Sobre la botella de Klein y algunos de sus “amigos”

Dr. Sergio Macías
Instituto de Matemáticas, UNAM.
sergiom@mate.unam.mx

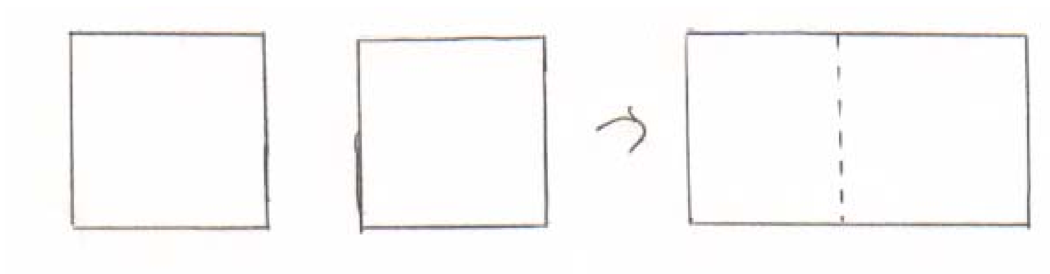
Una de las principales características de los científicos es la “curiosidad”, la cual los lleva a hacerse preguntas y éstas a desarrollar técnicas para resolverlas, así como crear “nuevos” objetos de estudio a partir de los ya conocidos. En particular, los matemáticos investigan sus objetos con la “estructura matemática” de la cual disponen. Una de las ramas de las matemáticas es la *topología*. Para describirla, transcribimos lo que A. W. Tucker y H. S. Bailey dijeron en 1950 [3]:

> *“La topología es la rama de las matemáticas*
> *que trata de las propiedades de posición*
> *que son invariantes por cambios en tamaño*
> *o forma. Sus objetos están constituidos*
> *por superficies, redes y muchas otras*
> *figuras. Tal vez el modo más fácil de definir*
> *propiedades topológicas consiste en*
> *decir que son propiedades geométricas*
> *que permanecen inmutables a pesar*
> *de estiramientos o encorvamientos.*
> *La topología está llena de paradojas*
> *aparentes e imposibilidades aparentes*
> *y es, probablemente, más divertida*
> *que cualquier otra rama de las matemáticas”*.

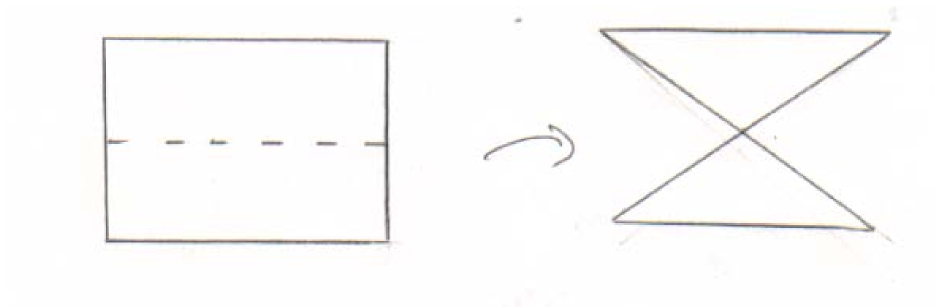
Pensaremos que los objetos geométricos que consideraremos en este trabajo están hechos de un hule muy maleable, lo cual nos permitirá estirarlos o encogerlos. A las partes más pequeñas e indivisibles de los objetos las llamaremos *puntos*.

Una de las técnicas usadas en topología es la de *pegado*, formalmente llamada *identificación*, la cual consiste en “pegar ” puntos de uno o varios objetos utilizando reglas específicas.

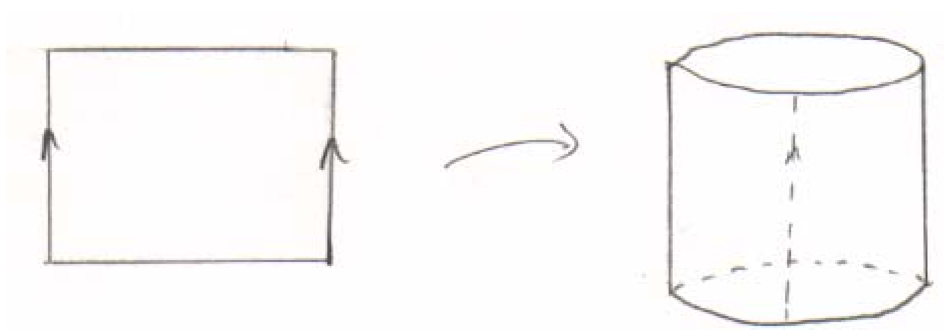
Por ejemplo, supongamos que tenemos dos rectángulos y que los queremos pegar por uno de sus lados. Notemos que lo que resulta es un rectángulo “más grande”, lo cual significa, desde el punto de vista topológico, que no se ha obtenido nada nuevo.



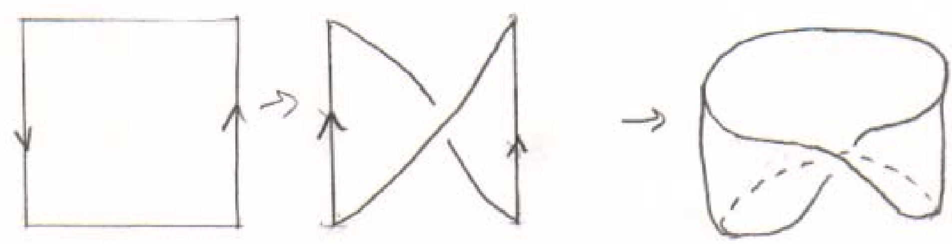
Ahora supongamos que tenemos un rectángulo y que deseamos identificar todos los puntos de un segmento de recta paralelo a sus lados y que cruza todo el rectángulo en uno solo. Notemos que, en este caso, lo que se obtiene es dos triángulos pegados por uno de sus vértices. Observemos que, en esta ocasión, sí se obtiene un objeto distinto al inicial, pues si quitamos el vértice común de los triángulos lo que nos queda tiene "dos piezas", mientras que si quitamos cualquier punto del rectángulo siempre obtendremos algo de "una sola pieza".



Supongamos nuevamente que tenemos un rectángulo, esta vez de "altura" uno, y que queremos pegar el lado izquierdo con el lado derecho. Notemos que hay dos maneras de hacerlo. Una de ellas es identificar los puntos del lado izquierdo con los puntos del lado derecho que están a la misma "altura", obteniendo un cilindro.



La otra manera es girar el lado izquierdo 180 grados y luego pegar los puntos del lado izquierdo con los del lado derecho.



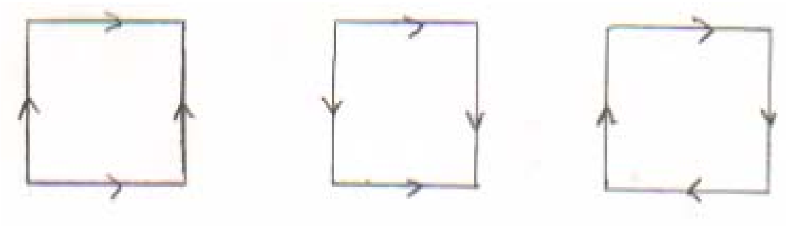
El objeto que resulta de este proceso se llama *banda de Möbius* (Descubierta en 1885 por el matemático alemán A. F. Möbius). Esta banda resulta ser un objeto que tiene solamente una cara. Por más vueltas que le demos a la superficie siempre encontraremos una única cara continua y un solo borde (nótese que el cilindro tiene dos caras y dos bordes). Tiene, además, la siguiente propiedad curiosa: si cortamos la banda a lo largo de una línea trazada sobre ella, por su mitad, y "paralela" a su borde, lo que resulta es un objeto de ¡una sola pieza! Invitamos al lector a que haga dicho experimento y se convenza de lo que se afirma. Esta propiedad ha sido expresada en un pequeño poema:

A mathematician confided
The Möbius band is one–sided,
And you'll get quite a laugh
If you cut one in half.
For it stays in one piece when divided.

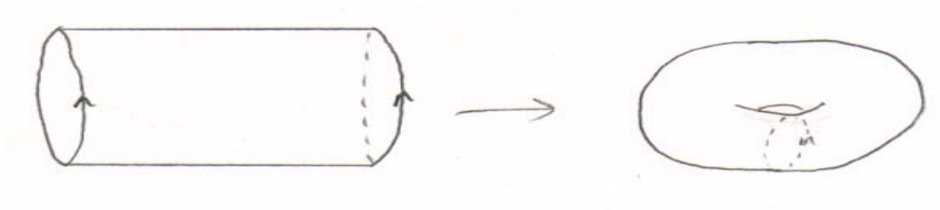
(Un matemático susurró
Que la banda de Möbius tiene una sola cara,
Y que tú reirás mucho
Si la cortas por la mitad.
Pues se queda de una pieza al dividirla)

Ahora supongamos que queremos pegar los cuatro lados de nuestro rectángulo. Tenemos, esencialmente, cuatro maneras distintas de hacerlo. La primera sería identificar los cuatro lados en un solo punto obteniendo, como resultado, una esfera.

Las otras tres maneras consisten en pagar los lados paralelos como se indica, con flechas, en las siguientes figuras:

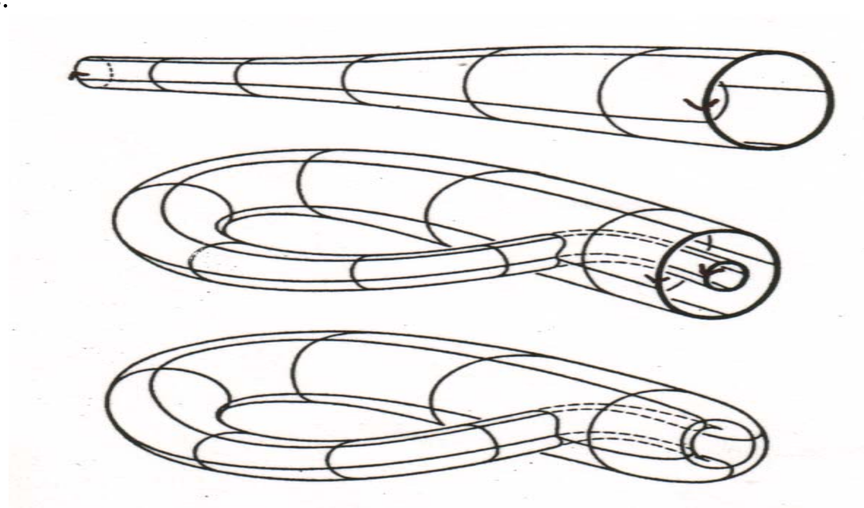


Consideremos primero la figura de la izquierda. Al pegar los lados horizontales obtenemos un cilindro. Luego tenemos que pegar las dos circunferencias en la forma que indican las flechas. Al hacer esto, resulta que hemos construido una “cámara de llanta”. A este objeto se le conoce con el nombre de *toro*.



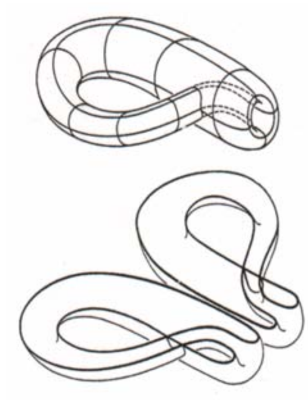
este objeto se le conoce con el nombre de *toro*.

Ahora pensemos en la figura de en medio. El objeto que se obtiene se conoce como la *botella de Klein* (inventada en 1882 por el matemático alemán F. Klein). El primer paso de la construcción es igual que en el caso anterior. Se identifican los lados horizontales para crear un cilindro. Notemos que, ahora, hay un pequeño problema, pues las circunferencias que necesitamos pegar tienen sus flechas en sentidos opuestos. Esto nos impide hacer un pegado “directo” como en el caso del toro. Una forma de “solucionar” este problema y tener una representación en el espacio tridimensional es hacer un pequeño agujero en el cilindro, cerca de una de las circunferencias, y por allí meter el otro extremo del cilindro. De esta manera, la orientación de las flechas sí coincide y podemos pegar ambas circunferencias.



Aquí hemos hecho trampa, ya que cortamos un pedazo de nuestro espacio. Realmente, la botella de Klein “no vive” en el espacio tridimensional que nos rodea, pero “sí vive” en el espacio equivalente de cuatro dimensiones (esto es, en tal espacio podemos hacer el pegado de las circunferencias sin necesidad de cortar ningún pedazo de la botella).

Un hecho curioso es que la botella de Klein se puede obtener pegando dos bandas de Möbius por sus bordes. Para convencerse de esto, basta hacer un corte transversal a labotella.



Este hecho ha sido expresado en un pequeño poema:

A mathematician named Klein
Thought the Möbius band was devine
Said he, "If you glue
The edges of two,
You'll get a weird bottle like mine".

(Un matemático llamado Klein
Pensó que la banda de Möbius era divina
Dijo él: "Si tu pegas
Los bordes de dos,
Obtendrías una extraña botella como la mía.)

La descripción del pegado de la figura de la derecha es más complicada. Lo que resulta es lo que se conoce como el *plano proyectivo*.

Tanto la banda de Möbius como la botella de Klein y el plano proyectivo son ejemplos de "superficies no orientables", la primera con borde y las otras dos sin él. El lector interesado en saber un poco más sobre superficies puede consultar [1] y [2].

Bibliografía

[1] A. Illanes, *La Caprichosa Forma de Globi´on*, La Ciencia para Todos, 168, SEP–CONACyT–FCE, 1999.

[2] E. Micha, *Introducción a la Topología, Clasificación de Superficies*, 3er Coloquio del Departamento de Matemáticas del Centro de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, la Trinidad, Tlaxcala, Agosto de 1983.

[3] A. W. Tucker y H. S. Bailey, Jr., Topología, en *Matemáticas en el Mundo Moderno, Selecciones de Scientific American* Editorial Blume, Madrid y Barcelona, 1974, págs. 151–158.

[4] J. R. Weeks, *The Shape of Space*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 96, Marcel Dekker, New York y Basel, 1985.