CAPÍTULO 1

Funciones Especiales Entre Continuos II

Franco Barragán, Anahí Rojas
Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca, México
Sergio Macías
Universidad Nacional Autónoma de México, D. F., México

1. Introducción

La temática de este escrito pertenece a la rama de la Topología conocida como Teoría de los Continuos. Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Para un bosquejo de la historia de la Teoría de los Continuos puede consultar [**2**]. Tal como sucede en la mayoría de las áreas de la Matemática, es relevante estudiar funciones entre los espacios o colecciones de objetos que se investigan; en esta parte de la Topología es de suma importancia considerar y estudiar tipos de funciones entre continuos.

Desde los inicios de la Teoría de los Continuos, se ha dado particular importancia al estudio de las funciones entre continuos. Una de las clases de funciones más estudiadas es la clase de las funciones continuas, introducidas en 1910 por M. Fréchet [**8**], sin embargo, pronto surgió la necesidad de considerar otras condiciones a las funciones, además de la continuidad. Así, a través del tiempo se han definido diversas clases de funciones, dentro de las más conocidas en esta teoría, tenemos las siguientes: funciones abiertas, definidas en 1913 por H. Weyl [**17**]; funciones monótonas, estudiadas por R. L. Moore en 1925 [**13**]; y las funciones confluentes, introducidas en 1964 por J. J. Charatonik [**3**]. Posteriormente, surgen otras clases de funciones que están contenidas o que contienen a alguna de estas tres clases de funciones. En particular, las clases de funciones del tipo abierta: homeomorfismos, semiabiertas, funciones MO, funciones OM y casi interiores; las clases de funciones del tipo monótona: fuertemente monótonas, a lo más monótonas, casi monótonas, débilmente monótonas, fuertemente libremente descomponibles y libremente descomponibles; y las clases de funciones del tipo confluente: semiconfluentes, empalmantes, débilmente confluentes, atriódicas, pseudoconfluentes, frágilmente confluentes y frágilmente semiconfluentes. Es de destacar que todas estas clases de funciones han mostrado ser muy útiles en esta teoría, principalmente en la generación y clasificación de continuos que son dos de las líneas básicas de investigación en esta parte de la matemática. Para un recuento de cómo las funciones han contribuido en estas dos líneas de investigación podemos ver [**2**].

En 1979, T. Maćkowiak [**12**] realiza un compendio de varias clases de funciones, estudia la relación entre estas clases y muestra la utilidad de las mismas para obtener clases de continuos. De manera similar, en 1992, Sam B. Nadler, Jr. en su libro [**15**], hace un estudio de algunas clases de funciones, en tal referencia menciona que: "*uno no puede estudiar continuos sin considerar tipos especiales de funciones*", [**15**, pág. 277]. En [**1**], se realiza un estudio detallado de las inclusiones que existen entre las clases de funciones: monótonas, abiertas, casi interiores, confluentes, débilmente confluentes, funciones MO, funciones OM, casi monótonas y débilmente monótonas. Además, se muestran ejemplos de funciones para verificar que algunas inclusiones son propias.

Para continuar con el trabajo presentado en [**1**] y seguir estudiando clases de funciones especiales entre continuos, el objetivo de este escrito es analizar las inclusiones que existen entre las clases de funciones: a lo más monótonas, atriódicas, empalmantes, frágilmente confluentes, frágilmente semiconfluentes, fuertemente libremente descomponibles, fuertemente monótonas, homeomorfismos, libremente descomponibles, ligeras, pseudoconfluentes, semiabiertas, semiconfluentes y simples. También se estudiará la relación entre estas clases de funciones y las clases de funciones estudiadas en [**1**]. Cuando alguna inclusión no se satisfaga, se mostrará un ejemplo que lo justifique. Además, se analizarán algunas de estas clases de funciones consideradas con rango localmente conexo.

El trabajo lo hemos dividido en cinco secciones. En la segunda sección se proporcionan conceptos que son útiles para la comprensión de este capítulo. Además, se busca familiarizar al lector con la notación que se usa. En la tercera sección, se analizan las inclusiones existentes entre las clases de funciones proporcionadas en este trabajo. En la cuarta sección, se muestran ejemplos para garantizar que algunas de estas inclusiones son propias. En la quinta y útima sección, se verifica que algunas de estas clases de funciones coinciden cuando se consideran clases de funciones con rango localmente conexo.

2. Preliminares

En esta sección se introducen los conceptos y resultados necesarios para la buena comprensión de este trabajo. Un *continuo* es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* es un continuo contenido como subespacio en algún otro continuo. Considerando un continuo X y $A \subseteq X$, el *interior* y la *cerradura* de A en X los denotamos por $\mathrm{int}(A)$ y $Cl(A)$, respectivamente. Con $\mathbb{N}$ denotamos al conjunto de los números naturales y con $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales. Las nociones topológicas no definidas en este escrito, pueden consultarse en [**10**], [**14**] o [**15**].

Iniciamos con ejemplos básicos de continuos, los cuales son muy útiles para los objetivos de este trabajo.

EJEMPLO 2.1. *Ejemplos de continuos.*

a) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$. El intervalo cerrado $[a, b]$ es un continuo. Cualquier espacio homeomorfo a $[a, b]$ también es un continuo y se le llama arco.

b) *La circunferencia unitaria* $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ *es un continuo. Todo espacio homeomorfo a* S^1 *también es un continuo y se le llama curva cerrada simple.*

c) *El conjunto* $T = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$ *es un continuo. Cualquier espacio el cual es homeomorfo a* T *también es un continuo y se le llama triodo simple.*

d) *El conjunto* $\{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$ *es un continuo, conocido como curva del topólogo o continuo* $\sin(\frac{1}{x})$.

El resultado que sigue muestra una forma de cómo construir un continuo, a partir de una familia anidada de subcontinuos.

TEOREMA 2.2. *Sean* X *un espacio métrico compacto y* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una sucesión de subcontinuos de* X*. Si* $X_{n+1} \subseteq X_n$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ *es un subcontinuo de* X*.*

DEMOSTRACIÓN: Primero veamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es no vacío. Supongamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$. Se sigue que $X = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Consecuentemente, $\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus X_n) = X$. Puesto que X_n es cerrado, para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\{X \setminus X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta para X. Como X es compacto, existe una colección finita $\{X_j : j \in \{1, \ldots, k\}\}$ tal que $\bigcup_{j=1}^{k}(X \setminus X_j) = X$. Sea $m = \max\{1, \ldots, k\}$. Luego, $X = X \setminus X_m$. De donde X_m es vacío. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$.

Por otra parte, puesto que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es un conjunto cerrado dentro del compacto X, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es compacto.

Finalmente, supongamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es disconexo. Luego, existen dos subconjuntos cerrados y disjuntos A y B de X tales que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = A \cup B$. Sean U y V subconjuntos disjuntos y abiertos de X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. De aquí, $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq U \cup V$. Así, por [**11**, Lema 1.6.7, pág. 44], existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subseteq U \cup V$. Como X_N es conexo, por [**14**, Lema 23.2, pág. 149], $X_N \subseteq U$ o $X_N \subseteq V$. Supongamos que $X_N \subseteq U$. Puesto que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq X_N \subseteq U$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = A \cup B$, se sigue que $B \subseteq U$. De donde $B \subset U \cap V$, lo cual es una contradicción. Así, $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es conexo y por lo tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es un subcontinuo de X. □

Existen muchas clases de continuos, sin embargo, en este trabajo estamos interesados en los continuos irreducibles y en los continuos localmente conexos. Es por esto que a continuación, presentamos la definición de cada uno de ellos.

DEFINICIÓN 2.3. *Sea* X *un continuo.*

a) *Se dice que* X *es irreducible si existen dos elementos* a *y* b *de* X *tales que ningún subcontinuo propio de* X *contiene al conjunto* $\{a, b\}$*.*

b) *Se dice que* X *es localmente conexo en un punto* x *de* X*, si para cualquier subconjunto abierto* U *de* X *que contiene a* x*, existe un subconjunto abierto y conexo* V *de* X *tal que* $x \in V \subset U$*. Se dice que* X *es localmente conexo si* X *es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

El arco, la curva cerrada simple y el triodo simple son ejemplos de continuos localmente conexos. Sin embargo, el continuo $\sin(\frac{1}{x})$ no es localmente conexo. Por otra parte, el arco y el continuo $\sin(\frac{1}{x})$ son continuos irreducibles. Además, la curva cerrada simple y el triodo simple no son irreducibles.

Una caracterización importante y conveniente para nuestros objetivos, de los continuos localmente conexos, es la que se da a continuación.

TEOREMA 2.4. *Sea X un continuo. El continuo X es localmente conexo si y sólo si cada una de las componentes de los conjuntos abiertos en X es abierto en X.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X es localmente conexo. Tomemos un conjunto abierto U de X y C_1 una componente de U. Sea $x \in C_1$, por hipótesis, existe un abierto y conexo V_x de X tal que $x \in V_x \subseteq U$. Por otro lado, como C_1 es una componente de U y V_x es un conexo, se tiene que $V_x \subseteq C_1$. Así, C_1 es un subconjunto abierto en X. Así, cada una de las componentes del abierto U es abierta en X.

Recíprocamente, tomemos un punto $x \in X$ y U un abierto en X tal que $x \in U$. Sea C la componente de U que tiene a x. Por hipótesis, C es abierto en X. Así, C satisface la definición de que X es localmente conexo en el punto x. □

Un resultado importante de los continuos localmente conexos es el enunciado en el Teorema 2.5. Este teorema es una modificación de [**10**, Teorema 2, pág. 262].

TEOREMA 2.5. *Sean X un continuo localmente conexo y L un subcontinuo propio de X. Luego, existe una familia de subcontinuos de X, $\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que:*

(1) $L = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$.
(2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} \subseteq L_n$.
(3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{int}(L_n) \neq \emptyset$.
(4) El número de componentes de $X \backslash L_n$ no excede el número de componentes de $X \backslash L$.

DEMOSTRACIÓN: De [**10**, Teorema 2, pág. 262], existe una familia de subconjuntos cerrados y localmente conexos, $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$, de X tal que:

(a) $X \backslash L = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$.
(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $H_n \subseteq \operatorname{int}(H_{n+1})$.
(c) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $X \backslash H_n$ es conexo y abierto en X.
(d) El número de componentes de H_n no excede el número de componentes de $X \backslash L$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $L_n = Cl(X \backslash H_n)$. De (a), $L = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \backslash H_n)$. Puesto que L es un subcontinuo, se tiene que $L \neq \emptyset$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $L_n \neq \emptyset$. Notemos que, por la parte (c), para cada $n \in \mathbb{N}$, L_n es un subcontinuo de X. Puesto que $L = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \backslash H_n)$, se tiene que $L \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} Cl(X \backslash H_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$.
Sea $n \in \mathbb{N}$. Por (b), se tiene que, $X \backslash \operatorname{int}(H_{n+1}) \subseteq X \backslash H_n$. Como $X \backslash \operatorname{int}(H_{n+1}) = Cl(X \backslash H_{n+1})$, se sigue que $Cl(X \backslash H_{n+1}) \subseteq X \backslash H_n$, esto es, $L_{n+1} \subseteq X \backslash H_n$. Consecuentemente, obtenemos que $\bigcap_{n=2}^{\infty} L_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \backslash H_n) = L$. Además, puesto que $\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n = L_1 \cap (\bigcap_{n=2}^{\infty} L_n) \subset \bigcap_{n=2}^{\infty} L_n$, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n \subset L$. Por lo tanto:

$$L = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n. \tag{1.1}$$

Ahora, por (b), para cada $n \in \mathbb{N}$, $H_n \subseteq H_{n+1}$. Así, $X \backslash H_{n+1} \subseteq X \backslash H_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, $Cl(X \backslash H_{n+1}) \subseteq Cl(X \backslash H_n)$. Así:

$$L_{n+1} \subseteq L_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Por otra parte, por (a), $L = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \backslash H_n)$, de donde, $X \backslash H_{n+1} \neq \emptyset$. Luego, por (b), $H_n \subseteq H_{n+1}$, así, $X \backslash H_{n+1} \subset X \backslash H_n$, consecuentemente, $X \backslash H_{n+1} \subseteq Cl(X \backslash H_n) =$

L_n. Así, por (c), $\mathrm{int}(L_n) \neq \emptyset$. De aquí:

$$\mathrm{int}(L_n) \neq \emptyset, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Puesto que $X \backslash L_n \subseteq H_n$, se tiene que el número de componentes de $X \backslash L_n$ no excede el número de componentes de H_n. Luego, por (d), se tiene que $X \backslash L_n$ no excede el número de componentes de $X \backslash L$. De las afirmaciones (1), (2) y (3), se tiene el resultado. □

3. Funciones especiales entre continuos

Una herramienta importante en el estudio de los continuos, son ciertas clases de funciones continuas entre continuos, las cuales muchas veces nos ayudan a obtener información sobre los espacios que estamos trabajando. Varias de estas clases de funciones surgieron por la necesidad de atender el problema de clasificar continuos y otras por ser generalizaciones naturales de las ya existentes. El estudio de las clases de funciones entre continuos, ha sido una importante línea de investigación en esta parte de la matemática que se encuentra en constante desarrollo, y a través del tiempo se han introducido varias clases de funciones, en esta sección analizaremos algunas de estas clases de funciones.

Sin más preámbulos, pasemos a presentar la definición de cada una de las funciones que estudiaremos en este trabajo. Cabe señalar que el orden en que aparecen las definiciones en este escrito es alfabético, sin considerar el orden en que fueron introducidas en la literatura.

DEFINICIÓN 3.1. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Se dice que f es:*

(1) abierta si para cada abierto U de X, se tiene que $f(U)$ es abierto en Y.
(2) A lo más monótona si el conjunto $f^{-1}(Q)$ es conexo, para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío.
(3) Atriódica si para cada subcontinuo Q de Y, existen dos componentes C y D de $f^{-1}(Q)$ tales que $f(C) \cup f(D) = Q$ y para cada componente E de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(E) = Q$ o $f(E) \subseteq f(C)$ o $f(E) \subseteq f(D)$.
(4) Casi interior en el punto $y \in Y$, si para cada conjunto abierto U de X, que contenga alguna componente de $f^{-1}(y)$, se tiene que $y \in \mathrm{int}(f(U))$. Decimos que f es casi interior, si es casi interior en cada punto de Y.
(5) Casi monótona si para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío, el conjunto $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes y si D es una componente de $f^{-1}(Q)$, entonces $f(D) = Q$.
(6) Confluente si para cada subcontinuo B de Y y para cada componente C de $f^{-1}(B)$, se tiene que $f(C) = B$.
(7) Débilmente confluente si para cada subcontinuo B de Y, existe una componente C de $f^{-1}(B)$ tal que $f(C) = B$.
(8) Débilmente monótona si para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío y para cada componente D de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(D) = Q$.
(9) Empalmante si para cada subcontinuo B de Y y para cualesquiera dos componentes C y D de $f^{-1}(B)$, se tiene que $f(C) \cap f(D) \neq \emptyset$.
(10) Frágilmente confluente si para cada subcontinuo Q de Y y para cualesquiera dos componentes C y K de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(C) = f(K)$ o $f(C) \cap f(K) = \emptyset$.

(11) *Frágilmente semiconfluente si para cada subcontinuo Q de Y y para cualesquiera dos componentes C y K de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(C) \subseteq f(K)$ o $f(K) \subseteq f(C)$ o $f(C) \cap f(K) = \emptyset$.*

(12) *Fuertemente libremente descomponible si para cada par de subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$, los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos.*

(13) *Fuertemente monótona si para cada subcontinuo irreducible Q de Y, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es un subcontinuo irreducible de X.*

(14) *Función MO si existen un continuo Z y funciones, $h : X \to Z$ y $g : Z \to Y$, tales que $f = g \circ h$, donde g es monótona y h es abierta.*

(15) *Función OM si existen un continuo Z y funciones, $h : X \to Z$ y $g : Z \to Y$, tales que $f = g \circ h$, donde g es abierta y h es monótona.*

(16) *Homeomorfismo si f es inyectiva y f^{-1} es continua.*

(17) *Libremente descomponible si para cada par de subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$, existen subcontinuos propios A' y B' de X tales que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subseteq A$ y $f(B') \subseteq B$.*

(18) *Ligera si para cada $y \in Y$, se tiene que $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo.*

(19) *Monótona si para cada y en Y, se tiene que $f^{-1}(y)$ es conexo.*

(20) *Pseudoconfluente si para cada subcontinuo irreducible B de Y, existe una componente C de $f^{-1}(B)$ tal que $f(C) = B$.*

(21) *Semiabierta si para cada abierto no vacío U de X, $\operatorname{int}(f(U)) \neq \emptyset$.*

(22) *Semiconfluente si para cada subcontinuo B de Y y para cualesquiera dos componentes C y D de $f^{-1}(B)$, se tiene que $f(C) \subseteq f(D)$ o $f(D) \subseteq f(C)$.*

(23) *Simple si para cada $y \in Y$, se tiene que $f^{-1}(y)$ consiste de a lo más dos elementos.*

En [**1**], se estudian las relaciones que existen entre las clases de funciones: abiertas, casi interiores, casi monótonas, confluentes, débilmente confluentes, débilmente monótonas, funciones MO, funciones OM y monótonas. Tales relaciones las resumimos en el diagrama de la Figura 1, donde las flechas indican inclusión, es decir, la clase de funciones donde inicia la flecha, está contenida en la clase de funciones donde apunta y finaliza la flecha.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Abierta} \arrow[d] & \text{Monótona} \arrow[dl] \arrow[d] \\
\text{Casi Interior} \arrow[d, leftrightarrow] & \text{MO} \arrow[l] \arrow[d] & \text{Casi Monótona} \arrow[d] \\
\text{OM} \arrow[r] & \text{Confluente} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Déb. Monótona} \\
 & \text{Déb. Confluente} &
\end{tikzcd}
$$

FIGURA 1. Diagrama que muestra las relaciones que existen en las respectivas funciones.

Cabe mencionar que en [**1**], además de probar las inclusiones entre clases de funciones (de la Figura 1), también se muestran ejemplos de funciones para verificar que algunas inclusiones son propias.

En esta sección, se analizan las inclusiones que se dan entre el resto de las clases de funciones proporcionadas en la Definición 3.1, a saber, las clases de funciones: a lo más monótonas, atriódicas, empalmantes, frágilmente confluentes, frágilmente semiconfluentes, fuertemente libremente descomponibles, fuertemente monótonas, homeomorfismos, libremente descomponibles, ligeras, pseudoconfluente, semiabiertas, semiconfluentes y simples. También se estudia la relación entre estas clases de funciones y las clases de funciones de la Figura 1.

Antes de comenzar con el estudio de las relaciones entre clases de funciones, es necesario proporcionar dos caracterizaciones de las funciones monótonas, puesto que en demostraciones posteriores, nos harán el trabajo más sencillo. La prueba del Teorema 3.2, se puede consultar en [**1**, Teorema 3.2, pág. 82].

TEOREMA 3.2. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. La función f es monótona si y sólo si para cada subcontinuo B de Y, se tiene que $f^{-1}(B)$ es un subcontinuo de X.*

La caracterización de las funciones monótonas proporcionada en el Teorema 3.3 no es muy conocida, para demostrar este teorema se tomaron ideas de [**4**, Proposición 13].

TEOREMA 3.3. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. La función f es monótona si y sólo si para cada subcontinuo irreducible Q de Y, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es un subcontinuo de X.*

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 3.2, se sigue que si f es monótona, entonces para cada subcontinuo irreducible Q de Y, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es un subcontinuo de X.

Recíprocamente, supongamos que para cada subcontinuo irreducible Q de Y, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es un subcontinuo de X. Sea Q un subcontinuo de Y. Se sigue que $f^{-1}(Q)$ es compacto. Resta verificar que $f^{-1}(Q)$ es conexo. Tomemos un elemento $p \in f^{-1}(Q)$. Luego, $f(p) \in Q$. Sea $y \in Q \setminus \{f(p)\}$. Como Q es irreducible, por [**10**, Teorema 1, pág. 192], existe un subcontinuo Q_y de Q, el cual es irreducible entre $f(p)$ y y. Se sigue que $Q = \bigcup\{Q_y : y \in Q\}$. Luego, $f^{-1}(Q) = \bigcup\{f^{-1}(Q_y) : y \in Q\}$. Notemos que $p \in \bigcap\{f^{-1}(Q_y) : y \in Q\}$. Además, por lo supuesto, para cada $y \in Q$, se tiene que $f^{-1}(Q_y)$ es conexo. Esto implica que $f^{-1}(Q)$ es conexo. Finalmente, usando el Teorema 3.2, se concluye que f es monótona. □

Utilizando el Teorema 3.3, se obtiene fácilmente la relación que existe entre las funciones fuertemente monótonas y las funciones monótonas. Cabe mencionar que las funciones fuertemente monótonas fueron introducidas formalmente en [**6**].

TEOREMA 3.4. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es fuertemente monótona, entonces f es monótona.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es fuertemente monótona. Sea Q un subcontinuo irreducible de Y. Por lo supuesto, se sigue que $f^{-1}(Q)$ es un subcontinuo irreducible de X, en particular, $f^{-1}(Q)$ es un subcontinuo de X. Luego, por el Teorema 3.3, se concluye que f es monótona. □

Como lo muestra el Teorema 3.5, la clase de las funciones monótonas está contenida en la clase de las funciones a lo más monótonas.

TEOREMA 3.5. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es monótona, entonces f es a lo más monótona.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $f : X \to Y$ es monótona. Sea Q un subcontinuo de Y con interior no vacío. Como f es monótona, por el Teorema 3.2, se tiene que el conjunto $f^{-1}(Q)$ es conexo. Así, f es a lo más monótona. □

En [**1**, Teorema 5.2, pág. 88], se verifica que las funciones monótonas son funciones MO. Por otro lado, con el Teorema 3.6, verificamos que la clase de las funciones casi monótonas contiene a la clase de las funciones a lo más monótonas.

TEOREMA 3.6. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es a lo más monótona, entonces f es casi monótona.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es a lo más monótona. Sea Q un subcontinuo de Y con interior no vacío. Por lo supuesto, el conjunto $f^{-1}(Q)$ es conexo. Por lo tanto, $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes y $f(f^{-1}(Q)) = Q$. De aquí, la función f es casi monótona. □

En [**1**, Teorema 6.4] se demuestra que la clase de las funciones casi monótonas está contenida en la clase de las funciones débilmente monótonas.

Dos clases de funciones entre continuos que hasta ahora no son muy conocidas, son la clase de la funciones libremente descomponibles y la clase de las funciones fuertemente libremente descomponibles, las cuales fueron introducidas en [**9**]. Un estudio detallado de estas dos clases de funciones se encuentra en [**16**]. En algunas referencias a las funciones fuertemente libremente descomponibles también se les conoce como funciones frágilmente monótonas, por ejemplo en [**5**]. A continuación mostramos la relación que existe entre la clase de las funciones a lo más monótonas y la clase de las funciones fuertemente libremente descomponibles.

TEOREMA 3.7. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es una función a lo más monótona, entonces f es fuertemente libremente descomponible.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es a lo más monótona. Sean A y B subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$. Como A y B son subconjuntos propios y cerrados en X, los subconjuntos $X \backslash A$ y $X \backslash B$ son abiertos y no vacíos en X y cumplen que $X \backslash A \subseteq B$ y $X \backslash B \subseteq A$. De aquí, los conjuntos A y B tienen interior no vacío. Luego, por hipótesis, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conjuntos conexos. Así, f es fuertemente libremente descomponible. □

Como su nombre lo indica, toda función fuertemente libremente descomponible es libremente descomponible.

TEOREMA 3.8. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es fuertemente libremente descomponible, entonces f es libremente descomponible.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es fuertemente libremente descomponible. Sean A y B subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$. Por ser f fuertemente libremente descomponible, se tiene que los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos. Más aún, los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subcontinuos de X. Notemos también que $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subcontinuos propios de X. Por otro lado, notemos que $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ y que $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$ y

$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Sean $A' = f^{-1}(A)$ y $B' = f^{-1}(B)$. Así, existen subcontinuos propios A' y B' de X tales que $X = A' \cup B'$, $f(A') \subseteq A$ y $f(B') \subseteq B$. Luego, f es libremente descomponible. □

Ahora veremos las relaciones que existen entre la clase de los homeomorfismos y otras clases de funciones. Como se podrá verificar al final de esta sección, la clase de los homeomorfismos está contenida en todas las clases de funciones proporcionadas en la Definición 3.1.

TEOREMA 3.9. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es un homeomorfismo, entonces f es fuertemente monótona.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es un homeomorfismo. Sea Q un subcontinuo irreducible de Y. Por lo supuesto, se sigue que $f^{-1}(Q)$ es un subcontinuo de X. Como Q es irreducible, sean $p, q \in Q$ tales que Q es irreducible entre p y q. Tomemos elementos $a, b \in X$ tales que $f(a) = p$ y $f(b) = q$. Se sigue que $a, b \in f^{-1}(Q)$. Además, Puesto que f es un homeomorfismo, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es irreducible entre a y b, esto es, $f^{-1}(Q)$ es un subcontinuo irreducible de X. Por lo tanto, f es fuertemente monótona. □

TEOREMA 3.10. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es un homeomorfismo, entonces f es simple.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f no es simple. Así, existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$ tiene más de dos elementos. Sean $a, b \in f^{-1}(y)$ tales que $a \neq b$, luego $f(a) = y = f(b)$. Por lo tanto, f no es inyectiva y, consecuentemente, f no es un homeomorfismo. □

TEOREMA 3.11. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es un homeomorfismo, entonces f es abierta.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es un homeomorfismo. Así, f^{-1} continua. Sea U un subconjunto abierto en X. Luego, $f(U)$ es un conjunto abierto en Y. Por lo tanto, f es abierta. □

En seguida verificamos que toda función simple es ligera.

TEOREMA 3.12. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es simple, entonces f es ligera.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es simple. Sea $y \in Y$. Por lo supuesto, se sigue que $f^{-1}(y)$ tiene a los más dos elementos. Esto implica que $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo. Por lo tanto, f es ligera. □

Otro resultado fácil de verificar es que las funciones abiertas son semiabiertas, como lo indica el Teorema 3.13.

TEOREMA 3.13. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es abierta, entonces f es semiabierta.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es abierta. Sea U un conjunto abierto no vacío de X. Luego $f(U)$ es un conjunto abierto no vacío. De aquí $f(U) = \mathrm{int}(f(U)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, f es semiabierta. □

En [**1**], se demuestra que la clase de las funciones abiertas está contenida en la clase de las funciones MO, y que esta última a su vez está contenida en la clase de las funciones OM y en la clase de las funciones confluentes. También, se verifica que la clase de las funciones casi interiores y la clase de las funciones OM coinciden. Además, se prueba que las funciones confluentes son débilmente monótonas.

Una caracterización de las funciones confluentes, la cual no es muy conocida, se menciona en [**7**, pág. 137]. Tal caracterización, nos ayuda a comprender cómo surgieron otras clases de funciones que generalizan de manera muy natural a las funciones confluentes. A continuación, proporcionamos una prueba de tal resultado.

TEOREMA 3.14. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. La función f es confluente si y sólo si para cada subcontinuo Q de Y y para cualesquiera dos componentes C y K de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(C) = f(K)$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es confluente. Sea Q un subcontinuo de Y y sean C y K componentes de $f^{-1}(Q)$. Como f es confluente, se sigue que $f(C) = Q$ y $f(K) = Q$, de donde $f(C) = f(K)$.

Recíprocamente, supongamos que para cada subcontinuo Q de Y y para cualesquiera dos componentes C y K de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(C) = f(K)$. Veamos que f es confluente. Sean Q un subcontinuo de Y y C una componente de $f^{-1}(Q)$. Puesto que $f(C) \subseteq Q$, resta probar que $Q \subseteq f(C)$. Tomemos un elemento $y \in Q$. Se sigue que $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(Q)$. Puesto que f es suprayectiva, podemos considerar un elemento $x \in f^{-1}(y)$. Así, $f(x) = y$ y $x \in f^{-1}(Q)$. Luego, tenemos los siguientes casos:

1) $x \in C$. En este caso se sigue inmediatamente que $y \in f(C)$.
2) $x \in f^{-1}(Q) \setminus C$. Para este caso, consideremos la componente K de $f^{-1}(Q)$ tal que $x \in K$. Así, $y \in f(K)$. Por hipótesis, $f(C) = f(K)$, de donde $y \in f(C)$.

De los casos 1) y 2), concluimos que $y \in f(C)$. Lo cual implica que, $Q \subseteq f(C)$. En consecuencia, $f(C) = Q$. Por lo tanto, f es confluente. □

Por la forma de caracterizar a las funciones confluentes, Teorema 3.14, una manera natural de generalizar a este tipo de funciones se da en [**7**], surgiendo de esta manera las funciones frágilmente confluentes (feebly confluent mappings). Directamente de las definiciones de función confluente y función frágilmente confluente, se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 3.15. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es confluente, entonces f es frágilmente confluente.*

Otra clase de funciones que generaliza de manera natural a la clase de las funciones confluentes es la clase de las funciones semiconfluentes.

TEOREMA 3.16. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es confluente, entonces f es semiconfluente.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es confluente. Sean B un subcontinuo de Y y D_1 y D_2 componentes de $f^{-1}(B)$. Puesto que f es confluente, se sigue que $f(D_1) = B = f(D_2)$. De aquí, $f(D_1) \subseteq f(D_2)$ y $f(D_2) \subseteq f(D_1)$. Por lo tanto, f es semiconfluente. □

Como una consecuencia inmediata de las definiciones de funciones semiconfluentes, frágilmente confluentes y frágilmente semiconfluentes, se tiene el resultado que sigue.

TEOREMA 3.17. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos.*

(1) Si f es semiconfluente, entonces f es frágilmente semiconfluente.
(2) Si f es frágilmente confluente, entonces f es frágilmente semiconfluente.

Ahora veremos que la clase de las funciones semiconfluentes está contenida en la clase de las funciones débilmente confluentes.

TEOREMA 3.18. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es semiconfluente, entonces f es débilmente confluente.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f no es débilmente confluente. Así, existe un subcontinuo B de Y tal que para cada componente C de $f^{-1}(B)$, se tiene que $f(C) \neq B$. Sean C y D componentes de $f^{-1}(B)$. Así $B \not\subseteq f(C)$ y $B \not\subseteq f(D)$. Ya que $f(C) \subseteq B$ y $f(D) \subseteq B$, se sigue que $f(D) \not\subseteq f(C)$ ni $f(C) \not\subseteq f(D)$. Por lo tanto, f no es semiconfluente. □

Otra clase de funciones que contiene a la clase de las funciones semiconfluentes es la clase de las funciones empalmantes.

TEOREMA 3.19. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es semiconfluente, entonces f es empalmante.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es semiconfluente. Sean B un subcontinuo de Y y C_1 y C_2 dos componentes de $f^{-1}(B)$. Si $f(C_1) \subset f(C_2)$, entonces $f(C_1) \cap f(C_2) = f(C_1) \neq \emptyset$. Si $f(C_2) \subseteq f(C_1)$, entonces $f(C_2) \cap f(C_1) = f(C_2) \neq \emptyset$. Por lo tanto, la función f es empalmante. □

Finalmente, mostramos dos resultados que muestran dos clases de funciones que contienen a la clase de funciones débilmente confluentes.

TEOREMA 3.20. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es débilmente confluente, entonces f es atriódica.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es débilmente confluente. Sea Q un subcontinuo de Y. Por hipótesis, existe una componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$. Sea D cualquier otra componente de $f^{-1}(Q)$. Entonces $f(D) \subseteq Q = f(C)$. De aquí $f(D) \cup f(C) = Q$. Sea E cualquier componente de $f^{-1}(Q)$. Luego, $f(E) \subseteq Q = f(C)$. Por lo tanto, f es atriódica. □

TEOREMA 3.21. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es débilmente confluente, entonces f es pseudoconfluente.*

DEMOSTRACIÓN: Sea B un subcontinuo irreducible de Y. Por hipótesis, existe una componente C de $f^{-1}(B)$ tal que $f(C) = B$. Por lo tanto, f es pseudoconfluente. □

Con los resultados citados en el diagrama de la Figura 1 y los que se han verificado en esta sección, tenemos un panoramas más amplio de las distintas clases de funciones especiales entre continuos y las relaciones que existen entre éstas. A manera de resumen, en el diagrama de la Figura 2 se muestran las relaciones obtenidas después de analizar las funciones proporcionadas en la Definición 3.1. En el diagrama de la Figura 2, FLD quiere decir fuertemente libremente descomponible y LD quiere decir libremente descomponible.

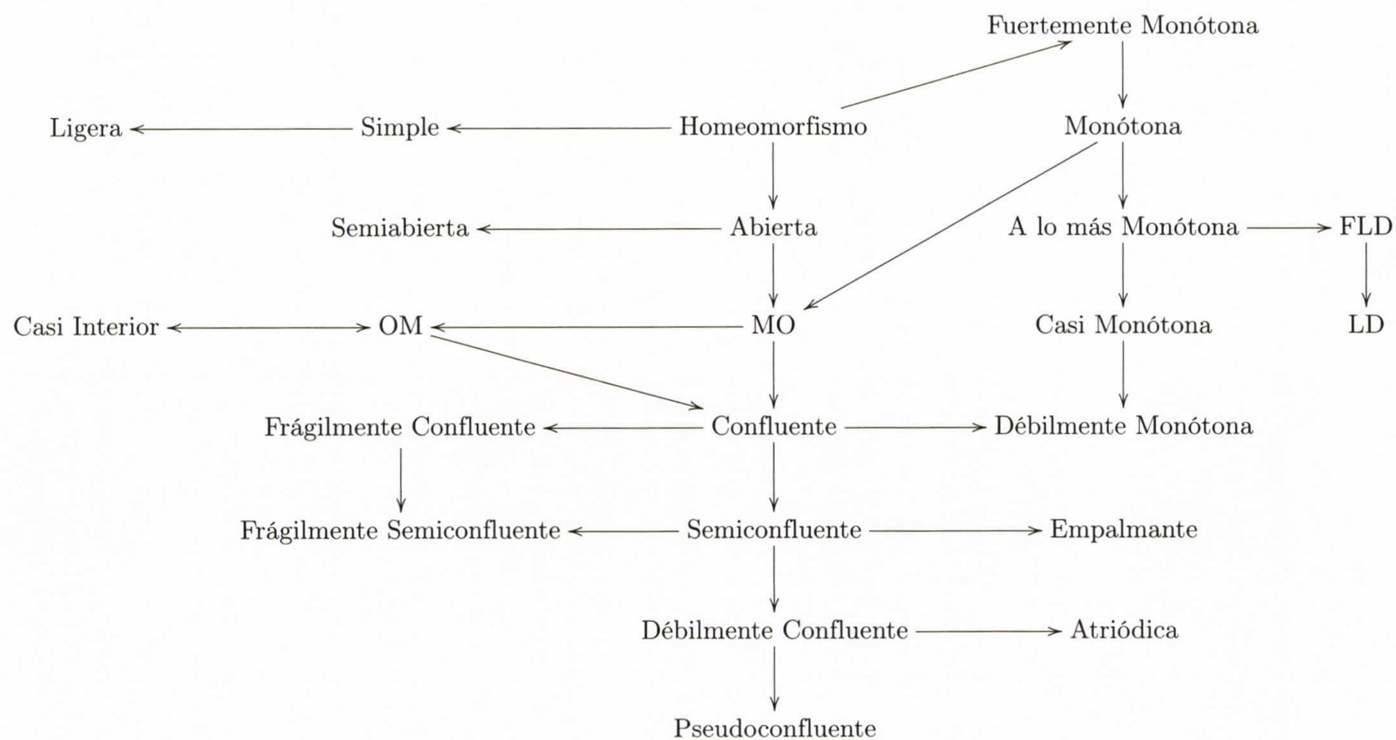

FIGURA 2. Diagrama que muestra las relaciones que existen entre las clases de funciones proporcionadas en la Definición 3.1.

4. Contraejemplos

En esta sección se proporcionan ejemplos de funciones para justificar que algunas de las inclusiones, entre las clases de funciones presentadas en la Sección 3, son propias.

Iniciamos mostrando una función que verifica que la clase de las funciones fuertemente monótonas está contenida propiamente en la clase de las funciones monótonas, esto es, el recíproco del Teorema 3.4 no es verdadero.

EJEMPLO 4.1. *Consideremos la curva cerrada simple* $S^1 = \{(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) : 0 \leq t \leq 1\}$ *y* $B = \{(x,0) : 1 \leq x \leq 2\}$. *Pongamos* $X = S^1 \cup B$. *Sea* $A = \{(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) : 0 \leq t \leq \frac{1}{8}\} \cup \{(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) : \frac{7}{8} \leq t \leq 1\} \cup B$ *y pongamos* $Y = X/A$, *con la topología cociente. Tomemos la función cociente o proyección natural* $q : X \to X/A$. *Es claro que* q *es monótona. Para verificar que* q *no es fuertemente monótona, tomemos el continuo* $D = \{(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) : 0 \leq t \leq \frac{1}{4}\} \cup \{(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) : \frac{3}{4} \leq t \leq 1\} \cup B$. *Notemos que* $Q = q(D)$ *es un subcontinuo irreducible de* Y. *Sin embargo,* $q^{-1}(Q) = D$ *es un subcontinuo de* X *el cual no es irreducible. Por lo tanto,* f *no es fuertemente monótona.*

A continuación mostramos un ejemplo para verificar que el recíproco del Teorema 3.5 en general no es válido.

EJEMPLO 4.2. *Sea* $X = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : 0 < x \leq 1\} \cup \{\{0\} \times [-1,1]\}$. *Pongamos* $Y = X/_{\{(0,1),(0,-1)\}} = \{\{(0,1),(0,-1)\}\} \cup \{\{z\} : z \in X \backslash \{(0,1),(0,-1)\}\}$, *con la topología cociente. Ahora, consideremos la función cociente* $q : X \to Y$. *Esta función es a lo más monótona pero no es monótona. Para verificar que* q *no es monótona, basta considerar* $A = \{0\} \times [\frac{1}{2}, 1]$ *y* $B = \{0\} \times [-1, -\frac{1}{2}]$ *y notar que* $q(A) \cap q(B)$ *es un subcontinuo de* Y *tal que* $q^{-1}(q(A) \cup q(B)) = A \cup B$ *no es un subconjunto conexo en* X.

Con el ejemplo que sigue se prueba que la clase de las funciones casi monótonas no necesariamente está contenida en la clase de las funciones a lo más monótonas.

EJEMPLO 4.3. *Consideremos la función* $f : [-1,1] \to [0,1]$ *definida por* $f(t) = |t|$, *para cada* $t \in [-1,1]$. *No es difícil verificar que esta función* f *es casi monótona. Además, para* $Q = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, *se tiene que* Q *es un subcontinuo de* $[0,1]$ *con interior no vacío que cumple que* $f^{-1}(Q) = [-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. *De donde,* $f^{-1}(Q)$ *no es conexo. Así,* f *no es a lo más monótona.*

En [**1**, Ejemplo 7.2] se muestra una función débilmente monótona que no es casi monótona. Tal función también es MO y no es monótona. En el siguiente ejemplo proporcionamos una función que es fuertemente libremente descomponible y no es a lo más monótona.

EJEMPLO 4.4. *En* $\mathbb{R}^2$, *consideremos los puntos* $(-1,0), (0,1), (0,\frac{1}{2})$ *y* $(1,0)$. *Sean* C_1 *el segmento que une los puntos* $(-1,0)$ *y* $(0,1)$, C_2 *el segmento que une los puntos* $(-1,0)$ *y* $(0,\frac{1}{2})$, C_3 *el segmento que une los puntos* $(0,1)$ *y* $(1,0)$ *y* C_4 *el segmento que une los puntos* $(1,0)$ *y* $(0,\frac{1}{2})$. *Sea* $X = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$. *Definamos la función* $f : X \to [-1,1]$ *por* $f((x,y)) = x$. *Esta función es fuertemente libremente descomponible y no es a lo más monótona.*

Referente a las funciones libremente descomponibles y fuertemente libremente descomponibles, la segunda clase está contenida en la primera, ver Teorema 3.8.

Sin embargo, en el Ejemplo 4.5 presentamos una función que es libremente descomponible que no es fuertemente libremente descomponible.

EJEMPLO 4.5. *Sean* $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{3}(1-x), 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$, $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{3}(1-x), \frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$, $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{3}(1+x), -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}\}$, $A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{3}(1+x), -\frac{1}{2} \leq x \leq 0\}$, $A_5 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0\}$, $A_6 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$, $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+1), -1 \leq x \leq 0\}$, $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x), 0 \leq x \leq 1\}$ *y* $B_3 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \sqrt{3}\}$. *Pongamos* $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$ *y* $Y = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. *Consideremos la función* $f : X \to Y$ *definida a trozos por:*

$$f((x,y)) = \begin{cases} (0,y), & si \quad (x,y) \in A_1, \\ (-\frac{2}{\sqrt{3}}y + 1, y), & si \quad (x,y) \in A_2, \\ (\frac{2}{\sqrt{3}}y - 1, y), & si \quad (x,y) \in A_3, \\ (0,y), & si \quad (x,y) \in A_4, \\ (x, \frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)), & si \quad (x,y) \in A_5, \\ (x, \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)), & si \quad (x,y) \in A_6. \end{cases}$$

Esta función es libremente descomponible y no es fuertemente libremente descomponibles. Para verificar que f no es fuertemente libremente descomponibles, basta tomar los subcontinuos propios $A = B_2 \cup \{(x,y) \in B_3 : \frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}\}$ *y* $B = B_1 \cup B_3$ *de* Y. *Note que* $Y = A \cup B$ *y* $f^{-1}(A)$ *no es conexo.*

Hemos visto que todo homeomorfismo es una función fuertemente monótona, Teorema 3.9, sin embargo, en el Ejemplo 4.6, se muestra una función fuertemente monótona, que no es un homeomorfismo.

EJEMPLO 4.6. *Sean* $X = ([0, \frac{1}{2}] \times \{\frac{1}{2}\}) \cup (\{\frac{1}{2}\} \times [\frac{1}{2}, 1]) \cup ([\frac{1}{2}, 1] \times \{1\})$ *y* $Y = [0,1]$. *Consideremos la función* $f : X \to Y$ *tal que* $f((x,y)) = x$, *para cada* (x,y) *en* X. *No es difícil verificar que f es fuertemente monótona. Además, puesto que f no es inyectiva, se sigue que f no es un homeomorfismo.*

La función definida en el Ejemplo 4.3, es un ejemplo de una función simple y abierta que no es homeomorfismo. Por otra parte, mediante el Teorema 3.12, se demostró que toda función simple es ligera; el recíproco de este resultado no es verdadero. Veamos esto con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.7. *Consideremos el punto* $c = (1,0)$ *en* $\mathbb{R}^2$ *y para cada* $n \in \mathbb{N}$, *sea* $c_n = (0, \frac{1}{n})$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, $c_n c$ *denota el segmento de recta que une los puntos* c_n *y* c. *Pongamos* $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} c_n c\right)$ *y* $Y = [0,1]$. *Sea* $l : X \to Y$ *tal que* $l((x,y)) = x$, *para cada* $(x,y) \in X$.
Es claro que l es una función ligera que no es simple.

A continuación, se da un ejemplo de una función semiabierta que no es abierta.

EJEMPLO 4.8. *Sean* $C = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right)\right\}_{n=1}^{3}$ *y* $p = (0,0)$. *Tomemos X como la unión de los segmentos rectilíneos que van del punto p a cada uno de los elementos de C y* $Y = [0,1]$. *Definamos a la función* $f : X \to Y$ *como sigue,* $f((x,y)) = x$, *para cada* $(x,y) \in X$. *Luego, f es una función semiabierta pero que no es abierta. Para verificar que f no es abierta, consideramos el abierto* $U = \left(\left(\frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right) \times \left(\frac{11}{12}, \frac{13}{12}\right)\right) \cap X$ *de* X, *se tiene que* $f(U) = \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{2}\right]$ *el cual no es un conjunto abierto en* Y.

Por otra parte, hasta ahora no tenemos un ejemplo de alguna función que verifique que el recíproco del Teorema 3.15 sea falso. Así, tenemos la siguiente pregunta: ¿existe una función frágilmente confluente que no es confluente?

Recordemos que uno de los resultados que verificamos es que toda función confluente es semiconfluente, Teorema 3.16. Sin embargo, ahora veremos, con un ejemplo, que el recíproco de este resultado en general no es verdadero.

EJEMPLO 4.9. *Definamos* $f : [-1,2] \to [0,2]$ *por* $f(t) = |t|$, *para cada* $t \in [-1,2]$. *La función* f *es semiconfluente. Sin embargo,* f *no es confluente. Para verificar que* f *no es confluente, consideremos el subcontinuo* $B = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ *de* $[0,2]$. *Luego,* $C_1 = [-1, -\frac{1}{2}]$ *y* $C_2 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ *son las componentes de* $f^{-1}(B)$ *y se cumple que* $f(C_1) \neq [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. *Por lo tanto,* f *no es confluente.*

Con ayuda del Ejemplo 4.10, garantizamos que los recíprocos de 1. y 2. del Teorema 3.17 no son verdaderos.

EJEMPLO 4.10. *Definamos la función* $f : [-\frac{7}{4}, \frac{7}{4}] \to [-1,1]$ *como:*

$$f(t) = \begin{cases} -||t+1|-1|, & si \quad t \in [-\frac{7}{4}, 0], \\ ||-t+1|-1|, & si \quad t \in [0, \frac{7}{4}]. \end{cases}$$

No es difícil justificar que la función f *es frágilmente semiconfluente. Veamos que* f *no es semiconfluente ni frágilmente confluente. Consideremos el subcontinuo* $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *de* $[-1,1]$.

a) Para verificar que f *no es semiconfluente, basta considerar las componentes* $C_1 = [-\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}]$ *y* $C_2 = [\frac{3}{2}, \frac{7}{4}]$ *de* $f^{-1}(B)$ *y observar que* $f(C_1) \cap f(C_2) = \emptyset$. *De donde,* $f(C_1) \nsubseteq f(C_2)$ *y* $f(C_2) \nsubseteq f(C_1)$.

b) Para verificar que f *no es frágilmente confluente, basta considerar las componentes* $C_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{2}{2}]$ *y* $C_2 = [\frac{3}{2}, \frac{7}{4}]$ *de* $f^{-1}(B)$ *y observar que* $f(C_1) \neq f(C_2)$ *y* $f(C_1) \cap f(C_2) \neq \emptyset$.

También se dio una prueba de que toda función semiconfluente es débilmente confluente (Teorema 3.18), ahora prestemos atención al siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.11. *Definamos la función* $f : [-2,2] \to [-1,1]$ *como:*

$$f(t) = \begin{cases} -||t+1|-1|, & si \quad t \in [-2, 0], \\ ||-t+1|-1|, & si \quad t \in [0, 2]. \end{cases}$$

No es difícil verificar que la función f *es débilmente confluente. Sin embargo,* f *no es semiconfluente. Para comprobar que* f *no es simiconfluente, basta considerar el subcontinuo* $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *de* $[-1,1]$ *y las componentes* $C_1 = [-2, -\frac{3}{2}]$ *y* $C_2 = [\frac{3}{2}, 2]$ *de* $f^{-1}(B)$ *y observar que* $f(C_1) \cap f(C_2) = \{0\}$. *Así,* $f(C_1) \nsubseteq f(C_2)$ *y* $f(C_2) \nsubseteq f(C_1)$.

Con el objetivo de garantizar que las funciones empalmantes no necesariamente son semiconfluentes, proporcionamos el Ejemplo 4.12.

EJEMPLO 4.12. *Sea* f *como en el Ejemplo 4.5. Claramente* f *es empalmante. Sin embargo, si consideramos el subcontinuo* $Q = \{(x,y) \in B_1 : -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}\} \cup \{(x,y) \in B_2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\} \cup \{(0,y) \in B_3 : \frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}\}$, *se cumple que para cualquier par de componentes* C *y* D *de* $f^{-1}(Q)$, $f(C) \nsubseteq f(D)$ *y* $f(D) \nsubseteq f(C)$. *Por lo tanto,* f *no es semiconfluente.*

A las funciones confluentes, las relacionamos de manera directa con las funciones atriódicas. Vimos que toda función débilmente confluente es atriódica (Teorema 3.20), veamos ahora qué sucede con el recíproco.

EJEMPLO 4.13. *Consideremos la función* $f : [0, \frac{3}{2}] \to S^1$ *definida como* $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$*, para cada* $t \in [0, \frac{3}{2}]$*. Luego,* f *es atriódica pero no es débilmente confluente.*

Ahora veamos un ejemplo de una función que es pseudoconfluente pero no débilmente confluente, concluyendo así que el recíproco del Teorema 3.21 en general no es verdadero.

EJEMPLO 4.14. *En el plano euclidiano* $\mathbb{R}^2$ *definamos:*

$$T = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1\}.$$

Consideremos la función $f : [0, 1] \to T$ *definida como sigue:*

$$f(t) = \begin{cases} \left(-3t - \frac{1}{2}, 0\right), & si \quad 0 \le t \le \frac{1}{6}, \\ (6t - 2, 0), & si \quad \frac{1}{6} \le t \le \frac{2}{6}, \\ (0, 6t - 2), & si \quad \frac{2}{6} \le t \le \frac{3}{6}, \\ (0, -6t + 4), & si \quad \frac{3}{6} \le t \le \frac{4}{6}, \\ (6t - 4, 0), & si \quad \frac{4}{6} \le t \le \frac{5}{6}, \\ (-12t + 11, 0), & si \quad \frac{5}{6} \le t \le 1. \end{cases}$$

Para cada $t \in [0, 1]$*. No es difícil verificar que los únicos subcontinuos* Q *de* Y *para los cuales no existe una componente* C *de* $f^{-1}(Q)$ *tal que* $f(C) = Q$*, son homeomorfos a* T*. Sin embargo, estos subcontinuos no son irreducibles. Por lo tanto, la función* f *es pseudoconfluente. Estos mismos continuos sirven para verificar que la función* f *no es débilmente confluente.*

5. Clases de funciones con rango localmente conexo

En la Sección 3, se analizan las inclusiones existentes entre las clases de funciones proporcionadas en la Definición 3.1. En la Sección 4, proporcionamos ejemplos para garantizar que algunas de estas inclusiones pueden ser propias. En esta última sección probaremos que algunas de estas clases de funciones coinciden cuando nos restringimos a funciones con rango localmente conexo.

En el Ejemplo 4.2 se mostró que una función a lo más monótona no siempre es monótona. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 5.1. *Sea* $f : X \to Y$ *una función continua y suprayectiva entre continuos con* Y *localmente conexo. Si* f *es a lo más monótona, entonces* f *es monótona.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es a lo más monótona. Sea Q un subcontinuo de Y. Notemos que el conjunto $f^{-1}(Q)$ es compacto y no vacío. Resta verificar que $f^{-1}(Q)$ es conexo. Si $Q = Y$, se sigue que $f^{-1}(Q) = X$ y, así, $f^{-1}(Q)$ es conexo. Ahora supongamos que $Q \neq Y$.
Por el Teorema 2.5, existe una familia, $\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$, de subcontinuos de Y tales que:

(1) $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$.
(2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} \subset L_n$.
(3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\text{int}(L_n) \neq \emptyset$.

Por (3) y puesto que f es a lo más monótona, $f^{-1}(L_n)$ es conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $f^{-1}(L_n)$ es un continuo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, por (2), $f^{-1}(L_{n+1}) \subseteq f^{-1}(L_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De manera que, por el Teorema 2.2, se tiene que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(L_n)$$

es un subcontinuo de X. Además, por (1),

$$f^{-1}(Q) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(L_n).$$

En consecuencia $f^{-1}(Q)$ es conexo. Luego, por el Teorema 3.2, se concluye que f es monótona. □

Así, considerando funciones con rango locamente conexo y, por los Teoremas 3.5 y 5.1, se tiene que la clase de funciones monótonas y la clase de funciones a lo más monótonas son iguales.

TEOREMA 5.2. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos con Y localmente conexo. Si f es débilmente monótona, entonces f es casi interior.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es una función débilmente monótona. Sean $y \in Y$ y U un subconjunto abierto de X tales que $C \subseteq U$, donde C es alguna componente de $f^{-1}(y)$. Puesto que Y es localmente conexo, existe una sucesión de subcontinuos $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de Y tales que:
(1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{y\}$.
(2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subseteq B_n$.
(3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $y \in \operatorname{int}(B_n)$.
Notemos que:

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n),$$

de aquí que $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(B_n)$, para cada $i \in \mathbb{N}$.
Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea C_n la componente de $f^{-1}(B_n)$ tal que $C \subseteq C_n$. De (2), se tiene que $f^{-1}(B_{n+1}) \subseteq f^{-1}(B_n)$. Luego, $C \subseteq C_{n+1} \subseteq f^{-1}(B_n)$. Así, $C_{n+1} \subseteq C_n$. Sea $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Puesto que cada C_n es un subcontinuo y $C_{n+1} \subseteq C_n$, por el Teorema 2.2, K es un subcontinuo de X. Notemos, además, que $C \subseteq K \subseteq f^{-1}(y)$. Luego, puesto que C es una componente de $f^{-1}(y)$ y $C \subseteq K$, se tiene que $C = K$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $C_n \subseteq U$, para cada $n \geq N$. Tomemos $j \geq N$, luego, $f(C_j) \subseteq f(U)$. Por hipótesis, ya que C_j es componente de $f^{-1}(B_j)$, $B_j = f(C_j) \subseteq f(U)$. De (3), puesto que $y \in \operatorname{int}(B_j)$, $y \in \operatorname{int}(f(U))$. Por lo tanto, f es una función casi interior. □

Usando el Teorema 5.2, fácilmente podemos demostrar el Teorema 5.3.

TEOREMA 5.3. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos con Y localmente conexo. Si f es débilmente monótona, entonces f es confluente.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es una función débilmente monótona. Por el Teorema 5.2, se sigue que f es una función casi interior. Luego, por [**1**, Teorema 5.6, pág. 89], se tiene que f es OM. Finalmente, por [**1**, Teorema 5.10, pág. 89], obtenemos que f es confluente. □

Utilizando [**1**, Teorema 6.4] y el Teorema 5.3, obtenemos el Teorema 5.4.

TEOREMA 5.4. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos con Y localmente conexo. Si f es casi monótona, entonces f es confluente.*

Ahora introducimos la clase de los continuos libremente descomponibles con respecto a puntos y subcontinuos, que como veremos en el Teorema 5.6 coincide con la clase de los continuos localmente conexos.

DEFINICIÓN 5.5. *Sea X un continuo. Se dice que X es libremente descomponible con respecto a puntos y subcontinuos si para cada subcontinuo C de X y cada punto $x \in X \backslash C$, existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$, $x \in A \backslash B$ y $C \subseteq B \backslash A$.*

En [**9**, Teorema 1] se prueba el Teorema 5.6, el cual muestra la relación que existe entre un continuo libremente descomponible respecto a puntos y subcontinuos y un continuo localmente conexo.

TEOREMA 5.6. *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si X es libremente descomponible respecto a puntos y subcontinuos.*

Usando la caracterización de los continuos localmente conexos dada en el Teorema 5.6, podemos demostrar el Teorema 5.7. Una prueba alternativa del Teorema 5.7, puede encontrarla en [**5**].

TEOREMA 5.7. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos con Y localmente conexo. Si f es fuertemente libremente descomponible, entonces f es débilmente monótona.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f no es débilmente monótona, por [**1**, Teorema 6.5, pág. 90], se sigue que f no es confluente. Así, existen un subcontinuo Q de Y y una componente C de $f^{-1}(Q)$ de tal manera que $f(C) \subsetneq Q$. Tomemos un punto $p \in Q \setminus f(C)$. Como Y es localmente conexo, por el Teorema 5.6, Y es libremente descomponible respecto a puntos y subcontinuos. De aquí, existen subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$, $p \in A \backslash B$ y $f(C) \subseteq B \backslash A$. Definimos $A' = A \cup Q$. Notemos que los conjuntos A y Q son conexos tales que $p \in A \cap Q$. De aquí que el conjunto $A' = A \cup Q$ es conexo. Más aún, como los conjuntos A y Q son cerrados en Y, se sigue que A' es compacto. Por lo tanto, A' y B son subcontinuos propios de Y tales que $Y = A' \cup B$. Puesto que f es una función fuertemente libremente descomponible, se tiene que el conjunto $f^{-1}(A')$ es conexo y, como es la imagen inversa de un cerrado dentro de un compacto, tenemos que $f^{-1}(A')$ es compacto. De todo lo anterior, se tiene que el conjunto $f^{-1}(A')$ es un subcontinuo tal que $C \subseteq f^{-1}(A')$ y $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(A')$. Supongamos que existe $x \in C \cap f^{-1}(A)$. Luego, $x \in C$ y $x \in f^{-1}(A)$. Sin embargo, recordemos que $C \subseteq f^{-1}(B \backslash A) = f^{-1}(B) \backslash f^{-1}(A)$. En consecuencia, $x \notin f^{-1}(A)$ y $x \in f^{-1}(A)$, lo cual no puede ocurrir. Por lo tanto, $C \cap f^{-1}(A) = \emptyset$. Así, por [**15**, Corolario 5.5, pág. 74], se tiene que existe un subcontinuo C' tal que $C \subseteq C' \subseteq f^{-1}(A') \backslash f^{-1}(A)$ y $C \neq C'$, pero esto contradice el hecho de que C sea una componente de $f^{-1}(Q)$. La contradicción surge de suponer que la función f no es débilmente monótona, por lo tanto, f es débilmente monótona. □

Antes de continuar con nuestro estudio, introducimos un resultado que será utilizado para demostrar el Teorema 5.9. La prueba del Teorema 5.8 la puede verificar en [**15**, Teorema 13.22]

TEOREMA 5.8. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos con Y localmente conexo. Si f es confluente, entonces se cumple que para cualquier conjunto abierto U de Y y cualquier componente H de $f^{-1}(U)$, $f(H) = U$.*

Por el Teorema 5.4, se tiene que una función casi monótona con rango localmente conexo es confluente. El recíproco no necesariamente es válido. El Teorema 5.9, muestra que el recíproco del Teorema 5.4 es válido, cuando el dominio de la función es localmente conexo.

TEOREMA 5.9. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos con X localmente conexo. Si f es confluente, entonces f es casi monótona.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f es confluente. Sea Q un subcontinuo de Y tal que $\text{int}(Q) \neq \emptyset$. Sea $p \in \text{int}(Q)$. Puesto que Y es localmente conexo, existe un conjunto abierto y conexo U de Y tal que $p \in U \subseteq \text{int}(Q)$. Sea H una componente de $f^{-1}(U)$, por el Teorema 5.8, $f(H) = U$. Luego, puesto que $p \in U = f(H)$, existe $x \in H$ tal que $f(x) = p$, por lo tanto $x \in f^{-1}(p)$.

Esto es:

$$f^{-1}(p) \cap H \neq \emptyset, \text{ para cada componente } H \text{ de } f^{-1}(U). \tag{1.4}$$

Ahora, puesto que $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto y X es localmente conexo, por el Teorema 2.4, cada componente H de $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X. De aquí que:

$$\{H_x : x \in f^{-1}(U) \text{ y } H_x \text{ es la componente de } f^{-1}(U) \text{ tal que } x \in H_x\}$$

es una cubierta abierta para $f^{-1}(p)$. Más aún, como $f^{-1}(p)$ es compacto, se tiene que:

$$f^{-1}(p) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}. \tag{1.5}$$

Vamos a probar que $f^{-1}(U) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}$. Para esto, sea $x \in f^{-1}(U)$ y sea H_x la componente de $f^{-1}(U)$ tal que $x \in H_x$. Luego, de (1.4) y (1.5), existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $H_x \cap H_{x_j} \neq \emptyset$, esto es, $H_x = H_{x_j}$. Por lo tanto, $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}$.

Por otro lado, como f es una función confluente, para cada componente C de $f^{-1}(Q)$ se cumple que $f(C) = Q$. Así, $f^{-1}(p) \cap C \neq \emptyset$. De aquí, $\bigcup_{i=1}^{n}(H_{x_j} \cap C) \neq \emptyset$. Luego, cada componente de $f^{-1}(Q)$ debe intersectar y, por lo tanto, contener al menos una de las componentes H_{x_i}. En consecuencia, $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes. Así, f es casi monótona. □

En resumen, para funciones con dominio localmente conexo, las clases de funciones: casi interiores, OM, confluentes, débilmente monótonas y casi monótonas coinciden. Además, para presentar de manera resumida los resultados obtenidos, en cuanto a las inclusiones entre las clases de funciones con rango localmente conexo, que analizamos en este trabajo, incluimos el diagrama mostrado en la Figura 3. En el diagrama de la Figura 3, FLD quiere decir fuertemente libremente descomponible y LD quiere decir libremente descomponible.

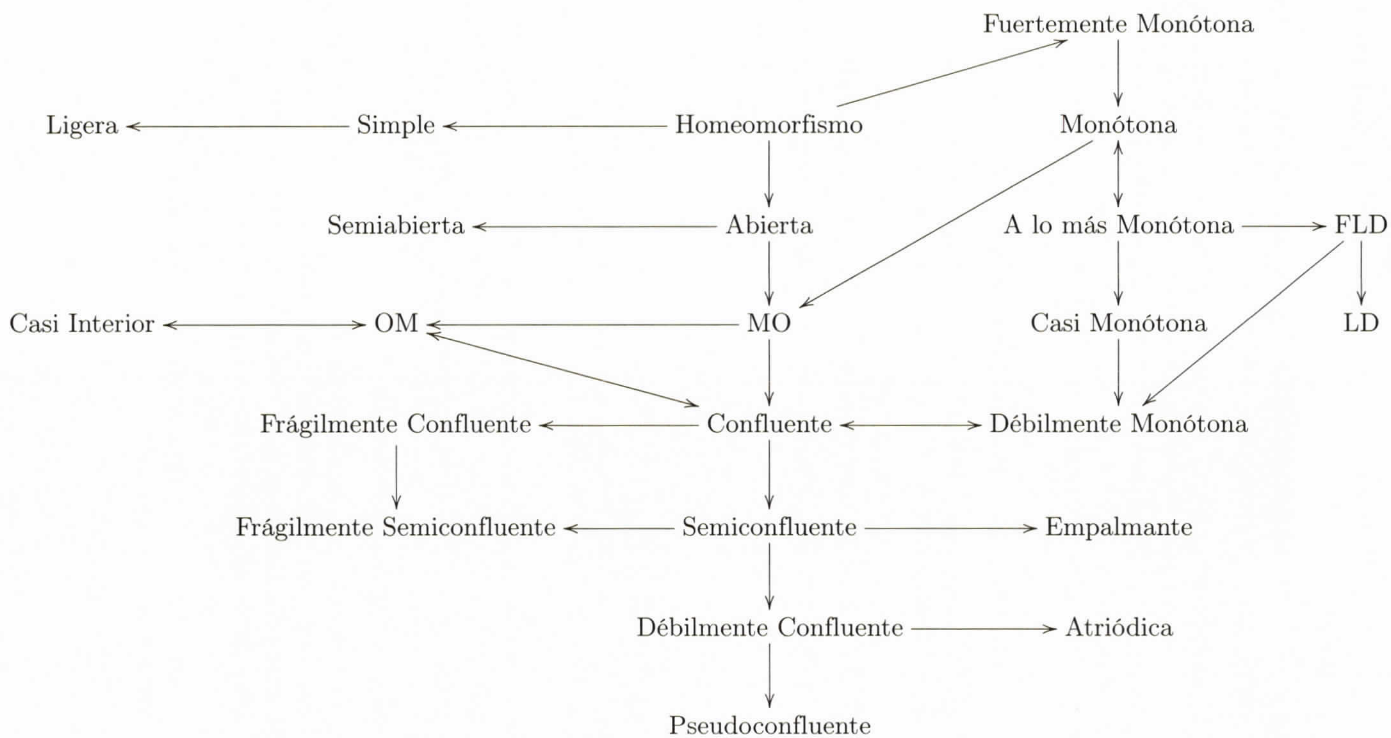

FIGURA 3. Diagrama que muestra las relaciones que existen entre las clases de funciones proporcionadas en la Definición 3.1, consideradas con rango localmente conexo.

Referencias

[1] F. Barragán y M. de J. López, *Funciones especiales entre continuos*, Capítulo 5 en Topología y Sistemas Dinámicos III (Editores: J. J. Angoa, J. Arrazola, R. Escobedo, A. Illanes, M. Osorio, J. Poisot, G. Sienra, A. Tamariz). Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2010.

[2] J. J. Charatonik, *History of continuum theory*, Handbook of the History of General Topology. Editores: C. E. Aull y R. Lowen, Vol. 2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston and London, 1998, 703-786.

[3] J. J. Charatonik, *Confluent mappings and unicoherence of continua*, Fund. Math. 56 (1964), 213-220.

[4] J. J. Charatonik, *Mapping invariance of extremal continua*, Topology Appl., 43 (1992), 275-282.

[5] J. J. Charatonik, *On feebly monotone and related classes of mappings*, Topology Appl. 105 (2000) 15-29.

[6] J. J. Charatonik, *On strongly monotone mappings*, Continuum theory. Editores: A. Illanes, S. Macías y W. Lewis, Marcel Dekker, Inc., New York, 2002, 95-107.

[7] J.J. Charatonik, *Component restriction property for classes of mappings*, Math. Pannomia 14 (1) (2003) 135-143.

[8] M. Fréchet, *Les dimensions d'un ensemble abstrait*, Math. Ann. 68 (1910), 145-168.

[9] G. R. Gordh, Jr. y C. B. Hughes, *On freely decomposable mappings of continua*, Glasnik Math. 85 (1974), 155-164.

[10] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, 1968.

[11] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2005.

[12] T. Maćkowiak, *Continuous Mappings on Continua*, Dissertaciones Math. (Rozprawy Mat.), 158 (1979), 1-91.

[13] R. L. Moore, *Concerning upper semi-contiuous collections of continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), 416-428.

[14] J. R. Munkres, *Topology*, Second Edition, Massachusetts Institute of Technology, 2000.

[15] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[16] Anahí Rojas, *Funciones libremente descomponibles*, Tesis de Licenciatura, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2015.

[17] H. Weyl, *Die ldee der Riemannachen Flache*, Leipzig, 1913.

Correos electrónicos:

`franco@mixteco.utm.mx` (Franco Barragán),
`sergiom@matem.unam.mx` (Sergio Macías),
`anacarrasco.rr@gmail.com` (Anahí Rojas).