热学
第8讲 期中你挂了吗?

黄志琦

教材：《热学》第二版，赵凯华，罗蔚茵，高等教育出版社
课件下载 https://github.com/zqhuang/SYSU_TD

上讲内容回顾

- 内能是态函数
- 热力学第一定律：$\Delta U = A + Q$。
- 绝热过程状态方程：$pV^{\gamma} = \mathrm{constant}$，其中$\gamma = C_p/C_V = (C_V + \nu R)/C_V$。
- 大气的绝热近似：空气中的声速$u_s = \sqrt{\gamma}$；干燥空气垂直温度梯度$\frac{dT}{dz} \approx -10\,\mathrm{K/\,km}$。
- 多方过程气体对外做功$A' = -\frac{\nu R}{n-1}\Delta T$（等温过程$n = 1$则需要另算）。
- 多方过程热容$C_n = C_V - \frac{\nu R}{n-1}$（等温过程$C = \infty$）。

本讲内容

- 期中参考答案

期中考后感

悲剧的主要原因

你们用
学历史
的方法
学物理

我们用
教数学
的方法
教物理

第一题

(1) 叙述热力学第零定律; (10分）

(2) 叙述定体气体温度计和定压气体温度计的工作原理。（10分）

(1)叙述热力学第零定律(10分)

在与外界影响隔绝的条件下，如果物体A、B分别与处于**确定状态**的物体C达到热平衡，则物体A和B也是相互热平衡的。

- 没有提到“外界影响隔绝”不扣分。
- 如果没有说明物体C处于确定状态，或者说成A，B处于确定状态，则说明你完全没有理解热力学第零定律，（放水）给8分。
- 如果瞎扯了一堆温度热平衡之类的概念，按照相关度给1-7分。

(2)叙述定体气体温度计和定压气体温度计的工作原理(10分)

定体气体温度计：气体固定体积时压强近似和温度成正比(+5分)。

- 没提到固定体积，扣1分。
- 没有提到近似正比，说根据一定关系或者说随着温度升高而压强增大等，扣1分。但如提到理想气体状态方程，或能画出正确的工作原理图，则这1分不扣。

定压气体温度计：气体固定压强时体积近似和温度成正比(+5分)。

- 没提到固定压强，扣1分。
- 没有提到近似正比，说根据一定关系或者说随着温度升高而体积增大等，扣1分。但如提到理想气体状态方程，或能画出正确的工作原理图，则这1分不扣。

第二题

把摩尔数为ν_1，每个分子质量为m_1的理想气体和摩尔数为ν_2，每个分子质量为m_2的理想气体混合而成的气体置于容积为V，温度为T的恒温箱内达到热平衡。两种气体间无化学反应。

(1) 求混合气体的压强p; (5分)

(2) 求混合气体的分子平均速率$\overline{v}$; (5分)

(3) 求混合气体的分子方均根速率v_{rms}; (5分)

(4) 证明$v_{\mathrm{rms}} > \overline{v}$。(5分)

(1)求混合气体的压强p; (5分)

两种气体压强分别为

$$p_1 = \frac{\nu_1 RT}{V}$$

$$p_2 = \frac{\nu_2 RT}{V}$$

根据道尔顿分压定律

$$p = p_1 + p_2 = \frac{(\nu_1 + \nu_2)RT}{V}$$

- 答案对即给5分
- 多乘，多除N_A的，（放水）给4分

(2)求混合气体的分子平均速率$\overline{v}$; (5分)

两种气体的分子平均速率分别为

$$\overline{v_1}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}},\quad \overline{v_2}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_2}}$$

第一类分子个数为$N_1=\nu_1 N_A$，第二类分子个数为$N_2=\nu_2 N_A$，根据分子平均速率的定义（全部分子的速率之和除以总分子数）

$$\overline{v}=\frac{\sum v_1+\sum v_2}{N_1+N_2}=\frac{N_1\overline{v_1}+N_2\overline{v_2}}{N_1+N_2}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1 m_2}}\frac{\nu_1\sqrt{m_2}+\nu_2\sqrt{m_1}}{\nu_1+\nu_2}$$

- 答案对即给5分
- 其余情况放水规则：用平均质量或者总质量等，+1分；用正确的平均方法则+3分。写出正确的平均速率+2分，否则若正确写出平均速率积分式，+1分。

(3)求混合气体的分子方均根速率v_{rms}; (5分)

两种气体的速率平方平均分别为

$$\overline{v_1^2} = \frac{3kT}{m_1}, \quad \overline{v_2^2} = \frac{3kT}{m_2}$$

第一类分子个数为$N_1 = \nu_1 N_A$，第二类分子个数为$N_2 = \nu_2 N_A$，根据分子方均根速率的定义（全部分子的速率平方之和除以总分子数再开平方）

$$v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{\sum v_1^2 + \sum v_2^2}{N_1 + N_2}} = \sqrt{\frac{N_1 \overline{v_1^2} + N_2 \overline{v_2^2}}{N_1 + N_2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_1 m_2} \frac{\nu_1 m_2 + \nu_2 m_1}{\nu_1 + \nu_2}}$$

- 答案对即给5分
- 其余情况放水规则：用平均质量或者总质量等，+1分；用正确的平均方法则+3分。写出正确的方均根速率+2分，否则若正确写出方均根速率积分式，+1分。

(4)证明$\overline{v} > \overline{v}$; (5分)

根据麦克斯韦分布，显然并非所有分子速率相等。所以$v-\overline{v}$不可能全为零，其平方平均大于零。

$$
\begin{aligned}
0 &< \overline{(v-\overline{v})^2} \\
&= \overline{v^2} + \overline{v}^2 - 2\overline{v\overline{v}} \\
&= \overline{v^2} + \overline{v}^2 - 2\overline{v}^2 \\
&= \overline{v^2} - \overline{v}^2
\end{aligned}
$$

移项开平方即有

$$v_{\rm rms} > \overline{v}$$

- 任何正确的证明给5分。
- 其余情况放水规则：思想正确但因代数化简能力不足而未能完成完整证明的酌情给3-4分。因为前面两问用了平均质量或者总质量，这一问直接根据$3 > \frac{8}{\pi}$得出结论，给2分。

第三题

有一团二维气体被束缚在xy平面内运动。气体粒子的速度分布为

$$f(v_x, v_y) = Ae^{-Bv}\,(B > 0),$$

这里速率定义为$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$。

(a) 利用速度分布函数归一化条件，用B来表示A; (5分)

(b) 求速率v的分布函数; (5分)

(c) 求粒子的平均速率$\bar{v}$（用B表示）; (5分)

(d) 求在气体中找到一个粒子，其速率大于$2\bar{v}$的概率。 (5分)

(1)利用速度分布函数归一化条件，用B来表示A; (5分)

速度分布函数的归一化条件为

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \, A e^{-Bv} = 1$$

转化到极坐标进行积分

$$\int_{0}^{\infty} dv \int_{0}^{2\pi} d\varphi \, v \, A e^{-Bv} = 1$$

即

$$2\pi A \int_{0}^{\infty} v e^{-Bv} dv = \frac{2\pi A}{B^2} = 1$$

即

$$A = \frac{B^2}{2\pi}$$

(2)求速率υ的分布函数; (5分)

在极坐标下的概率元为

$$Ae^{-B\upsilon}\,\upsilon d\upsilon d\varphi$$

对φ进行积分即得到υ的概率密度函数（即速率分布函数）为:

$$F(\upsilon)=\int_0^{2\pi}d\varphi\,A\upsilon e^{-B\upsilon}=2\pi A\upsilon e^{-B\upsilon}=B^2\upsilon e^{-B\upsilon}$$

(3)求粒子的平均速率$\overline{v}$（用B表示）；(5分)

$$\overline{v} = \int_0^{\infty} vF(v)dv = B^2 \int_0^{\infty} v^2 e^{-Bv} dv = \frac{2}{B}$$

(4)求在气体中找到一个粒子，其速率大于$2\overline{v}$的概率。(5分)

$$
\begin{aligned}
P(v > 2\overline{v}) &= \int_{2\overline{v}}^{\infty} F(v)dv \\
&= B^2 \int_{\frac{4}{B}}^{\infty} ve^{-Bv}dv \\
&= -B\left(ve^{-Bv}\Big|_{\frac{4}{B}}^{\infty} - \int_{\frac{4}{B}}^{\infty} e^{-Bv}dv \right) \\
&= -B\left(-\frac{4}{B}e^{-4} - \frac{1}{B}e^{-4} \right) \\
&= 5e^{-4}
\end{aligned}
$$

第四题

有一密闭的圆柱型气箱，底面积为S，高为L。箱内充满了温度为T的等温单原子气体，共有N个原子，每个原子质量为m。将圆柱型气箱在地球重力场中竖直摆放。问气体在气箱上端和下端的气压各为多少。(10分)

第四题

根据玻尔兹曼分布律，气体分子数密度为

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

其中n_0为箱底的分子数密度，z为离箱底的高度。又总分子数可以写成

$$N = \int_0^L n(z)Sdz = \frac{n_0 SkT}{mg}\left(1 - e^{-\frac{mgL}{kT}}\right)$$

故$n_0 = \frac{mgN}{kTS\left(1-e^{-\frac{mgL}{kT}}\right)}$

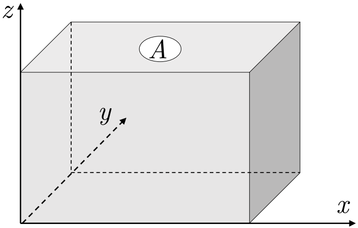
底部压强

$$p(0) = n(0)kT = n_0 kT = \frac{mgN}{S\left(1 - e^{-\frac{mgL}{kT}}\right)}$$

顶部压强

$$p(L) = n(L)kT = n_0 e^{-\frac{mgL}{kT}} kT = \frac{mgN}{S\left(e^{\frac{mgL}{kT}} - 1\right)}$$

(五)容器中装有处于热平衡的理想气体，温度为T，分子数密度为n，每个分子质量为m。容器外部为真空。在容器上方开一小孔，面积为A。如下图所示。



(1) 写出容器中分子的速度的分布函数$f(v_x, v_y, v_z)$; (5分)

(2) 证明当$v_z > 0$时，逸出分子的速度的分布函数正比于$v_z f(v_x, v_y, v_z)$;（10分）

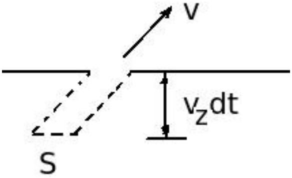
(3) 求逸出分子的速率分布函数$F(v)$。（5分）

(1) 写出容器中分子的速度的分布函数$f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$; (5分)

$$f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}$$

(2)证明当$\upsilon_z > 0$时，逸出分子的速度的分布函数正比于$\upsilon_z f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$；（10分）

现在考虑在时间dt内，速度在$(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$附近的速度体积元$d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z$之内的逸出分子，它必然来自于下图虚线所示的区域:



显然，该区域体积为$S\upsilon_z dt$，其中的分子数为$nS\upsilon_z dt$。又在容器内分子速度在$(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$附近的速度体积元$d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z$之内的概率为$f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z$。

因此速度在$(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$附近的速度体积元$d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z$之内的逸出分子数为

$$nS\upsilon_z dt f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z \propto \upsilon_z f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z$$

根据速度分布函数的定义，上式又正比于逸出分子的速度分布函数乘以$d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z$，故证毕。

(3)求逸出分子的速率分布函数$F(\upsilon)$。（5分）

取球坐标，当$\theta < \frac{\pi}{2}$时，逸出分子的速度分布函数正比于

$$\upsilon^3 \cos\theta e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}$$

当$\theta > \frac{\pi}{2}$时，逸出分子的速度分布函数为零。
对θ, φ积分后，得到速率分布函数

$$F(\upsilon) \propto \upsilon^3 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}$$

由归一化条件得到

$$F(\upsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{kT}\right)^2 \upsilon^3 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}$$

(六) 一带小孔（设面积为A）的固定隔板把容器分为体积相等（设为V）的两部分。整个容器被温度为T的恒温热源包围。初始时刻$t=0$，左方装有压强为P_0，每个分子质量为m的理想气体，右方为真空。由于孔很小，虽然板两边分子数都随时间变化，仍可近似认为两边一直都分别处于热平衡。求：

(1) 初始时刻左方气体在单位时间内减少的分子数；（5分）

(2) 左方气体压强随时间变化的函数形式。（5分）

(1)初始时刻左方气体在单位时间内减少的分子数；（5分）

泻流速率

$$v_{\text{leak}} = \frac{1}{4}\bar{v} = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$$

初始时刻左方分子数密度

$$n_0 = \frac{P_0}{kT}$$

故单位时间减少的分子数为

$$n_0 A v_{\text{leak}} = \frac{P_0 A}{kT}\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = \frac{P_0 A}{\sqrt{2\pi m k T}}$$

(2) 左方气体压强随时间变化的函数形式。（5分）

设左边分子数密度为n（它是t的函数），则由总分子数守恒，右边分子数密度为$n_0 - n$。单位时间从左边跑到右边去的分子数为$N_l = nA\upsilon_{\text{leak}}$;从右边跑到左边去的分子为$N_r = (n_0 - n)\,A\upsilon_{\text{leak}}$。单位时间左边分子数变化量为

$$V\frac{dn}{dt} = N_r - N_l = (n_0 - 2n)\,A\upsilon_{\text{leak}}$$

上式可以写成

$$\frac{1}{n - \frac{n_0}{2}}\frac{dn}{dt} = N_r - N_l = -\frac{2A\upsilon_{\text{leak}}}{V}$$

两边从0积分到t，并利用$t = 0$时刻$n = n_0$，即有

$$\ln\left(n - \frac{n_0}{2}\right)\Big|_0^t = \ln\left(\frac{2n(t)}{n_0} - 1\right) = -\frac{2A\upsilon_{\text{leak}}\,t}{V}$$

即

$$n(t) = \frac{n_0}{2}\left(1 + e^{-\frac{2A\upsilon_{\text{leak}}\,t}{V}}\right)$$

$$P = nkT = \frac{P_0}{2}\left(1 + e^{-\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}\frac{At}{V}}\right)$$