

# 数学学习笔记

Roger Young

2017 年 8 月 27 日



# 目录

目录	3
第一部分 高等数学	5
第一章 函数与极限	7
第二章 导数与微分	9
第三章 微分中值定理与导数的应用	11
第二部分 线性代数	13
第四章 行列式	15
4.1 二阶与三阶行列式 . . . . .	15
4.1.1 二元线性方程组与二阶行列式 . . . . .	15
4.1.2 三阶行列式 . . . . .	17
4.2 全排列和对换 . . . . .	17
4.2.1 排列及其逆序数 . . . . .	17
4.2.2 对换 . . . . .	18
4.3 $n$ 阶行列式的定义 . . . . .	18
4.4 行列式的性质 . . . . .	18
4.5 行列式按行（列）展开 . . . . .	19
第五章 矩阵及其运算	21
5.1 线性方程组和矩阵 . . . . .	21
5.1.1 线性方程组 . . . . .	21
第三部分 概率论与数理统计	23



# 第一部分

## 高等数学



# 第一章 函数与极限





## 第二章 导数与微分



### 第三章 微分中值定理与导数的应用



## 第二部分

## 线性代数



## 第四章 行列式

行列式是线性代数中常用的工具。本章主要介绍  $n$  阶行列式的定义、性质及其计算方法。

### 4.1 二阶与三阶行列式

#### 4.1.1 二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (4.1)$$

为消去未知数  $x_2$ ，以  $a_{22}$  和  $a_{12}$  分别乘上列方程的两端，然后两个方程相减，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2; \quad (4.2)$$

类似地，消去  $x_1$ ，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}; \quad (4.3)$$

当  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  时，求得方程组 4.1 的解为：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \quad (4.4)$$

4.4 式中的分子、分母都是四个数分两对相乘、再相减而得，其中分母  $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$  是由方程组 4.1 的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组 4.1 中的位置，排列成两行两列（横排称行、竖排称列）的数表

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}. \quad (4.5)$$

表达式  $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$  称为数表 4.5 所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (4.6)$$

数  $a_{ij} (i = 1, 2; j = 1, 2)$  称为行列式 4.6 的元素或元。元素  $a_{ij}$  的第一个下标  $i$  称为行标，表明该元素位于第  $i$  行；第二个下标  $j$  称为列标，表明该元素位于第  $j$  列。位于第  $i$  行、第  $j$  列的元素称为行列式 4.6 的  $(i, j)$  元。

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆。把  $a_{11}$  到  $a_{22}$  的实连线称为主对角线， $a_{12}$  到  $a_{21}$  的虚连线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差。

利用二阶行列式的概念，式 4.4 中的  $x_1, x_2$  的分子也可写成二阶行列式，即

$$\begin{aligned} b_1 a_{22} - a_{12} b_2 &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \\ a_{11} b_2 - b_1 a_{21} &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

若记

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ D_1 &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

那么式 4.4 可写成

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{D_1}{D_2} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_2 &= \frac{D_2}{D_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

注意这里的分母  $D$  是由方程组 4.1（第15页）的系数所确定的二阶行列式（称系数行列式）， $x_1$  的分子  $D_1$  是用常数项  $b_1, b_2$  替换  $D$  中的第一列的元素  $a_{11}, a_{21}$  所得的二阶行列式， $x_2$  的分子  $D_2$  是用常数项  $b_1, b_2$  替换  $D$  中的第二列的元素  $a_{12}, a_{22}$  所得的二阶行列式。



### 4.1.2 三阶行列式

定义 1. 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \quad (4.10)$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \quad (4.11)$$

4.11 式成为数表 4.10 所确定的三阶行列式。

上述定义表明三阶行列式含 6 项, 每项均为不同行、不同列的三个元素的乘积再加上正负号。

## 4.2 全排列和对换

### 4.2.1 排列及其逆序数

把  $n$  个不同的元素排成一列, 叫做这  $n$  个元素的全排列 (也简称排列)。

$n$  个不同元素的所有排列的总数, 通常用  $P_n$  表示, 可计算如下:

1. 从  $n$  个元素中任取一个放在第一个位置上, 有  $n$  中取法;
2. 从剩下的  $n-1$  个元素中任取一个放在第二个位置上, 有  $n-1$  种取法;
3. 这样继续下去, 直到只剩下一个元素放在第  $n$  个位置上, 只有 1 种取法。

于是

$$P_n = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = n! \quad (4.12)$$

例如, 用 1、2、3 三个数字做排列, 排列的总数  $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ , 它们是

123、231、321、132、213、312。

定义 2. 对于  $n$  个不同的元素, 先规定各元素之间有一个标准次序 (例如  $n$  个不同的自然数, 可规定由小到大为标准次序), 于是在这  $n$  个元素的任一排列中, 当某一对元素的先后次序与标准次序不同时, 就说它构成了 1 个逆序。一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数。

逆序数为奇数的排列叫做奇排列, 逆序数为偶数的排列叫做偶排列。

下面来讨论计算排列逆序数的方法。

不失一般性, 不妨设  $n$  个元素为 1 到  $n$  这  $n$  个自然数, 并规定由小到大为标准次序。设  $p_1 p_2 \cdots p_n$  为这  $n$  个自然数的一个排列, 考虑元素  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 如果比  $p_i$  大的且排在  $p_i$  前面的元素有  $t_i$  个, 就说  $p_i$  这个元素的逆序数是  $t_i$ 。全体元素的逆序数之总和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^n t_i \quad (4.13)$$

即是这个排列的逆序数。

### 4.2.2 对换

在排列中, 将任意两个元素对调, 其余的元素不动, 这种做出新排列的手续叫做对换。将相邻两个元素对换, 叫做相邻对换。

**定理 1.** 一个排列中任意两个元素对换, 排列改变奇偶性。

**推论 1.** 奇排列对换成标准排列的对换次数为奇数, 偶排列对换成标准排列的对换次数为偶数。

## 4.3 $n$ 阶行列式的定义

**定义 3.** 设有  $n^2$  个数, 排成  $n$  行  $n$  列的数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \quad (4.14)$$

做出表中位于不同行、不同列的  $n$  个数的乘积, 并冠以符号  $(-1)^t$ , 得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (4.15)$$

的项, 其中  $p_1 p_2 \cdots p_n$  为自然数  $1, 2, \dots, n$  的一个排列,  $t$  为这个排列的逆序数。由于这样的排列共有  $n!$  个, 因而形如 4.15 式的项共有  $n!$  项。所有这  $n!$  项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (4.16)$$

称为  $n$  阶行列式, 记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (4.17)$$

简记为  $\det(a_{ij})$ , 其中数  $a_{ij}$  为行列式  $D$  的  $(i, j)$  元。

主对角线以下的元素都为 0 的行列式叫做上三角行列式; 主对角线以上的元素都为 0 的行列式叫做下三角行列式; 主对角线以上和以下的元素都为 0 的行列式叫做对角行列式。

## 4.4 行列式的性质

**定义 4.** 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (4.18)$$

行列式  $D^T$  称行列式  $D$  的转置行列式。

性质 1. 行列式与它的转置行列式相等。

性质 2. 对换行列式的两行（或两列），行列式变号。

推论 2. 如果行列式有两行（或两列）完全相同，则此行列式等于零。

性质 3. 行列式的某一行（某一列）中所有的元素都乘同一数  $k$ ，等于用数  $k$  乘此行列式。

推论 3. 行列式中某一行（某一列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面。

性质 4. 行列式如果有两行（两列）成比例，则此行列式等于零。

性质 5. 若行列式的某一行（某一列）的元素都是两数之和，例如第  $i$  行的元素都是两数之和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a'_{i1} & a_{i2} + a'_{i2} & \cdots & a_{in} + a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (4.19)$$

则  $D$  等于下列两个行列式之和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (4.20)$$

性质 6. 把行列式的某一行（某一列）的各元素乘同一数、然后加到另一行（另一列）对应的元素上，行列式不变。

## 4.5 行列式按行（列）展开

一般来说，低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便，于是，我们自然地考虑用低阶行列式来表示高阶行列式的问题。为此，先引进余子式和代数余子式的概念。

定义 5. 在  $n$  阶行列式中，把  $(i, j)$  元  $a_{ij}$  所在的第  $i$  行和第  $j$  列划去后，留下的  $n-1$  阶行列式叫做  $(i, j)$  元  $a_{ij}$  的余子式，记作  $M_{ij}$ ，记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad (4.21)$$

$A_{ij}$  叫做  $(i, j)$  元  $a_{ij}$  的代数余子式。

引理 1. 一个  $n$  阶行列式，如果其中第  $i$  行所有元素除  $(i, j)$  元  $a_{ij}$  外都为零，那么这行列式等于  $a_{ij}$  与它的代数余子式的乘积，即

$$D = a_{ij} A_{ij}. \quad (4.22)$$

**定理 2.** 行列式等于它的任一行（任一列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.23)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} (j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.24)$$

证明范德蒙德（Vandermonde）行列数

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{2 \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j), \quad (4.25)$$

其中，记号“ $\prod$ ”表示全体同类因子的乘积。

**推论 4.** 行列式某一行（某一列）的元素与另一行（另一列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad (i \neq j) \quad (4.26)$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad (i \neq j) \quad (4.27)$$

# 第五章 矩阵及其运算

## 5.1 线性方程组和矩阵

### 5.1.1 线性方程组

定义 6. 设有  $n$  个未知数  $m$  个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (5.1)$$

其中  $a_{ij}$  是第  $i$  个方程的第  $j$  个未知数的系数,  $b_i$  是第  $i$  个方程的常数项,  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ , 当常数项  $b_1, b_2, \dots, b_m$  不全为零时, 线性方程组 5.1 叫做  $n$  元非齐次线性方程组, 当  $b_1, b_2, \dots, b_m$  全为零时, 5.1 式称为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

叫做  $n$  元齐次线性方程组。



## 第三部分

### 概率论与数理统计





## 附录



