ALGUNAS PROPIEDADES TOPOLÓGICAS Y LA FUNCIÓN T DE JONES

SERGIO MACÍAS
UNIVERSIAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Resumen. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo. Dados un espacio métrico y compacto X y un subconjunto A de X, definimos $T(A) = \{x \in X \mid$ para todo subcontinuo W de X, tal que $x \in Int_X(W)$, se tiene que $W \cap A \neq \emptyset\}$. Presentaremos los conceptos: casi conexo en pequeño, conexo en pequeño, aposindesis, semiconexidad local y conexidad local; en términos de la funición T.

1. Introducción

La función T originalmente fue definida en 1948 por el Profesor F. Burton Jones [7] como una herramienta en el estudio de los continuos aposindéticos ("apo" quiere decir "lejos", "sin" significa "junto" y "deo" quiere decir "envolver"). Posteriormente, el Profesor Jones utilizó esta función para estudiar a los continuos homogéneos y probó un teorema de descomposición [8] que ha sido muy importante para el entendimiento de dichos continuos. Desde entonces muchas propiedades realcionadas con esta función han sido estudiadas. Por ejemplo, en [1] se dan propiedades que satisfacen los continuos para los cuales la función T es continua. En [11], [13] y [15] se presentan varias clases de continuos descomponibles, no localmente conexos y de dimensión uno para las cuales la función T es continua. En [14] se demuestra un teorema de descomposición para cierta clase de continuos para los cuales la función T es continua. En [13] se caracteriza a la clase de los continuos homogéneos para los cuales la función T es continua. Como algunos ejemplos de las aplicaciones que puede tener la función T, mencionaremos los siguientes: Se ha utilizado a la función T para estudiar la contractibilidad de continuos [2]; también se ha hecho uso de la función T para estudiar a los continuos que pueden ser mandados de manera continua y suprayectiva sobre sus conos [3] y para estudiar a los productos simétricos de continuos [10].

Las propiedades topológicas que veremos son: la casi conexidad en pequeño, la conexidad en pequeño, la aposindesis, la semiconexidad local y la conexidad local. El concepto de casi conexidad en pequeño fue introducido por los Profesores H. S. Davis y P. H. Doyle, para estudiar continuos invertibles [4]. Un hecho importante es que si un continuo es casi conexo en pequeño en cada uno de sus puntos y la función T es continua entonces tal continuo es localmente conexo [14, 3.2.20]. Además, si un continuo homogéneo es casi conexo en pequeño en alguno de sus puntos entonces ese continuo es localmente conexo [16, 3.5]. Desconocemos el origen del concepto de conexidad en pequeño, lo que sí sabemos es que en algunas partes de la literatura se le da el nombre de conexidad local, como es el caso del libro del Profesor K. Kuratowski [9]. El concepto de aposindesis, como ya mencionamos, fue introducido por el Profesor F. B. Jones como una generalización de la conexidad en pequeño y como una manera alternativa a la semiconexidad local para el estudio de los continuos en el plano [8]. El Profesor G. T. Whyburn introdujo el concepto de semiconexidad local como una generalización de la conexidad local y también lo usó para estudiar continuos en el plano [18].

2. Propiedades Topológicas

Empezaremos dando un poco de notación.

2.1. Notación. Si X es un espacio métrico y A es un subconjunto de X entonces el interior, la cerradura y la frontera de A, con respecto a X, serán denotados por $Int_X(A)$, $Cl_X(A)$ y $Fr_X(A)$, respectivamente. Si $\varepsilon > 0$ entonces la bola abierta de radio ε y centro en A se denota como: $\mathcal{V}_\varepsilon(A)$.

2.2. Notación. Dado un espacio métrico X, $P(X)$, denota al conjunto potencia de X; i.e.:

$$P(X) = \{A \mid A \subset X\}.$$

2.3. Observación. Sean X un espacio métrico y $A \in P(X)$. Recordemos que:

$$Cl_X(A) = \{x \in X \mid \text{para todo subconjunto abierto } U \text{ de } X$$

$$\text{tal que } x \in U, \text{ se tiene que } U \cap A \neq \emptyset\} =$$

$$= X \setminus \{x \in X \mid \text{existe un subconjunto abierto } U \text{ de } X \text{ tal que } x \in U \subset X \setminus A\}.$$

2.4. Definición. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo. Un *subcontinuo* es un continuo, con la topología relativa, el cual está contenido en un espacio.

La definición de la función T de Jones se expresa de manera parecida a la cerradura de un conjunto (Observación 2.3):

2.5. Definición. Sea X un espacio métrico y compacto. Definimos

$$T\colon P(X) \to P(X)$$

como

$$T(A) = \{x \in X \mid \text{para todo subcontinuo } W \text{ de } X, \text{ tal que } x \in Int_X(W),$$

$$\text{se tiene que } W \cap A \neq \emptyset\} =$$

$$= X \setminus \{x \in X \mid \text{existe un subcontinuo } W \text{ de } X \text{ tal que}$$

$$x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus A\}$$

para cada $A \in P(X)$. A esta función se le conoce como la *función T de Jones.*

2.6. Observación. Es claro de la definición de la función T que $A \subset T(A)$ para todo A.

2.7. Lema. Si X es un espacio métrico y compacto y A y $B \in P(X)$ entonces se cumple lo siguiente:

(1) $T(A)$ es cerrado en X.

(2) Si $A \subset B$ entonces $T(A) \subset T(B)$.

(3) $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$.

Demostración. Veamos que se cumple (1). Sea $x \in X \setminus T(A)$. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus A$. Observemos que, de hecho, $Int_X(W) \subset X \setminus T(A)$. Por tanto, $X \setminus T(A)$ es abierto y $T(A)$ es cerrado.

Ahora probaremos (2). Sea $x \in X \setminus T(B)$. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus B$. Como $A \subset B$, $X \setminus B \subset X \setminus A$. De esta forma, concluimos que $x \in Int_X(W) \subset W \subset X\setminus A$. Por consiguiente, $x \in X\setminus T(A)$. Por tanto, $T(A) \subset T(B)$.

Notemos que (3) es una consecuencia inmediata de (2). □

2.8. Observación. Dado un espacio métrico y compacto X, denotamos por 2^X a la familia de los subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Notemos que, por la parte (1) del Lema 2.7, el codomino de la función T es $2^X \cup \{\emptyset\}$.

2.9. Observación. En general, no es cierto que se dé la igualdad en la parte (3) del Lema 2.7. Por ejemplo, en la suspensión sobre el conjunto de Cantor no se cumple la igualdad. De hecho, es una pregunta abierta el caracterizar a los espacios, en particular la clase de los continuos, para los cuales se cumple la mencionada igualdad.

2.10. Ejemplo. Si X es el conjunto de Cantor entonces $T(\emptyset) = X$, ya que los únicos subcontinuos de X son puntos y todos ellos tienen interior vacío. Así, por la parte (2) del Lema 2.7, se tiene que $T(A) = X$ para toda $A \in P(X)$.

2.11. Ejemplo. Si $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ entonces $T(\emptyset) = \{0\}$, puesto que $\{0\}$ es el único subcontinuo de X que no tiene interior. De esta forma, por la parte (2) del Lema 2.7, obtenemos que $T(A) = \{0\} \cup A$ para toda $A \in P(X)$.

2.12. Observación. Notemos que si a 2^X le definimos la métrica de Hausdorff [12, 1.8.3] entonces podemos preguntarnos: ¿Cuándo es $T|_{2^X} : 2^X \to 2^X$ continua? En los Ejemplos 2.10 y 2.11, $T|_{2^X}$ es continua. Para más información sobre la continuidad de la función T se pueden consultar los artículos, [1] [11],[12] [13], [14], [15] y [5].

El siguiente resultado nos da una caracterización de los espacios métricos y compactos en los cuales la imagen del conjunto vacío es el conjunto vacío.

2.13. Teorema. Si X es un espacio métrico y compacto entonces $T(\emptyset) = \emptyset$ si y sólo si X tiene un número finito de componentes.

Demostración. Supongamos que X tiene un número finito de componentes. Sean $x \in X$ y C la componente de X que tiene a x. Como X tiene un número finito de componentes, C es tanto abierto como cerrado. De esta forma, todo punto de X está contenido en el interior de un subcontinuo propio de X. Por tanto, $T(\emptyset) = \emptyset$.

Ahora, supongamos que $T(\emptyset) = \emptyset$. Entonces para cada $x \in X$, existe un subcontinuo W_x de X tal que $x \in Int_X(W_x)$. Observemos que la familia $\{Int_X(W_x) \mid x \in X\}$ forma un cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X \subset \bigcup_{j=1}^{n} Int_X(W_x) \subset \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}$. De donde resulta que X tiene un número finito de componentes. □

Como una consecuencia inmediata del Teorema 2.13 tenemos:

2.14. Corolario. Si X es un continuo entonces $T(\emptyset) = \emptyset$.

Una demostración del siguiente teorema se puede encontrar en [17, 5.4]. Este resultado es conocido como: *El Teorema del Borde en la Frontera.*

2.15. Teorema. Sean X un continuo y U un subconjunto abierto y propio de X. Si K es una componente de $Cl_X(U)$ entonces $K \cap Fr_X(U) \neq \emptyset$.

El siguiente teorema nos dice que la imagen de continuos bajo la función T es conexa.

2.16. Teorema. Sea X un continuo. Si W es un subcontinuo de X entonces $T(W)$ es un subcontinuo de X.

Demostración. Ya sabemos que $T(W)$ es cerrado, por la parte (1) del Lema 2.7. Supongamos que $T(W)$ no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos cerrados y no vacíos A y B de X tales que $T(W) = A \cup B$. Como W es conexo, supondremos que $W \subset A$. Como X es un espacio métrico, existe un subconjunto abierto U de X tal que $A \subset U$ y $Cl_X(U) \cap B = \emptyset$. De aquí se obtiene que $Fr_X(U) \cap T(W) = \emptyset$. Entonces para cada $z \in Fr_X(U)$, existe un subcontinuo K_z de X tal que $z \in Int_X(K_z) \subset K_z \subset X \setminus W$. Como $Fr_X(U)$ es compacta, existen $z_1 \dots, z_n \in Fr_X(U)$ tales que $Fr_X(U) \subset \bigcup_{j=1}^n Int_X(K_{z_j}) \subset \bigcup_{j=1}^n K_{z_j}$. Sea $V = U \setminus \bigcup_{j=1}^n K_{z_j}$. Entonces V es un abierto de X. Sea $Y = X \setminus V = (X \setminus U) \cup \left(\bigcup_{j=1}^n K_{z_j}\right)$. Por el Teorema 2.15, Y tiene un número finito de componentes. Notemos que $B \subset X \setminus Cl_X(U) \subset X \setminus U \subset Y$. En consecuencia, $B \subset Int_X(Y)$. Sean $b \in B$ y C la componente de Y que tiene a b. Entonces $b \in Int_X(C)$ y $C \cap W = \emptyset$. De donde, $b \in X \setminus T(W)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $T(W)$ es conexo. □

En lo que resta del trabajo, presentaremos, en términos de la función T, algunas de las propiedades estudiadas en topología, cuando el espacio en cuestión es un continuo.

2.17. Definición. Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que X es *casi conexo en pequeño en* p si para cada abierto U de X que tenga a p, se tiene que existe un subcontinuo W de X tal que $Int_X(W) \neq \emptyset$ y $W \subset U$. El continuo X es *casi conexo en pequeño* si lo es en cada uno de sus puntos.

2.18. Ejemplo. Si X es el cono sobre la sucesión armónica $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ entonces X es casi conexo en pequeño [12, 1.7.5].

La forma de expresar la casi conexidad en pequeño en un punto en términos de la función T está dada en el siguiente resultado:

2.19. Teorema. Si X es un continuo y $p \in X$ entonces X es casi conexo en pequeño en p si y sólo si para cada $A \in P(X)$ tal que $p \in Int_X(T(A))$, se tiene que $p \in Cl_X(A)$.

Demostración. Supongamos que X es casi conexo en pequeño en p. Sea $A \in P(X)$ tal que $p \in Int_X(T(A))$. Entonces existe un número natural N tal que $\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(p) \subset Int_X(T(A))$ para toda $n \geq N$. Como X es casi conexo en pequeño en p, para cada $n \geq N$, existe un subcontinuo W_n de X tal que $Int_X(W_n) \neq \emptyset$ y $W_n \subset \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(p)$. De aquí se sigue que $W_n \cap A \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$. Sea $x_n \in W_n \cap A$. Observemos que, por construcción, la sucesión $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ converge a p. Por tanto, $p \in Cl_X(A)$.

Ahora, supongamos que para toda $A \in P(X)$ tal que $p \in Int_X(T(A))$, se tiene que $p \in Cl_X(A)$. Sea U un abierto de X tal que $p \in U$. Sea V un abierto de X tal que $p \in V \subset Cl_X(V) \subset U$. Veremos que $Cl_X(V)$ tiene alguna componente con interior distinto del vacío. Supongamos que esto no es cierto. Sea $A = Fr_X(V)$.

Entonces A es un subconjunto cerrado de X y $p \in X \setminus A$. Mostraremos que $V \subset T(A)$. Supongamos que hay un punto $x \in V \setminus T(A)$. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus A$. Como todas las componentes de $Cl_X(V)$ tienen interior vacío y W es un subcontinuo con interior no vacío, resulta que $W \cap X \setminus V \neq \emptyset$. Lo que implica que $W \cap Fr_X(W) \neq \emptyset$; i.e., $W \cap A \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $V \subset T(A)$. De donde, $p \in Int_X(T(A))$. Por hipótesis, lo anterior implica que $p \in Cl_X(A) = A$. Esto es una contradicción. Por tanto, $Cl_X(V)$ tiene una componente con interior no vacío y X es casi conexo en pequeño en p. □

La versión global de la casi conexidad en pequeño usando la función T se encuentra a continuación:

2.20. Teorema. Un continuo es casi conexo en pequeño si y sólo si para toda $F \in 2^X$, $Int_X(F) = Int_X(T(F))$.

Demostración. Supongamos que X es casi conexo en pequeño. Sea $F \in 2^X$. Como $F \subset T(F)$ (Observación 2.6), se tiene que $Int_X(F) \subset Int_X(T(F))$. Sea $x \in Int_X(T(F))$. Por el Teorema 2.19, $x \in F$. De donde, $Int_X(T(F)) \subset F$. Así, $Int_X(T(F)) \subset Int_X(F)$. Por tanto, $Int_X(F) = Int_X(T(F))$.

Supongamos ahora que para cada $F \in 2^X$, $Int_X(F) = Int_X(T(F))$. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Como $Int_X(X \setminus U) \cap U = \emptyset$, por hipótesis, resulta que $Int_X(T(X \setminus U)) \cap U = \emptyset$. De donde, existe $y \in U \setminus T(X \setminus U)$. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $y \in Int_X(W) \subset W \subset U$. Por tanto, X es casi conexo en pequeño en x. Como x fue un punto arbitrario de X, X es casi conexo en pequeño. □

2.21. Definición. Sean X un continuo $p \in X$. Decimos que X es *conexo en pequeño en p* si para todo subconjunto abierto U de X tal que $p \in U$, existe un subcontinuo W de X tal que $p \in Int_X(W) \subset W \subset U$.

2.22. Observación. Es probable que el lector conozca alguna otra manera de definir conexidad en pequeño en un punto. En [12, 1.7.9] hay varias definiciones equivalentes. Observemos que no se definió un continuo conexo en pequeño como un continuo que es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Esto es porque, un continuo es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos si y sólo si el continuo es localmente conexo en cada uno de sus puntos (Definición 2.32) [12, 1.7.12].

2.23. Ejemplo. Consideremos la sucesión armónica $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}$. Entre $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n+1}$ coloquemos una copia del espacio del Ejemplo 2.18 de tal forma que el vértice coincida con el punto $\frac{1}{n}$ y la "barra límite" coincida con el intevalo $\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right]$. Notemos que X es casi conexo en pequeño en 0 [12, 1.7.7].

Ahora describiremos la conexidad en pequeño en un punto en términos de la función T.

2.24. Teorema. Si X es un continuo y $p \in X$ entonces X es conexo en pequeño en p si y sólo si para toda $A \in P(X)$ tal que $p \in T(A)$ se tiene que $p \in Cl_X(A)$.

Demostración. Supongamos que X es conexo en pequeño en p. Sea $A \in P(X)$ y supongamos que $p \in X \setminus Cl_X(A)$. Como $X \setminus Cl_X(A)$ es abierto y X es conexo en pequeño en p, existe un subcontinuo W de X tal que $p \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus Cl_X(A) \subset X \setminus A$. De donde, $p \in X \setminus T(A)$.

Ahora, supongamos que para toda $A \in P(X)$ tal que $p \in T(A)$ se tiene que $p \in Cl_X(A)$. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$. Notemos que $X \setminus U$ es cerrado y que $p \notin X \setminus U$. De aquí se sigue, por hipótesis, que $p \notin T(X \setminus U)$. Esto implica que existe un continuo W tal que $p \in Int_X(W) \subset W \subset U$. Por tanto, X es conexo en pequeño en p. □

2.25. Definición. Sean X un continuo y p y $q \in X$. Decimos que X es *aposindético en p con respecto a q* si existe un subcontinuo W de X tal que $p \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus \{q\}$. El continuo X es *aposindético en p* si es aposindético en p con respecto a cualquier punto de $X \setminus \{p\}$. Finalmente, X es *aposindético* si lo es en cada uno de sus puntos.

Como una consecuencia inmediata de la Definición 2.25 tenemos la manera de poner a la aposindesis puntual en términos de la función T:

2.26. Teorema. Sean X un continuo y p y $q \in X$. Entonces X es aposindético en p con respecto a q si y sólo si $p \in X \setminus T(\{q\})$.

La versión global de la aposindesis usando la función T se expresa como sigue:

2.27. Teorema. Un continuo X es aposindético si y sólo si $T(\{p\}) = \{p\}$ para toda $p \in X$.

Demostración. Supongamos que X es aposindético y sea $p \in X$. Tomemos $q \in X \setminus \{p\}$. Por el Teorema 2.26, se tiene que $q \in X \setminus T(\{p\})$. Por tanto, $T(\{p\}) = \{p\}$.

Supongamos ahora que $T(\{x\}) = \{x\}$ para toda $x \in X$. Sean p y q dos puntos distintos de X. Como $T(\{q\}) = \{q\}$, $p \in X \setminus T(\{q\})$. Por el Teorema 2.26, X es aposindético en p con respecto a q. Com p y q fueron dos puntos arbitrarios de X, X es aposindético. □

2.28. Definición. Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que X es *semilocalmente conexo en p* si para todo abierto U de X que tiene a p, existe un subconjunto abierto V de X tal que $p \in V \subset U$ y $X \setminus V$ tiene un cantidad finita de componentes. Decimos que X es *semilocalmente conexo* si es semilocalmente conexo en cada uno de sus puntos.

2.29. Ejemplo. La suspensión del conjunto de Cantor es un espacio semilocalmente conexo, el cual no es localmente conexo.

La forma de expresar a la semiconexidad local en un punto utilizando a la función T se encuentra a continuación:

2.30. Teorema. Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces X es semilocalmente conexo en p si y sólo si $T(\{p\}) = \{p\}$.

Demostración. Supongamos que X es semilocalmente conexo en p. Sea $q \in X \setminus \{p\}$. Tomemos un subconjunto abierto U de X tal que $p \in U$ y $q \in X \setminus Cl_X(U)$. Como X es semilocalmente conexo en p, existe un subconjunto abierto V de X tal que $p \in V \subset U$ y $X \setminus V$ tiene una cantidad finita de componentes. Sea K la componente de $X \setminus V$ que tiene a q. Entonces $q \in Int_X(K)$ [12, 1.6.2]. Esto implica que $q \in X \setminus T(\{p\})$. Por tanto, $T(\{p\}) = \{p\}$.

Ahora, supongamos que $T(\{p\}) = \{p\}$. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$. Como $T(\{p\}) = \{p\}$, para cada $q \in X \setminus U$, existe un subcontinuo

W_q de X tal que $q \in Int_X(W_q) \subset W_q \subset X \setminus \{p\}$. Como $X \setminus U$ es compacto, existen $q_1, \ldots, q_n \in X \setminus U$ tales que $X \setminus U \subset \bigcup_{j=1}^n Int_X(W_{q_j}) \subset \bigcup_{j=1}^n W_{q_j}$. Sea $V = X \setminus \bigcup_{j=1}^n W_{q_j}$. Entonces V es un subconjunto abierto de X tal que $p \in V \subset U$ y $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes. Por tanto, X es semilocalmente conexo en p. □

Como consecuencia de los Teoremas 2.27 y 2.30 tenemos:

2.31. Corolario. Un continuo X es aposindético si y sólo si X es semilocalmente conexo.

2.32. Definición. Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que X es *localmente conexo en* p si para todo abierto U de X, existe un abierto y conexo V de X tal que $p \in V \subset U$. El continuo X es *localmente conexo* si lo es en cada uno de sus puntos.

La función T caracteriza a los continuos localmente conexos siendo la identidad en la familia de subconjuntos cerrados y no vacíos de dichos continuos.

2.33. Teorema. Un continuo X es localmente conexo si sólo si $T(A) = A$ para toda $A \in 2^X$.

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean $A \in 2^X$ y $p \in X \setminus A$. Tomemos un subconjunto abierto U de X tal que $p \in U \subset Cl_X(U) \subset X \setminus A$. Como X es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo V de X tal que $p \in V \subset U$. Entonces $Cl_X(V)$ es un subcontinuo de X tal que $p \in Int_X(Cl_X(V)) \subset Cl_X(V) \subset X \setminus A$. Lo que implica que $p \in X \setminus T(A)$. De donde, $T(A) \subset A$. Por la Observación 2.6, $A \subset T(A)$. Por tanto, $T(A) = A$.

Finalmente, supongamos que $T(A) = A$ para toda $A \in 2^X$. Sean $p \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$. Como U es abierto, $X \setminus U$ es cerrado. Por hipótesis, se tiene que $T(X \setminus U) = X \setminus U$. De donde, existe un subcontinuo W de X tal que $p \in Int_X(W) \subset W \subset U$. Lo que implica que X es conexo en pequeño en p. Como p fue un punto arbitrario de X, X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Por tanto, X es localmente conexo [12, 1.7.12]. □

AGRADECIMIENTOS: El autor le agradece al Dr. Raúl Escobedo la invitación a participar en la *Quinta Gran Semana de las Matemáticas* de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Referencias

[1] D. P. Bellamy, *Continua for which the set function T is continuous*, Trans. Amer. Math. Soc., 151 (1970) 581–587.
[2] D. P. Bellamy and J. J. Charatonik, *The set function T and contractibily of continua*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 25 (1977), 47–49.
[3] D. P. Bellamy and C. L. Hagopian, *Mapping continua onto their cones*, Colloq. Math., 41 (1979), 53–56.
[4] H. S. Davis y P. H. Doyle, *Invertible continua*, Portugal. Math., 26 (1967), 487–491.
[5] L. Fernández y S. Macías, *Set functions T and K and irreducible continua*, manuscrito.
[6] F. B. Jones, *Aposyndetic continua and certain boundary problems*, Amer. J. Math., 53 (1941), 545–553.
[7] F. B. Jones, *Concerning nonaposyndetic continua*, Amer. J. Math., 70 (1948), 403–413.
[8] F. B. Jones, *On a Certain type of homogeneous plane continua*, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 735-740.

[9] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.
[10] S. Macías, *Aposyndetic properties of symmetric products of continua*, Topology Proc., 22 (1997), 281–296.
[11] S. Macías, *A class of one–dimensional, nonlocally connected continua for which the set function T is continuous*, Houston J. Math., 32 (2006), 161–165.
[12] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.
[13] S. Macías, *Homogeneous continua for which the set function T is continuous*, Topology Appl., 153 (2006), 3397–3401.
[14] S. Macías, *A decomposition theorem for a class of continua for which the set function T is continuous*, Colloq. Math., 109 (2007), 163–170.
[15] S. Macías, *On continuously irreducible continua*, Topology Appl., 156 (2009), 2357–2363.
[16] S. Macías and S. B. Nadler, Jr., *On hereditarily decomposable homogeneous continua*, Topology Proc., 34 (2009), 131-145.
[17] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.
[18] G. T. Whyburn, *Semi–locally–connected sets*, Amer. J. Math., 61 (1939), 733–749.

Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
México D. F., C. P. 04510
macias@servidor.unam.mx