SOCIEDAD
MATEMÁTICA
MEXICANA

CARTA INFORMATIVA

Junio 2002

XXXV CONGRESO NACIONAL

DE LA SOCIEDAD
MATEMÁTICA MEXICANA

Universidad Juárez
del Estado de Durango

¿Conocemos al
“conjunto potencia”?

¡Y sin embargo,
se mueve!

¿Conocemos al “conjunto potencia”?

MATEMÁTICAS

Sergio Macías
Instituto de Matemáticas, UNAM,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria,
México, D.F., C.P. 04510, México.
Correo electrónico: macias@servidor.unam.mx

Cuando empezamos a estudiar matemáticas, una de las primeras cosas que nos enseñan es que dado un conjunto X, uno puede construir un conjunto nuevo, llamado el *conjunto potencia* de X, como sigue:

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$$

Observemos que hay una “copia” de X dentro de $\mathcal{P}(X)$, ésta es:

$$\mathcal{F}_1(X) = \{\{x\} \mid x \in X\}.$$

Cuando el conjunto X es finito, podemos dar la lista de los elementos de $\mathcal{P}(X)$. Por ejemplo:

(a) Si $X = \{1, 2\}$ entonces

$$\mathcal{P}(X)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1, 2\}\}.$$

(b) Si $X = \{1, 2, 3\}$ entonces

$$\mathcal{P}(X) = \{\{1\}, \{2\},\{3\},\{1, 2\},\{1, 3\},\{2, 3\},\{1, 2, 3\}\}.$$

Ahora, ¿qué podemos hacer cuando el conjunto X no sea finito?

(I) ¿Podemos encontrar un “modelo” para $\mathcal{P}(X)$?, esto es, ¿podemos encontrar un “conjunto conocido” Y y una función biyectiva $f : \mathcal{P}(X) \to Y$, con las propiedades apropiadas? (Las propiedades a las que nos referimos dependen de qué área de las matemáticas se utilice para atacar el problema. En nuestro caso pedimos que las biyecciones sean homeomorfismos.)

El encontrar un “modelo” para el conjunto potencia nos permitiría entenderlo mejor pues obtendríamos una “visión geométrica” del mismo.

Es muy probable que no podamos responder a la interrogante (I). Entonces, uno se pregunta algo más sencillo:

(II) ¿Podemos encontrar un “modelo” para algunos subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$?

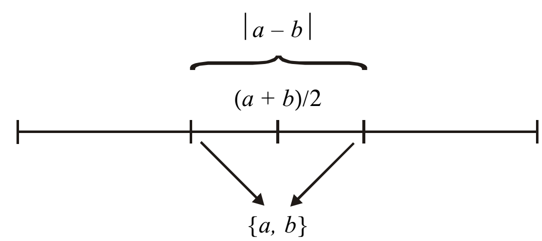
Por lo que mencionamos anteriormente, X es un modelo para $\mathcal{F}_1(X)$, ya que la función $h\colon \mathcal{F}_1(X) \to X$ definida como $h(\{x\}) = x$ es una biyección. Notemos que esta biyección satisface casi cualquier propiedad que se le pida.

Nosotros pensamos que es interesante la pregunta “¿Qué es el conjunto potencia?” por sí misma, creemos que es muy difícil contestarla en su totalidad. La Teoría de Hiperespacios intenta proporcionar una respuesta parcial al problema de estudiar algunos subconjuntos “distinguidos” del tal conjunto. Veamos algunos ejemplos muy conocidos:

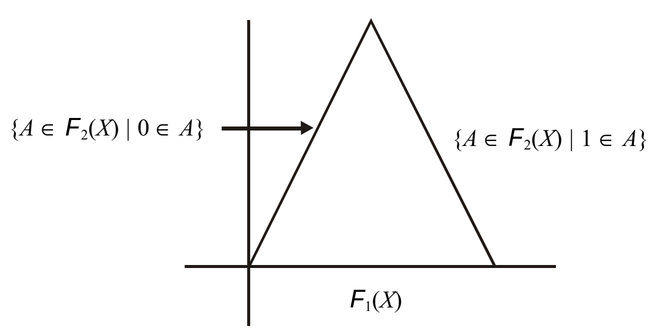
(1) Sea X el intervalo unitario $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$ ¿Podemos hallar un “modelo” para $\mathcal{F}_2(X) = \{A \subset X \mid A \neq \emptyset$ tiene a lo más dos elementos$\}$? En este caso, tenemos que

$$\mathcal{F}_2(X) = \{\{a, b\} \mid 0 \le a, b \le 1$$

Observemos que un conjunto de la forma $\{a, b\}$ queda completamente determinado por su punto medio, $(a + b)/2$, y por la distancia entre sus elementos, $|a - b|$.

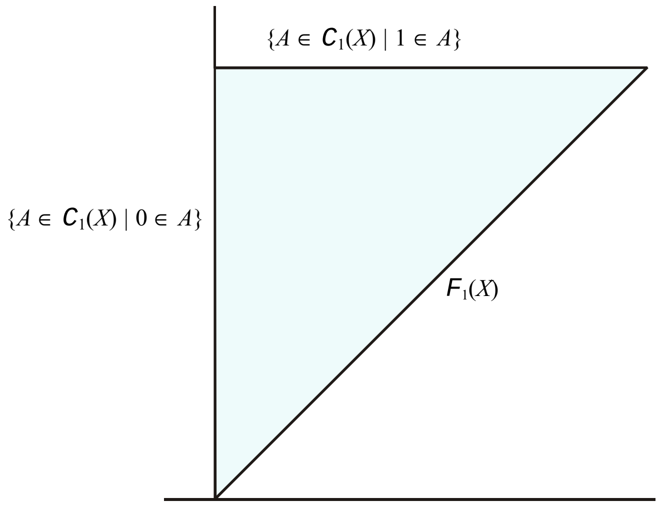


De esta forma, podemos definir una función $f : \mathcal{F}_2(X) \to \mathbb{R}^2$ como $f(\{a, b\}) = ((a + b)/2, |a - b|)$. Notemos que f es inyectiva y que su imagen consta del triángulo determinado por el eje x y las rectas $y = 2x$ y $y = 2(1 - x)$. También observemos que $\mathcal{F}_1(X)$ está representado por la parte contenida en el eje x.



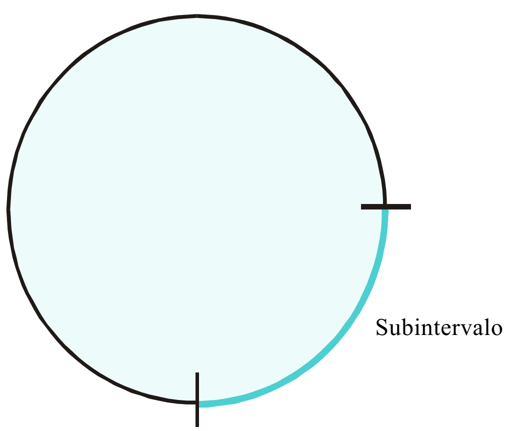
¿Podemos encontrar un modelo para $\mathcal{C}_1(X) = \{[a, b] \mid 0 \le a \le b \le 1\}$? Este caso es más sencillo. Definamos la función $g\colon \mathcal{C}_1(X) \to \mathbb{R}^2$ como $g([a, b]) = (a, b)$. Observemos que g es inyectiva y que su imagen consta del triángulo determinado por el eje y y las $y = x$

y $y = 1$. También notemos que $F_1(X)$ está representado en la parte contenida en la recta $y = x$.



Note que si “pegamos” los modelos que tenemos de $F_1(X)$ y de $C_1(X)$, se tiene que $F_2(X) \cup C_1(X)$ es un cuadrilátero.

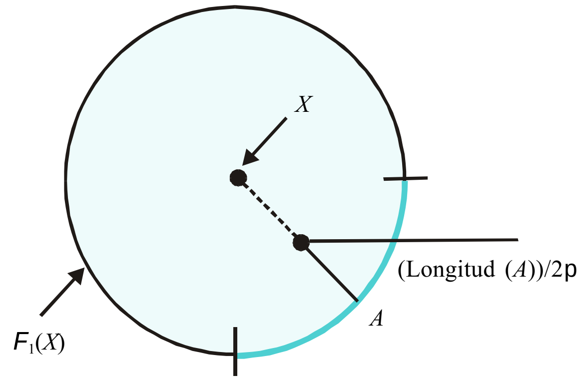
(2) Sea X la circunferencia unitaria $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Llamaremos *subintervalo* a cualquier arco de X.



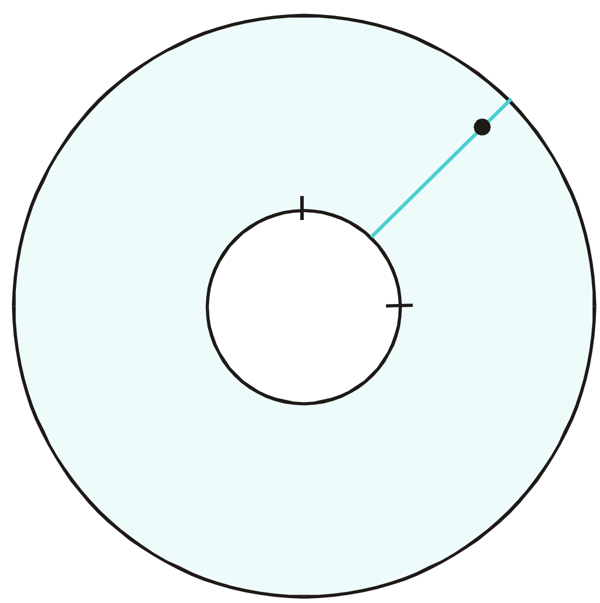
¿Podemos encontrar un “modelo” para

$$C_1(X) = \{A \subset X \mid A \text{ es un punto, un subintervalo o } X\}?$$

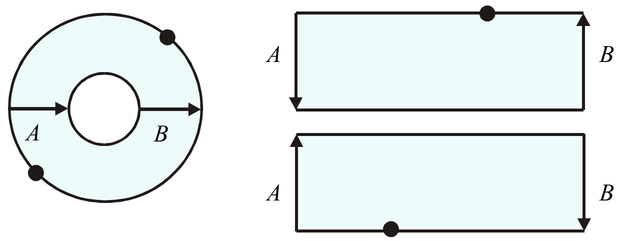
Para encontrar un modelo para $C_1(X)$, notemos que cualquier subintervalo de X está completamente determinado por su “punto medio” y su longitud. Sea A un subintervalo de X. Consideremos la recta determinada por el centro, 0, de X y el punto medio, p, de A. Sobre esta recta encontremos el punto cuya distancia a p es (longitud de A)/2p. Si A consiste de un sólo punto entonces a A se le asocia el mismo punto. Si A es X entonces a A se le asocia el punto 0. De esta forma hemos construido una biyección entre $C_1(X)$ y el disco unitario $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$



Tratemos de encontrar un modelo para $F_2(X)$. Si Z es un subconjunto de X que consiste de dos puntos, los cuales no son antípodos, entonces Z determina dos segmentos de circunferencia de diferentes tamaños. De esta forma, Z queda totalmente determinado por el punto medio, q, del segmento de circunferencia más pequeño y la longitud del mismo. Consideremos el rayo que empieza en el centro, O, de X y que pasa por q y, sobre este rayo, encontremos el punto, más cercano a q, que dista de O 1+ (longitud del segmento de circunferencia más pequeño determinado por Z). Si Z consiste de un sólo punto entonces a Z se le asocia el mismo punto. De esta manera le podemos asociar a cada elemento de $F_2(X)$, que no consiste de dos puntos antípodos, un punto del anillo “semiabierto” determinado por las circunferencias X mismo y la de radio 1 + 2p y con centro en O. Ahora bien, si $W \in F_2(X)$ y consta de un par de puntos antípodos, por ejemplo $W = \{(0, 1), (0, -1)\}$ entonces hay, por lo menos, “dos maneras” de aproximarse a W, a saber, por la “izquierda” y por la “derecha”. Por tanto, necesitamos identificar los puntos antípodos de la circunferencia de radio 1 + 2p y centro en O.

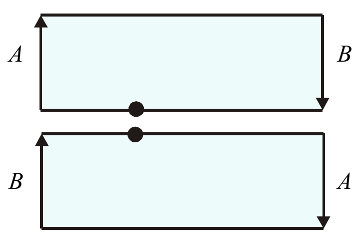


Para saber qué espacio hemos construido, hagamos un corte “horizontal” en el anillo, de tal forma que se obtengan dos mitades del “mismo tamaño”. Separemos las dos partes, como se muestra en la figura.

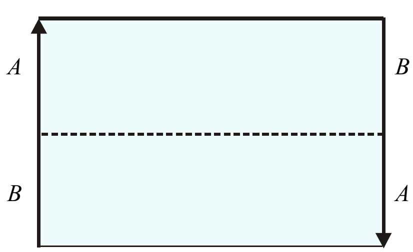


Modifiquemos la “mitad superior” de tal forma que la dirección de las flechas *A* y *B* coincidan.

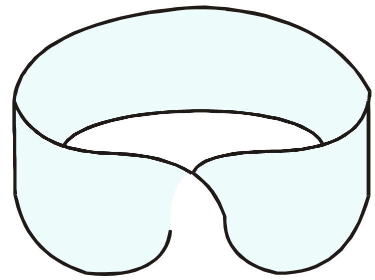
Lo que necesitamos hacer es identificar el lado superior del rectángulo de arriba con el lado inferior del rectángulo de abajo.



Una vez hecho lo anterior, obtenemos un rectángulo en el que hay que identificar sus lados laterales de la manera que indican las flechas *A y B,* ahora identificadas en un sólo segmento.



De esta manera, llegamos a la conclusión de que $F_2(X)$ es la banda de Möbius, *M.* Notemos que $F_1(X)$ queda representado en la frontera de *M.* De aquí se sigue que $F_2(X) \cup C_1(X)$ es homeomorfo al *plano proyectivo real.*



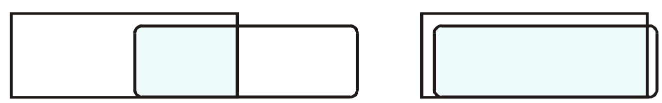
Como mencionamos anteriormente, la teoría de los hiperespacios intenta responder a la pregunta (II) utilizando la topología. Estudia ciertas subconjuntos, llamados *hiperespacios,* del conjunto potencia de los espacios métricos, compactos y conexos, llamados *continuos.* Dado un continuo *X,* los hiperespacios estudiados son:

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Como *X* es un espacio métrico, podemos definir una métrica en 2^X llamada la *métrica de Hausdorff*.



De esta forma se le da una topología a los hiperespacios con la cual todos los hiperespacios mencionados son continuos. Se restringe a los continuos por tener muchas propiedades que ayudan estudiar los hiperespacios, en particular, nos permiten probar los resultados que mencionamos en la presente nota.

En los ejemplos mencionados anteriormente, las funciones definidas resultan ser homeomorfismos cuando al hiperespacio mencionado se le considera con la métrica de Hausdorff.

Los hiperespacios más estudiados son $C_1(X)$ (esto es, la familia de subconjuntos de *X* que son, a su vez, continuos) y 2^X. Los otros hiperespacios mencionados están siendo estudiados recientemente.

El lector interesado en profundizar en el estudio de los hiperespacios puede consultar los libros [1] y [2]. El lector que desee saber más sobre continuos puede consultar el libro [3].

Referencias

[1] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[2] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978.

[3] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.