



**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**DEPARTAMENTO DE MECÂNICA**

**DISCIPLINA: TRANSPORTE DE CALOR E MASSA**

**PROFESSOR: RAFAEL GABLER GONTIJO**

**1º SEMESTRE 2020**

**RELATÓRIO DO TRABALHO COMPUTACIONAL -  
SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS UTILIZANDO  
DIFERENÇAS FINITAS**

**ESTUDANTE**

Liz Carolina Jaber Costato

**MATRÍCULA**

18/0022261

BRASÍLIA

2020

## **SUMÁRIO**

<b>1</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>INTRODUÇÃO TEÓRICA</b>	<b>2</b>
	2.1 - Equação Geral da Difusão de Calor	2
	2.2 - Método das Diferenças Finitas	4
<b>3</b>	<b>RESOLUÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO</b>	<b>6</b>
3.1	Linguagem e processador utilizados na elaboração e execução do programa	6
3.2	Situação proposta	6
3.3	Solução escolhida	7
3.4	Resultados obtidos com a execução do código	10
	3.4.1 Condição inicial	10
	3.4.2 Resultados para quatro malhas escolhidas	10
	3.4.3 Tempo de processamento	36
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>38</b>
<b>5</b>	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>39</b>

## **1 OBJETIVOS**

O trabalho computacional realizado tem como objetivo o desenvolvimento de um programa o qual é capaz de resolver numericamente, com o Método das Diferenças Finitas, a equação da difusão de calor, em um caso bidimensional, sem geração interna, para um domínio de cálculo e condições de contorno bem definidos.

Com a execução do programa, devem ser possíveis análises acerca do comportamento do campo de temperatura em função do espaço e do tempo, e observações acerca do recurso computacional necessário para resolver a equação estudada em função do número de nós utilizados no método das diferenças finitas.

## **2 INTRODUÇÃO TEÓRICA**

### 2.1 - Equação Geral da Difusão de Calor

O calor, o qual consiste em uma energia que é transferida de um sistema de maior temperatura para outro de temperatura inferior, pode se manifestar na natureza por meio de três processos físicos distintos: condução, convecção e radiação. A condução é a manifestação do calor em um meio estacionário, a convecção está vinculada a um fluido que se movimenta e interage com uma superfície sólida com uma temperatura diferente da do fluido, e a radiação ocorre mesmo sem a presença de matéria.

Para descrever o campo de temperatura, o qual varia em função do espaço e do tempo, em um meio estacionário que experiencia um distúrbio de temperatura, é utilizada a Equação Geral da Difusão de Calor, também conhecida como Equação Geral da Condução de Calor.

A equação em foco vem de um balanço de energia em cada ponto de um sistema submetido à condução. O balanço considera a taxa de energia transferida na forma de calor pelas fronteiras ( $\dot{\epsilon}_{in} - \dot{\epsilon}_{out}$ ), a taxa de energia térmica gerada no interior do volume a partir de outras fontes ( $\dot{\epsilon}_g$ ), como reações químicas, e a taxa de energia armazenada pelo sistema ( $\dot{\epsilon}_a$ ).

Este equilíbrio de energia pode ser calculado considerando-se o fluxo de calor que entra e sai em um cubo infinitesimal, como o apresentado a seguir:

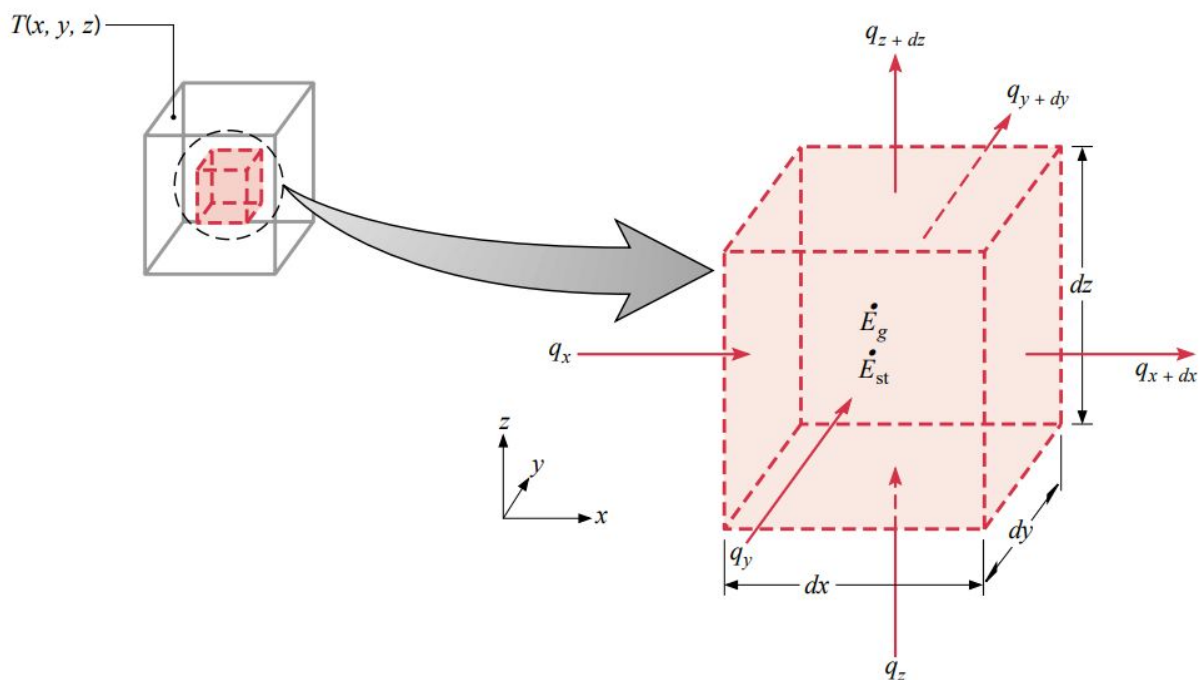


Imagem 1: Volume de controle infinitesimal, dx dy dz

Fonte: Figure 2.11 do livro Fundamentals of Heat and Mass Transfer do autor Incropera

Dessa forma, tem-se:

$$\dot{\epsilon}_{in} - \dot{\epsilon}_{out} + \dot{\epsilon}_g = \dot{\epsilon}_a$$

$$(q_x dydz + q_y dxdz + q_z dxdy) - [(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dydz + (q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy) dxdz + (q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz) dxdy] + (\dot{q} dxdydz) = (\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz)$$

Com isso, obtém-se o que é denominado a Equação Geral da Equação de Calor:

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$-\nabla \cdot (-k \nabla T) + \dot{q} = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t}$$

## 2.2 - Método das Diferenças Finitas

O Método das Diferenças Finitas é um método numérico o qual permite fazer aproximações de derivadas por diferenças finitas. Assim como outros artifícios de solução numérica, este recurso utiliza técnicas aproximativas para transformar um domínio contínuo em um domínio discretizado. A partir da discretização do tempo e do espaço, é possível utilizar o Método das Diferenças Finitas para descrever campos, cujas equações diferenciais são conhecidas.

Supondo uma malha discretizada do espaço, e sendo  $i$  e  $j$  as coordenadas de um ponto arbitrário do domínio:

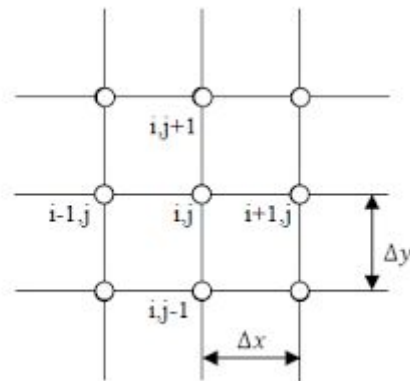


Imagem 2: Nós de um espaço discretizado

Fonte: A.L.S.Magalhães, S.V.Barbosa, K.V.S.Oliveira, A.P.S.Alves, G.A.S.Abreu, M.C.Silva, A.M.T.Ervilha, S.F.Antoniazzi, A.M.O.Siqueira, Experimento Acadêmico: Aplicação do Método de Diferenças Finitas para a Análise do Resfriamento de uma Beterraba Cozida

Utilizando os primeiros termos da Série de Taylor da função derivada, obtém-se as seguintes aproximações para as primeiras e segundas derivadas, no espaço, de uma função:

Derivada Primeira:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{f_{i,j}-f_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{f_{i,j+1}-f_{i,j}}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{f_{i,j}-f_{i,j-1}}{\Delta y}$$

Derivada Segunda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j}+f_{i-1,j}-2f_{i,j}}{\Delta x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i,j+1}+f_{i,j-1}-2f_{i,j}}{\Delta y^2}$$

A derivada temporal para um ponto  $i,j$  do domínio discretizado do espaço, considerando  $P$  como o instante atual e  $P+1$  como o próximo instante, no domínio discretizado do tempo, pode ser descrita como:

$$\frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{i,j} = \frac{f_{i,j}^{P+1}-f_{i,j}^P}{\Delta t}$$

No trabalho computacional proposto, o Método das Diferenças Finitas será utilizado para aproximar o cálculo do campo de temperatura em um domínio bidimensional, sem geração interna de energia, cuja equação diferencial é

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \alpha \text{ é difusividade térmica do meio estudado.}$$

Utilizando as aproximações para as derivadas primeira e segunda no espaço e para a derivada temporal, pode-se aproximar essa equação diferencial como:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_{ij}^{P+1} - T_{ij}^P}{\Delta t} = \frac{T_{i+1,j}^P + T_{i-1,j}^P - 2T_{ij}^P}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^P + T_{i,j-1}^P - 2T_{ij}^P}{\Delta y^2}, \text{ ou}$$

$$T_{ij}^{P+1} = F_o(T_{i+1,j}^P + T_{i-1,j}^P + T_{i,j+1}^P + T_{i,j-1}^P) + (1 - 4F_o)T_{ij}^P, \quad F_o = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$$

### 3 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO

#### 3.1 - Linguagem e processador utilizados na elaboração e execução do programa:

Para a resolução da equação da difusão de calor, utilizando o método das diferenças finitas, bem como para a elaboração das imagens e dos gráficos apresentados no presente trabalho, foi utilizada a linguagem Matlab.

A fim de embasar os resultados de tempo de processamento para diferentes malhas de nós empregadas, vale ressaltar que foi feito o uso de um computador Pavilion m7-1015dx da marca HP, com processador Core i7 da Intel, para a realização dos testes.

#### 3.2 - Situação proposta:

Foi proposta a seguinte geometria, com as condições de contorno mostradas:

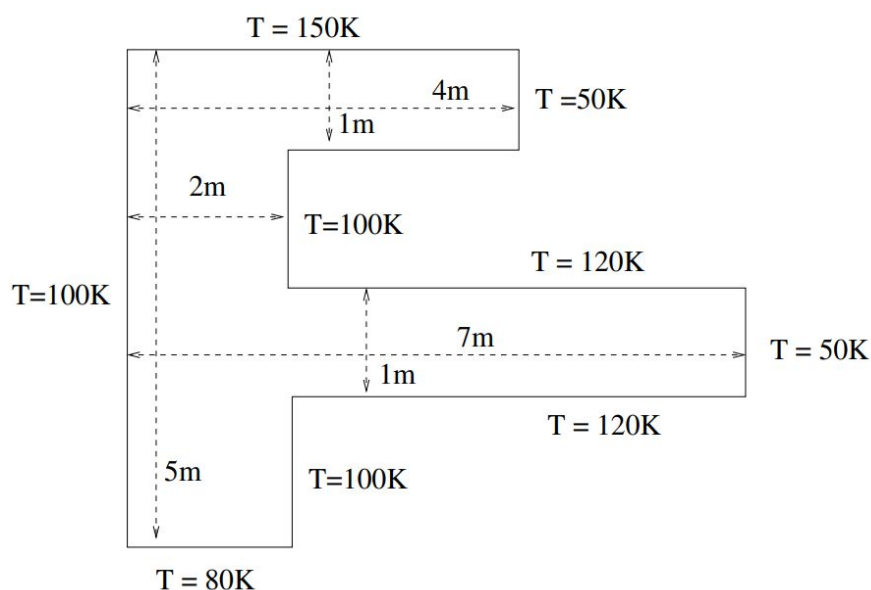


Imagem 3: Situação Problema Proposta

Ainda, foi estabelecida a condição inicial de 0K para todos os nós internos.

A temperatura de contorno não fornecida foi atribuída como sendo 100K, e o comprimento de ambas as bordas da direita cujas temperaturas são 100K foi arbitrado como 1.5m.

### 3.3 - Solução escolhida:

Para a descrição do campo de temperatura na situação proposta, foram adotados alguns parâmetros arbitrários, necessários para melhor definir o problema:

- Difusividade Térmica ( $\alpha$ ) =  $5 \cdot 10^{-6} m^2/s$
- Condutividade Térmica ( $k$ ) =  $30 W/mk$
- Coeficiente Médio de Transferência de Calor por Convecção ( $h$ ) =  $30 W/m^2k$
- Número de Fourier ( $F_o$ ): Foi utilizado o critério de estabilidade para definir o número de Fourier, o qual indica um passo de tempo adimensional para a análise da evolução da temperatura no domínio estudado, em função do tempo.

O critério de estabilidade é necessário para garantir que a solução do método numérico utilizado convirja. Ele envolve o número de Biot ( $Bi$ ), o qual depende de características da malha adotada para o Método das Diferenças Finitas, bem como do meio no qual o sistema está submetido:  $Bi = \frac{hdx}{k}$ . Tal critério é dado por:

$$F_o \leq \frac{1}{2(1+Bi)}.$$

No programa elaborado, foi arbitrado  $F_o = \frac{0.5}{2(1+Bi)}$ , a fim de garantir o cumprimento do critério de estabilidade apresentado.

- Diferença mínima de temperatura entre o último cálculo e o atual para determinar que o estado estacionário foi alcançado: 0.01k.



- A equação obtida com o Método das Diferenças Finitas para o cálculo da temperatura em cada ponto da malha, para o próximo instante de tempo:

$$T_{n,m}^{P+1} = Fo(T_{n-1,m}^P + T_{n+1,m}^P + T_{n,m-1}^P + T_{n,m+1}^P) + (1 - 4Fo)T_{n,m}^P$$

Para fazer referência a posições do domínio estudado, foi empregado o seguinte sistema de eixos:

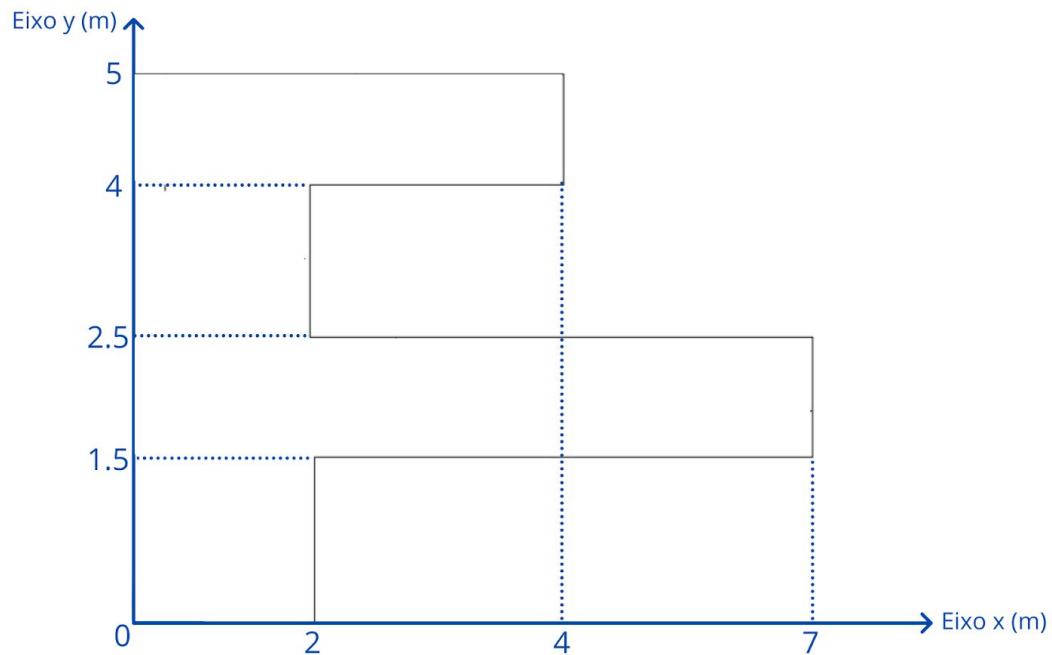


Imagem 4: Sistema de Eixos Adotado

Com o intuito de dividir os eixos x e y em intervalos (dx e dy) iguais, decidiu-se escolher malhas em que o eixo x fosse dividido em múltiplos de 14 e o eixo y em múltiplos de 10. Este múltiplo foi declarado no código em Matlab como o parâmetro 'x'. Dessa forma, dx e dy sempre serão iguais a 0.5/x. No código, tanto o intervalo dx como o intervalo dy foi chamado de dx, visto ambos possuírem o mesmo valor. A malha de divisão mínima, ou seja, a que assume o parâmetro x = 1, é apresentada a seguir:

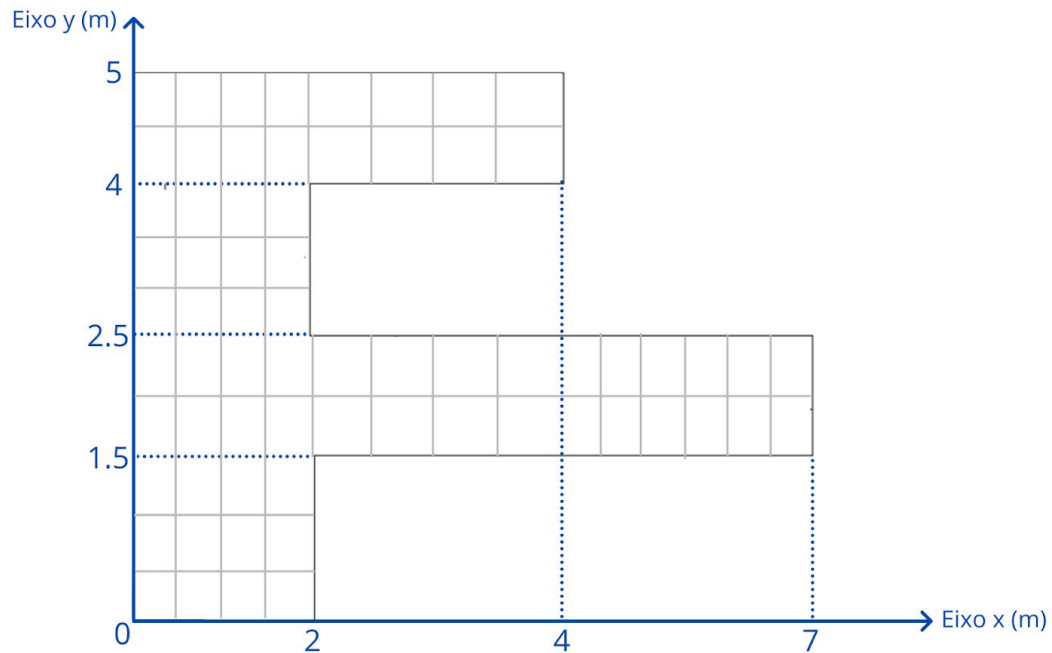


Imagem 5: Malha para  $x = 1$

No código, as temperaturas foram atribuídas a posições de uma matriz. Sendo assim, cada um dos quadrados  $dx dy$  representa um “nó” da malha. Sabendo que os nós que possuem contato com as bordas da figura são considerados nós externos, e com essa escolha de intervalos  $dx$  e  $dy$ , é possível calcular o número de nós externos e internos como:

- Número de nós externos =  $56x - 4$
- Número de nós internos =  $68x^2 - 56x + 4$

A fim de estudar o comportamento de nós em uma mesma seção do sistema, foram escolhidos 5 seções, cujos perfis de temperatura serão apresentados, para diferentes instantes de tempo. As seções escolhidas para cada perfil foram:

- Perfil 1:  $y = 4.5m$
- Perfil 2:  $y = 3.25m$
- Perfil 3:  $y = 2m$
- Perfil 4:  $y = 0.75m$

- Perfil 5:  $x = 1\text{m}$

### 3.4 - Resultados obtidos com a execução do código:

#### 3.4.1 - Condição inicial:

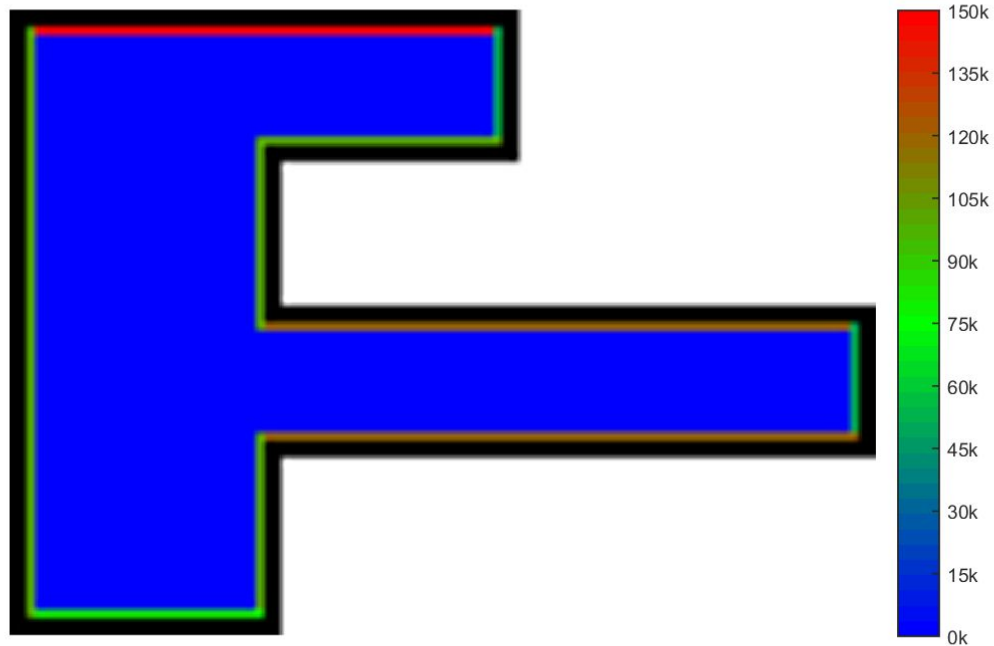


Imagem 6: Estado Inicial

#### 3.4.2 - Resultados para quatro malhas escolhidas

- 1424 nós internos ( $x = 5$ )

A equação obtida com o Método das Diferenças Finitas para o cálculo da temperatura em cada ponto da malha, para o próximo instante de tempo é:

$$T_{n,m}^{P+1} = Fo(T_{n-1,m}^P + T_{n+1,m}^P + T_{n,m-1}^P + T_{n,m+1}^P) + (1 - 4Fo)T_{n,m}^P$$

Para  $x = 5$ ,  $Fo = 0.2273$ . Portanto, a equação utilizada foi:

$$T_{n,m}^{P+1} = 0.2273(T_{n-1,m}^P + T_{n+1,m}^P + T_{n,m-1}^P + T_{n,m+1}^P) + 0.0909T_{n,m}^P$$

Para uma malha de 1424 nós internos e para o número de Fourier escolhido,  $Fo = 0.2273$ , o passo de tempo adotado, entre duas iterações consecutivas, foi de

$$\Delta t = \frac{Fo \Delta x^2}{\alpha} = \frac{0.2273 \cdot 0.1^2}{5 \cdot 10^{-6}} = 454.5455 \text{ segundos.}$$

A fim de comparar com o resultado apresentado por outras malhas adotadas, o resultado obtido após 100 iterações,  $\Delta t \approx 12.6263h$ , foi:



Imagem 7: Campo de temperatura após 100 iterações para x = 5

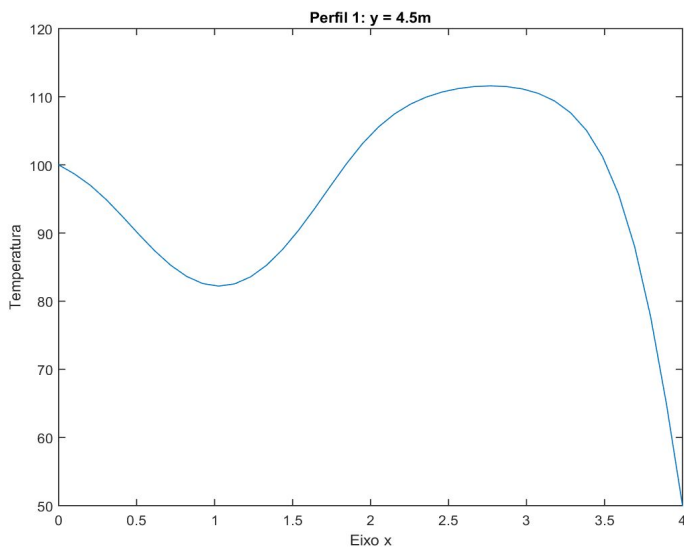


Gráfico 1: Perfil 1 após 100 iterações para x = 5

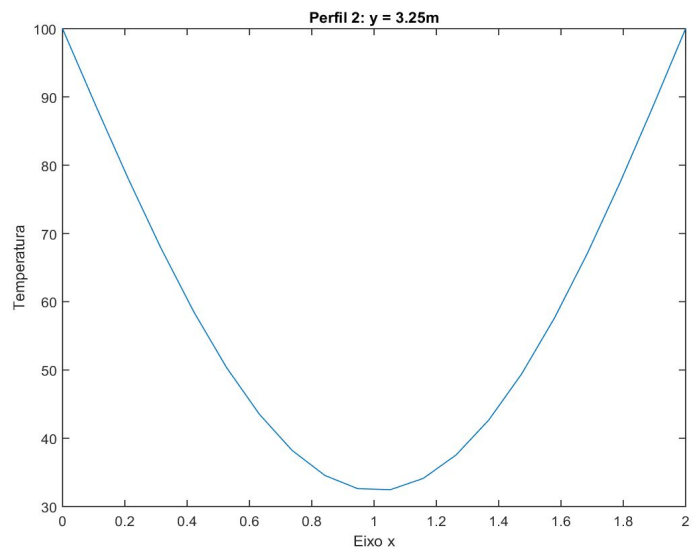


Gráfico 2: Perfil 2 após 100 iterações para x = 5

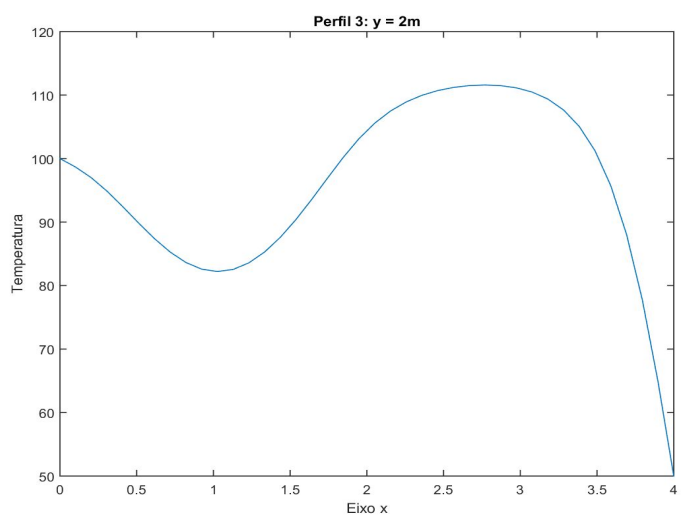


Gráfico 3: Perfil 3 após 100 iterações para x = 5

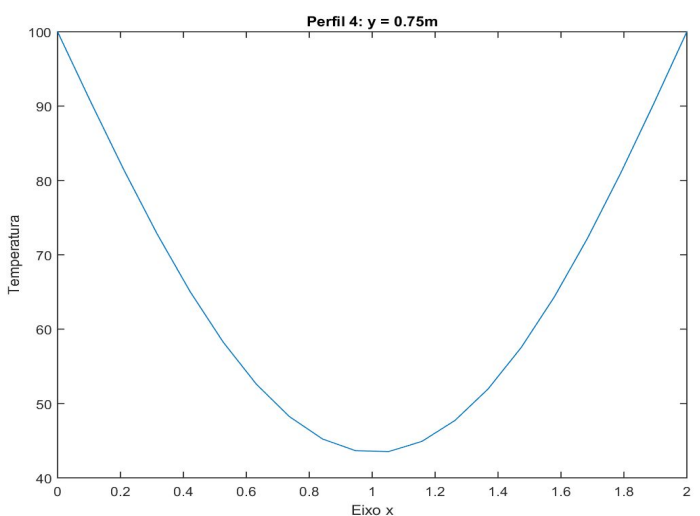


Gráfico 4: Perfil 4 após 100 iterações para x = 5

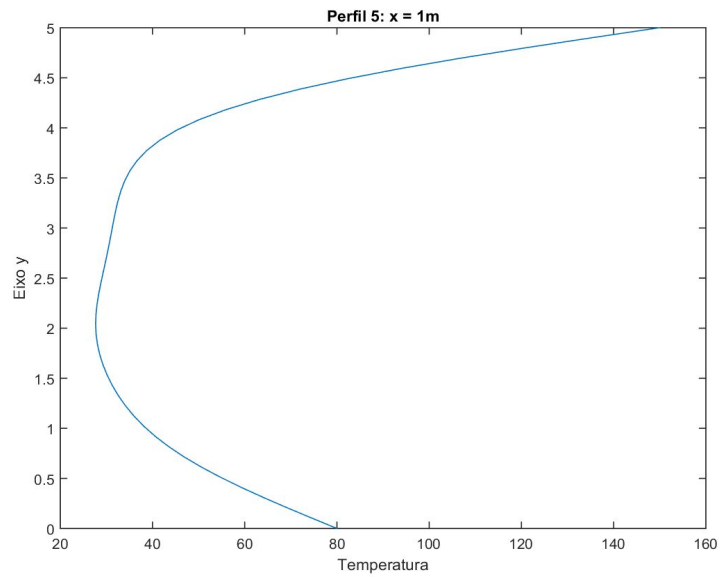


Gráfico 5: Perfil 5 após 100 iterações para x = 5

O resultado obtido após 200 iterações,  $\Delta t \approx 20.2525h$ , foi



Imagem 8: Campo de temperatura após 200 iterações para x = 5

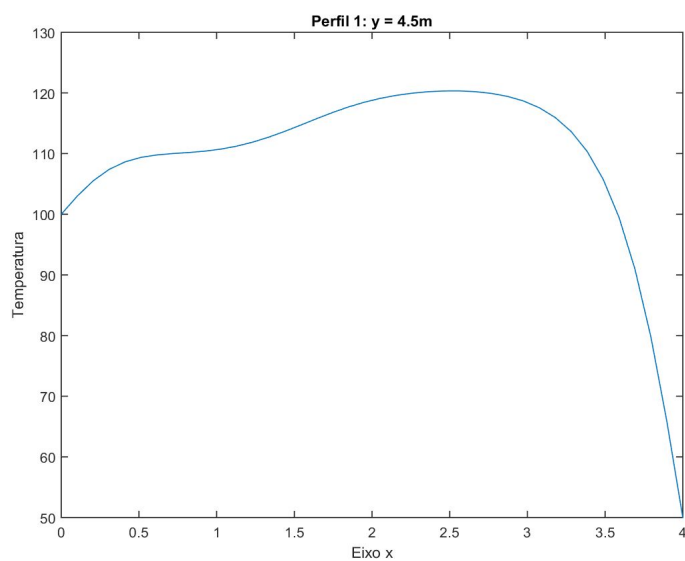


Gráfico 6: Perfil 1 após 200 iterações para  $x = 5$

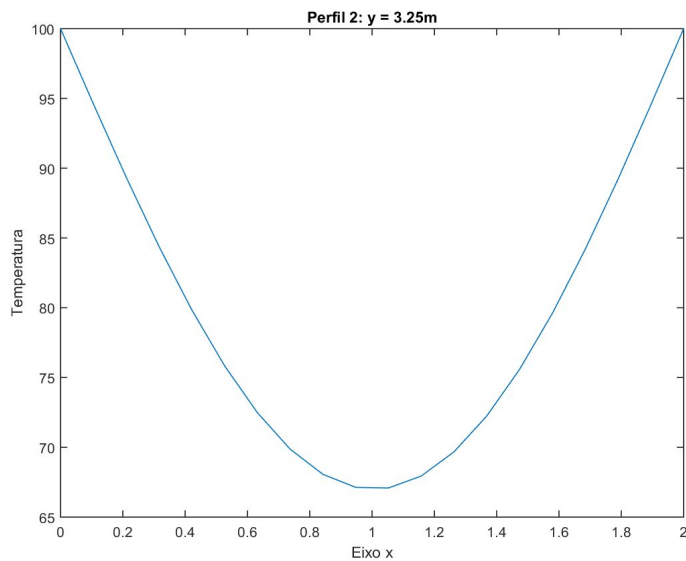


Gráfico 7: Perfil 2 após 200 iterações para  $x = 5$

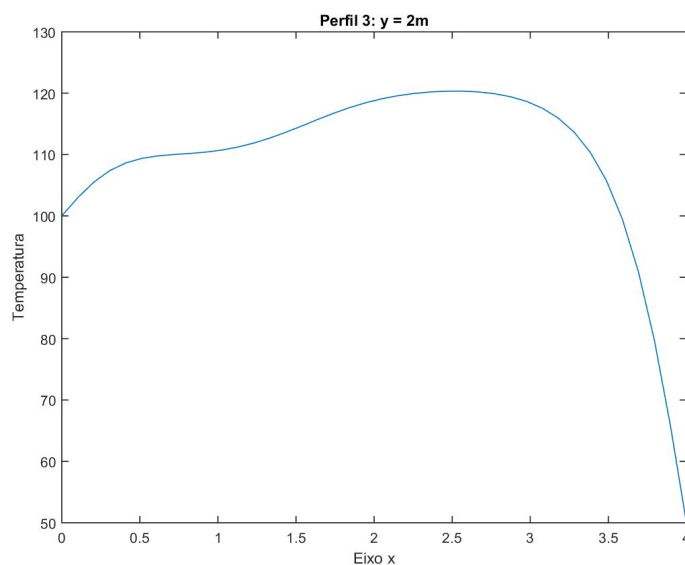


Gráfico 8: Perfil 3 após 200 iterações para  $x = 5$

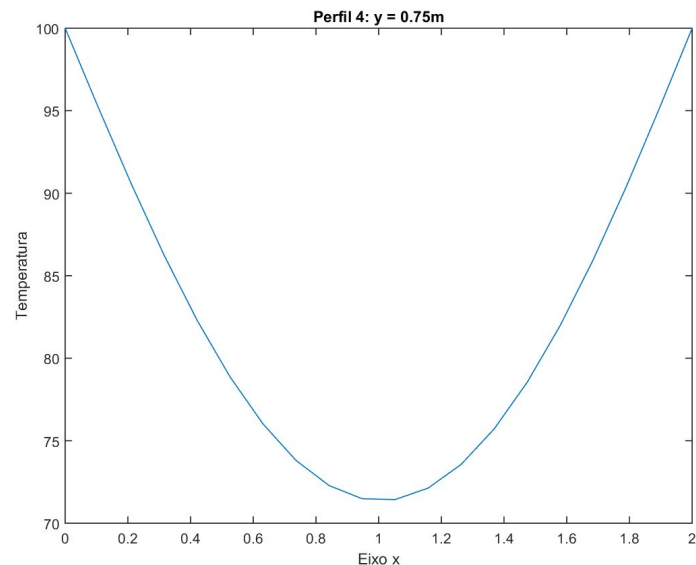


Gráfico 9: Perfil 4 após 200 iterações para  $x = 5$

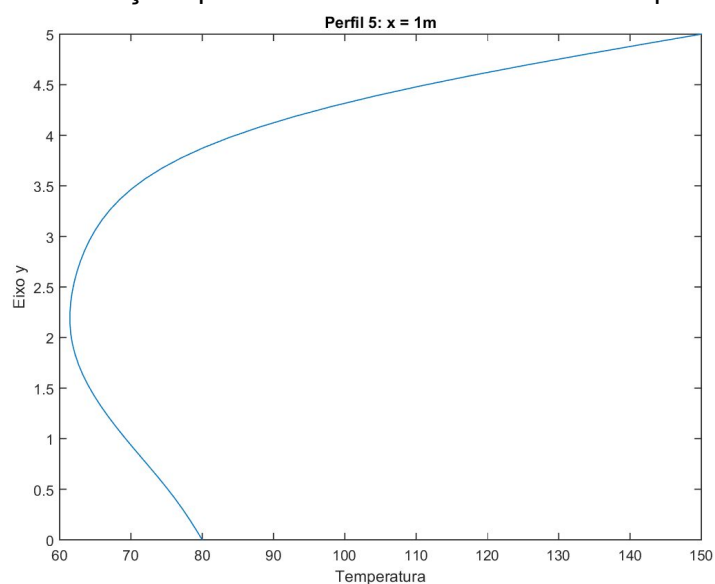


Gráfico 10: Perfil 5 após 200 iterações para  $x = 5$

O resultado obtido após 400 iterações,  $\Delta t \approx 50.5051h$  , foi:



Imagem 9: Campo de temperatura após 400 iterações para  $x = 5$

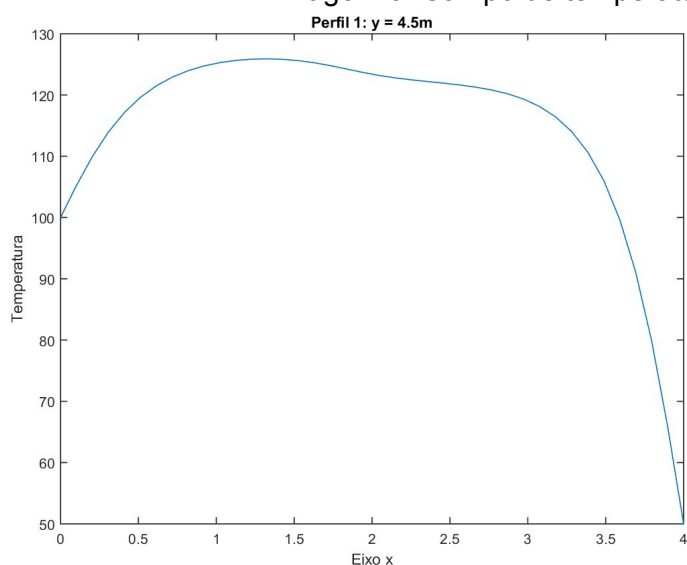


Gráfico 11: Perfil 1 após 400 iterações para  $x = 5$

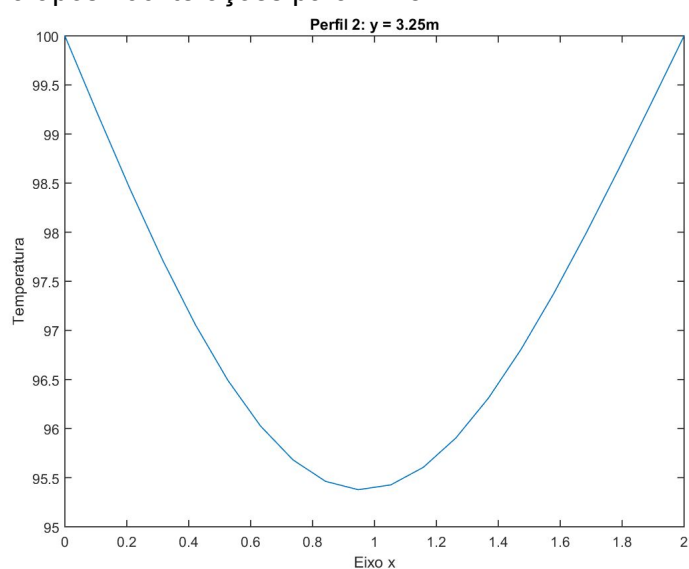


Gráfico 12: Perfil 2 após 400 iterações para  $x = 5$

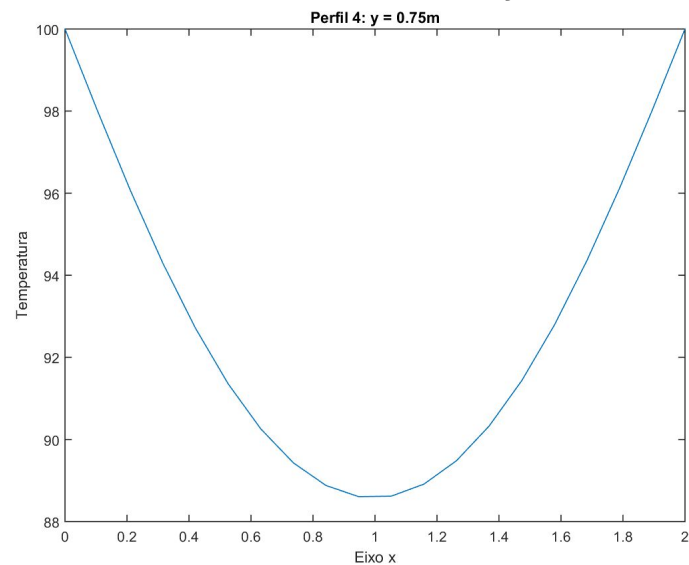
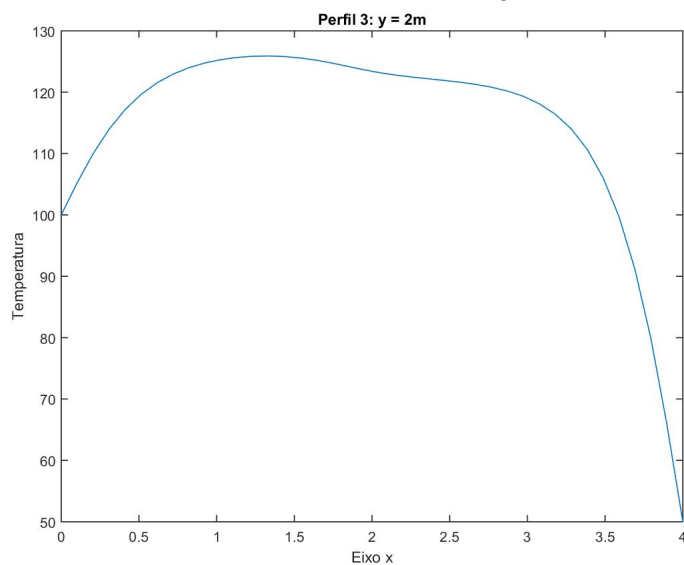


Gráfico 13: Perfil 3 após 400 iterações para  $x = 5$

Gráfico 14: Perfil 4 após 400 iterações para  $x = 5$

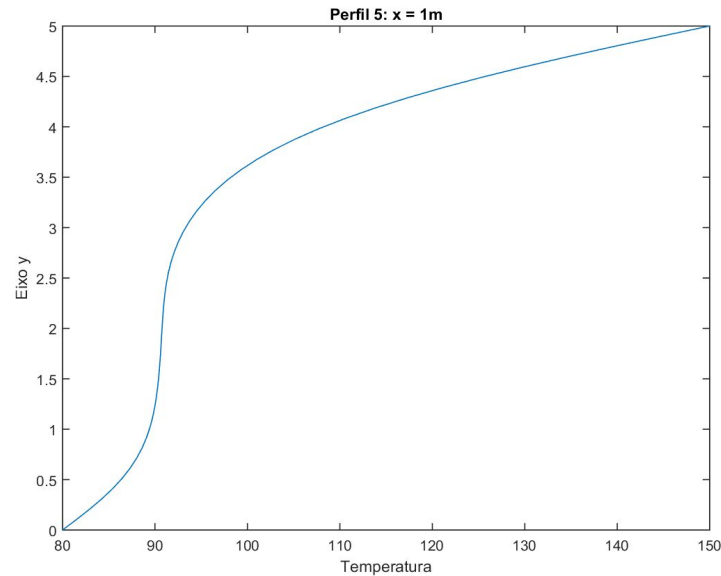


Gráfico 15: Perfil 5 após 400 iterações para  $x = 5$

A condição de parada, a qual indica que o sistema já pode ser considerado em regime permanente, foi satisfeita em 700 iterações, resultando em um  $\Delta t$  total de 88.3838 horas. A imagem e os gráficos gerados neste instante foram:



Imagem 10: Campo de temperatura após 700 iterações para  $x = 5$



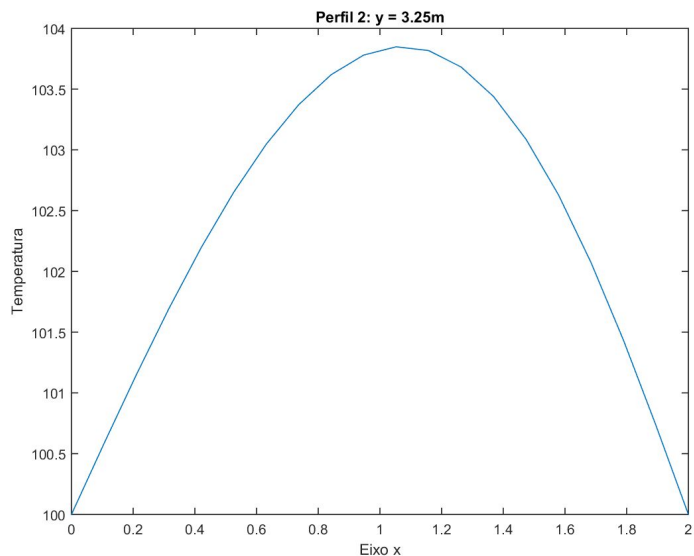
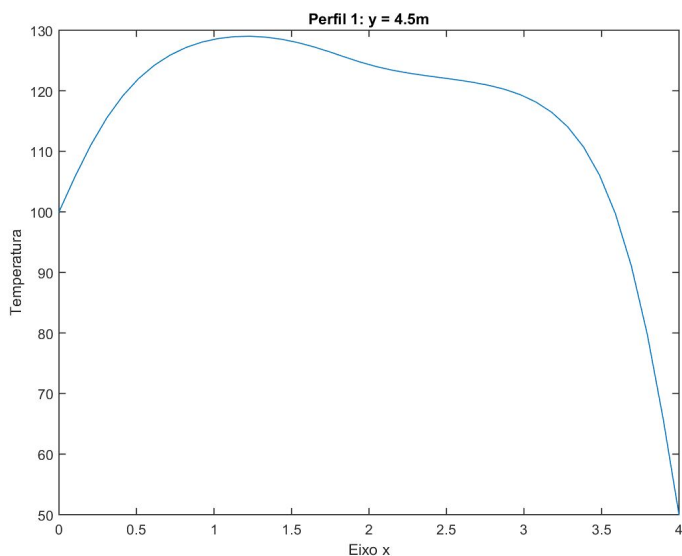


Gráfico 16: Perfil 1 após 700 iterações para  $x = 5$

Gráfico 17: Perfil 2 após 700 iterações para  $x = 5$

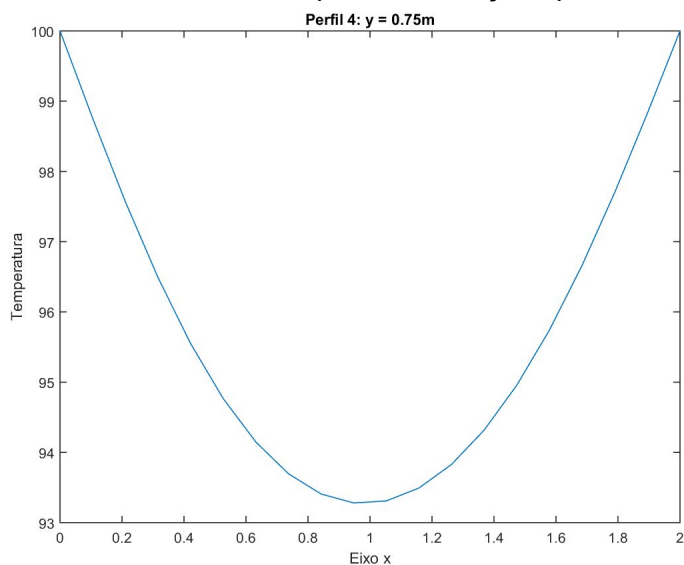
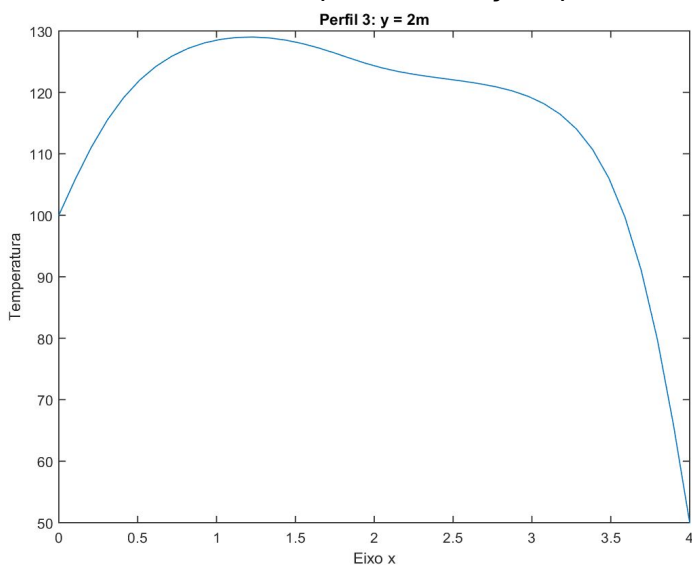


Gráfico 18: Perfil 3 após 700 iterações para  $x = 5$

Gráfico 19: Perfil 4 após 700 iterações para  $x = 5$

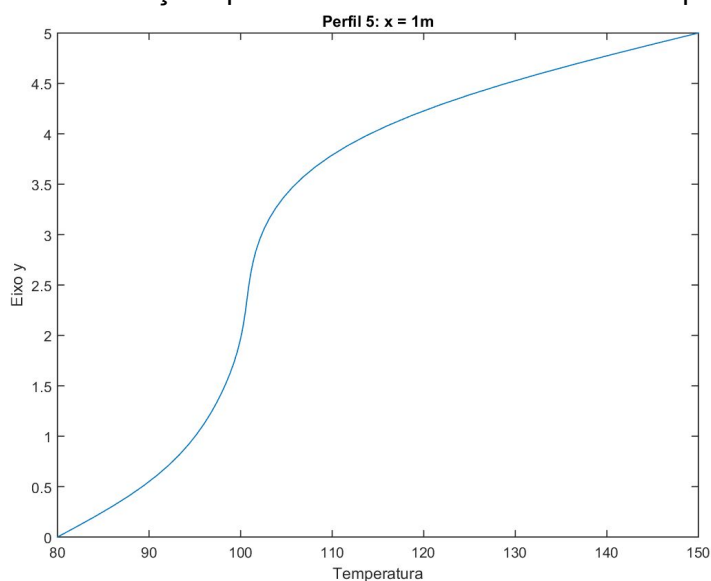


Gráfico 20: Perfil 5 após 700 iterações para  $x = 5$

- 2116 nós internos ( $x = 6$ )

A equação obtida com o Método das Diferenças Finitas para o cálculo da temperatura em cada ponto da malha, para o próximo instante de tempo é:

$$T_{n,m}^{P+1} = Fo(T_{n-1,m}^P + T_{n+1,m}^P + T_{n,m-1}^P + T_{n,m+1}^P) + (1 - 4Fo)T_{n,m}^P$$

Para  $x = 6$ ,  $Fo = 0.2308$ . Portanto, a equação utilizada foi:

$$T_{n,m}^{P+1} = 0.2308(T_{n-1,m}^P + T_{n+1,m}^P + T_{n,m-1}^P + T_{n,m+1}^P) + 0.0769T_{n,m}^P$$

Para uma malha de 2116 nós internos e para o número de Fourier escolhido,  $Fo = 0.2308$ , o passo de tempo adotado, entre duas iterações consecutivas, foi de

$$\Delta t = \frac{Fo \Delta x^2}{\alpha} = \frac{0.2308 \cdot 0.0833^2}{5 \cdot 10^{-6}} = 320.5128 \text{ segundos.}$$

A fim de comparar com o resultado apresentado por outras malhas adotadas, o resultado obtido após 100 iterações,  $\Delta t \approx 8.9031h$ , foi:



Imagem 11: Campo de temperatura após 100 iterações para  $x = 6$

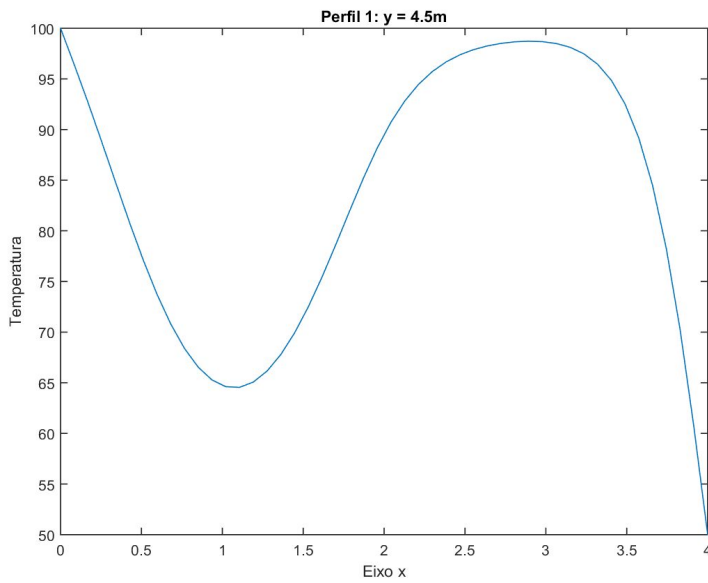


Gráfico 21: Perfil 1 após 100 iterações para  $x = 6$

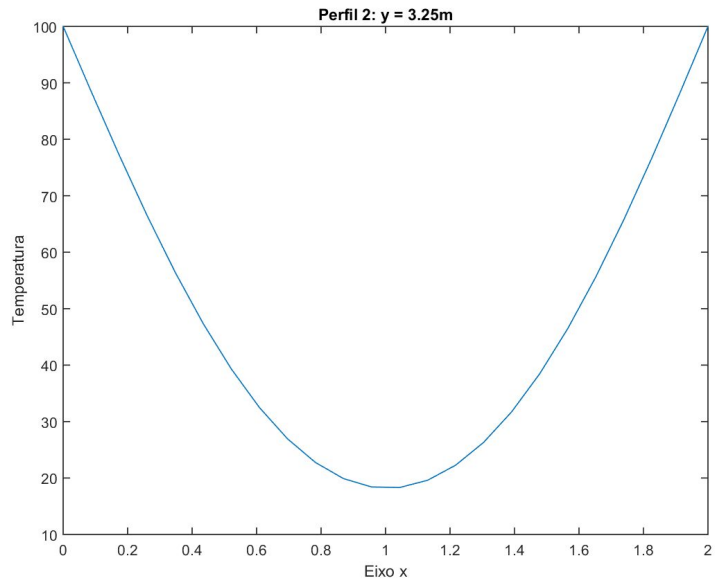


Gráfico 22: Perfil 2 após 100 iterações para  $x = 6$

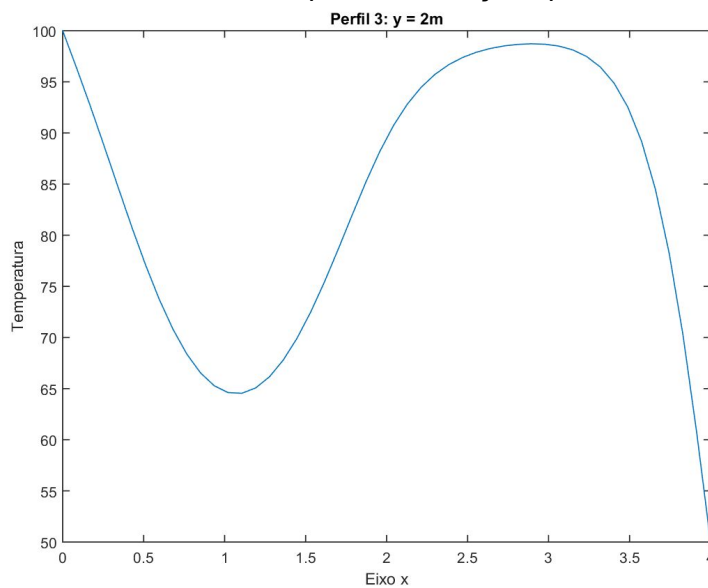


Gráfico 23: Perfil 3 após 100 iterações para  $x = 6$

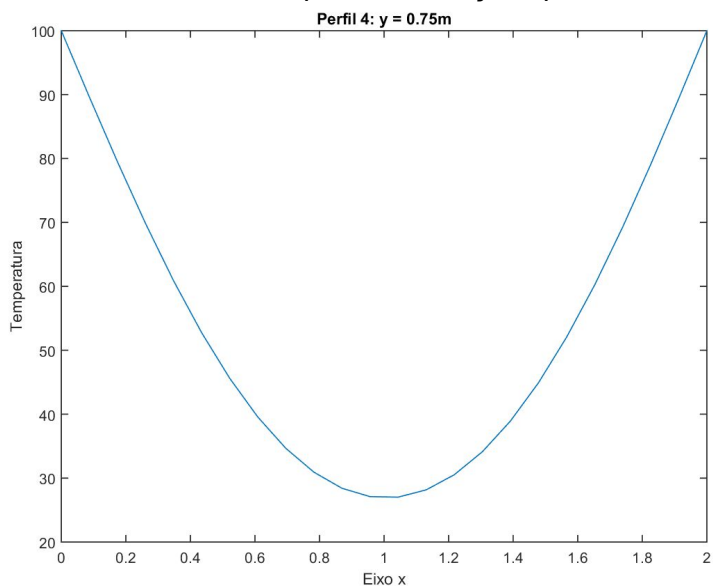


Gráfico 24: Perfil 4 após 100 iterações para  $x = 6$

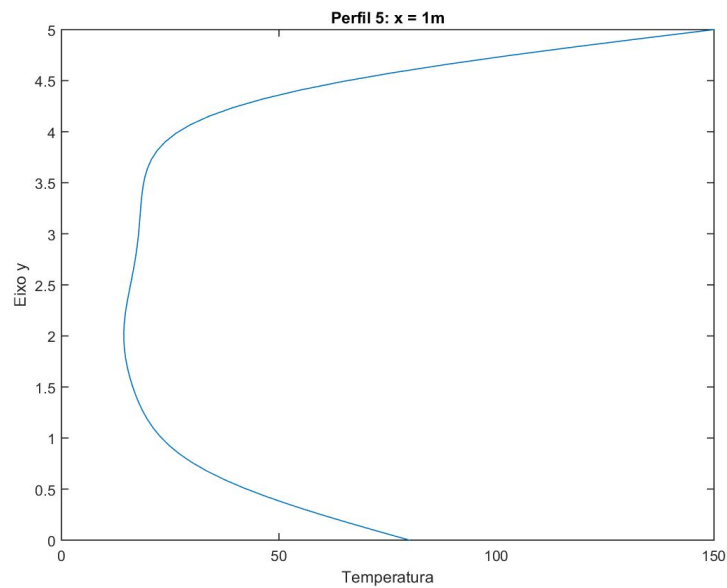


Gráfico 25: Perfil 5 após 100 iterações para  $x = 6$

O resultado obtido após 200 iterações,  $\Delta t \approx 17.8063h$  , foi



Imagem 12: Campo de temperatura após 200 iterações para  $x = 6$

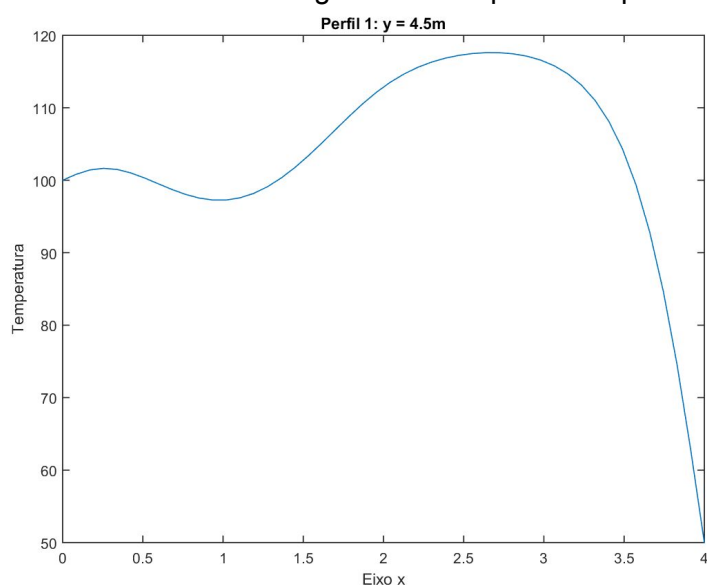


Gráfico 26: Perfil 1 após 200 iterações para  $x = 6$

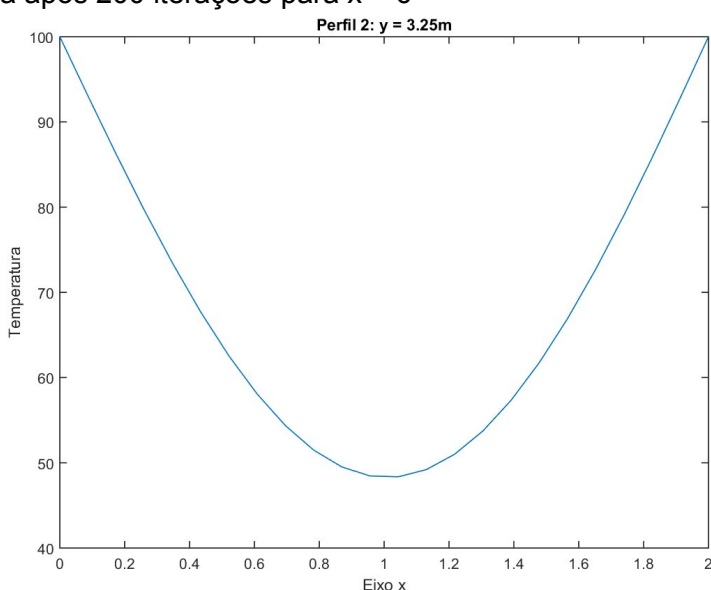


Gráfico 27: Perfil 2 após 200 iterações para  $x = 6$

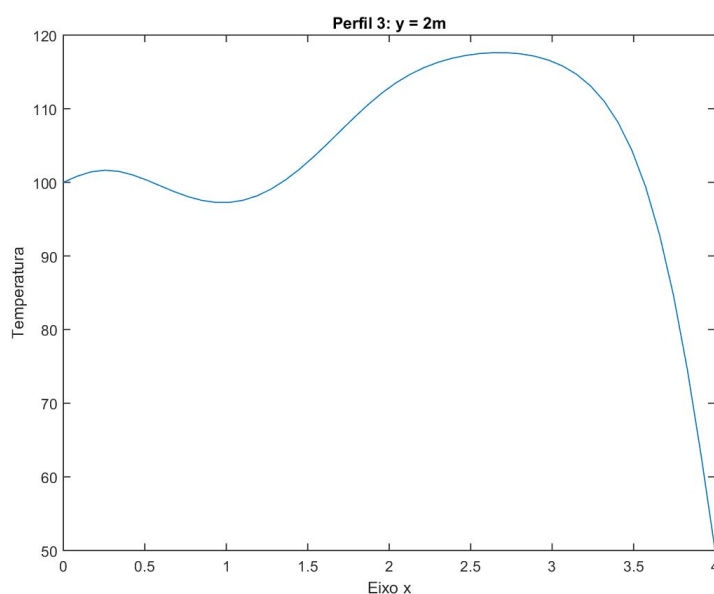


Gráfico 28: Perfil 3 após 200 iterações para  $x = 6$

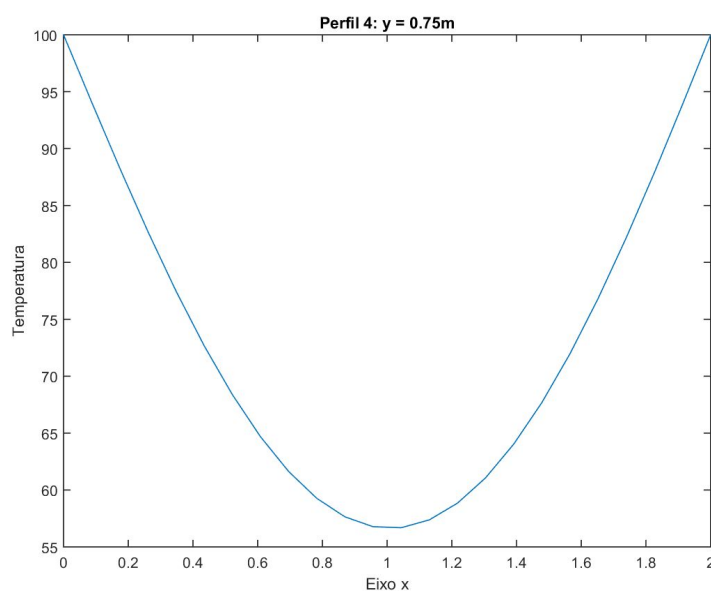


Gráfico 29: Perfil 4 após 200 iterações para  $x = 6$

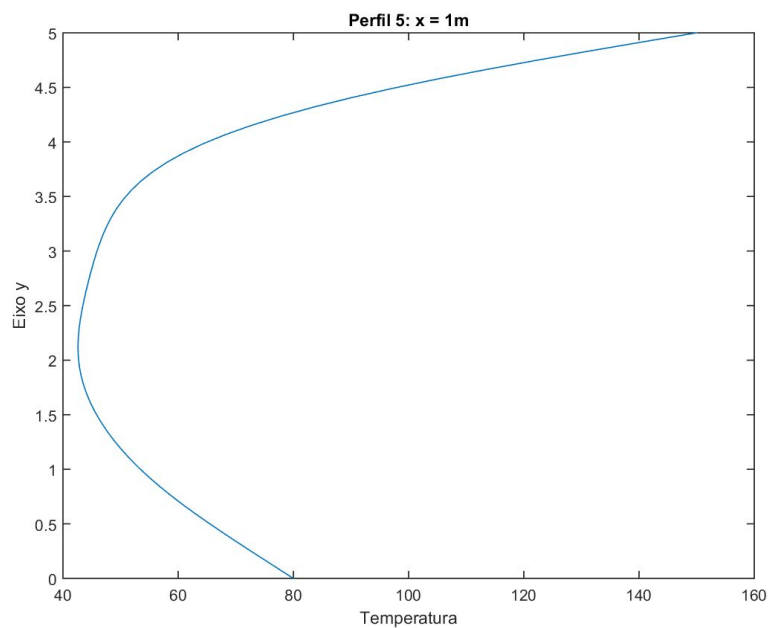


Gráfico 30: Perfil 5 após 200 iterações para x = 6

O resultado obtido após 400 iterações,  $\Delta t \approx 35.6125h$  , foi:



Imagem 13: Campo de temperatura após 400 iterações para x = 6

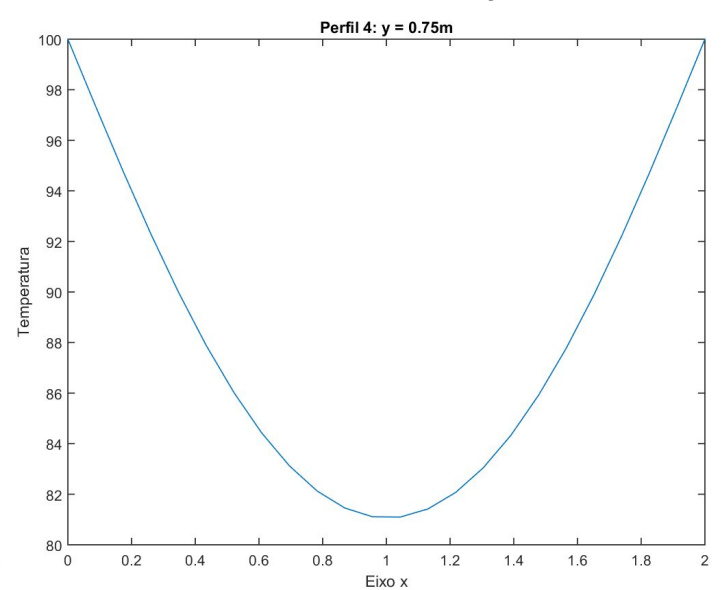
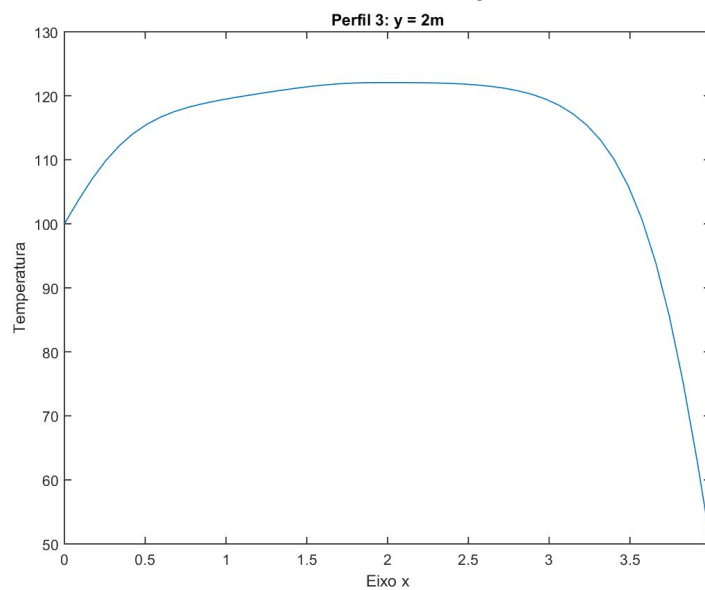
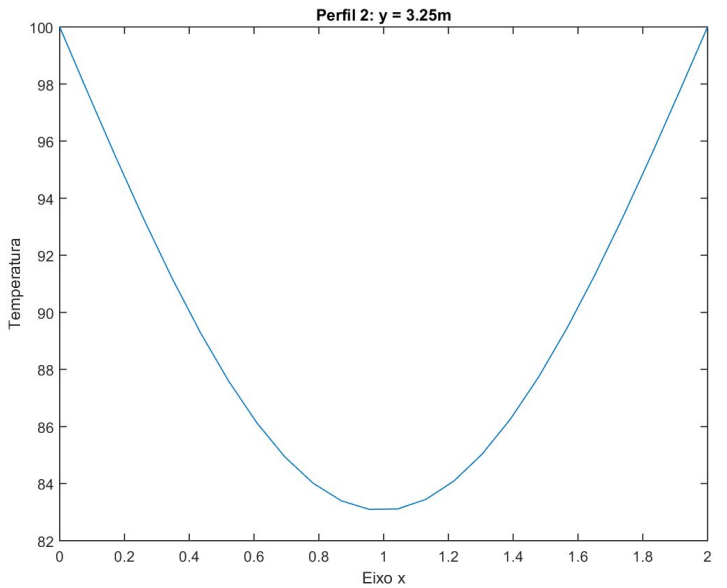
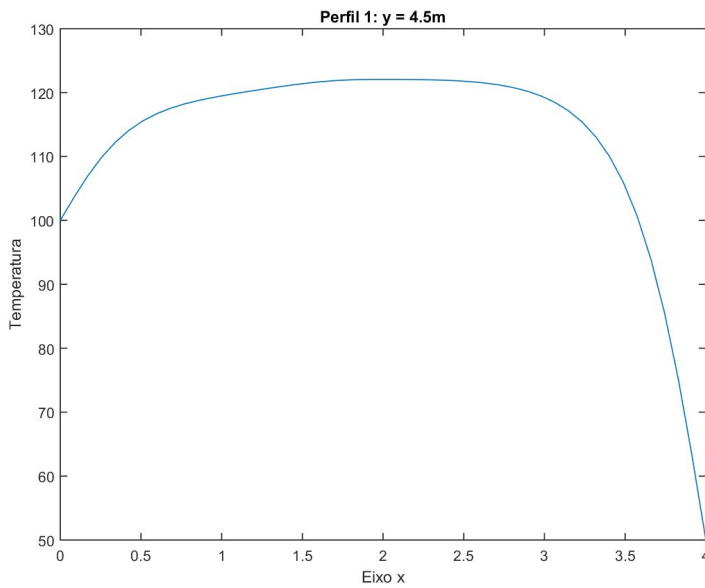


Gráfico 33: Perfil 3 após 400 iterações para  $x = 6$

Gráfico 34: Perfil 4 após 400 iterações para  $x = 6$

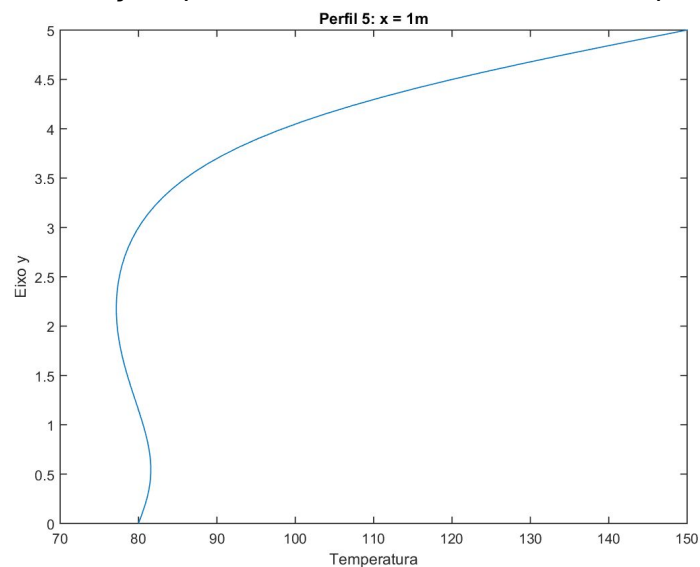


Gráfico 35: Perfil 5 após 400 iterações para  $x = 6$

A condição de parada, a qual indica que o sistema já pode ser considerado em regime permanente, foi satisfeita em 933 iterações, resultando em um  $\Delta t$  total de 83.0662 horas. A imagem e os gráficos gerados neste instante foram:



Imagem 14: Campo de temperatura após 933 iterações para  $x = 6$

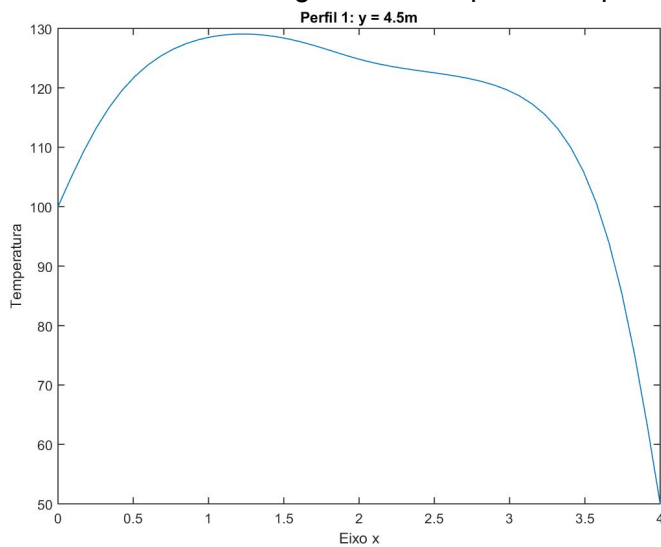


Gráfico 36: Perfil 1 após 933 iterações para  $x = 6$

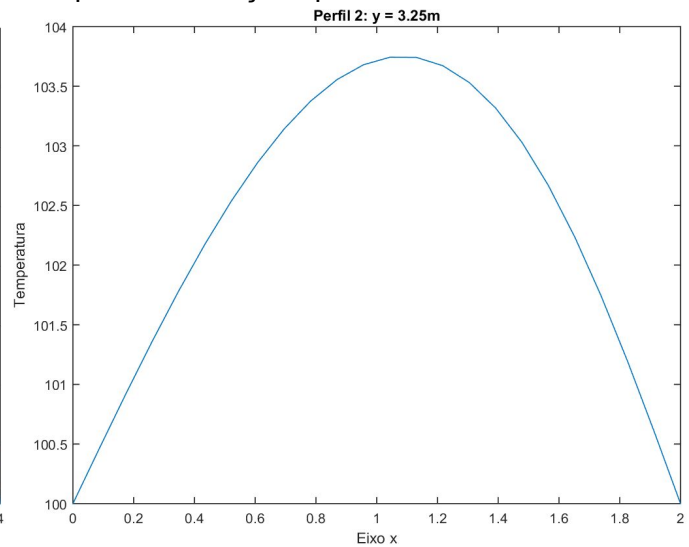


Gráfico 37: Perfil 2 após 933 iterações para  $x = 6$

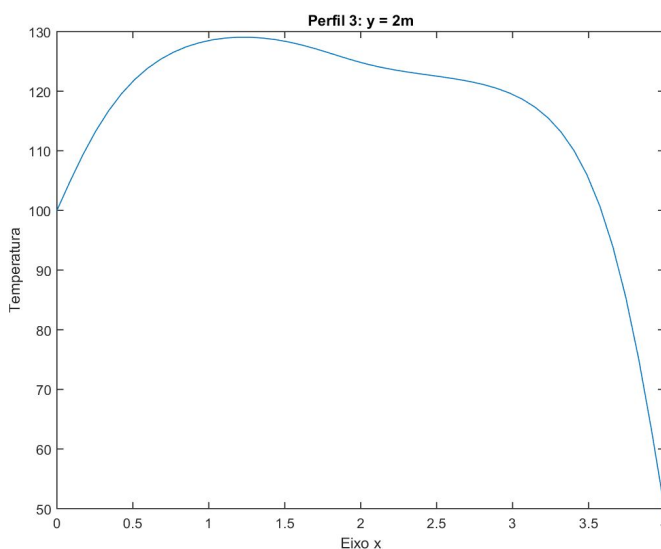


Gráfico 38: Perfil 3 após 933 iterações para  $x = 6$

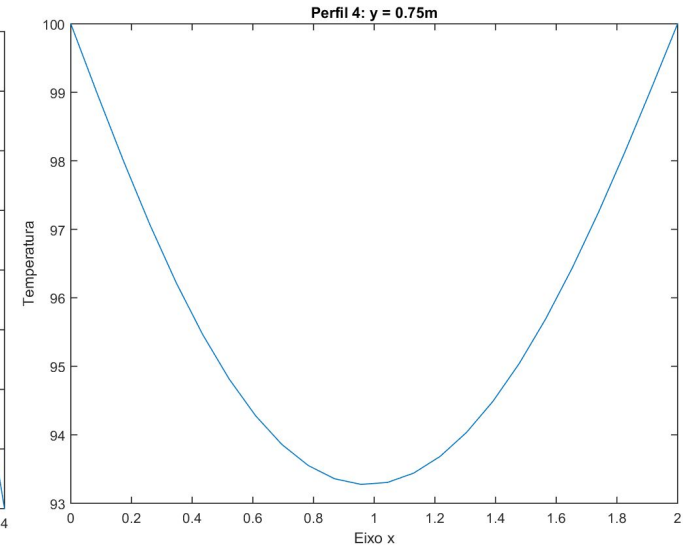


Gráfico 39: Perfil 4 após 933 iterações para  $x = 6$

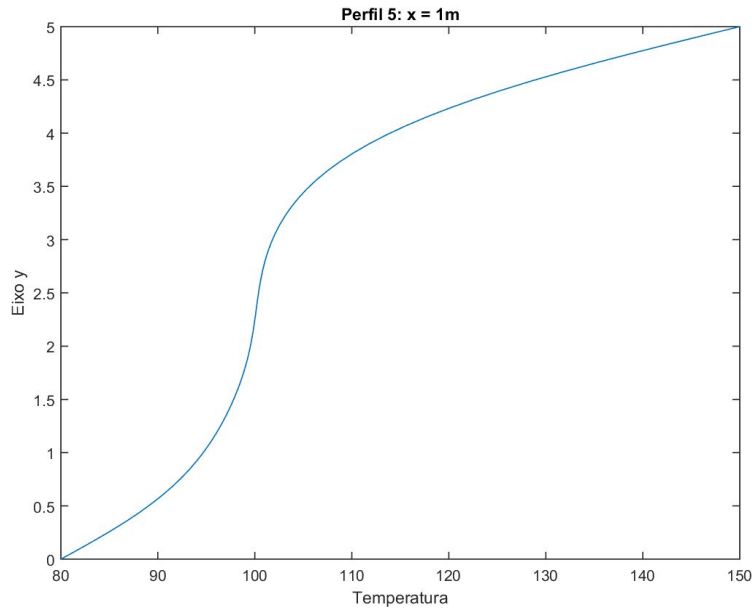


Gráfico 40: Perfil 5 após 933 iterações para x = 6

- 2944 nós internos (x = 7)

A equação obtida com o Método das Diferenças Finitas para o cálculo da temperatura em cada ponto da malha, para o próximo instante de tempo é:

$$T_{n,m}^{P+1} = Fo(T_{n-1,m}^P + T_{n+1,m}^P + T_{n,m-1}^P + T_{n,m+1}^P) + (1 - 4Fo)T_{n,m}^P$$

Para x = 7, Fo = 0.2333. Portanto, a equação utilizada foi:

$$T_{n,m}^{P+1} = 0.2333(T_{n-1,m}^P + T_{n+1,m}^P + T_{n,m-1}^P + T_{n,m+1}^P) + 0.0667T_{n,m}^P$$

Para uma malha de 2944 nós internos e para o número de Fourier escolhido, Fo = 0.2333, o passo de tempo adotado foi de  $\Delta t = \frac{Fo \Delta x^2}{\alpha} = \frac{0.2333 \cdot 0.0714^2}{5 \cdot 10^{-6}} = 238.0952$  segundos.

A fim de comparar com o resultado apresentado por outras malhas adotadas, o resultado obtido após 100 iterações,  $\Delta t \approx 6.6138h$ , foi:





Imagem 15: Campo de temperatura após 100 iterações para  $x = 7$

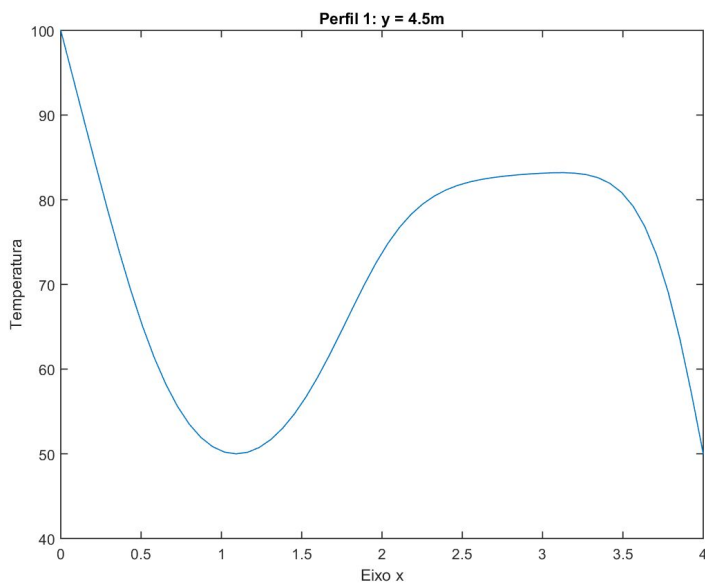


Gráfico 41: Perfil 1 após 100 iterações para  $x = 7$

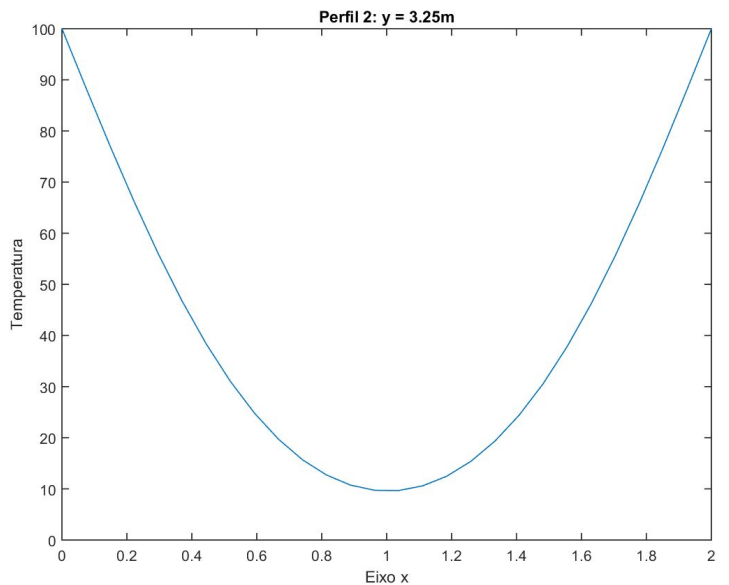


Gráfico 42: Perfil 2 após 100 iterações para  $x = 7$

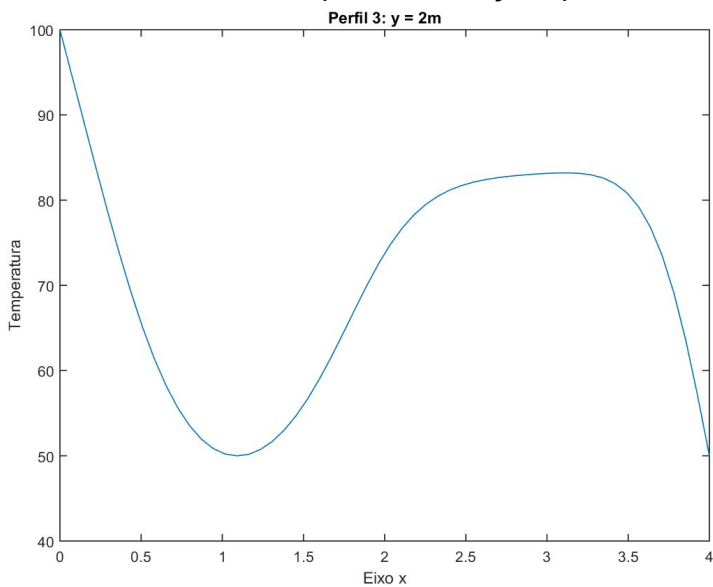


Gráfico 43: Perfil 3 após 100 iterações para  $x = 7$

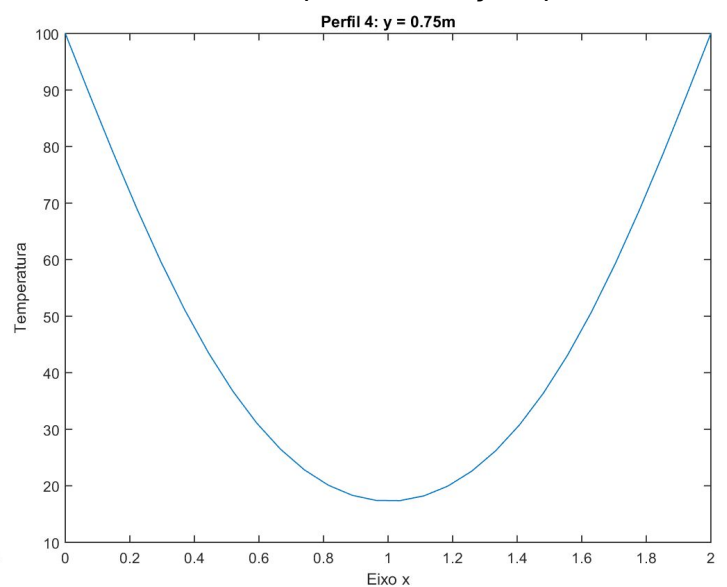


Gráfico 44: Perfil 4 após 100 iterações para  $x = 7$

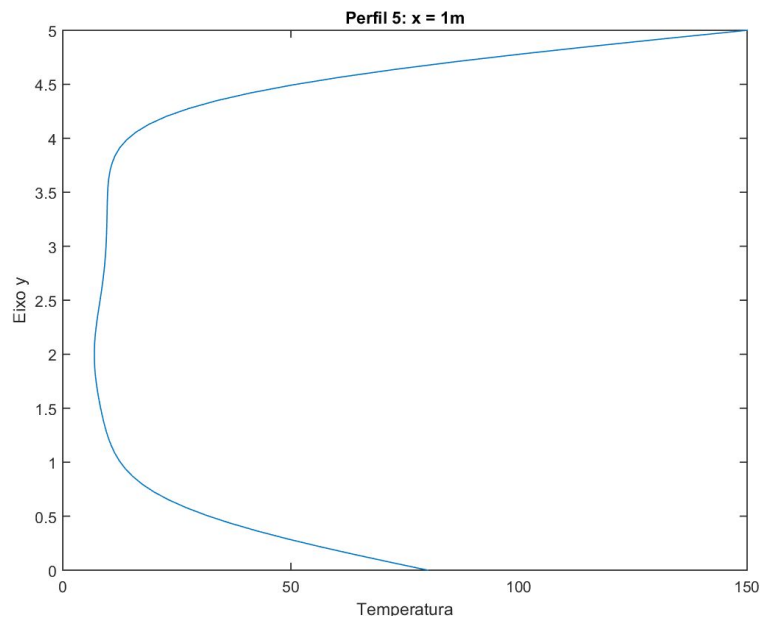


Gráfico 45: Perfil 5 após 100 iterações para x = 7

O resultado obtido após 200 iterações,  $\Delta t \approx 13.2275h$  , foi



Imagem 16: Campo de temperatura após 200 iterações para x = 7

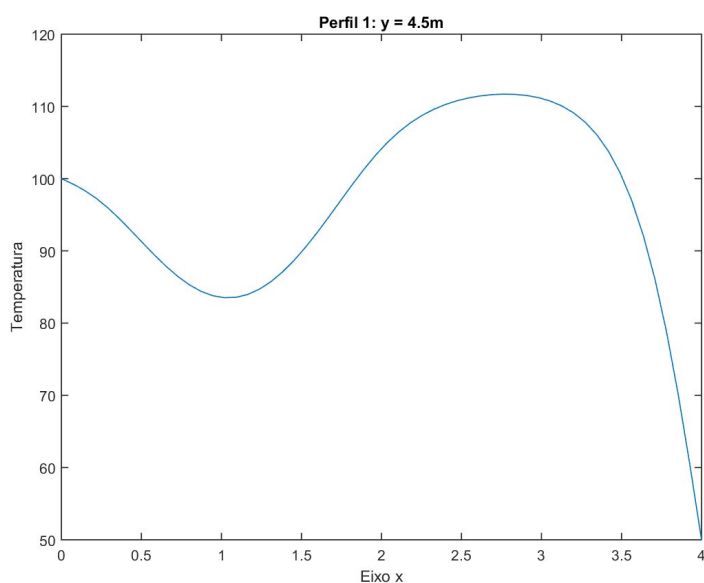


Gráfico 46: Perfil 1 após 200 iterações para  $x = 7$

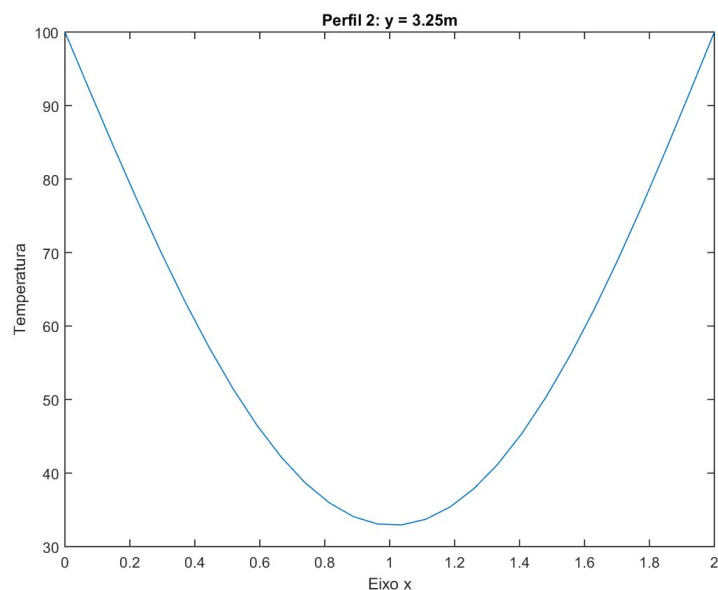


Gráfico 47: Perfil 2 após 200 iterações para  $x = 7$

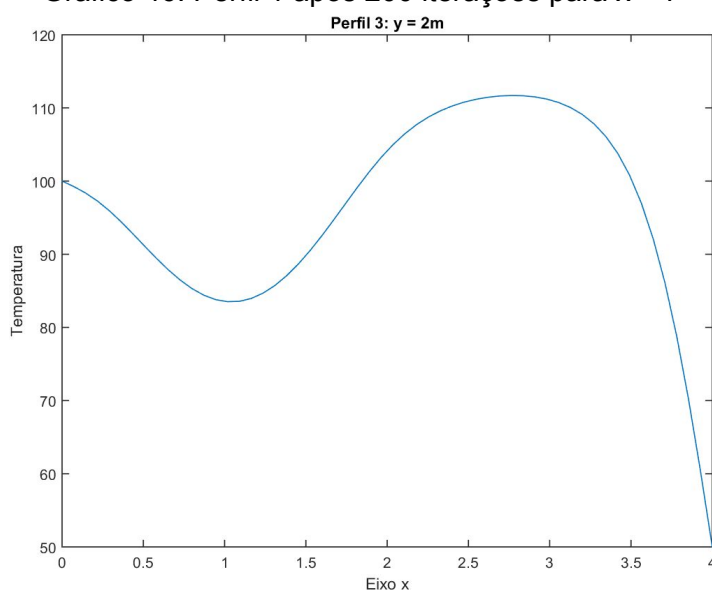


Gráfico 48: Perfil 3 após 200 iterações para  $x = 7$

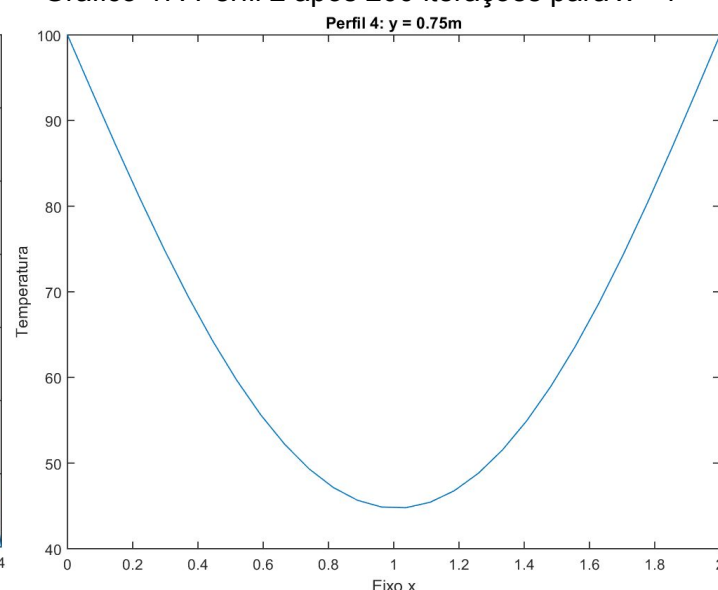


Gráfico 49: Perfil 4 após 200 iterações para  $x = 7$

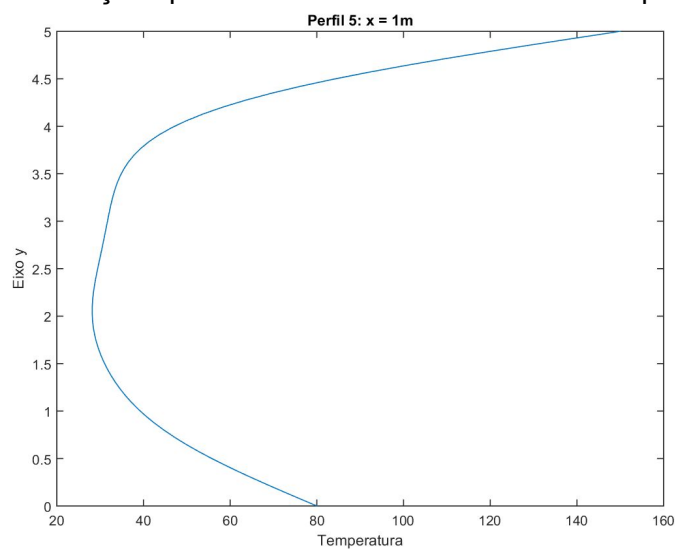


Gráfico 50: Perfil 5 após 200 iterações para  $x = 7$

O resultado obtido após 400 iterações,  $\Delta t \approx 26.4550h$  , foi:

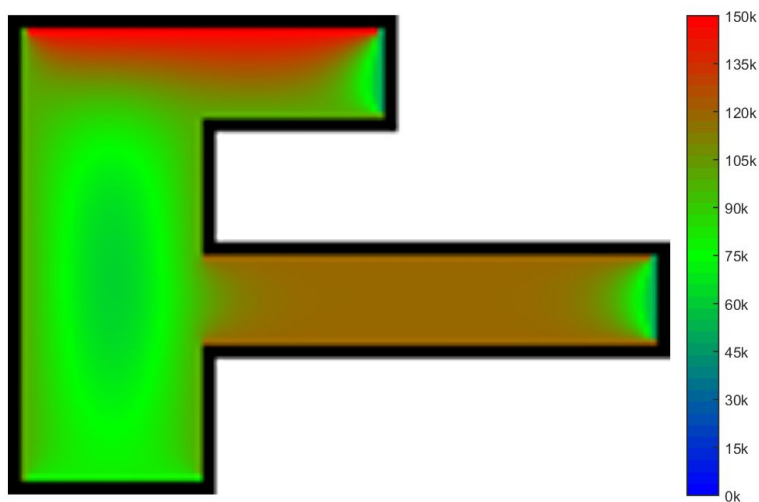


Imagem 17: Campo de temperatura após 400 iterações para  $x = 7$

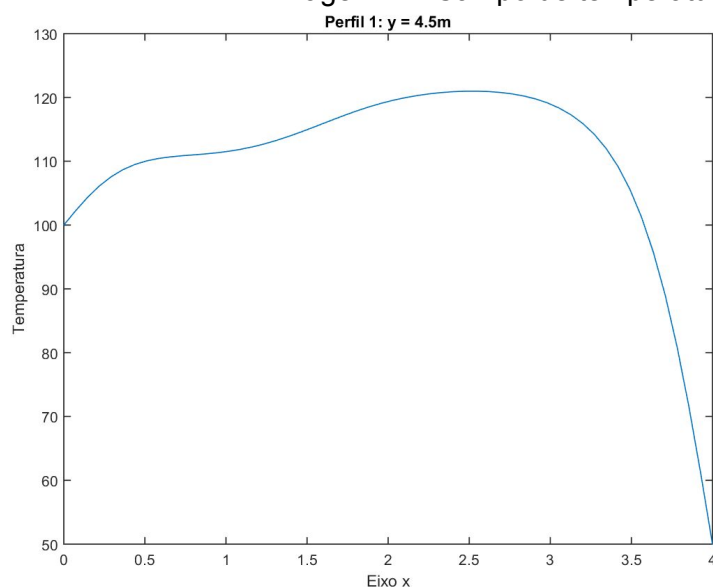


Gráfico 51: Perfil 1 após 400 iterações para  $x = 7$

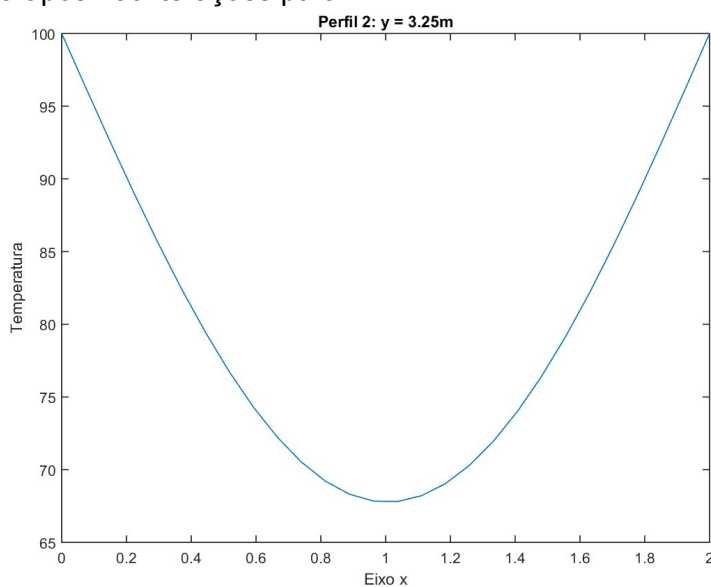


Gráfico 52: Perfil 2 após 400 iterações para  $x = 7$

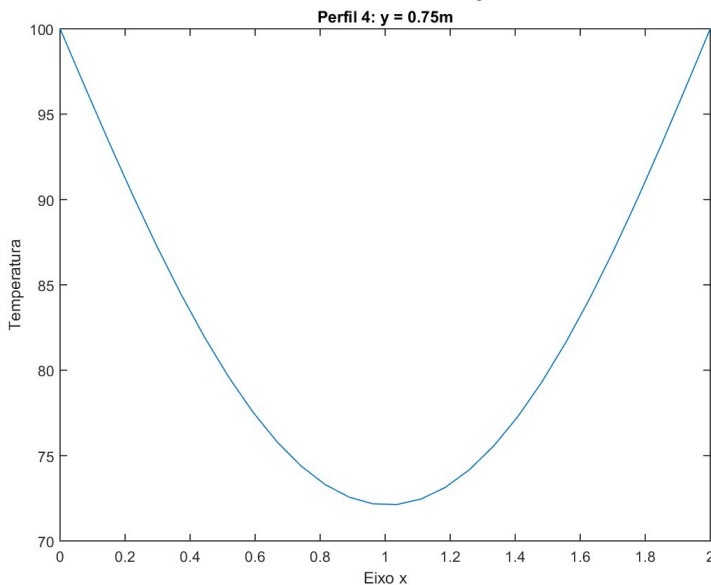
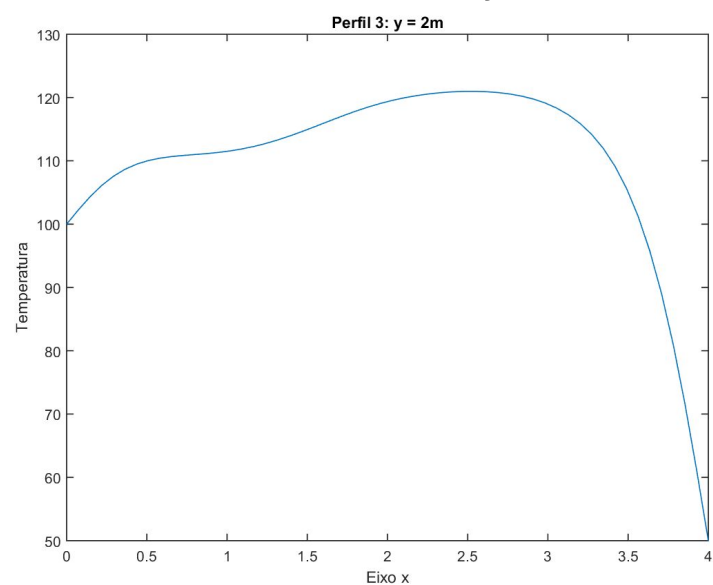


Gráfico 53: Perfil 3 após 400 iterações para  $x = 7$

Gráfico 54: Perfil 4 após 400 iterações para  $x = 7$

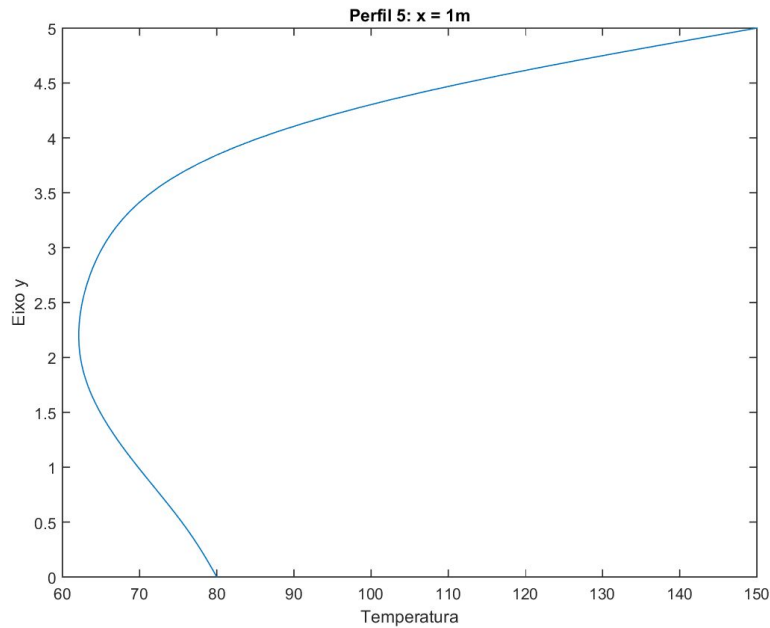


Gráfico 55: Perfil 5 após 400 iterações para  $x = 7$

A condição de parada, a qual indica que o sistema já pode ser considerado em regime permanente, foi satisfeita em 1183 iterações, resultando em um  $\Delta t$  total de 78.2407 horas. A imagem e os gráficos gerados neste instante foram:

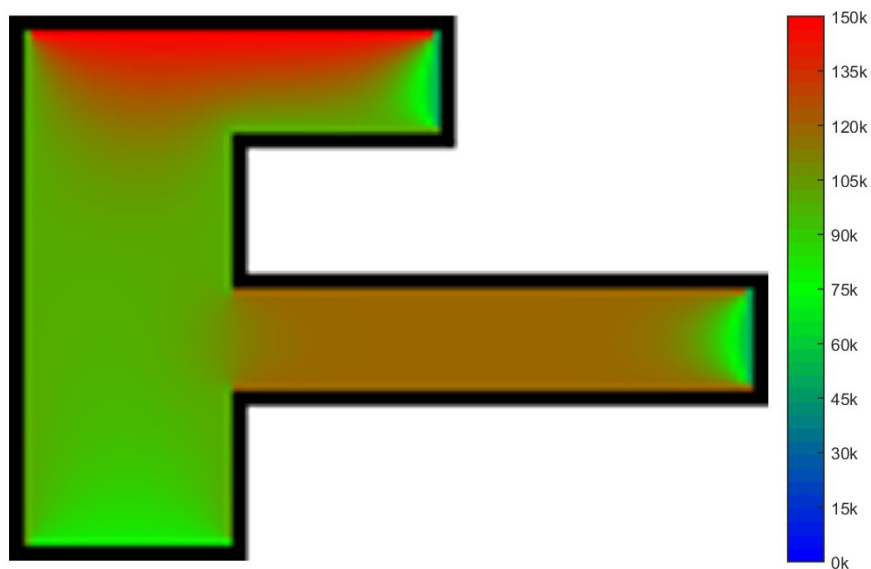


Imagem 18: Campo de temperatura após 1183 iterações para  $x = 7$

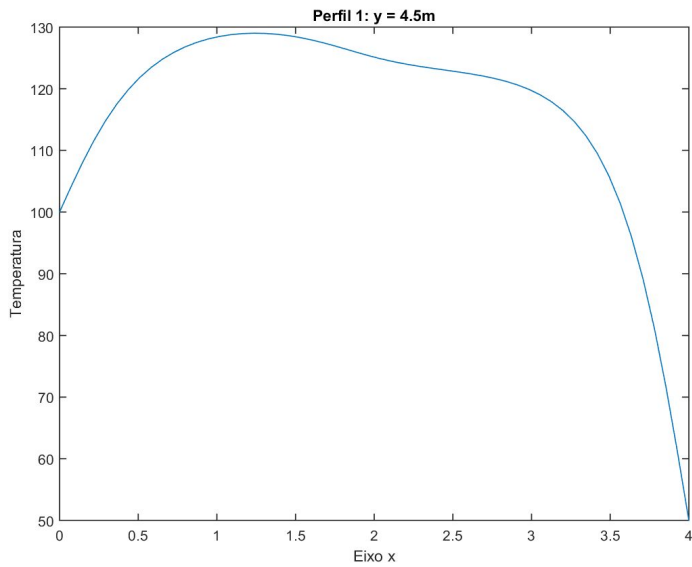


Gráfico 56: Perfil 1 após 1183 iterações para  $x = 7$

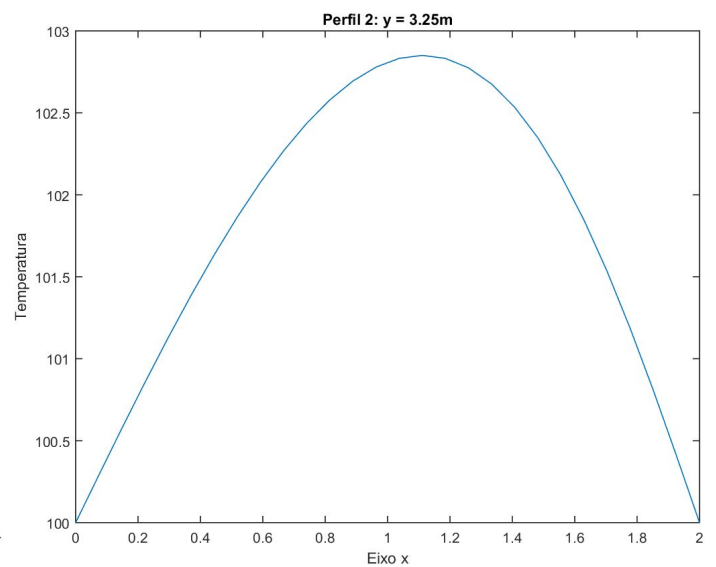


Gráfico 57: Perfil 2 após 1183 iterações para  $x = 7$

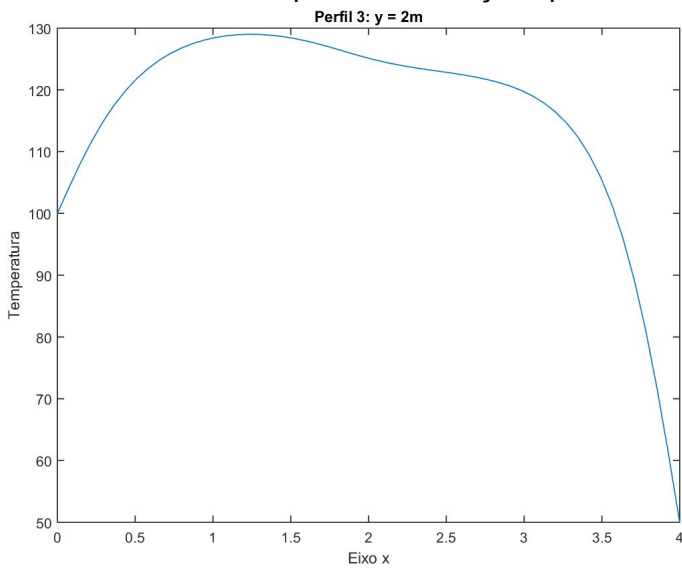


Gráfico 58: Perfil 3 após 1183 iterações para  $x = 7$

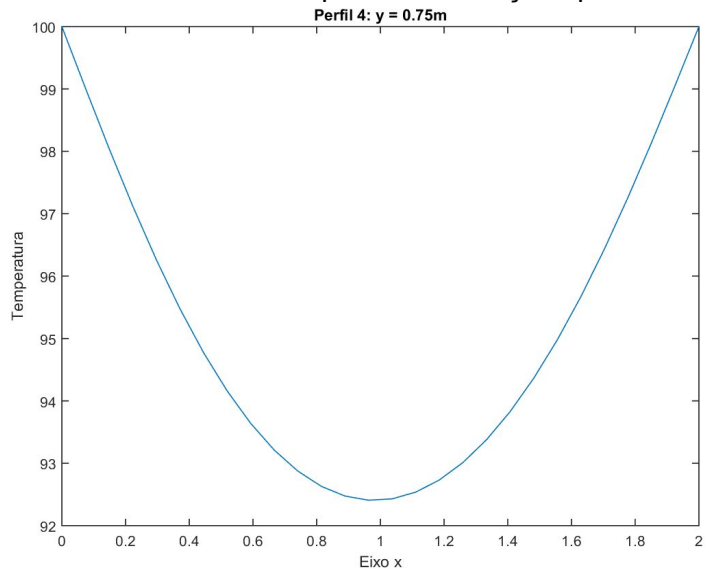


Gráfico 59: Perfil 4 após 1183 iterações para  $x = 7$

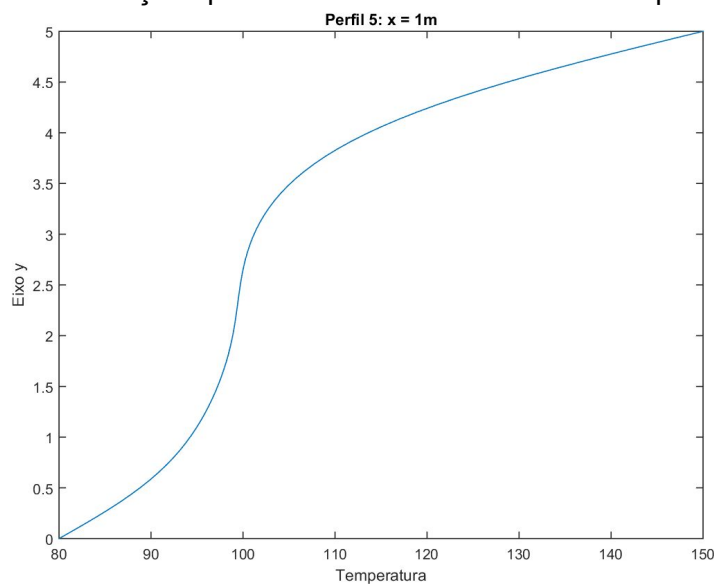


Gráfico 60: Perfil 5 após 1183 iterações para  $x = 7$

- 3908 nós internos (x = 8)

A equação obtida com o Método das Diferenças Finitas para o cálculo da temperatura em cada ponto da malha, para o próximo instante de tempo é:

$$T_{n,m}^{P+1} = Fo(T_{n-1,m}^P + T_{n+1,m}^P + T_{n,m-1}^P + T_{n,m+1}^P) + (1 - 4Fo)T_{n,m}^P$$

Para x = 8, Fo = 0.2353. Portanto, a equação utilizada foi:

$$T_{n,m}^{P+1} = 0.2353(T_{n-1,m}^P + T_{n+1,m}^P + T_{n,m-1}^P + T_{n,m+1}^P) + 0.0667T_{n,m}^P$$

Para uma malha de 3908 nós internos e para o número de Fourier escolhido, Fo = 0.2353, o passo de tempo adotado foi de  $\Delta t = \frac{Fo \Delta x^2}{\alpha} = \frac{0.2353 \cdot 0.0625^2}{5 \cdot 10^{-6}} = 183.8235$  segundos.

A fim de comparar com o resultado apresentado por outras malhas adotadas, o resultado obtido após 100 iterações,  $\Delta t \approx 5.1062h$ , foi:

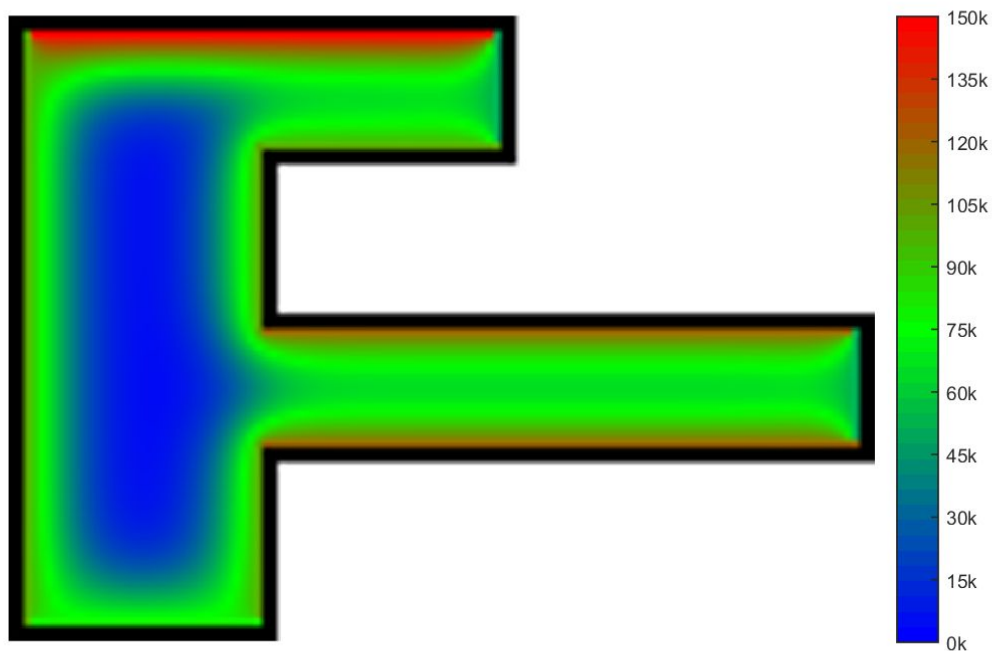


Imagem 19: Campo de temperatura após 100 iterações para x = 8

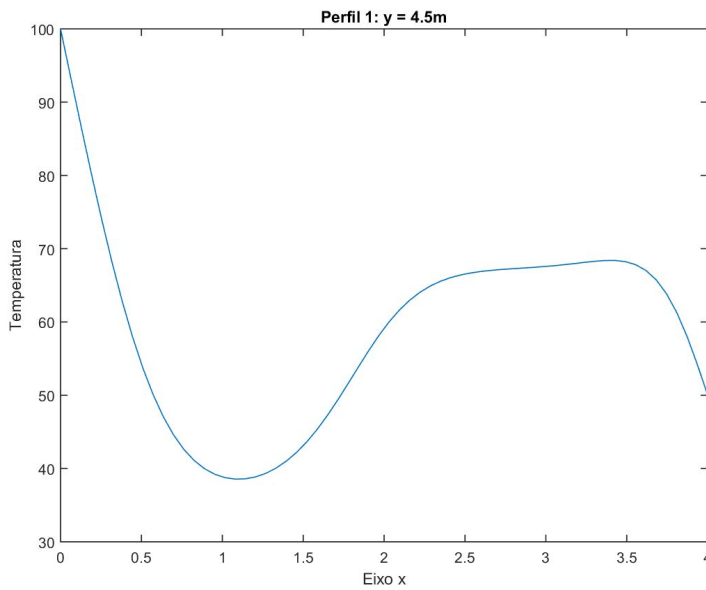


Gráfico 61: Perfil 1 após 100 iterações para  $x = 8$

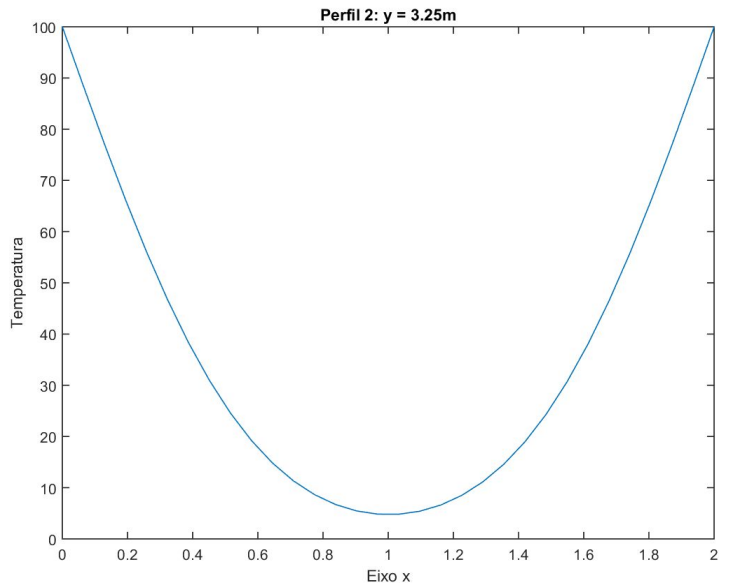


Gráfico 62: Perfil 2 após 100 iterações para  $x = 8$

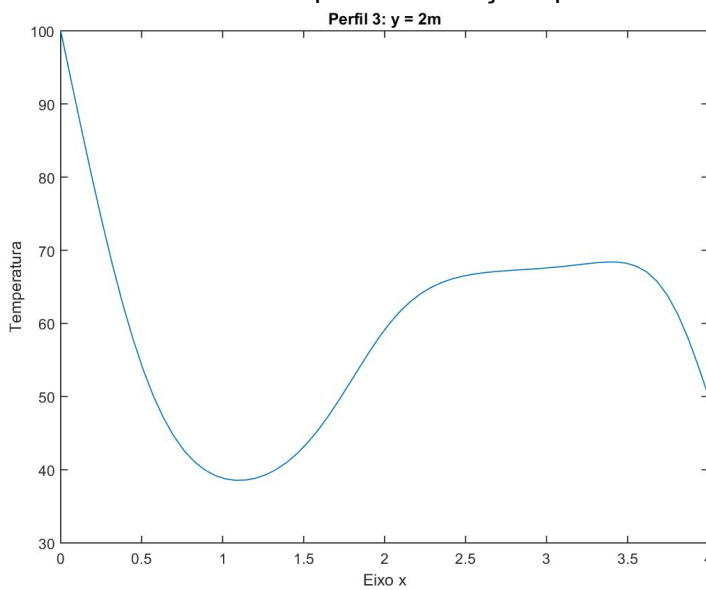


Gráfico 63: Perfil 3 após 100 iterações para  $x = 8$

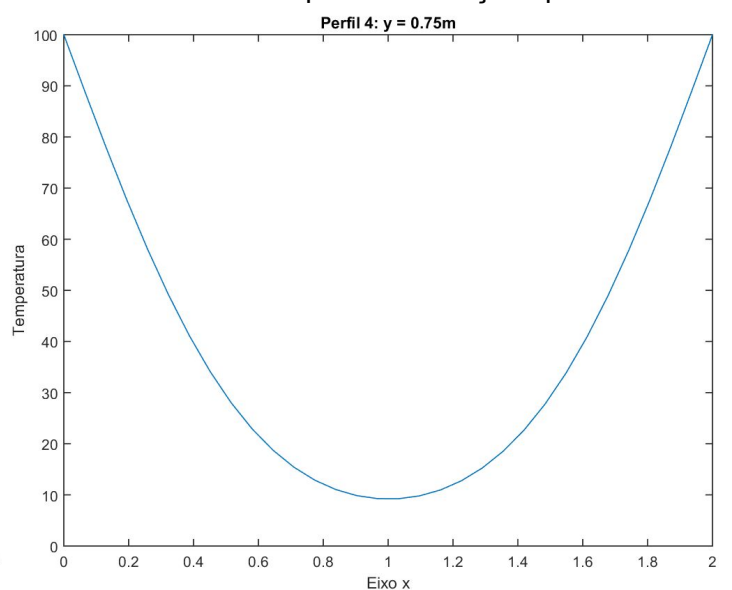


Gráfico 64: Perfil 4 após 100 iterações para  $x = 8$

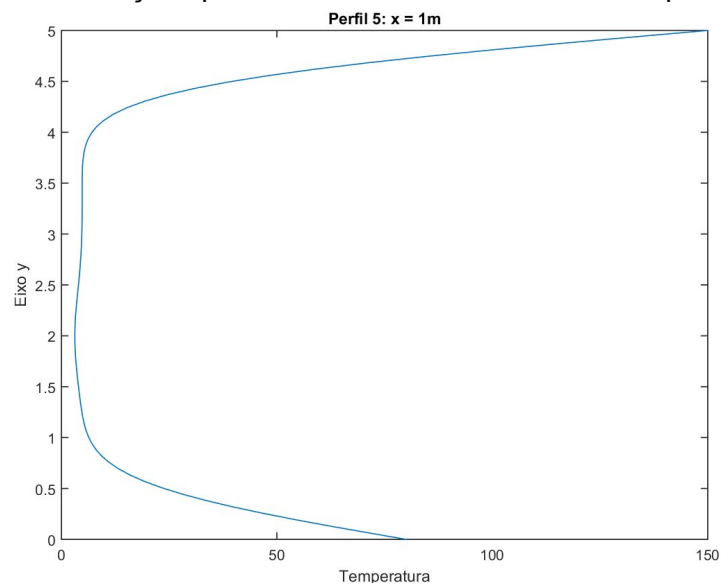


Gráfico 65: Perfil 5 após 100 iterações para  $x = 8$



O resultado obtido após 200 iterações,  $\Delta t \approx 10.2124h$  , foi

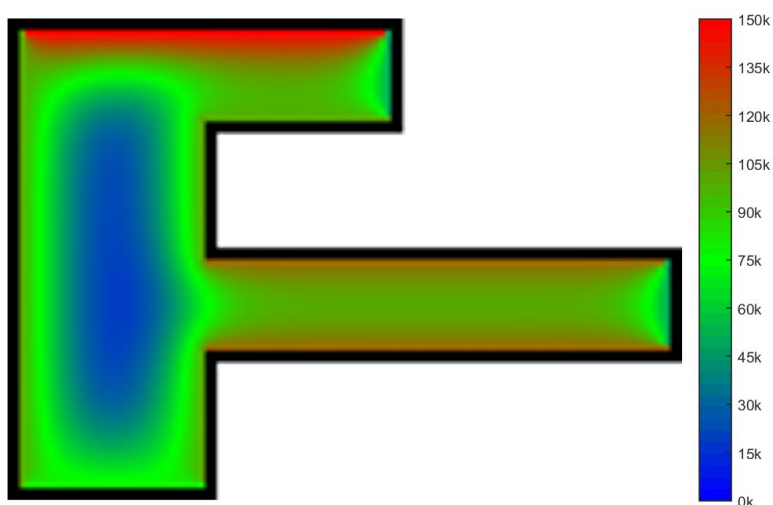


Imagem 20: Campo de temperatura após 200 iterações para  $x = 8$

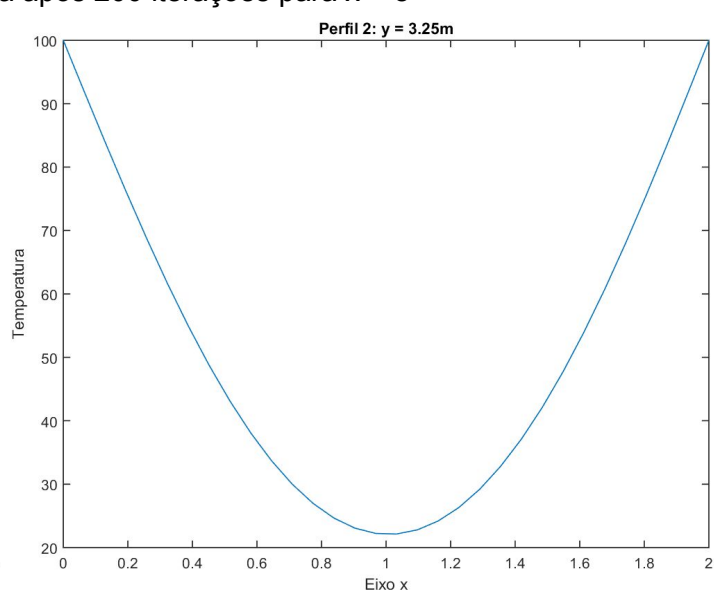
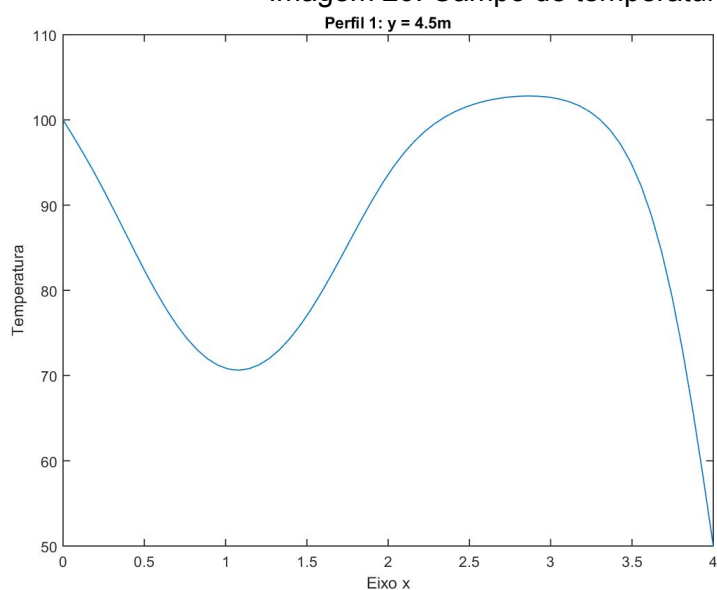


Gráfico 66: Perfil 1 após 200 iterações para  $x = 8$

Gráfico 67: Perfil 2 após 200 iterações para  $x = 8$

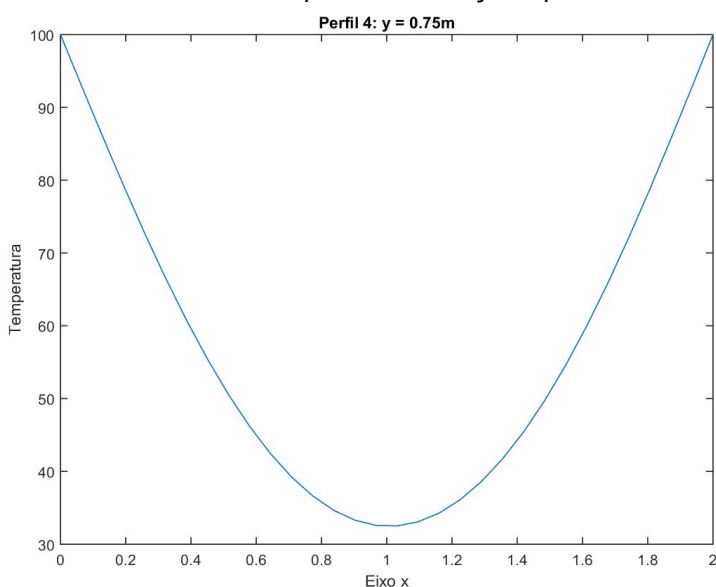
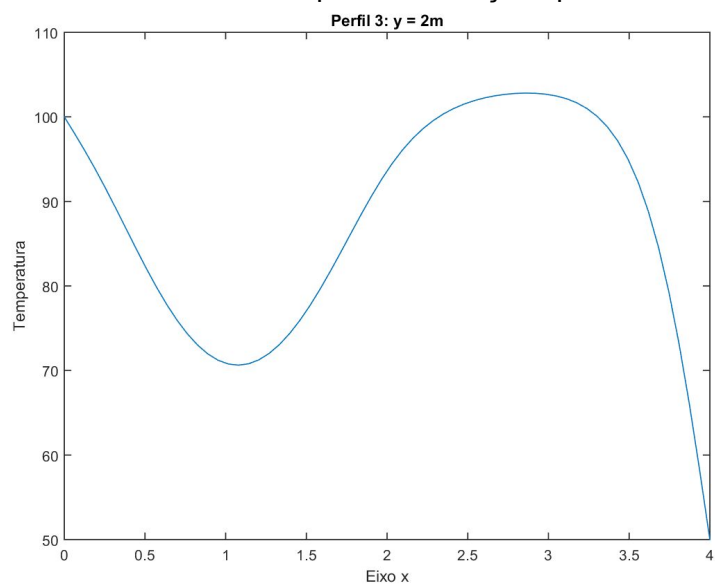


Gráfico 68: Perfil 3 após 200 iterações para  $x = 8$

Gráfico 69: Perfil 4 após 200 iterações para  $x = 8$

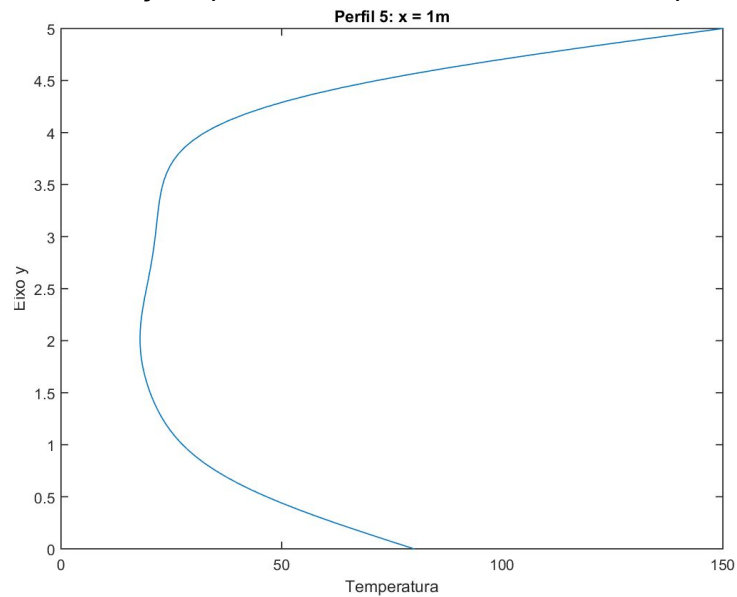


Gráfico 70: Perfil 5 após 200 iterações para  $x = 8$

O resultado obtido após 400 iterações,  $\Delta t \approx 20.4248h$ , foi:



Imagem 21: Campo de temperatura após 400 iterações para  $x = 8$

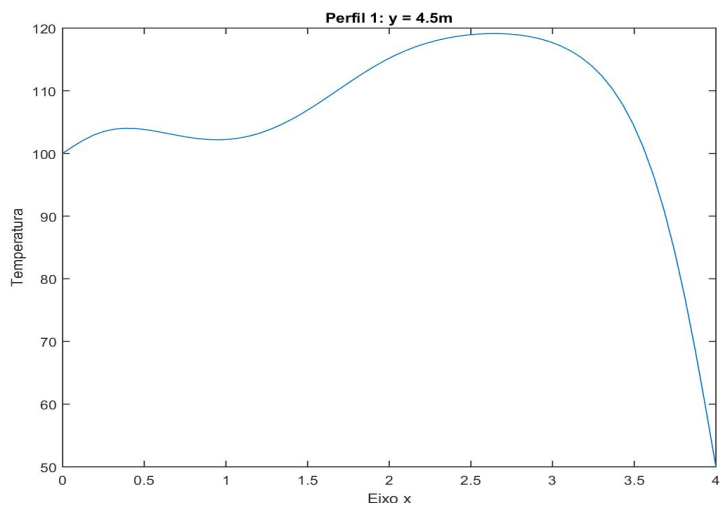


Gráfico 71: Perfil 1 após 400 iterações para  $x = 8$

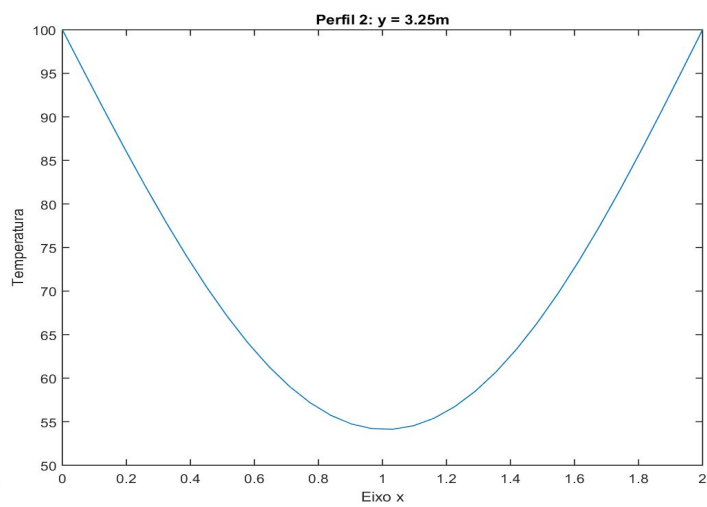


Gráfico 72: Perfil 2 após 400 iterações para  $x = 8$

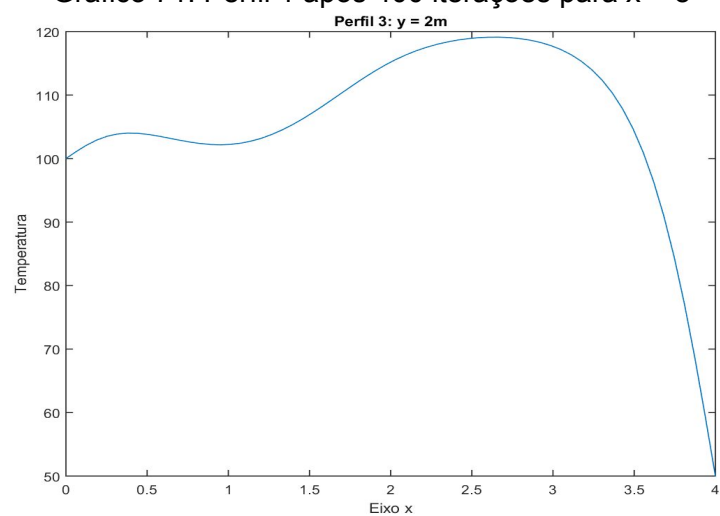


Gráfico 73: Perfil 3 após 400 iterações para  $x = 8$

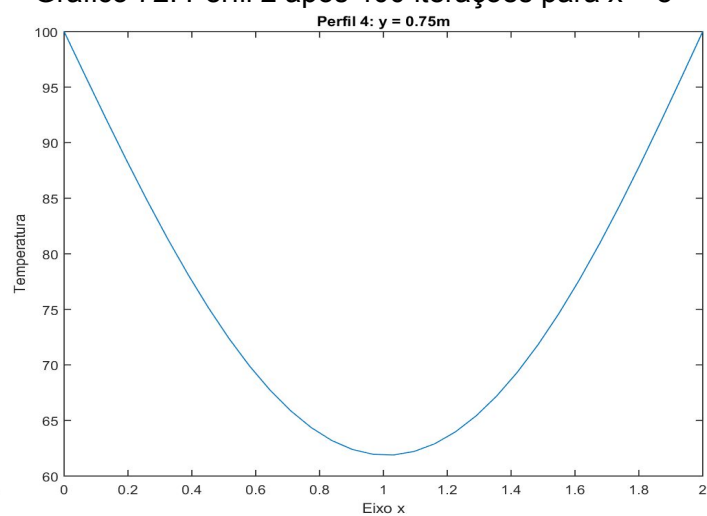


Gráfico 74: Perfil 4 após 400 iterações para  $x = 8$

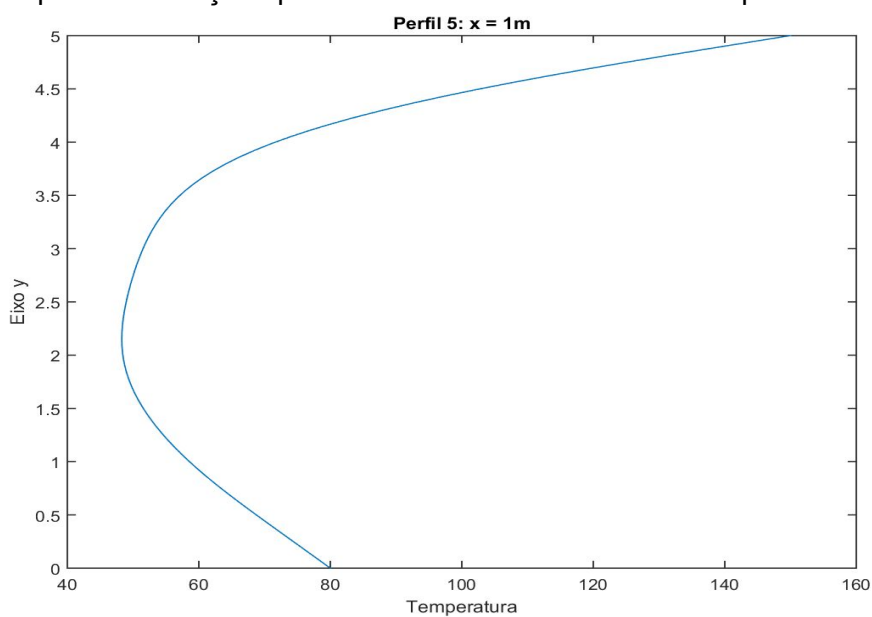


Gráfico 75: Perfil 5 após 400 iterações para  $x = 8$

A condição de parada, a qual indica que o sistema já pode ser considerado em regime permanente, foi satisfeita em 1444 iterações, resultando em um  $\Delta t$  total de 73.7337 horas. A imagem e os gráficos gerados neste instante foram:

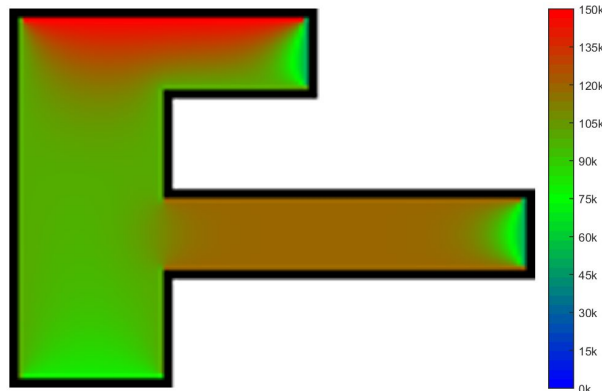


Imagem 22: Campo de temperatura após 1444 iterações para  $x = 8$

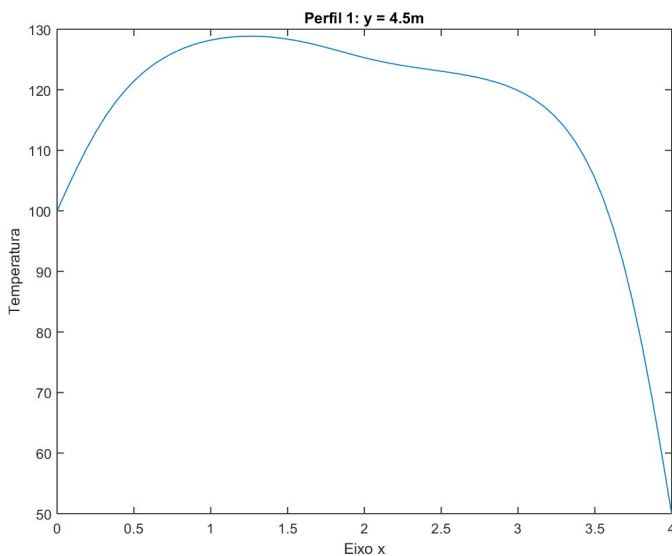


Gráfico 76: Perfil 1 após 1444 iterações para  $x = 8$

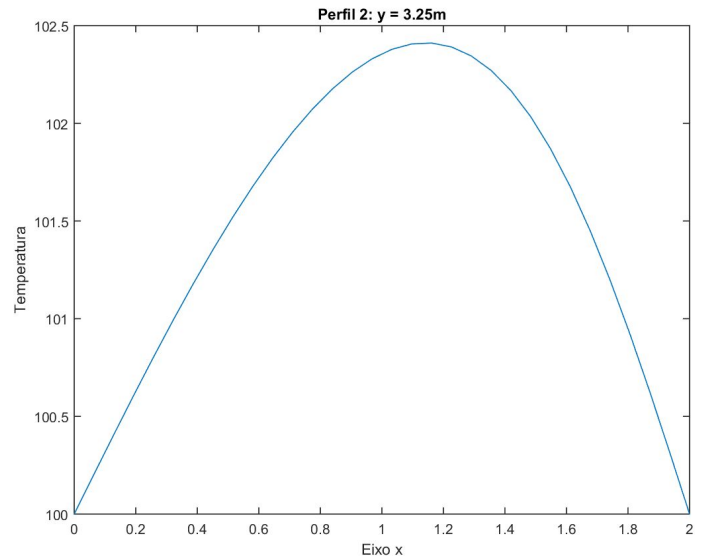


Gráfico 77: Perfil 2 após 1444 iterações para  $x = 8$

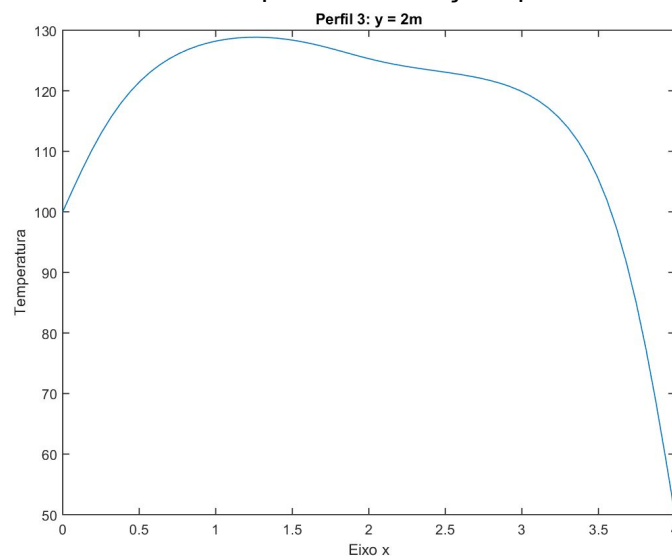


Gráfico 78: Perfil 3 após 1444 iterações para  $x = 8$

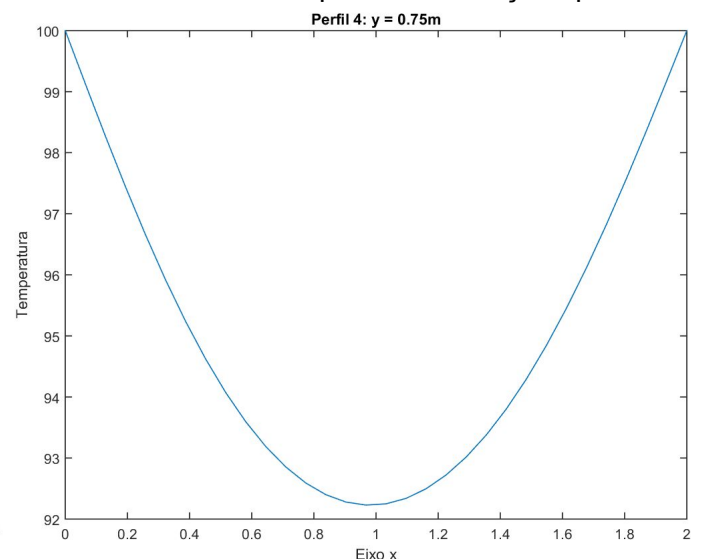


Gráfico 79: Perfil 4 após 1444 iterações para  $x = 8$

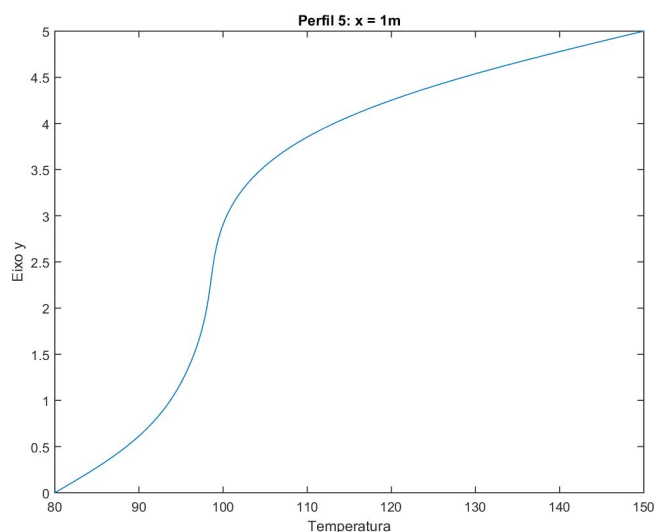


Gráfico 80: Perfil 5 após 1444 iterações para  $x = 8$

### 3.4.3 - Tempo de processamento

Foi calculado o tempo necessário de processamento para que a condição de regime permanente seja satisfeita, para diferentes valores de  $x$ , tanto para o caso em que as imagens são geradas e salvas, como para o caso em que apenas são feitos os cálculos de temperatura, sem gerar ou salvar arquivos de imagens ou gráficos.

Número de nós ( $x$ )	Tempo de processamento salvando os arquivos de imagem (em segundos)	Tempo de processamento não gerando arquivos (em segundos)
16 (1)	9.016405	$9.776000 \cdot 10^{-4}$
164 (2)	$3.240357 \cdot 10$	$5.411200 \cdot 10^{-3}$
448 (3)	$6.996083 \cdot 10$	$1.879450 \cdot 10^{-2}$
868 (4)	$1.179710 \cdot 10^2$	$5.270090 \cdot 10^{-2}$
1424 (5)	$1.921146 \cdot 10^2$	$1.116886 \cdot 10^{-1}$
2116 (6)	$2.815058 \cdot 10^2$	$2.181690 \cdot 10^{-1}$

2944 (7)	$3.975227 \cdot 10^2$	$3.828296 \cdot 10^{-1}$
3908 (8)	$6.152655 \cdot 10^2$	$6.342052 \cdot 10^{-1}$
5008 (9)	Dado não obtido	$9.238358 \cdot 10^{-1}$
6244 (10)	Dado não obtido	1.320416
7616 (11)	Dado não obtido	1.857146
9124 (12)	Dado não obtido	2.457647
10768 (13)	Dado não obtido	3.178681

Tabela 1: Tempo de processamento para diferentes malhas

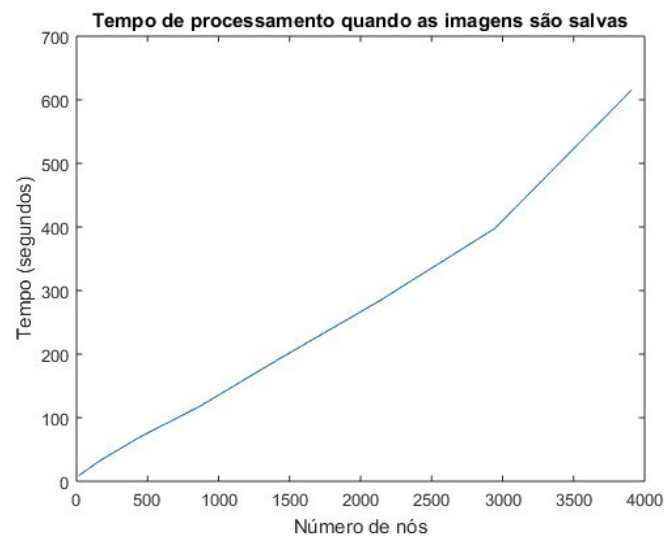


Gráfico 81: Tempo de processamento quando as imagens são salvas



#### Gráfico 82: Tempo de processamento sem geração de arquivos

A partir da tabela e dos gráficos apresentados, constata-se que gerar e salvar arquivos são atividades de alto custo computacional, e, por isso, o código que as realiza é consideravelmente mais lento do que o que apenas faz os cálculos da temperatura em função do espaço e do tempo, utilizando o Método das Diferenças Finitas.

Ainda, é possível perceber que o custo computacional aumenta de uma forma aproximadamente exponencial, com o aumento do número de nós adotados na malha. Tal análise pode ser melhor observada no caso em que não são gerados arquivos, visto um intervalo maior de dados ter sido considerado.

## 4 CONCLUSÃO

O programa desenvolvido para este trabalho foi capaz de utilizar o Método das Diferenças Finitas para descrever o campo de temperatura no caso teste proposto, gerando imagens e gráficos acerca de seu comportamento no espaço e no tempo.

O motivo de malhas com o parâmetro  $x$  maior alcançarem o regime permanente em menos tempo é porque o  $\Delta t$  entre duas iterações dessas é menor, logo, entre uma iteração e outra, a variação de temperatura é menor. Sendo assim, a condição de parada adotada, a qual considera que o regime permanente foi alcançado quando a temperatura em todos os pontos variou, entre duas iterações, menos do que um valor pré-determinado (neste caso arbitrado 0.01k) é alcançada antes para casos em que o  $\Delta t$  entre duas iterações é menor. Possivelmente, a

escolha de um critério de parada o qual dependa do  $\Delta t$  entregaria um resultado de regime permanente mais semelhante para diferentes malhas escolhidas.

## **5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Notas de aula dos cursos preparados pelo Prof. Rafael Gabler Gontijo