数学学习笔记

Roger Young

2017 年 8 月 22 日

目录

第一部分

高等数学

第一章　函数与极限

第二章　导数与微分

第三章　微分中值定理与导数的应用

第二部分

线性代数

第四章　行列式

行列式是线性代数中常用的工具。本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法。

4.1　二阶与三阶行列式

4.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{4.1}$$

为消去未知数 x_2，以 a_{22} 和 a_{12} 分别乘上列方程的两端，然乎两个方程相减，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2; \tag{4.2}$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}; \tag{4.3}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程组 4.1 的解为：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{4.4}$$

4.4 式中的分子、分母都是四个数分两对相乘、再相减而得，其中分母 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ 是由方程组 4.1 的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组 4.1 中的位置，排列成两行两列（横排称行、竖排成列）的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}. \end{matrix} \tag{4.5}$$

表达式 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ 称为数表 4.5 所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式 4.6 的**元素或元**。元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列。位于第 i 行、第 j 列的元素称为行列式 4.6 的 **(i,j) 元**。

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆。把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**，于是二阶行列式便是**主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差**。

利用二阶行列式的概念，式 4.4 中的 x_1，x_2 的分子也可写成二阶行列式，即

$$
\begin{gathered}
b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \\
a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}
\end{gathered}
\tag{4.7}
$$

若记

$$
\begin{gathered}
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \\
D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}
\end{gathered}
\tag{4.8}
$$

那么式 4.4 可写成

$$
\begin{gathered}
x_1=\frac{D_1}{D_2}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\
x_1=\frac{D_2}{D_2}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}
\end{gathered}
\tag{4.9}
$$

注意这里的分母 D 是由方程组 4.1 （第15页）的系数所确定的二阶行列式（称系数行列式），x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中的第一列的元素 a_{11}、a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中的第一列的元素 a_{12}、a_{22} 所得的二阶行列式。

4.1.2 三阶行列式

第三部分

概率论与数理统计

附录