Sobre la función $\mathcal{T}$ de Jones

Sergio Macías y María Antonieta Molina

Resumen. El objetivo de este trabajo es el de presentar algunas de las propiedades elementales de la función $\mathcal{T}$ definida por F. Burton Jones. Establecemos, en términos de esta función, algunas propiedades sobre continuos. Daremos algunos ejemplos de cómo se calcula la función $\mathcal{T}$ para algunos continuos.

1.1 Notación. Dado un conjunto Z, denotaremos por $\mathcal{P}(Z)$ al conjunto potencia de Z, esto es:

$$\mathcal{P}(Z) = \{A \mid A \subset Z\}.$$

1.2 Notación. Dados un espacio topológico Y y un subconjunto A de Y, A°, $\overline{A}$ y $\partial(A)$ denotan, el interior, la cerradura y la frontera de A en Y, respectivamente.

1.3 Definición. Si X es un espacio métrico y compacto, definimos la función $\mathcal{T}_X\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ como sigue: dado A un subconjunto de X, $\mathcal{T}_X(A)$ el conjunto que satisface:

$$\mathcal{T}_X(A) = X \setminus \{x \in X \mid \text{existe un subconjunto cerrado y conexo } W$$
$$\text{de } X \text{ tal que } x \in W^\circ \text{y } W \cap A = \emptyset\}.$$

Escribiremos $\mathcal{T}$ en vez de $\mathcal{T}_X$ cuando no haya peligro de confusión.

1.4 Observación. La función $\mathcal{T}$ fue definida por Jones en 1955 [8] al realizar su estudio de los continuos homogéneos[2]. Dados un continuo homogéneo M y un punto x de M, Jones considera el siguiente conjunto[3]:

$$\mathcal{L}(x) = M \setminus \{z \in M \mid \text{existe un subconjunto cerrado y conexo } W$$
$$\text{de } M \text{ tal que } x \in W^\circ \text{y } W \cap A = \emptyset\}.$$

Jones probó que cada $\mathcal{L}(x)$ es un continuo (la homogeneidad no es necesaria para este hecho) y que $\mathcal{G} = \{\mathcal{L}(x) \mid x \in M\}$ es una partición de M tal que $M/\mathcal{G}$ es un continuo homogéneo y aposindético (véase Definición 1.24). Una demostración más simple puede encontrarse en [9].

En 1962, Davis, Stadlander y Swingle [5] estudian las propiedades de las funciones $\mathcal{T}^n$ empezando, de esta forma, el interés por el estudio de la función $\mathcal{T}$ de Jones.

El siguiente Lema nos da las propiedades más elementales de la función $\mathcal{T}$.

1.5 Lema. *Sean X un espacio métrico y compacto y A y B dos subconjuntos de X tales que $A \subset B$. Entonces se tiene que:*

(a) $A \subset \mathcal{T}(A)$.

(b) $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(B)$.

(c) *$\mathcal{T}(A)$ es un cerrado de X.*

---

[2]Un continuo M es **homogéneo** si dados dos puntos p y q de M, existe un homeomorfismo $h\colon M \to M$ tal que $h(p) = q$.

[3]Lo que Jones llamó "$\mathcal{L}$" es lo que en la actualidad se conoce como "$\mathcal{T}$".

Demostración: Es claro que se cumplen (a) y (b), así que sólo demostraremos (c).

Para ver que $\mathcal{T}(A)$ es cerrado, mostraremos que $X \setminus \mathcal{T}(A)$ es abierto. Sea $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$. Por definición, existe un subconjunto cerrado y conexo K de X tal que $x \in K^{\circ} \subset K \subset X \setminus A$. Notemos que K° es un subconjunto abierto de X tal que $x \in K^{\circ} \subset X \setminus \mathcal{T}(A)$. Por tanto, $\mathcal{T}(A)$ es cerrado.■

1.6 Ejemplo. Sea X el conjunto de Cantor. Observemos que en este caso, como los únicos subconjuntos cerrados conexos de X son puntos y éstos tienen interior vacío, se tiene que $\mathcal{T}(\emptyset) = X$. De aquí resulta que para todo $A \in \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{T}(A) = X$.

1.7 Ejemplo. Sea $X = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$. Notemos que los subconjuntos cerrados y conexos de X son puntos. En este caso, el único punto de X que tiene interior vacío es $\{0\}$. Por tanto, $\mathcal{T}(\emptyset) = \{0\}$. Además, para todo $x \in X$, $\mathcal{T}(\{x\}) = \{x\} \cup \{0\}$. De aquí se tiene que para todo $A \in \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{T}(A) = A \cup \{0\}$.

1.8 Lema. *Sean X un espacio métrico y compacto y A un subconjunto cerrado de X con un número finito de componentes. Si $p \in A^{\circ}$ y C_1 es la componente de A que contiene a p, entonces $p \in C_1^{\circ}$.*

Demostración: Sean $C_2, \ldots, C_n$ las otras componentes de A. Como $p \in A^{\circ}$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_1}(p) \subset A$. Como A es un subconjunto cerrado de X, las componentes de A son subconjuntos cerrados de X y, por tanto, son compactas, de donde se tiene que si $\varepsilon_2 = \text{mín}\{d(C_1, C_j) \mid j \in \{2, \ldots, n\}\}$ entonces $\varepsilon_2 > 0$. Sea $\varepsilon < \text{mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Afirmamos que $B_{\varepsilon}(p) \subset C_1$.

Sea $x \in B_{\varepsilon}(p)$, como $\varepsilon < \varepsilon_1$, $x \in A$. Si se tuviera que $x \in C_j$ para alguna $j \neq 1$ entonces $\varepsilon > d(p, x) \geq d(C_1, C_j) \geq \varepsilon_2 > \varepsilon$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $x \in C_1$. ■

1.9 Lema. *Si X es un espacio métrico y compacto entonces $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$ si y sólo si X tiene un número finito de componentes.*

Demostración. Supongamos primero que X tiene un número finito de componentes. Sea $x \in X$. Observemos que si C es la componente de X que contiene a x entonces $x \in C^{\circ}$, de donde $x \in C^{\circ} \subset C \subset X \setminus \emptyset$ y, por consiguiente, $x \in X \setminus \mathcal{T}(\emptyset)$. Por tanto, $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$.

Ahora supongamos que $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$. Sea $x \in X$. Como $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$, existe un subconjunto cerrado y conexo W_x de X tal que $x \in W_x^{\circ} \subset W_x \subset X$. Notemos que $\{W_x^{\circ} \mid x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^{\circ}$. De aquí resulta que $X = \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}$. Como X es la unión de un número finito de conjuntos conexos, tenemos que X tiene un número finito de componentes. ■

1.10 Definición. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* del continuo X es un subconjunto cerrado y conexo de X.

1.11 Ejemplos. Como ejemplos de continuos tenemos al intervalo $[0,1]$, la circunferencia unitaria $\mathcal{S}^1$, el toro $T = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$, la curva sinoidal del topólogo $X = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\} \cup \{\{0\} \times [-1,1]\}$, etc.

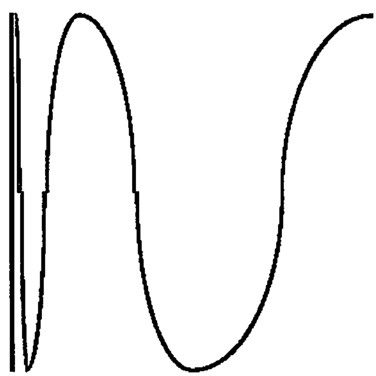

Figura 1

Como consecuencia del Lema 1.9 se tiene el siguente resultado:

1.12 Corolario. *Si X es un continuo, entonces $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$.*

A continuación analizaremos cuál es la imagen bajo la función $\mathcal{T}$ de algunos subconjuntos para algunos continuos.

1.13 Ejemplo. Sea X el cono sobre el conjunto de Cantor, con vértice en v y base B. Notemos que los únicos subcontinuos de X que tienen interior distinto del vacío contienen a v. De donde se puede ver que $\mathcal{T}(\{v\}) = X$. Ahora bien, si r es un punto de X diferente de v entonces resulta que $\mathcal{T}(\{r\})$ es igual al segmento hacia B desde r. Además se tiene que $\mathcal{T}(B) = B$.

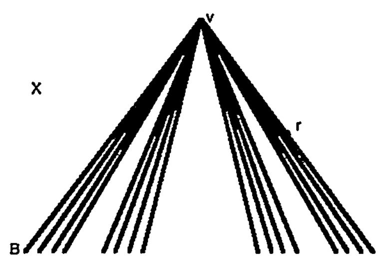

Figura 2

1.14 Ejemplo. Construyamos el espacio $Y = X \cup X_1$, donde X es el espacio del ejemplo anterior y X_1 es una copia de X con vértice en un punto v_1 de la base B (véase figura que a continuación se muestra). Por un razonamiento análogo al hecho en el ejemplo anterior, se tiene en este caso que $\mathcal{T}(\{v\}) = X$, $\mathcal{T}(X) = Y$ y $\mathcal{T}(\mathcal{T}(\{v\})) = \mathcal{T}^2(\{v\}) = Y$. Se puede observar en este ejemplo que, en general, la función $\mathcal{T}$ no es idempotente, esto es, $\mathcal{T}^2 \neq \mathcal{T}$.

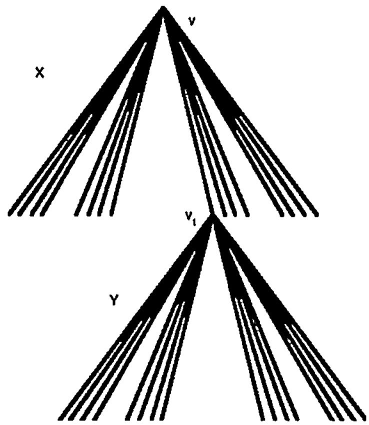

Figura 3

1.15 Ejemplo. En la curva sinoidal del topólogo se puede observar que si $A \neq \emptyset$ y $A \subseteq J$, donde $J = \{0\} \times [-1, 1]$, se tiene que $\mathcal{T}(A) = J$. Además, $\mathcal{T}(\{p\}) = J$ para todo punto $p \in J$ y $\mathcal{T}(\{q\}) = \{q\}$, si $q = (x, \text{sen } (\frac{1}{x}))$, para alguna $x \in (0, 1]$. En este caso se cumple que $\mathcal{T}(\{q\}) = \mathcal{T}^2(\{q\})$.

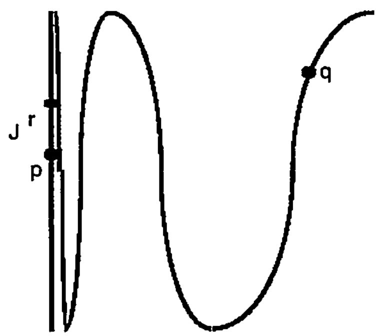

Figura 4

Los siguientes dos resultados son muy importantes dentro de la teoría de los continuos [12].

1.16 Teorema. *Sean X un espacio métrico y compacto y A y B dos subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Si no existe ningún subconjunto conexo que intersecte tanto a A como a B, entonces existen dos subconjuntos cerrados y ajenos, X_1 y X_2 de X tales que $X = X_1 \cup X_2$, $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.*

1.17 Teorema. *Sean X un continuo y U un subconjunto abierto y propio de X. Si K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap \partial(U) \neq \emptyset$.*

El resultado siguiente muestra que la imagen de un continuo bajo la función $\mathcal{T}$ es un continuo. Su prueba es bastante representativa de las técnicas utilizadas en el estudio de la función $\mathcal{T}$.

1.18 Teorema. *Si X es un continuo y W es un subcontinuo de X, entonces $\mathcal{T}(W)$ es un subcontinuo de X.*

Demostración: Por el Lema 1.5 sólo es necesario probar que $\mathcal{T}(W)$ es un conjunto conexo.

Supongamos que $\mathcal{T}(W)$ no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos cerrados A y B de X tales que $\mathcal{T}(W) = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que W está contenido en A. Como $A \cap B = \emptyset$, existe un subconjunto abierto U de X tal que $A \subset U$ y $\overline{U} \cap B = \emptyset$. Por lo anterior podemos concluir que $\partial(U) \subset X \setminus \mathcal{T}(W)$. De donde, para cada $z \in \partial(U)$, existe un subcontinuo K_z de X tal que $z \in K_z^\circ \subset K_z \subset X \setminus W$. De esta forma se tiene que $\partial(U) \subset \bigcup\limits_{z \in \partial(U)} K_z^\circ$. Como $\partial(U)$ es un conjunto compacto, existen $z_1, \ldots, z_n \in \partial(U)$ tales que $\partial(U) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} K_{z_j}^\circ \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} K_{z_j}$. Sean $V = U \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} K_{z_j}$ y $H = X \setminus V = (X \setminus U) \cup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} K_{z_j} \right)$. Entonces, por el Teorema 1.17, H tiene un número finito de componentes. Observemos que $B \subset H$. Por el Lema 1.8, para cada $b \in B$, $b \in X \setminus \mathcal{T}(W)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{T}(W)$ es conexo. ■

Recordemos algunas definiciones de propiedades para continuos.

1.19 Definición. Si X es un continuo y p es un punto de X, entonces X es *localmente conexo en* p si para todo abierto U de X que tiene a p, existe un abierto y conexo V de X que tiene a p y que está contenido en U.

1.20 Definición. Si X es un continuo y p es un punto de X, entonces se dice que X es *conexo en pequeño en* p, si para todo abierto U de X que tiene a p, existe un abierto V de X que tiene a p y que está contenido en U tal que para todo punto $q \in V$, existe un subconjunto conexo L_q que contiene a $\{p, q\}$ y que está contenido en U.

1.21 Lema. *Sean X un continuo y p un punto de X. Entonces X es conexo en pequeño en p si y sólo si para cada subconjunto cerrado D de X tal que $D \subset X \setminus \{p\}$ entonces existe un subcontinuo K de X tal que $p \in K^\circ \subset K \subset X \setminus D$.*

Demostración: Supongamos que X es conexo en pequeño en p. Sea D un subconjunto cerrado de X tal que $D \subset X \setminus \{p\}$. De aquí se tiene que $p \in X \setminus D$. Sea U un abierto de X tal que $p \in U \subset \overline{U} \subset X \setminus D$. Como X es conexo en pequeño en p, existe un abierto V de X que tiene a p y que está contenido en U de tal forma que para todo punto $q \in V$, existe un subconjunto conexo L_q que contiene a $\{p, q\}$ y que está contenido en U. Sea $K = \overline{\bigcup_{q \in V} L_q}$. Entonces K es un subcontinuo de X tal que $p \in K^\circ \subset K \subset \overline{U} \subset X \setminus D$.

Ahora supongamos que para cada subconjunto cerrado D de X tal que $D \subset X \setminus \{p\}$ entonces existe un subcontinuo K de X tal que $p \in K^\circ \subset K \subset X \setminus D$. Sea U un abierto de X que contenga a p. Observemos que $X \setminus U$ es un subconjunto cerrado de X contenido en $X \setminus \{p\}$. Por hipótesis, existe un subcontinuo K de X tal que $p \in K^\circ \subset K \subset X \setminus (X \setminus U) = U$. Notemos que K° es subconjunto abierto de X tal que para todo punto $q \in K^{\circ}$, K es un subconjunto conexo de X tal que $\{p, q\} \subset K$ y $K \subset U$. ∎

1.22 Observación. Sea X un continuo. Notemos que si X es localmente conexo en p entonces X es conexo en pequeño p. Es sabido que la conexidad en pequeño (en todos los puntos del espacio) es equivalente a la conexidad local (en todos los puntos del espacio) [12].

El siguiente concepto fue dado por G. T. Whyburn [14] cuando estaba estudiando continuos en el plano.

1.23 Definición. Un continuo X es *semilocalmente conexo en un punto p de X*, si para todo abierto U de X que tiene p, existe un abierto V de X que tiene a p y que está contenido en U, tal que $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes. El continuo X es *semilocalmente conexo* si es semilocalmente conexo en cada uno de sus puntos.

El siguiente concepto fue dado por F. B. Jones [7] en un intento por generalizar la conexidad local de manera diferente a como lo había hecho Whyburn.

1.24 Definición. Sean X un continuo y p y q dos puntos de X. Diremos que X es *aposindético en p con respecto a q*, si existe un subcontinuo K de X tal que $p \in K^{\circ} \subset K \subset X \setminus \{q\}$. Diremos que es *aposindético en p* si es aposindético en p con respecto a cualquier punto q distinto de p y que es *aposindético* si es aposindético en cualquier punto de X.

1.25 Observación. Como consecuencia del Lema 1.21, si X es conexo en pequeño en p entonces X es aposindético en p.

1.26 Observación. Como consecuencia del Teorema 1.28, tendremos que un continuo es aposindético si y sólo si es semilocalmente conexo.

El siguiente concepto fue introducido por H. S. Davis y P. H. Doyle [4] al estudiar continuos invertibles.

1.27 Definición. Un continuo X es *casi conexo en pequeño en* x si para cada subconjunto abierto U de X que tiene a x, existe un subcontinuo K de X tal que $K^\circ \neq \emptyset$ y $K \subset U$.

El siguiente resultado nos muestra maneras equivalentes de escribir las definiciones anteriores utilizando la función $\mathcal{T}$.

1.28 Teorema. *Sea X un continuo. Entonces se tiene lo siguiente:*

(1) *X es localmente conexo si y sólo si para cada subconjunto cerrado A de X, se tiene que $\mathcal{T}(A) = A$.*

(2) *X es conexo en pequeño en p si y sólo si para cada subconjunto cerrado A de X tal que $p \in \mathcal{T}(A)$, resulta que $p \in A$.*

(3) *X es aposindético en p con respecto a q si y sólo si $p \notin \mathcal{T}(\{q\})$.*

(4) *X es aposindético si y sólo si $\mathcal{T}(\{p\}) = \{p\}$ para todo punto $p \in X$.*

(5) *X es semilocalmente conexo si y sólo si $\mathcal{T}(\{p\}) = \{p\}$ para todo punto $p \in X$.*

(6) *X es casi conexo en pequeño en p si y sólo si para cada subconjunto A de X tal que $p \in \mathcal{T}(A)^\circ$ se tiene que $p \in \overline{A}$.*

(7) *X es casi conexo en pequeño si y sólo si para cada subconjunto cerrado y no vacío A de X, $A^\circ = \mathcal{T}(A)^\circ$.*

Demostración: Sólo mostraremos (2), (5), (6) y (7).

(2) Supongamos que X es conexo en pequeño. Sea A un subconjunto cerrado de X y supongamos que $p \notin A$. Como X es conexo en pequeño en p, por el Lema 1.21 existe un subcontinuo K de X tal que $p \in K^\circ \subset K \subset X \setminus A$. De donde $p \notin \mathcal{T}(A)$.

Ahora supongamos que para todo subconjunto cerrado A de X, si $p \in \mathcal{T}(A)$ entonces $p \in A$. Sea D un subconjunto cerrado de X contenido en $X\setminus\{p\}$. Por nuestra suposición, se tiene que $p \notin \mathcal{T}(D)$. De aquí resulta que existe un subcontinuo K de X tal que $p \in K^{\circ} \subset K \subset X \setminus D$. De donde, por el Lema 1.21, X es conexo en pequeño en p.

(5) Supongamos que X es semilocalmente conexo en p. Por el Lema 1.5 (a), se tiene que $\{p\} \subset \mathcal{T}(\{p\})$. Sean $q \in X\setminus\{p\}$ y U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$ y $q \in X \setminus \overline{U}$. Como X es semilocalmente conexo en p, existe un subconjunto abierto V de X tal que $p \in V \subset U$ y $X \setminus V$ tiene un número finito de componentes. Por el Lema 1.9, q pertenece al interior de la componente de $X \setminus V$ que lo contiene, con esto se concluye que $q \notin \mathcal{T}(\{p\})$ y, por tanto, $\mathcal{T}(\{p\}) = \{p\}$.

Ahora supongamos que $\mathcal{T}(\{p\}) = \{p\}$ para todo punto $p \in X$. Sean $p \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$. Por nuestra suposición, para cada $q \in X \setminus U$, existe un subcontinuo K_q de X tal que $q \in K_q^{\circ} \subset K_q \subset X \setminus \{p\}$. Observermos que $X \setminus U \subset \bigcup_{q\in X\setminus U} K_q^{\circ}$. Como $X \setminus U$ es compacto, existen $q_1, \ldots, q_n \in X \setminus U$ tales que $X \setminus U \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_{q_j}^{\circ} \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_{q_j}$. Sea $V = X\setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_{q_j}$. Entonces V es un abierto tal que $p \in V \subset U$ tal que $X\setminus V$ tiene un número finito de componentes ya que es una unión finita de subcontinuos de X. Por tanto, X es semilocalmente conexo en $\{p\}$.

(6) Supongamos que X es casi conexo en pequeño en p. Sea A un subconjunto de X y supongamos que $p \in \mathcal{T}(A)^{\circ}$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{N}}(p) \subset \mathcal{T}(A)^{\circ}$. Como X es casi conexo en pequeño en p, para cada $n \geq N$, existe un subcontinuo W_n de X tal que $W_n^{\circ} \neq \emptyset$ y que $W_n \subset B_{\frac{1}{n}}(p) \subset \mathcal{T}(A)^{\circ}$. De aquí se tiene que $W_n \cap A \neq \emptyset$. Para cada $n \geq N$, sea $x_n \in W_n \cap \overline{A}$. Entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, es una sucesión de puntos de $\overline{A}$ que converge a p. Por tanto, $p \in \overline{A}$.

Ahora supongamos que si A es un subconjunto de X tal que si $p \in \mathcal{T}(A)^{\circ}$ entonces $p \in \overline{A}$. Sea U un subconjunto abierto de X que tiene a p. Sea V un subconjunto abierto de X tal que $p \in V \subset \overline{V} \subset U$. Veremos que alguna componente de $\overline{V}$ tiene interior diferente al conjunto vacío. Supongamos que todas las componentes de $\overline{V}$ tienen interior vacío. Sea $A = \partial(V)$. Observemos que A es un subconjunto cerrado de X que no tiene al punto p. Probaremos que $V \subset \mathcal{T}(A)$. Supongamos que existe un punto $x \in V \setminus \mathcal{T}(A)$. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $x \in W^\circ \subset W \subset X \setminus A$. Como ninguna componente de $\overline{V}$ tiene interior, debido a que W es un conjunto conexo con interior distinto del vacío, resulta que W intersecta tanto a V como $X \setminus V$. De donde se tiene que $W \cap \partial(V) \neq \emptyset$, esto es, $W \cap A \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $V \subset \mathcal{T}(A)$. Como $p \in V \subset \mathcal{T}(A)$, $p \in \mathcal{T}(A)^\circ$, pero $p \notin A = \overline{A}$, lo cual es una contradicción. Por tanto, alguna componente de $\overline{V}$ tiene interior diferente del vacío.

(7) Supongamos que X casi conexo en pequeño. Sea A un subconjunto cerrado y no vacío de X. Como, por el Lema 1.5, $A \subset \mathcal{T}(A)$, se tiene que $A^\circ \subset \mathcal{T}(A)^\circ$. Sea $x \in \mathcal{T}(A)^\circ$. Por (6), resulta que $x \in \overline{A} = A$. Por lo anterior, se tiene que $\mathcal{T}(A)^\circ \subset A$, esto es, $\mathcal{T}(A)^\circ \subset A^\circ$. Por tanto $A^\circ = \mathcal{T}(A)^\circ$.

Ahora supongamos que para todo subconjunto cerrado y no vacío A de X, se tiene que $A^\circ = \mathcal{T}(A)^\circ$. Sean x un punto de X y U un subconjunto abierto de X que tiene a x. Como $(X \setminus U)^\circ \cap U = \emptyset$, se tiene que $\mathcal{T}(X \setminus U)^\circ \cap U = \emptyset$. De donde existe un punto $y \in U$ tal que $y \notin \mathcal{T}(X \setminus U)$. Por tanto, existe un subcontinuo K de X tal que $y \in K^\circ \subset K \subset X \setminus (X \setminus U) = U$. Así, X es casi conexo en pequeño en x. Como x fue un punto arbitrario de X, X es casi conexo en pequeño. ■

La demostración del siguiente resultado es algo técnica y no será incluida [3].

1.29 Teorema. *Si X es un continuo tal que para cualquier subcontinuo Y de X se tiene que $\mathcal{T}(Y) = Y$, entonces X es localmente conexo.*

1.30 Teorema. [1] *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Entonces, para cada subconjunto no vacío B de Y, se tiene que $\mathcal{T}_Y(B) \subset f\mathcal{T}_X f^{-1}(B)$.*

Demostración: Sea $y \in Y \setminus f\mathcal{T}_X f^{-1}(B)$. Como $f^{-1}(y) \cap \mathcal{T}_X f^{-1}(B) = \emptyset$, para cada $x \in f^{-1}(y)$, existe un subcontinuo W_x de X tal que $x \in W_x^\circ \subset W_x \subset X \setminus f^{-1}(B)$. Como $f^{-1}(y)$ es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in f^{-1}(y)$ tales que $f^{-1}(y) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{x_j}^\circ$.

Observemos que $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{x_j}\right) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ y que $f^{-1}(y) \cap W_{x_j} \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto, $f\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{x_j}\right)$ es un continuo y $f\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{x_j}\right) \cap B = \emptyset$.

Notemos que $Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{x_j}^\circ\right)$ es un abierto de Y contenido en $f\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{x_j}\right)$. Para ver esto, observemos que, como $\bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{x_j}^\circ \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{x_j}$, se tiene que $X \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{x_j} \subset X \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{x_j}^\circ$, de donde:

$$f\left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}\right) \subset f\left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^\circ\right)$$

y

$$Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^\circ\right) \subset Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}\right).$$

Como f es suprayectiva, resulta que

$$Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^\circ\right) \subset f\left(X \setminus \left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}\right)\right) = f\left(\bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}\right).$$

Además, $y \in Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{x_j}^\circ\right)$ pues, como $f^{-1}(y) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{x_j}^\circ$, se tiene que $f^{-1}(y) \cap \left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^{\circ}\right) = \emptyset$. De donde $\{y\} \cap f\left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} x_j{}^{\circ}\right) = \emptyset$ y, por tanto, $y \in Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j}^{\circ}\right)$. De lo anterior concluimos que $y \notin \mathcal{T}_Y(B)$, lo que demuestra el teorema. ■

1.31 Definición. [6] Sean X un continuo y A y B dos subconjuntos no vacíos y disjuntos de X. Un subconjunto C de X es un *separador de A y B en X* si $X \setminus C = U \cup V$, donde $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$, $A \subset U$ y $B \subset V$. Si además C es un subconjunto cerrado de X, entonces se dice que *C es un separador cerrado de A y B en X.*

1.32 Teorema. [6] *Sea X un continuo. Si A es un subconjunto no vacío de X, entonces $\mathcal{T}(A)$ intersecta a cada separador cerrado de A y un punto de $\mathcal{T}(A)$.*

Demostración: Supongamos que el resultado no es cierto. Entonces existen un punto $p \in \mathcal{T}(A)$ y un subconjunto cerrado C de X tales que $X \setminus C = U \cup V$, $A \subset H$, $p \in K$, U y V son abiertos ajenos de X y $C \cap \mathcal{T}(A) = \emptyset$. Como $C \cap \mathcal{T}(A) = \emptyset$, para cada $c \in C$, existe un subcontinuo W_c de X tal que $c \in W_c^{\circ} \subset W_c \subset X \setminus A$. Como C es compacto, existen $c_1, \ldots, c_n \in C$ tales que $C \subset \bigcup_{j=1}^{n} W_{c_j}^{\circ}$. Por otro lado, como $\partial(V) = \overline{V} \setminus V \subset C$, por el Teorema 1.17, tenemos que $V \cup \bigcup_{j=1}^{n} W_{c_j} = Y$ tiene una cantidad finita de componentes. Además, Y es un subconjunto cerrado de X, ya que $\partial(V) \subset \bigcup_{j=1}^{n} W_{c_j}$. Observemos que $p \in V \subset Y^{\circ}$. Sea D la componente de Y que contiene a p. Por el Lema 1.9, se tiene que $p \in D^{\circ}$, esto implica que $p \notin \mathcal{T}(A)$, lo cual contradice el hecho de que $p \in \mathcal{T}(A)$. Por tanto, $C \cap \mathcal{T}(A) \neq \emptyset$. ■

1.33 Corolario. [6] *Si X es un continuo y A es un subconjunto no vacío de X, entonces toda componente de $\mathcal{T}(A)$ intersecta a $\overline{A}$.*

Demostración: Supongamos que B es una componente de $\mathcal{T}(A)$ tal que $B \cap \overline{A} = \emptyset$. Como $\mathcal{T}(A)$ es un espacio métrico y compacto, por el Teorema 1.16, existen dos subconjuntos cerrados y ajenos H y K de $\mathcal{T}(A)$ tales que $\mathcal{T}(A) = H \cup K$, $\overline{A} \subset H$ y $B \subset K$. Como todo espacio métrico es normal, existen dos subconjuntos abiertos y ajenos U y V de X tales que $H \subset U$ y $K \subset V$. Sea $C = X \setminus (U \cup V)$. Como X es conexo, $C \neq \emptyset$. Además, C es un separador cerrado de A y B tal que $C \cap \mathcal{T}(A) = \emptyset$, lo cual contradice al Teorema 1.32. ■

1.34 Corolario. [6] *Si X es un continuo, A es un subconjunto cerrado de X y $\mathcal{T}(A)$ es totalmente disconexo, entonces $\mathcal{T}(A) = A$.*

Demostración: Recordemos que, por el Lema 1.5, $A \subset \mathcal{T}(A)$, así que basta ver que $\mathcal{T}(A) \subset A$. Sea B una componente de $\mathcal{T}(A)$. Por el Corolario 1.33 $B \cap A \neq \emptyset$. Como $\mathcal{T}(A)$ es totalmente disconexo, se tiene que B consta de un sólo punto, por lo que $B \subset A$ y $\mathcal{T}(A) \subset A$. ■

1.35 Teorema. [11] *Sean X y Y dos continuos. Si A y B son subconjuntos cerrados y propios de X y Y, respectivamente, entonces $\mathcal{T}(A \times B) = A \times B$.*

Demostración: Por el Lema 1.5, basta ver que $\mathcal{T}(A \times B) \subset A \times B$. Sea $(x, y) \in (X \times Y) \setminus (A \times B)$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $x \in X \setminus A$. Por tanto, existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset X \setminus A$. Sea $z \in Y \setminus B$. Observemos que $(X \times \{z\}) \cap (A \times B) = \emptyset$. Entonces

$$(x, y) \in (\overline{U} \times Y) \cup (X \times \{z\}) \subset (X \times Y) \setminus (A \times B).$$

Como $(\overline{U} \times Y) \cup (X \times \{z\})$ es un continuo que tiene a (x, y) en su interior, tenemos que $(x, y) \notin \mathcal{T}(A \times B)$ y, por tanto, $\mathcal{T}(A \times B) \subset A \times B$. ■

1.36 Teorema. [6] *Sean X y Y dos continuos. Si A y B son subconjuntos cerrados y totalmente disconexos de X y Y, respectivamente, entonces para cualquier subconjunto cerrado K de $A \times B$, se tiene que $\mathcal{T}(K) = K$.*

Demostración: Sea K un subconjunto cerrado de $A \times B$. Por el Teorema 1.35, se tiene que $\mathcal{T}(A \times B) = A \times B$. Como K es un subconjunto de $A \times B$, $\mathcal{T}(K) \subset \mathcal{T}(A \times B) = A \times B$. Como A y B son totalmente disconexos, $A \times B$ también lo es. Así, $\mathcal{T}(K)$ es totalmente disconexo. Por el Corolario 1.34, $\mathcal{T}(K) = K$. ■

1.37 Corolario. [6] *Si X y Y son continuos y K es un subconjunto cerrado y numerable de $X \times Y$, entonces $\mathcal{T}(K) = K$.*

Demostración: Sea K un subconjunto cerrado y numerable de $X \times Y$. Sean $\pi_X: X \times Y \to X$ y $\pi_Y: X \times Y \to Y$ las funciones proyección. Como K es numerable y compacto, se tiene que $\pi_X(K)$ y $\pi_Y(K)$ son subconjuntos numerables y compactos de X y Y, respectivamente. Como $K \subset \pi_X(K) \times \pi_Y(K)$, por el Teorema 1.36, resulta que $\mathcal{T}(K) = K$. ■

1.38 Observación. Notemos que, por el inciso (1) del Teorema 1.28, la función $\mathcal{T}$ es la función identidad al restringirla a la familia de subconjuntos cerrados de un continuo locamente conexo X. Así que la función $\mathcal{T}$ nos ayuda a ver "qué tan lejos" está un continuo de ser localmente conexo. De esta forma el Corolario 1.37 nos dice que el cuadrado de un continuo está más cerca de ser localmente conexo que el continuo mismo.

En los años ochenta la función $\mathcal{T}$ fue utilizada por James T. Rogers, Jr. en su estudio de los continuos homogéneos [13]. Últimamente, esta función ha sido utilizada para el entendimiento de ciertos hiperespacios de continuos [10].

El lector interesado en profundizar un poco en el estudio de la función $\mathcal{T}$ puede hacerlo en [11].

REFERENCIAS

[1] D. P. Bellamy, *Continua for which the set function $\mathcal{T}$ is continuous*, Amer. Math. Soc., 151 (1970), 581–587.

[2] D. P. Bellamy, *Some topics in modern continua theory*, en Continua, Decompositions, Manifolds. Editores: R. H. Bing, W. T. Eaton y M. P. Starbird. University of Texas Press, (1983), 1–26.

[3] D. P. Bellamy, *Set functions and continuous maps*, en General Topology and Modern Analysis. Editores: L. F. McAuley y M. M. Rao. Academic Press, (1981), 31–38.

[4] H. S. Davis and P. H. Doyle, *Invertible continua*, Portugal Math., 26 (1967), 487–491.

[5] H. S. Davis, D. P. Stadtlander and P. M. Swingle, *Properties of the set function* $\mathcal{T}^n$, Portugal Math., 21 (1962), 114–133.

[6] R. W. FitzGerald, *The cartesian product of nondegenerate compact continua is n–point aposyndetic*, Topology Conference (Arizona State Univ., Tempe, Ariz., 1967), Arizona State University, Tempe, Ariz., (1968), 324–326.

[7] F. B. Jones, *Aposyndetic continua and certain boundary problems*, Amer. J. Math., 53 (1941), 545–553.

[8] F. B. Jones, *On certain type of homogeneous plane continua*, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1995), 735–740.

[9] F. B. Jones, *The aposyndetic decomposition of homogeneous continua*, Topology Proc., 8 (1983), 51–54.

[10] S. Macías, *Aposyndetic properties of symmetric products of continua*, Topology Proc., 22 (1997), 281–296.

[11] María Antonieta Molina Garza Galindo, *Algunos aspectos sobre la función $\mathcal{T}$ de Jones,* Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, U. N. A. M., 1998.

[12] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An introduction,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[13] J. T. Rogers, Jr., *Decompostion of continua over the hyperbolic plane,* Trans. Amer. Math. Soc., 310 (1988), 277–291.

[14] G. T. Whyburn, *Semi–locally–connected sets*, Amer. J. Math., 61 (1939), 733–749.

Sergio Macías
Instituto de Matemáticas, UNAM.,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria,
México D. F., C. P.04510. México.
correo electrónico: macias@servidor.unam.mx

Maria Antonieta Molina
Colegio Vista Hermosa, México, D.F.
correo electrónico: molinaggm@cvh.edu.mx