Aportaciones Matemáticas
Serie Comunicaciones **27** (2000) 211–223

Hiperespacios y productos simétricos de continuos

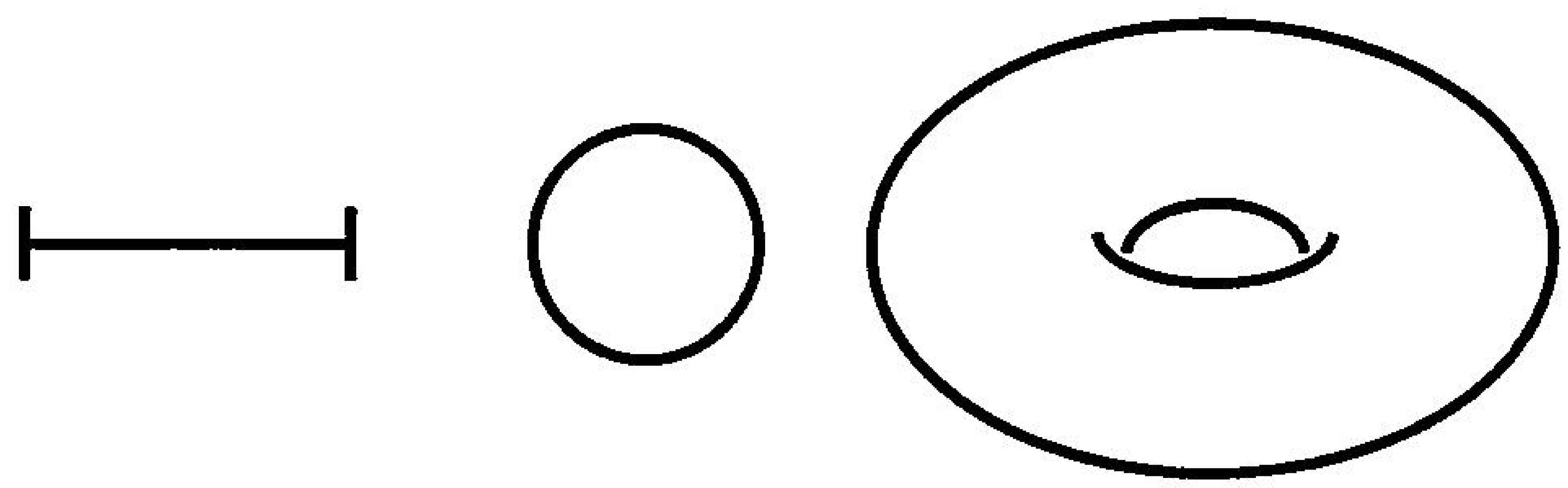
Sergio Macías *
Instituto de Matemáticas, U. N. A. M.
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
04510 México D. F.
MEXICO

e-mail: macias@servidor.unam.mx

Resumen. El objetivo del presente trabajo es el presentar *modelos geométricos* de los hiperespacios de subcontinuos y productos simétricos de ciertos continuos, así como algunas de las propiedades principales de estos últimos.

1 Definición. Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un **subcontinuo** es un continuo contenido en algún espacio.

2 Ejemplo. Como ejemplos de continuos tenemos al intervalo $[0,1]$, la circunferencia unitaria $\mathcal{S}^1$, el toro $\mathcal{T} = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$, etc.



El lector interesado en la Teoría de los Continuos puede consultar [12].

3 Definición. Diremos que un continuo X es **unicoherente** si cada vez que pongamos a $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos de X, se tiene que $A \cap B$ es conexa.

2000 Mathematics Subject Classification: 54B20
Keywords and phrases: continuo, hiperespacio, producto simétrico, unicoherente.
* El autor agradece al Dr. Raúl Escobedo Conde el haberlo invitado a participar en la Sesión de Topología de este Congreso.

4 Definición. Dado un continuo X, definimos sus **hiperespacios** como los siguientes conjuntos:

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es cerrado y no vacío}\}, \tag{1}$$

$$\mathcal{C}(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es conexo}\}, \tag{2}$$

$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, \tag{3}$$

$$\mathcal{F}(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es finito}\}. \tag{4}$$

Los hiperespacios $\mathcal{F}_n(X)$ fueron definidos por Borsuk y Ulam en 1931 [1]. A $\mathcal{F}_n(X)$ se le llama el **n–ésimo producto simétrico de X.**

5 Observación. Notemos que si X es un continuo entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{F}_n(X) \subset \mathcal{F}_{n+1}(X)$$

y que

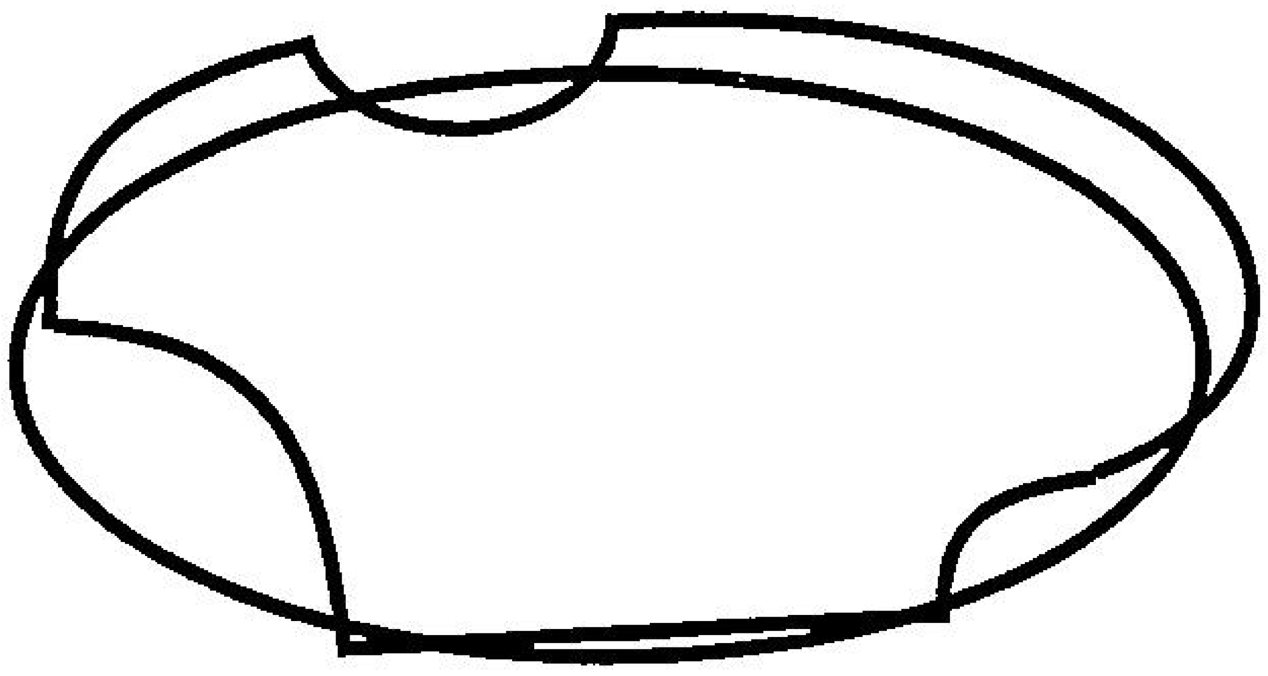
$$\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(X).$$

6 Teorema. [11, 6] *Si X es un continuo entonces 2^X es un espacio métrico con la* **métrica de Hausdorff**, *$\mathcal{H}$, definida de la siguiente manera:*

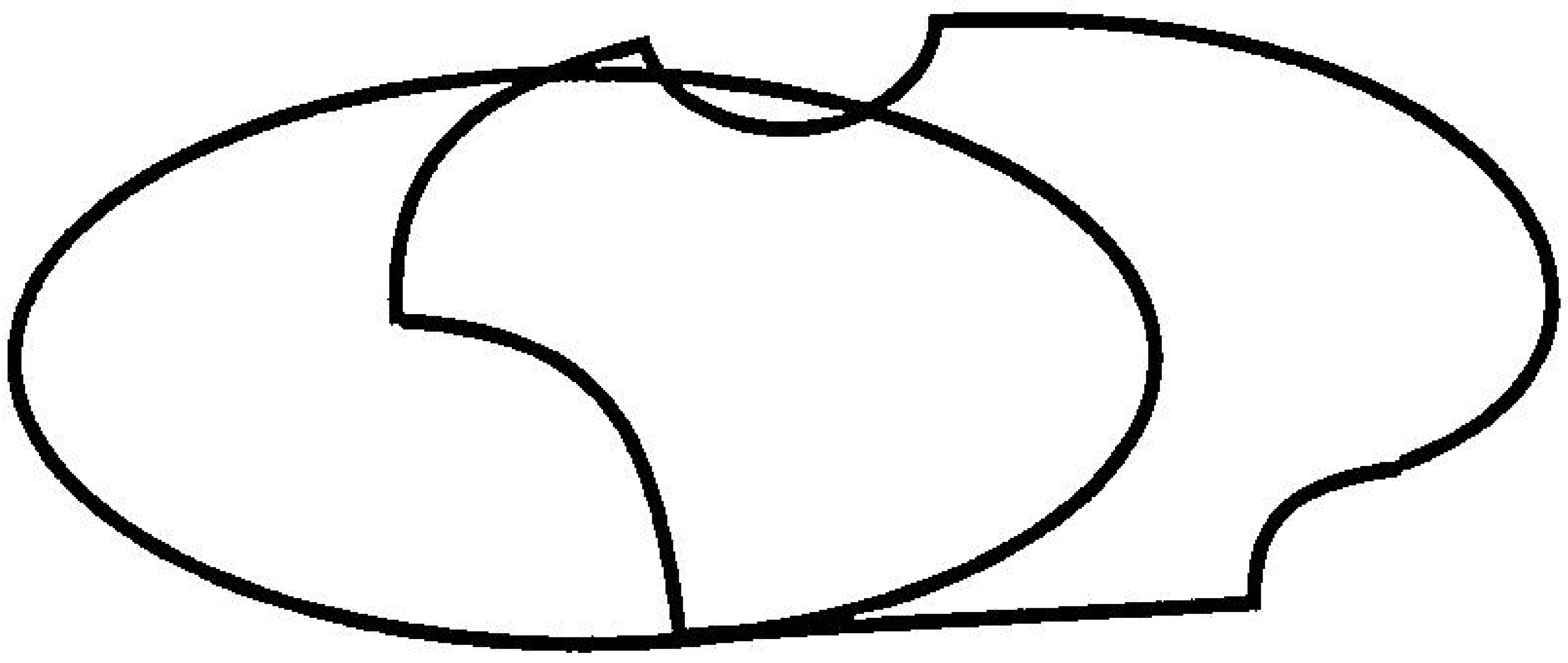
$$\mathcal{H}(A,B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 \mid A \subset \mathcal{V}_\varepsilon(B) \text{ and } B \subset \mathcal{V}_\varepsilon(A)\},$$

donde $\mathcal{V}_\varepsilon(A)$ la bola de radio ε alrededor de A.

Intuitivamente, dos elementos de 2^X están cerca con respecto a la métrica de Hausdorff si *se parecen mucho* y uno está encima del otro. Por otra parte, aunque dos elementos de 2^X se intersecten, pueden estar lejos en la métrica que estamos considerando. En las siguientes figuras se ilustra esto.



cerca



lejos

7 Definición. Se dice que un espacio Z es **arcoconexo** si para cualesquiera dos puntos distintos, z_0 y z_1, de Z entonces existe una función continua e inyectiva $\alpha\colon [0,1] \to Z$ tal que $\alpha(0) = z_0$ y $\alpha(1) = z_1$.

8 Teorema. [11, 6] *Si X es un continuo entonces tanto 2^X como $\mathcal{C}(X)$ son continuos arcoconexos.*

El lector interesado en ahondar en la Teoría de los Hiperespacios de un Continuo puede consultar [11, 6].

9 Definición. Si X es un continuo cuya métrica es d y $n \in \mathbb{N}$ entonces definimos

$$X^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in X\}$$

y lo damos la siguiente métrica:

$$d_n\left((x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)\right) = \text{máx}\{d(x_j, x'_j) \mid j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

10 Observación. Es bien conocido el hecho de que si X es un continuo entonces X^n también lo es.

11 Lema. [1] *Sea X un continuo. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces la función $f\colon X^n \to \mathcal{F}_n(X)$ definida como*

$$f((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\}$$

es continua y suprayectiva. Así, cada $\mathcal{F}_n(X)$ es un continuo.

12 Observación. Observemos que $\mathcal{F}_1(X)$ es una copia isométrica de X.

13 Observación. Como $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(X)$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(X) = \mathcal{F}_1(X)$, tenemos que $\mathcal{F}(X)$ es un espacio conexo, el cual es denso en 2^X.

Veamos algunos ejemplos.

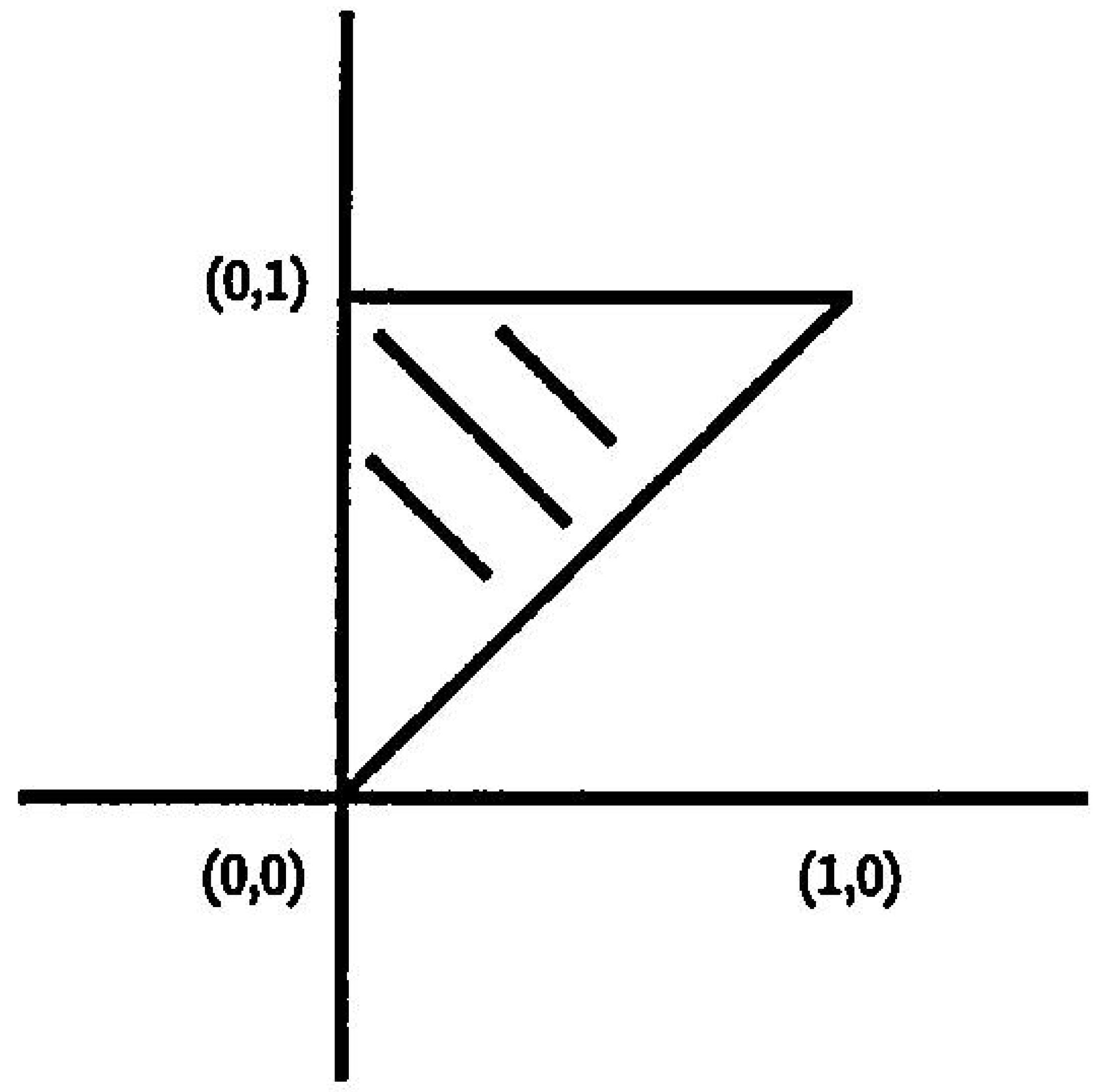
14 Ejemplo. Sea X el intervalo unitario $[0,1]$.

$$\mathcal{C}([0,1]) = \{[a,b] \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Consideremos el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

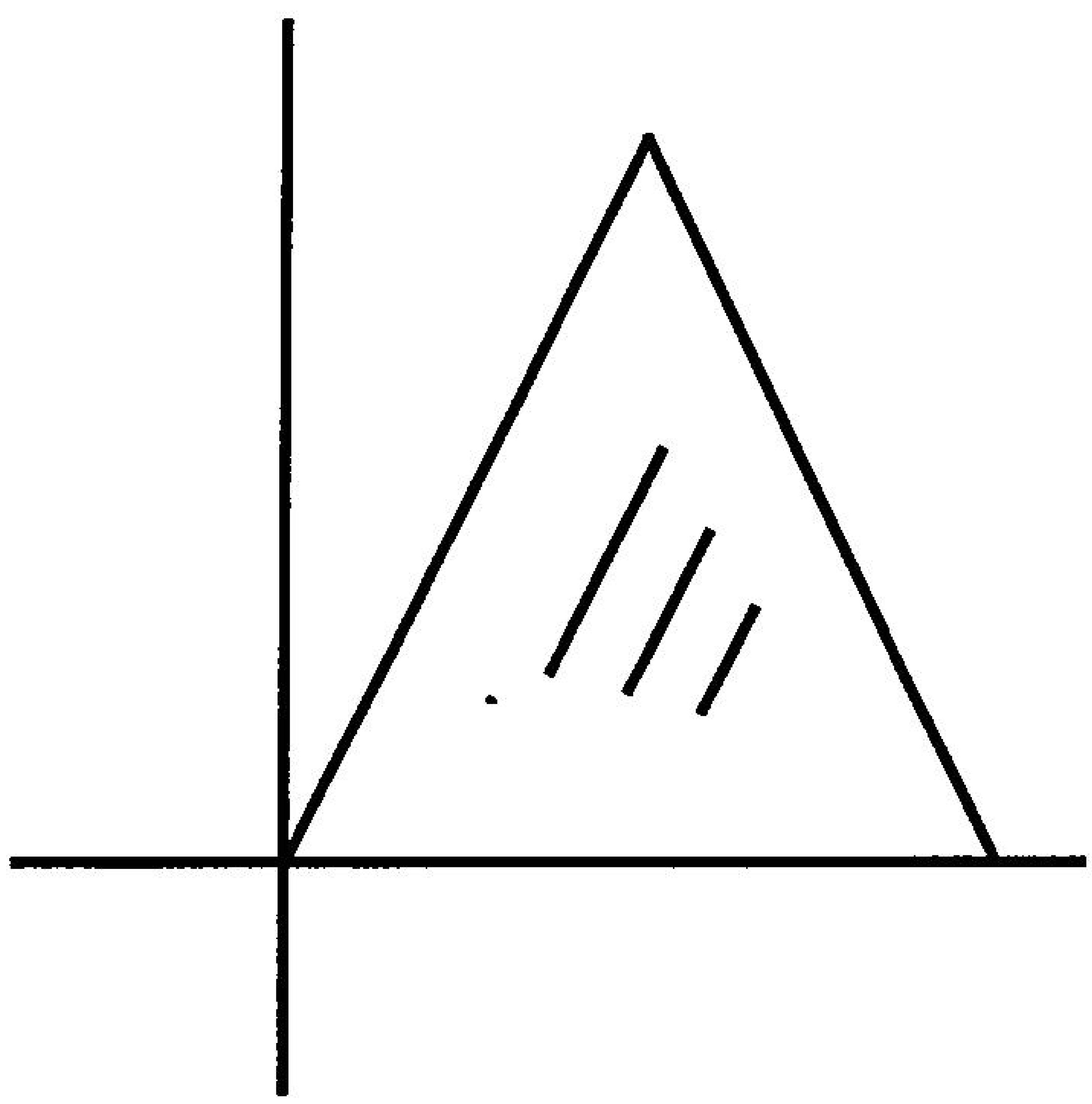
$$\mathcal{E} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Entonces, no es difícil mostrar que la función $h\colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{E}$ definida como $h([a,b]) = (a,b)$ es un homeomorfismo. De esta manera se tiene que $\mathcal{C}([0,1])$ es homeomorfo al triángulo representado en la siguiente figura:



Nótese que los subcontinuos de $[0,1]$ que contienen a 0 están representados por el segmento vertical, los que contienen a 1 están representados por el segmento horizontal y que los conjuntos de un sólo punto forman la hipotenusa del triángulo.

Existe otra manera de encajar a $\mathcal{C}([0,1])$ en $\mathbb{R}^2$. Para esto, consideremos la función $g\colon \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}^2$ definida como $g([a,b]) = \left(\frac{a+b}{2}, b-a\right)$, g está bien definida, pues un intervalo queda determinado por su punto medio y su longitud, y es un encaje. Sea $\mathcal{D} = g(\mathcal{C}(X))$, es fácil ver que $\mathcal{D}$ es el triángulo que se muestra a continuación.



Por otra parte, obsérvese que los subconjuntos de $[0,1]$ que tienen a lo más dos puntos están determinados por el punto medio del arco que los tiene por puntos extremos y la distancia entre ellos, por tanto, notemos que existe un homeomorfismo, $f\colon \mathcal{F}_2([0,1]) \to \mathcal{D}$, definido como $f(\{a,b\}) = \left(\frac{a+b}{2}, |b-a|\right)$.

De lo anterior resulta que $\mathcal{C}([0,1])$ es homeomorfo a $\mathcal{F}_2([0,1])$, por lo que surge la siguiente:

15 Pregunta. ¿Existe un continuo X, el cual no es homeomorfo a $[0,1]$, tal que $\mathcal{F}_2(X)$ sea homeomorfo a $\mathcal{C}(X)$?

El siguiente resultado da una respuesta negativa, en el caso en que el continuo sea de dimensión finita, a la pregunta anterior.

16 Teorema. [8] *Sea X un continuo de dimensión finita tal que $C(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{F}_2(X)$ entonces X es homeomorfo a* $[0, 1]$.

Se sabe que si $\mathcal{Q}$ denota al cubo de Hilbert entonces $\mathcal{F}_n(\mathcal{Q})$ es homeomorfo a $\mathcal{Q}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ [7].

Otra pregunta que surge de manera natural es la siguiente:

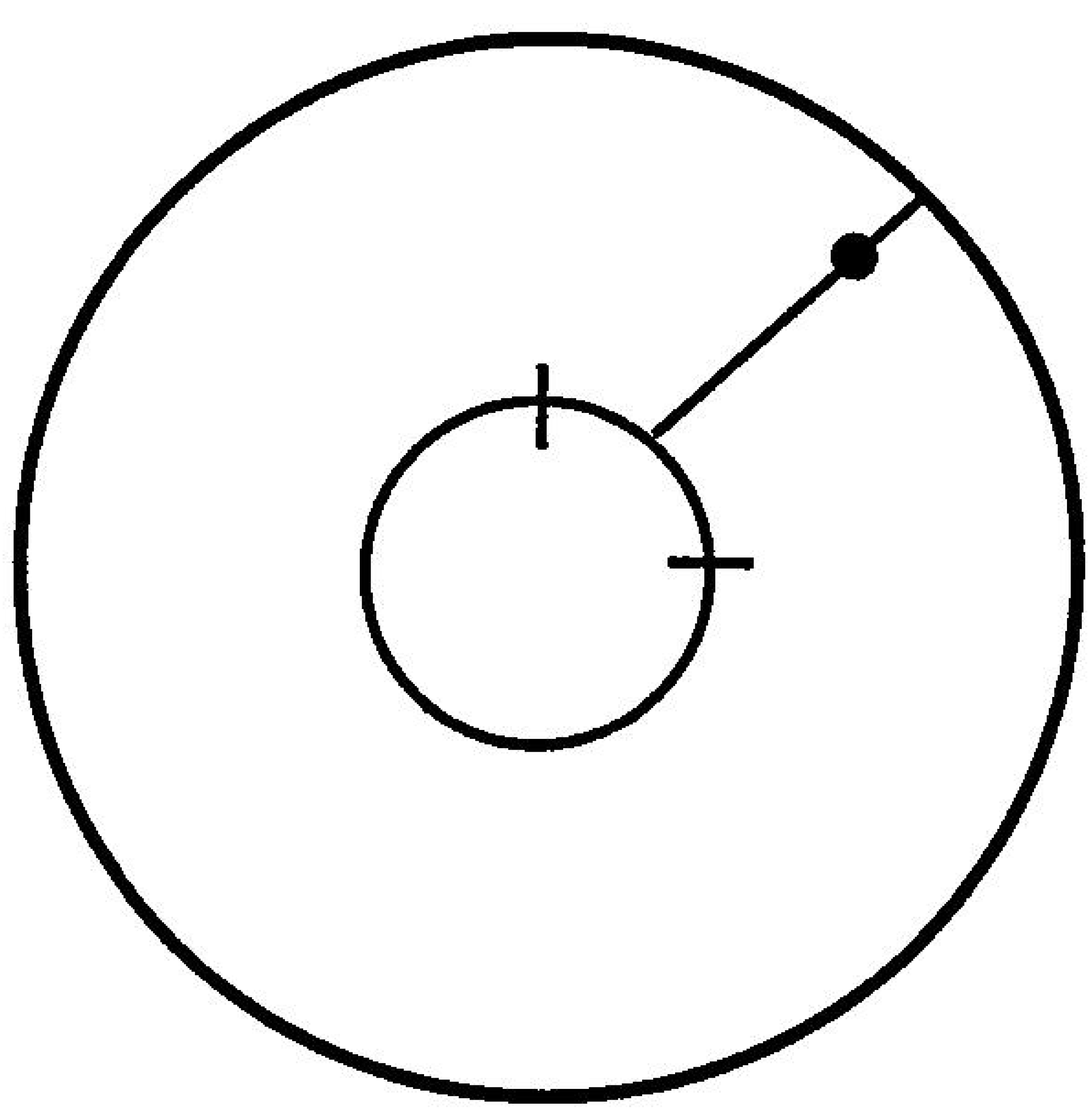
17 Pregunta. ¿Existe un continuo X y un número natural $n \geq 3$ tal que $C(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{F}_n(X)$?

Esta interrogante también tiene una respuesta negativa, en el caso en que el continuo sea de dimensión finita, como lo muestra el siguiente resultado.

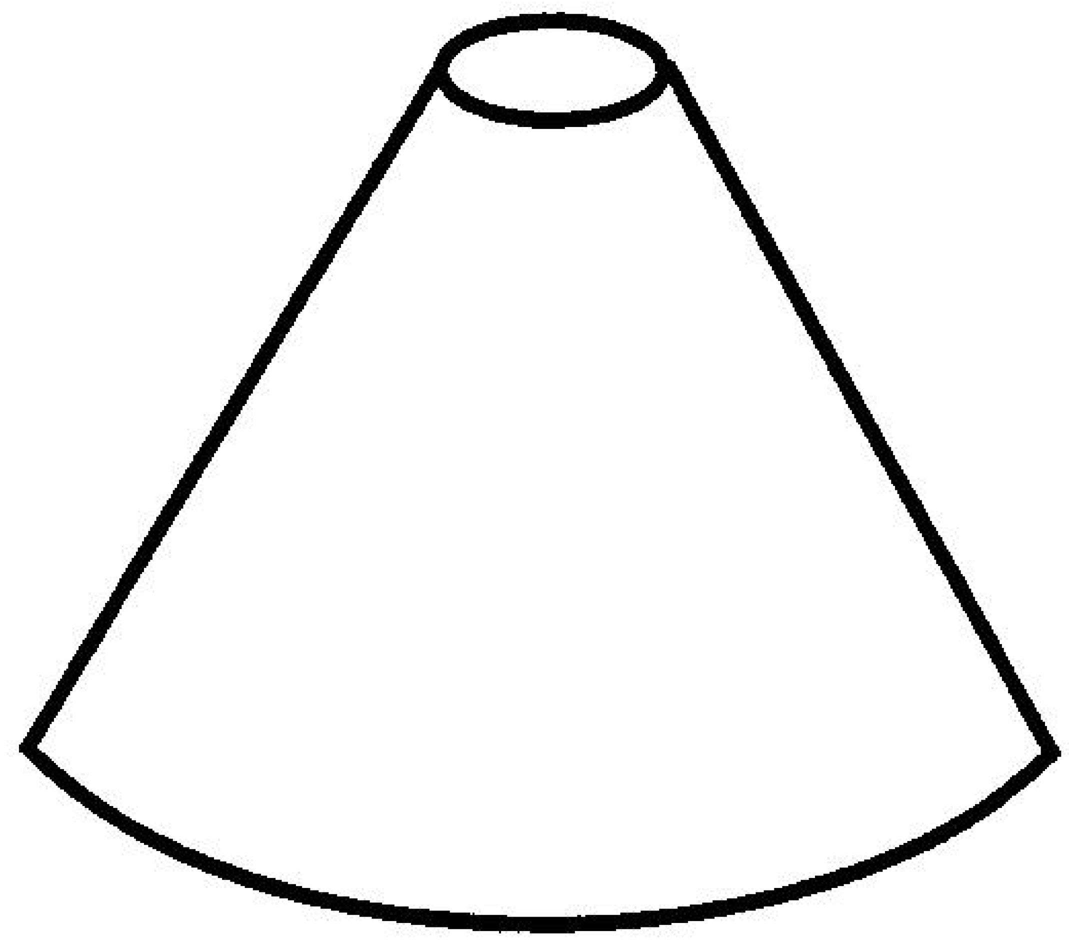
18 Teorema. [8] *Sea X un continuo de dimensión finita. Si $n \geq 3$ entonces $C(X)$ no es homeomorfo a $\mathcal{F}_n(X)$.*

19 Ejemplo. Sea X la circunferencia unitaria, $\mathcal{S}^1$, en el plano $\mathbb{R}^2$.

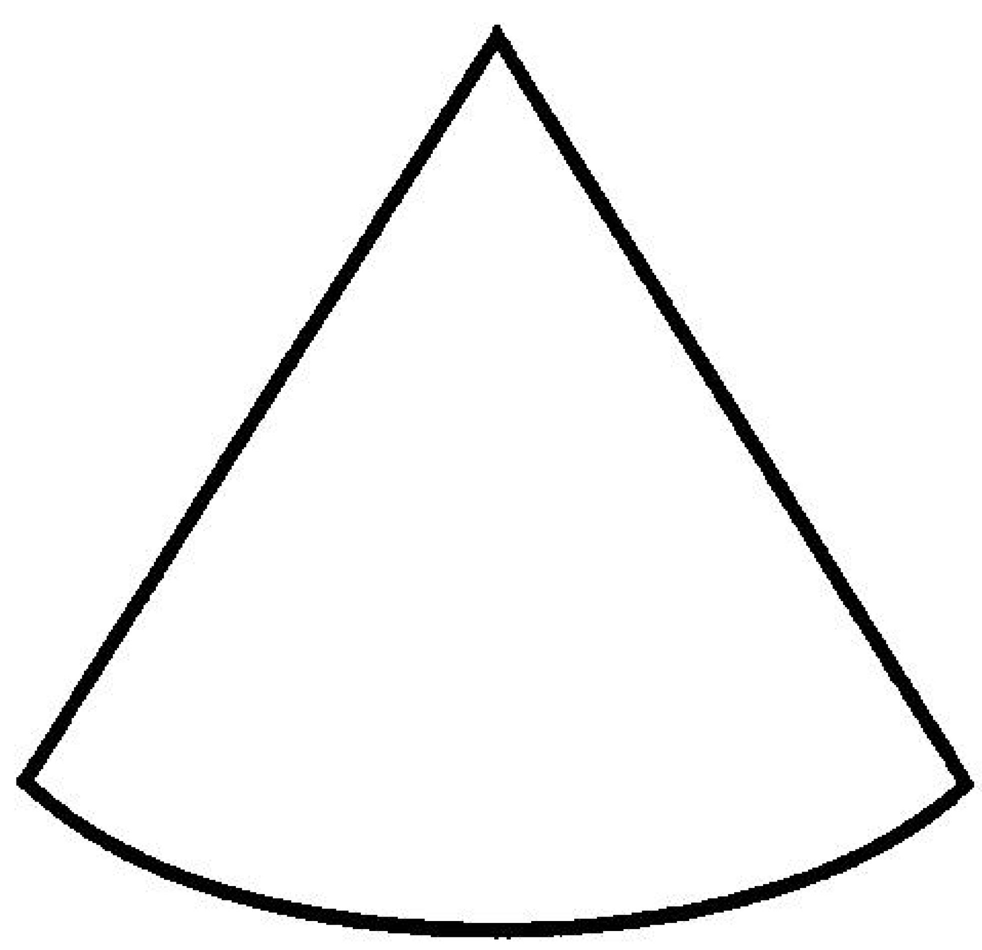
Para identificar al hiperespacio de subcontinuos de $\mathcal{S}^1$ notemos que cualquier subcontinuo propio de $\mathcal{S}^1$ está completamente determidado por su *punto medio* y su longitud. Sea Y un subcontinuo propio de $\mathcal{S}^1$. Consideremos la recta determinada por el centro, O, de $\mathcal{S}^1$ y el punto medio, p, de Y. Sobre esta recta, encontremos el punto, más cercano a p, que dista de O 1+longitud de Y. En particular, si Y consiste de un sólo punto entonces a Y se le asocia el mismo punto.



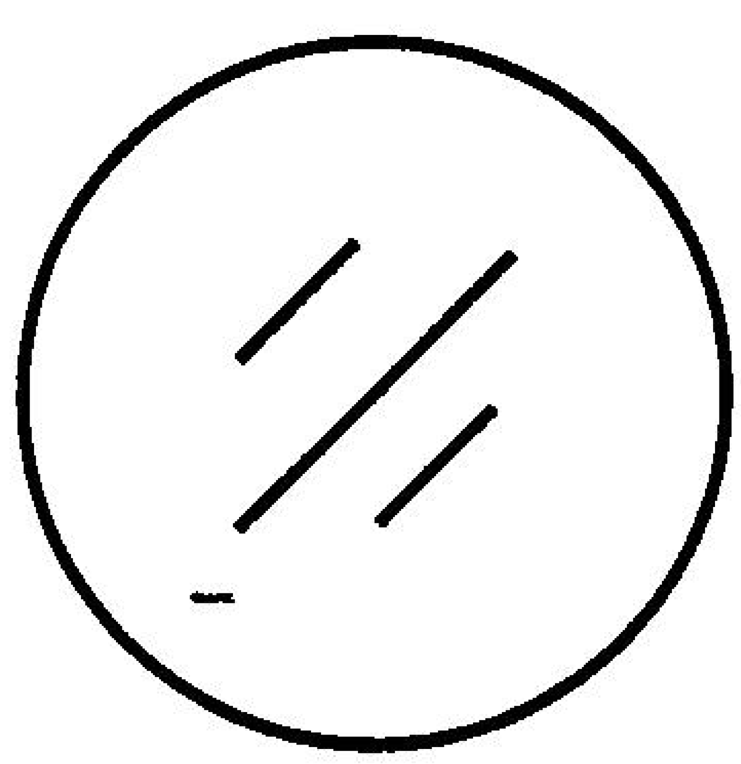
Observemos que esta asociación define una función biyectiva del hiperespacio de subcontinuos propios de $\mathcal{S}^1$ en el anillo *semiabierto* determinado por $\mathcal{S}^1$ y la circunferencia de radio $1 + 2\pi$ con centro en el origen. También notemos que si intentamos definir esta función en $\mathcal{S}^1$ llegamos a la conclusión de que le tenemos que asociar todos los puntos de la circunferencia de radio $1 + 2\pi$ y centro en O. Por tanto, si identificamos todos estos puntos entonces obtendremos que ahora sí podemos construir una función, h, bien definida y se puede probar que h es un homeomorfimos entre $\mathcal{C}(\mathcal{S}^1)$ y el disco unitario en $\mathbb{R}^2$.



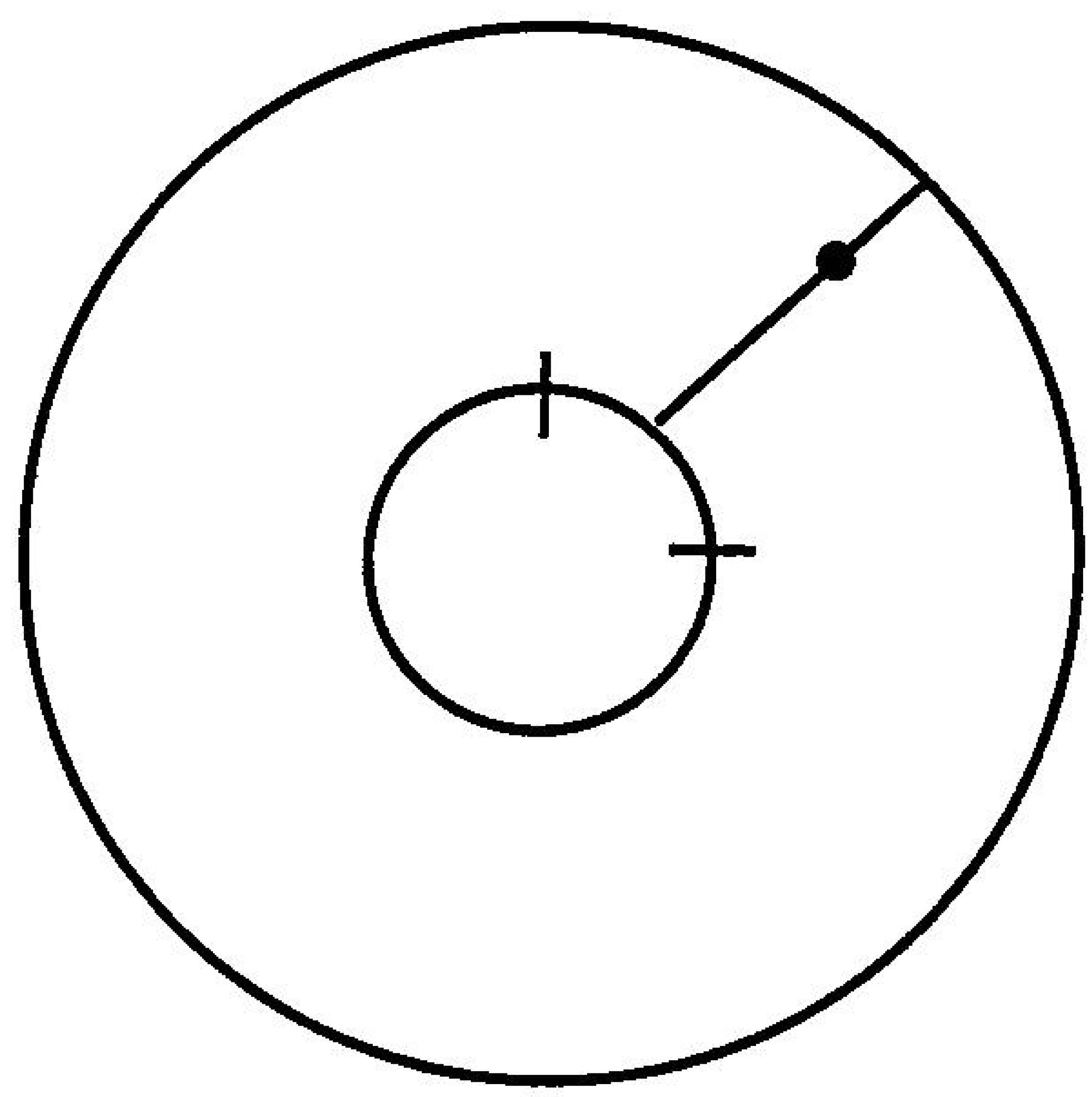
Identificando la circunferencia de radio $1 + 2\pi$ con centro en O, en un sólo punto se obtiene el cono sobre $\mathcal{S}^1$.



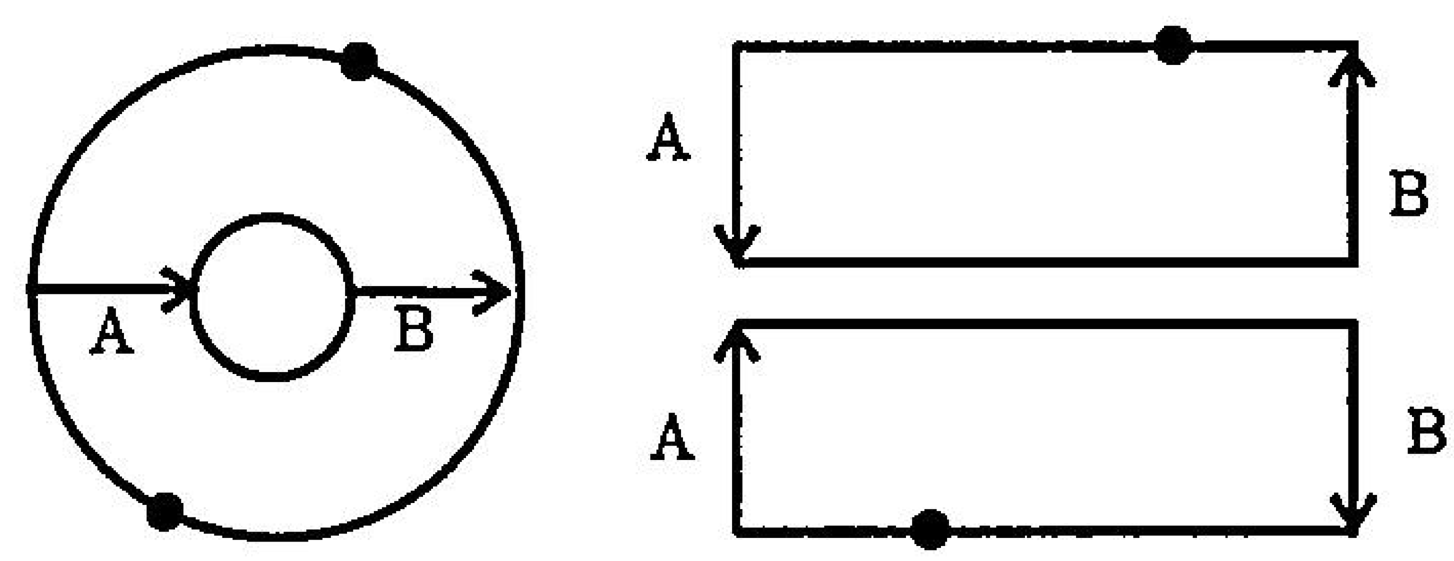
Es bien conocido que si proyectamos el cono sobre $\mathcal{S}^1$ en el plano se obtiene el disco unitario.



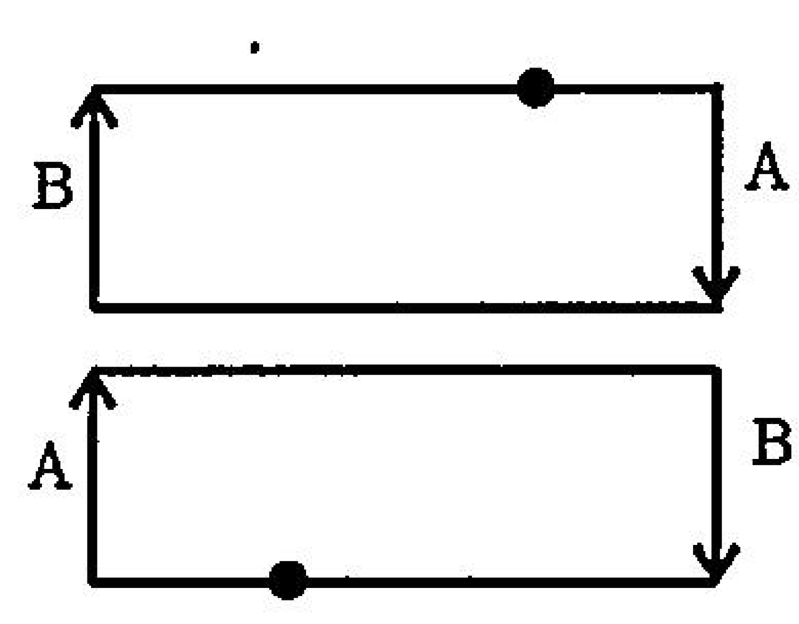
Para identificar al segundo producto simétrico de $\mathcal{S}^1$ si Z es un subconjunto de $\mathcal{S}^1$ que consiste de a lo más dos puntos, los cuales no son antípodos entonces Z queda totalmente determinado por el punto medio, q, y la longitud del segmento de circunferencia que determina. Como en el caso del hiperespacio de subcontinuos de $\mathcal{S}^1$, consideramos la recta que une al centro, O, de $\mathcal{S}^1$ con q y, sobre esta recta, encontremos el punto, más cercano a q, que dista de O 1+longitud del segmento de circunferencia determinado por Z. En particular, si Z consiste de un sólo punto entonces a Z se le asocia el mismo punto. De esta manera le podemos asociar a cada elemento de $\mathcal{F}_2(\mathcal{S}^1)$, que no consiste de dos puntos antípodos, un punto del anillo *semiabierto* determinado por las circunferencias $\mathcal{S}^1$ y de radio $1 + 2\pi$ y centro en O. Ahora bien, si $W \in \mathcal{F}_2(\mathcal{S}^1)$ y consta de un par de puntos antípodos, por ejemplo $W = \{(0,1),(0,-1)\}$ entonces hay *dos maneras* de aproximarse a W, a saber, por la *izquierda* y por la *derecha*. Por tanto, necesitamos identificar los puntos antípodos de la circunferencia de radio $1+2\pi$ y centro en O.



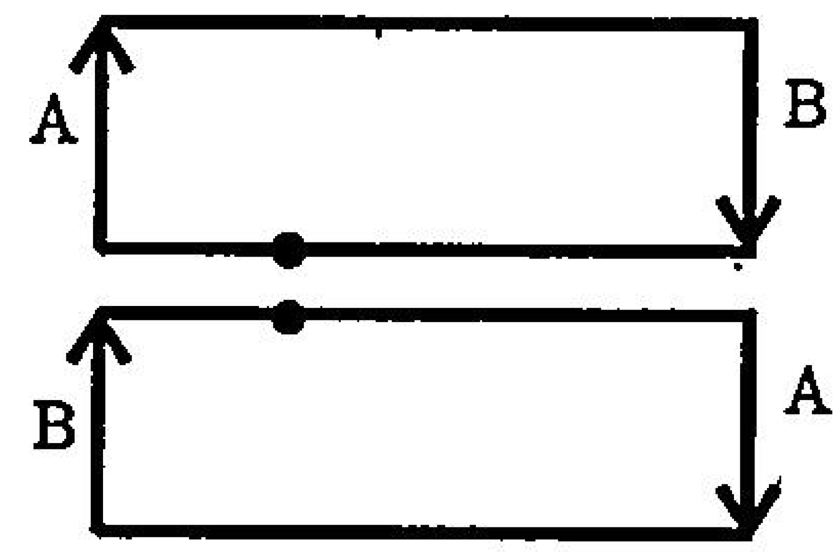
Para saber qué espacio hemos construido, hagamos un corte *horizontal* en el anillo, de tal forma que se obtengan dos mitades del *mismo tamaño*. Separemos las dos partes, como se muestra en la figura.



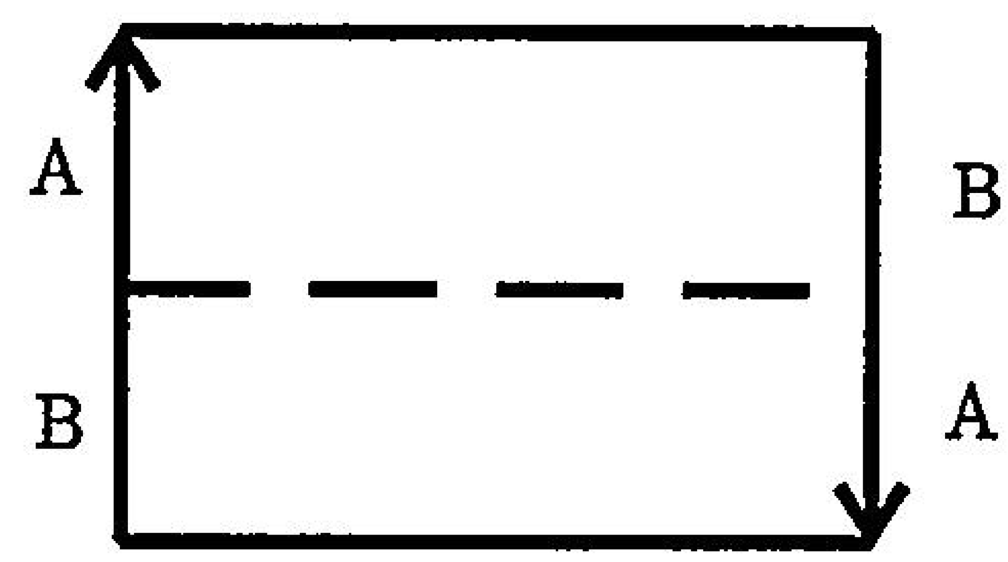
Modifiquemos la *mitad superior* de tal forma que la dirección de las flechas A y B coincidan.



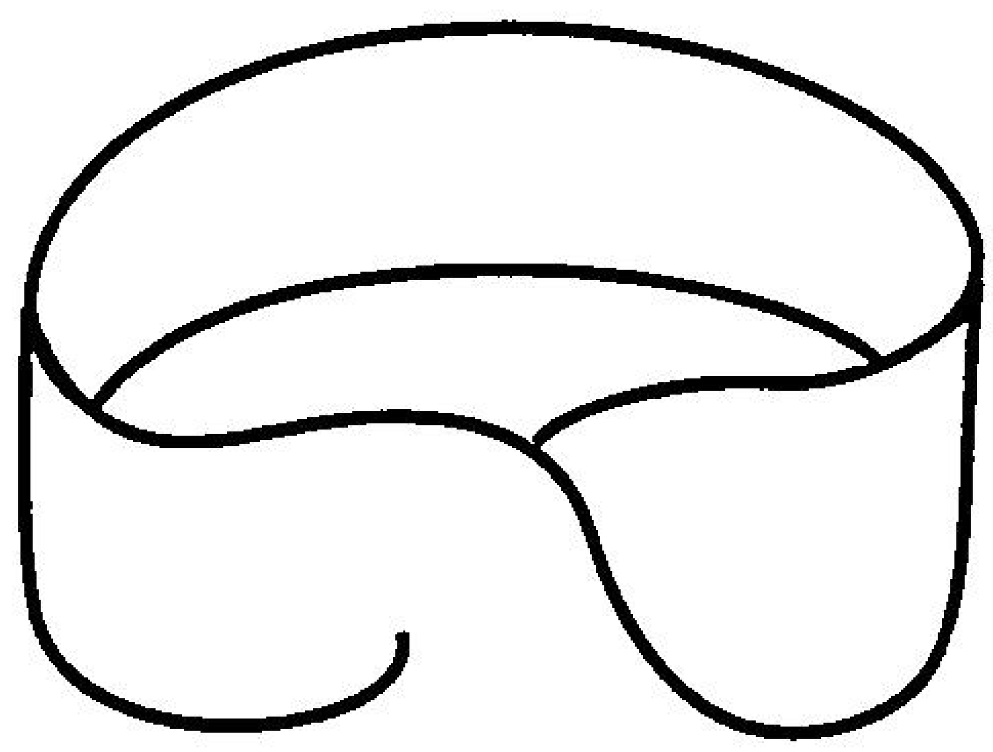
Lo que necesitamos hacer es identificar el lado superior del rectángulo de arriba con el lado inferior del rectángulo de abajo.



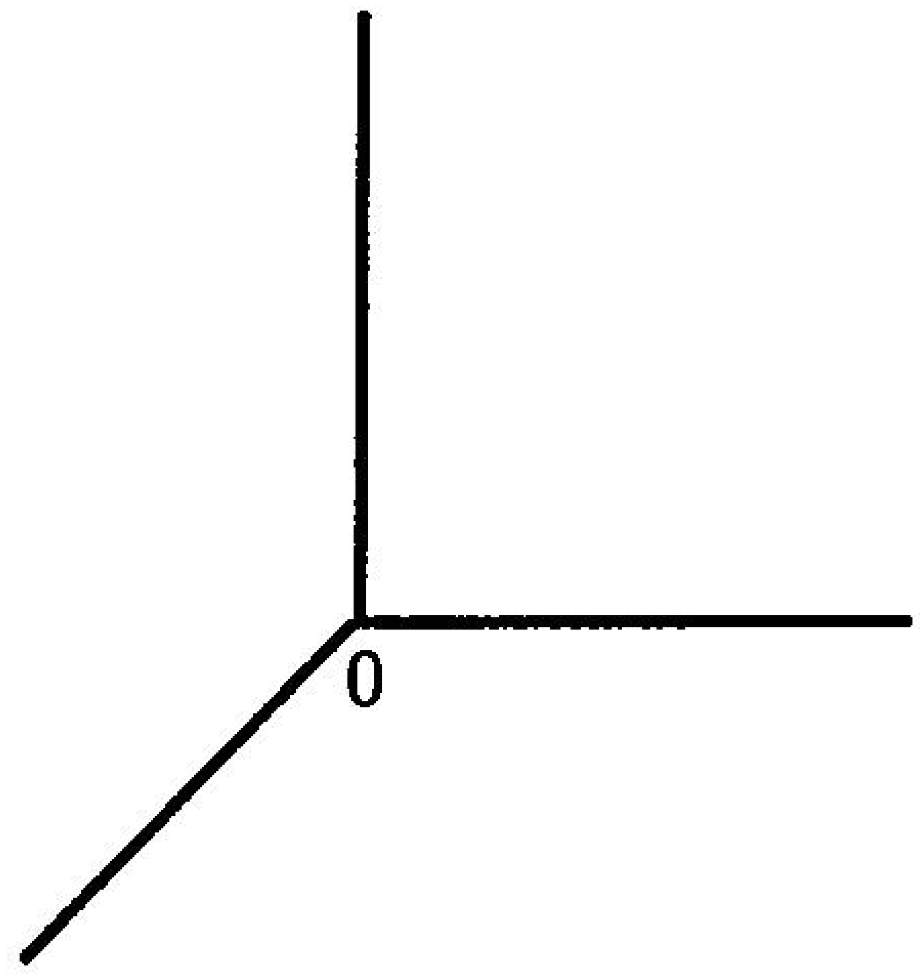
Una vez hecho lo anterior, obtenemos un rectángulo en el que hay que identificar sus lados laterales de la manera que indican las flechas A y B, ahora identificadas en un sólo segmento.



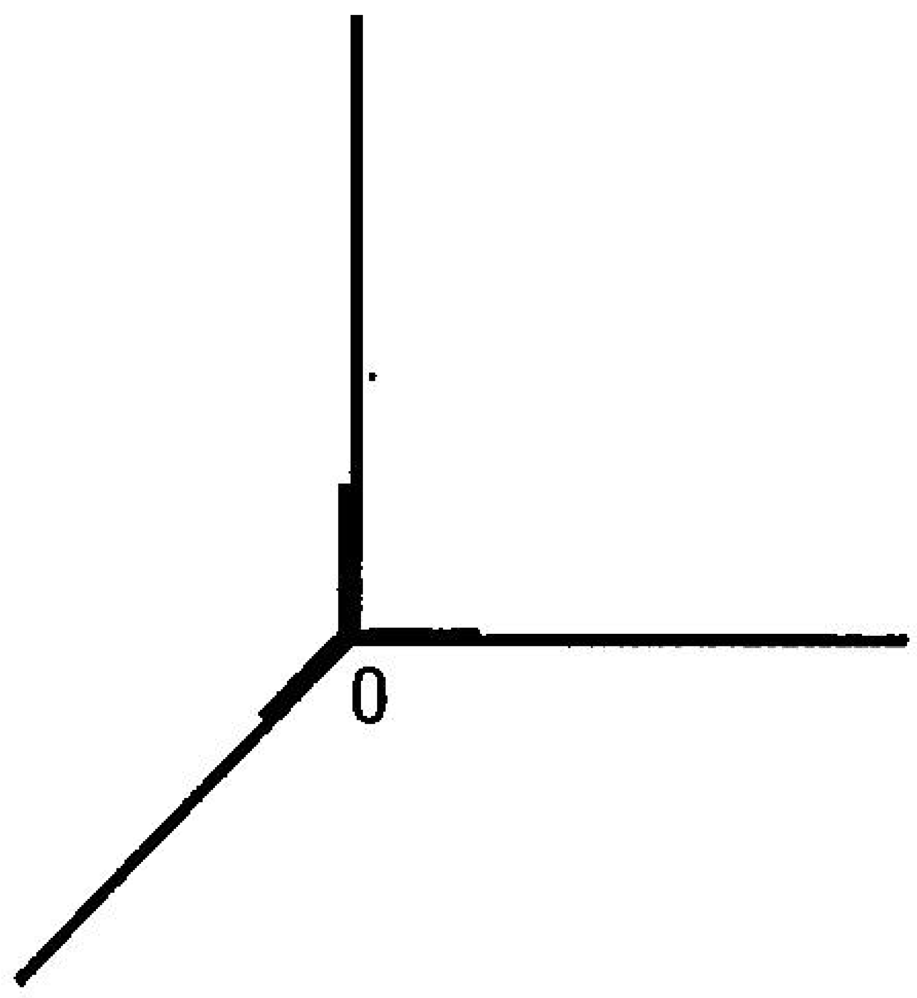
De esta manera, llegamos a la conclusión de que $\mathcal{F}_2(\mathcal{S}^1)$ es la banda de Möbius.



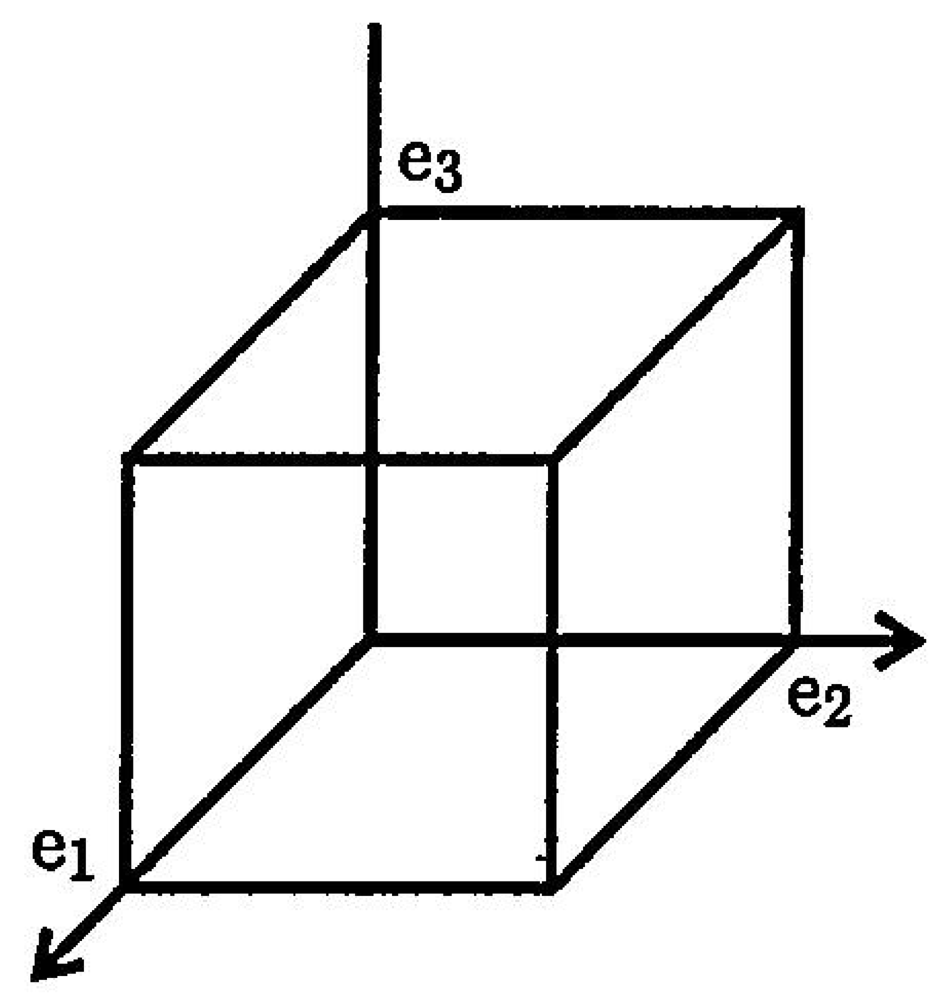
20 Ejemplo. Sea X la colección de los puntos en $\mathbb{R}^3$ contenidos en los ejes coordenados cuya distancia al origen es menor que o igual a uno, a este espacio se le conoce como **un triodo simple.**



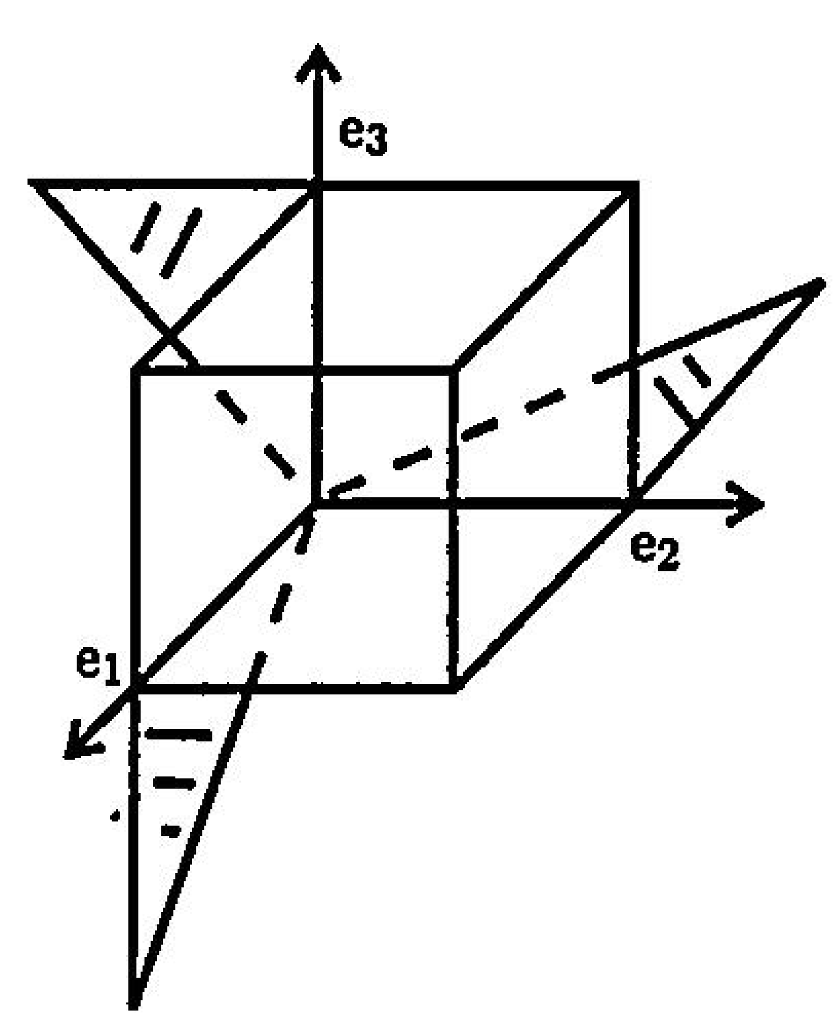
Para obtener un modelo del hiperespacio de subcontinuos del triodo simple X, observemos que hay *dos tipos* de subcontinuos de X, los que contienen al origen O y los que no lo contienen. Un elemento del primer tipo consta de tres *patas*, aunque pueden ser degeneradas, por lo que queda completamente determinado por la longitud de cada una de sus patas.



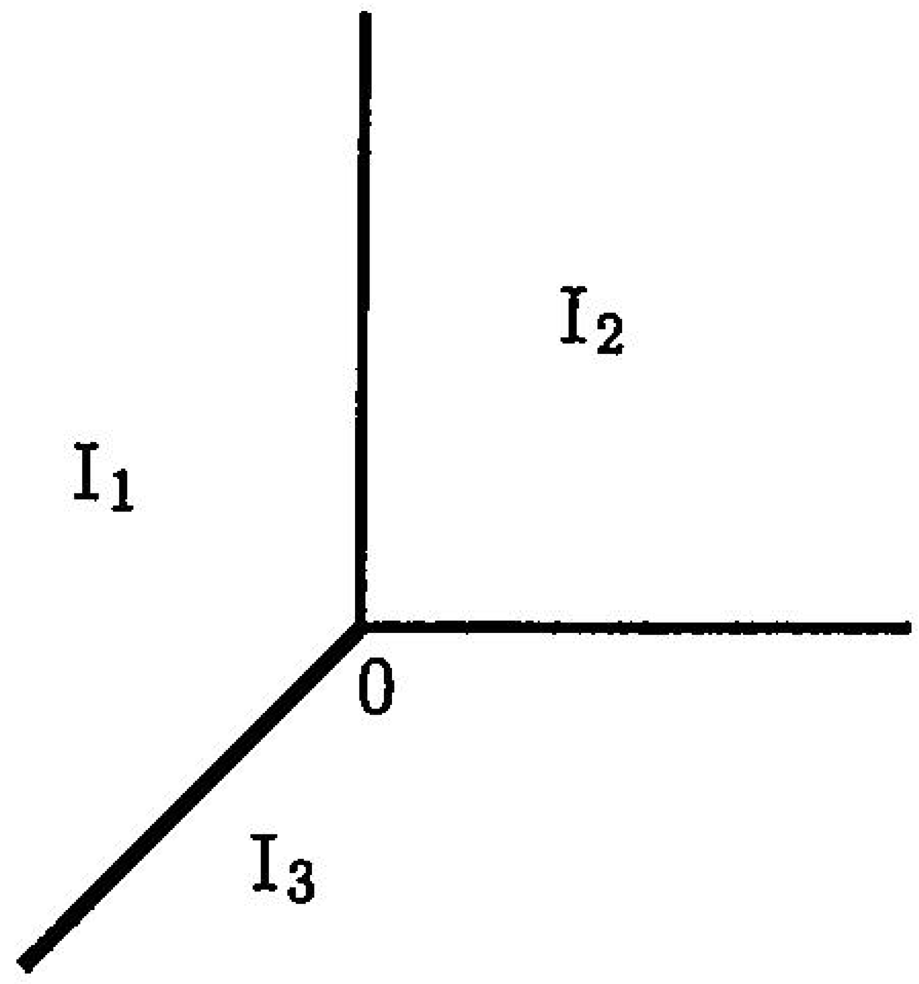
Como hay *tres grados de libertad*, se tiene que el subconjunto de $\mathcal{C}(X)$ que consiste en la familia de subcontinuos que contienen a O puede ser identificada con el cubo unitario.



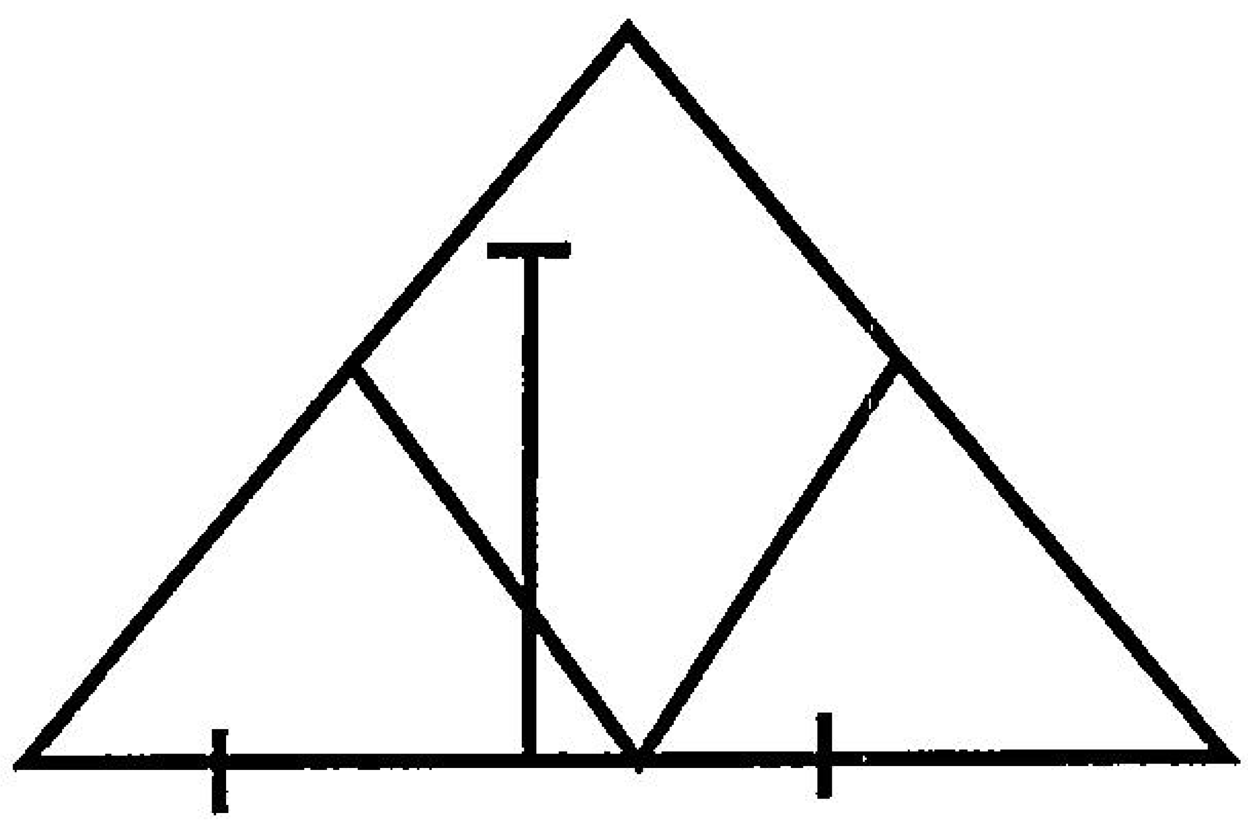
Por otra parte, los subcontinuos de X que no contienen a O están totalmente contenidos en alguna de las *patas* de X, esto es, son parte del hiperespacio de un arco que, como ya sabemos, consiste de un triángulo. La parte común con los subcontinuos del primer tipo consiste en los subcontinuos de X que contienen a O y están totalmente contenidos en una de las patas, éstos corresponden a los lados del triángulo. Por tanto, pegando los tres triángulos obtenemos que $\mathcal{C}(X)$ es homeomorfo a un *cubo con alas.*



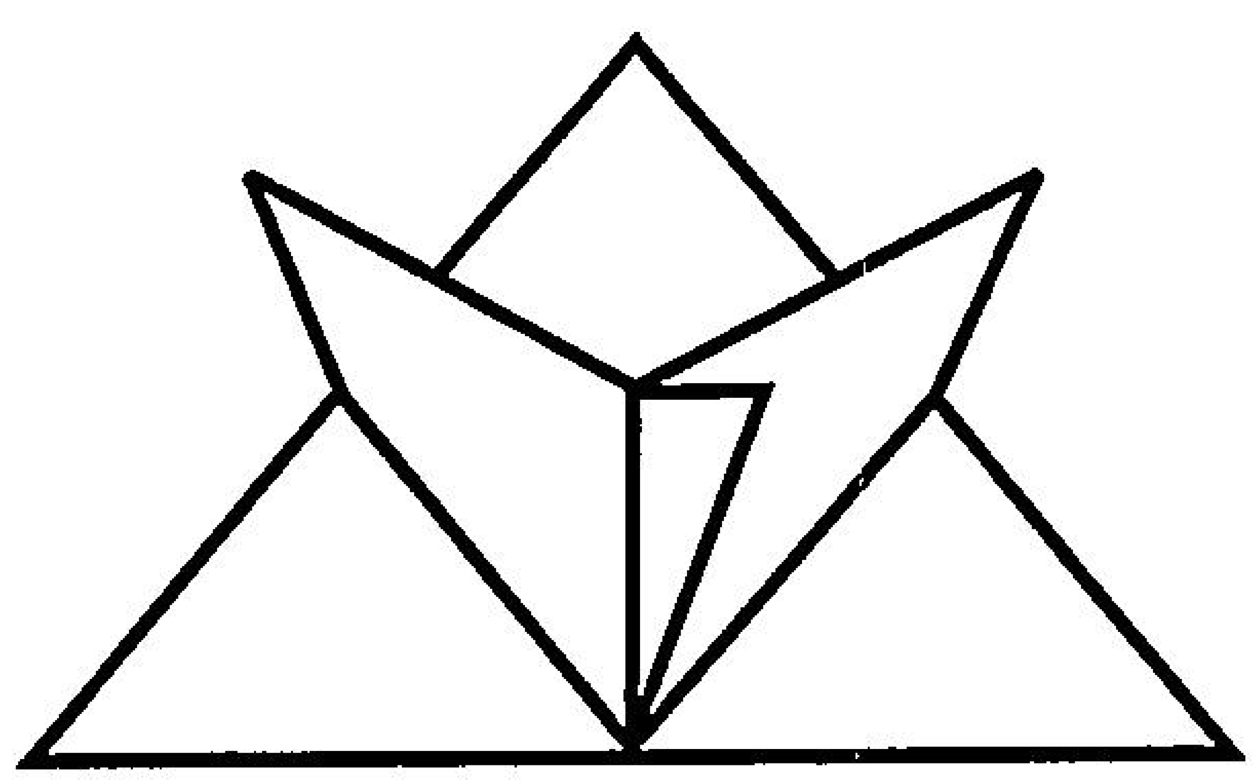
Ahora obtendremos un modelo para $\mathcal{F}_2(X)$. Para este fin, llamaremos I_1 a la unión de las patas de X contenidas en los ejes x y z, I_2 a la unión de las patas contenidas en los ejes y y z e I_3 a la unión de las patas contenidas en los ejes x y y



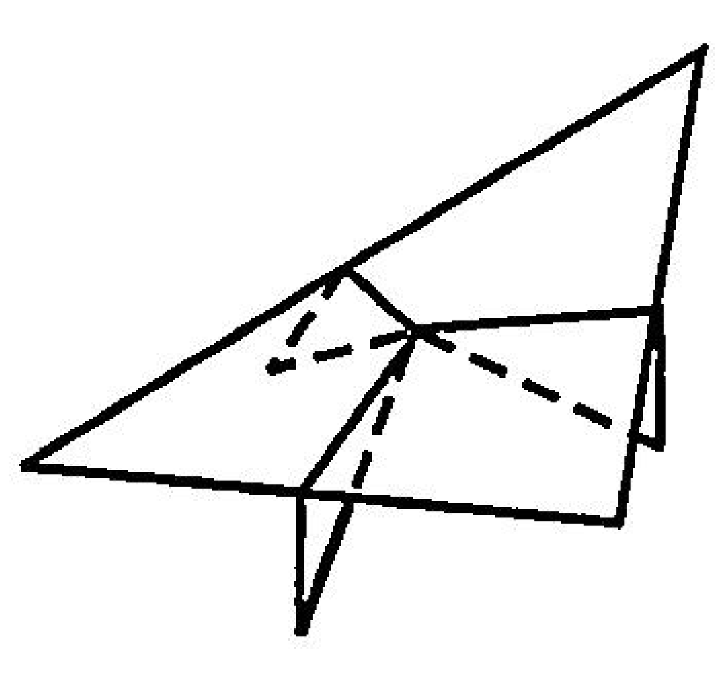
Por lo visto antes $\mathcal{F}_2(I_3)$ consiste de un triángulo, el cual contiene a dos triángulos que representan los segundos productos simétricos de las patas contenidas en los ejes x y y. La parte de $\mathcal{F}_2(I_3)$ que no está contenida en estos triángulos corresponden a puntos de $\mathcal{F}_2(I_3)$ que constan de dos elementos, uno de ellos en la pata contenida en el eje x y el otro en la pata contenida en el eje y.



Agregando la pata contenida en el eje z y haciendo un análisis similar, obtenemos que $\mathcal{F}_2(X)$ es homeomorfo a:



Si *desdoblamos* este espacio entonces obtenemos que $\mathcal{F}_2(X)$ es homeomorfo a un *triángulo con alas.*



Algunas propiedades generales que se saben de los productos simétricos están contenidas en los siguientes teoremas.

21 Teorema. [1] *$\mathcal{F}_3([0,1])$ es homeomorfo al cubo* $[0;1]^3$.

22 Teorema. [1] *Si $n > 3$ entonces $\mathcal{F}_n([0,1])$ no puede ser encajado en $\mathbb{R}^n$.*

23 Teorema. [10] *$\mathcal{F}_2([0,1]^2)$ es homeomorfo a $[0,1]^4$.*

24 Teorema. [10] *Si $n \geq 3$ entonces $\mathcal{F}_n([0,1]^2)$ no puede ser encajado en $\mathbb{R}^{2n}$.*

25 Teorema. [10] *Si $n \geq 3$ entonces $\mathcal{F}_2([0,1]^n)$ no puede ser encajado en $\mathbb{R}^{2n}$.*

26 Teorema. [5] *Si X es un espacio normal y localmente conexo y $n \geq 3$ entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es unicoherente.*

27 Teorema. [8] *Si X es un continuo y $n \geq 3$ entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es unicoherente.*

Recientemente E. Castañeda dio un ejemplo de un continuo unicoherente cuyo segundo producto simétrico no es unicoherente [2].

28 Definición. Diremos que el continuo X es **mutuamente aposindético** si para cualesquiera dos puntos, x y y, de X existen dos subcontinuos, W_x y W_y, de X tales que $x \in W_x^\circ$ and $y \in W_y^\circ$ y $W_x \cap W_y = \emptyset$.

29 Definición. Un continuo X es **encadenable** si para cada $\varepsilon > 0$, existe una función continua y suprayectiva, $f\colon X \to [0,1]$, tal que para cada $t \in [0,1]$, $\text{diám} f^{-1}(t) < \varepsilon$.

L. E. Rogers probó el siguiente resultado:

30 Teorema. [13] *Si X y Y son continuos encadenables de tal forma que $X \times Y$ es mutuamente aposindético entonces X y Y son homeomorfos a $[0,1]$.*

El Teorema 37 se establece la versión, del Teorema de Rogers, para el segundo producto simétrico de continuos encadenables. A continuación se presentan, sin demostración, los resultados necesarios para probar el Teorema antes mencionado.

31 Lema. [9] *Si X es un continuo entonces la función $f_2\colon X^2 \to \mathcal{F}_2(X)$ definida como $f_2((x_1,x_2)) = \{x_1,x_2\}$ es abierta.*

32 Notación. Si X es un continuo y $W \subset X^2$ entonces $W^* = \{(x,y) \mid (y,x) \in W\}$ y $\Delta_{X^2} = \{(x,x) \mid x \in X\}$.

33 Lema. [9] *Sean* X *un continuo encadenable y* x_0 *y* y_0 *dos puntos diferentes de* X. *Si* C *es un subcontinuo de* X^2 *que contiene a los puntos* (x_0, y_0) *y* (y_0, x_0) *entonces* $C \cap \Delta_{X^2} \neq \emptyset$.

34 Lema. [9] *Sean* X *un continuo y* $\mathcal{W}$ *un subcontinuo de* $\mathcal{F}_2(X)$. *Si* W *es una componente de* $f_2^{-1}(\mathcal{W})$ *entonces* W^* *también es una componente de* $f_2^{-1}(\mathcal{W})$ *y* $f_2^{-1}(\mathcal{W}) = W \cup W^*$.

35 Corolario. [9] *Sean* X *un continuo encadenable y* $\mathcal{W}$ *un subcontinuo de* $\mathcal{F}_2(X)$. *Entonces* $f_2^{-1}(\mathcal{W})$ *es conexo si y sólo si* $f_2^{-1}(\mathcal{W}) \cap \Delta_{X^2} \neq \emptyset$.

36 Lema. [9] *Sean* X *un continuo y* $\mathcal{W}$ *un subcontinuo de* $\mathcal{F}_2(X)$ *con interior diferente del vacío. Si* W *es una componente de* $f_2^{-1}(\mathcal{W})$ *entonces* W *tiene interior diferente del vacío en* X^2.

37 Teorema. [9] *Si* X *es un continuo encadenable tal que* $\mathcal{F}_2(X)$ *es mutuamente aposindético entonces* X *es homeomorfo a* $[0,1]$.

38 Definición. Decimos que un continuo X es **estrictamente no mutuamente aposindético** si cada par de subcontinuos de X que tienen interior diferente del vacío se intersectan.

39 Definición. Un continuo X es **descomponible** si existen dos subcontinuos propios, A y B, de X tales que $X = A \cup B$. X es **indescomponible** si no es descomponible.

Charles Hagopian demostró el siguiente resultado:

40 Teorema. [4] *Si* X *es un continuo encadenable entonces* X *es indescomponible si y sólo si* X^2 *es estrictamente no mutuamente aposindético.*

En el Teorema 41 se da la versión, del Teorema de Hagopian, para el segundo producto simétrico de continuos encadenables.

41 Teorema. [9] *Si* X *es un continuo encadenable entonces* X *es indescomponible si y sólo si* $\mathcal{F}_2(X)$ *es estrictamente no mutuamente aposindético.*

42 Observación. Observemos que para probar que si $\mathcal{F}_2(X)$ es estrictamente no mutuamente aposindético entonces X es indescomponible, no utilizamos el hecho de que X era encadenable. Hagopian tampoco utilizó la encadenabilidad de X para mostrar que si X^2 es estrictamente no mutuamente aposindético entonces X es indescomponible. De esta manera tenemos el siguiente resultado:

43 Teorema. [9] *Sea* X *un continuo. Si* X^2 *o* $\mathcal{F}_2(X)$ *es estrictamente no mutuamente aposindético entonces* X *es indescomponible.*

Bibliografía

1. K. Borsuk y S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **37** (1931), 875–882.
2. E. Castañeda, *A unicoherent continuum whose second symmetric product is no unicoherent.* Topology Proc. **23** (1998), 61–67.
3. A. García-Máynez y A. Illanes, *A survey on unicoherence and rélated properties*, An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México **29** (1989), 17–67.
4. C. L. Hagopian, *Mutual aposyndesis*, Proc. Amer. Math. Soc., **23** (1969), 615–622.
5. A. Illanes, *Multicoherence of symmetric products*, An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México, **25** (1985), 11–24.
6. A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamental and Recent Advances,* Marcel Dekker, 1999.
7. A. Illanes, S. Macías y S. B. Nadler, Jr., *Symmetric Products and Q-manifolds*, Por aparecer en *Contemporary Mathematics de la AMS.*
8. S. Macías, *On symmetric products*, Topology Appl., **92** (1999), 173–182.
9. S. Macías, *Aposyndetic properties of symmetric products of continua*, Topology Proc., **22** (1997), 281–296.
10. R. Molski, *On symmetric products*, Fund. Math., **44** (1957), 165–170.
11. Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets,* Marcel Dekker, 1978.
12. Sam B. Nadler, Jr., *Continuum theory: An Introduction,* Marcel Dekker, 1992.
13. L. E. Rogers, *Mutually aposyndetic products of chainable continua*, Pacific J. Math. **37** (1971), 805–812.