x_{n_1}. Пусть $r_k := \min\{\frac{1}{k}, \min\limits_{n<k}\{x_n\}\}$.

Будем брать x_{n_k} как произвольную точку из $\mathring{B}_{r_{k-1}}(a)$. Так-как он ближе к a чем все предыдущие, $n_k > n_{k-1}$, значит получится подпоследовательность.

При этом, $\rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k-1} \implies \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. При этом, $D \subset K \implies \operatorname{Cl} D \subset \operatorname{Cl} K = K$. А $a \in D' \subset \operatorname{Cl} D \subset K \implies a \in K$. □

2.14. Билет 25: Лемма Лебега. Число Лебега. Связь между компактностью и секвенциальной компактностью.

Лемма. (Лебега)

K - секвенциальный компакт. U_α - открытое покрытие K. Тогда $\exists r > 0$, что $\forall x \in K \quad B_r(x)$ целиком содержится в некотором U из U_α.

r называют **чилом Лебега**.

Доказательство.

Пусть такого r не существует. Значит ни одно r не подходит. Рассмотрим последовательность $r_n = \frac{1}{n}$. И для каждого такого радиуса найдем точку x_n, такую что $B_{r_n}(x_n)$ не покрывается целиком никаким U_{α_i}. Получили последовательность $\{x_n\}$ точек секвенциального компакта. Значит можно выбрать $x_{n_k} : \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \in K$.

Найдется $\alpha_0 : a \in U_{\alpha_0}$. Так как U_{α_0} - открытое, то $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset U_{\alpha_0}$.

Так как a - предел последовательность x_{n_k}, то $\exists N : \forall k \geqslant N \quad \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. К тому же если $k \geqslant \frac{2}{\varepsilon} \implies n_k \geqslant \frac{2}{\varepsilon} \implies \frac{1}{n_k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. ($n_k \geqslant k$, так-как n_k задаёт подпоследовательность), а достаточно большое k можем взять всегда.

Теперь запишем цепочку вложений.

$$B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_{n_k}) \subset B_\varepsilon(a) \subset U_{\alpha_0}$$

- первое включение, потому что $\frac{1}{n_k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$
- второе включение, потому что $\rho(a, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$
- третье включение по выбору α_0

Получили, что $B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset U_{\alpha_0}$ - противорчие с тем, как мы выбирали x_{n_k}. Значит нужный r существует.

□

Теорема 2.13. (связь компактности и секвенциальной компакнтоности)

Компактность тоже самое, что и секвенциальная компактность.

Доказательство.

Доказательство того, что если множество компактно, то оно секвенциально компактно было в предыдущем билете.

Доказываем, что если множество K - секвенциально компактно, то оно компактно. Рассмотрим какое-нибудь открытое покрытие U_α. Для этого покрытия и K возьмем r - число Лебега. Теперь рассмотрим другое открытое покрытие K: $\bigcup\limits_{x \in K} B_r(x)$. Чтобы доказать, что K - компакт, надо найти конечное подпокрытие в U_α, для этого найдем конечное подпокрытие из $B_r(x_i)$ и каждый шарик накроем соответсвующим $U_i \implies$ получии коненчное подпокрытие. Осталось найти конечное подпокрытие шариками.

Возьмем $x_1 \in K$ и его шарик $B_r(x_1)$. Пока мы полностью не покроем K будем брать

$$x_i \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_r(x_i)$$

Пусть такой процесс не остановился за конечное число шагов. Значит получили последовательность точек $x_n \in K$. Так как K - секвенциальный компкат, то из x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}. Но x_{n_k} не является фундаментальной последовательностью, так как $\rho(x_i, x_j) \geqslant r$ (r - размер шариков).

Получили противоречие (так как из сходимости следует фундаментальность), значит процесс остановится за конечное число шагов, значит можно выбрать конечное покрытие из шариков, значит можно выбрать конечное покрытие из U_α. □

2.15. Билет 26: ε-сети и вполне ограниченность. Свойства. Связь с компактностью (теорема Хаусдорфа). Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^d$. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

***Определение* 2.21.**

X - метрическое пространство, $A \subset X$. Тогда E - *ε-сеть множества* A если $\forall a \in A \quad \exists e \in E : \rho(a, e) < \varepsilon$.

Также можно переписать в виде: E - ε-сеть множества A если $A \subset \bigcup\limits_{e \in E} B_\varepsilon(e)$.

Менее формально E - ε-приближение множества A.

***Определение* 2.22.**

Множество A называется вполне ограниченным, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ **конечная** ε-сеть множества A.

***Определение* 2.23.**

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^d$.

Замкнутый параллелепипед: $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_d, b_d]$.

Открытый параллелепипед: $(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_d, b_d)$.

Свойства.

1. Из вполне ограниченности следует ограниченность.

Доказательство.
Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_1(e_i) \subset B_R(e_1)$, где $R = 1{+}\max\{\rho(e_1, e_2), \rho(e_1, e_3), \ldots, \rho(e_1, e_n)\}$.
□

2. В $\mathbb{R}^d$ из ограниченоости следует вполне ограниченность.

   Доказательство.
   Любое ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$ можно впихнуть ограниченный параллелепипед. Возьемем $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}$. Разделим параллелелипипед на кубики со стороной δ. А каждый такой кубик покрывается шариком радиуса ε, так как наибольшее расстояние в таком кубике равно $\sqrt{d}\delta$. Получили конечную ε-сеть. □

Теорема 2.14 (Хаусдорфа)**.**

1. Компакт вполне ограничен
2. Если X - полное метрическое пространство и $K \subset X$, из замкнутости и вполне ограниченности следует компактность.

Доказательство.

1. $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_\varepsilon(x)$ - открытое покрытие. Можем выбрать конечное покрытие, в таком случае центры шариков из конечного поркытия будут образовывать конечную ε-сеть.
2. Проверим секвенциальную компактность. Пусть $\{x_n\} \in K$. Надо доказать, что из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, предел которой лежит в K.

   Рассмотрим $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Так как K вполне ограниченно возьмем $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_1}(e_i)$. Так как шариков коненчное число, то в каком-то из них содержится бесконечное кол-во x_i из $\{x_n\}$. Пусть это шарик $B_{\varepsilon_1}(e_l) = V_1$.

   $V_1 \cap K$ - вполне ограничено, значит можно опять покрыть конечным числом шариков : $V_1 \cap K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_{\varepsilon_2}(e_i)$. Также существует $B_{\varepsilon_2}(e_k) = V_2$, который содержит бесконенчное число элементов.

   Так сделаем для каждого ε_i.

   Выпишем таблицу, где в i- ой строке стоят элементы из V_i. Пусть a_{ij} - элемент таблицы. Тогда рассмотрим элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}, \ldots$. Эти точки образуют подпоследовательность $\{x_n\}$. Покажем, что это фундаментальная последовательность.

   Для этого рассмотрим $\rho(a_{kk}, a_{nn}), k < n$. По построению таблицы элемент a_{nn} также лежит в шарике, который был взят на k-ом шагу. Значит $\rho(a_{kk}, a_{nn}) < 2\varepsilon_k = \frac{2}{k}$. Значит данная последовательность фундаментальна $\implies$ имеет предел и так как K - замкнуто, данный предел $\in K$. Значит K - секвенциально компактно, а значит и просто компактно.

□

Замечание.
Если бы K было не замкнуто, то предел мог бы не лежать в K, поэтому не было бы секвенциальной компактности.

Теорема 2.15 (о характеристике компактов в $\mathbb{R}^d$)**.**
В $\mathbb{R}^d$ компактность тоже самое, что и замкнутость и ограниченность.

Доказательство.

- Из компактности замкнутость и ограниченность была в билете 22. Ограниченность ещё можно показать через Хаусдорфа: компакт $\implies$ вполне ограничен $\implies$ ограниче.
- Из ограниченности в $\mathbb{R}^d$ следует вполне ограниченность, а так как $\mathbb{R}^d$ - полно, то по теореме Хаусдофра следует, что замкнутое, вполне ограниченное множество - компактно.

$\square$

Теорема 2.16 (Больцано-Вейерштрасса)**.**

Из всякой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство.

$\{x_n\}$ ограничено $\implies$ $\{x_n\} \subset B_R(a) \subset \overline{B}_R(a)$ - замкнуто и ограничено $\implies$ компакт $\implies$ секвенциально компактно $\implies$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. $\square$

2.16. Билет 27: Определения предела по Коши и по Гейне. Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Критерий Коши.

***Определение* 2.24** (Коши)**.**

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$.

Тогда ($f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ - образ функции).

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad f(\mathring{B}_\delta^X(a) \cap E) \subset B_\varepsilon^Y(b).$$

Аналогичная формулировка (раскрыть образ):

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}_\delta^X(a) \cap E \quad f(x) \in B_\varepsilon^Y(b).$$

И ещё одна аналогичная формулировка (раскрыть шары):

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \setminus \{a\} \quad (\rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon).$$

***Определение* 2.25** (Гёйне)**.**

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall \text{ последовательностей } x_n \in E \setminus \{a\} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = a \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b.$$

Теорема 2.17.

Определения по Коши и по Гёйне эквивалентны.

Доказательство.

Коши $\implies$ Гёйне:

Пусть $x_n \in E \setminus \{a\}$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \implies \forall \delta > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta$.

В частности, у нас δ для ε из Коши. Выберем по нему N.

Тогда $\forall n > N \quad \rho_X(x_n, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x_n), b) < \varepsilon \implies \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

Гёйне $\implies$ Коши:

От противного. Пусть δ не существует $\implies \exists\varepsilon > 0 \quad \forall\delta \quad \exists x \in \mathring{B}_\delta^X(a) \cap E \quad \rho_Y(f(x), b) > \varepsilon$.

В частночти, можем взять $\delta = \frac{1}{n}$.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in E \setminus a \quad \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n} \to 0$, но $\rho_Y(f(x_n, b)) > \varepsilon$. Получается, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, но $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq b$. Противоречие с Гёйне.

□

Следствие.

Предел единственнен.

Доказательство.

Пусть предел не единственнен. Тогда по Гёйне у любой последовательности должны быть оба предела, что невозможно так как предел последовательности единственный, а функция от последовательности - последовательность. □

Теорема 2.18.

Пусть $\langle X, \rho_X\rangle$, $\langle Y, \rho_Y\rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Тогда $\exists r > 0 \quad f|_{B_r(a)\cap E}$ - ограничена.

Доказательство.

Подставим $\varepsilon = \rho_Y(f(a), b) + 1$ в Коши:

$$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}_\delta^X(a) \cap E \quad \rho_Y(f(x), b) < \rho_Y(f(a), b) + 1.$$

Значит, все значения функции в $B_\delta^X(a) \cap E$ лежиат в $B^Y_{\rho_Y(f(a),b)+1}(b)$. □

Теорема 2.19 (Критерий Коши)**.**

Пусть $\langle X, \rho_X\rangle$, $\langle Y, \rho_Y\rangle$ - метрические пространства, Y - полное, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$.

Тогда

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x, y \in \mathring{B}_\delta^X(a) \cap E \quad f(x) \in B_\varepsilon^Y(f(y)).$$

Альтернативная формулировка (раскрытие шаров):

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x, y \in E \setminus \{a\} \quad (\rho_X(x, a) < \delta \wedge \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Доказательство.

Необходимость ($\implies$):

$$\begin{cases} \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon \\ \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(y), b) < \varepsilon \end{cases} \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \rho(f(x), b) + \rho(b, f(y)) < 2\varepsilon$$

Достаточность ($\impliedby$):

Возьмём последовательнсоть $x_n \in E \setminus \{a\}$, $x_n \to a$.

Проверим фундаментальность $f(x_n)$:

Надо:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \quad \rho_Y(f(x_n, f(x_m)).$$

Для данного ε возьмём δ по улсовию, и по δ возьмём N такое, что $\forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon$. Тогда критерий Коши для последовательностей даёт нам фундаментальность $f(x_n)$. Так-как Y - полное, фундаментальная последовательность будет сходится к точке Y.

Пределы на последовательностях получатся одинаковыми: иначе, можем смешать их, получить сходящуюся к a последовательность которая также даст предел, но тогда у сходящейся последовательности есть подпоследовательности с разными пределами. Противоречие. □

Свойства.

Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $\langle Y, \|\cdot\|\rangle$ - нормированное пространство с метрикой $\rho_Y(x,y) = \|x-y\|$.

$E \subset X$, $a \in E'$, $f, g : E \mapsto Y$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =: A$

$\lim\limits_{x\to a} g(x) =: B$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha(x) : E \mapsto \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \lambda$.

Тогда

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda A$
3. $\lim\limits_{x\to a} \|f(x)\| = \|A\|$
4. $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) f(x) = \lambda A$
5. Если в Y есть скалярное произведение, то $\lim\limits_{x\to a} \langle f(x), g(x)\rangle = \langle A, B\rangle$

2.17. Билет 28: ! Непрерывные отображения. Непрерывность композиции. Характеристика непрерывности в терминах прообразов.

***Определение* 2.26.**

Пусть $\langle X, \rho_X\rangle$, $\langle Y, \rho_Y\rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $f : E \mapsto Y$.

f называется непрерывной в точке $a \in E$ если a - изолированная точка (**TODO:** не предельная? Или есть пустая проколотая окрестность в X?), либо $a \in E'$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Теорема 2.20.

Пусть $\langle X, \rho_X\rangle$, $\langle Y, \rho_Y\rangle$, $\langle Z, \rho_Z\rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $f : E \mapsto Y$, $f(E) \subset \tilde{E} \subset Y$, $g : \tilde{E} \mapsto Z$.

Если f непрерывна в $a \in E$, а g непрерывна в $f(a)$, то $g \circ f$ непрерывна в a.

Доказательство.

$$f \text{ непрерывна в } a \implies \forall \delta > 0 \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}^X_\lambda(a) \cap E \quad f(x) \in B^Y_\delta(f(a)) \cap \tilde{E}.$$
$$g \text{ непрерывна в } f(a) \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}^Y_\delta(f(a)) \cap \tilde{E} \quad g(x) \in B_\varepsilon(g(f(a))).$$

Комбинируем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}^X_\lambda(a) \quad g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a))) \implies g \circ f \text{ непрерывна в } a.$$ □

Теорема 2.21.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$.

f непрерывна на $X \iff \forall$ открытого $U \subset Y$ $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ открыт.

Доказательство.

Необходимость ($\implies$):

Пусть $V = f^{-1}(U)$.

Пусть $a \in V$. Так-как U открыто, $\exists \varepsilon > 0 \quad B^Y_\varepsilon(f(a)) \subset U$.

По непрерывности $\exists \delta > 0 \quad f(B^X_\delta(a)) \subset B^Y_\varepsilon(f(a)) \subset U$.

$f(B^X_\delta(a)) \subset U \implies B^X_\delta(a) \subset V \implies a \in \operatorname{Int} V \implies V$ - открытое.

Достаточность ($\impliedby$):

Проверим непрервыность в $a \in X$.

$U := B^Y_\varepsilon(f(a))$ - открытое множество.

Значит, $\exists \delta > 0 \quad B^X_\delta(a) \subset f^{-1}(U) = f^{-1}(B^Y_\varepsilon(f(a)))$

Тоесть, $f(B^X_\delta(a)) \subset B^Y_\varepsilon(f(a))$, а это и есть определение непрерывности в терминах шаров. $\square$

2.18. Билет 29: ! Непрерывный образ компакта. Теорема Вейерштрасса. Непрерывность обратного отображения.

Теорема 2.22.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$, f непрерывна, $K \subset X$ - компакт.

Тогда $f(K)$ компакт.

Доказательство.

Возьмём открытое покрытие $f(K)$, назовём его U_α.

Тогда $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ - открытое покрытие K.

Выберем конечное V_{α_k}.

Тогда $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_{\alpha_k} \implies f(K) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} f(V_{\alpha_k}) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{\alpha_k}$. $\square$

Теорема 2.23 (Вейерштрасса)**.**

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$ - метрическое пространство, $f : X \mapsto \mathbb{R}$, f непрерывна, $K \subset X$ - компакт.

Тогда $\exists u, v \in K \quad \forall x \in K \quad f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$.

Доказательство.

$f(K)$ - компакт $\implies$ замкнут и ограничен.

Ограничен $\implies$ $\inf f$ и $\sup f$ - конечные.

Предположим что $b := \sup f \notin f(K)$.

Тогда можем взять последовательность $x_n \in f(K)$, $x_n \to b$. Тогда b - предельная точка $f(K)$. $b \in f(K)' \subset \operatorname{Cl} f(K) = f(K)$. Противоречие. Значит $b \in f(K) \implies \exists v \in K \quad f(v) = b$. Аналогично для $\inf f$. $\square$

Теорема 2.24.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$, f непрерывная биекция, X - компакт.

Тогда f^{-1} непрерывна.

Доказательство.

Пусть $g := f^{-1}$.

Пусть $U \subset X$ - открытое множество.

Заметим, что $f(U) = Y \setminus f(X \setminus U)$ (так-как биекция).

$X \setminus U$ - замкнутое подмножество компакт $\implies$ компакт $\implies$ $f(X \setminus U)$ замкнуто $\implies$ $Y \setminus f(X \setminus U)$ - открыто.

$f(U) = g^{-1}(U)$, значит для g прообраз открытого открыт $\implies$ g непрерывно. □

2.19. Билет 30: Равномерная непрерывность отображений. Теорема Кантора для отображений метрических пространств.

***Определение* 2.27.**

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $f : E \mapsto Y$.

f называется равномерно непрерывной если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \quad (\rho_X(x, y) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Лемма.

Если f равномерно непрерывна, то f непрерывна.

Доказательство.

Чтобы показать непрерывность в точке a подставим $x = a$ в определение. □

Теорема 2.25 (Кантора)**.**

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $K \subset X$ - компакт, $f : K \mapsto Y$ - непрерывна.

Тогда f равномерно непрерывна.

Доказательство.

Путь $\exists \varepsilon > 0$ для которого ни одно δ не подходит. Возьмём $\delta = \frac{1}{n}$.

Так-как δ не подошло, $\forall n \quad \exists x_n, y_n \in K \quad \rho_X(x_n, y_n) < \delta$ и $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon$.

x_n - последовательность из компакта $\implies \exists x_{n_k}$ - сходящаяся подпоследовательность.

Пусть $a := \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}$.

$\rho(x_{n_k}, a) \to 0$, $\rho(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \to 0$.

Тогда, по $\triangle$, $\rho(y_{n_k}, a) \to 0 \implies \lim\limits_{k \to \infty} y_{n_k} = a$.

По непрерывности, $\exists \lambda > 0 \quad \rho_X(x, a) < \lambda \implies \rho_Y(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Так-как подпоследовательности сходятся $\exists N \quad \rho(x_N, a) < \lambda$, $\rho(y_N, a) < \lambda$ (тут нужен только один элемент каждой последовательности).

Тогда, $\rho(f(x_N), f(y_N)) \overset{\triangle}{\leqslant} \rho(f(x_N), f(a))) + \rho(f(a), f(y_N)) < \varepsilon$. Противоречие с тем как брали x_n, y_n. Значит f равномерно непрерывна. □

2.20. Билет 31: Эквивалентные нормы. Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^d$

***Определение* 2.28.**

Пусть $\langle X, \|\cdot\|_1\rangle$ и $\langle X, \|\cdot\|_2\rangle$ - нормированные пространства.

Их нормы называются эквивалентными, если

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad C_1 \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2 \|x\|_1 .$$

Замечание.

Сходиомсти по эквивалентным нормам равносильны

Доказательство.

$$\|x_n\|_1 \to 0.$$

$$C_1 \|x_n\|_1 \leqslant \|x_n\|_2 \leqslant C_2 \|x\|_2 \to 0 \leqslant \|x_n\|_2 \leqslant 0 \implies \|x_n\|_2 \to 0.$$

□

Замечание.

Эквивалентность норм - отношение эквивалентности.

Доказательство.

$\|x\|_1$ эквивалентна $\|x\|_2 \iff \|x\|_1 = \Theta(\|x\|_2)$. □

Теорема 2.26.

Все нормы на $\mathbb{R}^d$ эквивалентны.

Доказательство.

Докажем эквивалентность всех норм Евклидовой $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{d} x_k^2}$.

Пусть $p(x)$ - произвольная норма. e_k - стандартный базис.

$$\begin{aligned} p(x-y) &= p\left(\sum_{k=1}^{d}(x_k - y_k)e_k\right) \\ &\overset{\triangle}{\leqslant} \sum_{k=1}^{d} p((x_k - y_k)e_k) \\ &= \sum_{k=1}^{d} |x_k - y_k|\, p(e_k) \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{d}(x_k - y_k)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{d} p(e_k)^2} \text{ (по Коши-Буняковскому)} \\ &= C \cdot \|x - y\| \end{aligned}$$

Получили одно неравенство.

Также, получили следующие (где метрика это $\|x-y\|$):

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C} \quad \forall y \in B_\delta(x) \quad |p(x) - p(y)| \overset{\text{свойства нормы}}{\leqslant} p(x-y) \leqslant C\|x-y\| < \varepsilon.$$

Значит, $p(x)$ - непрерывная функция.

Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\}$. Оно замкнуто (у Ани без доказательства, набросок - если норма точки не 1, но к нельзя подойти оставив норму 1, значит не предельня) и ограничено $\Longrightarrow$ S - компакт.

Тогда $p(x)$ принимает своё минимальное на S значение. Пусть $C_1 := \min\limits_{x \in S} p(x)$.

Тогда

$$p(x) = p\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|\right) = \|x\| \, p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geqslant C_1 \|x\|.$$

Получили второе неравенство, значит нормы эквивалентны. □

2.21. Билет 32: ! Линейные операторы. Свойства. Операции с линейными операторами. Матричное задание операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$

***Определение* 2.29.**

Пусть X, Y - линейные пространства над $\mathbb{R}$, $A : X \mapsto Y$.

A называется линейным оператором, если

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in X \quad A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

Замечание.

Аналогичное определение можно дать над $\mathbb{C}$.

Свойства.

1. $A(0_X) = 0_Y$

   Доказательство.

   $$A(0 \cdot x) = 0 \cdot A(x) = 0_Y.$$

   □

2. $A\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k A(x_k)$

   Доказательство.
   Индукция по n. □

***Определение* 2.30.**

Пусть X, Y - линейные пространства, $A, B : X \mapsto Y$ - линейные операторы, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(A \pm B)(x) = A(x) \pm B(x).$$
$$(\lambda A)(x) = \lambda \cdot A(x).$$

Замечание.

Операторы с данными операциями образуют линейное пространство.

Доказательство.

Покажем что в результате операцией получается линейный оператор:

$$\begin{aligned}(A+B)(\alpha x+\beta y) &= A(\alpha x+\beta y)+B(\alpha x+\beta y)\\ &= \alpha A(x)+\beta A(y)+\alpha B(x)+\beta B(y)\\ &= \alpha(A(x)+B(x))+\beta(A(y)+B(y))\\ &= \alpha((A+B)(x))+\beta((A+B)(y))\end{aligned}$$

□

Аналогичным способом можно проверить другие аксиомы линейного пространства.

***Определение* 2.31.**

Пусть X, Y, Z - линейные пространства, $A : X \mapsto Y$, $B : Y \mapsto Z$ - линейные операторы.

Их композиция: $(BA)(x) = B(A(x))$.

***Определение* 2.32.**

Пусть X, Y - линейные пространства, $A : X \mapsto Y$ - линейный оператор.

Тогда, обратный к A оператор $A^{-1} : Y \mapsto X$, такой оператор, что $A^{-1}A = \mathrm{id}_X$, $AA^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

Свойства.

1. Композиция линейный операторов - линейные оператор

   Доказательство.

$$\begin{aligned}(BA)(\alpha x+\beta y) &= B(A(\alpha x+\beta y))\\ &= B(\alpha A(x)+\beta A(y))\\ &= \alpha B(A(x))+\beta B(A(y))\\ &= \alpha(BA)(x)+\beta(BA)(y)\end{aligned}$$

□

2. Если обратный оператор существует, то он единственнен.

   Доказательство.

   Пусть B, C - обратные к A.

$$C = \mathrm{id}_X \cdot C = (BA)C = B(AC) = B\cdot \mathrm{id}_Y = B.$$

□

3. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

   Доказательство.

$$(\frac{1}{\lambda}A^{-1})((\lambda A)(x)) = \frac{1}{\lambda}\cdot A^{-1}(\lambda A(x)) = \frac{1}{\lambda}\cdot\lambda A^{-1}(A(x)) = 1\cdot x = x.$$

   Аналогично в другую сторону. □

4. Множество обратимых линейных операторов из X в X образуют группу по композиции.

Доказательство.

Наличие единицы: id_X

Наличие обратного по определнию

Ассоциативность композиции:

$$(A(BC))(x) = A(BC(x)) = A(B(C(x))) = AB(C(x)) = ((AB)C)(x).$$

Замкнутость:

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$
$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$
$$(A^{-1}B^{-1})(BA)(x) = A^{-1}(B^{-1}(B(A(x)))) = A^{-1}(A(x)) = x.$$

□

Замечание.

Если $A : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$, то можно использовать матричную запись:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Пусть A_i - функция отвечающая за i-ю координату выходного вектора. Тогда $a_{ik} = A_i(e_k)$, где e_k - k-й стандартный базисный вектор.

2.22. Билет 33: ! Норма оператора. Простейшие свойства.

***Определение* 2.33.**

Пусть $\langle X, \|\cdot\|_X \rangle$, $\left\langle Y, \|\cdot\|_y \right\rangle$ - нормированные пространства, $A : X \mapsto Y$ - линейные оператор.

Зададим норму на пространстве операторов:

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y .$$

***Определение* 2.34.**

Если $\|A\| \neq \infty$ опертор называется ограниченным.

Замечание.

Ограниченный оператор $\neq$ ограниченное отображение.

Ограниченное линейное отображение - только тождественный ноль.

Лемма.

$\|A\|$ - действительно норма.

Доказательство.

1. $\|A\| = 0 \implies A = 0$

Доказательство.

$\|A\| = 0 \implies \forall x \in X \quad \|x\|_X \leqslant 1 \implies \|Ax\|_Y = 0 \implies Ax = 0.$

Если $x \neq 0$, то $A(x) = A\left(\|x\|_X \cdot \frac{x}{\|x\|_X}\right) = \|x\|_X \cdot A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) = \|x\|_X \cdot 0 = 0.$

А $A(0) = 0$ всегда, значит $\forall x \in X \quad A(x) = 0 \implies A = 0.$ □

2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$

   Доказательство.

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|(\lambda A)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\lambda| \, \|Ax\|_Y = |\lambda| \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y = |\lambda| \, \|A\| \, .$$ □

3. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|(A + B)x\|_Y \\ &= \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax + Bx\|_Y \\ &\leqslant \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \\ &\leqslant \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y + \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y \\ &= \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$ □

Таким образом, определние нормы выполняется. □

2.23. Билет 34: Эквивалентные определения нормы оператора.

Теорема 2.27.

Пусть $\langle X, \|\cdot\|_X \rangle$, $\langle Y, \|\cdot\|_Y \rangle$ - нормированные пространства, $A : X \mapsto Y$ - линейный оператор. Следующие значения равны:

N_1 $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y$

N_2 $\sup\limits_{\|x\|_X < 1} \|Ax\|_Y$

N_3 $\sup\limits_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y$

N_4 $\sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$

N_5 $\inf\limits_{c > 0} \{ \forall x \in X \ \|Ax\|_Y \leqslant c \, \|x\|_X \quad \}$

Доказательство.

Будем доказывать следующие факты:

1. $N_1 \geqslant N_2$
2. $N_1 \leqslant N_2$
3. $N_1 \geqslant N_3$
4. $N_3 = N_4$

5. $N_4 \geqslant N_5$
6. $N_4 \leqslant N_5$
7. $N_1 \leqslant N_5$

Лемма ($N_1 \geqslant N_2$)**.**
Заметим, что N_2 это супремум по подмножеству элементов участвующих в супрермуме N_1, значит $N_1 \geqslant N_2$.

Лемма ($N_1 \leqslant N_2$)**.**
Возьмём $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\|x\|_X \leqslant 1 &\implies \left\|\frac{x}{1+\varepsilon}\right\|_X < 1 \\
&\implies \left\|A\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)\right\|_Y \leqslant N_2 \\
&\implies \frac{1}{1+\varepsilon}\|Ax\|_Y \leqslant N_2 \\
&\implies \|Ax\|_Y \leqslant (1+\varepsilon)N_2 \\
&\implies N_1 \leqslant (1+\varepsilon)N_2 \text{ так-как верно для произвольного } x \text{ с } \|x\|_X \leqslant 1 \\
&\implies N_1 \leqslant N_2 \text{ предельный переход при } \varepsilon \to 0
\end{aligned}$$

□

Лемма ($N_1 \geqslant N_3$)**.**
Заметим, что N_3 это супремум по подмножеству элементов участвующих в супрермуме N_1, значит $N_1 \geqslant N_3$.

Лемма ($N_3 = N_4$)**.**

$$\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \left\|\frac{Ax}{\|x\|_X}\right\|_Y = \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \implies N_3 = N_4.$$

Лемма ($N_4 \geqslant N_5$)**.**

$$\|Ax\|_Y \leqslant N_4\|x\|_X \implies \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant N_4 \implies N_5 \leqslant N_4.$$

Лемма ($N_4 \leqslant N_5$)**.**
Предположим $N_5 < N_4$, тогда $\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant N_5 < N_4$, что противоречит тому, что N_4 - наименьшая верхня грань. Значит, $N_5 \geqslant N_4$.

Лемма ($N_1 \leqslant N_5$)**.**
Пусть $\|x\|_X \leqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_Y \leqslant N_5\|x\|_X &\implies \|Ax\|_Y \leqslant N_5 \\
&\implies N_1 \leqslant N_5 \text{ так-как верно для любого } x \text{ с } \|x\|_X \leqslant 1
\end{aligned}$$

Следствие.

1. $\|Ax\| \leqslant \|A\|\,\|x\|$
2. $\|BA\| \leqslant \|B\|\,\|A\|$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|B(A(x))\| &\leqslant \sup_{\|y\|\leqslant\|A\|}\|By\| \\ &= \sup_{\|y\|\leqslant\|A\|}\left\|\|A\|\,B\left(\frac{y}{\|A\|}\right)\right\| \\ &= \|A\|\sup_{\|y\|\leqslant 1}\|By\| \\ &= \|A\|\,\|B\|\end{aligned}$$

□

2.24. Билет 35: Свойства, эквивалентные ограниченности линейного оператора. Оценка нормы через сумму квадратов. Ограниченность операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$

Теорема 2.28.

Пусть $A : X \mapsto Y$ - линейный опертор.

Следующие условия равносильны (с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$ в обоих пространствах):

1. A - ограниченный оператор
2. A непрерывен в 0
3. A непрерывен
4. A равномерно непрерывен

Доказательство.

$4 \implies 3 \implies 2$ очевидно.

$1 \implies 4$:

Хотим получить

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x, y \in X \quad \|x - y\|_X < \delta \implies \|Ax - Ay\|_Y < \varepsilon.$$

Возьмём $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$.

$$\begin{aligned}\|Ax - Ay\| &= \|A(x - y)\| \\ &\leqslant \|A\|\,\|x - y\| \\ &< \|A\|\,\delta \\ &= \|A\|\,\frac{\varepsilon}{\|A\|} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

$2 \implies 1$:

Знаем, что $A(0_X) = 0_Y$ независимо от A.

Имеем

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \|x\|_X < \delta \implies \|Ax\|_Y < \varepsilon.$$

Возьмём $x \in X$, $\|x\| < 1$.

$$\|x\| < 1 \implies \|\delta x\| < \delta \implies \|A(\delta x)\| < \varepsilon.$$

Тогда $\|A(\delta x)\| < \varepsilon \implies \delta \|Ax\| < \varepsilon \implies \|Ax\| < \frac{\varepsilon}{\delta} \implies \|A\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}$, так-как норма - супремум по таким x. □

Теорема 2.29.

Пусть $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ - линейный оператор, норма Евклидова.

Тогда

$$\|A\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Доказательство.

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2 \underset{\text{Буняковский}}{\overset{\text{Коши}}{\leqslant}} \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) = \|x\|^2 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

Значит,

$$\|A\| = \sup\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sqrt{\frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2}} = \sqrt{\frac{\|x\|^2 \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}{\|x^2\|}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$ □

2.25. Билет 36: ! Путь. Носитель пути. Простой путь. Гладкий путь. Эквивалентные пути. Определение кривой.

***Определение* 2.35.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство. $\gamma : [a, b] \mapsto X$ - непрерывная функция.

Тогда γ называется путём.

Начало пути - $\gamma(a)$

Конец пути - $\gamma(b)$

Носитель пути - $\gamma([a, b]) \iff \operatorname{Im}\gamma$.

Путь называется замкнутым если $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Путь называется простым если $\nexists t \neq s \in (a, b) \quad \gamma(t) = \gamma(s)$ (путь простой если γ - инъекция на (a, b), но может быть $\gamma(a) = \gamma(b)$).

Противоположный путь: $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$, $\tilde{\gamma} : [a, b] \mapsto X$.

Пути $\gamma : [a, b] \mapsto X$ и $\gamma' : [c, d] \mapsto X$ называются эквивалентными (обозначается $\gamma \sim \gamma'$), если $\exists \tau : [a, b] \mapsto [c, d]$, непрерывное строго монотонное отображение, такое, что $\tau(a) = c$ и $\tau(b) = d$, такое, что $\gamma = \gamma' \circ \tau$.

***Определение* 2.36.**

Пусть $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ - путь.

Пусть γ_i - i-я координатная функция γ.

γ называется r-гладким путём, если $\forall i \quad \gamma_i \in C^r[a, b]$.

Просто гладкий - $r = 1$.

***Определение* 2.37.**

Путь называется кусочно-гладким если его можно разбить на конечное число гладких кусков.

Замечание.

Эквивалетность путей - отношение эквивалентности.

Доказательство.

Рефлексивность очевидно.

Симметричность: подойёдт τ^{-1}, все нужные свойства когда-то доказывались отдельной теоремой.

Транзитивность: подойдёт композиция нужных отображений. □

***Определение* 2.38.**

Кривая - класс эквивалентности путей.

Конкретный представитель класса - параметризация кривой.

Носитель кривой - носитель путей этого класса.

2.26. Билет 37: ! Длина пути и длина кривой. Определение и простейшие свойства. Аддитивность длины кривой.

***Определение* 2.39.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $\gamma : [a, b] \mapsto X$ - называется путём, если непрерывно.

Длина путь $\ell(\gamma) = \sup\limits_{n,t} \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k))$, где t - разбиение отрезка $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

А супремум берётся по всем возможным таким разбиениям.

Свойства.

1. Длины эквивалентных путей равны

   Доказательство.

   Пусть пути $\gamma, \tilde{\gamma}$ эквивалентны с преобразование τ: $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$. Тогда разбиение для одного можно перевести в разбиение для другого не изменив суммы.

   $\tilde{t}_k = \tau(t_k)$.

   $\gamma(\tilde{t_k} = \gamma(t_k) \implies$ получили разбиение для $\tilde{\gamma}$ дающую те-же значения $\implies$ ту-же сумму $\implies \ell(\tilde{\gamma}) \geqslant \ell(\gamma)$ (так-как хотя-бы такая найдётся, возможно есть больше).

   Проведём аналогичную операция с τ^{-1}, получим неравенство в другую строну $\implies$ равенство.

   □

2. Длины противоположных путей равны

   Доказательство.

   Рассмотрим разбиение в противоположном порядке □

3. $\ell(\gamma) \geqslant \rho(\gamma(a), \gamma(b))$

Доказательство.
Как часть супремума будет рассмотрено разбиение $n = 2$, $t_0 = a$, $t_1 = b$. □

4. $\ell(\gamma)$ больше либо равно длинне любой ломаной вписанной в путь

Доказательство.
Длина ломаной задаётся каким-то конкретным разбиением которое будет рассмотрено в супремуме. □

***Определение* 2.40.**
Длина кривой - длина её произвольной параметризации.

Теорема 2.30 (об аддитивности длины кривой)**.**
Пусть X - метрическое пространство, $\gamma : [a, b] \mapsto X$ - путь, $c \in (a, b)$.

Тогда $\ell(\gamma) = \ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right)$.

Доказательство.
$\geqslant$:

Возьмём разбиение s_i для $[a, c]$ и t_i для $[c, b]$.

Заметим, что если их сконкатенировать, получим убрав дублирование c, получим разбиение для $[a, b]$, из чего получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(\gamma(s_{k-1}), \gamma(s_k)) + \sum_{k=1}^{m} \rho(\gamma(t_{k-1}, t_k)) \leqslant \ell(\gamma).$$

Так-как это верно для всех разбиений, можем последовательно приписать супремумы и получить $\ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right) \leqslant \ell(\gamma)$.

$\leqslant$:

Возьмём t_i - разбиение $[a, b]$.

Если $\exists i \quad t_i = c$, то можем разбить по нему, и получить равенство.

Если не сущесвует, то $\exists j \quad t_j < c < t_{j+1}$.

По $\triangle$: $\rho(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \leqslant \rho(\gamma(t_j), \gamma(c)) + \rho(\gamma(c), \gamma(t_{j+1}))$, значит можем добавить между ними c, не укоротив путь.

Значит,

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{j} \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) + \rho(t_j, c)\right) + \left(\rho(c, t_{j+1}) + \sum_{k=j+1}^{n} \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k))\right).$$

Перейдём к супремуму слева, и заменим ломаную на длину пути справа:

$$\ell(\gamma) \leqslant \ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right).$$

□

2.27. Билет 38: Длина кривой, заданной параметрически(с леммой). Длина графика функции и длина кривой, заданной в полярных координатах.

В этом билете все пути - в $\mathbb{R}^m$ с Евклидовой метрикой.

***Определение* 2.41** (повтор)**.**
Пусть $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ - путь.

Пусть γ_i - i-я координатная функция γ.

γ называется r-гладким путём, если $\forall i \quad \gamma_i \in C^r[a, b]$.

Просто гладкий - $r = 1$.

Лемма.
Пусть $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ - гладкий путь.

Пусть $\Delta \subset [a, b]$ - отрезок, $\ell(\Delta)$ - его длина.

$m_\Delta^{(i)} := \min\limits_{t\in\Delta} |\gamma'(t)|$

$M_\Delta^{(i)} := \max\limits_{t\in\Delta} |\gamma'(t)|$

$m_\Delta := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m \left(m_\Delta^{(i)}\right)^2}$

$M_\Delta := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m \left(M_\Delta^{(i)}\right)^2}$

Тогда,

$$m_\Delta \cdot \ell(\Delta) \leqslant \ell(\gamma|_\Delta) \leqslant M_\Delta \cdot \ell(\Delta).$$

Доказательство.
Пусть t_i - разбиение Δ.

$a_k^{(i)} = \gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})$

$a_k = \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m \left(a_k^{(i)}\right)^2}$.

По теореме Лагранжа: $\exists c_{ik} \in (t_{k-1}, t_k) \quad a_k^{(i)} = \gamma'(c_{ik})(t_k - t_{k-1})$.

Тогда, $\left|a_k^{(i)}\right| = |\gamma'(c_{ik})| (t_k - t_{k-1}) \leqslant M_\Delta^{(i)}(t_k - t_{k-1})$.

$$\begin{aligned} a_k = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\left|a_k^{(i)}\right|\right)^2} &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(M_\Delta^{(i)}\right)^2 (t_k - t_{k-1})^2} \\ &= \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 \sum_{i=1}^m \left(M_\Delta^{(i)}\right)^2} \\ &= M_\Delta(t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

Аналогично для $a_k \geqslant m_\Delta(t_k - t_{k-1})$.

$$m_\Delta \ell(\Delta) = m_\Delta \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^n a_k \leqslant M_\Delta \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = M_\Delta \ell(\Delta).$$

Перейдём к супремому для t:

$$m_\Delta \ell(\Delta) \leqslant \ell(\gamma|_\Delta) \leqslant M_\Delta \ell(\Delta). \qquad \square$$

Теорема 2.31 (Длина кривой заданной параметрически)**.**

Пусть $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ - гладкий путь.

Тогда

$$\ell(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \int\limits_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \ldots + \gamma_n(t)^2} dt.$$

Доказательство.

Возьмём t - разбиение $[a, b]$.

$d_k := t_k - t_{k-1}$.

$m_k := m_{[t_{k-1}, t_k]}$

$M_k := M_{[t_{k-1}, t_k]}$

Тогда, по лемме значем

$$m_k d_k \leqslant \ell\left(\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}\right) \leqslant M_k d_k.$$

По линейности интеграла:

$$m_k d_k \leqslant \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\|\, dt \leqslant M_k d_k.$$

(m_k это норма минимума, которая точно не больше нормы произвольного значения, аналогично для M_k).

Просумируем по k:

$$\sum_{k=1}^n m_k d_k \leqslant \ell\left(\gamma\right) \leqslant \sum_{k=1}^n M_k d_k.$$

$$\sum_{k=1}^n m_k d_k \leqslant \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \leqslant \sum_{k=1}^n M_k d_k.$$

Покажем что $\sum\limits_{k=1}^n (M_k - m_k) d_k \to 0$ при $|\tau| := \max\limits_k d_k \to 0$.

Дальше идёт страшная выкладка из конспекта Ани, есть есть док-во красивее, просьба сказать...

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)d_k &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(M_k - m_k)(M_k + m_k)}{M_k + m_k}d_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{M_k^2 - m_k^2}{M_k + m_k}d_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{M_k + m_k}\sum_{i=1}^{m}\left(\left(M_k^{(i)}\right)^2 - \left(m_k^{(i)}\right)^2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(M_k^{(i)}\right)^2 - \left(m_k^{(i)}\right)^2}{M_k + m_k}d_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{M_k^{(i)} + m_k^{(i)}}{M_k + m_k}\left(M_k^{(i)} - m_k^{(i)}\right)d_k \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(M_k^{(i)} - m_k^{(i)}\right)d_k \text{ т. к. евклидова норма всегда больше координаты} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\omega_{\gamma_i'}(|\tau|)d_k \textbf{TODO: } \text{ какой-то нетривиальный факт} \\
&= (b-a)\sum_{i=1}^{m}\omega_{\gamma_i'}(|\tau|)
\end{aligned}$$

γ гладкий $\implies \forall i \quad \gamma_i \in C^1[a,b] \implies \gamma_i' \in C[a,b] \implies \lim\limits_{|\tau|\to 0}\omega_{\gamma_i'}(|\tau|) = 0.$

Значит, так-как $|a-b| \leqslant \max\{\max a - \min b, \max b - \min a\}$:

$$\left|\ell(\gamma) - \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)d_k \to 0.$$

Заметим, что значения длины и интеграла не зависят от выбранного разбиения.

Если предположить что они не равны, то можем по их разности выбрать такое t, что сумма получится меньше. Противоречие, значит равны. □

***Определение* 2.42.**

Пусть $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. Длиной графика f называется длина пути

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Следствие.

Если $f \in C[a,b]$, то длина графика f равна

$$\int\limits_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}dt.$$

Доказательство.

$$\gamma_1(t) = t \implies \gamma_1'(t) = 1.$$
$$\gamma_2(t) = f(t) \implies \gamma_2'(t) = f'(t).$$ □

***Определение* 2.43.**

Если функция задана в полярных координатах как $r : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}$, то задаваемый ей путь -

$$\gamma(\varphi) = \begin{bmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Следствие.

Пусть функция в полярных координатах задана как $r \in C[\alpha, \beta]$. Тогда длина её графика:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}.$$

Доказательство.

$$\gamma_1(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi \implies \gamma_1'(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi + r'(\varphi)\cos\varphi.$$
$$\gamma_2(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \implies \gamma_2'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi.$$
$$\gamma_1'(\varphi)^2 + \gamma_2'(\varphi)^2 = (r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2.$$

□

2.28. Билет 39: Связность и линейная связность. Теорема Больцано–Коши. Связность отрезка и линейно связного множества.

***Определение* 2.44.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется связным, если для всех открытых непересекающихся $U, V \subset X$ верно

$$A \subset U \cup V \implies \left[\begin{array}{l} A \subset U \\ A \subset V \end{array}\right..$$

(Неформально: A нельзя разбить на два открытых непересекающихся множества)

Теорема 2.32.

Непрерывный образ связного множества связен

Доказательство.

Пусть f - непрерывная функция, E - связное множество.

Пусть $f(E) \subset U \cup V$, где U, V - открытые непересекающиеся.

Тогда $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ - открытые непересекающиеся. И при этом, $E \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Тогда E подмножество одного из них, и $f(E)$ подмножество соответсвующего образа. □

Теорема 2.33 (Больцано-Коши).

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $E \subset X$ связно, $f : E \mapsto \mathbb{R}$, $a, b \in E$.

$A := f(a)$ $B := f(b)$

Тогда, $\forall A < C < B \quad \exists c \in E \quad f(c) = C$.

Доказательство.

$U := (-\infty, C)$, $V := (C, \infty)$ - открытые непересекающиеся.

Предположим что такого c не существует. Тогда $C \notin f(E)$.

Тогда $f(E) \subset U \cup V$. Но при этом $A \in U$, $B \in V$, значит $f(E) \not\subset U$ и $f(E) \not\subset V$, противоречие со связностью $f(E)$ как непрерывного образа связного E. □

Теорема 2.34.

Отрезок связен.

Доказательство.

Пусть $[a, b] \subset U \cup V$. Без ограничения общности, $b \in V$.

Предположим что $S := [a, b] \cap U \neq \varnothing$.

$s := \sup S$.

Если $s \in V$:

$$s \in V \overset{\text{открытость}}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon > 0 \quad (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset V \implies (s - \varepsilon, s] \cap U = \varnothing \implies \sup S \leqslant s - \varepsilon < s.$$

Если $s \in U \implies s \in S$, то $s \neq b$:

$$s \in U \implies \exists \varepsilon \quad (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset U \cap [a, b] \implies \sup S \geqslant s + \varepsilon > s.$$

($\exists \varepsilon \quad (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset U$ так-как U открыто, и всегда можем ещё уменьшить чтобы получилось $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset [a, b]$).

В обоих случаях получили противоречие, значит $S = \varnothing \implies [a, b] \subset V$. Значит, отрезок связен. $\square$

Следствие.

Носитель пути - связное множество.

Доказательство.

Отрезок - связное множество, носитель пути - непрерывный образ отрезка. $\square$

***Определение* 2.45.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется линейно связным, если $\forall x, y \in A \quad \exists \gamma : [a, b] \mapsto A \quad \begin{cases} \gamma(a) = x \\ \gamma(b) = y \\ \gamma \text{ - путь} \end{cases}$,

Теорема 2.35.

Линейно связное множество связно

Доказательство.

Пусть нет, $A \subset U \cup V$ - открытые непересекающиеся, $A \cap U, A \cap V \neq \varnothing$.

Возьмём $x \in A \cap U$, $y \in A \cap V$.

Возьмём γ - путь от x до y.

$\gamma([a, b]) \subset U \cup V$, $\gamma(a) \in U$, $\gamma(b) \in V$. Противоречие со связностью носителя. $\square$

***Определение* 2.46.**

Область - открытое линейно связное множество.

Замечание.

Если U открыто, то U связно $\iff U$ линейно связно. (без доказательства)

3. Числовые и функциональные ряды

3.1. Билет 40: Ряды в нормированных пространствах. Простейшие свойства. Покоординатная сходимость ряда в $\mathbb{R}^d$

***Определение* 3.1.** X - нормированное пространство, $x_1, x_2, \dots \in X$ - вектора из пространства

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ - ряд

Здесь и далее Храбров обозначал $x_n^{(i)}$ - i-ая координата n-ого члена ряда.

***Определение* 3.2.** Частичная сумма ряда: $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_n$. $S_n \in X$

***Определение* 3.3.** Ряд сходится, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

То есть существует предел частичных сумм.

Теорема 3.1 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Доказательство. $x_n = S_n - S_{n-1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n - \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

(оба предела существуют, так что можно разбивать предел разности на разность пределов)

□

Свойства.

1. Единственность суммы

   Сумма - это предел, а предел единственнен

2. Линейность суммы

   Если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\alpha x_n + \beta y_n)$ сходится и равен $\alpha \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$

   Доказательство. Расписать то же самое через частичные суммы

   $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_{n\to+\infty} \alpha S_{x,n} + \beta S_{y,n} = \alpha \lim_{n\to+\infty} S_{x,n} + \beta \lim_{n\to+\infty} S_{y,n} = \alpha \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$

   □

3. Расстановка скобок

   Если ряд сходился, то после расстановки скобок он тоже будет сходится к той же сумме.

   Было: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + \dots = S$

   Стало: $x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + x_8 + (x_9 + x_{10}) + \dots = S$ равно той же сумме, если она была

Доказательство. Когда мы расставили скобки, мы от частичных сумм $S_1, S_2, \dots,$ у которых был предел, перешли к частичным суммам $S_1, S_3, S_7, S_8, S_{10}$ (в примере выше), то есть взяли подпоследовательность частичных сумм, а она имеет тот же предел, что и сама последовательность, если он был □

Замечание. Можно расставить скобки, чтобы ряд СТАЛ СХОДИТСЯ: пример для $X = \mathbb{R}$:

$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$ – расходится

$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots = 0 + 0 + 0$ – сходится, равен 0

4. Можно выкинуть/добавить конечное число членов ряда, и это не повлияет на сходимость, но может изменить сумму

Доказательство. (очевидно, можно скипать, если понятно)

Добавление:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = S_x$$

Тогда

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1} + y_k + x_1 + x_2 + x_3 + \dots = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} y_n}_{S_y} + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = S_y + S_x$$

Сумму конечного числа y_n можно посчитать, а сумма x_n существует по условию, так что и итоговая сумма тоже есть.

Убирание: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n = S$, $\sum\limits_{n=m}^{+\infty} x_n = ?$

Частичные суммы первого: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, второго: $S'_n = \sum\limits_{k=m}^{m+n-1} x_k$

Тогда: $S'_n = S_{n+m-1} - S_{m-1}$

Притом S_{m-1} - какой-то элемент из X, фиксированный.

Но тогда, раз $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, то $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} (S_{n+m-1} - S_{m-1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$ (сдвинули начало и вычли константу), □

5. Покоординатная сходимость равносильна сходимости в $\mathbb{R}^d$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ сходится $\iff \forall i : 0 \leqslant i \leqslant d$, $\sum\limits_{n=1} x_n^{(i)}$ сходится

Доказательство. Надо расписывать через частичные суммы.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \\ x_k^{(3)} \\ \vdots \\ x_k^{(d)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(1)} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(2)} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(3)} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(d)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_n^{(1)} \\ S_n^{(2)} \\ S_n^{(3)} \\ \vdots \\ S_n^{(d)} \end{pmatrix}$$

Чтобы $\sum x_n$ сходился, нужно, чтобы $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Чтобы была покоординатная сходимость, нужно, чтобы $\forall i : 0 \leqslant i \leqslant d$, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{(i)}$.

Звучит тавтологично, если честно, но вообще, если бы у нас было не $\mathbb{R}^d$, то не всегда верно, что существование предела равносильно существованию предела координат. Но вот в $\mathbb{R}^d$ у нас была отдельна теорема, по которой это верно.

В нашем конспекте 2.7

В конспекте Ани она на странице 32, теорема 2.6

Думаю, на неё будет достаточно сослаться.

$\square$

3.2. Билет 41: Критерий Коши. Абсолютная сходимость. Группировка членов ряда. Свойства

Теорема 3.2 (Критерий Коши)**.**

X – полное нормированное пространство.

$$\sum a_n \text{ сходится } \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > n > N \quad \left\|\sum_{k=n}^{m} a_k\right\| < \varepsilon$$

Доказательство.

$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

$\sum a_n$ – сходится $\iff \exists$ конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

$\iff$ (полнота X) S_n – фундаментальная последовательность

$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \|S_m - S_n\| < \varepsilon$

$\|S_m - S_{n-1}\| = \left\|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k\right\|$ $\square$

***Определение* 3.4** (Абсолютная сходимость)**.**

$x_n \in X$ – нормированное пространство

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – абсолютно сходится, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ – сходится

Теорема 3.3.

X – полное нормированное пространство

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – абсолютно сходится, то

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – сходится

   Доказательство.

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ – сходится $\implies$ (Критерий Коши для $\|x_n\|$) $\forall \varepsilon \quad \exists N \quad m, n \geqslant N \quad \sum\limits_{k=n}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$

   $\varepsilon > \sum\limits_{k=n}^{m} \|x_k\| \geqslant \left\|\sum\limits_{k=n}^{m} x_k\right\|$

$\Longrightarrow \quad \forall \varepsilon \quad \exists N \quad \forall n, m \geqslant N \quad \left\| \sum\limits_{k=n}^{m} x_k \right\| < \varepsilon$

$\Longrightarrow$ (Критерий Коши для x_n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – сходится □

2. $\left\| \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$

   Доказательство.
$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$$
$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \to \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \text{ и } \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \to \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$$
$$\Longrightarrow \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$$
□

Определение* 3.5** (Группировка членов ряда).***
$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4 + x_5) + x_6 + (x_7 + x_8) + \ldots$

Замечание.

1. Если исходный ряд сходился, то ряд получившийся после группировки сходится к той же сумме.
2. В обратную сторону верно не всегда

   Пример. $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$

Теорема 3.4 (Когда верно в обратную сторону)**.**
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$

1. Если $\lim x_n = 0$ и количество слагаемых в каждой группе $\leqslant M$

   Доказательство.
   S_{n_k} – подпоследовательность чатичных сумм $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = S$

   (группировка – всего лишь выбор подпоследовательности частичных сумм)
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n_k}) + (x_{n_k+1} + \ldots + x_{n_k+r} + \ldots$$
$$\|S_{n_k+r} - S\| = \|S_{n_k} - S + x_{n_k+1} + \ldots + x_{n_k+r}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \ldots + \|x_{n_k+r}\|$$
   Выберем K, т.ч. если $k \geqslant K$, то $\|S_{n_k} - S\| < \varepsilon$

Выберем N, т.ч. если $n \geqslant N$, то $\|x_n\| < \varepsilon$

Если выполняется и то, и то, тогда:

$\|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \ldots + \|x_{n_k+r}\| < \varepsilon(M+1)$

Значит $\forall \varepsilon > 0$ мы можем выбрать N_1, т.ч. $\forall n \geqslant N_1 \quad \|S_n - S\| < \varepsilon$ □

2. Для числовых рядов. Если все члены ряда в группе одного знака.

Доказательство.

$S_{n_k} \to S$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall k \geqslant K \quad |S_{n_k} - S| < \varepsilon$

$N := n_K$

если $n \geqslant N$:

для некоторого k: $n_k \leqslant n < n_{k+1}$

$S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + ... + x_n$

если в группе все члены $\geqslant 0$, то $S_n \geqslant S_{n_k}$

$S_n = S_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}-1} - ... - x_{n+1}$

$S_{n_{k+1}} \geqslant S_n$

Тогда $|S_n - S| < \varepsilon$

Если в группе отрицательные члены

$S_{n_k} \geqslant S_n \geqslant S_{n_{k+1}}$

Тогда в этом случае тот же вывод

$|S_n - S| < \varepsilon$

□

3.3. Билет 42: ! Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Признак сравнения. Следствие.

Теорема 3.5.

Если $a_n \geqslant 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\iff$ частичные суммы ограничены.

Доказательство.

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n+1} = S_{n+1}$

т.е. S_n монотонно возрастает.

$\implies$ S_n имеет конечный предел

$\iff$ (свойство монотонно возрастающей последовательности) S_n – ограничена □

Теорема 3.6 (Признак сравнения)**.**

$0 \leqslant a_n \leqslant b_n$

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится $\implies$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – расходится

Доказательство.

1. $A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant B_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится

   $\implies B_n$ – ограничены

   $\implies A_n$ – ограничены

   $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится

2. От противного.

   Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится

   $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится

   $\implies$ противоречие.

□

Следствие.

$a_n, b_n \geqslant 0$

1. $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится.

2. $a_n \sim b_n \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ведут себя одинакого.

Доказательство.

1. $0 \leqslant a_n \leqslant Cb_n$ и $\sum Cb_n = C\sum b_n$ – сходится

   $\implies$ (предыдущая теорема) $\sum a_n$ – сходится

2. При достаточно больших n: $\frac{b_n}{2} \leqslant a_n \leqslant 2b_n$

   Из $a_n \leqslant 2b_n$: $\sum b_n$ – сходится $\implies \sum a_n$ – сходится

   Из $\frac{b_n}{2} \leqslant a_n$: $\sum a_n$ – сходится $\implies \sum b_n$ – сходится

□

3.4. Билет 43: ! Признак Коши (с $\overline{\lim}$). Примеры.

Теорема 3.7 (признак Коши).

$a_n \geqslant 0$

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ начиная с некоторого места, то ряд расходится
2. Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$ начиная с некоторого места, то ряд сходится
3. $q' := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$

   Если $q' < 1$ сходится, то и ряд сходится.

   Если $q' > 1$ расходится, то и ряд расходится.

Доказательство.

Судя по формулировке билета, первые два пункта доказывать не нужно, но доказательство у них быстрое, так что пусть тоже будет.

1. $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1 \implies a_n \geqslant 1 \implies a_n \not\to 0$, не выполняется необходимое условие. ‘
2. $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \implies a_n \leqslant q^n$

   Воспользуемся признаком сравнения с $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$. Это сумма геометрической прогрессии, знаменатель которой меньше 1, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
3. (a) $\overline{\lim} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q' > 1 \implies$ найдется подпоследовательность a_{n_k}, такая что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = q' > 1$

   $\implies$ найдется такая окрестность, что при достаточно больших k все $a_{n_k} \in (1, \dots)$ (важно, что промежуток точно больше 1)

   $\implies a_{n_k} > 1$

   $\implies a_n \not\to 0$, ряд расходится

   (b) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q' < 1$

   $\implies$ (по определению верхнего предела) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k} = q' < 1$

   $\implies$ можно выбрать окрестность $(\dots, \frac{q'+1}{2}) \subset (\dots, 1)$, такую что начиная с некоторого момента все $\sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k}$ попадают в эту окрестность, то есть $\sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k} < \frac{q'+1}{2} < 1$

   $\implies \sqrt[k]{a_k} < \frac{q'+1}{2} < 1$ при достаточно больших k, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по доказанному в пункте 2.

$\square$

Пример.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, при $x > 0$

$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}}$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}} \sim \frac{x}{\frac{n}{e}} = \frac{xe}{n} \to 0$

$\implies$ ряд сходится

Замечание.

Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится

   $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ – сходится

   $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n+1}} = 1$

3.5. Билет 44: ! Признак Даламбера. Примеры. Связь между признаками Коши и Даламбера.

Теорема 3.8 (признак Даламбера)**.**

$a_n > 0$

1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится.
2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$, то ряд сходится.
3. Пусть $d^* = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

   Если $d^* < 1$, то ряд сходится.

   Если $d^* > 1$, то ряд расходится.

Доказательство.

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \implies a_n \leqslant a_{n+1}$

   $\implies$ начиная с некоторого места члены ряда возрастают, $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant ...$

   $\implies a_n \not\to 0 \implies$ ряд расходится

2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d \implies a_{n+1} \leqslant d \cdot a_n$ начиная с некоторого места.

   $\implies a_{n+k} \leqslant d^k \cdot a_n$ при всех k

   $\implies$ при всех $k \geqslant n$ $a_k \leqslant d^{k-n} \cdot a_n = d^k \cdot \frac{a_n}{d^n} = d^k \cdot const$

   $\implies a_k = \mathcal{O}(d^k)$

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d^k$ – это сумма геометрической прогрессии, знаменатель которой меньше 1, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d^k$ сходится, тогда по признаку сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

3. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* < 1$

   $d := \frac{d^*+1}{2} < 1$

   $\implies$ начиная с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} < d < 1 \implies$ попали в первый пункт, сходится

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* > 1$

   $\implies$ с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$

   $\implies$ ряд расходится.

□

Замечание.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ – сходится

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$

Пример.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, при $x > 0$

<u>По Даламберу.</u>

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0$

$\implies$ ряд сходится

<u>По Коши.</u>

$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}}$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}} \sim \frac{x}{\frac{n}{e}} = \frac{xe}{n} \to 0$

$\implies$ ряд сходится

Теорема 3.9 (Связь между признаками Коши и Даламбера)**.**

$a_n > 0$

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: d$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ и он равен d

Доказательство.

Будем рассматривать не сами выражения, а их логарифмы.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \iff \lim\limits_{n\to\infty} \ln(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \ln d$

Хотим доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \ln d$

Применяем Штольца!

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1)-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \ln d$

□

3.6. Билет 45: Связь между суммами и интегралами. Интегральный признак.

Теорема 3.10.

Если $f : [m, n] \mapsto \mathbb{R}$ монотонна, то $|\sum\limits_{k=m}^{n} f(k) - \int\limits_{m}^{n} f(x)dx| \leqslant \max\{|f(m)|, |f(n)|\}$

Доказательство.

Не умаляя общности $f \geqslant 0$ и монотонно убывает.

Здесь удобно нарисовать убывающий график и изобразить суммы двумя видами столбиков: когда начинаем от m и столбики вылезают над графиком, и когда от $m+1$ столбики под графиком.

$\sum\limits_{k=m}^{n-1} f(k) \geqslant \int\limits_{m}^{n} f(x)dx \geqslant \sum\limits_{k=m+1}^{n} f(k)$

$\int\limits_{m}^{n} f(x)dx \geqslant \sum\limits_{k=m+1}^{n} f(k) \implies \int\limits_{m}^{n} f(x)dx - \sum\limits_{k=m}^{n} f(k) \geqslant -f(m)$

$\int\limits_{m}^{n} f(x)dx - \sum\limits_{k=m}^{n} f(k) = -|\int\limits_{m}^{n} f(x)dx - \sum\limits_{k=m}^{n} f(k)| \geqslant -f(m) \implies$

$|\int\limits_{m}^{n} f(x)dx - \sum\limits_{k=m}^{n} f(k)| \leqslant f(m)$

$\sum\limits_{k=m}^{n-1} f(k) \geqslant \int\limits_{m}^{n} f(x)dx \implies \sum\limits_{k=m}^{n-1} f(k) - \int\limits_{m}^{n} f(x)dx \geqslant 0 \implies$

$\sum\limits_{k=m}^{n} f(k) - \int\limits_{m}^{n} f(x)dx \geqslant f(n) \geqslant 0$

□

Теорема 3.11 (Интегральный признак сходимости).

$f : [1, +\infty) \mapsto \mathbb{R},\ f \geqslant 0$ монотонно убывает.

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ – сходится $\iff S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ ограничены.

$\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ – сходится $\iff F(n) := \int\limits_{1}^{n} f(x)dx$ ограничены.

По предыдущей теореме $|S_n - F(n)| \leqslant f(1)$

□

Пример.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Если $p \leqslant 0$, то $\frac{1}{n^p} \nrightarrow 0 \implies$ ряд расходится.

Если $p > 0$, то $f(x) = \frac{1}{x^p} \geqslant 0$ и монотонно убывает $\implies$ по интегральному признаку

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ и $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ (сходится $\iff p > 1$) ведут себя одинаково.

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится $\iff p > 1$.

Следствие.

Если $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{c}{n^p}$ при $p > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

(Следует из примера выше и признака сравнения.)

Пример.

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \geqslant 0$ и монотонно убывает $\implies$ по интегральному признаку

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ и $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ ведут себя одинаково.

$\int\limits_{2}^{b} \frac{dx}{x \ln x} = \int\limits_{\ln 2}^{\ln b} \frac{dy}{y} = \ln y \Big|_{ln2}^{lnb} = \ln \ln b - \ln \ln 2 \xrightarrow[b \to +\infty]{} +\infty$

Значит, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится.

3.7. Билет 46: Преобразование Абеля. Признаки Дирихле и Абеля.

***Определение* 3.6.**

$\sum a_n$ сходится абсолютно, если $\sum |a_n|$ – сходится.

$\sum a_n$ сходится условно, если $\sum a_n$ – сходится, но не абсолютно.

Теорема 3.12 (Преобразование Абеля)**.**

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$,

где $A_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, $A_0 := 0$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\
&= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (A_k b_k - A_k b_{k+1}) \\
&= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})
\end{aligned}$$

□

Теорема 3.13 (Признак Дирихле)**.**

Если:

1. $A_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ограничены
2. b_n монотонны
3. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ – сходится.

Доказательство.

$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$ имеет предел

$A_n b_n \to 0$, A_n – ограничены, $b_n \to 0$

$\sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$ имеет предел – это частичная сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$, то есть надо доказать, что этот ряд сходится.

Проверим, что он абсолютно сходится:

По условию $|A_n| \leqslant M$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |A_k||b_k - b_{k+1}| &\leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \\
&= M|\sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_{k+1}| \\
&= M|b_1 - b_{n+1}| \\
&\leqslant M(|b_1| + |b_{n+1}|) \leqslant 2M|b_1|
\end{aligned}$$

□

Теорема 3.14 (Признак Абеля).
Если:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
2. b_n монотонны
3. b_n ограничены

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ – сходится.

Доказательство.
Существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n =: b,\ \widetilde{b}_n = b_n - b$ монотонны и $\to 0$

$A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ – сходится $\implies A_n$ – ограничена.

По признаку Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \widetilde{b}_n$ – сходится.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\widetilde{b}_n + b)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\widetilde{b}_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n b\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\widetilde{b}_n + b\sum_{n=1}^{\infty} a_n\end{aligned}$$

Оба ряда сходятся, значит, и их сумма тоже сходится.

□

3.8. Билет 47: ! Признак Лейбница. Оценка суммы знакочередующегося ряда. Примеры (ряд Лейбница и его перестановка)

Знакочередующийся ряд: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,\ a_n \geqslant 0$

Теорема 3.15 (Признак Лейбница).
Если a_n монотонно убывают стремятся к 0, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится. Важно заметить, что условие стремления a_n к 0 важно (см. необходимое условие сходимости ряда). Данный признак можно так же вывести из признака Дирихле. Однако мы хотм произвести так же оценку на сумму знакочередующегося ряда: $S_{2n} \leqslant S_n \leqslant S_{2n+1}$

Доказательство.
$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqslant S_{2n}$ $S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leqslant S_{2n-1}$. Получаем, что S с четными номерами растут, а с нечетными - убывают. Значит, мы можем расписать вложенную последовательно сть отрезков: $[0, S_1] \supset [S_2, S_3] \supset [S_4, S_5]... \supset [S_{2n}, S_{2n+1}]$.
Теперь рассмотрим длины отрезков: $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0$. Тогда последовательность отрезков стягивается. Тогда применим одноименную теорему: у этих отрезков есть общая точка S, которая является пределом их концов: $\lim S_{2n} = \lim S_{2n+1} = S$. Получили что частичные суммы сходятся к S, значит исходный ряд тоже сходится к S. Также можно заметить, что неравенство на сумму ряда выполняется, потому что точка S лежит во всех отрезках, в частности в отрезке

$[S_{2n}, S_{2n+1}]$

$\square$

Пример.

В качестве примера рассмотрим ряд Лейбница: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$
$S_{2n} = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n} = H_{2n} - H_n =$ (сложили все дроби и дважды вычли четные), где H_n- гармонический ряд (смотри билет 6). Подставим все в формулу для гармонических чисел: $= \ln(2n) + \gamma + o(1) - (\ln(n) + \gamma + o(1)) = \ln(2n) - \ln(n) + o(1) = \ln 2 + o(1)$. Тогда $S_{2n} \to \ln 2$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.
Рассмотрим перестановку ряда Лейбница: $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + ... + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}) + ...$
Будем считать $S_{3n} = 1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4n} = 1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n} =$.
Последнее выражение в скобках это H_{2n}. Мы только что считали это в предыдущем примере.
Получаем: $= H_{2n} - \frac{1}{2}H_n = \frac{\ln 2}{2}$

3.9. Билет 48: Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда

***Определение* 3.7.**

Перестановка членов ряда: $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - биекция и $\sum a_n$ - исходный ряд. Тогда $\sum a_{\varphi(n)}$ - перестановка члена ряда.

Теорема 3.16.

Если $\sum a_n$ абсолютно сходится к S, то перестановка ряда $\sum a_{\varphi(n)}$ сходится,причем, тоже к S.

Доказательство.

Случай 1 $a_n \geqslant 0$. Также введем обозначение $S' = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$, а $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Тогда мы точно знаем, что $S'_n \geqslant S$, так как в сумме S' встречаются не все слагаемые, а те, которые отсутствуют $\geqslant 0$, поэтому сумму они только увеличивают. Тогда $\lim S'_n = S' \leq S$, то есть $S' \leqslant S$. Так как у нас биекция - мы можем сделать обратную перестановку, от которой сумма ряда не увеличится. Сделаем перестановку туда и обратно и получим, что каждая из них не увеличивает сумму ряда, ну значит эти суммы равны между собой: $S' = S$.
Случай 2: $a_n \in \mathbb{R}$: заведем $a_n(+) = max\{a_n, 0\}$ и $a_n(-) = max\{-a_n, 0\}$. $a_n(+) - a_n(-) = a_n$, $a_n(+) + a_n(-) = |a_n|$ Так как по условию $\sum |a_n|$ сходится абсолютно, то $\sum a_n(\pm)$ сходится. Более того ряды - с неотрицательными слагаемыми, значит, перестановка членов не меняет суммы ряда, значит $\sum a_{\varphi(n)}(\pm) = \sum a_n(\pm)$. Тогда $\sum a_{\varphi(n)} = \sum a_{\varphi(n)}(+) - \sum a_{\varphi(n)}(-) = \sum a_n(+) - \sum a_n(-) = \sum a_n$

$\square$

Замечание.

1. Если $a_n \geqslant 0$ и ряд расходится, то перестановка ряда так же расходится. Это верно, так как если бы нашлась перестановка, дающая сходящийся ряд, тогда бы обратная перестановка тоже давала бы сходящийся ряд, а это противоречит тому, что исходный ряд расходится.

2. Другое замечание : если $\sum a_n$ сходится условно, то $\sum a_n(\pm)$ расходятся. Так как $\sum a_n = \sum a_n(+) - \sum a_n(-)$. Если бы один из них сходился, то сходился бы и другой, так как один выражается через другой с помощью $\sum a_n$, который сходящийся. Ну тогда ряд $\sum |a_n| = \sum a_n(+) + \sum a_n(-)$ тоже бы сходился, как сумма сходящихся. Пришли к противоречию.

3.10. Билет 49: Теорема Римана.

Теорема 3.17 (Римана)**.**
$a_n \in \mathbb{R}$ $\sum a_n$ условно сходится.

Тогда для любого $S \in \overline{\mathbb{R}}$ существует перестановка φ, т.ч. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$. Также существует перестановка φ, для которой ряд не имеет суммы.

Доказательство.
$\sum b_n$ и $\sum c_n$ – ряды $\sum (a_n)_\pm$, из которых выкинули все нули.

$\sum b_n$ и $\sum c_n$ – расходятся (т.к. есть условная сходимость), Более того, $\sum b_n = \sum c_n = +\infty$. При этом $\lim b_n = \lim c_n = 0$ (необходимое условие сходимости для ряда $\sum a_n$).

Пункты $a), b), c)$ доказываются аналогично. Наверное, можно на экзамене расписать только пункт $a)$, а про остальные сказать, что аналогично. Здесь на всякий случай расписаны все три пункта.

a) Пусть $S \in \mathbb{R}$. Будем набирать частичную сумму так, чтобы она поочередно превышала S и наоборот была меньше S. Мы можем это сделать, т.к. $\sum b_n = \sum c_n = +\infty$.

   $b_1 + b_2 + ... + b_{n_1 - 1} \leqslant S < b_1 + b_2 + ... + b_{n_1}$

   $b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} < S \leqslant b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1 - 1}$

   $b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2 - 1} \leqslant S < b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2}$

   $b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} - c_{m_1+1} - ... - c_{m_2} < S \leqslant$
   $\leqslant b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} - c_{m_1+1} - ... - c_{m_2 - 1}$

   И так далее.

   $|$частичная сумма $- S| \leqslant |$последнего взятого элемента$| \to 0$. Значит частичная сумма построенного ряда $\to S$.

b) Пусть $S = +\infty$. Мы знаем, что $\sum b_n = +\infty$. Поэтому мы можем нашу перестановку получить следующим образом:

   $b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} > 1 \geqslant b_1 + b_2 + ... + b_{n_1 - 1}$ (раз $\sum b_n = +\infty$, то в какой-то момент сумма превысит 1)

   $b_1 + ... + b_{n_1} + c_1$ (добавили элемент из ряда c_n)

   $b_1 + ... + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} > 2 \geqslant b_1 + ... + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2 - 1}$

   И так далее.

c) Пусть мы хотим получить перестановку φ, для которой ряд не имеет суммы. Будем набирать суммы так, чтобы она то была больше 1, то меньше -1. Это опять же можно сделать, т.к. $\sum b_n = \sum c_n = +\infty$.

   $b_1 + b_2 + ... + b_{n_1 - 1} \leqslant 1 < b_1 + b_2 + ... + b_{n_1}$

   $b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} < -1 \leqslant b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1 - 1}$

   $b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2 - 1} \leqslant 1 < b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2}$

   $b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} - c_{m_1+1} - ... - c_{m_2} < -1 \leqslant$
   $\leqslant b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} - c_{m_1+1} - ... - c_{m_2 - 1}$

   И так далее.

$\square$

3.11. Билет 50: Теорема Коши. Произведение рядов. Теорема Мертенса (без доказательства). Необходимость условия абсолютной сходимости.

Теорема 3.18 (Коши).

Если ряды $\sum a_n = A$ и $\sum b_n = B$ – абсолютно сходятся, то ряд, образованный из слагаемых $a_n b_k$ в каком-то порядке, абсолютно сходится, и его сумма равна AB

Доказательство.

Сначала немного обозначений:

$A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \ B_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$

$\tilde{A}_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \ \tilde{B}_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|$

$\tilde{A} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| \ \tilde{B} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k|$

$\tilde{S}_m$ – частичная сумма ряда из $|a_n b_k|$

$\tilde{S}_m = \sum\limits_{i,j} |a_i b_j| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\max i} |a_i| \sum\limits_{j=1}^{\max j} |b_j| \leqslant \tilde{A}\tilde{B} < +\infty$, меньше бесконечности, т.к. ряды абсолютно сходятся.

Частичные суммы $\tilde{S}_m$ ограничены $\implies$ ряд сходится.

Складывать будем все в таком порядке: сначала $a_1 b_1$, потом все, что до индекса 2, все, что до индекса 3, и т.д. Т.е. $(a_1 b_1) + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_3 + a_1 b_3) + \ldots$.

TODO: Табличка с квадратиками

S_m – частичная сумма такого ряда

$S_{n^2} = \sum\limits_{j,k=1}^{n} a_j b_k = A_n B_n \to AB$

Пусть $n^2 \leqslant m \leqslant (n+1)^2$

$S_m = S_{n^2} + \sum\limits_{k=1}^{\ldots} a_{n+1} b_k + \sum\limits_{k=n}^{\ldots} a_k b_{n+1}$

$\sum\limits_{k=1}^{n+1} |a_{n+1} b_k| + \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_{n+1}| = |a_{n+1}|\, \tilde{B}_{n+1} + |b_{n+1}|\, \tilde{A}_n \leqslant |a_{n+1}|\, \tilde{B} + |b_{n+1}|\, \tilde{A} \to 0$, т.к. $\lim a_n = \lim b_n = 0$

$\implies S_n \to AB$ □

***Определение* 3.8.**

$\sum a_n$ и $\sum b_n$

Произведением рядов называется ряд $\sum c_n$, где $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \ldots + a_n b_1$

Теорема 3.19 (Мертенса).

$\sum a_n = A$ и $\sum b_n = B$ сходятся, причем один из них абсолютно, то произведение рядов сходится к AB.

Замечание.

Теорема идет без доказательства, но вот несколько замечаний по поводу нее.

1. Здесь важен порядок, в котором мы складываем $a_i b_j$. В теореме Коши он был не важен, т.к. у обоих рядов была абсолютная сходимость, но здесь у обоих рядов абсолютная сходимость не гарантирована.

2. Просто сходимости рядов не хватает. Пример:
   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ умножаем на $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$
   $c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} \cdot (-1)^0 + \frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n-2}} \cdot \frac{(-1)^1}{\sqrt{2}} + ... + (-1)^0 \cdot \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} =$
   $= (-1)^{n-2}(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n-2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n-3}\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n-1}})$
   $n-1$ слагаемых
   $\frac{1}{\sqrt{n-k}\sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{n-1}$ (т.к. среднее арифметичкое больше среднего геометрического)
   $|c_{n-1}| \geqslant 1 \implies$ ряд $\sum c_n$ расходится.

3.12. Билет 51: Теорема Абеля о произведении рядов (с леммой).

Теорема 3.20 (Абеля)**.**
$\sum a_n = A, \ \sum b_n = B, \ \sum c_n = C$
И $\sum c_n$ – произведение $\sum a_n$ и $\sum b_n$
Тогда $AB = C$.

Лемма.
$x_n \to x, \ \ y_n \to y$ при $n \to \infty$.
Тогда
$\frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + x_3 y_{n-2} + ... + x_n y_1}{n} \to xy$

Доказательство.
Пусть $y = 0$. надо доказать, что $\frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + x_3 y_{n-2} + ... + x_n y_1}{n} \to 0$

Есть две последовательности, имеющие предел, значит они ограничены. Значит, есть какая-то константа M, что $|x_n| \leqslant M \quad |y_n| \leqslant M \ \ \forall n$

$\forall \epsilon > 0 \exists N \ \ \forall n \geqslant N \quad |y_n| < \epsilon$

Возьмем $n > N$.

$|x_1 y_n| + |x_2 y_{n-1}| + ... + |x_{n-N} y_{N+1}| + |x_{n-N+1} y_N| + ... + |x_n y_1|$

Первые $n - N$ слагаемых оценим сверху, как $(n-N)M\epsilon$. Оставшиеся оценим как $\leqslant M^2 N$

$|x_1 y_n| + |x_2 y_{n-1}| + ... + |x_{n-N} y_{N+1}| + |x_{n-N+1} y_N| + ... + |x_n y_1| \leqslant M\epsilon(n-N) + M^2 N$

$\left|\frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + ... x_n y_1}{n}\right| \leqslant \frac{M\epsilon(n-N) + M^2 N}{n} < \epsilon M + \epsilon M$

(Последнее – при достаточно больших n).

Пусть $y_n = y$

$\frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + ... + x_n y_1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} y \to xy$

(Последнее показывается по теореме Штольца).

Общий случай.

$\tilde{y}_n := y_n - y \to 0$

$\frac{x_1 \tilde{y}_n + x_2 \tilde{y}_{n-1} + ... + x_n \tilde{y}_1}{n} \to 0$

$\frac{x_1 y + x_2 y + ... + x_n y}{n} \to xy$

И сложим. Получим ровно то, что надо.

□

Доказательство. (теоремы)
$\frac{A_1B_n+A_2B_{n-1}+...+A_nB_1}{n} \to AB$ по лемме.

Но что же написано в числителе?

$a_1(b_1+b_2+...+b_n)+(a_1+a_2)(b_1+b_2+...+b_{n-1})+...+(a_1+a_2+...+a_n)b_1 =$
$= na_1b_1+(n-1)(a_1b_2+a_2b_2)+(n-2)(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+... =$
$= nc_1+(n-1)c_2+(n-2)c_3+...+c_n = C_1+C_2+...+C_n$

Получается, что знаем, что $\frac{C_1+C_2+...+C_n}{n} \to AB$

Но с другой стороны, $\frac{C_1+C_2+...+C_n}{n} \to C$

$\implies C = AB$ □

3.13. Билет 52:Бесконечные произведения. Определение. Примеры. Свойства.

***Определение* 3.9.**
$\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$

$P_n := \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$ – частичные произведения.

Если $\exists P = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, т.ч. $P \neq 0$ и $P \neq \infty$, то произведение сходится и $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k = P$

Пример.

1. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$

   $P_n = (1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdot...\cdot 1-\frac{1}{n^2} = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdot...\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2}$

2. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{4n^2})$

   $P_n = (1-\frac{1}{4^2})(1-\frac{1}{6^2})\cdot...\cdot(1-\frac{1}{(2n)^2}) = \frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\cdot\frac{(6-1)(6+1)}{6^2}\cdot...\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = \frac{((2n-1)!!)^2(2n+1)}{((2n)!!)^2} \to \frac{2}{\pi}$

Упражнение. Установить следующие равенства:

$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{(2n+1)^2}) = \frac{\pi}{4}$

$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{1}{1-x}$, при $0<x<1$

Свойства.
Считаем, что $p_n \neq 0 \ \ \forall n$

1. Конечное количество начальных множителей не влияют на сходимость.

2. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ – сходится $\implies \lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$

   Доказательство.
   $p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1$ □

3. Все можно свести к произведениям с положительными множителями.

4. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $p_n > 0 \ \ \forall n$

Тогда $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ сходится.

Доказательство.

$P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$

$\ln P_n = \ln(\prod\limits_{k=1}^{n} p_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln p_k =: S_n$

S_n имеет предел $\iff \ln P_n$ имеет предел $\iff P_n$ имеет предел. □

Пример.

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1}$, где p_n – n-ое простое число.

$\frac{p_n}{p_n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

НО! Раскрывать скобочки не хорошо в бесконечностях. Формализуем.

$P_n = \prod\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^k} \geqslant \prod\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{p_j^k} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$

Вывод: $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ расходится.

Более того $P_n \geqslant \ln n + o(1)$

Теорема 3.21.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ расходится, где p_n – n-ое простое число.

Доказательство.

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ расходится

$\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{p_n}{p_n-1})$ – расходится

$\ln \frac{x}{x-1} = \ln \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\ln(1 - \frac{1}{x}) \leqslant$

$-2t \leqslant ln(1-t)$ при достаточно малых t.

$\leqslant -2(-\frac{1}{x}) = \frac{2}{x}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n-1} \leqslant C + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n}$

$\implies \sum \frac{1}{p_n}$ расходится. □

Замечание.

На самом деле

$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \sim \ln \ln n$

3.14. Билет 53: Произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$

Тут под p_n поздразумевается n-ое простое число.

Утверждение 3.22.

Произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ расходится

Доказательство.

Для начала проведу некие не совсем формальные рассуждения, далее их формализую. Итак, неформальная часть:

$$\frac{p_n}{p_n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

В начале просто несколько иначе переписал член произведения. Затем заметил, что это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Тогда наше исходное произведение переписывается в такое произведение сумм:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

«Раскроем» скобки в этом произведении и получим сумму всеовозможных произведений выражений вида $\frac{1}{p_n^k}$, а именно:

$$\sum \frac{1}{\prod\limits_{k}^{\infty} p_{k=1}^{\alpha_k}}$$

А с алгебры первого модуля нам известно, что каждое натуральное число единственным образом представляется в виде $\prod_{k=1}^{\infty} p_k^k$ и при этом единтвенным образом поэтому наша сумма это в точности это:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Получили гармонический ряд, а он, как известно, расходится. Почему же я написал слово «раскроем» в кавычках? Все потому, что раскрывать бесконечное произведение бесконечных сумм может быть не совсем законно, как минимум не ясно почему законно, поэтому пришло время формализовать всё то, что я напиал выше:

$$P_n := \prod_{t=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_t^k} \geqslant \prod_{t=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p_t^k}$$

Раскроем скобки, получим суммы таких слагаемых $\frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots}$, где все $\alpha_i \leqslant n$, и все $p_i \leqslant n$, что означает, что там точно будут все дроби вида $\frac{1}{i}$, где $i \leqslant n$ (i - натуральное, если вдруг по каким-то причнам это неочевидно). Тогда для P_n имеем следующее неравнество (уже имеем все такие слагаемые, есть еще какие-то сверху, на них забьем):

$$P_n \geqslant \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$$

Заметим, что этот ряд расходится, поэтому и произведение из условия расходится. □

Замечание.

$P_n \geqslant \ln n + \mathcal{O}(1)$

Доказательство.

Мы все прекрасно знаем, что гармонический ряд эквивалентен $\ln n + \gamma + o(1)$. Мы уже показали, что наш ряд больше гармонического ряда, а $\gamma + o(1)$ можно записать в виде $\mathcal{O}(1)$ (потому что постоянная Эйлера и $o(1)$ - какое-то ограниченное выражение). □

Теорема 3.23.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ расходится

Доказательство.

Из расходимости произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1}$ ряд из логарифмов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n - 1}$ тоже расходится. Посмотрим на один такой логарифм:

$$\ln \frac{x}{x-1} = \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = -\ln \left(1 - \frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{2}{x}$$

Первые два равенства - очевидные, последнее неравенство следует из следующего факта: $\ln(1 - t) \geqslant -2t$ при достаточно маленьких t (не верите - дифференцируйте), поэтому выполняется при достаточно больших x. Значит, первые члены, для которых неравенство не выполняется, можем оценить какой-то константой C (их конечное число), а для остальных по неравенству:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n - 1} \leqslant C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n - 1} - C \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n}$$

Получилось, что подперли ряд из $\frac{2}{p_i}$ расходящимся рядом, отсюда следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$. □

Замечание.

На самом деле

$$\ln \frac{x}{x-1} \sim \frac{1}{x}$$

(потому что $-\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$), поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_k}{p_k - 1}$$

(теорема Штольца утверждает (гугл в помощь, если что), что если каждое слагаемое (то есть $a_n - a_{n-1}$) эквивалентно, то и суммы (a_n) эквивалентны), то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \sim \ln P_n \geqslant \ln(\ln n + \mathcal{O}(n)) \geqslant \ln \ln n + \mathcal{O}(n)$$

Утверждение 3.24.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \sim \ln \ln n$$

Доказательство.

Без доказательства. □

3.15. Билет 54: Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций. Определение и примеры. Критерий равномерной сходимости. Следствия.

***Определение* 3.10.**

Пусть $f_n, f\colon E \to \mathbb{R}$ (тут можно и $\mathbb{C}$).

1. Последовательность f_n поточечно сходится к f на множестве E, если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in E$.

2. Последовательность f_n равномерно сходится к f на множестве E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Обозначение для равномерной сходимости: $f_n \rightrightarrows f$ (и как-то указывать на каком множестве эта равномерная сходимость: или словами после, или под стрлочками)

Замечание.

Запишем оба определения с помощью кванторов:

1. $\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

Получается, что в первом случае N зависит **и** от x, **и** от ε, а во втором - **только** от ε.

Замечание.

Из равномерной сходимости следует поточечная к той же функции. Действительно, если есть универсальный номер, зависящий только от ε, то он подходит и для конкретного x.

Пример.

Пусть $E = (0;1) \quad f_n(x) = x^n \quad f(x) = 0$, тогда

f_n поточечно сходится к f (какое-то число из $(0,1)$ в n-ной степени стремится к нулю), однако равномернорной сходимости нет. Условие не выполняется даже для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, поскольку $|x^n - 0| < \frac{1}{2}$ не может выполняться при все $x \in (0;1)$ ни для какого n, поскольку x мы можем сколь угодно близко подвинуть к 1, и x^n будет сколь угодно близко к 1, в частности больше $\frac{1}{2}$. Мораль: из поточечной сходимости равномерная **не** следует.

Теорема 3.25 (Критерий равномерной сходимости)**.**

Пусть $f_n, f\colon E \to \mathbb{R}$. Тогда

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Доказательство.

"$\Leftarrow$" Запишем правый предел по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

А для супремума верно следующее: $\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, поэтому:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ничего не напоминает? Мне вот определение равномерной сходимости напоминает.

"$\Rightarrow$" Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Синее означает то, что ε является верхней границей для всех $|f_n(x) - f(x)|$, а значит, sup таких разностей будет меньше или равен ε, отсюда:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

А это означает то, что sup стремится к нулю при $n \to \infty$ (по определению). $\square$

Следствие.

1. Если $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ при любых $x \in E$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $f_n \rightrightarrows 0$ на E.

   Доказательство.
   Если разность меньше a_n во всех точках, то $\sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n \to 0$ при $n \to \infty$ $\square$

2. Если $\exists x_n \in E$ такие, что $f_n(x) - f(x)$ не стремится к нулю, то равномерной сходимости нет.

   Доказательство.
   Это означает, что $\sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \geqslant |f_n(x) - f(x)| \neq 0$ при $n \to \infty$, а значит, нет стремления к нулю у супремума, критерий равномерной сходимости не выполняется, равномерной сходимости нет. $\square$

Пример.

Пусть $E = (0; 1) \quad f_n(x) = x^n \quad f(x) = 0$, возьмем $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, но мы знаем это:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \neq 0$$

Раз предел не 0, то равномерной сходимости нет. (Предел может быть только нулем, потому что поточечный предел 0 (иначе пределов было бы несколько, так как равномерная сходимость влекла бы предел к другой функции)). Пример закончился, его явно в билете нет, но пусть будет.

3.16. Билет 55: Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей.

Теорема 3.26. (Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей)

Пусть $f_n : E \mapsto \mathbb{R}$. Тогда f_n равномерно сходится на E к некоторой функции

$$\iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство.

"$\Longrightarrow$"

Знаем, что $f_n \to f$ на E. Тогда возьмем $\dfrac{\varepsilon}{2}$ вместо ε в определение равномерной сходимости и найдем по нему соотвествующее N.

$$\forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall m \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда по неравенству треугольника $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| =$

$= |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

"$\Longleftarrow$"

Знаем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Зафиксируем некоторый произвольный $x \in E$ и рассмотрим числовую последовательность $f_n(x)$.

Замечание. Воспоминание из 1 семестра : последовательность x_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad \Longrightarrow \ |x_n - x_m| < \varepsilon$

Тогда $f_n(x)$ - фундаментальная последовательность. Тогда по критерию Коши для числовых последовательностей она имеет конечный предел : пусть $f(x) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$

Берем неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ и устремим m к ∞. При переходе к пределу потеряется строгость знака $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Перебрав $\forall x \in E$ получаем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Это и есть определение равномерной сходимости $f_n \rightrightarrows f$ на E $\square$

3.17. Билет 56: Пространство ℓ^∞ и его полнота

***Определение* 3.11.** Пространство $\ell^\infty(E)$.

$$\ell^\infty(E) := \{f : E \mapsto \mathbb{R} \mid \sup_{x \in E} |f(x)| < +\infty\}$$

с нормой $||f||_{\ell^\infty(E)} := \sup\limits_{x \in E} |f(x)|$

Другими словами, нормированное пространство $\ell^\infty(E)$ состоит из ограниченных на E функций.

Замечание. $\sup\limits_{x \in E} |f(x)|$ действительно норма

1. $||f|| \geqslant 0$ и $||f|| = 0 \iff \sup\limits_{x \in E} |f(x)| \geqslant 0$ и $\sup\limits_{x \in E} |f(x)| = 0 \iff f \equiv 0$
2. $\sup\limits_{x \in E} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup\limits_{x \in E} f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X$
3. Неравенство треугольника
   $||f + g|| = \sup\limits_{x \in E} |f(x) + g(x)| \leqslant \sup\limits_{x \in E} (|f(x)| + |g(x)|) \leqslant \sup\limits_{x \in E} |f(x)| + \sup\limits_{x \in E} |g(x)| = ||f|| + ||g||$

В доказательстве нер-ва треугольника пользовались тем, что $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ и $\sup(f+g) \leqslant \sup(f)+\sup(g)$

Замечание. Связь нормы с равномерной сходимостью

$f_n \rightrightarrows f$ на $E \iff \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |f_n(x)-f(x)| = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f|| = 0 \iff$

f_n сходится к f в пространстве $\ell^\infty(E)$

То есть про равномерную сходимость можно думать как про сходимость в специальном нормированном пространстве.

Теорема 3.27.

$\ell^\infty(E)$ - полное нормированное пространство.

Доказательство.

Надо доказать, что каждая фундаментальная последовательность из ℓ^∞ сходится к элементу этого же пространства.

Пусть f_n фундаментальная последовательность из ℓ^∞. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad ||f_n - f_m|| < \varepsilon$$

Заметим, что $||f_n - f_m|| = \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant |f_n(x) - f_m(x)|$ при $x \in E$.

То есть $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Тогда по критерию Коши для равномерной сходимости $f_n \rightrightarrows f$, где $f : E \mapsto \mathbb{R}$ - некоторая функция.

Осталось понять, что $f \in \ell^\infty(E)$, т.е. что f - ограниченная функция.

Подставим $\varepsilon = 1$ в определение равномерной сходимости. Для него найдется N, т.ч. при $n \geqslant N$ $|f_n(x) - f(x)| < 1$ при всех $x \in E$. Тогда по неравенству треугольника :

$$|f(x)| \leqslant |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)| < |f_n(x)| + 1 \leqslant ||f_n|| + 1$$

Но т.к. n - фиксированное число, то $|f(x)|$ не превосходит какого-то фиксированного выражения. Значит f - ограниченная функция. □

3.18. Билет 57: ! Равномерный предел непрерывных функций. Теорема Стокса–Зайделя. Пространство $\mathbb{C}(\mathbb{K})$ и его полнота.

Замечание. Момент с лекции: youtu.be
Записи Александра Игоревича с лекции: drive.google

Теорема 3.28.

$f_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

И f_n непрерывна в точке $a \in E$, $f_n \rightrightarrows f$ на E

$\implies f$ непрерывна в точке a.

Доказательство.

Если a не предельная точка в E, то все функции там непрерывны.

Пусть a – предельная точка множества E.

Тогда надо проверить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in E \; |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$

По определению равномерной сходимости $\exists N\ \forall n > N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$

Зафиксируем $n > N$. Функция f_n непрерывна в точке a.

$\exists \delta > 0\ \forall x \in E\ |x - a| < \delta\ |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\epsilon}{3}$

Если $|x - a| < \delta$ и $x \in E$, то

$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ □

Следствие (теорема Стокса-Зайделя).

$f_n \in C(E)$ и $f_n \rightrightarrows f$ на E

$\implies f \in C(E)$.

***Определение* 3.12.**

Пусть K – компакт в каком-нибудь метрическом пространстве.

$C(K) := \{f : K \to \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ \text{непрерывные}\}$

$||f||_{C(K)} := \max\limits_{x \in K} |f(x)|$.

(Максимум и супремум в этом случае одно и то же, т.е. уже проверили, что это норма)

Замечание.

$C(K)$ подпространство $l^\infty(K)$.

Теорема 3.29.

Замкнутое подпространство полного пространства – полное.

Доказательство.

$Y \subset X$ Y – замкнуто.

$\implies \{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в Y.

$\implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$

$\implies x$ – предельная точка множества Y.

И т.к. Y замкнуто, то $x \in Y$.

$\implies x_n$ сходится к x в пространстве Y. □

Следствие.

$C(K)$ – полное

Доказательство.

Надо доказать, что $C(K)$ замкнуто в $l^\infty(K)$.

Т.е. если $||f_n - f|| \to 0$, где $f_n \in C(K)$, то $f \in C(K)$.

Но это теорема Стокса-Зайделя. □

3.19. Билет 58: ! Поточечная и равномерная сходимость рядов. Остаток ряда. Критерий Коши. Необходимое условие равномерной сходимости ряда.

Замечание. Момент с лекции: youtu.be
Записи Александра Игоревича с лекции: drive.google

***Определение* 3.13.**

$u_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – функциональный ряд

$S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ – частичная сумма.

Если S_n поточечно сходится к S,то ряд поточечно сходится, если $S_n \rightrightarrows S$, то ряд равномерно сходится.

***Определение* 3.14.**

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно

$r_n(x) := \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = S(x) - S_n(x)$ – остаток функции ряда.

Теорема 3.30.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E

$\iff r_n \rightrightarrows 0$ на E.

Доказательство.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – равномерно сходится $\iff S_n \rightrightarrows S$ на $E \iff r_n = S - S_n \rightrightarrows 0$ □

Теорема 3.31 (Критерий Коши)**.**

$\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

$\iff \forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; \forall p \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in E \;\; |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| < \epsilon$

Доказательство.

$\sum u_n(x)$ равномерно сходится $\iff S_n \rightrightarrows S$ на E

$\iff \forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall m, n > N \;\; \forall x \in E \;\; |S_m - S_n| < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; \forall p \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in E \;\; |S_{n+p} - S_n| < \epsilon$

$|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| = |\sum\limits_{k=1}^{n+p} u_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)| = |S_{n+p} - S_n|$ □

Следствие (Необходимое условие сходимости функции ряда).

Если ряд $\sum u_n(x)$ равномерно сходится, то $u_n \rightrightarrows 0$.

Доказательство.

Возьмем критерий Коши и $p = 1$.

$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; \forall x \in E \;\; |u_{n+1}(x)| < \epsilon$

Это определение равномерной сходимости $u_n \rightrightarrows 0$. □

Замечание.

1. Если $\exists x_n \in E$, для которой $u_n(x_n) \not\to 0$, то $\sum u_n(x)$ не сходится равномерно.
2. Из того, что ряд $\sum u_n(x_n)$ расходится ничего не следует

Пример.

$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$\sum u_n(\frac{1}{n+1}) = \sum \frac{1}{n}$ – расходится.

3.20. Билет 59: ! Признак сравнения. Признак Вейерштрасса. Следствие. Примеры.

Теорема 3.32 (Признак сравнения)**.**

$u_n, v_n : E \mapsto \mathbb{R}$. Если $\forall x \in E$ $|u_n(x)| \leqslant v_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ - равномерно сходится. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ - равномерно сходится, можно применить признак Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N\, \forall p \in \mathbb{N}\, \forall x \in E \text{ выполняется } \left|\sum_{k=n}^{n+p} v_k(x)\right| < \varepsilon$$

Из условия теоремы можно записать неравенство на частичные суммы.

$$\varepsilon > \left|\sum_{k=n}^{n+p} v_k(n)\right| \geqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \geqslant \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right|$$

Получили, что критерий Коши выполняется для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, значит он сходится равномерно.

□

Теорема 3.33 (Признак Вейерштрасса)**.**

$u_n : E \mapsto \mathbb{R}$. Если $\exists \{a_n\} : |u_n(x)| \leqslant a_n\, \forall x \in E$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

$v_n(x) := a_n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ - равномерно сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - равномерно сходится по признаку сравнения. □

Следствие.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ - равномерно сходится, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

Воспользуемся признаком сравнения для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ □

Пример.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^2}$ - равномерно сходится на $\mathbb{R}$

Доказательство.

$\{a_n\} := \frac{1}{n^2}$. Воспользуемся признаком Вейерштрасса для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^2}$ и a_n □

Замечание.

Абсолютная и равномерная сходимости - разные вещи.

1. Ряд сходится абсолютно, но не сходится равномерно.

Пример.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ на $(-1;1)$

Доказательство.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^n| = \frac{1}{1-|x|}$ - геометрическая прогрессия. Действительно, такой ряд сходится абсолютно. По критерию Коши докажем, что равномерной сходимости нет.

$$\exists \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N \, \exists p \in \mathbb{N} \, \exists \overline{x} \in E : \left| \sum_{k=n}^{n+p} v_n(\overline{x}) \right| \geqslant \varepsilon$$

При выполнении такого условия равномерной сходимости не будет. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $p = 0$, $\overline{x} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. □

2. Ряд сходится равномерно, но не сходится абсолютно.

   Пример.
   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - сходится равномерно, но нет абсолютной сходимости.

3. Также бывает, что ряд сходится абсолютно, равномерно, но ряд из модулей не сходится равномерно. Пример в следующем вопросе. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$

3.21. Билет 60: Признаки Дирихле и Лейбница для равномерной сходимости

Теорема 3.34 (Признак Дирихле (Дурихле)).
$a_n, b_n : E \mapsto \mathbb{R}$

1. $|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)| \leqslant K \, \forall n \, \forall x \in E$
2. $b_n \rightrightarrows 0$ на E
3. $\forall x \in E \, b_n(x)$ - монотонны по n

При выполнении этих условий $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ - равномерно сходится на E.

Доказательство.
$A_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$. $|A_n(x)| \leqslant K$, по условию. Воспользуемся преобразованием Абеля (если забыли доказательство - оно в вопросе 46). Его корректность для функциональных рядов можно проверить, повторив обычное доказательсвто с приписанным '(x)'

$$\sum_{k=1}^{n} a_n(x) b_n(x) = A_n(x) b_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$$

- $A_n(x) b_n(x) \rightrightarrows 0$ - как произведение равномерно ограниченной на равномерно стремящуюся к нулю

- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$ - равномерно сходится. Воспользуемся для доказательства этого факта признаком сравнения.
  $u_k(x) := A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$ и $v_n(x) := K|b_k(x) - b_{k+1}(x)|$ Осталось доказать, что $v_n(x)$ - равномерно сходится. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n(x) - b_{n+1}(x)| \underbrace{=}_{b_n(x)-\text{монотонные}} \left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) - b_{n+1}(x)\right|$. Посмотрим на частичные суммы:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x) - b_{k+1}(x)\right| = |b_1(x) - b_{n+1}(x)| \rightrightarrows |b_1(x)|$$

Докажем последний переход:

$$||b_1(x) - b_{n+1}(x)| - b_1(x)| \leqslant |b_1(x) - b_{n+1}(x) - b_1(x)| = |b_{n+1}(x)| \underbrace{\rightrightarrows}_{\text{по условию}} 0$$

Так как частичные суммы равномерно сходятся, то и сам ряд равномерно сходится.

□

Теорема 3.35 (Признак Лейбница)**.**
$b_n : E \mapsto \mathbb{R}$

1. $\forall x \in E\, b_n(x) \geqslant 0$ и монотонны
2. $b_n(x) \rightrightarrows 0$ на E.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.
$a_n(x) := (-1)^{n-1}$. И воспользуемся признаком Дирихле для $a_n(x)$ и $b_n(x)$. Частичные суммы $a_n(x)$ либо 1, либо 0 $\Rightarrow$ ограничены. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ - равномерно сходитя на $(0; 1)$

Доказательство.
$\frac{x^n}{n} \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$, также $\frac{x^n}{n}$ монотонная. Получаем равномерную сходимость ряда по Лейбницу. Также ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}|$ - сходится, так как меньше геометрической прогрессии. **НО** такой ряд не сходится равномерно по критерию Коши.

□

3.22. Билет 61: Признак Абеля

Утверждение 3.36 (Признак Абеля)**.**

$$\begin{cases} \sum a_n(x) & \text{равномерно сходится} \\ |b_n(x)| \leq K & \forall n, \forall x \\ b_n(x) & \text{монотонны по } n \text{ при фиксированном } x \end{cases} \implies \sum a_n b_n - \text{равномерно сходится}$$

Доказательство.

здесь все ряды -* ***функциональные**, просто писать каждый раз x не хочется**

Проверяем условие критерия Коши.

$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k}$ - заменили пределы суммы, перекинув n в индексы.

$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k} = (A_{n+p} - A_n) b_{n+p} + \sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k} - A_n) \cdot (b_{n+k} - b_{n+k+1})$ - применили преобразование Абеля

$|A_{n+p} - A_n||b_{n+p}| \le K|A_{n+p} - A_n| = K|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon K, \forall x \in E, \forall n \ge N$ - критерий Коши для $\sum a_n$

$\sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k} - A_n)(b_{n+k} - b_{n+k+1}) \le \sum_{k=1}^{p-1} |A_{n+k} - A_n||b_{n+k} - b_{n+k+1}| < \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} |b_{n+k} - b_{n+k+1}|$ - т.к. первый модуль меньше ε при $n \ge N$

$\varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} |b_{n+k} - b_{n+k+1}| = \varepsilon |\sum_{k=1}^{p-1} (b_{n+k} - b_{n+k+1})| = \varepsilon |b_{n+1} - b_{n+p}| \le \varepsilon(|b_{n+1}| + |b_{n+p}|) \le 2K\varepsilon$

Условие критерия Коши выполняется, значит наш ряд равномерно сходится. □

3.23. Билет 62: Пример ряда, который сходится равномерно и абсолютно, но не сходится равномерно абсолютно. Признак Динни

Пример.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ на $(0, 1)$.

Равномерная сходимость: по признаку Лейбница с $b_n(x) = \frac{x^n}{n}$

Абсолютная сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Но этот ряд не сходится равномерно абсолютно.

Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{10}$

$$\forall n \quad \exists x \in (0,1) \quad \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k} \ge n(\frac{x^{2n}}{2n}) = \frac{x^{2n}}{2} > \frac{1}{10}$$

Утверждение 3.37.

K - компакт.

$$\begin{cases} u_n \in C(K) & u_n \ge 0 \\ S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) & u_n \in C(K) \end{cases}$$

$\implies \sum u_n$ - равномерно сходится.

Доказательство.

помним, все ряды - функциональные

$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = S - S_n$ - убывают по n при фиксированном x.

$r_n \rightrightarrows 0$?

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n : \forall x \in K \quad r_n < \varepsilon$

Пусть такого n не существует. Тогда $\forall n \quad \exists x_n \in K : r_n(x_n) \ge \varepsilon$

x_n - последовательность K. Тогда у неё есть сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \to x_0$ (т.к. K - компакт)

Рассмотрим r_m.

$n_k \ge m \implies \varepsilon \le r_{n_k}(x_{n_k}) \le r_m(x_{n_k}) \to r_m(x_0) \ge \varepsilon$ - верно при всех m.

Значит, $\sum u_n$ - расходится, что неверно. Значит, наше предположение неверно, и $r_n \rightrightarrows 0$. □

3.24. Билет 63: Теорема о перестановке пределов и о перестановке предела и суммы.

Теорема 3.38 (О перестановке пределов)**.**

$f_n, f : E \mapsto \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows f$ на E, a – предельная точка E, $b_n := \lim\limits_{x\to a} f_n(x) \in \mathbb{R}$.
Тогда существуют $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и они равны.

Доказательство.

Сначала докажем сходимость b_n. Проверим, что b_n фундаментальна.

По критерию Коши для равномерной сходимости имеем:
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$
Сделаем переход к пределу в неравенстве(устремим $x \to a$, строгое неравенство превратилось в нестрогое), получим:
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m \geq N\ |b_n - b_m| \leq \varepsilon$
А это и есть определение фундаментальной последовательности! Значит, b_n фундаментальна. Значит, по критерию Коши для последовательностей имеет конечный предел.

Пусть $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$. Осталось проверить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Тогда автоматически докажем существование и равенство.
Посмотрим на разность $|f(x) - b|$. Творчески оценим её по неравенству треугольника следующим образом:

$$|f(x) - b| \leq |b_n - b| + |f_n(x) - b_n| + |f_n(x) - f(x)|$$

Заметим, что это верно для любых n. Теперь посмотрим по отдельности на каждое слогаемое в правой части неравенства. По определению предела $\forall n \geq N_1\ |b_n - b| < \varepsilon$. По определению равномерной сходимости $\forall n \geq N_2\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Выберем $\max(N_1, N_2)$. Теперь посмотрим на $|f_n(x) - b_n|$. Мы знаем, что $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = b_n$(формулировка теоремы). Значит, мы можем сказать, что $|f_n(x) - b_n| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$. Получили

$$|f(x) - b| \leq |b_n - b| + |f_n(x) - b_n| + |f_n(x) - f(x)| < 3\varepsilon$$

Собирая всё в кучу, получим определение предела:
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ если $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < 3\varepsilon$.
Значит, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Что и требовалось доказать.

□

Теорема 3.39 (О перестановке предела и суммы)**.**

$u_n : E \mapsto \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E и $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = b_n$
Тогда $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to a} u_n(x)$ и все эти пределы конечны.

Доказательство.

Посмотрим на частичные суммы $S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$. Так как сумма конечная, можно написать так: $\lim\limits_{x\to a} S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k := B_n$. Мы также знаем, что $S_n \rightrightarrows S$.
Тогда по предыдущей теореме $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \lim\limits_{x\to a} S(x)$. А это как раз то, что нам нужно. □

Следствие.

Если u_n непрерывны в точке a и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна в точке a.

Доказательство.

$\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = u_n(a) =: b_n$(по непрерывности).
По предыдущей теореме $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$, а это и есть непрерывность.

□

3.25. Билет 64: Теорема об интегрировании равномерно сходящейся последовательности(ряда). Существенность равномерности.

Теорема 3.40 (О перестановке предела и суммы).

$f_n \in C[a,b]$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$.

Тогда $\int\limits_a^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_a^x f(t)dt$

Доказательство.

$$\left|\int\limits_a^x f_n(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt\right| = \left|\int\limits_a^x (f_n(t)-f(t))dt\right| \le \int\limits_a^x |f_n(t)-f(t)|dt \le$$
$$\le (x-a)\max_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)| \le (b-a)\max_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)| \longrightarrow 0$$

Почему последнее стремится к 0? Потому что была теорема про равномерную сходимость, только в той теореме был супремум. Более того, последнее выражение ещё и от x не зависит, значит

$$\max_x \left|\int\limits_a^x f_n(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt\right| \longrightarrow 0$$

Значит, по той же теореме, где был изначально супремум, получаем равномерную сходимость. Что и требовалось доказать. □

Следствие.

$u_n \in C[a,b]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$.

Тогда $\int\limits_a^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^x u_n(t)dt$

Доказательство.

$S_n \rightrightarrows S \Rightarrow \int\limits_a^x S_n \rightrightarrows \int\limits_a^x S$. В то же время $\int\limits_a^x S_n = \int\limits_a^x \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_a^x u_k(x)$. Мы знаем, что такая сумма интегралов имеет конечный предел, а такая сумма интегралов это просто частичная сумма ряда. Значит, мы знаем, что частичная сумма ряда имеет некоторый предел. Значит, просто сумма ряда это и есть тот самый предел.

Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^x u_n(t) = \int\limits_a^x S = \int\limits_a^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ □

Замечание.

Поточечной сходимости не хватает

Пример. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ на $[0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$$\int\limits_0^1 f_n(t)dt = \int\limits_0^1 nte^{-nt^2}dt = [s = nt^2] = \frac{1}{2}\int\limits_0^n e^{-s}ds = -\frac{1}{2}e^{-s}|_0^n = \frac{1-e^{-n}}{2} \nrightarrow 0$$

А предельная функция 0. Что-то не то...

3.26. Билет 65: Теорема о дифференцировании равномер- но сходящейся последовательности (ряда). Суще- ственность равномерности.

Теорема 3.41.

$f_n \in C^1[a,b]$, $f_n(c) \to A$ и f_n' равномерно сходятся к g на $[a,b]$.

Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$, $f \in C^1[a,b]$ и $f' = g$.

В частности $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))'$.

Доказательство.

$\int\limits_c^x g(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_c^x f_n'(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(c)) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) - A.$

$f_n(x) \rightrightarrows A + \int\limits_c^x g(t)\,dt =: f(x)$ мы проверили равномерную сходимость. И $f(x)$ – дифференцируемая функция.

$f'(x) = g(x)$ – непрерывная функция, т.к. $f_n' \rightrightarrows g$ и f_n непрерывние. □

Следствие.

$u_n \in C^1[a,b]$ $c \in [a,b]$ $\sum u_n'(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$ и $\sum u_n(c)$ сходится.

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится к непрерывной дифференцируемной функции и $(\sum u_n(x))' = \sum u_n'(x)$

Доказательство.

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \Rightarrow S_n' = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k'$

По условию $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k' \rightrightarrows g$ и $S_n(c) \to A$.

И тогда по прошлой теореме

$S_n \rightrightarrows S, S \in C^1[a,b]$ и $S' = g \Rightarrow (\sum u_n(x))' = \sum u_n'(x)$. □

Пример.

Равномерная сходимость ряда производной важна:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ – равномерно сходится по признаку Вейерштрасса

$(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2})' \overset{?}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{\sin nx}{n^2})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ – расходится при $x = 2\pi k$

Т.е. равенства нет.

3.27. Билет 66: ! Степенные ряды. Теорема о сходимости ряда при меньших аргументах. Радиус и круг сходимости. Формула Коши–Адамара. Примеры.

***Определение* 3.15.**

Степенной ряд с центром в z_0:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ $a_n, z_0, z \in \mathbb{C}$

Мы всегда можем выбрать точку $w := z - z_0$, тогда у нас всегда центр будет в точке 0.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w^n$

Теорема 3.42.

Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $z = z_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится и при всех $|z| < |z_0|$.

Доказательство.

$\sum a_n z_0^n$ сходится $\Rightarrow a_n z_0^n \to 0$, значит $|a_n z_0^n| \leqslant M \forall n$.

$|a_n z^n| = \left|a_n z_0^n (\frac{z}{z_0})^n\right| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ – этот ряд абсолютно сходится, т.к. это геометрическая прогрессия.

□

Следствие.

$\sum a_n z^n$ расходится при $z = z_0$, то он расходится и при $|z| > |z_0|$

Доказательство.

От противного. Допустим он сходится в $|z| > |z_0|$, тогда он сходится и в z_0. □

***Определение* 3.16.**

Радиус сходимости степенного ряда – такое число $R \in [0, +\infty]$, что при $|z| < R$ ряд сходится, а при $|z| > R$ ряд рассходится. (для рядов с центром в точке 0, иначе $|z - z_0| < R$ сходится и $|z - z_0| > R$ расходится).

***Определение* 3.17.**

Круг сходимости – круг радиуса R с центром в точке z_0, где R – радиус сходимости.

Лемма.

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in (0, +\infty)$

Тогда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$

Доказательство.

$A := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $B := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$ $C := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n y_n$

Надо доказать, что $AB = C$

"$\leqslant$"

B – верхний предел $\Rightarrow \exists n_1, n_2, ...,$ т.ч. $y_{n_k} \to B$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = AB$

AB – частичный предел $x_n y_n$

C – верхний предел $=$ наибольший из частичных

$AB \leqslant C$

"$\geqslant$"

C – верхний предел.

$\Rightarrow \exists n_1, n_2, \ldots \quad x_{n_k} y_{n_k} \to C$

$C = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} y_{n_k} \Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} y_{n_k}}{\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}} = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}$

$\frac{C}{A}$ – частичный предел для y_n

B – верхний предел = наибольший из частичных.

$\frac{C}{A} \leqslant B$ □

Замечание.

$\overline{\lim}\, x_n y_n \neq \overline{\lim}\, x_n \, \overline{\lim}\, y_n$

$x_n = \begin{cases} 0 & n \text{ – четно} \\ 1 & n \text{ – нечетно} \end{cases} \quad y_n = \begin{cases} 1 & n \text{ – четно} \\ 0 & n \text{ – нечетно} \end{cases}$

$x_n y_n \equiv 0$

$\overline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, y_n = 1$

Теорема 3.43 (Формула Коши-Адамара)**.**

Всякий степенной ряд имеет радиус сходимости и он выражается формулой $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Доказательство.

Применим признак Коши к ряду.

$K := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\,|z|$

Если $K < 1$, то ряд абсолютно сходится $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| < 1 \Leftrightarrow |z| < R$.

Если $K > 1$, то члены ряда не стремятся к $0 \Rightarrow$ ряд расходится $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| > 1 \Leftrightarrow |z| > R$.

□

Замечание.

Внутри круга сходимости ряд сходится абсолютно.

Пример.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^n \;\; R = 0$

   $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{n!} = \lim \sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \lim \frac{n}{e} \to +\infty$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \;\; R = +\infty$

   $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n!}} = 0$

3.28. Билет 67: Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теорема Абеля.

Теорема 3.44.

R – радиус сходимости, $0 < r < R$. Тогда в круге $|z| \leqslant r$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$r < R \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ сходится абсолютно. Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ |z| \leqslant r$ воспользуемся признаком Вейерштрасса. $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$, $|a_n| r^n$ сходится $\implies$ по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ |z| \leqslant r$ сходится равномерно. □

Замечание.

Равномерной сходимости во всем круге может не быть.

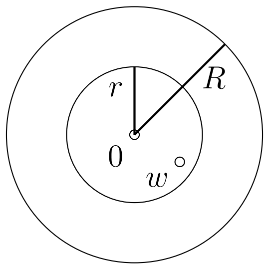
Контрпимер $R = 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, хвост ряда $\sum\limits_{k=n}^{\infty} z^k = \frac{z^n}{1-z} \not\rightrightarrows 0$, т.к. можем одновременно приблизить числитель к единице, а знаминатель к нулю, и дробь получается сколь угодно большой.

Следствие.

Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

Доказательство.

Возьмем произвольную точку w из круга сходимости, достаточно доказать лишь непрерывность в окресности. Берем r, т.ч. $|w| < r < R$. Знаем, что в круге $|z| < r$ ряд равномерно сходится. Есть равномерная сходимость и каждое слагаемое это непрерывная функция $\Longrightarrow$ в круге $|z| < r$ сумма непрерывна $\Longrightarrow$ есть непрерывность суммы и в w. В силу произольности w сумма непрерывна в любой точке $|z| < R$.



$\square$

Теорема 3.45 (Абеля)**.**

Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и ряд сходится при $z = R$. Тогда на отрезке $[0, R]$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. Применим признак Абеля. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится равномерно (нет зависимости от x), $\left(\frac{x}{R}\right)^n \in [0, 1] \implies$ равномерно огранич., $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ монотонно убывает, тогда по признаку Абеля $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно. $\square$

Следствие.

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, если выполнены условия теоремы, то $f(x) \in C[0, R]$, т.к. равномерная сходимость влечет непрерывность. В частности, $\lim\limits_{x \to R-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

3.29. Билет 68: Почленное интегрирование суммы степенного ряда.

Лемма.

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \in (0, +\infty)$. Тогда $\overline{\lim}\, x_n y_n = \lim x_n \overline{\lim}\, y_n$.

Доказательство.

$A = \lim x_n, B = \overline{\lim}\, y_n, C = \overline{\lim}\, x_n y_n$. (Напоминание: верхний предел это наибольший из частичных).

$\exists n_k$, т.ч. $x_{n_k}y_{n_k} \to C$. $\lim x_{n_k}y_{n_k} = \lim x_{n_k} \lim y_{n_k}$, равенство есть, т.к. существует предел слева и предел x_{n_k}. Из равенства следует, что $\lim y_{n_k} = \frac{C}{A} \leqslant B \implies C \leqslant AB$.

$\exists m_k$, т.ч. $y_{n_k} \to B$. $\lim x_{m_k}y_{m_k} = \lim x_{m_k} \lim y_{m_k} \implies \lim x_{m_k}y_{m_k} = AB \leqslant C$.

Итого равенство. □

Следствие.

Радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$ совпадают.

Доказательство.

Домножение на z не влияет на радиус, поэтому докажем для рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^n$.

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}}, R_2 = \frac{1}{\overline{\lim}\ \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}}}, R_3 = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{n}}$$

$\lim \sqrt[n]{n+1} = \lim \sqrt[n]{n} = 1$, по лемме можем вытащить из под верхнего предела и окажется, что $R_1 = R_2 = R_3$. □

Теорема 3.46 (Почленное интегрирование степенного ряда)**.**

R – радиус сходимости ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Тогда при $|x-x_0| < R$

$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ и полученный ряд имеет тот же радиус сходимости.

Доказательство.

На $[x_0, x]$ ряд сходится равномерно (теорема из билета 67) $\implies f \in C[x_0, x]$ и можно интегрировать почленно $\int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{x_0}^{x} (t-x_0)^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$. □

3.30. Билет 69: Комплексная диффернцируемость. Дифференцирование степенного ряда.

***Определение* 3.18.**

$f : E \mapsto \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathrm{Int} E$. Если существует $k \in \mathbb{C}$, такое что $f(z) = f(z_0) + k(z-z_0) + o(z-z_0)$ при $z \to z_0$, то f – **комплексно-дифференцируема в точке** z_0 и k – **производная** f в точке z_0.

Замечание.

1. $k = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =: f'(z_0)$
2. Существование производной равносильно дифференцированию

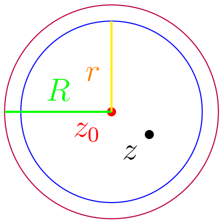
Теорема 3.47.

R – радиус сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

Тогда f – бесконечно дифференцируема в круге $|z-z_0| < R$ и

$f^{(m)}(z) = \sum\limits_{n=m}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}$

Доказательство.



Докажем индукцию по m. Рассмотрим $m = 1$ и $z_0 = 0$ (про z_0 для простоты). Возьмем $|z| < R$ и подберем такое r, что $|z| < r < R$ (картинка выше для пояснения). Возьмем $|w| < r$

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w \to z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n w^n - a_n z^n}{w - z} = \lim_{w \to z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2} z + \cdots + z^{n-1})$$

Первое равенство – просто вынесли ряд. Второе – просто поделили (что-то похожее на алгебре делали). Осталось доказать равномерную сходимость по $|w| < r$ последнего ряда, чтобы поменять местами предел и сумму. Проверять будем с помощью признака Вейерштрасса:

$$|a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \cdots + z^{n-1})| \leqslant |a_n|(|w|^{n-1} + |w|^{n-2}|z| + \cdots + |z|^{n-1}) \leqslant |a_n| n r^{n-1}$$

Второе неравенство, так как $|w| < r$ и $z < r$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}$ сходится, так как у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$ радиус сходимости $R > r$. Значит применился признак сходимости и мы можем поменять местами сумму с предлом.

$$\lim_{w \to z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2} z + \cdots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{w \to z} a_n (w^{n-1} + w^{n-2} z + \cdots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Если применить эту форму m раз, то получим искомую формулу. □

3.31. Билет 70: Формула для коэффициентов разложения в ряд аналитической функции. Несовпадение классов бесконечно дифференцируемых и аналитических функций.

Теорема 3.48 (единственность разложения функции в степенной ряд)**.**
Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ при $|z - z_0| < R$ – радиус сходимости.

Тогда ряд раскладывается единственным образом, причем коэффициенты в этом ряду будут выглядеть так: $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Доказательство.
По предыдущей теореме:

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) a_n (z - z_0)^{n-m}$$

Подставим $z = z_0$. Тогда все слагаемые кроме первого занулятся и получим:

$$f^{(m)}(z_0) = m(m-1)\dots 1 \cdot a_m = m! a_m$$

. Отсюда $a_m = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. □

***Определение* 3.19.**

Ряд Тейлора функции f в точке z_0 называется ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

***Определение* 3.20.**

Функция называется **аналитической** в точке z_0, если она является суммой своего ряда Тейлора для точки z_0 в окрестности точки z_0.

Ряд Тейлора мы можем писать только, если функция бесконечно дифферинцируема. Но бывают бесконечно дифференцируемые функции, которые не являются аналитическими, например:

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим точки $x \neq 0$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$$

Идем по индукции ($n \to n+1$), проверяем есть ли формула для разных производных:

База: Для f: $f = P_0 e^{-1/x^2}$, то есть $P_0 \equiv 1$

Переход:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = (P_n(x)x^{-3n}e^{-1/x^2})' =$$

$$= P_n(x)x^{-3n}e^{-1/x^2}\frac{1}{x^3} + P_n'(x)x^{-3n}e^{-1/x^2} + P_n(x)(-3n)x^{-3n-1}e^{-1/x^2} = \frac{e^{-1/x^2}}{x^{3n+3}}P_{n+1}(x)$$

Найдем $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$ Докажем по индукции ($n-1 \to n$), что $f^{(n)}(0) = 0$.

Переход:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}}{x} = \lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}\frac{P_n(x)}{x^{3n+1}} \underset{y=1/x}{=} \lim_{y\to\infty} e^{-y^2}y^{3n+1}P_n\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$P_n\left(\frac{1}{y}\right) \xrightarrow[y\to\infty]{} P_n(0)$ – константа

$e^{-y^2}y^{3n+1} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$, так как e^{-y^2} убывает быстрее.

Значит ряд Тейлора равен 0, но функция не 0 в точках $x \neq 0$. Значит функция не аналитическая.

3.32. Билет 71: ! Определение e^z, $\sin z$ и $\cos z$. Свойства. Ряд Тейлора для $\log(1+x)$.

Теорема 3.49 (Определение и свойства e^z)**.**

Мы уже знаем разложение в ряд Тэйлора:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Показательную функцию комплексного переменного

$$w = e^z$$

определим равенством

$$e^z = e^{(x+iy)} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Справедлива формула Эйлера:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin x$$

Функция $w = e^z$ определена на всей комплексной плоскости и на действительной оси совпадает с соответствующей функцией действительного переменного. Сходится во всей плоскости.

Свойства:

- $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$;
- $e^z \neq 0,$ так как $|e^z| = e^x > 0$;
- e^zпериодическая с периодом $T = 2\pi i$, т.е. $e^{z+2\pi i} = e^z$

Теорема 3.50 (Определение и свойства $\sin z$ и $\cos z$)**.**

Мы уже знаем разложение в ряд Тэйлора:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!},\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ определим через показательную функцию по формулам Эйлера

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

Сходятся во всей плоскости.

Свойства:

- При $z = x, \sin z$ и $\cos z$ совпадают с тригонометрическими функциями $\sin x$ и $\cos x$ действительной переменной x.
- Выполняются основные тригонометрические соотношения.
- $\sin z$ и $\cos z$ периодические функции с основным периодом 2π.
- $\sin z$ - нечетная функция, $\cos z$ - четная функция.
- Могут принимать любые значения, а не только ограниченные по модулю единицей.
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Теорема 3.51 (Ряд Тейлора для $\log(1 + x)$)**.**

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},\ \text{при } x \in (-1, 1)$$

Доказательство.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \text{ при } x \in (-1,1)$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k},\ k = n+1$$

□

3.33. Билет 72: Ряды Тейлора для $\operatorname{arctg} x$, $(1+x)^p$ и $\arcsin x$.

Теорема 3.52 (Ряд Тейлора для $\operatorname{arctg} x$)**.**

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ при } x \in (-1,1)$$

Доказательство.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \text{ при } x \in (-1,1)$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

□

Теорема 3.53 (Ряд Тейлора для $(1+x)^p$)**.**

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!} x^n, \text{ при } x \in (-1,1)$$

Доказательство.

$$(1+x)^p = T_n(x) + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n((1+t)^p)n+1dt = T_n(x) + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n p(p-1)...(p-n)(1+t)^{p-n-1}dt$$

Обозначим $R_n = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n p(p-1)...(p-n)(1+t)^{p-n-1}dt$

Надо доказать, что $R_n(x) \implies 0$, при $x \in (-1,1)$

Достаточно проверить, что $|\frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)}| < 1-\delta$ ($\implies \lim R_n(x) = 0$)

$$\left|\frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)}\right| = \frac{|p-n-1|}{n+1}\left|\frac{\int_0^x (x-t)^{n+1}(1+t)^{p-n-2}dt}{\int_0^x (x-t)^n(1+t)^{p-n-1}dt}\right| = \frac{|p-n-1|}{n+1}\left|\frac{\int_0^x (x-t)^n(1+t)^{p-n-1}\frac{x-t}{1+t}dt}{\int_0^x (x-t)^n(1+t)^{p-n-1}dt}\right|$$

Поймем, что $\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leqslant |x|$: если $x > 0$, то $\frac{x-t}{1+t} \leqslant x$, если $x < 0$, то обозначим $y = -x, s = -t$, получим $\frac{|-y+s|}{1-s} = \frac{y-s}{1-s} \leqslant y$.

Заметим что оставшееся выражение под большим модулем имеет фиксированный знак, тогда:

$$\frac{|p-n-1|}{n+1}\left|\frac{\int_0^x (x-t)^n(1+t)^{p-n-1}\frac{x-t}{1+t}dt}{\int_0^x (x-t)^n(1+t)^{p-n-1}dt}\right| \leqslant \frac{|p-n-1|}{n+1}|x|\frac{\int_0^x |(x-t)^n(1+t)^{p-n-1}|dt}{\int_0^x |(x-t)^n(1+t)^{p-n-1}|dt} =$$

$$= \frac{|p-n-1|}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$$

$$\left|\frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)}\right| \leqslant (1+\epsilon)|x| < 1-\delta, \text{ при больших n}$$

$\square$

Теорема 3.54 (Ряд Тейлора для $\arcsin x$)**.**

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ при } x \in (-1,1)$$

Доказательство.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{C_{2n}^n}{4^n}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{2n}^n}{4^n}x^{2n}$$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{2n}^n}{4^n}\int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{2n}^n}{4^n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$\square$

4. Функции нескольких переменных

4.1. Билет 73: ! Дифференцируемость отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Частные случаи. Матрица Якоби. Градиент.

***Определение* 4.1.**

$f : E \mapsto \mathbb{R}^m \quad a \in \operatorname{Int} E, E \subset \mathbb{R}^n$

f - дифференцируема в точке a, если существует линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$,

такое что $f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$, где $\dfrac{\alpha(h)}{||h||} \to 0$ при $h \to 0$

Замечание.

Заметим, что в нашем определении все 0 - векторы, ровно как и аргументы.

Например, $h \in \mathbb{R}^n$, $\alpha(h) \in \mathbb{R}^m$

Замечание.

Несложно убедиться, что данное определение ровно такое же, как и определение, которое давалось, когда мы говорили про дифференцируемость функции одной переменной. С той лишь разницей, что тогда вместо T у нас было просто домножение на константу (тоже линейное отображение, но тривиальное), а добавкой была $o(||h||)$ (но у нас записано тоже самое, ведь по сути $\alpha(h) = o(||h||)$). Получается, что дифференцируемость функции от одной переменной, про которую мы говорили раньше - это частный случай при $n = m = 1$.

***Определение* 4.2.**

T - дифференциал функции f в точке a. Обозначается чаще всего $d_a f$

Замечание.

Если T существует, то оно определено однозначно.

Зафиксируем $h \in R^n$. $f(a+th) = f(a) + T(th) + \alpha(th)$, где $t \in R$

Так как T - линейно, то $T(th) = tT(h)$

$Th = \dfrac{f(a+th) - f(a)}{t} - \dfrac{\alpha(th)}{t}$ Перейдем к пределу при $t \to 0$

Так можно сделать, потому что $\dfrac{\alpha(th)}{t} \to 0$ при $t \to 0$,

поскольку это записано в определении дифференцируемости функции (фиксированное h).

Тогда получили:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = Th$$

Значит это отображение однозначно.

***Определение* 4.3.**

Матрица линейного оператора T - матрица Якоби функции f в точке a

Обозначается матрица T: $f'(a)$

Данное обозначение намекает, что эта матрица - некий аналог производной для функции одной переменной

Замечание.

Дифференцируемость функции f в точке a влечет непрерывность f в точке a.

$f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$.

Перейдем к пределу при $h \to 0$, получим:

$f(a) + Th + \alpha(h) \to f(a) + 0 + 0 = f(a)$,

так как $\alpha(h)$ при делении на $||h||$ уже будет стремится к 0, здесь же тем более

Получили определение непрерывности

Пример Важный частный случай $m = 1$.

Получаем отображение $f : E \mapsto \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$

Мы из вектора сделали число. Это скалярное произведение на какой-то вектор.

Потому что можно представить, что умножаем матрицу на вектор и получаем вектор размера 1.

Откуда получаем, что эта матрица - это строчка размера n.

Ну а это - скалярное произведение.

$f(a+h) = f(a) + \langle v, h\rangle + \alpha(h)$ для некоторого $v \in R^n$

***Определение* 4.4.**

v - градиент функции f в точке a

Обозначается: $\operatorname{grad} f$ или ∇f

4.2. Билет 74: ! Дифференцируемость координатных функций. Примеры дифференцируемых отображений

Разберем несколько примеров дифференцируемых отображений.

Пример.

$f(x) = const = c$

$f(a+h) = f(a)$

$T \equiv 0$, $\alpha \equiv 0$

Пример.

f - линейное отображение

$f(a+h) = f(a) + f(h) = f(a) + T(h)$

$T = f$, $\alpha \equiv 0$

***Определение* 4.5.**

$f : E \mapsto \mathbb{R}^m,\ E \subset \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \quad f_k : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \text{ - координатные функции}$$

Теорема 4.1.

Дифференцируемость функции f в точке a равносильна дифференцируемости в точке a

всех ее координатных функций.

Доказательство.

$f : E \mapsto R^m, E \subset \mathbb{R}^n$

1. $\Rightarrow f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$, где $\alpha(h) = o(||h||)$

   Распишем определение в виде векторного равенства:

   $$\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ f_2(a+h) \\ \vdots \\ f_m(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1(h) \\ T_2(h) \\ \vdots \\ T_m(h) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(h) \\ \alpha_2(h) \\ \vdots \\ \alpha_m(h) \end{pmatrix}$$

   Рассмотрим конкретную координату:

   $f_k(a+h) = f_k(a) + T_k h + \alpha_k(h)$

   $T_k h$ - произведение строки матрицы на вектор, поэтому - линейное отображение (по сути просто скалярное произведение).

   Необходимо показать, что $\dfrac{\alpha_k(h)}{||h||} \to 0$ при $h \to 0$

   Достаточно заметить, что так как $||\alpha(h)|| = \sqrt{\sum \alpha_k(h)^2}$, то $|\alpha_k(h)| \leqslant ||\alpha(h)||$

   Но тогда $\dfrac{|\alpha_k(h)|}{||h||} \leqslant \dfrac{||\alpha(h)||}{||h||} \to 0$

   Отсюда получаем вывод, что $\dfrac{\alpha_k(h)}{||h||} \to 0$, получается,

   что доказали для всех координатных функций.

2. $\Leftarrow$

   Знаем, что $f_k(a+h) = f_k(a) + T_k h + \alpha_k(h)$ и $\dfrac{\alpha_k(h)}{||h||} \to 0$ при $h \to 0$

   Соберем все это в один вектор, из строчек T получаем матрицу, тогда в результате:

   $f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$

   Надо проверить, что $\dfrac{\alpha(h)}{||h||} \to 0$, т. е. $\dfrac{||\alpha(h)||}{||h||} \to 0$

   $$\frac{||\alpha(h)||}{||h||} = \frac{\sqrt{\alpha_1(h)^2 + \ldots + \alpha_m(h)^2}}{||h||} = \sqrt{\frac{\alpha_1(h)^2}{||h||^2} + \ldots + \frac{\alpha_m(h)^2}{||h||^2}} \to 0$$

$\square$

Следствие.

Строки матрицы Якоби - градиенты координтных функций.

Доказательство.

Строки матрицы Якоби - это те самые T_k, которые встречались в доказательстве теоремы.

Тогда можно заметить, что $T_k h = \langle T_k^T, h \rangle$

Отсюда получаем, что строки матрицы Якоби - градиенты координтных функций. $\square$

4.3. Билет 75: ! Производная по направлению. Экстремальное свойство градиента

***Определение* 4.6** (Направление).

Это такой вектор, единичной длины, который смотрит в нужную нам сторону.

***Определение* 4.7** (Производная по направлению).

Имеем направление h. Также есть внутренняя точка a, то есть $a \in \mathrm{Int}E$. И сама функция $f : E \mapsto \mathbb{R}$. Напомню, что $E \subset \mathbb{R}^n$.

Тогда следующая штука, это производная функции f по направлению h в точке a:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t \cdot h) - f(a)}{t}$$

Теорема 4.2 (Вспомогательная теорема).

Имеем направление h, $f : E \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{Int}E$ и f дифференцируема в точке a.

Тогда выполняются следующие равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = d_a f(h) = \langle \nabla f, h\rangle$$

Доказательство.

Воспользуемся определением дифференцируемости функции f:

$$f(a + t \cdot h) = f(a) + T(t \cdot h) + \alpha(t \cdot h)$$

Воспользуемся линейностью и получим:

$$f(a + t \cdot h) = f(a) + t \cdot Th + \alpha(t \cdot h) \implies$$
$$\implies f(a + t \cdot h) - f(a) = t \cdot Th + \alpha(t \cdot h)$$

Теперь распишем производную по направлению

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t \cdot h) - f(a)}{t}$$

Благодаря прошлым замечанием, можем заменить числитель:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{t \cdot Th + \alpha(t \cdot h)}{t} = \lim_{t\to 0}(Th + \frac{\alpha(t \cdot h)}{t})$$

Заметим, что Th какая-то константа, поэтому можно вынести:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = Th + \lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t \cdot h)}{t}$$

Заметим, что $\|t\cdot h\| = t\cdot\|h\| = t$: норма направления равна единице. Следовательно $\lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t\cdot h)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t\cdot h)}{\|t\cdot h\|} = 0$: по определению α.
Получаем, что

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = Th$$

Осталось вспомнить, что $Th = d_a f(h)$, просто альтернативная запись. Следовательно, первое равенство у нас есть.

Разберёмся со вторым. Но тут совсем всё просто, так как перед нами определение градиента. ()

$\square$

Следствие Экстремальное свойство градиента.

Имеем направление h, $f : E \mapsto \mathbb{R}$, функция f дифференцируема в точке a и $\nabla f(a) \neq 0$.

Тогда для любого направления h выполнено следующее:

$$-\|\nabla f(a)\| \leq \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leq \|\nabla f(a)\|$$

А равенство достигается, когда $h = \pm \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$

Смысл следствия. Оно объясняет физический смысл градиента. Градиент это вектор, в направлении которого функция меняется быстрее всего.

Доказательство.

Напишем равенство, которое мы вывели в прошлой теореме:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \nabla f, h \rangle \implies |\frac{\partial f}{\partial h}(a)| = |\langle \nabla f, h \rangle|$$

Напишем неравенство Коши-Буняковского.

$$|\langle \nabla f, h \rangle| \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\| = \|\nabla f(a)\| \implies |\frac{\partial f}{\partial h}(a)| \leq \|\nabla f(a)\|$$

То есть неравенство мы уже доказали.

Далее осталось вспомнить, когда в неравенстве Коши-Буняковского, получается равенство. Это происходит тогда и только тогда, когда вектора являются пропорциональными. Осталось вспомнить, что норма h должна быть строго равна единице. Следовательно у нас есть два возможных выбора для h:

$$h = \pm \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$$

□

4.4. Билет 76: ! Частные производные. Элементы матрицы Якоби. Координатная запись формул для производных.

***Определение* 4.8** (Частная производная)**.**

Это просто производная по направлению от одного из базисных векторов. Определим её так:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) := \frac{\partial f}{\partial e_k}(a), \text{ где } e_k \text{– k-ый базисный вектор}$$

Давайте посмотрим на **пример**. Есть функция от двух переменных $f(x, y)$. Хотим узнать частную производную по направлению оси абсцисса в какой-то точке (a, b). Вычислим её по определению:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{f((a, b) - t \cdot (1, 0)) - f(a, b)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t}$$

Итак, что же здесь происходит. В данном случае мы зафиксировали второй координатный параметр. То есть функция стала зависеть только от значения первого аргумента. Иными словами, f превратилась в самую обыкновенную функцию от одной переменной, производную для которой мы отлично умеем считать.

Вывод, частная производная устроена следующим образом. Мы фиксируем все координаты кроме той, по которой мы хотим продифференцировать. В итоге рассматриваем функцию только от нужного нам аргумента, и считаем её производную.

Еще один пример. Дана функция $f(x,y) = x^y$. Посчитать две частные производные.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1},\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x$$

В первом случае мы зафиксировали y – стали воспринимать его константой. Во втором случае аналогично для x.

Замечание Иное определение градиента.

Вспомним теорему из билета №75

$$\frac{\partial f}{\partial e_k} = \langle \nabla f(a), e_k \rangle \implies \frac{\partial f}{\partial x_k} = \langle \nabla f(a), e_k \rangle$$

Поймем, что представляет из себя это скалярное произведение – это просто k-ая координата вектора $\nabla f(a)$. Отсюда делаем вывод, что градиент – это вектор, которые состоит из частных производных.

$$\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

Замечание Элементы матрицы Якоби.

Пусть у нас есть $f : E \mapsto \mathbb{R}^m$. Поймём, что такое матрица $f'(a)$. Знаем, что она составлена из градиентов координатных функций(смотреть следствие из теоремы о дифференцируемости координатных функций – билет №74). А мы уже знаем, как выглядит градиент(замечание выше). Поэтому матрица Якоби имеет следующий вид:

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

4.5. Билет 77: ! Линейность диференциала. Дифференциал композиции.

Теорема 4.3 (линейность дифференцирования)**.**

$f, g : E \to \mathbb{R}^m \;\; E \subset \mathbb{R}^n \;\; a \in \operatorname{Int} E$

f, g – дифференцируемы в точке a, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

$f \pm g$, λf – дифференцируемы в точке a

$d_a(f \pm g) = d_a f \pm d_a g \quad d_a(\lambda f) = \lambda \cdot d_a f$

Доказательство.

$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(||h||) \;\; ||h|| \to 0$

$g(a+h) = g(a) + d_a g(h) + o(||h||) \;\; ||h|| \to 0$

$f(a+h) + g(a+h) = f(a) + g(a) + d_a f(h) + d_a g(h) + o(||h||)$

$f(a+h) + g(a+h) = f(a) + g(a) + (d_a f + d_a g)(h) + o(||h||)$

□

Теорема 4.4 (дифференцирование композиции)**.**

$f : D \to \mathbb{R}^m \;\; D \subset \mathbb{R}^n, \;\; g : E \to \mathbb{R}^l \;\; E \subset \mathbb{R}^m$

$a \in \operatorname{Int} D \;\; f(a) \in \operatorname{Int} E \;\; f(D) \subset E$

Тогда $g \circ f$ – дифференцируема в точке a и

$d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f$

Замечание.

$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Доказательство.

$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \alpha(h)||h|| \;\; ||h|| \to 0$

$b := f(a) \;\; g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)||k|| \;\; ||k|| \to 0$

$k := d_a f(h) + \alpha(h)||h||$

$||k|| \leqslant ||d_a f(h)|| + ||\alpha(h)||h|||| \leqslant ||d_a f|| \cdot ||h|| + ||\alpha(h)||||h|| \to 0$ при $h \to 0$

Замечание.

Т.к. $d_a f$ - матрица, а $d_a f(h) = d_a f \cdot h$

Определение нормы матрицы(грубо):

$||A|| = \sup\limits_{||x|| \leqslant 1} ||Ax||$

Из этого мы хотим вывести, что $||Ah|| \leqslant ||A|| \cdot ||h||$.

$||Ah|| = \left\| A \frac{h}{||h||} \cdot ||h|| \right\| = ||h|| \cdot \left\| A \frac{h}{||h||} \right\|$

Т.к. $\left\| \frac{h}{||h||} \right\| = 1$, то получаем, что $\left\| A \frac{h}{||h||} \right\| \leqslant ||A||$ (в определении sup берется ото всех векторов с нормой до 1, а здесь вектора только с нормой 1).

Значит, $||d_a f(h)|| = ||d_a f \cdot h|| \leqslant ||d_a f|| \cdot ||h||$

$$g(f(a+h)) = g(f(a)+k) = g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)||k|| =$$
$$= g(b) + d_b g(d_a f(h)) + d_b g(\alpha(h)||h||) + \beta(k)||k|| =$$
$$= g(f(a)) + (d_b g \circ d_a f)(h) + d_b g(\alpha(h)||h||) + \beta(k)||k||$$

Хотим показать, что $d_b g(\alpha(h)||h||) + \beta(k)||k|| = o(||h||)$

$d_b g(\alpha(h)||h||) = ||h|| \cdot d_b g(\alpha(h))$ (т.к. $d_b g(\alpha(h)||h||) = d_b g \cdot \alpha(h) \cdot ||h||$)

$||d_b g(\alpha(h)||h||)|| \leqslant ||h|| \cdot ||d_b g|| \cdot ||\alpha(h)||$, а $||d_b g|| \cdot ||\alpha(h)|| \to 0$

Замечание.

$\lim\limits_{h \to 0} ||d_b g|| \cdot ||\alpha(h)|| = ||d_b g|| \cdot \lim\limits_{h \to 0} ||\alpha(h)||$

$\alpha(h) \cdot ||h|| = o(h)$ (по определению)

Значит, $\alpha(h) \to 0$.

Известно, что если $x_n \to a$, то $||x_n|| \to ||a|| \implies ||\alpha(h)|| \to ||0|| = 0$.

$||\beta(k)||k|||| = ||k|| \cdot ||\beta(k)|| \leqslant ||\beta(k)||(||d_a f|| \cdot ||h|| + ||\alpha(h)|| \cdot ||h||) = ||h|| \cdot ||\beta(k)||(||d_a f|| + ||\alpha(h)||)$.

А $||\beta(k)||(||d_a f|| + ||\alpha(h)||) \to 0$.

Все получили. $\square$

4.6. Билет 78: ! Две теоремы о дифференцируемости произведения функций.

Теорема 4.5 (о дифференцировании произведения скаляра и векторной функции).

$E \subset \mathbb{R}^n \ \ a \in \operatorname{Int} E \ \ f : E \to \mathbb{R}^m$

$\lambda : E \to \mathbb{R}$

f и λ – дифференцируемы в точке a, тогда λf – дифференцируема в точке a.

$d_a(\lambda f) = d_a\lambda \cdot f(a) + \lambda(a) \cdot d_a f$

Доказательство.

$\lambda(a+h)f(a+h) - \lambda(a)f(a) = \lambda(a+h)(f(a+h) - f(a)) + (\lambda(a+h) - \lambda(a))f(a) =$

$f(a+h) - f(a) = d_a f(h) + o(||h||)$

$\lambda(a+h) - \lambda(a) = d_a\lambda(h) + o(||h||)$

$$= \lambda(a+h)(d_a f(h) + o(||h||)) + (d_a\lambda(h) + o(||h||))f(a) =$$
$$= (\lambda(a) + d_a\lambda(h) + o(||h||))(d_a f(h) + o(||h||)) + (d_a\lambda(h) + o(||h||))f(a) =$$
$$= \ \lambda(a)d_a f(h) + d_a\lambda(h) \cdot f(a) + \lambda(a)o(||h||) + d_a\lambda(h) \cdot o(||h||) +$$
$$+ o(||h||) \cdot o(||h||) + d_a\lambda(h)d_a f(h) + o(||h||)d_a f(h) + o(||h||)f(a)$$

Про последние шесть слагаемых хотим сказать, что они $o(||h||)$.

Самое не очевидное –

$d_a\lambda(h) \cdot o(||h||) = o(||h||)$, т.к. $d_a\lambda(h) = d_a\lambda \cdot h$, при $h \to 0$, $d_a\lambda \cdot h \to 0$.

$d_a f(h) \cdot o(||h||) = o(||h||)$ показывается так же.

$o(||h||) \cdot o(||h||) = o(||h||)$ потому, что в окрестности 0: $||h||^2 < ||h||$.

$||d_a\lambda(h) \cdot d_a f(h)|| = |d_a\lambda(h)|\, ||d_a f(h)|| \leqslant ||d_a\lambda|| \cdot ||h|| \cdot ||d_a f|| \cdot ||h|| = const \cdot ||h||^2 = o(||h||)$ □

Теорема 4.6 (о дифференцировании скалярного произведения).

$E \subset \mathbb{R}^n \ \ a \in \operatorname{Int} E \ \ f, g : E \to \mathbb{R}^m$

f, g – дифференцируемы в точке a.

Тогда $\langle f, g\rangle$ – дифференцируема в точке a и:

$d_a \langle f, g\rangle (h) = \langle d_a f(h), g(a)\rangle + \langle f(a), d_a g(h)\rangle$

Доказательство.

$F := \langle f, g\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k g_k$

$d_a(f_k g_k) = d_a f_k \cdot g_k(a) + f_k(a)d_a g_k$ – частный случай предыдущей теоремы.

$dF = \sum\limits_{k=1}^{m} d_a(f_k g_k) = \sum\limits_{k=1}^{m}(d_a f_k g_k(a) + f_k(a)d_a g_k)$

$dF(h) = \sum\limits_{k=1}^{m} d_a f_k(h)g_k(a) + \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(a)d_a g_k(h) = \langle d_a f(h), g(a)\rangle + \langle f(a), d_a g(h)\rangle$ □

Замечание.

Частный случай, когда $n = 1$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}$$

$(\langle f(x), g(x)\rangle)' = \langle f'(x), g(x)\rangle + \langle f(x), g'(x)\rangle$

4.7. Билет 79: Теорема Лагранжа для векторнозначных функций.

Теорема 4.7.

$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ непрерывна и дифференцируема на (a, b). Тогда $\exists c \quad \in (a, b)$, такая что $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|f'(c)\| (b - a)$

Доказательство.

$\varphi(x) := \langle f(x), f(b) - f(a)\rangle : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$

$\varphi(x)$ удовлетворяет условию одномерной теоремы Лагранжа

$\exists c \quad \in (a, b)$, т.ч. $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(c')(b - a) = \langle f'(c), f(b) - f(a)\rangle (b - a)$

$\varphi'(x) = \langle f'(x), f(b) - f(a)\rangle + \langle f(x), (f(b) - f(a))'\rangle = \langle f'(x), f(b) - f(a)\rangle$

$\varphi(b)-\varphi(a) = \langle f(b), f(b) - f(a)\rangle-\langle f(a), f(b) - f(a)\rangle = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a)\rangle = \|f(b) - f(a)\|^2$

$\|f(b) - f(a)\|^2 = \langle f'(c), f(b) - f(a)\rangle (b - a) \leqslant \|f'(c)\| \|f(b) - f(a)\| (b - a)$ (Коши-Буняковский)

$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|f'(c)\| (b - a)$ □

Замечание. Равенство может никогда не достигаться

$f(x) = (\cos x, \sin x) : [0, 2\Pi] \mapsto \mathbb{R}^2$

$f(0) = (1, 0) = f(2\Pi)$

$f(2\Pi) - f(0) = (0, 0) \implies \|f(2\Pi) - f(0)\| = 0$

$f'(x) = ((\cos x)', (\sin x)') = (-\sin x, \cos x)$

$\|f'(x)\| = 1 \implies \|f'(c)\| (2\Pi - 0) = 2\Pi > \|f(2\Pi) - f(0)\| = 0$

4.8. Билет 80: ! Связь частных производных и дифференцируемости.

Теорема 4.8.

$f : E \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, a \in IntE.$

В окрестности точки а существуют все частные производные и они непрерывны в точке a.

Тогда f дифференцируема в точке a.

Доказательство.

По сути, мы знаем, как должно быть устроено линейное отображение из определения дифференцируемости, т.к. нам известны частные производные (подробнее об этом расписано в билете 76)

$R(h) := f(a + h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(a)h_k$

Надо доказать, что $\frac{R(h)}{\|h\|} \to 0$ при $h \to 0$

Заведем вспомогательные вектора: $b_k = (a_1 + h_1, ..., a_k + h_k, a_{k+1}, ..., a_n)$, заметим, что тогда получается $b_0 = a, b_n = a + h$

Рассмотрим вспомогательные функции одной переменной $F_k(t) := f(b_{k-1} + th_ke_k)$, здесь e_k - это стандартный вектор

Запишем в координатном виде: $F_k(t) := f(a_1 + h_1, ..., a_{k-1} + h_{k-1}, a_k + th_k, a_{k+1}, ..., a_n)$

Применим одномерную теорему Лагранжа: $\underbrace{F_k(1) - F_k(0)}_{f(b_k)-f(b_{k-1})} = F'_k(\Theta_k) = h_kf'_{x_k}(a_1 + h_1, ..., a_{k-1} + h_{k-1}, a_k + \Theta_kh_k, a_{k+1}, ..., a_n) = h_kf'_{x_k}(c_k)$ для некоторой $\Theta_k \in (0, 1)$

Получили, что $f(b_k)-f(b_{k-1}) = h_k f'_{x_k}(c_k)$. Сложим все получившиеся равенства: $f(b_n)-f(b_0) = f(a+h)-f(a) = \sum_{k=1}^n h_k f'_{x_k}(c_k) = \sum_{k=1}^n h_k f'_{x_k}(a) + \sum_{k=1}^n h_k(f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))$

Заметим, что $\sum_{k=1}^n h_k(f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))$ - формула для остатка $R(h)$

$|R(h)| \leqslant \|h\| \left(\sum_{k=1}^n (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))^2\right)^{\frac{1}{2}}$(КБШ)

$\iff \frac{R(h)}{\|h\|} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$ при $h \to 0$ по непрерывности частных производных

□

Замечание 1. В формулировке теоремы интересуемся дифференцируемостью скалярной функции, но дифференцируемость векторнозначной функции равносильна дифференцируемости каждой ее координатной функции, которая есть скалярная функция.

Замечание 2. Можно не требовать непрерывность ровно одной из частных производных

Доказательство.

Не требуем непрерывность f'_{x_1} в точке а. Необходимо, чтобы $f'_{x_1}(c_1) - f'_{x_1}(a) \to 0$.

Нас интересует разность $f(b_1) - f(b_0) = f(a_1 + h, a_2, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)$. То есть получили функцию, у которой последние координаты зафиксированы, а первую меняем. Такая функция дифференцируема в точке a_1 по определению частной производной.

$f(a_1 + h, a_2, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_n) + f'_{x_1}(a_1, ..., a_n)h_1 + o(h_1)$

$f(b_1) - f(b_0) = f'_{x_1}(a)h_1 + o(h_1)$ □

Замечание 3. Дифференцируемость в точке не дает существование част.производных в окрестности и тем более их непрерывность

Пример.

$f(x, y) = x^2 + y^2$, если ровно одно из чисел x или y рационально

$f(x, y) = 0$ иначе

f непрерывна только в точке (0, 0), в остальных точках нет непрерывности ни по какому направлению

Проверим дифференцируемость в (0, 0): $f(h, k) = \underbrace{f(0, 0)}_{=0} + Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$

$f(h, k) = o(\sqrt{h^2 + k^2})$, верно, т.к. $0 \leqslant f(h, k) \leqslant h^2 + k^2$

4.9. Билет 81: Непрерывная дифференцируемость. Определение и равносильное ей свойство

***Определение* 4.9.**

$f : E \to \mathbb{R}^m \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \operatorname{Int} E$

f – непрерывно дифференцируема в точке a, если

f дифференцируема в окрестности точки a и

$d_x f$ непрерывна в точке a ($\|d_x f - d_a f\| \to 0$ при $x \to a$)

Теорема 4.9.

f – непрерывно дифференцируема в точке $a \iff$

все частные производные f существуют в окрестности точки a и непрерывны в точке a.

Доказательство.

“$\Longrightarrow$” Разложим f на координатные функции, рассмотрим одну из них - f_k. Продифференцируем её по какому-то x_j. Рассмотрим модуль разности значений в точках x и a:

$\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\right|$

для доказательства оценим эту разность сверху чем-то стремящимся к 0.

Так как $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) = \langle d_x f(e_j), e_k\rangle$, то

$\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\right| = |\langle d_x f(e_j) - d_a f(e_j), e_k\rangle| \leqslant \|d_x f(e_j) - d_a f(e_j)\| \, \|e_k\| =$

$= \|d_x f(e_j) - d_a f(e_j)\| \leqslant \|d_x f - d_a f\| \, \|e_j\| = \|d_x f - d_a f\| \to 0$

“$\Longleftarrow$”

Рассмотрим $\|d_x f - d_a f\|^2$

Воспользуемся ранее доказаной теоремой, что квадрат нормы матрицы не превосходит суммы квадратов её коэффициентов:

$\|d_x f - d_a f\|^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} (\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a))^2 \to 0$, так как

из $x \to a$ и непрерывности частных производных следует, что каждое слагаемое стремится к 0, их конечное кол-во, значит, и сумма стремится к 0, поэтому $\|d_x f - d_a f\|^2 \to 0$, а тогда и $\|d_x f - d_a f\| \to 0$ □

4.10. Билет 82: ! Частные производные высших порядков. Теорема о перестановке частных производных в $\mathbb{R}^2$

***Определение* 4.10.**

$f : E \to \mathbb{R}$ $E \subset \mathbb{R}^n$ E – открытое множество.

$\frac{\partial f}{\partial x_k} : E \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}$ $f''_{x_k x_j} := (f'_{x_k})'_{x_j}$

Т.е. сначала фиксируем x_j (как будто параметр), считаем производную по x_k, затем наоборот.

Это частная производная второго порядка, можно писать и большие аналогично.

Пример.

$f(x, y) = x^y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^y \ln x) = \ln^2 x \cdot x^y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1}$

Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = \frac{y(x^4-y^4)-4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x} f(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x} f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{-y}{y} = -1$

Но в силу антисимметричности x и y.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$

Теорема 4.10.

$f : E \to \mathbb{R} \;\; E \subset \mathbb{R}^2 \;\; (x_0, y_0) \in \operatorname{Int} E$

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ существуют в окрестности точки (x_0, y_0) и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ещё и непрерывна в ней

Тогда существует и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ в точке (x_0, y_0).

Более того, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

Доказательство.

Рассмотрим $\varphi(s) = f(s, y_0 + k) - f(s, y_0)$, что такое k - поймём позже. Пока это просто какое-то число.

Заметим, что φ дифф. в окресности точки x_0 (следует из существования частной производной по y), поэтому можем применить к ней т. Лагранжа (одномерную):

$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h\varphi'(x_0 + \theta_1 h) \;\; \theta_1 \in (0,1)$

Левую часть обозначим за Δ, а правую распишем через определение φ, получим:

$\Delta = h(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0))$

Обозначим $\tilde{\varphi}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, t)$, тогда:

$\Delta = h(\tilde{\varphi}(y_0 + k) - \tilde{\varphi}(y_0))$

Снова применим лагранжа:

$\Delta = hk\tilde{\varphi}'(y_0 + \theta_2 k) = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$

Теперь введём $\psi(t) = f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)$. Это как φ, но меняем другую координату. t это пока тоже какое-то произвольное число. Сделаем шаги, аналогичные шагам выше, получим всё тоже самое, но для другой координаты. При этом заметим, что Δ у нас получится ровно такая же (можно проверить, написав определение Δ в первом и втором случае, подставить туда φ или ψ).

Делаем аналогичные шаги для ψ:

$\Delta = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta_3 k) = kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)$

В итоге мы получили:

$\Delta = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$

и

$\Delta = kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)$

Откуда

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$

Осталось устремить $h, k \to 0$ и воспользоваться непрерывностью производных:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

□

***Определение* 4.11.**

$f : E \to \mathbb{R} \;\; R \subset \mathbb{R}^n \;\; E$ – открыто

Функция f называется r раз непрерывно дифференцируемой или r-гладкой, если все частичные производные до r-ого порядка (включительно) существуют и непрерывны.

Обозначение – $C^r(E)$

Теорема 4.11.

$f : E \to \mathbb{R}$ $E \subset \mathbb{R}^n$ E – открыто $f \in C^r(E)$

$i_1, i_2, ..., i_r$ – перестановка $j_1, j_2, ..., j_r$

Тогда $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} ... \partial x_{j_r}}$

Доказательство.

Предыдущая теорема говорит, что любая транспозиция не меняет частной производной, а любая перестановка выражается через транспозиции.

На самом деле, это не совсем док-во. Мы ведь не доказали, что если в $\frac{\partial^r f}{\partial x_1 ... \partial x_i ... \partial x_j ... \partial x_{i_r}}$ поменять i-ый и j-ый, то значение не изменится. Исправим чуть док-во.

Заметим, что если $j = i + 1$, то у нас одинаковое начало (всё до i совпадает) + одинаковый хвост (всё после j одинаковое) + остаётся ровно утверждение из прошлой теоремы. Поэтому, на самом деле, мы можем делать любые транспозиции $(i, i + 1)$, но ими выражается любая перестановка. □

4.11. Билет 83: Теорема о равенстве частных производных для непрерывно дифференцируемых функций.

***Определение* 4.12.**

$f : D \mapsto \mathbb{R}$ $D \subset \mathbb{R}^n$ D - открыто

f - r раз непрерывно дифференцируема (r-гладкая), если все её частные производные до r-го порядка включительно существуют и непрерывны.

Обозначение - $f \in C^r(D)$

Теорема 4.12.

$f : D \mapsto \mathbb{R}$ $D \subset \mathbb{R}^n$ D - открыто $f \in C^r(D)$

$i_1, i_2, ..., i_r$ - перестановка $j_1, j_2, ..., j_r$ (этих элементов)

Тогда $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} ... \partial x_{j_r}}$

производные берутся справа налево, т.е. $f''_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x} f)$

Доказательство.

Перестановка раскладывается на транспозиции, значит, достаточно доказать что

$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} ... \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} ... \partial x_{i_r}}$ (поменяли местами два элемента)

Мы знаем, что $\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}}$ (из билета 82), где $g = \frac{\partial^{r-k-1} f}{\partial x_{i_{k+2}} ... \partial x_{i_r}}$

Тогда $\frac{\partial^{k+1} g}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} = \frac{\partial^{k+1} g}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}}$

Значит, $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} ... \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} ... \partial x_{i_r}}$ □

Замечание. Необходимость условия $f \in C^r(D)$ (производные непрерывны)

$$f = \begin{cases} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f'_x = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f'_x(0,k)-f'_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k-0}{k} = -1$$

$$f'_y = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f'_y(k,0)-f'_y(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k-0}{k} = 1$$

$\implies f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$!!!!

Всё потому что f''_{xy} не является непрерывной в точке $(0,0)$:

$f''_{xy} = f'_y(f'_x) = (y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2})'_y = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} + x\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + xy\frac{8xy(x^2+y^2)^2-8xy^2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} =$
$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{8x^2y^2\cdot((x^2+y^2)-2y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-16x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}$, $(x,y) \neq (0,0)$
$(x,y) \to 0 \iff (r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi) \to 0 \iff r \to 0$
$f''_{xy} = \frac{r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} + \frac{8\cdot r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin^2\varphi}{r^4(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2} + \frac{-16\cdot r^2\cos^2\varphi\cdot r^4\sin^4\varphi}{r^6(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^3} =$
$(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + (8cos^2\varphi\sin^2\varphi) + (-16cos^2\varphi\sin^4\varphi) \not\to 0$ при $r \to 0$

4.12. Билет 84: Мультииндексы. Определения, обозначения, лемма о производной композиции гладкой и линейной функций.

***Определение* 4.13** (Мультииндекс).

$k = (k_1, k_2, ..., k_n) \quad k_j \geq 0 \quad k_j \in \mathbb{Z}$

Высота мультииндекса $|k| := k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_n$

$k! := k_1!k_2!...k_n!$

$h \in \mathbb{R}^n \quad h^k := h_1^{k_1}h_2^{k_2}...h_n^{k_n}$

$f^{(k)} := \frac{\partial^{|k|}f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}$

Полиномиальный или мультиномиальный коэффициент:

$\binom{|k|}{k_1,k_2,...,k_n} := \frac{|k|!}{k!} = \frac{(k_1+k_2+...+k_n)!}{k_1!k_2!...k_n!}$ – количество способов покрасить $|k|$ шаров в n цветов так, чтобы первого цвета было k_1, k_2 – второго и т.д.

Лемма.

$f : D \to \mathbb{R} \;\; f \in C^r(D) \;\; D \subset \mathbb{R}^n$

$[x, x+h]$ – отрезок с концами x и $x+h$. (на многомерном пространстве)

$[x, x+h] \subset D$

$F(t) = f(x+th) \;\; F : [0,1] \to \mathbb{R}$ (функция от одной переменной)

Тогда $F \in C^r[0,1]$ и при $0 \leqslant l \leqslant r$

$F^{(l)}(t) = \sum\limits_{|k|=l} \binom{l}{k_1,k_2,...,k_n} f^{(k)}(x+th)h^k$

Доказательство.

$G(t) := g(x+th)$

$$G'(t) = g'(x+th)\cdot(x+th)' = (\tfrac{\partial g}{\partial x_1}(x+th), ..., \tfrac{\partial g}{\partial x_n}(x+th))\cdot\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\\vdots\\h_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\tfrac{\partial g}{\partial x_i}(x+th)h_i$$

– получили формулу для $l = 1$.

$$F''(t) = (F'(t))' = (\sum_{i=1}^{n}\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)h_i)' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x+th)h_jh_i$$

$$F^{(l)}(t) = \sum_{i_l=1}^{n}\sum_{i_{l-1}=1}^{n}...\sum_{i_1=1}^{n}\tfrac{\partial^l f}{\partial x_{i_l}\partial x_{i_{l-1}}...\partial x_{i_1}}(x+th)h_{i_1}h_{i_2}...h_{i_n} = \sum_{|k|=l}\tbinom{|k|}{k_1,k_2,...,k_n}f^{(k)}(x+th)h^k =$$

$= \sum\limits_{|k|=l}\frac{|k|!}{k!}f^{(k)}(x+th)h^k$ (можем сделать замену на $f^{(k)}$ по теореме из билета 83)

$k = (\#\{j : i_j = 1\}, \#\{j : i_j = 2\}, ...)$ $\quad$ ($\#$ – кол-во чего-то)

□

4.13. Билет 85: ! Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Частные случаи.

Теорема 4.13.

$D \in R^n$, D - открытое множество. $f \in C^{r+1}(D)$ (функция f $r+1$ раз непр. дифференцируема на данном множестве), $[a, x] \in D$.

Тогда $\exists\ \theta \in (0,1) : f(x) = \sum\limits_{|k|\le r}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \sum\limits_{|k|=r+1}\dfrac{f^{(k)}(a+\theta(x-a))}{k!}(x-a)^k$

Доказательство.

$F(t) := f(a+th)$, где $h = x - a$. $F \subset C^{r+1}[0,1]$.

Запишем одномерную формулу Тейлора для F в нуле.

$F(t) = \sum\limits_{l=0}^{r}\dfrac{F^{(l)}(0)}{l!}t^l + \dfrac{F^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}t^{r+1}$.

Теперь, исходя из леммы из предыдущего билета, подставим все производные F.

Получается: $F(t) = \sum\limits_{l=0}^{r}\dfrac{1}{l!}\sum\limits_{|k|=l}\tbinom{l}{k_1,k_2,...,k_n}f^{(k)}(a)h^kt^l + \dfrac{1}{(r+1)!}\sum\limits_{|k|=r+1}\tbinom{r+1}{k_1,k_2,...,k_n}f^{(k)}(a+\theta h)h^kt^{r+1}$.

Осталось сделать небольшие преобразования.

Заметим, что $\tbinom{l}{k_1,k_2,...,k_n} = \dfrac{l!}{k!}$, $\tbinom{r+1}{k_1,k_2,...,k_n} = \dfrac{(r+1)!}{k!}$, где k - факториал мультииндекса.

Вспомним, что нас интересует значение функции f в точке x, это значит, что нас интересует значение F в точке 1.

Итого: $f(x) = F(1) = \sum\limits_{l=0}^{r}\sum\limits_{|k|=l}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \sum\limits_{|k|=r+1}\dfrac{f^{(k)}(a+\theta h)}{k!}h^k$.

А это и есть нужная нам формула, так как такая сумма $\sum\limits_{l=0}^{r}\sum\limits_{|k|=l} ... = \sum\limits_{|k|\le r} ...$, а это сумма по всем мультииндексам высоты $\le r$. Все свернулось в обещанную формулу. □

Пример.

Многочлен Тейлора степени r - "кусок формулы, который не остаток".
Выглядит он так:

$$\sum_{|k|\le r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Пример.

Пусть $r = 0$.
Получим аналог теоремы Лагранжа для функции от n переменных.

$f(x) = f(a) + \sum\limits_{|k|=1} \dfrac{f^{(k)}(a+\theta(x-a))}{k!}h^k$, где $h = x - a$.

Мультииндекс высоты 1 - это одна единица и остальные нули. Значит, все $k!$ под суммой $=$ 1.
Производная по такому мультииндексу (пусть единица стоит на $i-$том месте) - это производная по $i-$той координате.
Потом мы умножаем на h^k, все координаты кроме $i-$той обнулятся, поэтому просто умножаем на h_i.

Получаем такую запись: $f(x) = f(a) + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\delta f}{\delta x_i}(a+\theta(x-a))h_i$

А это скалярное произведение градиента f, посчитанного в точке $(a+\theta(x-a))$ и вектора h. Итого получаем $f(x) = f(a) + \langle \nabla f(a+\theta(x-a)), x-a\rangle$.

Пример.

Пусть $n = 2$.
Поймем, как будут выглядеть производные по мультииндексу, посчитанному в точке a. Мультииндекс для $n = 2$ будет равен $k = (i, j)$. Производная в точке $a = f^{(k)} = \dfrac{\delta^{i+j}f}{\delta^i x \delta^j y}$. Подставим это в формулу.

$f(x,y) = f(a,b) + \dfrac{\delta f}{\delta x}(a,b)(x-a) + \dfrac{\delta f}{\delta y}(a,b)(y-b) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta^2 f}{\delta x^2}(a,b)(x-a)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta^2 f}{\delta y^2}(a,b)(y-b)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta^2 f}{\delta x \delta^2 y}(a,b)(x-a)(y-b) + ...$

Расшифровка: к значению в фиксированной точке добавляем сумму по всем мультииндексам высоты 1 - это производная по x и по y в точке (a, b). Далее добавляем вторые производные, производную по x и y и так далее.

Запишем производную $l-$того порядка.

$$... + \frac{1}{l!}\sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \frac{\delta^l f}{\delta x^i \delta y^{l-i}}(a,b)(x-a)^i(y-b)^{l-i} + ...$$

Данная формула даже при $n = 2$ имеет довольно много слагаемых, поэтому обычно ее используют при маленьких r, т.к. за счёт этого получается мало слагаемых.

4.14. Билет 86: Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Пеано. Полиномиальная формула.

Теорема 4.14. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

$D \subset R^n$, D - открытое множество. $f \in C^r(D)$ $a \in D$. $h := x - a$

Тогда при $x \to a$ $f(x) = \sum\limits_{|k|\le r} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + o(||h||^r)$.

Замечание. Данная формула является следствием из теоремы о многомерной формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа (см. билет 85).

Доказательство. Запишем формулу из теоремы о формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа для $r-1$.

$$f(x) = \sum_{|k|\le r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a+\theta h)}{k!}h^k = \sum_{|k|\le r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(h)^k + \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a+\theta h) - f^{(k)}(a)}{k!}h^k.$$

Осталось понять, что второе слагаемое и есть $o(||h||^r)$.

Наблюдение 1. $\dfrac{|h^k|}{||h||^r} \le 1$.

Это верно, так как в числителе мы взяли какие-то координаты вектора h в количестве r штук и умножили друг на друга. В знаменателе мы взяли длину вектора в том же количестве и перемножили. Каждая координата меньше длины. $|h_i| \le ||h||$.

Наблюдение 2. Осталось доказать, что коэффициенты стремятся к нулю:

$f^{(k)}(a+\theta h) - f^{(k)}(a) \to 0$ при $k \to 0$. Это следует из непрерывности производной соответствующего порядка. А сама непрерывность выполняется по условию теоремы.

Замечание. "А на самом деле, если повозиться посильнее, то можно выкинуть требование непрерывности последней производной".

Это значит, что достаточно $r-$той дифференцируемости в точке a.

"Но мы не будем лезть в эти подробности (спасибо!)"

□

Следствие. (Полиномиальная формула)

Формула для возведения суммы в r-тую степень.

$(x_1 + x_2 + ... + x_n)^r = \sum\limits_{|k|=r} \binom{r}{k_1, k_2, ..., k_n} x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$.

Доказательство. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n)^r =: (g(x))^r$

Подставим это в формулу Тейлора. Для этого поймем, как выглядит производная.

$\dfrac{\delta f}{\delta x_i} = rg^{r-1}(x)\dfrac{\delta g}{\delta x_i} = rg^{r-1}(x)$ (так как производная g по x - единица). Получается, частная производная не зависит от координаты, по которой считаем и считается как обычная производная от функции g.

Значит, производная r-того порядка $= \dfrac{\delta^r f}{\delta x_{i_1}...\delta x_{i_r}} = r!$. А производная, например, $r+1$-го порядка $= 0$.

Запишем формулу Тейлора с остатком в виде в форме Лагранжа для r. Сразу заметим, что остатка не будет, т.к. $r-$тая производная $= 0$.

$$f(x) = \sum_{|k|\le r} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Заметим, что производная порядка $< r$ в нуле будет $= 0$, т.к. в формуле у нас останется g в какой-то ненулевой степени, а g в нуле $= 0 \Rightarrow$.

$f(x) = \sum\limits_{|k|\le r} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum\limits_{|k|=r} \dfrac{r!}{k!}x^k$. А это и есть то, что было обещано в начале. Доказали.

□

4.15. Билет 87: Теорема Банаха о сжатии. Следствие. Метод касательных для решения уравнения

Теорема 4.15 (Теорема Банаха о сжатии)**.**

X – полное метрическое пространство. $f : X \mapsto X,\ \ 0 < \lambda < 1$ и $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y)$ $\forall x, y \in X$.

Тогда существует единственная неподвижная точка, такая что $f(x) = x$.

Доказательство.

- Единственность. От противного. Пусть неподвижных точек две: $\widetilde{x}$ и x. Тогда $\rho(x,\ \widetilde{x}) = \rho(f(x),\ f(\widetilde{x})) \leqslant \lambda\rho(x,\ \widetilde{x})$. Но $\lambda < 1$. Противоречие.

- Существование.

  Возьмем произвольную начальную точку $x_0 \in X$ и $x_{n+1} = f(x_n)$. Докажем, что это фундаментальная последовательность.

$$\rho(x_n,\ x_{n+k}) = \rho(f(x_{n-1}),\ f(x_{n-1+k})) \leqslant \lambda\rho(x_{n-1},\ x_{n-1+k}) \leqslant ... \leqslant \lambda^n\rho(x_0, x_k)$$

  Попытаемся оценить $\rho(x_0, x_k)$ по неравенству треугольника.

$$\rho(x_0,\ x_k) \leqslant \rho(x_0,\ x_1) + \rho(x_1,\ x_2) + ... + \rho(x_{k-1},\ x_k) \leqslant \rho(x_0,\ x_1) + \lambda\rho(x_0,\ x_1) + ... + \lambda^{k-1}\rho(x_0,\ x_1)$$

  А это убывающая геометрическая прогрессия. Тогда,
  $\rho(x_0,\ x_k) < \frac{\rho(x_0,\ x_1)}{1-\lambda}$. Вернемся к $\rho(x_n,\ x_{n+k})$. Теперь мы можем это оценить:

$$\rho(x_n,\ x_{n+k}) < \lambda^n \frac{\rho(x_0,\ x_1)}{1-\lambda} \longrightarrow 0$$

  Значит, рассматриваемая последовательность фундаментальна. Значит, $\exists \lim_{n\to\infty} x_n =: x^*$.

$$f(x^*) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$$

  По непрерывности функции f. Откуда непрерывность? Рассмотрим: $\rho(f(x),\ f(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y)$ $\forall x, y \in X$. f это функция, уменьшающая расстояния. Поэтому, если $y \to x$, то $\rho(x,\ y) \to 0$. Тогда и $f(y) \to f(x)$. Значит, x^* и есть неподвижная точка. Что и требовалось доказать.

□

Утверждение 4.16.

$$\rho(x_n, x^*) \leqslant \lambda^n \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-\lambda}$$

Доказательство.

Это следует из $\rho(x_n,\ x_{n+k}) < \lambda^n \frac{\rho(x_0,\ x_1)}{1-\lambda}$. Возьмем и устремим k к бесконечности. □

Следствие.

X - полное метрическое пространство, $f, g : X \mapsto X$ - сжатия с коэф. $\lambda \in (0, 1)$. $x = f(x)$ и $y = g(y)$ - неподвижные точки.

Тогда $\rho(x,\ y) \leqslant \frac{\rho(f(x),\ g(x))}{1-\lambda}$

Доказательство.

$$\rho(x,\ y) = \rho(f(x),\ g(y)) \leqslant \rho(f(x),\ g(x)) + \rho(g(x),\ g(y)) \leqslant \rho(f(x), g(x)) + \lambda\rho(x, y).$$

Добавили и вычли $g(x)$, расскрыли по нер-ву треугольника, оценили расстояние через сжатие, получили то, что нам нужно. □

Пример Метод касательных (метод Ньютона).

$f \in C^2[a, x_0]$, $f'(a) =: \mu > 0$, $f(a) = 0$ и f строго выпукла и строго монотонна. Хотим найти корень функции(быстрее чем бинпоиск).

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} : [a, x_0] \mapsto [a, x_0]$.

Почему она действует в тот же самый отрезок?

Понятно, что $g(x) \leqslant x$, так как из x мы постоянно что-то вычитаем + f f' не отрицательны. Более того:

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) < f'(x)(x - a), c \in [a, x_0]$$

$f(a) == 0$ + теорема Лагранжа + монотонное убывание производной

Значит, $\frac{f(x)}{f'(x)} < x - a \implies g(x) > a$

Далее докажем, что g - сжатие. Как это можно понять? По теореме Лагранжа. Мы знаем, что разница двух образов есть произведение производной в какой-либо точке t на разницу прообразов. Возьмем производную. Воспользуемся Лагранжем и тем, что производные возрастают. Пусть $M := max(f''(t))$, $t \in [a, x_0]$

$$g'(t) = 1 - \frac{f'(t)f'(t) - f(t)f''(t)}{(f'(t))^2} = \frac{f''(t)f(t)}{(f'(t))^2} < \frac{f''(t)f'(t)(t-a)}{(f'(t))^2}$$

$$\frac{f''(t)f'(t)(t-a)}{(f'(t))^2} = \frac{f''(t)(t-a)}{f'(t)} \leqslant \frac{f''(t)(t-a)}{\mu} \leqslant \frac{M}{\mu}(t-a) \leqslant \frac{M}{\mu}(x_0 - a) < 1$$

Значит, нужно добавить в условие, что $\frac{M}{\mu} < 1$.

Запустим процесс из предыдущей теоремы о сжатии. Пусть $x_n := g(x_{n-1}) \implies \lim x_n =: x^*$ и x^* - неподвижная точка.

$$x^* = g(x^*) = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \implies f(x^*) = 0 \iff x^* = a$$

Вот мы и получили способ поиска корня a, причем у нас есть контроль скорости.

Замечание.

Откуда взялась функция g? Пусть y - касательная графика в точке x_0, тогда $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Рассмотрим точку, когда касательная пересечет ось абсцисс, то есть $y = 0$. Тогда $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \implies x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. А это и есть наша функция g.

4.16. Билет 88: Оценка на норму разности значений дифференцируемого отображения. Оценка на норму обратного отображения. Теорема об обратимости отображений, близких к обратимым

Теорема 4.17 (Оценка на норму обратного отображения).

Если $A : R^n \mapsto R^n$ линейное, $\|Ax\| \geqslant m\|x\|$ $\forall x \in R^n$ и $m > 0$, тогда A - обратим и $\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}$

Доказательство.

Нужно проверить иньективность (точки не склеиваются). Так как A линейно, нужно проверить, что A ничего не переводит в ноль, кроме нуля. То есть доказать, что $Ax = 0 \iff x = 0$.

Если $Ax = 0$, то $\|Ax\| = 0 \geqslant m\|x| \implies x = 0$.

Раз точки не склеиваются, значит $\exists A^{-1}$. Осталось оценить ее норму. Пусть $y = A^{-1}x$, тогда...

$$\|A^{-1}\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} = \sup_{y\neq 0} \frac{\|y\|}{\|Ay\|} \leqslant \sup_{y\neq 0} \frac{\|y\|}{m\|y\|} = \frac{1}{m}$$

Что и требовалось доказать. □

Теорема 4.18 (Оценка на норму разности значений дифференцируемого отображения)**.**

$f : R^n \mapsto R^m$ дифференцируема в $B_r(a)$ и $\|f'(x)\| \leqslant \alpha \quad \forall x \in B_r(a)$, тогда $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \alpha\|x - y\|$

Доказательство.

$\varphi(t) := \langle f(x + t(y - x)), f(y) - f(x)\rangle$.

Воспльзуемся линейностью скалярного произведения. Далее применим формулу Лагранжа и возьмем $\xi \in (0, 1)$.

$$\|f(y) - f(x)\|^2 = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)$$

$$\varphi'(\xi) = \langle ...\rangle' = \langle (f(x + t(y - x)))', f(y) - f(x)\rangle = \langle f'(x + t(y - x))(x + t(y - x))'_t, f(y) - f(x)\rangle =$$
$$= \langle f'(x + t(y - x))(y - x), f(y) - f(x)\rangle$$

Подставим функцию. Оценим скалярное произведение. Замечание: точка $(x + \xi(y - x))$ находится между x и y, а значит живет в шаре $B_r(a)$. Тогда $f'(x + \xi(y - x))$ - это произведение матрицы на вектор.

$$\varphi'(\xi) = \langle f'(x + \xi(y - x), f(y) - f(x))\rangle \leqslant \|f'(x + \xi(y - x))\|\|f(y) - f(x)\| \leqslant \alpha\|y - x\|\|f(y) - f(x)\|$$

Вспомним, откуда мы начинали.

$$\|f(y) - f(x)\|^2 = \varphi'(\xi) \leqslant \alpha\|y - x\|\|f(y) - f(x)\|$$

Тогда можно сократить $\|f(y) - f(x)\|$ и теорема будет доказана. □

Теорема 4.19 (Об обратимости оператора близкого к обратимому)**.**

$A : R^n \mapsto R^n$ обратим и $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда B - обратим, $\|B^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\|A^{-1}\| - \|B-A\|}$ и $\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|B-A\|}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B-A\|}$

Доказательство.

Воспользуемся неравенством треугольника.

$$\|Bx\| \geqslant \|Ax\| - \|(B - A)x\| \geqslant \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|\|x\| = \|x\|(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|)$$

Откуда взялся предпоследний переход? Заметим, что $\|(B-A)x\| \leqslant \|B-A\|\|x\|$. Так же подметим, что

$$\|A^{-1}\|\|Ax\| \geqslant \|A^{-1}Ax\| = \|x\| \iff \|Ax\| \geqslant \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}$$

Пусть $m := (\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B-A\|)$. Тогда $\|Bx\| \geqslant m\|x\|, \forall x \in R^n \implies B$ - обратима и $B^{-1} \leqslant \frac{1}{m}$ по предыдущим теоремам.

Воспользуемся линейностью.

$$B^{-1} = B^{-1}(AA^{-1} - BA^{-1}) = B^{-1}(A-B)A^{-1}.$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| = \|B^{-1}(A-B)A^{-1}\| \leqslant \|B^{-1}\|\|A-B\|\|A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A-B\|\|A^{-1}\|}{m}$$

Что и требовалось доказать. □

Замечание.

Замечание: самое главное в этой формуле то, что $\|B-A\|$ находится в числителе. Это означает, что при $B \to A$ последовательность обратных будет стремится к обратным. Остальное в этой формуле маловажно.

4.17. Билет 89: Теорема об обратной функции.

Теорема 4.20 (Теорема об обратной функции)**.**

$f: D \to R^n, D \subset R^n$ открытое, $x_0 \in D, f$ непрерывно дифференцируема в окрестности $(\cdot)x_0$ и $y_0 = f(x_0)$, матрица $A := f'(x_0)$ обратима. Тогда существуют окрестности U точки x_0, V окрестность $(\cdot)y_0$, т.ч. $f: U \to V -$ обратима и $f^{-1}: V \to U -$ непрерывна.

Доказательство.

$$G_y(x) := x + A^{-1}(y - f(x))$$

Выберем $B_r(x_0)$, т.ч. $||A^{-1}||\ ||A - f'(x)|| \leqslant \frac{1}{2}$ при $x \in B_r(x_0)$

Тогда $f'(x)$ при $x \in B_r(x_0)$ - обратимое отображение

$$||G_y'(x)|| = ||E + A^{-1}(-f'(x))|| = ||E - A^{-1}f'(x)|| = ||A^{-1}(A - f'(x))|| \leqslant$$
$$\leqslant ||A^{-1}||\ ||A - f'(x)|| \leqslant \frac{1}{2} \text{ при } x \in B_r(x_0)$$

$$||G_y(x) - G_y(\tilde{x})|| \leqslant \frac{1}{2}||x - \tilde{x}|| \text{ при } x, \tilde{x} \in B_r(x_0) \implies G_y - \text{сжатие}$$

подберем $B_r(y_0)$ так, чтобы $G_y(B_r(x_0)) \subset B_r(x_0)$

$$||G_y(x) - x_0|| \leqslant ||G_y(x_0) - x_0|| + ||G_y(x_0) - G_y(x)|| = ||A^{-1}(y - f(x_0))|| + ||G_y(x_0) - G_y(x)|| \leqslant$$
$$\leqslant ||A^{-1}||||y - y_0|| + \frac{1}{2}||x - x_0|| < ||A^{-1}|| \cdot R + \frac{r}{2} < r$$

по т. Банаха у G_y есть неподвижная точка т.е.

$$x \in B_r(x_0), \text{ т.ч.} x = G_y(x) = x + A^{-1}(y - f(x)) \implies A^{-1}(y - f(x)) = 0 \implies y = f(x)$$

$$\implies \text{ если } y \in B_r(y_0), \text{ то найдется } x \in B_r(x_0) \text{ т.ч. } y = f(x)$$

$$U := f^{-1}(V), V := B_r(y_0), f : U \to V \text{ биекция, осталось доказать непрерывность} f^{-1}$$

$$f(x) = y, f(\tilde{x}) = \tilde{y}, G_y(x) = x, G_{\tilde{y}}(\tilde{x}) = \tilde{x}$$

$$||f^{-1}(y) - f^{-1}(\tilde{y})|| = ||x - \tilde{x}|| \leqslant 2||G_y(x) - G_{\tilde{y}}(x)|| =$$

$$= 2||x - A^{-1}(y - f(x)) - (x - A^{-1}(\tilde{y} - f(x)))|| = 2||A^{-1}(\tilde{y} - f(x) - (y - f(x)))|| =$$

$$= 2||A^{-1}(\tilde{y} - y)|| \leqslant 2||A^{-1}|| \; ||\tilde{y} - y||$$

Отсюда видно, что если $\tilde{y}$ близко к y, то $f^{-1}(\tilde{y})$ близко к $f^{-1}(y)$, и значит у нас есть непрерывность

□

4.18. Билет 90: Дифференцируемость обратного отображения. Образ области при невырожденном отображении

Напоминание теоремы об обратной функции:

Теорема 4.21.
$f : D \to R^n, D \subset R^n$ открытое, $x_0 \in D, f$ непрерывно дифференцируема в окрестности $(\cdot)x_0$ и $y_0 = f(x_0)$, матрица $A := f'(x_0)$ обратима. Тогда существуют окрестности U точки x_0, V окрестность $(\cdot)y_0$, т.ч. $f : U \to V -$ обратима и $f^{-1} : V \to U -$ непрерывна.

Теорема 4.22 (Теорема о дифференцируемости обратного отображения)**.** $f : D \to \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^N$ – открытое. f непрерывна. $a \in D, f(a) = b$. f дифференцируема в точке a, U – окрестность точки a, V – окрестность точки b, $A := f'(a)$ – обратима, $f^{-1} : V \to U$ – непрерывна. Тогда $g := f^{-1}$ – дифференцируема в точке b.

Доказательство.
Определение дифференцируемости f в a:

$f(a + h) = f(a) + Ah + \alpha(h)\|h\|$, где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$

Обозначим $K := f(a + h) - f(a) = Ah + \alpha(h)\|h\|$

Хотим (Храбров хочет) доказать, что если $K \to 0$, то $h \to 0$. Зачем - станет понятно позже

$$\|h\| = \|A^{-1}Ah\| \leqslant \|A^{-1}\|\|Ah\| \implies \|Ah\| \geqslant \frac{\|h\|}{\|A^{-1}\|}$$

Далее Храбров поломался немного, но потом починился.

Выпишем оценку на $\|K\|$:

$$\|K\| = \|Ah + \alpha(h)\|h\|\| = \|Ah - (-\alpha(h)\|h\|)\| \geqslant \|Ah\| - \| - \alpha(h)\|h\|\| = \|Ah\| - \|\alpha(h)\|h\|\|$$

($\|a-b\| \geqslant |\, \|a\| - \|b\|\, |$ - свойство нормы, но с модулем, а выше выписали сразу без модуля, ведь $|a| \geqslant a$)

Продолжим оценивать:

$$\|Ah\| - \|\alpha(h)\|h\|\| \geqslant \frac{\|h\|}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|\|h\| = \|h\| \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\| \right)$$

(первый переход по доказанной чуть выше оценке снизу на $\|Ah\|$)

Храбров, когда починился, решил рассматривать только такую маленькую окрестность точки a, в которой h – вектора до точек из окрестности – настолько мелкие, что $\alpha(h)$ достаточно маленькое ($\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$). Достаточно маленькое, чтобы $\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\| > 0$ было.

Тогда получаем, что если $\|K\| \to 0$, то и $\|h\| \to 0$: так как $\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\| > 0$, то

$$\|h\| \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\| \right) \geqslant \|h\| \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

$\|h\|$ домножается на константу, так что теперь точно должно быть ясно, что она стремится к 0, если $\|K\|$ стремится.

В конце он вспомнил, что у нас есть непрерывность, и она всё упрощает, хотя я и не совсем осознал как.

Продолжим: мы хотим дифференцируемость g (он же f^{-1}), проверим (почти) определение:

$$g(b+K) - g(b) = g(f(a) + f(a+h) - f(a)) - g(f(a)) = a + h - a = h = A^{-1}K - A^{-1}(\alpha(h)\|h\|)$$

Пояснение: почему мы вообще куда-то K подставляем и почему это нам поможет? По определению дифференцируемости, нужно, чтобы $g(b+t) = g(b) + Mt + o(\|h\|)$ при $h \to 0$. У нас $K = f(a+h) - f(a)$, притом f - непрерывна, так что $a + h \to a \implies f(a+h) \to f(a) \implies K \to 0$, так что K вполне подходит для проверки определения дифференцируемости: регулируя h (свободную переменную), мы можем устремить K к нулю.

(Абзац выше - мои домыслы, Храбров это не проговаривал)

Далее, откуда вылезло последнее равенство в проверке выше:

$$K = Ah + \alpha(h)\|h\| \implies Ah = K - \alpha(h)\|h\| \implies h = A^{-1}K - A^{-1}(\alpha(h)\|h\|)$$

Ого, почти то, что надо: A^{-1} - дифференциал, надо лишь сделать так, чтобы $A^{-1}(\alpha(h)\|h\|) = o(\|K\|)$. Сейчас докажем:

$$A^{-1}(\alpha(h)\|h\|) = o(\|K\|) \iff \frac{\|A^{-1}\alpha(h)\|h\|\|}{\|K\|} \underset{K \to 0}{\to} 0$$

$$\frac{\|A^{-1}\alpha(h)\|h\|\|}{\|K\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|\alpha(h)\|\|h\|}{\|K\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|\alpha(h)\|\|h\|}{\|h\|\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|} = \frac{\|A^{-1}\|\|\alpha(h)}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|}$$

Первый переход: свойство нормы - $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$

Второй переход: используем доказанную выше оценку снизу: $\|K\| \geqslant \|h\| \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\| \right)$. Знаменатель уменьшим - дробь увеличится.

Что в итоге получили: в числителе константа, умноженная на $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. А в знаменатале - что-то большее 0 (доказано выше). Так что вся дробь к 0 стремится, что нам и хотелось. Ура!

Применим эту теорему в каждой точке - получим дифференцируемость в любой точке окрестности (области определения f^{-1}).

Отмечу отдельно что A^{-1} - дифференциал, при этом $A = f'(x)$, то есть $(f^{-1}(y))' = A^{-1} = (f'(x))^{-1}$, где $y = f(x)$. То есть в итоге $(f^{-1}(y))' = (f'(f^{-1}(y))^{-1}$ (подставили $x = f^{-1}(y)$)

□

Следствие Если в теореме выше f - непрерывно дифференцируема, то f^{-1} тоже непрерывно дифференцируема.

Из прошлой теоремы установили, что дифференцируема, теперь хочется непрерывность производной.

Там мы получили, что дифференциал f^{-1} - это A^{-1}.

При этом по условию этого следствия, f - непрерывно дифференцируемая, то есть f' непрерывная, то есть A - непрерывная, то есть её коэффициенты непрерывно зависят от точки (возможно, неочевидно, почему если коэффициенты непрерывны, то и матрица тоже? 2.29 вот здесь норма оценивается через коэффициценты)

Вспоминаем, как устроена обратная матрица: есть явная формула. Нам сама формула не важна (но если хочется - $A^{-1}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}M_{ji}}{det(A)}$, вроде так), это миноры (многочлены от коэффициентов), делёный на определитель (тоже многочлен от коэффициентов, но не нулевой, так как матрица обратима), так что это у нас композиция непрерывных функций (многочлены непрерывны, в числителе не 0), которая сама является непрерывной функцией. А это нам и надо было.

Следствие. $f : D \to \mathbb{R}^d, D$ – открытое, f - непрерывно дифференцируема во всех точках D, $f'(x)$ - обратима для всех $x \in D$. Тогда для любого открытого $G \subset D$ верно, что $f(G)$ - открытое.

Доказательство.

Возьмём точку $b \in f(G)$. Тогда $\exists a \in D : f(a) = b$ $(a = f^{-1}(b))$.

Тогда применим теорему об обратной функции: сузим f на G - оно открытое, всё ок. И вот на этой суженной f и применим теорему:

$\exists U \ni a$, $U \subset G$ - найдём окрестность вокруг точки a

Тогда $f(U) = V$ - окрестность точки b, и при этом $V \subset f(G)$, так что $b \in f(U) = V \subset f(G)$, и в этой цепочке V - окрестность точки b, то есть открытый шар. То есть для b мы нашли искомый открытый шар, то есть b внутренняя, то есть любая точка $f(G)$ внутренняя и потому оно открытое

(для не открытого бы не сработало, так как мы сужали функцию на G, а теорема требует, чтобы f действовало из открытого множества □

***Определение* 4.14.** $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$

Тогда (x, y) будет обозначаться вектор из $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

((x, y) – состоит из 2 частей: $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$)

Теорема 4.23.

Пусть $A : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ - линейное отображение

Тогда если $(A(h, 0_m) = 0_n \implies h = 0_n)$, то уравнение $A(x, y) = b$ имеет единственное решение

$A(x, y) = b$

$A(x, y) = A(x, 0) + A(0, y)$ (по линейности A)

$A(x, 0) = A(x, y) - A(0, y) = b - A(0, y)$

Немного поизменяли формулу для удобства. Если решение существует и единственно для этой записи, то теорема верна.

Покажем единственность: пусть $A(x, 0) = b - A(0, y)$ и $A(\tilde{x}, 0) = b - A(0, y)$, то $A(x - \tilde{x}, 0) = 0 \implies x - \tilde{x} = 0 \implies x = \tilde{x}$

Покажем существование: $A(x, 0)$ - инъекция, так как ядро тривильно, т.е. $A(x, 0) = 0 \implies x = 0$. При этом $A(x, 0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то есть размерности совпадают, и потому это биекция, и потому решение есть.

Я так и не уверен, что такое "Образ области при невырожденном отображении" - то ли второе следствие, то ли эта теорема...

4.19. Билет 91: Теорема о неявной функци

***Определение* 4.15.**
Функции, задаваемые уравнениями – неявные функции.

Теорема 4.24 (о неявной функции)**.**
$f : D \to \mathbb{R}^n \;\; D \subset \mathbb{R}^{n+m}$

D – откртытое, f – непрерывно дифференцируема. $f(a, b) = 0,\; (a, b) \subset D$

$A = f'(a, b)$, и если $A(h, 0) = 0$, то $h = 0$.

Тогда $\exists W$ – окрестность точки b и единственная функция $g : W \to \mathbb{R}^n$, т.ч. $g(b) = a$, g непрерывна дифференцируема, и $f(g(y), y) = 0 \;\; \forall y \in W$

Доказательство.
$F : D \to \mathbb{R}^{n+m} \;\; F(x, y) = (f(x, y), y)$ – непрерывно дифференцируема.

$f(a + h, b + k) = f(a, b) + A(h, k) + r(h, k) = A(h, k) + r(h, k)$

$F(a + h, b + k) = F(a, b) + (A(h, k), k) + (r(h, k), 0) = (0, b) + (A(h, k), k) + (r(h, k), 0)$

$F(a + h, b + k) = (f(a + h, b + k), b + k)$

$F'(a, b)(h, k) = (A(h, k), k)$

Поймем, что $F'(a, b)$ инъекция.

Пусть $(A(h, k), k) = (0, 0) \Rightarrow k = 0$ и $A(h, 0) = 0 \Rightarrow h = 0$, значит $F'(a, b)$ инъекция.

F удволетворяет условиям теоремы об обратоной функции, тогда $\exists U$ – окрестность точки (a, b) и V – окрестность точки $(0, b)$, т.ч. $F : U \to V$ биекция. $G = F^{-1} : V \to Y$ непрерывно дифференцируема.

$G(z, w) = (\varphi(z, w), w)$, т.к. F сохраняет последню коодинату.

$(z, w) = F(G(z, w)) = (f(\varphi(z, w), w), w) \Rightarrow f(\varphi(z, w), w) = z$

Возьмем W – окрестность точки b, т.ч. $\{b\} \times W \subset V$

$g(w) := \varphi(0, w) \;\; g : W \to \mathrm{Re}^n$

$f(g(w), w) = f(\varphi(0, w), w) = 0$

$g(b) = \varphi(0, b) = a$

Доказли существование.

Докажем единственность

Пусть $f(x, y) = f(x, y)$, тогда $F(x, y) = F(x, y)$, но F обратима, а значит F – биекция $\Rightarrow x = x$

$\square$

4.20. Билет 92: Задача Коши для дифференциального уравнения. Теорема Пикара

***Определение* 4.16.**

Задачей Коши называется задача нахождения функции $y(x)$, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Первое условие значит, что если продиффренировать функцию $y(x)$, то получим выражение, которе зависит от x и от $y(x)$. Например $y = e^{x^2} \implies \frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} = 2xy(x)$ Второе условие нужно, так как функций, подходящих под первое условие может быть много, поэтому можно ограничить таким образом.

Теорема 4.25 (Пикара)**.**

$D \subset \mathbb{R}^2$ - открытое. Если $f : D \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна, $(x_0, y_0) \in D$ и $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leqslant M|y - \tilde{y}| \quad \forall (x, y)$ и $(x, \tilde{y})$, то при некотором $\delta > 0$ на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ существует единственная функция φ, являющаяся решением задачи Коши, то есть

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = y_0 \\ \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \end{cases} \quad \text{для } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

Замечание.

Почему $f : \mathbf{D} \mapsto \mathbb{R}$, то есть почему бы не писать $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$? Потому что существуют такие f, что решение на отрезке есть, а на всей прямой нет.

Пример.

Задача Коши:

$$\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Как бы мы ни старались подобрать x_0 и y_0 у нас не получится получить решение, такое чтобы оно включало точку 0. То есть в данной теореме важна локальность.

Доказательство.

Перейдем от системы к немного другому уравнению, а именно:

$$\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$$

Действительно, если мы докажем существование такой $\varphi(x)$, то мы решим задачу Коши, так как

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_0} f(t, \varphi(t))\, dt = y_0 \\ \varphi'(x) = 0 + \left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \right)' = f(x, \varphi(x)) \end{cases}$$

Выберем такое $r \in \mathbb{R}$, что $B_r(x_0, y_0) \subset \overline{B}_r(x_0, y_0) \subset D$. Так можно выбрать, так как D - открытое. Так как $\overline{B}_r(x_0, y_0)$ - компакт, и f - непрерывна, то f - ограничена на $\overline{B}_r(x_0, y_0)$. Пусть $|f(x, y)| \leqslant K$ на $\overline{B}_r(x_0, y_0)$.

Теперь выберем δ. Оно должно соответствовать двум условиям.

1. хочется, чтобы прямоугольник $[-\delta, \delta] \times [-K\delta, K\delta]$ с центром (точка пересечения диагоналей) в (x_0, y_0) полностью лежал внутри $B_r(x_0, y_0)$. Более формально:

$$\text{Если } |x - x_0| < \delta \text{ и } |y - y_0| < K\delta, \text{ то } (x, y) \in B_r(x_0, y_0)$$

2. хочется, чтобы $M\delta < 1$, M - из условия теоремы.

Оба эти условия несложно удовлетворить.

$C^* := \{\varphi \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta] : |\varphi(x) - y_0| \leqslant K\delta\}$. В данном пространстве зададим стандартную для непрерывных функций метрику - максимум модуля разности. Докажем, что данное пространство полное. Данне пространство является подпространсвтом полного, надо доказать, что такое пространство - замкнуто. Оно замкнуто, так как если есть последовательность функций из C^*, то и их предел, будет лежать в C^*, так как в переделе нестрогое неравенство сохраняется.

В данном пространстве возьмем отображение $T(\varphi) = \psi$, где $\psi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$ Докажем, что $T : C^* \mapsto C^*$ и T - сжатие. Если это доказать, то по Теореме Бонаха T будет имееть единственную неподвижную точку, значит $\exists \varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$.

При действии такого отображения на непрерывную функцию получится также непрерывная функция. Теперь докажем, что

$$\text{Если } |\varphi(x) - y_0| \leqslant K\delta \implies |\psi(x) - y_0| \leqslant K\delta$$

$|\psi(x) - y_0| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \right| \leqslant \{\text{максимум функции}\} \cdot \{\text{длина отрезка}\} \leqslant K\delta$

$f(t, \varphi(t)) \leqslant K$, так как $(t, \varphi(t)) \in B_r(x_0, y_0)$.

Теперь проверим, что T - сжатие. $T(\varphi) = \psi, T(\tilde{\varphi}) = \tilde{\psi}$

$$|\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t, \tilde{\varphi}(x))\, dt \right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi(t)) - f(t, \tilde{\varphi}(x))|\, dt$$

Вспомним, что в условии сказано: $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leqslant M|y - \tilde{y}|$. Значит можно продолжить цепочку неравенств.

$$|\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} M|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)|\, dt \leqslant M\delta \max\{|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)|\} = M\delta ||\varphi - \tilde{\varphi}||$$

С левой стороны неравенства также рассмотрим максимум разностей и получим, что

$$||\psi(x) - \tilde{\psi}(x)|| \leqslant \underbrace{M\delta}_{cosnt<1} ||\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)||$$

Получается T - сжатие по определению, значит существует единственная $\varphi(x)$, удовлетворяющая условиям задачи Коши на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. $\square$

4.21. Билет 93: ! Локальные экстремумы. Определение и необходимое условие экстремума. Стационарные точки.

***Определение* 4.17.**
$E \subset \mathbb{R}^n,\ f : E \mapsto \mathbb{R}, a \in E$

a – точка локального минимума, если $\exists U$ – окрестность точки a, такая что $\forall x \in U \cap E\ f(x) \geqslant f(a)$.

a – точка строгого локального минимума, если $\exists U$ – окрестность точки a, такая что $\forall x \in U \cap E$,
$x \neq a\ f(x) > f(a)$.

Аналогично определяются локальный максимум, строгий локальный максимум, точка экстремума и точка строгого экстремума.

Теорема 4.26 (Необходимое условие экстремума)**.**
$f : E \mapsto \mathbb{R}, a \in \operatorname{Int} E$, a – точка экстремума. Если существует $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, то $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$. В частности, если f – дифференцируема в точке a, то $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$, т.е. $\nabla f(a) = 0$.

Доказательство.
Пусть a – точка минимума для f. Заведем функцию $g(t) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n) \geqslant f(a_1, a_2, \dots, a_n) = g(a_k)$. Тогда a_k – точка минимума для g и g дифференцируема в точке a_k. Применяем одномерную теорему и получается, что $g'(a_k) = 0$, но $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = g'(a_k) = 0$. ☐

***Определение* 4.18** (Стационарная точка)**.**
Если f дифференцируема в точке a и $\nabla f(a) = 0$, то a – стационарная точка.

Замечание Формула Тейлора в стационарной точке.

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o(\|h\|^2)$$

4.22. Билет 94: Квадратичная форма. Положительная и отрицательная определенность. Оценка снизу положительно определенной квадратичной формы. Достаточные условия экстремума.

***Определение* 4.19** (Квадратичная форма)**.**
$Q(h) = \sum\limits_{i,j} c_{i,j} h_i h_j, c_i = c_j$

В формуле Тейлора выше сумма это квадратичная форма.

***Определение* 4.20.**
Q – квадратичная форма.

Q – строго положительно определена, если $\forall h \neq 0\ Q(h) > 0$.

Q – нестрого положительно определена, если $\forall h\ Q(h) \geqslant 0$.

Аналогично отрицательно определенная Q.

Лемма.
Если $Q(h)$ – строго положительно определена, то $\exists c > 0$, такое что $Q(h) > c\|h\|^2$.

Доказательство.

$Q(h) = \sum\limits_j (Ch)_j h_j = \sum\limits_j \sum\limits_i c_{ij} h_i h_j = \langle Ch, h\rangle$ – непрерывная функция.

Рассмотрим $Q(h)$ на единичной сфере – на компакте. Тогда $\exists h_0$, такое что $\forall h\ Q(h) \geqslant Q(h_0) > 0$. Положим $c = Q(h_0)$.

$Q(h) = \langle Ch, h\rangle = \langle C\left(\frac{h}{\|h\|}\|h\|\right), \frac{h}{\|h\|}\|h\|\rangle = \|h\|^2 \langle C\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\rangle = \|h\|^2 Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geqslant c\|h\|^2$ (вектор $\frac{h}{\|h\|}$ лежит на единичной сфере). □

Теорема 4.27 (Достаточные условия экстремума)**.**
$E \subset \mathbb{R}^n,\ f : E \mapsto \mathbb{R}, a \in \operatorname{Int} E, a$ – стационарная точка, $Q(h) = \sum\limits_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$. Тогда

1. Если Q строго положительно определена, то a – строгий минимум.
2. Если Q строго отрицательно определена, то a – строгий максимум.
3. Если a нестрогий минимум, то Q нестрого положительно определена.
4. Если a нестрогий максимум, то Q нестрого отрицательно определена.
5. Если Q не является знакоопределенной, то a не точка экстремума.

Доказательство.
$f(a+h) = f(a) + Q(h) + \alpha(h)\|h\|^2$, где $\alpha(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$.

1. Q – строго положительно определена, тогда по лемме $Q(h) \geqslant c\|h\|^2 \implies f(a+h) \geqslant f(a) + c\|h\|^2 + \alpha(h)\|h\|^2 = f(a) + \|h\|^2(c + \alpha(h)) > f(a)$, т.к. при малых h есть неравенство $c + \alpha(h) > 0$. При h близких к 0 получается $f(a+h) > f(a) \implies a$ – строгий минимум.

3. a – нестрогий минимум. $0 \leqslant f(a+h) - f(a) = Q(h) + \alpha(h)\|h\|^2$ при малых h. $0 \leqslant Q(th) + \alpha(th)\|th\|^2 = \langle C(th), th\rangle + \alpha(th)t^2\|h\|^2 = t^2(Q(h) + \alpha(th)\|h\|^2)$ при малых $t \implies 0 \leqslant Q(h) + \alpha(th)\|h\|^2 \underset{t\to 0}{\to} Q(h) \implies Q(h) \geqslant 0$.

5. От противного. Пусть a точка экстремума, тогда по пункту 4 или 5 Q нестрого положительно или отрицательно определена. Противоречие.

□

Теорема 4.28 (Критерий Сильвестра)**.**
Q – квадратичная форма, C – ее матрица.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \dots \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & \dots \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & \dots \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Q – строго положительно определена $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} c_{11}\end{pmatrix} > 0 \wedge \det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} > 0 \wedge \det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix} > 0 \wedge \dots$.

Q – строго отрицательно определена $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} c_{11}\end{pmatrix} < 0 \wedge \det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} > 0 \wedge \det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix} < 0 \wedge \dots$.

Для нестрогих неравенства меняются на нестрогие.

4.23. Билет 95: ! Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

***Определение* 4.21.**

$\Phi : D \to \mathbb{R}^m \;\; D \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$f : D \to \mathbb{R}$

$a \in D$ и $\Phi(a) = 0$

a – точка условного локального максимума при условии $\Phi = 0$, если $\exists U$ – окрестность точки a, т.ч. $\forall x \in U \cap D$, удовлетворяющее условию $\Phi(x) = 0$

$\implies f(x) \leqslant f(a)$

a – точка условного локального минимума, если

$\exists U$ – окрестность точки a, т.ч. $\forall x \in U \cap D$, удовлетворяющее условию $\Phi(x) = 0 \implies f(x) \geqslant f(a)$

Аналогично строгий условный максимум и строгий условный минимум.

Пример.

$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$

Теорема 4.29 (Метод неопределенных множителей Лагранжа)**.**

$\Phi : D \to \mathbb{R}^m \;\; D \subset \mathbb{R}^{n+m} \quad a \in D$ – открытое.

$\Phi(a) = 0$

$f : D \to \mathbb{R}$

Φ, f непрерывно дифференцируемы.

Если a точка условного экстремума, то $\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} \Phi_1, \operatorname{grad} \Phi_2, ..., \operatorname{grad} \Phi_m$ линейно зависимы.

Замечание.

1. Если $\operatorname{grad} \Phi_1, \operatorname{grad} \Phi_2, ..., \operatorname{grad} \Phi_m$ линейно зависимы, то теорема ничего не утверждает.
2. Если $\operatorname{grad} \Phi_1, .., \operatorname{grad} \Phi_m$ линейно независимы, то $\operatorname{grad} f = \lambda_1 \operatorname{grad} \Phi_1 + ... + \lambda_m \operatorname{grad} \Phi_m$
3. $\Phi'(a)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+m}} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+m}} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{pmatrix}$

   Столбцы линейно независимы $\iff \operatorname{rank}\Phi'(a) = m$, т.е. максимально возможный.

Доказательство.

$\operatorname{rank}\Phi'(a) = m$. (Рассматривать линейную зависимость градиентов бессмысленно, как показано в замечании)

Перенумеруем координаты Φ так, чтобы определитель последней подматрицы $\neq 0$.

$a = (b, c) \;\; b \in \mathbb{R}^n \;\; c \in \mathbb{R}^m$

$A := \Phi'(a)$

$A(0, h) = 0 \implies h = 0$

По теореме о неявной функции $\exists W$ – окрестность точки b и непрерывно дифференцируемая функция $g : W \to \mathbb{R}^m$, т.ч. $\Phi(w, g(w)) = 0 \;\; \forall w \in W$

$g(b) = c$

Пусть a – точка условного максимума.

$\implies \exists U$ – окрестность точки a такая, что $\forall x \in U \;\; \Phi(x) = 0$

$f(a) \geqslant f(x)$

Уменьшим W так, чтобы $W \times \{c\} \subset U$ и чтобы $(w, g(w)) \in U$ при $w \in W$.

Почему так можем сделать?

$w \to (w, g(w))$ – непрерывное отображение

$\implies$ прообраз открытого открыт $\implies$ прообраз $U \cap W$ подойдет.

$\implies \forall w \in W \;\; f(w, g(w)) \leqslant f(b, g(b))$

$h(w) := f(w, g(w)) \quad h$ имеет локальный максимум в точке b.

h – дифференцируемая функция, а значит выполняется необходимое условие экстремума. Т.е. $\operatorname{grad} h = 0$.

$x = (y, z) \;\; y \in \mathbb{R}^n \;\; z \in \mathbb{R}^m$

$\frac{\partial h}{\partial w_k} = \frac{\partial f}{\partial y_k} + \frac{\partial f}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y_k} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial y_k} = 0$

$0 = \operatorname{grad} h = \operatorname{grad}_y f + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_j} \cdot \operatorname{grad}_y g_j$

$\Phi(w, g(w)) \equiv 0$

i – фиксированное.

Посмотрим на частные производные Φ_i по w_k.

$\frac{\partial}{\partial w_k} \;\; : \;\; \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y_k} + ... + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial y_k} = 0$

$\operatorname{grad}_y \Phi_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} \operatorname{grad} g_j = 0$

$\operatorname{grad}_y f + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}_y \Phi_i + \sum\limits_{i=1}^{m} (\lambda_i \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} \operatorname{grad} g_j) + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_j} \operatorname{grad} g_j = 0$

$\operatorname{grad}_y f + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}_y \Phi_i + \sum\limits_{j=1}^{m} (\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial z_j}) \operatorname{grad} g_j = 0$

Хотим подобрать λ_i так, что $(*) := \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial z_j} = 0 \;\; \forall j$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_1} \\ \ldots & & \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_m} & \ldots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z_m} \end{pmatrix}$$

Первая матрица здесь обратима, так как это в точности последний минор, который не вырожден.

$\implies$ система имеет решение $\implies$ можно занулить коэффициенты

$\implies \operatorname{grad}_y f + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}_y \Phi_i = 0$

Но $(*)$ в векторном виде

$\operatorname{grad}_z f + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}_z \Phi_i = 0$ $\square$

Замечание.

$\operatorname{grad} f = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad} \Phi_i$

$n + m$ уравнений.

Неизвестных – точка a ($n+m$ неизвестных), λ_i – m неизвестных.

Но $\Phi(a) = 0$ – а это еще m уравнений.

Пример.

Минимум и максимум квадратичной формы на сфере.

A – симметричная матрица и $Q = \langle Ax, x\rangle$

Минимум и максимум $Q(x)$ при условии $x_1^2 + ... + x_n^2 = 1$

$\Phi' = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & \dots & 2x_n \end{pmatrix} \quad \operatorname{rank} = 1$

$\implies \exists \lambda \in \mathbb{R} \;\; : \;\; \operatorname{grad} Q - \lambda \operatorname{grad} \Phi = 0$

$F := Q - \lambda\Phi$ – функция Лагранжа.

при некотором $\lambda \quad \operatorname{grad} F = 0.$

$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{k,j}x_j + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} a_{i,k}x_i + a_{k,k}\cdot 2x_k - 2\lambda x_k = 0$

$2\sum\limits_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j - 2\lambda x_k = 0$

$Ax - \lambda x = 0$

$\implies x$ – единичный собственный вектор, λ – собственное число.

Все точки, в которых достигается экстремум – единичные собственные вектора.

$Q(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda||x||^2 = \lambda$

Значения в этих точках – соответствующие собственные числа.

4.24. Билет 96: NAME

4.25. Билет 97: NAME

4.26. Билет 98: Неравенство Адамара.

Еще один пример для метода множителей Лагранжа.

Пример Неравенство Адамара.

Дана матрица A, суммы квадратов строк равны $h_1^2, h_2^2, \dots, h_n^2$. Тогда $|\det A| \leqslant h_1 h_2 \dots h_n$.

Доказательство.

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Запишем условия для матрицы A

$\Phi_k(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{kj}^2 - h_k^2 = 0$

Функция которую мы хотим максимизировать $f(x) = \det A$

Поймем, что экстремум существует. $\Phi_k(x)$ – сфера в n мерном пространстве, а это компактное множество, а значит все условия тоже компакт. $f(x)$ – непрерывная функция на компакте, значит есть минимум и максимум.

$F(x) = \det - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \Phi_k(x).$

$\dfrac{\partial F}{\partial x_{ij}} = 0$

Разберемся, что такое $\dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_{ij}}$

$\dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_{ij}} = 0$, если $i \neq k$

$\dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_{ij}} = 2x_{ij}$, если $i = k$

Разберемся, что такое $\dfrac{\partial \det}{\partial x_{ij}}$

$\dfrac{\partial \det}{\partial x_{ij}} = \dfrac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik} \cdot A_{ik} \right) = A_{ij}$, где A_{ik} – алгебраические дополнения.

$0 = \dfrac{\partial F}{\partial x_{ij}} = A_{ij} - \lambda_i \cdot 2x_{ij} \Rightarrow A_{ij} = 2\lambda_i x_{ij} \Rightarrow \det = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik} A_{ik} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik} 2\lambda_i x_{ik} = 2\lambda_i h_i^2 \Rightarrow \lambda_i = \dfrac{\det}{2h_i^2} \Rightarrow A_{ij} = \dfrac{\det}{h_{ij}} x_{ij} \Rightarrow \dfrac{A_{ij}}{\det} = \dfrac{x_{ij}}{h_i^2}$

Заметим, что наше уравнение можно доказать, только при $h_i = 1$, т.к. если умножить строку на t, то и определитель увеличится в t раз, тогда если мы все строчки разделим на их длины, то все длины будут равны 1, а неравенство не изменится.

$\Rightarrow \dfrac{A_{ij}}{\det} = x_{ij} \Rightarrow (A^{-1})^T = A \Rightarrow A^{-1} = A^T$

$1 = \det AA^{-1} = \det A \det A^{-1} = \det A \det A^T = (\det A)^2 \Rightarrow \det A = \pm 1$

Для экстремумов верно, значит верно и для всех.

$\square$

5. Теория меры

5.1. Билет 99: Алгебра и σ-алгебра множеств. Определе- ние, свойства, примеры. Теорема о существовании минимальной σ-алгебры содержащей данное семейство множеств. Борелевская оболочка и борелевские множества.

Все рассматриваемые далее мн-ва - подмножества некоторого фиксированного мн-ва X.

***Определение* 5.1** (Обозначение)**.**

$A \sqcup B$ – дизъюнктное объединение.

$A \cap B = \varnothing$ и $A \sqcup B := A \cup B$

Замечание - напоминание.

$A \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$

$A \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$

***Определение* 5.2.**

Будет рассматривать некие семейства множеств $\mathcal{A} \subset 2^X$

***Свойства семейства множеств** $\mathcal{A}$.*

(σ_0) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$

(δ_0) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$

(σ) $A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

(δ) $A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

***Определение* 5.3.**

$\mathcal{A}$ – симметричная, если $A \in \mathcal{A} \implies \overline{A} \in \mathcal{A}$

Утверждение 5.1.

$\mathcal{A}$ – симметрично, то

$(\sigma_0) \iff (\delta_0)$ и $(\sigma) \iff (\delta)$

Доказательство.

$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

$X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n)$ □

***Определение* 5.4.**

$\mathcal{A}$ – алгебра множеств, если $\varnothing \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ – симметрично и обладает свойствами (δ_0) и (σ_0).

$\mathcal{A}$ – σ-алгебра множеств, если $\varnothing \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ – симметрично и обладает свойствами (δ) и (σ).

Свойства алгебры множеств.

1. $\varnothing, X \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$
3. $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$

Доказательство.

2. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
3. прошлое утверждение + индукция □

Пример.

1. $\mathcal{A} = \{\varnothing, X\}$ – σ-алгебра
2. 2^X – σ-алгебра
3. $X = \mathbb{R}^n \quad \mathcal{A}$ – все ограниченные подмножества и их дополнения.

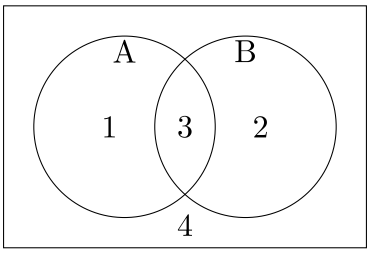
   $\mathcal{A}$ – алгебра, но не σ-алгебра, ведь если взять объединение единичных клеточек подряд в одну строчку, то получится неограниченное мн-во, и дополнение будет тоже неограниченным.
4. $\mathcal{A}$ – алгебра (σ-алгебра) подмножеств X.

   $Y \subset X \quad \mathcal{A}_Y := \{Y \cap A \ : \ \ A \in \mathcal{A}\}$

   $\mathcal{A}_Y$ – алгебра (σ-алгебра) подмножеств Y.

   Это индуцированная алгебра (σ-алгебра) - ограничили структуру на подмножество.
5. Пусть есть $\mathcal{A}_\alpha$ – алгебры (σ-алгебры). Тогда их пересечение – алгебра (σ-алгебра).

   Действительно, понятно, что пустое лежит. Если лежит какое-то A, то оно лежит и во всех алгебрах, поэтому во всех алгебрах есть и дополнение A, поэтому оно есть и в пересечении.
6. $X \supset A, B$

   Все, что можем собрать из кусочков на картинке можно положить в семейство множеств.

   Кусочков 4, итого 16 множеств и это будет наименьшая σ-алгебра, содержащая множества A и B.

Теорема 5.2.

Для любой системы подмножеств $\mathcal{E}$ множества X существует минимальная по включению алгебра (σ-алгебра), содержащая $\mathcal{E}$.

Доказательство.

Рассмотрим все σ-алгебры $\mathcal{A}_\alpha$, содержащие $\mathcal{E}$.

Такие σ-алгебры точно существуют, т.к. например $2^X \supset \mathcal{E}$ и является σ-алгеброй.

Рассмотрим $\mathcal{A} := \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{E}$

По пятому примеру, это σ-алгебра.

Покажем, что это наименьшая по включению σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$. Пусть $\mathcal{B}$ – минимальная σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$.

Тогда $\exists \beta \in I \quad \mathcal{A}_\beta = \mathcal{B}$, но

$\mathcal{A} = \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}_\beta = \mathcal{B} \implies \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ □

***Определение* 5.5.**

$\mathcal{E}$ – семейство подмножеств X.

Борелевская оболочка $\mathcal{E} \quad \mathcal{B}(\mathcal{E})$

– наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$

***Определение* 5.6.**

Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}^n$ – минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества в $\mathbb{R}^n$.

Замечание.

$\mathcal{B}^n \neq 2^{\mathbb{R}^n}$

Более того, у них разные мощности. Первое – континуально, второе еще больше. Но поймём мы это позже.

5.2. Билет 100: Лемма про дизъюнктное объединение множеств. Кольцо и полукольцо. Теорема о свойствах элементов полукольца.

Лемма.

$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j)$

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j)$

Доказательство.

Рассмотрим $B_k := A_k \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j)$

Заметим, что $B_k \subset A_k$, поэтому если $i < k$, то $B_k \cap A_i = \varnothing \implies B_k \cap B_i = \varnothing$

$\implies B_k$ –дизъюнктны.

А ещё из того, что $B_k \subset A_k$, следует

$\bigcup\limits_{k=1}^{?} B_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{?} A_k$

где ? означает либо n, если хотим доказать для конечного, либо ∞, если хотим доказать для счетного.

обратное включение:

Возьмем $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{?} A_k$. Надо доказать, что он лежит и в объединении B. Для этого рассмотрим такой самый первый номер m, что $x \in A_m$. Но тогда он не лежит в $A_1, ...A_{m-1}$, но именно эти мн-ва мы исключаем в B_m. Поэтому, x будет лежать в B_m

$\square$

***Определение* 5.7.**

$\mathcal{R}$ – кольцо, если $\forall A, B \in \mathcal{R}$

$\implies A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B\ \in \mathcal{R}$

Замечание.

Любая алгебра является кольцом. Это видно из определений. У кольца оно более слабое.

Замечание.

Если в кольце есть X, то это алгебра. Действительно, тогда берём любое B из алгебры и $A = X$, получаем, что X/B лежит $\implies$ симметричность. Пустое тоже есть, т.к. симметрично X.

Таким образом, алгебра от кольца отличается только наличием X.

***Определение* 5.8.**

$\mathcal{P}$ – полукольцо, если

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P} \implies A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $A, B \in \mathcal{P} \implies$ существует конечное число дизъюнктных множеств $C_1, ..., C_n$, т.ч. $A \setminus B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k$.

Пример.

1. Возьмём прямую и полуинтервалы на ней $X = \mathbb{R}$ $\mathcal{P} = \{[a, b) \ : \ a \leqslant b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$

   $\mathcal{P}$ – полукольцо.

   Действительно, пересечение полуинтервалов - полуинтервал. А вот разность может дать два полуинтервала (если один вложен в другой). Но третье условие нам как раз такое и разрешает.

2. Аналогично, но точки - рациональные. Не знаю, зачем Храбров дал этот пример, у Ани его нет. Док-во что полукольцо 1 в 1.

3. $X = \mathbb{R}^2$ $\mathcal{P} = \{[a, b) \times [c, d) \ : \ a \leqslant b, \ c \leqslant d, \ a, b \in \mathbb{R}\}$

   Пересечение двух прямоугольников - прямоугольник. А вот с разностью не так очевидно, если один прямоугольник лежит внутри другого. Но в этом случае можно продлить сторны одного до пересечения с другим и на получившиеся прямоугольники и разбить.

Теорема 5.3.

1. $P_1, ..., P_n, P \in \mathcal{P} \implies \exists Q_1, ..., Q_m \in \mathcal{P}$, т.ч.

   $P \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_k$

2. $P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P} \implies \exists Q_{jk} \in \mathcal{P}$, т.ч.

   $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_{jk}$, причем $Q_{jk} \subset P_j$

3. аналогично для $n = +\infty$.

Доказательство.

1. Индукция по n. База – определение полукольца.

   Переход $n \to n+1$:

   $P \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} P_k = (P \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k) \setminus P_{n+1} = (\bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_k) \setminus P_{n+1} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_k \setminus P_{n+1} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$

   Первый знак равно - св-ва объединения. Второй - применяем индукционное предположение (в скобках). Третий - скобки можно снять. Четвёртый - третье условие в определении полукольца.

2. Применим лемму о дизъюнктных объединениях (см. начало билета) и уже доказанный первый пункт: $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} P_j) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$

   Осталось понять, что $Q_{kj} \subset P_k$. Но это верно, так как $Q_{kj} \subset P_k \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} P_j)$

3. Аналогично, но используем лемму о дизъюнктных объединениях в форме для бесконечного числа множеств.

$\square$

5.3. Билет 101: Произведение полуколец. Параллелепипеды и ячейки. Связь между ними.

***Определение* 5.9.**

Декартово произведение полуколец.

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ – полукольца подмножеств X и Y соответственно.

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} = \{P \times Q \ : \ P \in \mathcal{P},\ Q \in \mathcal{Q}\}$ – семейство подмножеств $X \times Y$.

Теорема 5.4.

Декартово произведение полуколец – полукольцо.

Доказательство.

(скорее махание руками, чем доказательство)

Нужно проверить свойства полукольца.

1. $\varnothing = \varnothing \times \varnothing \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$

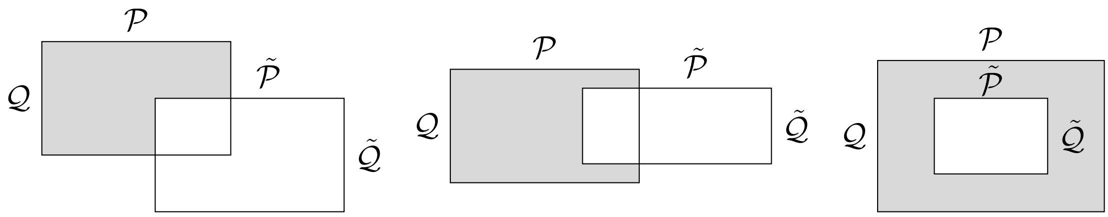
2. $(P \times Q) \cap (\tilde{P} \times \tilde{Q}) = (P \cap \tilde{P}) \times (Q \cap \tilde{Q})$

   Пересечение декартовых произведение - декартово произведение пересечений. Можно посмотреть на картинки ниже и понять.

   +- формально: $(a, b) \in (P \times Q) \iff a \in P, b \in Q$, аналогично $(a, b) \in (\tilde{P} \times \tilde{Q}) \iff a \in \tilde{P}, b \in \tilde{Q}$.

   Тогда $a \in (P \times Q) \cap (\tilde{P} \times \tilde{Q}) \iff (a \in P$ и $a \in \tilde{P})$, и $(b \in Q$ и $b \in \tilde{Q}) \iff (a, b) \in (P \cap \tilde{P}) \times (Q \cap \tilde{Q})$

3. Рисуем картинки. Это два прямоугольника, один вычитаем из другого. Нужно понять, что разность представляется в виде объединения прямоугольников.



Порисовав картинки, понимаем, что:

$(P \times Q) \setminus (\tilde{P} \times \tilde{Q}) = P \times (Q \setminus \tilde{Q}) \sqcup (P \setminus \tilde{P}) \times (Q \cap \tilde{Q})$

А это лежит в $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$: оба дизъюнкткных множества выше можно разбить на дизъюнктные объединения, ведь каждое из них является декартовым произведением множеств из полукольца или дополнением. Дополнения разбиваются по 3 свойству полукольца.

Замечание. На нашей лекции Храбров неправильно выписал формулу выше.

$\square$

***Определение* 5.10.**

$\mathbb{R}^n$

Замкнутый параллелепипед – $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n] =: [a, b]$

$a = [a_1, a_2, ..., a_n]$

$b = [b_1, b_2, ..., b_n]$

Открытый параллелепипед – $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_n, b_n) =: (a, b)$

Ячейка – $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times ... \times [a_n, b_n) =: [a, b)$

Обозначения.

$\mathcal{P}^n$ – множество всех ячеек из $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}}$ – множество всех ячеек из $\mathbb{R}^n$ с рациональными координатами вершин.

Теорема 5.5.

Непустая ячейка представима в виде пересечения счетного множества открытых параллелепипедов и представима в виде счетного объединения замкнутых.

Доказательство.

$[a, b) = [a_1, b_1) \times ... \times [a_n, b_n)$

$C_k := (a_1 - \frac{1}{k}, b_1) \times ... \times (a_n - \frac{1}{k}, b_n)$

$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k = [a, b)$:

$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k \supset [a, b)$, так как $C_k \supset [a, b) \forall k$

$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k \subset [a, b)$, так как если $\exists x \in C_k, x \notin [a, b)$, то начиная с некоторого номера $x \notin \bigcap\limits_{k=1}^{n} C_k$, так как они сужаются

$D_k := [a_1, b_1 - \frac{1}{k}] \times ... \times [a_n, b_n - \frac{1}{k}]$

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k = [a, b)$

Доказательство аналогично: $\subset$ очевиден, а $\supset$ т.к. начиная с некоторого номера каждая точка попадёт в объединение □

5.4. Билет 102: ! Полукольца ячеек. Представление от- крытого множества в виде объединения ячеек. Следствие

***Определение* 5.11.**

$\mathcal{P}^m$ - все ячейки в $\mathbb{R}^m$

$\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ - все такие ячейки в $\mathbb{R}^m$, что их вершина в рациональных точках

Теорема 5.6.

$\mathcal{P}^m$ и $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ - полукольца.

Доказательство.

Понятно, что

$$\mathcal{P}^m = \underbrace{\mathcal{P} \times \mathcal{P} \times ... \times \mathcal{P}}_{m}$$
$$\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} = \underbrace{\mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \times \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \times ... \times \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}}_{m}$$

$\mathcal{P}^m$ и $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ - полуинтервалы, про них уже знаем, что они - полукольца. Уже доказали, что декартово произведение полуколец - полукольцо. Несложно видеть, что из этого следует, что мы уже доказали теорему. □

Теорема 5.7.

Всякое непустое открытое множество $G \subset R^n$ есть дизъюнктное объединение счетного числа ячеек таких, что их замыкания содержатся в G. Более того можно брать ячейки с рациональными вершинами.

Доказательство.

Возьмем точку $x \in G$, она содержится там с каким-то шариком с центром в точке x (ведь G открытое по условию). В этом шарике мы можем взять ячейку, которая содержит x, например, вписать туда кубик. Немного пошевелим его так, чтобы его вершины стали рациональными, он может и перестанет быть кубиком, но ячейкой он быть не престанет и все еще будет содержаться в шарике. Значит для каждой точки x из G есть такая ячейка R_xс рациональными, что $x \in R_x$, и $\text{Cl} R_x \subset G$. Но всего ячеек с рациональными вершинами счетное число (задается $2m$ рациональными точками по m на вершину). Точек несчетное, а ячеек счетно, значит, будут повторяющиеся. Выкинем все повторы. Получили $G = \bigcup R_x$ (не по всем x, по счетному числу). Но по теореме (однйо из предыдущих) мы можем любое объединение превратить в дизъюнктное объединение, поэтому $G = \bigsqcup \bigsqcup Q$. (Рациональные концы никуда не делись, потому что мы там брали разность каких-то множеств с рациональными концами, так рациональными и осталось бы). Еще про замыкание: замыкание Q содержится в объединение R_x, которое содержится в G. □

Следствие.

$\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) = \mathcal{B}^m$

Доказательство.

Покажем включения:

$\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m)$, ведь $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{P}^m$, значит, в σ-алгебра, натянутая на правое, будет больше, чем σ-алгебра, натянутая на левое.

$\mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$, ведь любая ячейка - счетное пересечение открытых множеств, а в $\mathcal{B}^m$ живут все объединения открытых множеств, значит, минимальная σ-алгебра, натянутая на ячейки лежит в $\mathcal{B}^m$.

$\mathcal{B}^m \subset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$, ведь любое открытое множество представляется как дизъюнктное объединение ячеек с рациональными концами, значит любое открытое множество лежит в $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$, значит оно содержит минимальную σ-алгебру, содержащую все открытые множество - $\mathcal{B}$. $\square$