数学学习笔记

Roger Young

2017 年 8 月 22 日

目录

第一部分

高等数学

第一章　函数与极限

第二章　导数与微分

第三章　微分中值定理与导数的应用

第二部分

线性代数

第四章 行列式

行列式是线性代数中常用的工具。本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法。

4.1 二阶与三阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{4.1}$$

为消去未知数 x_2，以 a_{22} 和 a_{12} 分别乘上列方程的两端，然乎两个方程相减，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2; \tag{4.2}$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}; \tag{4.3}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程组 4.1 的解为：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{4.4}$$

4.4 式中的分子、分母都是四个数分两对相乘、再相减而得，其中分母 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ 是由方程组 4.1 的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组 4.1 中的位置，排列成两行两列（横排称行、竖排成列）的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}. \end{matrix} \tag{4.5}$$

表达式 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ 称为数表 4.5 所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式 4.6 的元素或元。元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列。位于第 i 行、第 j 列的元素称为行列式 4.6 的 (i,j) 元。

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆。把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差。

利用二阶行列式的概念，式 4.4 中的 x_1，x_2 的分子也可写成二阶行列式，即

$$\begin{aligned} b_1a_{22}-a_{12}b_2 &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \\ a_{11}b_2-b_1a_{21} &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4.7}$$

若记

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ D_1 &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4.8}$$

那么式 4.4 可写成

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{D_1}{D_2} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_1 &= \frac{D_2}{D_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

注意

第三部分

概率论与数理统计

附录