Una introducción a la teoría de los continuos

Sergio Macías

1. Espacios métricos

1.1 Definición. Un *espacio métrico* es un conjunto no vacío X junto con una función $d: X \times X \to [0, \infty)$, la cual satisface las siguientes condiciones:

(i) Para cada $x, x' \in X$, $d(x, x') \geq 0$ y $d(x, x') = 0$ si y sólo si $x = x'$.

(ii) Para cada $x, x' \in X$, $d(x, x') = d(x', x)$.

(iii) Para cada $x, x', x'' \in X$, $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$ (desigualdad del triángulo).

A la función d se le llama una *métrica* en X.

1.2 Ejemplos.

(1) Sean $X = \mathbb{R}^n$ y $d(x, x') = |x - x'|$ la distancia usual. Claramente las condiciones (i) e (ii) se satisfacen. En los cursos de cálculo se prueba que si $x, x', x'' \in \mathbb{R}^n$ entonces $|x - x''| \leq |x - x'| + |x' - x''|$, lo cual nos da la desigualdad del triángulo.

(2) Sea X cualquier conjunto no vacío. Dadas x, $x' \in X$, definimos la distancia de x a x' como:

$$d(x, x') = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq x' \\ 0 & \text{si } x = x' \end{cases}$$

Es fácil ver que realmente d es una métrica y se le conoce como la *métrica discreta.*

1.3 Definición. Dados un espacio métrico X, un punto $x \in X$ y un número positivo ε, definimos la *bola abierta alrededor de x y radio ε,* y denotada por $\mathcal{V}^d_\varepsilon(x)$, como:

$$\mathcal{V}^d_\varepsilon(x) = \{x' \in X \mid d(x, x') < \varepsilon\}.$$

1.4 Definición. Sean X un espacio métrico y Y un subconjunto de X. Un punto x es *un punto interior de* Y, si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{V}^d_\varepsilon(x) \subset Y$. Si $\mathcal{V}^d_\varepsilon(x) \subset X \setminus Y$ entonces x es *un punto exterior de* Y. Por último, si para toda $\varepsilon > 0$, $\mathcal{V}^d_\varepsilon(x) \cap Y \neq \emptyset$ y $\mathcal{V}^d_\varepsilon(x) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ entonces x es *un punto frontera de* Y.

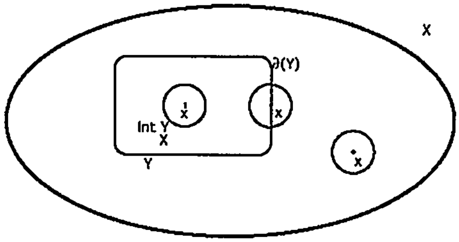

Figura 1

1.5 Ejemplos.

(1) Sea X un espacio métrico. Si $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ entonces todo punto de $\mathcal{V}^d_\varepsilon(x)$ es un punto interior de $\mathcal{V}^d_\varepsilon(x)$.

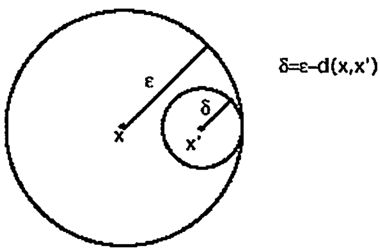

Figura 2

(2) Consideremos a $\mathbb{R}$ con la métrica usual. Como todo intervalo abierto (a, b) contiene tanto puntos racionales como irracionales, tenemos que todo punto de $\mathbb{R}$ es un punto frontera de $\mathbb{Q}$.

1.6 Definición. Sea X un espacio métrico. El *interior* de un conjunto $Y \subset X$ es el conjunto de todos los puntos interiores de Y, y se le denota como Y° o $\mathrm{int}_X(Y)$. El conjunto de todos los puntos frontera de Y constituye la *frontera* de Y y es denotada como $\partial(Y)$. El conjunto $Y \cup \partial(Y)$ forma la *cerradura de* Y y será denotada como $\overline{Y}$ o $\mathrm{cl}_X(Y)$.

1.7 Ejemplos.

(1) Tomemos $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual. Dados $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\mathcal{V}_\varepsilon^d(x)^\circ = \mathcal{V}_\varepsilon^d(x)$ y $\partial(\mathcal{V}_\varepsilon^d(x)) = \{x' \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x') = \varepsilon\}$. Por otra parte $(\mathbb{R}^n)^\circ = \mathbb{R}^n$, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$ y $\partial(\mathbb{R}^n) = \emptyset$.

(2) En $\mathbb{R}$ con la métrica usual, $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, $\partial(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ y $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Por otra parte si Y es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente entonces $\sup Y \in \partial(Y)$. Análogamente, si Y está acotado inferiormente entonces $\inf Y \in \partial(Y)$.

1.8 Definición. Sea X un espacio métrico. Un conjunto $Y \subset X$ es *abierto* si todo punto de Y es un punto interior a Y, esto es si $Y = Y^\circ$. A la familia de todos los abiertos de X se le llama una *topología* de X.

Ahora veremos algunas propiedades de los conjuntos abiertos, las cuales nos serán de gran utilidad posteriormente.

1.9 Lema. *Sea X un espacio métrico.*

(1) *Si $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es un subconjunto abierto de X.*

(2) *Si U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos de X entonces la intersección $U_1 \cap U_2$ es un subconjunto abierto de X.*

Demostración:

(1) Necesitamos probar que todo punto de $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es interior. Si $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ entonces existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in U_{\lambda_0}$. Como U_{λ_0} es un abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{V}_\varepsilon^d(x) \subset U_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Por lo tanto, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es abierto.

(2) Si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ entonces $U_1 \cap U_2$ es un abierto. Supongamos que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Sea $x \in U_1 \cap U_2$. Como U_1 y U_2 son abiertos existen $\varepsilon_1 > 0$ y

$\varepsilon_2 > 0$, tales que $\mathcal{V}^d_{\varepsilon_1}(x) \subset U_1$ y $\mathcal{V}^d_{\varepsilon_2}(x) \subset U_2$, respectivamente. Tomando $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, se tiene que $\mathcal{V}^d_{\varepsilon}(x) \subset U_1 \cap U_2$. De donde $U_1 \cap U_2$ es abierto. ■

Observemos que el Lema anterior nos dice que la unión arbitraria de abiertos es un abierto y que la intersección finita de abiertos (inducción matemática) es un abierto.

1.10 Ejercicio. Encuentra una familia infinita de abiertos de $\mathbb{R}$ tal que su intersección **no** sea un abierto de $\mathbb{R}$.

1.11 Definición. Sea X un espacio métrico. Un conjunto $Y \subset X$ es *cerrado* si $X \setminus Y$ es abierto.

1.12 Ejercicios. Sean X un espacio métrico y $Y \subset X$. Prueba lo siguiente:

(1) $Y \subset X$ es cerrado si y sólo si $Y = \overline{Y}$.

(2) $\overline{Y} = \bigcap\{F \subset X \mid Y \subset F \text{ y } F \text{ es cerrado en } X\}$.

1.13 Ejemplos.

(1) Sea X un espacio métrico. Si $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ entonces:

$$\mathcal{B}^d_{\varepsilon}(x) = \{x'' \in X \mid d(x, x'') \leq \varepsilon\}$$

es cerrado.

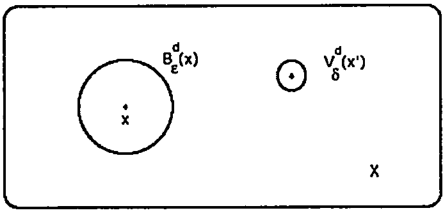

Figura 3

(2) Si X es un conjunto y d es la métrica discreta entonces todo subconjunto de X es tanto abierto como cerrado (¿por qué?).

(3) Si $[a,b) \subset \mathbb{R}$ entonces $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}([a,b)) = [a,b]$, $\partial([a,b)) = \{a,b\}$ e $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}([a,b)) = (a,b)$.

Utilizando las leyes de De Morgan en el Lema 1.9 se tiene:

1.14 Lema. *Sea X un espacio métrico.*

(1) *La intersección arbitraria de cerrados de X es un cerrado.*

(2) *La unión finita de cerrados de X es un cerrado.*

1.15 Ejercicio. Encuentra una familia infinita de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión **no** sea un cerrado de $\mathbb{R}$.

1.16 Ejercicios. Sean X un espacio métrico y $Y, Z \subset X$. Prueba lo siguiente:

(1) $\partial(Y) = \partial(X \setminus Y)$.

(2) $\partial(Y) = \overline{Y} \cap \overline{X \setminus Y}$.

(3) $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$.

(4) Si $Y \subset Z$ entonces $\overline{Y} \subset \overline{Z}$.

(5) $(Y \cap Z)^\circ = Y^\circ \cap Z^\circ$.

(6) $\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z}$.

(7) $(Y \cup Z)^\circ \supset Y^\circ \cup Z^\circ$.

(8) $\overline{Y \cap Z} \subset \overline{Y} \cap \overline{Z}$.

(9) Encuentra ejemplos en los cuales **no** se cumple la igualdad de (7) y de (8).

1.17 Definición. Sean X y Y espacios métricos y $f: X \to Y$ una función. Dada $x \in X$, decimos que f es *continua en* x si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f\left(\mathcal{V}_\delta^d(x)\right) \subset \mathcal{V}_\varepsilon^{d'}(f(x))$. Diremos que f es *continua* si f es continua en cada uno de los puntos de X. Si f es biyectiva entonces f es un *homeomorfismo* si tanto f como su inversa f^{-1} son continuas.

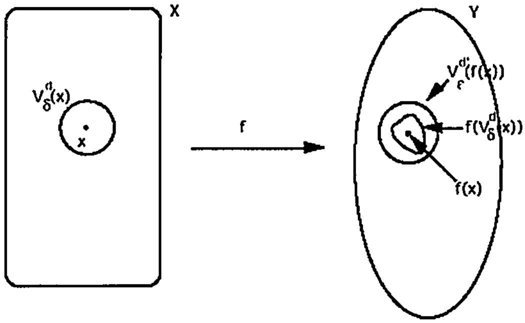

Figura 4

1.18 Ejercicios. Sean X, Y y Z espacios métricos. Prueba lo que sigue:

(1) Si $x \in X$ y $f: X \to Y$ es una función entonces f es continua en x si y sólo si para todo abierto V de Y que contiene a $f(x)$, existe un abierto U de X que contiene a x tal que $f(U) \subset V$.

(2) Si $f: X \to Y$ es una función entonces f es continua si y sólo si para todo abierto V de Y se tiene que $f^{-1}(V)$ es un abierto de X.

(3) Si $f: X \to Y$ es una función entonces f es continua si y sólo si para todo cerrado C de Y se tiene que $f^{-1}(C)$ es un cerrado de X.

(4) Si $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ son funciones continuas entonces la función $g \circ f: X \to Z$ es continua.

1.19 Definición. Sea X un espacio métrico. Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X *converge* a un punto x de X si para toda $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \in \mathcal{V}^d_\varepsilon(x)$.

Se puede caracterizar la continuidad de las funciones entre espacios métricos por medio de las sucesiones como lo muestra el siguiente resultado.

1.20 Teorema. *Si X y Y son espacios métricos y $f\colon X \to Y$ es una función, entonces f es continua en el punto x de X si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X que converge a x, se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.*

Demostración: Supongamos que f es continua en x y tomemos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X, que converge a x. Queremos mostrar que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$. Para esto, sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en x, existe $\delta > 0$ tal que $f\left(\mathcal{V}^d_\delta(x)\right) \subset \mathcal{V}^{d'}_\varepsilon(f(x))$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \in \mathcal{V}^d_\delta(x)$. De donde se tiene que si $n \geq N$ entonces $f(x_n) \in \mathcal{V}^{d'}_\varepsilon(f(x))$, lo que implica que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.

Ahora supongamos que f no es continua en x. Esto implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$, $f\left(\mathcal{V}^d_\delta(x)\right) \cap Y \setminus \mathcal{V}^{d'}_\varepsilon(f(x)) \neq \emptyset$. De donde, en particular, para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \mathcal{V}^d_{\frac{1}{n}}(x)$ tal que $f(x_n) \notin \mathcal{V}^{d'}_\varepsilon(f(x))$. Observemos que en este caso la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, mientras que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x)$. ■

Dado un espacio métrico X, la topología de X es heredada a sus subconjuntos de una manera muy sencilla, pues tomamos los conjuntos abiertos de X y los intersectamos con el subconjunto y eso nos da una topología para dicho subconjunto.

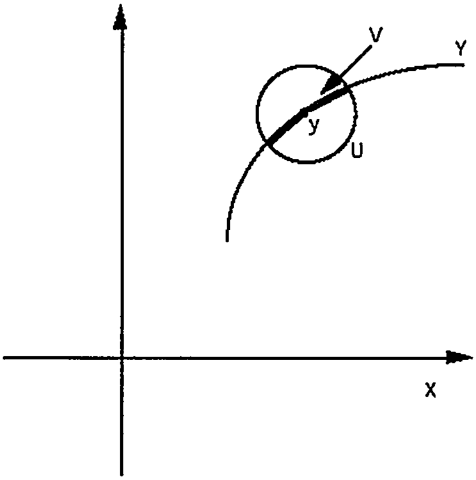

Figura 5

1.21 Definición. Sean X un espacio métrico y $Y \subset X$. Dada $y \in Y$, un *abierto relativo de y en Y* es un subconjunto V de Y tal que $y \in V$ y $V = Y \cap U$, donde U es un abierto de X. Análogamente un conjunto $C \subset Y$ es un *cerrado relativo*, si existe un cerrado[1] D de X tal que $C = Y \cap D$. A la familia de abiertos relativos se le llama la *topología relativa* y a Y con la topología relativa *subespacio*.

1.22 Ejemplos.

(1) Si $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual y $Y = [0,1]$ entonces $[0, \frac{1}{2})$ es un abierto relativo de 0 en Y, pues $[0, \frac{1}{2}) = Y \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

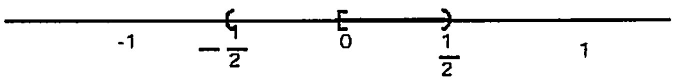

Figura 6

(2) Sean $X = \mathbb{R}^2$ con la métrica usual y $Y = \mathbb{R} \times \{0\}$. Si $(-1,1) \subset \mathbb{R}$ entonces $(-1,1) \times \{0\}$ es un abierto relativo del punto $(0,0)$ en Y, ya que $(-1,1) \times \{0\} = Y \cap \mathcal{V}_1^d((0,0))$.

[1]En general uno toma $D = \mathrm{cl}_X(C)$.

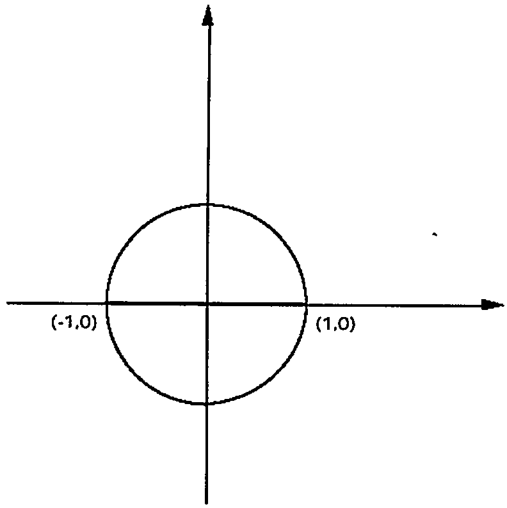

Figura 7

1.23 Ejercicio. Sean X y Z espacios métricos. Si $f: X \to Z$ es una función continua y $Y \subset X$ entonces $f|_Y: Y \to Z$ es continua cuando Y tiene la topología relativa.

1.1. CONEXIDAD

Intuitivamente un conjunto debería de ser visto como conexo si consiste de "una sola pieza". Así, por ejemplo, un intervalo en $\mathbb{R}$ es conexo, mientras que el conjunto $[0,1] \cup [2,3]$ no es conexo. Para conjuntos más complicados la intuición no es muy confiable.

1.24 Definición. Sea X un espacio métrico. Diremos que X es *disconexo* si existen dos abiertos ajenos no vacíos U y V de X cuya unión es X. Si X no es disconexo entonces X es *conexo*. Si $Y \subset X$ entonces Y es *disconexo* o *conexo* si lo es como subespacio con la topología relativa.

1.25 Ejercicio. Un espacio métrico X es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos tanto abiertos como cerrados de X son X y $\emptyset$.

1.26 Ejemplos.

(1) Tomemos $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual y $Y = [0,1] \cup [2,3]$. Observemos que $[0,1] = Y \cap (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ y $[2,3] = Y \cap (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$. De donde tanto $[0,1]$ como $[2,3]$ son abiertos relativos de Y y, además, $[0,1] \cap [2,3] = \emptyset$. Por lo tanto, Y no es conexo.

(2) Sean $X = \mathbb{R}^2$ con la métrica usual y $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{x}$, donde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Para ver que Y no es conexo notemos que $Y = \big(Y \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}\big) \cup \big(Y \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}\big)$ y que tanto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ como $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ son abiertos ajenos en X.

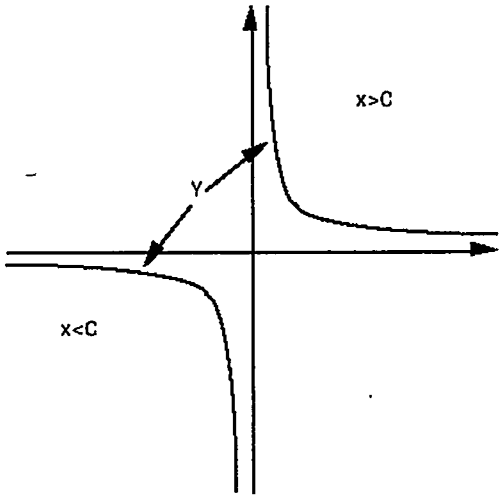

Figura 8

El siguiente resultado nos dará una caracterización de los conjuntos conexos de $\mathbb{R}$.

1.27 Teorema. *Un subconjunto* $\mathcal{J}$ *de* $\mathbb{R}$ *es conexo si y sólo si* $\mathcal{J}$ *es un intervalo, es decir, si y sólo si* $x, y \in \mathcal{J}$ *con* $x < y$*, implica que* $[x, y] \subset \mathcal{J}$.

Demostración: Supongamos que un intervalo $\mathcal{J}$ no es conexo. Entonces $\mathcal{J} = A \cup B$, donde A y B son abiertos disjuntos relativos a $\mathcal{J}$. Sean $x_1 \in A$ y $x_2 \in B$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_1 < x_2$. Así se tiene que $[x_1, x_2] \subset \mathcal{J}$. Como A es un abierto relativo a $\mathcal{J}$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $[x_1, x_1 + \delta_1) \subset A$. Análogamente existe $\delta_2 > 0$ tal que $(x_2 - \delta_2, x_2] \subset B$. Sean $B_1 = \{x \in B \mid x > x_1\}$ y $y = \text{ínf} B_1$ ($B_1 \neq \emptyset$ pues $x_2 \in B_1$). Entonces tenemos que $x_1 < y < x_2$ (¿por qué?). Como $\mathcal{J}$ es un intervalo, $y \in \mathcal{J}$. Si $y \in A$ entonces algún intervalo $[y, y + \delta)$ estaría contenido en A y $y + \delta$ sería una cota inferior de B_1, lo que contradice el hecho de y es el ínfimo de B_1. Si $y \in B$ entonces algún intervalo $(y - \delta, y]$ estaría contenido en B_1, de donde y no sería una cota inferior de B_1, lo cual también es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{J}$ es conexo.

Si $\mathcal{J}$ no fuera un intervalo entonces podríamos encontrar tres números reales x, y, z tales que $x < y < z$, $\{x, z\} \subset \mathcal{J}$ y $y \notin \mathcal{J}$. Luego, se obtiene que $\mathcal{J} = ((-\infty, y) \cap \mathcal{J}) \cup ((y, \infty) \cap \mathcal{J})$, por lo que $\mathcal{J}$ no es conexo. ■

Una propiedad interesante de la conexidad es el hecho de que es preservada por las funciones continuas.

1.28 Teorema. *Sean* X *y* Y *espacios métricos. Si* $f : X \to Y$ *es una función continua y suprayectiva y* X *es conexo entonces* Y *es conexo.*

Demostración: Si Y no fuera conexo, existirían dos abiertos ajenos no vacíos U y V de Y tales que $Y = U \cup V$. Como f es continua, por 1.18 (2), tenemos que tanto $f^{-1}(U)$ como $f^{-1}(V)$ son abiertos de X. Además, $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Luego, como $U \cap V = \emptyset$, se tiene que $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. De donde X no es conexo. ■

1.29 Lema. *Sean X un espacio métrico y $Y \subset X$. Si $Y = A \cup B$, donde A y B son cerrados ajenos relativos a Y, entonces $cl_X(A) \cap B = \emptyset$ y $A \cap cl_X(B) = \emptyset$.*

Demostración: Como A es cerrado relativo a Y, tenemos que $A = Y \cap \mathrm{cl}_X(A)$. De donde $\mathrm{cl}_X(A) \cap B = \mathrm{cl}_X(A) \cap (Y \cap B) = (\mathrm{cl}_X(A) \cap Y) \cap B = A \cap B = \emptyset$. Análogamente $A \cap \mathrm{cl}_X(B) = \emptyset$. ■

1.30 Ejercicio. Sean X un espacio métrico, $Y \subset X$ y U y V abiertos ajenos de X. Si Y es conexo y $Y \subset U \cup V$ entonces $Y \subset U$ o $Y \subset V$.

1.31 Lema. *Sean X un espacio métrico y Y y Z subconjuntos de X. Si Y es conexo y $Y \subset Z \subset cl_X(Y)$ entonces Z es conexo.*

Demostración: Supongamos que Z no es conexo. Entonces $Z = U \cup V$, donde U y V son no vacíos y abiertos ajenos relativos a Z. Como $Y \subset Z$, tenemos que, por 1.30, $Y \subset U$ o $Y \subset V$, digamos que $Y \subset U$. Por 1.29, $\mathrm{cl}_X(U) \cap V = \emptyset$. Como $Y \subset U$, $\mathrm{cl}_X(Y) \subset \mathrm{cl}_X(U)$ (ver 1.16 (4)). De donde $Z \cap V = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, Z es conexo. ■

Observemos que el Lema anterior, en particular, nos está diciendo que la cerradura de un conjunto conexo es conexa.

1.32 Ejercicios. Sea X un espacio métrico. Prueba lo siguiente:

(1) Si $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de subconjuntos conexos de X tal que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \neq \emptyset$ entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ es conexo.

(2) Encuentra un ejemplo en el cual se muestre que la intersección de dos conjuntos conexos **no** es, necesariamente, conexa.

1.33 Definición. Sean X un espacio métrico y $x, y \in X$. Una *trayectoria de x a y* es una función continua $f\colon [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Si todo par de puntos de X pueden ser unidos por una trayectoria entonces X es *conexo por trayectorias.*

1.34 Ejercicio. Todo espacio métrico conexo por trayectorias es conexo.

1.35 Definición. Si X es un espacio métrico y $A \subset X$ entonces A es una *componente* de X si A es conexo y para cualquier subconjunto conexo B de X tal que $A \subset B$ se tiene que $B = A$.

Notemos que las componentes de un espacio son subconjuntos conexos maximales. Por supuesto, si X es conexo entonces la única componente de X es X mismo. Por otra parte, en el otro extremo tenemos que si X tiene la métrica discreta entonces cada punto de X es una componente (¿por qué?).

1.36 Ejemplo. Si $X = \{0\} \times [0,1] \cup \{1\} \times [0,1] \cup \{2\} \times [0,1]$ entonces las componentes de X son $\{\ell\} \times [0,1]$, $\ell \in \{0,1,2\}$.

Figura 9

1.37 Ejercicio. Encuentra las componentes de $\mathbb{Q}$ con la topología relativa. Haz lo mismo con $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.38 Ejercicio. Sea X un espacio métrico. Prueba:

(1) Las componentes de X son cerradas.

(2) Distintas componentes de X son disjuntas.

(3) Cada punto de X pertenece exactamente a una componente.

1.2. COMPACIDAD

1.39 Definición. Sean X un espacio métrico y $Y \subset X$. Una familia $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de X es una *cubierta* de Y si $Y \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Si $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ también es una cubierta de Y entonces $\mathcal{U}'$ es una *subcubierta de* Y. Si todos los elementos de una cubierta $\mathcal{U}$ de Y son abiertos de Y entonces $\mathcal{U}$ es una *cubierta abierta de* Y.

1.40 Definición. Un subconjunto Y de un espacio métrico X es *compacto* si toda cubierta abierta de Y tiene una subcubierta finita.

1.41 Teorema. *Todo intervalo cerrado y acotado de* $\mathbb{R}$ *es compacto.*

Demostración: Sean $[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado y $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una cubierta abierta de $[a,b]$. Consideremos el conjunto $\mathcal{C} = \{x \in [a,b] \mid [a,x]$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{U}\}$. Observemos que $a \in \mathcal{C}$, por lo que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Sea $x_0 = \sup \mathcal{C}$. Afirmamos que $x_0 = b$. Supongamos que $x_0 \neq b$. Como $\mathcal{U}$ es una cubierta de $[a,b]$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_0 \in U_{\lambda_0}$. Como U_{λ_0} es un abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset U_{\lambda_0}$. Sean $x_1 \in \mathcal{C} \cap (x_0 - \varepsilon, x_0)$ y $x_2 \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$. Como $x_1 \in \mathcal{C}$, el intervalo $[a, x_1]$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$, digamos $U_{\lambda_1}, \ldots U_{\lambda_n}$. Ahora bien, observemos que $[a, x_2] \subset \bigcup\limits_{k=0}^{n} U_{\lambda_k}$, por lo que $x_2 \in \mathcal{C}$. Pero esto es una contradicción, pues x_0 es el supremo de $\mathcal{C}$. Por lo tanto, $x_0 = b$ y $[a,b]$ es compacto. ■

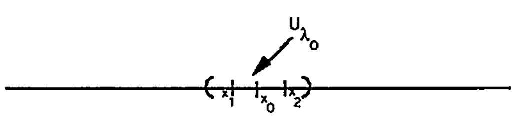

Figura 10

En general se tiene el siguiente resultado debido a Heine–Borel, el cual será muy útil posteriormente.

1.42 Teorema. *Si Y es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ entonces Y es compacto si y sólo si Y es cerrado y acotado (esto es, existe $r > 0$ tal que $Y \subset \mathcal{V}_r^d(\overline{0})$.)*

El Teorema anterior nos da una caracterización de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, de lo cual se deduce que dicho espacio no es compacto. En el siguiente resultado daremos una demostración directa de este hecho.

1.43 Teorema. *$\mathbb{R}^n$ no es compacto.*

Demostración: Supongamos que $\mathbb{R}^n$ sí es compacto y consideremos la siguiente cubierta abierta. Sea $\mathcal{U} = \{\mathcal{V}_n^d(\overline{0})\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\overline{0} \in \mathbb{R}^n$ es el origen. Como estamos suponiendo que $\mathbb{R}^n$ es compacto, entonces podemos encontrar $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$ tales que $\mathbb{R}^n \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\ell} \mathcal{V}_{n_k}^d(\overline{0})$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $n_\ell = \max\{n_1, \ldots, n_\ell\}$. De donde $\bigcup\limits_{k=1}^{\ell} \mathcal{V}_{n_k}^d(\overline{0}) = \mathcal{V}_{n_\ell}^d(\overline{0})$. Pero, por otra parte, el punto $(n_\ell, \ldots, n_\ell)$ pertenece a $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V}_{n_\ell}^d(\overline{0})$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathbb{R}^n$ no es compacto. ■

Así como en el caso de la conexidad, la compacidad también es preservada por las funciones continuas.

1.44 Teorema. *Sean X y Y espacios métricos. Si $f\colon X \to Y$ es una función continua y suprayectiva y X es compacto, entonces Y es compacto.*

Demostración: Sea $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta abierta de Y. Como f es continua, la familia $\{f^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de X (ver 1.18(2)). Como X es compacto, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{\lambda_k})$. De donde

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{\lambda_k})\right) = \bigcup_{k=1}^{n} f\left(f^{-1}(V_{\lambda_k})\right) \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{\lambda_k}.$$

De aquí tenemos que $\{V_{\lambda_1}, \ldots V_{\lambda_n}\}$ es una subcubierta finita de Y. ∎

1.45 Ejercicios. Sean X un espacio métrico compacto y $Y \subset X$. Demuestra lo siguiente:

(1) Si Y es cerrado en X entonces Y es compacto.

(2) Si Y es compacto entonces Y es cerrado en X (en este ejercicio no se usa la compacidad de X).

1.46 Definición. Sea X un espacio métrico. Si $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de que para cualquier subconjunto finito Λ' de Λ, se tiene que $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda \neq \emptyset$, entonces diremos que la familia $\mathcal{A}$ tiene la *propiedad de la intersección finita.*

1.47 Ejercicio. Si X es un espacio métrico entonces X es compacto si y sólo si cualquier familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

1.48 Lema. *Sean X es un espacio métrico y compacto y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$. Si U es un abierto de X tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subset U$.*

Demostración: Como U es un abierto de X, $X \setminus U$ es un cerrado. Por 1.45(1), $X \setminus U$ es compacto. Como $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$, se tiene que, por las leyes de De Morgan, $X \setminus U \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus X_n)$. De donde existen $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que $X \setminus U \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} (X \setminus X_{n_j})$. Sea $N = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_k\}$, entonces $\bigcup\limits_{j=1}^{k} (X \setminus X_{n_j}) = X \setminus X_N$. Por lo tanto, $X_N \subset U$. ∎

1.49 Ejercicio. Sea X un espacio métrico. Si A y B son dos subconjuntos ajenos y compactos de X, entonces existen abiertos ajenos U y V de X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

1.50 Ejercicio. Si X es un espacio métrico y compacto y $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cubierta abierta de X, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $Y \subset X$ y diám $(Y) < \delta$ entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $Y \subset U_\lambda$.

1.51 Ejercicio. Sea X un espacio métrico. Si A es un subconjunto compacto de X y U es un abierto de X tal que $A \subset U$, entonces existe un abierto V de X tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

2. CONTINUOS

2.1 Definición. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo. Un *subcontinuo* es un continuo el cual está contenido en un espacio.

2.2 Ejemplos.

(1) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, el intervalo $[a, b]$ es un continuo.

(2) Dados $x \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$, la bola cerrada $\mathcal{B}_\varepsilon^d(x)$ es un continuo.

(3) Si $\mathcal{W} = \{(x, \mathrm{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}$, entonces $X = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{W})$ es un continuo llamado *la curva sinoidal del topólogo.* Observemos que $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$.

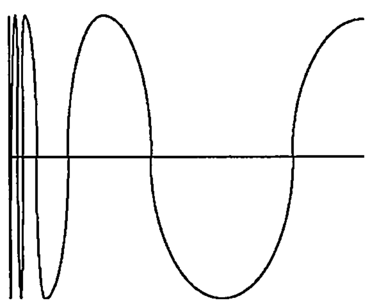

Figura 11

(4) Tomemos el continuo X del ejemplo anterior y consideremos un arco Z del punto $(0,-1)$ al punto $(1,\text{sen}(1))$, de tal forma que la intersección $X \cap Z = \{(0,-1),(1,\text{sen}(1))\}$. Entonces $\mathcal{V} = X \cup Z$ es un continuo llamado *el círculo de Varsovia.*

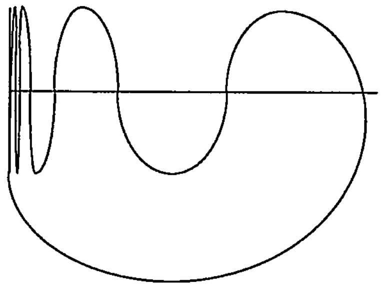

Figura 12

Una de las técnicas más importantes para obtener ejemplos interesantes de continuos es el uso de *intersecciones anidadas.*

2.3 Ejemplo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea:

$$X_n = [-1,1] \times \left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right] \setminus \left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \times \{0\}\right\}.$$

Observemos que cada X_n es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$, pero

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \left[-1,-\frac{1}{2}\right] \times \{0\} \cup \left[\frac{1}{2},1\right] \times \{0\},$$

el cual no es conexo (vea la figura 13).

El ejemplo anterior nos dice que la intersección anidada de conjuntos conexos no es, necesariamente, conexa. Pero si agregamos la hipótesis de compacidad a cada uno de los intersectandos se obtienen resultados positivos, como lo muestra el siguiente Teorema, el cual será muy útil pues nos permitirá definir una clase especial, pero muy importante, de continuos.

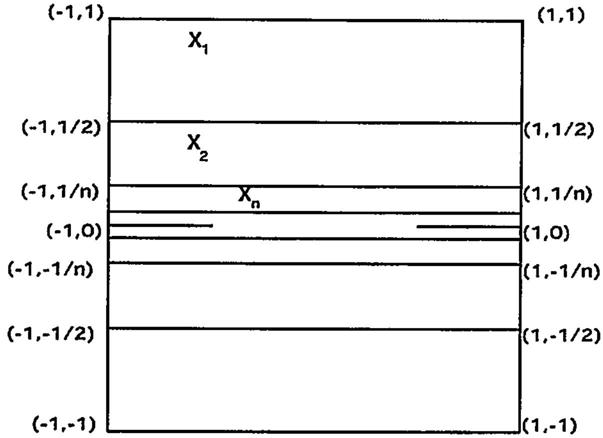

Figura 13

2.4 Teorema. *Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subcontinuos de un espacio métrico (Y, d), tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$, entonces $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ es un continuo.*

Demostración: Sea $X = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Por 1.45 (2), cada X_n es un cerrado de Y. De donde, por 1.47, $X \neq \emptyset$ y, por 1.14 (1), X es un cerrado de Y, por lo que X es compacto (ver 1.44 (1)). Así que sólo falta ver que X es conexo.

Supongamos que X no es conexo. Entonces $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados ajenos de X (¿por qué?), por lo tanto, A y B son compactos. Por 1.49, podemos encontrar abiertos disjuntos V y W de Y de tal forma que $A \subset V$ y $B \subset W$. Por 1.48, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subset V \cup W$. De donde $X_n = (X_n \cap V) \cup (X_n \cap W)$. Como $A \cup B = X \subset X_n$, se tiene que $X_n \cap V \neq \emptyset$ y $X_n \cap W \neq \emptyset$, pero esto implica que X_n no es conexo (ver 1.30), esta contradicción prueba que X es conexo. ■

2.5 Ejemplos.

(1) **La Curva Universal de Sierpiński.** Empezamos dividiendo el cuadrado $S_0 = [0,1] \times [0,1]$ en nueve cuadrados congruentes y tomamos $S_1 = S_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Análogamente, dividimos cada uno de los restantes ocho cuadrados en nueve cuadrados congruentes, y llamamos S_2 al continuo que se obtiene al quitar el interior de cada uno de los ocho cuadrados centrales. Continuando de esta manera, definimos S_3, S_4, etc. Sea $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$, entonces S es un continuo, por 2.4, y es llamado la *Curva Universal de Sierpiński.*

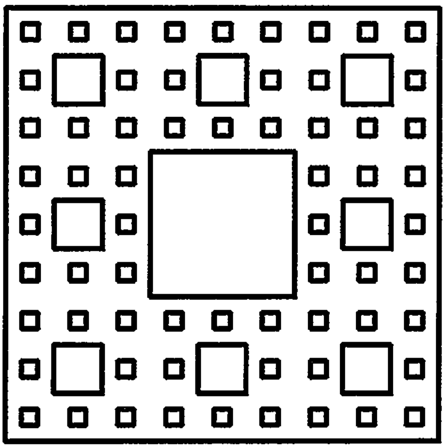

Figura 14

El término universal se refiere al hecho de que este continuo de dimensión uno del plano contiene una copia topológica de cualquier continuo de dimensión uno del plano (la palabra universal no siempre es usada de esta manera). La demostración de la universalidad escapa a los objetivos de este trabajo.

(2) **La Curva Universal de Menger.** Consideremos primero el cubo $M = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Dividamos cada una de las caras de M en nueve cuadrados congruentes y hagamos un agujero a través del interior de cada cuadrado central, lo que nos da un continuo M_1.

Dividamos cada uno de los restantes cuarenta y ocho cuadrados en nueve cuadrados congruentes y hagamos un agujero a través del interior de los cuadrados centrales, de esta manera obtenemos un continuo M_2. Repetimos este proceso para obtener continuos M_n. *La Curva Universal de Menger* es, por definición $\mathcal{M} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Por 2.4, $\mathcal{M}$ es un continuo. El término universal se refiere, en este caso, al hecho de que $\mathcal{M}$ contiene una copia topológica de cualquier espacio métrico separable de dimensión uno.

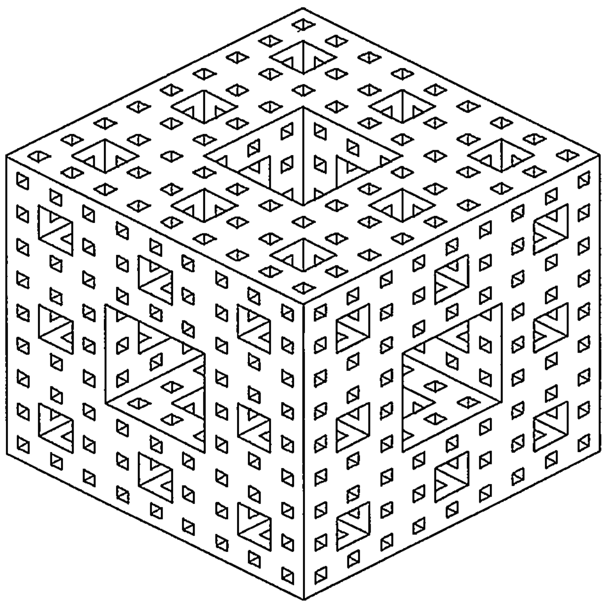

Figura 15

En la figura 15 se ilustra el tercer paso de la construcción de La Curva Universal de Menger.

Ahora nos vamos a dedicar a estudiar un poco los llamados continuos encadenables.

2.6 Definición. Una familia $\{U_1, \dots, U_n\}$ de subconjuntos de un espacio métrico X es una *cadena simple* en X si se tiene que $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ si y sólo si $|j-k| \leq 1$. A cada U_k se le llama un *eslabón* de la cadena simple. Se dice que una cadena simple $\mathcal{C} = \{U_1, \dots, U_n\}$ *conecta a los puntos a y b* en X si $a \in U_1$ y $b \in U_n$.

Debemos observar que los eslabones de una cadena no tienen por qué ser conexos; así que la siguiente figura ilustra cómo puede lucir una cadena simple.

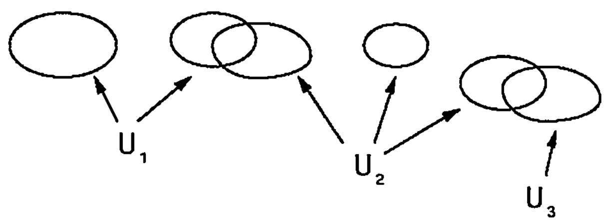

Figura 16

Frecuentemente los eslabones de una cadena simple son conjuntos abiertos; un procedimiento para la construcción de una cadena simple de este estilo es empezar con una familia de conjuntos abiertos y de ahí extraer la cadena simple. Esto se puede hacer debido al siguiente resultado.

2.7 Teorema. *Sea X un espacio métrico y conexo. Si $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una cubierta abierta de X y $a, b \in X$ entonces existe una cadena simple que conecta a a con b cuyos eslabones son elementos de $\mathcal{U}$.*

Demostración: Sea D el conjunto de puntos x de X tales que existe una cadena simple, con eslabones en $\mathcal{U}$, que conecta a a con x. Como $a \in D$, $D \neq \emptyset$. Vamos a mostrar que D es tanto abierto como cerrado en X, lo que implicará, debido a la conexidad de X, que $D = X$, por 1.25. Sea $x \in D$, así que existe una cadena simple $\{U_1, \dots, U_n\}$, con eslabones en $\mathcal{U}$, tal que $a \in U_1$ y $x \in U_n$ pero, claramente, esto implica que $U_n \subset D$, de donde D es abierto.

Para ver que D es cerrado, probaremos que $D = \overline{D}$. Sea $x \in \overline{D} = D \cup \partial(D)$, si $x \in D$ entonces no hay nada qué probar. Supongamos que $x \in \partial(D)$. Como $\mathcal{U}$ es una cubierta de X, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Como $x \in \partial(D)$, existe $z \in D \cap U$, por lo que existe una cadena simple $\{V_1, \dots, V_m\}$, con eslabones en $\mathcal{U}$, que conecta a a con z. Sea $r \in \{1, \dots, m\}$ el primer número natural tal que $U \cap V_r \neq \emptyset$. Entonces $\{V_1, \dots, V_r, U\}$ es una cadena simple que conecta a a con x y, por lo tanto, $x \in D$. ■

2.8 Definición. Una cadena simple $\mathcal{C}$ de conjuntos abiertos en un espacio métrico X es llamada una *ε–cadena* si el diámetro de cada eslabón de $\mathcal{C}$ es menor que ε.

2.9 Definición. Un espacio métrico es *encadenable* si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε–cadena que cubre a X. Si $a, b \in X$, entonces X es *encadenable de a a b* si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε–cadena $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ que cubre a X tal que $a \in C_1$ y $b \in C_n$.

2.10 Ejemplos.

(1) El intervalo $I = [0, 1]$ es encadenable de 0 a 1.

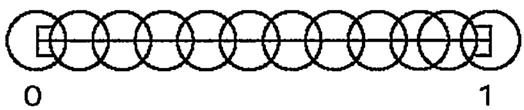

Figura 17

(2) El conjunto de dos puntos $\{0, 1\}$, con la topología relativa **no** es encadenable.

Figura 18

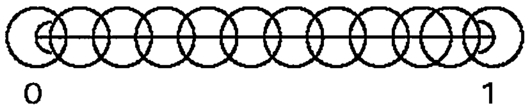

Figura 19

(3) El intervalo abierto $(0,1)$ es encadenable, pero **no** es encadenable de a a a b para ningún par de puntos $a, b \in (0,1)$.

(4) La curva sinoidal del topólogo sí es encadenable.

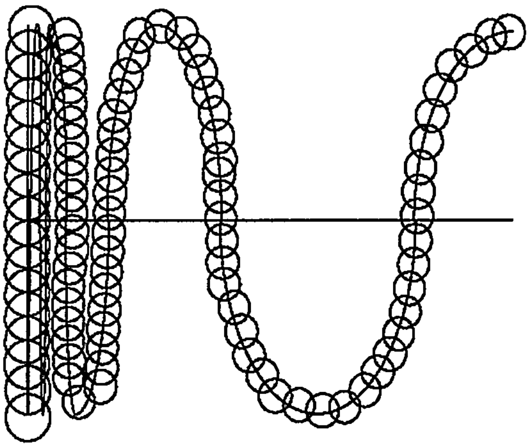

Figura 20

A pesar de los ejemplos (2) y (3), el ser encadenable es, de alguna manera, hereditaria.

2.11 Lema. *Si X es un continuo encadenable y $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ es una ε–cadena en X que lo cubre, entonces existe una ε–cadena $\mathcal{C}' = \{C_1', \ldots, C_n'\}$ en X que lo cubre tal que para toda $k \in \{1, \ldots, n-2\}$, $\overline{C}_k' \cap \overline{C}_{k+2}' = \emptyset$.*

Demostración: Primero observemos que $X \setminus \bigcup\limits_{k=2}^{n} C_k$ es un cerrado de X

y está contenido en C_1. Por 1.51, existe un abierto C_1' tal que

$$X \setminus \bigcup_{k=2}^{n} C_k \subset C_1' \subset \overline{C}_1' \subset C_1.$$

Notemos que $\{C_1', C_2, \ldots, C_n\}$ es una ε–cadena que cubre a X.

Ahora $X \setminus \left\{ C_1' \cup \bigcup_{k=3}^{n} C_k \right\}$ es un cerrado de X contenido en C_2, así que, por 1.51, existe un abierto C_2' de X tal que

$$X \setminus \left\{ C_1' \cup \bigcup_{k=3}^{n} C_k \right\} \subset C_2' \subset \overline{C}_2' \subset C_2.$$

Observemos que $\{C_1', C_2', C_3, \ldots, C_n\}$ es una ε–cadena que cubre a X. Continuando de esta manera construimos la ε–cadena $\mathcal{C}'$ que cubre a X que buscamos. ■

2.12 Teorema. *Si X es un continuo encadenable y $K \subset X$ es un subcontinuo, entonces K es encadenable.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Como X es encadenable, existe una ε–cadena $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ que cubre a X. Sea j el primer número natural tal que $C_j \cap K \neq \emptyset$ y sea k el número natural más grande con la propiedad de que $C_k \cap K \neq \emptyset$. Mostraremos que $\mathcal{C}' = \{C_j \cap K, C_{j+1} \cap K, \ldots, C_k \cap K\}$ es una ε–cadena en K que cubre a K. Claramente este es el caso a menos de que existieran dos eslabones C_p y C_{p+1} (con $j \leq p < k$), tales que $(C_p \cap K) \cap (C_{p+1} \cap K) = \emptyset$. Pero esto implicaría que $\bigcup_{j \leq m \leq p} (C_m \cap K)$ y $\bigcup_{p+1 \leq m \leq k} (C_m \cap K)$ fueran dos abiertos ajenos de K cuya unión sería K, lo cual contradiría la conexidad de K. ■

Intuitivamente, parece que los continuos encadenables no son *"gordos"*. De hecho, puede ser demostrado que cualquier continuo encadenable es homeomorfo a un subcontinuo del plano, esto es, todo continuo encadenable es *"aplanable"*.

Por otra parte, es un ejercicio común de los cursos de cálculo probar que si $f\colon [0,1] \to [0,1]$ es una función continua, entonces existe un punto $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$. Como veremos, todos los continuos encadenables tienen la misma propiedad.

2.13 Definición. Se dice que un espacio métrico X tiene la *propiedad del punto fijo* si para cualquier función continua $f\colon X \to X$, existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

2.14 Ejercicio. Sean X un espacio métrico y compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Muestra que si para cada $\varepsilon > 0$, existe un punto $x_\varepsilon \in X$ tal que $d(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) < \varepsilon$, entonces existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

2.15 Definición. Si X es un continuo encadenable, entonces una sucesión $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cadenas simples, cada una de las cuales cubre a X, es llamada una *sucesión definitoria de cadenas* para X si para cada $n \in \mathbb{N}$:

(1) $\mathcal{C}_n$ es una $\frac{1}{2^n}$–cadena con la propiedad de que eslabones disjuntos tienen cerraduras disjuntas, y

(2) $\mathcal{C}_{n+1}$ es un *refinamiento propio de* $\mathcal{C}_n$, esto es, la cerradura de cada eslabón de $\mathcal{C}_{n+1}$ está contenida en algún eslabón de $\mathcal{C}_n$.

2.16 Lema. *Todo continuo encadenable tiene una sucesión definitoria de cadenas.*

Demostración: Como X es encadenable, podemos encontrar una 1–cadena $\mathcal{C}_1'$ que cubre a X. Por 2.11, usando $\mathcal{C}_1'$, podemos construir una 1–cadena $\mathcal{C}_1 = \{C_{1,1}, \ldots, C_{1,n_1}\}$ que cubre a X con la propiedad de que eslabones disjuntos tienen cerraduras disjuntas. Por 1.50, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $Y \subset X$ y $\operatorname{diám}(Y) < \delta_1$, entonces existe $k \in \{1, \ldots, n_1\}$ tal que $Y \subset C_{1,k}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\delta_1 < \frac{1}{2}$. Como X es encadenable, existe una δ_1–cadena $\mathcal{C}_2'$ que cubre a X. Por 2.11, podemos construir una δ_1–cadena $\mathcal{C}_2 = \{C_{2,1}, \ldots, C_{2,n_2}\}$ que cubre a X con la propiedad de que eslabones disjuntos tiene cerraduras disjuntas. Además, como para toda

$k \in \{1, \ldots, n_2\}$, diám$(C_{2,k})$ = diám$(\overline{C}_{2,k}) < \delta_1$ (¿por qué?), se tiene que $\overline{C}_{2,k} \subset C_{1,\ell}$, para alguna $\ell \in \{1, \ldots, n_1\}$. Así tenemos que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ cumplen con (1) y (2) de 2.15. Procediendo de esta manera se obtiene la sucesión definitoria de cadenas buscada. ■

2.17 Teorema. *Si X es un continuo encadenable, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración: Sea $f\colon X \to X$ una función continua. Tomemos $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión definitoria de cadenas para X. Por 2.14, para cada $\varepsilon > 0$, basta encontrar un punto $x_\varepsilon \in X$ tal que $d(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) < \varepsilon$. Así que tomemos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Sean:

$$\mathcal{C}_k = \{C_{k,1}, \ldots, C_{k,n_k}\},$$

$$A = \{x \in X \mid \text{si } x \in C_{k,j} \text{ y } f(x) \in C_{k,\ell} \text{ entonces } j < \ell\},$$

$$B = \{x \in X \mid \text{existe } j \text{ tal que } x \in C_{k,j} \text{ y } f(x) \in C_{k,j}\}$$

y

$$C = \{x \in X \mid \text{si } x \in C_{k,j} \text{ y } f(x) \in C_{k,\ell} \text{ entonces } j > \ell\}$$

Afirmamos que A es cerrado. Para ver esto, tomemos $x \in X \setminus A$. Probaremos que existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{V}_\delta^d(x) \subset X \setminus A$. Como $\mathcal{C}_k$ cubre a X, existe $\ell \in \{1, \ldots, n_k\}$ tal que $x \in C_{k,\ell}$. Como $x \in X \setminus A$, $f(x) \in C_{k,j}$, para alguna $j \leq \ell$. Como f es continua y $C_{k,\ell}$ es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{V}_\delta^d(x) \subset C_{k,\ell}$ y $f\left(\mathcal{V}_\delta^d(x)\right) \subset C_{k,j}$, pero lo anterior quiere decir que $\mathcal{V}_\delta^d(x) \subset X \setminus A$. Por lo tanto, $X \setminus A$ es abierto y A es cerrado. Análogamente se prueba que C es cerrado.

Si $B = \emptyset$ entonces A y C serían dos cerrados ajenos de X, cuya unión sería X, pero esto contradiría la conexidad de X. Por lo tanto, $B \neq \emptyset$ y de aquí se tiene que exite $x_\varepsilon \in X$ tal que $d(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) < \varepsilon$. ■

Ahora vamos a cambiar un poco de tema. Dejaremos los continuos encadenables por un rato para estudiar un poco de los continuos en general.

2.18 Definición. Un continuo X es *descomponible* si X puede ser puesto como la unión de dos subcontinuos propios. Diremos que X es *indescomponible* si X no es descomponible.

Los continuos más familiares son descomponibles, de hecho no es fácil encontrar continuos indescomponibles (diferentes de un punto).

2.19 Lema. *Un continuo X es descomponible si y sólo si X contiene un subcontinuo propio con interior no vacío.*

Demostración: Si X es un continuo descomponible, entonces X es la unión de dos subcontinuos propios Y y Z y, en este caso, $X \setminus Z$ es un abierto no vacío contenido en Y. De donde $\mathrm{int}_X(Y) \neq \emptyset$.

Supongamos que X tiene un subcontinuo propio Y con interior no vacío. Si $X \setminus Y$ es conexo, entonces $\overline{X \setminus Y}$ es un subcontinuo (ver 1.31) propio de X, por lo que $X = Y \cup \overline{X \setminus Y}$.

Si $X \setminus Y$ no es conexo, entonces $X \setminus Y = U \cup V$, donde U y V son abiertos ajenos de X. Afirmamos que $Y \cup U$ y $Y \cup V$ son subcontinuos de X. Como $X \setminus (Y \cup U) = V$, se tiene que $Y \cup U$ es cerrado y, por tanto, compacto (véase 1.45(1)). Análogamente se ve que $Y \cup V$ es compacto.

Si $Y \cup U$ no fuera conexo, entonces $Y \cup U = K \cup L$, donde K y L son abiertos ajenos de $Y \cup U$. También K y L son cerrados de X (¿por qué?). Como Y es conexo, por 1.30, $Y \subset K$ o $Y \subset L$, digamos que $Y \subset K$. Entonces $L \subset U$, lo que implica que $L \cap Cl_X(V) = \emptyset$. Por lo anterior, se tiene que $X = L \cup (K \cup Cl_X(V))$. Pero L y $K \cup Cl_X(V)$ son cerrados ajenos de X, lo que contradice la conexidad de X. Por lo tanto, $Y \cup U$ es conexo. De manera similar se prueba que $Y \cup V$ es conexo. Así que, en este caso, tenemos que $X = (Y \cup U) \cup (Y \cup V)$. ∎

2.20 Corolario. *Un continuo X es indescomponible si y sólo si todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío.*

El primer paso en la construcción de un continuo indescomponible es introducir la idea de composante.

2.21 Definición. Si X es un continuo y $x \in X$, entonces la *composante de x, κ_x,* es la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen a x.

2.22 Ejemplos.

(1) Si $X = [0,1]$ entonces $\kappa_0 = [0,1)$, $\kappa_1 = (0,1]$ y $\kappa_x = [0,1]$ para toda $x \in (0,1)$.

(2) Si $X = \mathcal{S}^1$, la circunferencia unitaria, entonces para toda $x \in X$, $\kappa_x = X$.

2.23 Ejercicios.

1. Encuentra las composantes de los puntos de la curva sinoidal del topólogo.
2. Demuestra que si X es un continuo descomponible, entonces existe $x \in X$ tal que $\kappa_x = X$.

No daremos la demostración del siguiente resultado, pues escapa a los objetivos de este trabajo, pero es muy utilizado dentro de la Teoría de los Continuos.

2.24 Teorema. *Si U es un abierto propio de un continuo X y C es una componente de U entonces $\overline{C} \cap \partial(U) \neq \emptyset$.*

Figura 21

2.25 Teorema. *Sean X un continuo con más de un punto y $x \in X$. Si κ_x es la composante de x, entonces $\overline{\kappa_x} = X$.*

Demostración: Sea U un abierto no vacío de X. Mostraremos que $U \cap \kappa_x \neq \emptyset$. Sea $p \in U$. Por 1.51, existe un abierto V de X tal que $p \in V \subset \overline{V} \subset U$. Si $x \in \overline{V}$ entonces $x \in U \cap \kappa_x$, y hemos terminado. Así que supongamos que $x \notin \overline{V}$ y sea C la componente de $X \setminus \overline{V}$ que contiene a x, (véase 1.38(3)). Entonces $\overline{C}$ es un subcontinuo propio de X que contiene a x, por lo que $\overline{C} \subset \kappa_x$. Sin embargo, por 2.24, $\overline{C} \cap \partial(X \setminus \overline{V}) \neq \emptyset$. Pero $\partial(X \setminus \overline{V}) = \partial(\overline{V}) \subset \overline{V}$, así que $\overline{C} \cap \overline{V} \neq \emptyset$. Por lo tanto κ_x intersecta a U. ■

2.26 Definición. Si X es un espacio métrico y H_1 y H_2 son dos subconjuntos cerrados de X, entonces un continuo $K \subset X$ es *irreducible entre* H_1 *y* H_2 si $H_\ell \cap K \neq \emptyset$, $\ell \in \{1, 2\}$, y para cualquier subcontinuo propio L de K se tiene que $L \cap H_1 = \emptyset$ o $L \cap H_2 = \emptyset$.

2.27 Ejemplos.

(1) El intervalo $I = [0, 1]$ es irreducible entre 0 y 1.

(2) La curva sinoidal del topólogo es irreducible entre $\{0\} \times [-1, 1]$ y el punto $(1, \operatorname{sen}(1))$.

En general se tiene el siguiente resultado:

2.28 Ejercicio. Sean X un continuo y $a, b \in X$. Si X es encadenable entre a y b, entonces X es irreducible entre a y b.

2.29 Teorema. *Si X es un continuo indescomponible entonces sus composantes son disjuntas.*

Demostración: Sean $x, y \in X$ y κ_x y κ_y las composantes de x y y, respectivamente. Supongamos que $\kappa_x \cap \kappa_y \neq \emptyset$. Sea $z \in \kappa_x \cap \kappa_y$. Como $z \in \kappa_x$, existe un subcontinuo propio K_1 de X tal que $z, x \in K_1$. Análogamente existe un subcontinuo propio K_2 de X tal que $z, y \in K_2$.

Si $w \in \kappa_y$, entonces existe un subcontinuo propio K_3 de X tal que $w, y \in K_3$. Como $y \in K_2 \cap K_3$, se tiene que $K_2 \cup K_3$ es un continuo, el cual no es igual a X debido a que éste es indescomponible. Como $z \in K_1 \cap (K_2 \cup K_3)$, resulta que $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ es un subcontinuo de X, el cual es propio por la indescomponibilidad de X. Pero $x, w \in K_1 \cup K_2 \cup K_3$, por lo que $w \in \kappa_x$. Por lo tanto $\kappa_y \subset \kappa_x$. Análogamente se prueba que $\kappa_x \subset \kappa_y$. ■

Utilizando el Teorema de la Categoría de Baire y el Corolario 2.20, se prueba:

2.30 Teorema. *Si X es un continuo indescomponible, entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes.*

2.31 Teorema. *Un continuo X es indescomponible si y sólo si existen tres puntos $a, b, c \in X$ tales que X es irreducibe entre cada par de ellos.*

Demostración: Supongamos que X es indescomponible y sean κ_a, κ_b y κ_c tres composantes distintas de X (véase 2.30). Si K es un subcontinuo propio de X que contiene a a y a b, entonces $K \subset \kappa_a \cap \kappa_b$, lo cual contradice 2.29, así que X es irreducible entre a y b. Análogamente se tiene que X es irreducible entre b y c y entre a y c.

Supongamos ahora que X es descomponible y sean a, b y c tres puntos cualesquiera de X. Como X es descomponible, existen dos subcontinuos propios K y L de X tales que $X = K \cup L$. Pero entonces K o L contiene a dos de los tres puntos a, b y c, por lo que X no es irreducible entre dos de esos puntos. ■

Así que el problema de encontrar un continuo indescomponible se ha reducido a empezar con tres puntos y construir un continuo que sea irreducible entre cada par de ellos. La pregunta ahora es: ¿Cómo puede uno crear un continuo irreducible de esta naturaleza? La respuesta se basa en el hecho de que un continuo encadenable entre dos puntos también es irreducible entre ellos (véase 2.28). La forma de construir un continuo encadenable es utilizar cadenas simples y es lo que haremos a continuación.

Toda la construcción se llevará al cabo en el plano. Sean a, b y c tres puntos no colineales de $\mathbb{R}^2$ y construyamos una cadena simple $\mathcal{C}_1$ consistiendo de discos abiertos, de diámetro menor que uno, empezando en a, pasando por b y terminando en c. Dentro de $\mathcal{C}_1$, construyamos una cadena simple $\mathcal{C}_2$ de discos abiertos, de diámetro menor que un medio, que empiece en b, que pase por c y que termine en a, de tal forma de que $\mathcal{C}_2$ sea un refinamiento propio de $\mathcal{C}_1$. Dentro de $\mathcal{C}_2$, construyamos una tercera cadena simple $\mathcal{C}_3$ de discos abiertos, de diámetro menor que un tercio, empezando en c, pasando por a y terminando en b, de tal manera que $\mathcal{C}_3$ sea un refinamiento propio de $\mathcal{C}_2$. Como lo muestra la figura de la página siguiente.

Todo el procedimiento comienza otra vez con una cadena simple $\mathcal{C}_4$ que está contenida en $\mathcal{C}_3$ y sigue el patrón a–b–c. En general, para cualquier $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se construyen cadenas simples: $\mathcal{C}_{3n+1}$ que sigue el patrón a–b–c; $\mathcal{C}_{3n+2}$ que sigue el patrón b–c–a; y $\mathcal{C}_{3n+3}$ que tiene el patrón c–a–b. Además, el diámetro de cada eslabón de $\mathcal{C}_\ell$ es menor que $\frac{1}{\ell}$, con $\ell \in \mathbb{N}$.

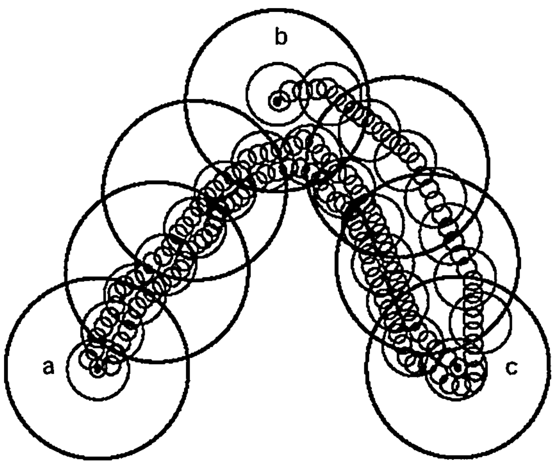

Figura 22

Para cada $\ell \in \mathbb{N}$, sean $K_\ell = \bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}_\ell} \overline{C}$ y $X = \bigcap\limits_{\ell=1}^{\infty} K_\ell$. Observemos que $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_{3n+1}$ es un continuo encadenable y, por lo tanto, irreducible (véase 2.28) entre a y c; que $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_{3n+2}$ es un continuo irreducible entre b y a; y que $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_{3n+3}$ es un continuo irreducible entre b y c. Pero, además, $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_{3n+1} = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_{3n+2} = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_{3n+3} = X$, así que, por 2.31, X es un continuo indescomponible.

Instituto de Matemáticas, UNAM.,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria,
México D. F., C. P. 04510. México.
correo electrónico: macias@servidor.unam.mx