

热学

第8讲 令人崩溃的期中考试

黄志琦

教材：《热学》第二版，赵凯华，罗蔚茵，高等教育出版社
课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_TD

上讲内容回顾

- ▶ 内能是态函数
- ▶ 热力学第一定律: $\Delta U = A + Q$ 。
- ▶ 绝热过程状态方程: $pV^\gamma = \text{constant}$, 其中 $\gamma = C_p/C_V = (C_V + \nu R)/C_V$ 。
- ▶ 大气的绝热近似: 空气中的声速 $u_s = \sqrt{\gamma}$; 干燥空气垂直温度梯度 $\frac{dT}{dz} \approx -10 \text{ K/km}$ 。
- ▶ 多方过程气体对外做功 $A' = -\frac{\nu R}{n-1} \Delta T$ (等温过程 $n = 1$ 则需要另算)。
- ▶ 多方过程热容 $C_n = C_V - \frac{\nu R}{n-1}$ (等温过程 $C = \infty$)。

本讲内容

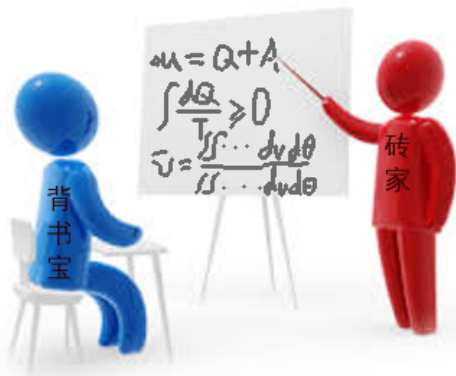
- ▶ 期中参考答案

期中考后感



悲剧的主要原因

你们用
学历史
的方法
学物理



我们用
教数学
的方法
教物理

第一题

- (1) 叙述热力学第零定律; (10分)
- (2) 叙述定体气体温度计和定压气体温度计的工作原理。
(10分)

(1)叙述热力学第零定律(10分)

在与外界影响隔绝的条件下，如果物体A、B分别与处于**确定状态**的物体C达到热平衡，则物体A和B也是相互热平衡的。

- ▶ 没有提到“外界影响隔绝”不扣分。
- ▶ 如果没有说明物体C处于确定状态，或者说成A，B处于确定状态，则说明你完全没有理解热力学第零定律，（放水）给8分。
- ▶ 如果瞎扯了一堆温度热平衡之类的概念，按照相关度给1-7分。

(2) 叙述定体气体温度计和定压气体温度计的工作原理(10分)

定体气体温度计：气体固定体积时压强近似和温度成正比(+5分)。

- ▶ 没提到固定体积，扣1分。
- ▶ 没有提到近似正比，说根据一定关系或者说随着温度升高而压强增大等，扣1分。但如提到理想气体状态方程，或能画出正确的工作原理图，则这1分不扣。

定压气体温度计：气体固定压强时体积近似和温度成正比(+5分)。

- ▶ 没提到固定压强，扣1分。
- ▶ 没有提到近似正比，说根据一定关系或者说随着温度升高而体积增大等，扣1分。但如提到理想气体状态方程，或能画出正确的工作原理图，则这1分不扣。

第二题

把摩尔数为 ν_1 ，每个分子质量为 m_1 的理想气体和摩尔数为 ν_2 ，每个分子质量为 m_2 的理想气体混合而成的气体置于容积为 V ，温度为 T 的恒温箱内达到热平衡。两种气体间无化学反应。

- (1) 求混合气体的压强 p ; (5分)
- (2) 求混合气体的分子平均速率 \bar{v} ; (5分)
- (3) 求混合气体的分子方均根速率 v_{rms} ; (5分)
- (4) 证明 $v_{\text{rms}} > \bar{v}$ 。(5分)

(1)求混合气体的压强 p ; (5分)

两种气体压强分别为

$$p_1 = \frac{\nu_1 RT}{V}$$

$$p_2 = \frac{\nu_2 RT}{V}$$

根据道尔顿分压定律

$$p = p_1 + p_2 = \frac{(\nu_1 + \nu_2)RT}{V}$$

- ▶ 答案对即给5分
- ▶ 多乘，多除 N_A 的，（放水）给4分

(2)求混合气体的分子平均速率 \bar{v} ; (5分)

两种气体的分子平均速率分别为

$$\bar{v}_1 = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}}, \quad \bar{v}_2 = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_2}}$$

第一类分子个数为 $N_1 = \nu_1 N_A$ ，第二类分子个数为 $N_2 = \nu_2 N_A$ ，
根据分子平均速率的定义（全部分子的速率之和除以总分子数）

$$\bar{v} = \frac{\sum v_1 + \sum v_2}{N_1 + N_2} = \frac{N_1 \bar{v}_1 + N_2 \bar{v}_2}{N_1 + N_2} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1 m_2}} \frac{\nu_1 \sqrt{m_2} + \nu_2 \sqrt{m_1}}{\nu_1 + \nu_2}$$

- ▶ 答案对即给5分
- ▶ 其余情况放水规则：用平均质量或者总质量等，+1分；用正确的平均方法则+3分。写出正确的平均速率+2分，否则若正确写出平均速率积分式，+1分。

(3)求混合气体的分子方均根速率 v_{rms} ; (5分)

两种气体的速率平方平均分别为

$$\overline{v_1^2} = \frac{3kT}{m_1}, \quad \overline{v_2^2} = \frac{3kT}{m_2}$$

第一类分子个数为 $N_1 = \nu_1 N_A$ ，第二类分子个数为 $N_2 = \nu_2 N_A$ ，根据分子方均根速率的定义（全部分子的速率平方之和除以总分子数再开平方）

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{\sum v_1^2 + \sum v_2^2}{N_1 + N_2}} = \sqrt{\frac{N_1 \overline{v_1^2} + N_2 \overline{v_2^2}}{N_1 + N_2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_1 m_2} \frac{\nu_1 m_2 + \nu_2 m_1}{\nu_1 + \nu_2}}$$

- ▶ 答案对即给5分
- ▶ 其余情况放水规则：用平均质量或者总质量等，+1分；用正确的平均方法则+3分。写出正确的方均根速率+2分，否则若正确写出方均根速率积分式，+1分。

(4)证明 $\overline{v} > \bar{v}$; (5分)

根据麦克斯韦分布，显然并非所有分子速率相等。所以 $v - \bar{v}$ 不可能全为零，其平方平均大于零。

$$\begin{aligned}
 0 &< \overline{(v - \bar{v})^2} \\
 &= \overline{v^2} + \bar{v}^2 - 2\overline{v\bar{v}} \\
 &= \overline{v^2} + \bar{v}^2 - 2\bar{v}^2 \\
 &= \overline{v^2} - \bar{v}^2
 \end{aligned}$$

移项开平方即有

$$v_{\text{rms}} > \bar{v}$$

- ▶ 任何正确的证明给5分。
- ▶ 其余情况放水规则：思想正确但因代数化简能力不足而未能完成完整证明的酌情给3-4分。因为前面两问用了平均质量或者总质量，这一问直接根据 $3 > \frac{8}{\pi}$ 得出结论，给2分。

第三题

有一团二维气体被束缚在 xy 平面内运动。气体粒子的速度分布为

$$f(v_x, v_y) = Ae^{-Bv} \quad (B > 0),$$

这里速率定义为 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ 。

- (a) 利用速度分布函数归一化条件, 用 B 来表示 A ; (5分)
- (b) 求速率 v 的分布函数; (5分)
- (c) 求粒子的平均速率 \bar{v} (用 B 表示) ; (5分)
- (d) 求在气体中找到一个粒子, 其速率大于 $2\bar{v}$ 的概率。 (5分)

(1)利用速度分布函数归一化条件, 用 B 来表示 A ; (5分)

速度分布函数的归一化条件为

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y A e^{-Bv} = 1$$

转化到极坐标进行积分

$$\int_0^{\infty} dv \int_0^{2\pi} d\varphi v A e^{-Bv} = 1$$

即

$$2\pi A \int_0^{\infty} v e^{-Bv} dv = \frac{2\pi A}{B^2} = 1$$

即

$$A = \frac{B^2}{2\pi}$$

(2)求速率 v 的分布函数; (5分)

在极坐标下的概率元为

$$Ae^{-Bv} v dv d\varphi$$

对 φ 进行积分即得到 v 的概率密度函数（即速率分布函数）为：

$$F(v) = \int_0^{2\pi} d\varphi A v e^{-Bv} = 2\pi A v e^{-Bv} = B^2 v e^{-Bv}$$

(3)求粒子的平均速率 \bar{v} (用 B 表示) ; (5分)

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v F(v) dv = B^2 \int_0^{\infty} v^2 e^{-Bv} dv = \frac{2}{B}$$

(4)求在气体中找到一个粒子，其速率大于 $2\bar{v}$ 的概率。
(5分)

$$\begin{aligned}P(v > 2\bar{v}) &= \int_{2\bar{v}}^{\infty} F(v) dv \\&= B^2 \int_{\frac{4}{B}}^{\infty} v e^{-Bv} dv \\&= -B \left(v e^{-Bv} \Big|_{\frac{4}{B}}^{\infty} - \int_{\frac{4}{B}}^{\infty} e^{-Bv} dv \right) \\&= -B \left(-\frac{4}{B} e^{-4} - \frac{1}{B} e^{-4} \right) \\&= 5e^{-4}\end{aligned}$$

第四题

有一密闭的圆柱型气箱，底面积为 S ，高为 L 。箱内充满了温度为 T 的等温单原子气体，共有 N 个原子，每个原子质量为 m 。将圆柱型气箱在地球重力场中竖直摆放。问气体在气箱上端和下端的气压各为多少。(10分)

第四题

根据玻尔兹曼分布律，气体分子数密度为

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

其中 n_0 为箱底的分子数密度， z 为离箱底的高度。又总分子数可以写成

$$N = \int_0^L n(z) S dz = \frac{n_0 S k T}{mg} \left(1 - e^{-\frac{mgL}{kT}} \right)$$

$$\text{故 } n_0 = \frac{mgN}{kTS \left(1 - e^{-\frac{mgL}{kT}} \right)}$$

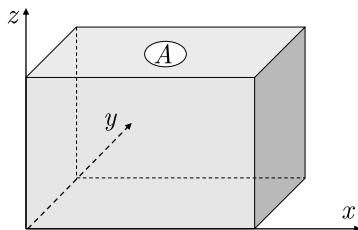
底部压强

$$p(0) = n(0)kT = n_0 kT = \frac{mgN}{S \left(1 - e^{-\frac{mgL}{kT}} \right)}$$

顶部压强

$$p(L) = n(L)kT = n_0 e^{-\frac{mgL}{kT}} kT = \frac{mgN}{S \left(e^{\frac{mgL}{kT}} - 1 \right)}$$

(五) 容器中装有处于热平衡的理想气体，温度为 T ，分子数密度为 n ，每个分子质量为 m 。容器外部为真空。在容器上方开一小孔，面积为 A 。如下图所示。



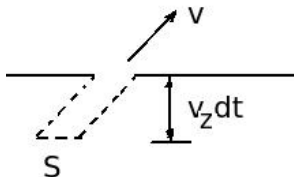
- (1) 写出容器中分子的速度的分布函数 $f(v_x, v_y, v_z)$; (5分)
- (2) 证明当 $v_z > 0$ 时，逸出分子的速度的分布函数正比于 $v_z f(v_x, v_y, v_z)$; (10分)
- (3) 求逸出分子的速率分布函数 $F(v)$ 。 (5分)

(1) 写出容器中分子的速度的分布函数 $f(v_x, v_y, v_z)$;
(5分)

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

(2)证明当 $v_z > 0$ 时, 逸出分子的速度的分布函数正比于 $v_z f(v_x, v_y, v_z)$; (10分)

现在考虑在时间 dt 内, 速度在 (v_x, v_y, v_z) 附近的速度体积元 $dv_x dv_y dv_z$ 之内的逸出分子, 它必然来自于下图虚线所示的区域:



显然, 该区域体积为 $Sv_z dt$, 其中的分子数为 $nSv_z dt$ 。又在容器内分子速度在 (v_x, v_y, v_z) 附近的速度体积元 $dv_x dv_y dv_z$ 之内的概率为 $f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$ 。

因此速度在 (v_x, v_y, v_z) 附近的速度体积元 $dv_x dv_y dv_z$ 之内的逸出分子数为

$$nSv_z dt f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \propto v_z f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

根据速度分布函数的定义, 上式又正比于逸出分子的速度分布函数乘以 $dv_x dv_y dv_z$, 故证毕。

(3) 求逸出分子的速率分布函数 $F(v)$ 。(5分)

取球坐标, 当 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 时, 逸出分子的速度分布函数正比于

$$v^3 \cos \theta e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

当 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 时, 逸出分子的速度分布函数为零。

对 θ, φ 积分后, 得到速率分布函数

$$F(v) \propto v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

由归一化条件得到

$$F(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{kT} \right)^2 v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

(六) 一带小孔 (设面积为 A) 的固定隔板把容器分为体积相等 (设为 V) 的两部分。整个容器被温度为 T 的恒温热源包围。初始时刻 $t = 0$, 左方装有压强为 P_0 , 每个分子质量为 m 的理想气体, 右方为真空。由于孔很小, 虽然板两边分子数都随时间变化, 仍可近似认为两边一直都分别处于热平衡。求:

- (1) 初始时刻左方气体在单位时间内减少的分子数; (5分)
- (2) 左方气体压强随时间变化的函数形式。 (5分)

(1)初始时刻左方气体在单位时间内减少的分子数;
(5分)

泻流速率

$$v_{\text{leak}} = \frac{1}{4} \bar{v} = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$$

初始时刻左方分子数密度

$$n_0 = \frac{P_0}{kT}$$

故单位时间减少的分子数为

$$n_0 A v_{\text{leak}} = \frac{P_0 A}{kT} \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = \frac{P_0 A}{\sqrt{2\pi m k T}}$$

(2) 左方气体压强随时间变化的函数形式。(5分)

设左边分子数密度为 n (它是 t 的函数), 则由总分子数守恒, 右边分子数密度为 $n_0 - n$ 。单位时间从左边跑到右边去的分子数为 $N_l = n A v_{\text{leak}}$; 从右边跑到左边去的分子为 $N_r = (n_0 - n) A v_{\text{leak}}$ 。单位时间左边分子数变化量为

$$V \frac{dn}{dt} = N_r - N_l = (n_0 - 2n) A v_{\text{leak}}$$

上式可以写成

$$\frac{1}{n - \frac{n_0}{2}} \frac{dn}{dt} = N_r - N_l = -\frac{2A v_{\text{leak}}}{V}$$

两边从 0 积分到 t , 并利用 $t = 0$ 时刻 $n = n_0$, 即有

$$\ln \left(n - \frac{n_0}{2} \right) \Big|_0^t = \ln \left(\frac{2n(t)}{n_0} - 1 \right) = -\frac{2A v_{\text{leak}} t}{V}$$

即

$$n(t) = \frac{n_0}{2} \left(1 + e^{-\frac{2A v_{\text{leak}} t}{V}} \right)$$

$$P = nkT = \frac{P_0}{2} \left(1 + e^{-\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \frac{At}{V}} \right)$$