Aportaciones Matemáticas
Serie Comunicaciones **20** (1997) 109–116

Un Poco de Continuos Homogéneos

Sergio Macías
Instituto de Matemáticas, UNAM
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
04510 México, D. F.
México
correo electrónico: macias@servidor.unam.mx

Resumen. El objetivo del presente trabajo es presentar algunos ejemplos de continuos homogéneos.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Como ejemplos de continuos tenemos a los siguientes:

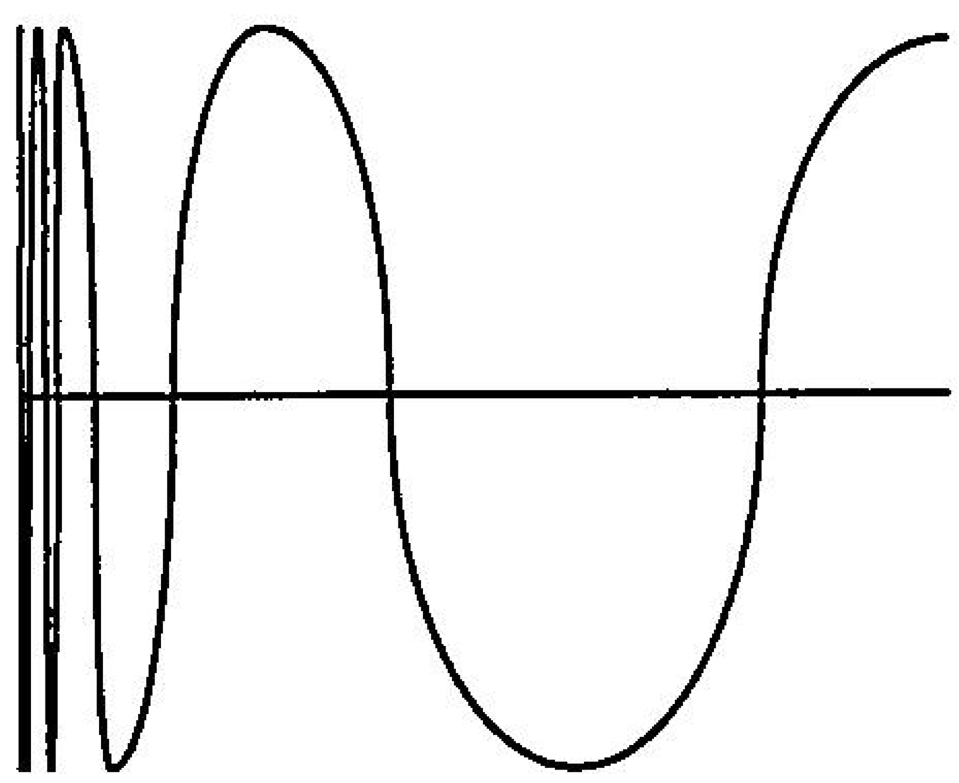

Figura 1.

1991 Mathematics Subject Classification: 54F20.

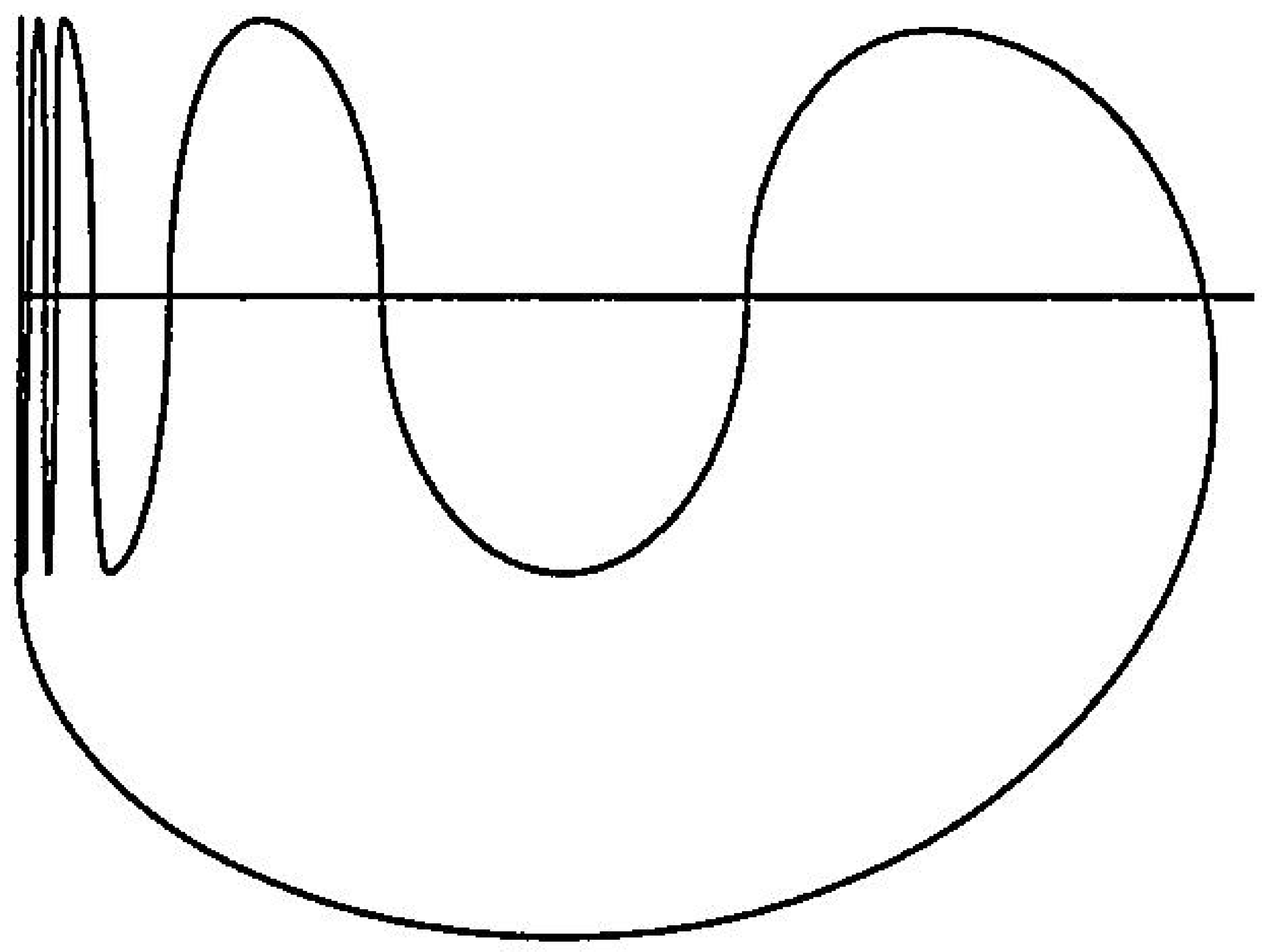

Figura 2.

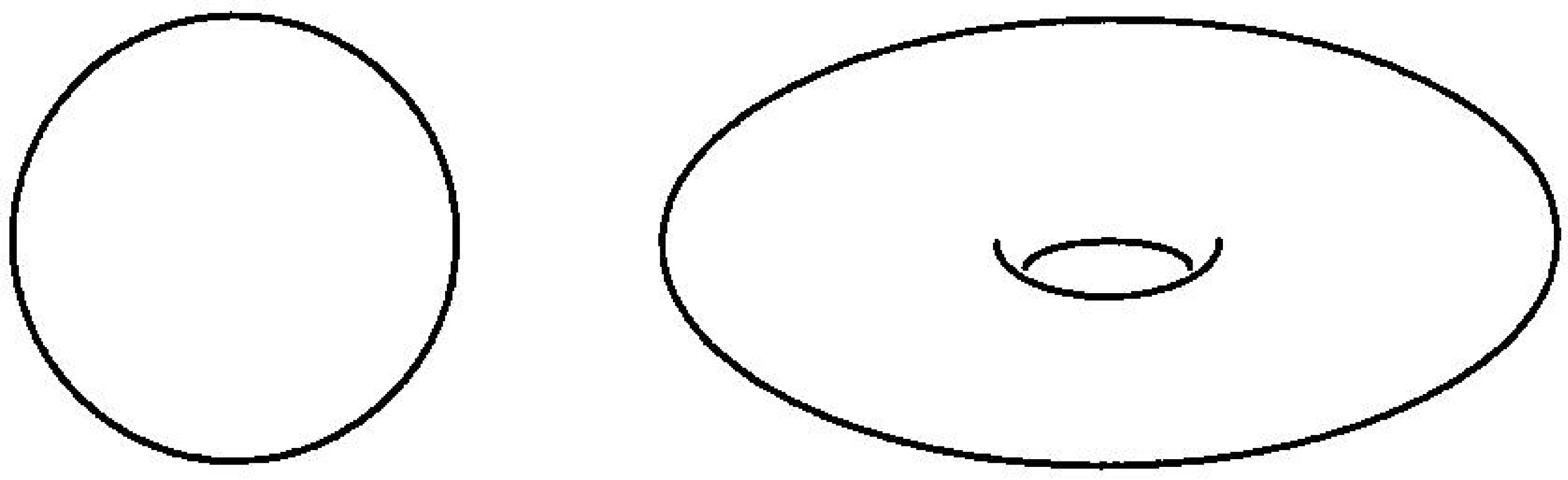

Figura 3.

Un *subcontinuo* es un continuo contenido en un espacio. Diremos que una función continua $f: X \to Y$ entre continuos es un *homeomorfismo* si es biyectiva y la función inversa $f^{-1}: Y \to X$ también es continua.

Se dice que un continuo X es *homogéneo* si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 de X, existe un homeomorfismo $h: X \to X$ tal que $h(x_1) = x_2$. De los ejemplos anteriores sólo la circunferencia y el toro son homogéneos.

Antes de continuar, hablaremos un poco de un espacio el cual es como "lo opuesto" a un continuo. Este espacio se llama el *Conjunto de Cantor* y se le denota como $\mathcal{C}$. Este conjunto se construye de la siguiente manera. Comenzamos con el intervalo $[0,1] = C_0$. Sea $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Sea $C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$, etc. (figura 4). El conjunto de Cantor se define como $\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$.

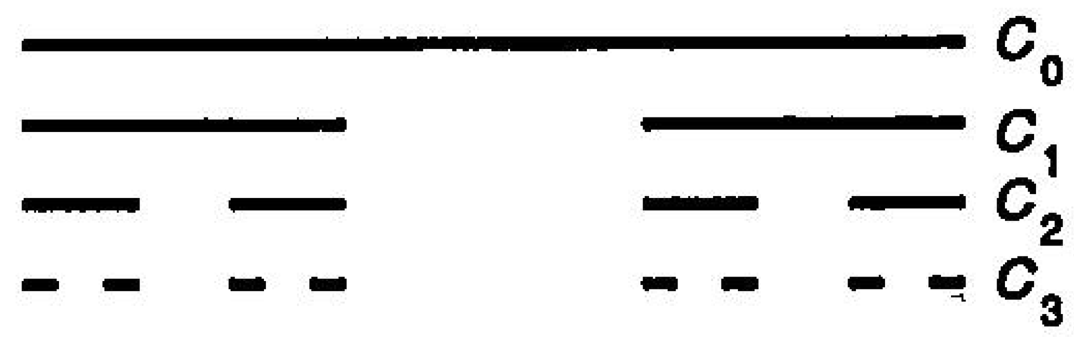

Figura 4.

$\mathcal{C}$ está muy lejos de ser un continuo, pues sus componentes son puntos. Pero es un conjunto compacto el cual es **homogéneo.** Uno podría pensar que los puntos "extremos" son "diferentes" de los demás puntos pero no, eso parece por la forma en que está metido $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}$.

Ahora consideremos una construcción parecida a la construcción anterior, pero ahora en el plano. Empezamos con el cuadrado unitario $[0,1] \times [0,1]$, lo dividimos en nueve cuadrados iguales y le quitamos el interior del cuadrado de en medio. Repetimos el proceso con cada uno de los ocho cuadrados restantes y así sucesivamente (figura 5). Al espacio que se obtiene como la intersección de los espacios construidos se le llama *la curva universal de Sierpiński* (vea [8, 1.11]) y la denotamos como $\mathcal{S}$. En este caso $\mathcal{S}$ **sí** es un continuo pero **no** es homogéneo. Se le llama universal pues cualquier subcontinuo *flaco* (esto es, no contiene discos) X del plano puede ser "metido" en $\mathcal{S}$, es decir, hay una copia homeomorfa de X en $\mathcal{S}$. Otra propiedad importante de $\mathcal{S}$ es que es localmente conexo.

Consideremos la construcción análoga en $\mathbb{R}^3$. Primero consideremos el cubo unitario $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Dividimos cada cara en nueve cuadrados iguales y hacemos una perforación utilizando el cuadrado de en medio. Repetimos el proceso anterior en cada uno de los cuarenta y ocho cuadrados restantes y así sucesivamente (figura 6). Al espacio que resulta de la intersección de los espacios construidos se llama *la curva universal de Menger* y se le denota como $\mathcal{M}$. Este espacio también es un continuo. $\mathcal{M}$ **sí** es homogéneo y es universal pues hay una copia homeomorfa de cada *curva*, es decir, de cada continuo de dimensión uno. Claramente $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ tiene muchas propiedades, algunas de ellas son:

1. $\mathcal{M}$ es localmente conexa;
2. $\mathcal{M}$ es *fuertemente n–homogénea,* esto es, si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, \ldots, y_n\}$ son dos familias de n puntos de $\mathcal{M}$ entonces existe un homeomorfismo $h: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ tal que $h(x_\ell) = y_\ell$ para toda $\ell \in \{1, \ldots, n\}$.
3. Para toda $m \in \mathcal{M}$, existe un abierto U de $\mathcal{M}$ tal que $m \in U$, U es n–homogéneo y los homeomorfismos utilizados para la n–homogeneidad pueden ser tomados de tal forma que se extienden a la identidad fuera de U (vea [1] y [6]).

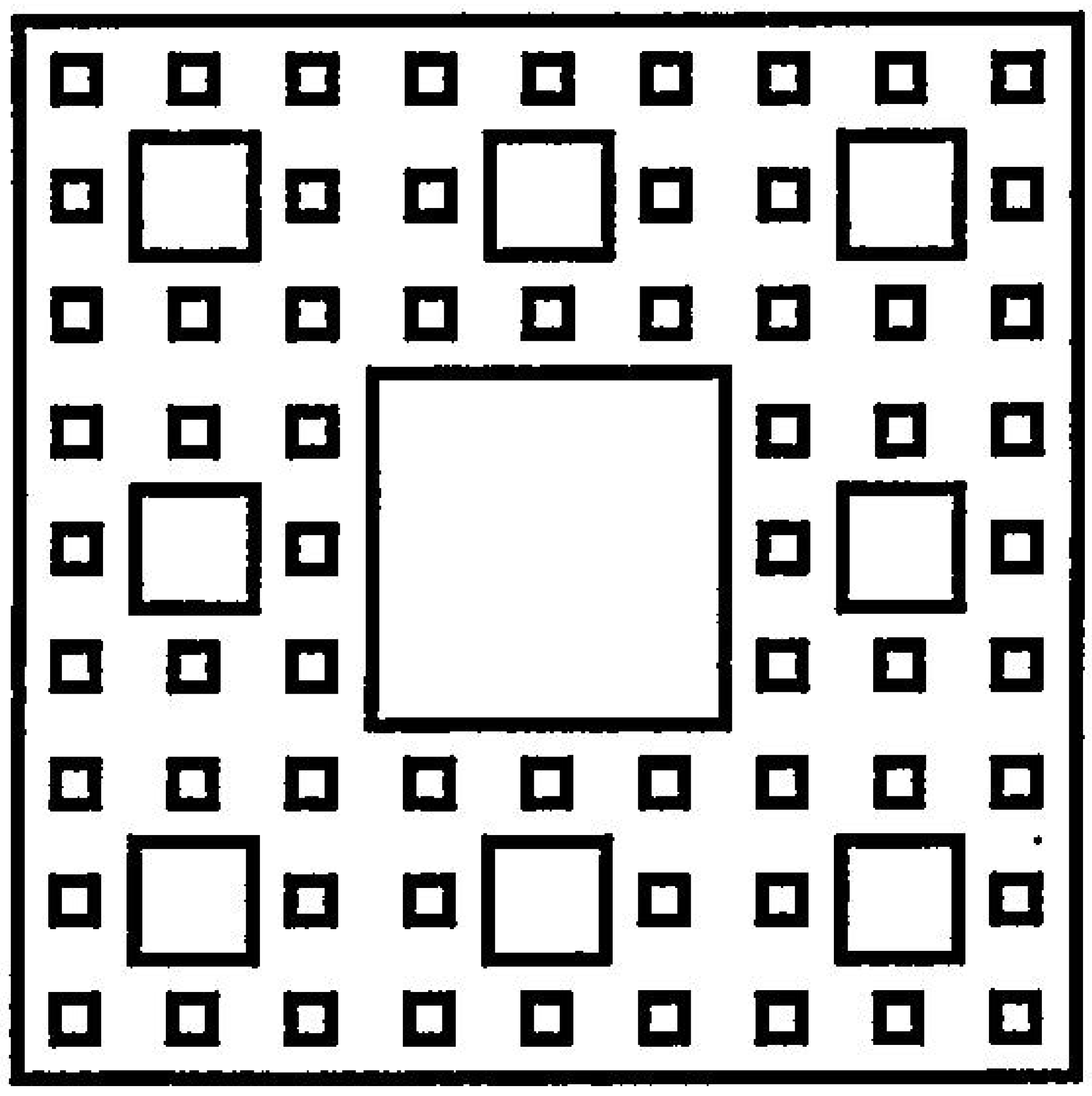

Figura 5.

Un resultado importante es:

1.1 Teorema ([2]). *Si X es una curva homogénea localmente conexa entonces X es homeomorfa a $\mathcal{M}$ o a la circunferencia unitaria $\mathcal{S}^1$.*

¿Serán $\mathcal{S}^1$ y $\mathcal{M}$ las únicas curvas homogéneas? La respuesta es **no.** Tomemos un toro sólido T_0, dentro de T_0 consideremos otro toro sólido T_1 de tal forma que dé dos vueltas con respecto a T_0. Dentro de T_1 consideremos otro toro sólido T_2 de tal forma que dé dos vueltas con respecto a T_1 y cuatro con respecto a T_0 y así sucesivamente (figura 7).

Sea $\Sigma_2 = \bigcap_{n=0}^{\infty} T_n$. A Σ_2 se le llama el *solenoide diádico.* Observemos que si hacemos un corte transversal al toro sólido T_0 de la construcción anterior lo que obtenemos un conjunto homeomorfo al conjunto de Cantor (figura 8). De hecho se tiene que, "localmente", Σ_2 es homeomorfa al conjunto de Cantor por un intervalo abierto, $\mathcal{C} \times (a, b)$.

El número dos no tiene ningún privilegio. Podemos construir muchos solenoides, por ejemplo dando tres vueltas siempre; cinco vueltas siempre; dando $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ vueltas; etc. De hecho hay una cantidad no numerable de solenoides "diferentes". En particular $\mathcal{S}^1$ es un solenoide. Todos los solenoides son curvas homgéneas y ninguna, salvo $\mathcal{S}^1$, es "aplanable". Por tanto, cualquier solenoide Σ "vive" dentro de $\mathcal{M}$.

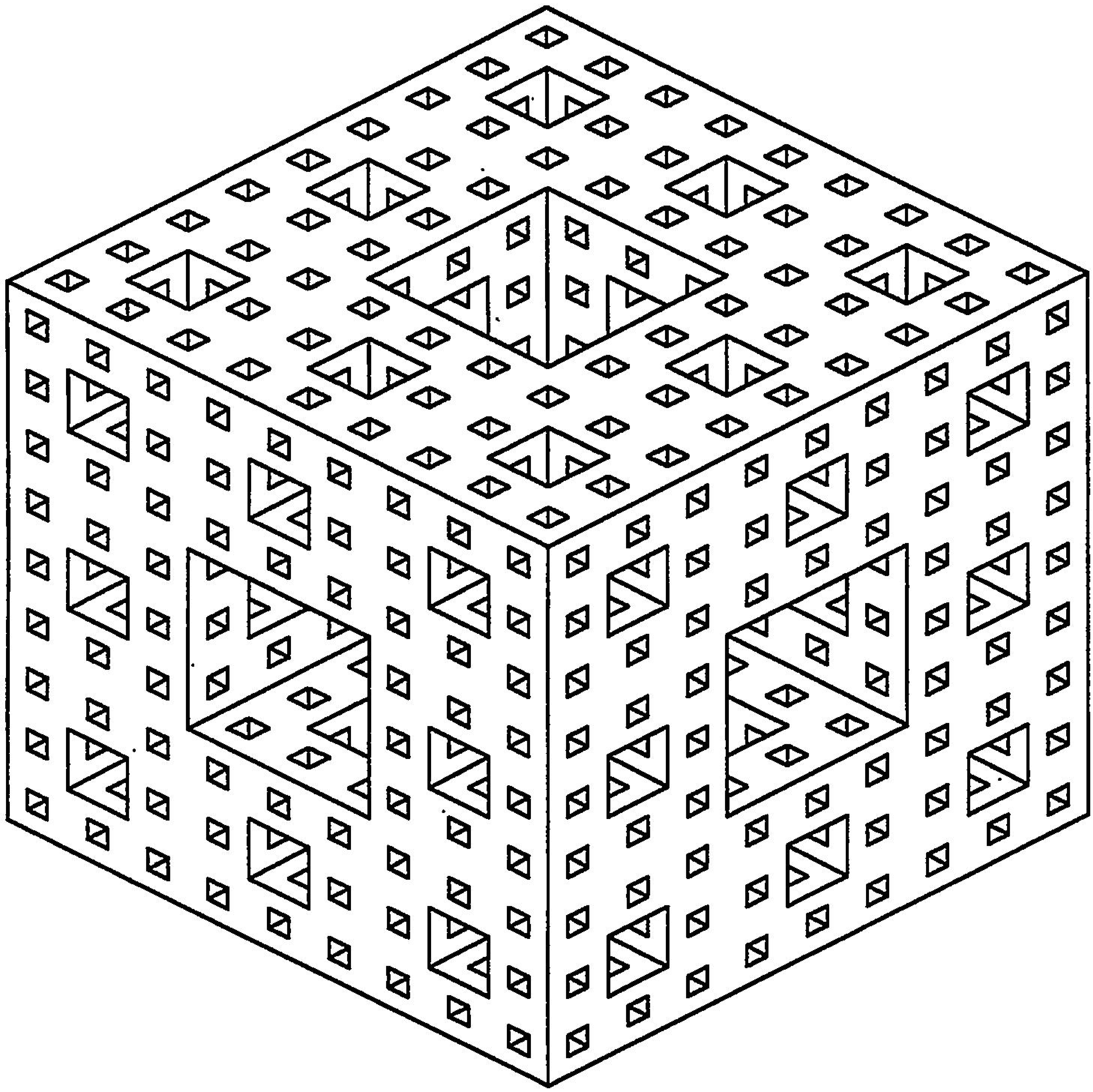

Figura 6.

Diremos que un continuo X es *descomponible* si se puede poner de la forma $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de X. X es *indescomponible* si no es descomponible.

Todos los solenoides, salvo S^1 son indescomponibles y todos sus subcontinuos propios con más de un punto son arcos. De hecho se tiene el siguiente:

1.2 Teorema [3]. *Un continuo homogéneo X es un solenoide si y sólo si todos sus subcontinuos propios con más de un punto son arcos.*

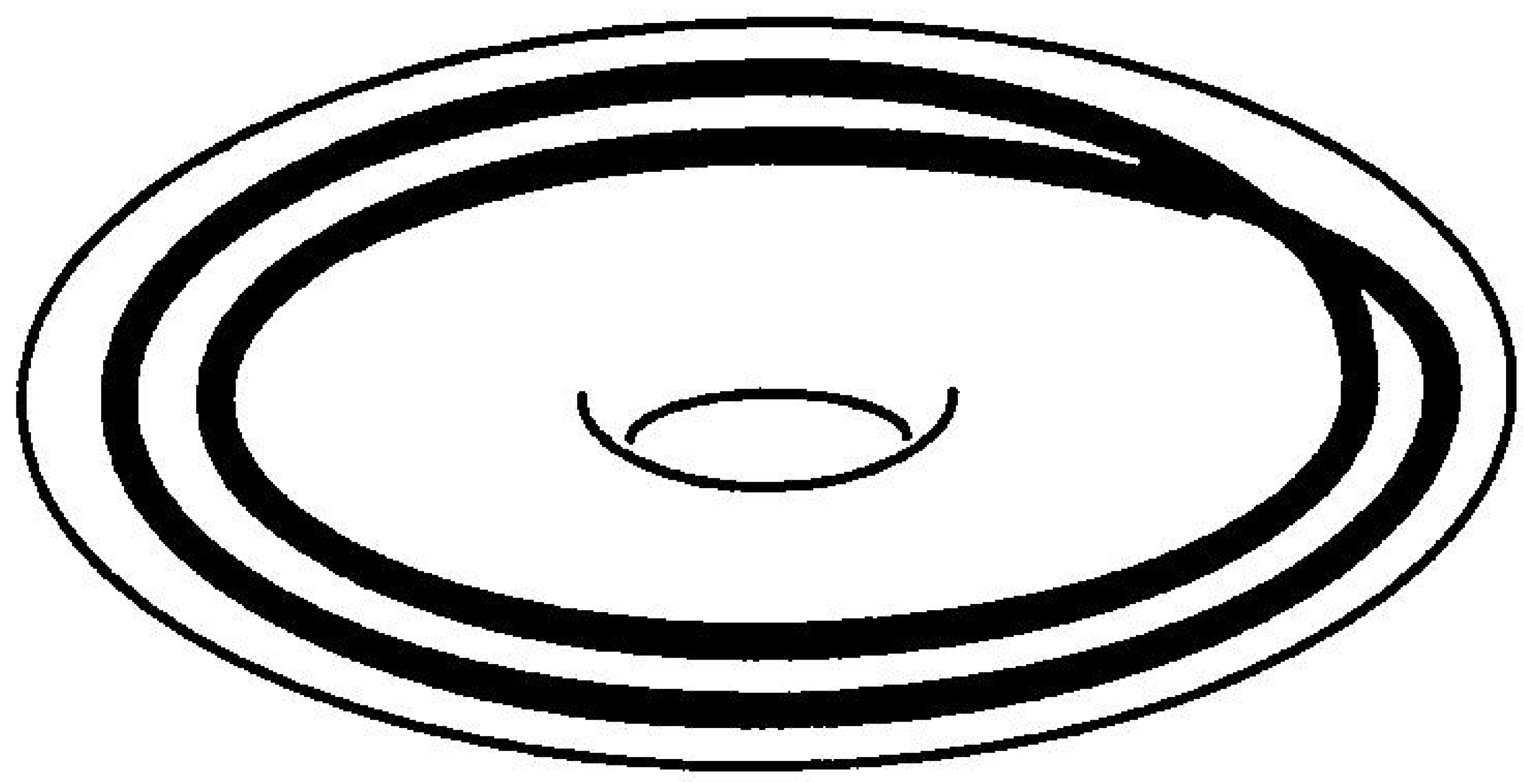

Figura 7.

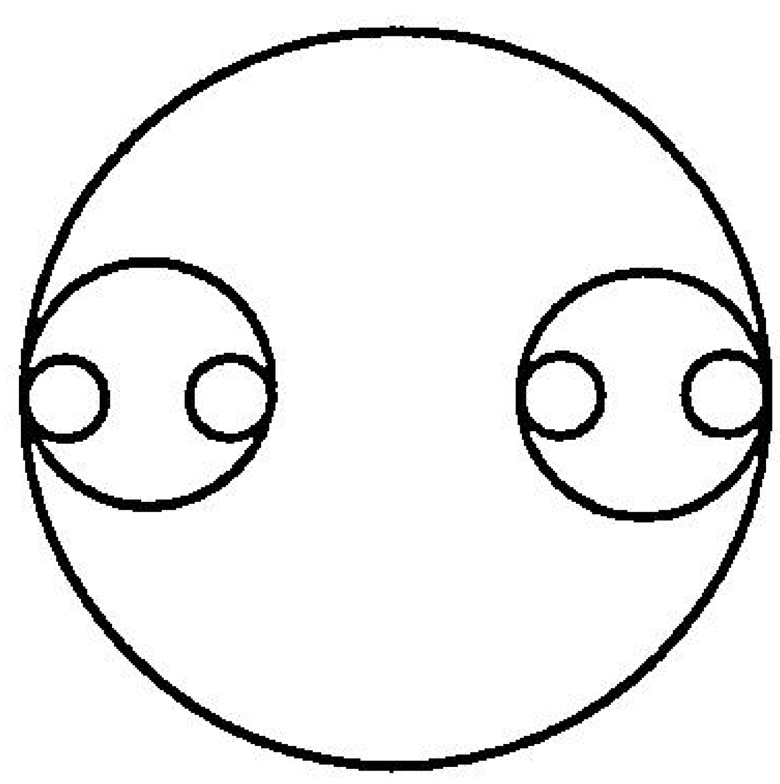

Figura 8.

Otra manera de construir los solenoides es el "torcer" la circunferencia $\mathcal{S}^1$ cada vez más y más hasta que en el límite se obtiene el solenoide (figura 9).

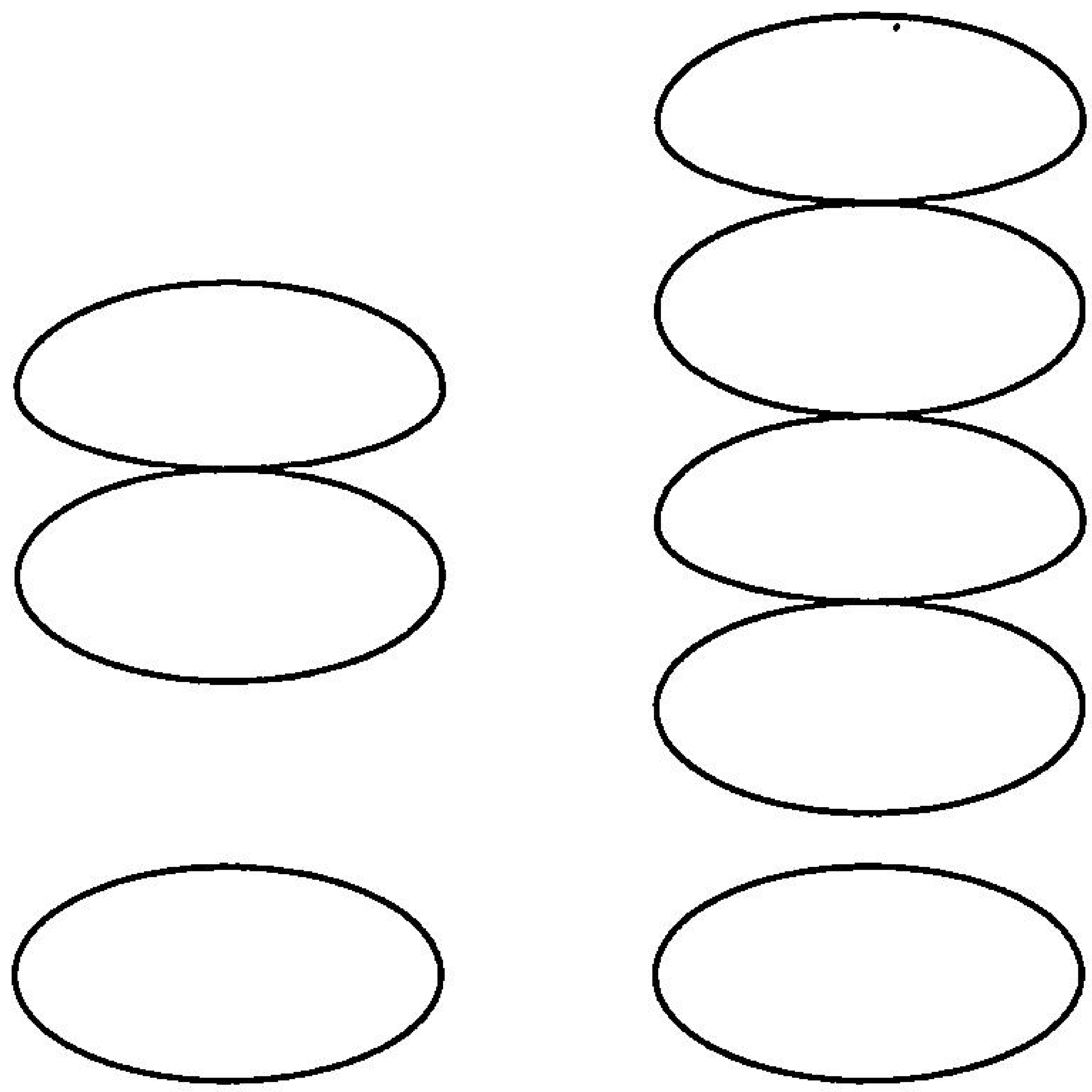

Figura 9.

¿Serán $\mathcal{M}$ y $\mathcal{S}^1$ las únicas curvas homogéneas descomponibles? o, poniéndolo de otra manera, ¿existe una curva homogénea y descomponible que no sea localmente conexa?

J. H. Case construyó una curva descomponible que no es localmente conexa $\mathcal{C}$ "torciendo" una de las circunferencias de $\mathcal{M}$. Posteriormente J. T. Rogers Jr. demostró que $\mathcal{C}$ es homogénea y *colocalmente conexa*, esto es, cada punto tiene una base de abiertos cuyo complemento es conexo (vea [9]).

Posteriormente P. Minc y J. T. Rogers Jr. construyeron una cantidad no numerable de curvas homogéneas "torciendo" un número finito de las circunferencias de $\mathcal{M}$ y preguntaron si se obtendría una curva homogénea al "torcer" una cantidad infinita de las circunferencias de $\mathcal{M}$ (vea [7]). Karen Villarreal contestó a esta preguna dando una respueta negativa (vea [10]).

Para terminar, mencionaremos que existe un continuo llamado el *pseudoarco* el cual es indescomponible y es homeomorfo a todos sus subcontinuos con más de un punto y, por tanto, todos sus subcontinuos con más de un punto son indescomponibles, fue construido en $\mathbb{R}^2$ y es homogéneo. El pseudoarco ha resultado ser un espacio bastante importante dentro de la Teoría de los Continuos, a tal grado que W. Lewis está escribiendo un libro sobre este espacio. Para tener más información del pseudoarco véase el artículo expositiorio [5].

Bibliografía

1. Anderson, R. D.,*A Characterization of the Universal Curve and a Proof of its Homogeneity*, Ann. of Math. **67**, (1958), 313–324.
2. Anderson, R. D., *One–Dimensional Continuous Curves and a Homogeneity Theorem*, Ann. of Math. **68**, (1958), 1–16.
3. Hagopian, C. L., *A Characterization of Solenoids*, Pacific Math. J. **68**, (1977), 425–435.
4. Kuratowski, K., *Topology II*, Academic Press (1968).
5. Lewis, W., *The Pseudo–arc*, Contemporary Mathematics **117**, (1997), 103–123.
6. Mayer, J. C., L. G. Oversteegen, and E. D. Tymchatyn, *The Menger Curve*, Dissertationes Math. **252**, (1986), 1–45.
7. Minc, P. and J. T. Rogers Jr., *Some New Examples of Homogeneous Curves*, Top. Proc. **10**, (1985), 347–356.
8. Nadler, S. B. Jr., *Continuum Theory*, Marcel Dekker (1992).
9. Rogers, J. T. Jr., *An Aposyndetic Homogeneous Curve That is not Locally Connected*, Houston J. Math. **9**, (1983), 433–440.
10. Villareal, K., *The Space obtained by Spinning the Menger Curve About Infinitely Many of its Holes is not Homogeneous*, Top. Proc. **16**, (1991), 233–238.