# SVM-2

**例 7.1** 数据与例 2.1 相同．已知一个如图 7.4 所示的训练数据集，其正例点是 $x_1=(3,3)^{\mathrm{T}}$，$x_2=(4,3)^{\mathrm{T}}$，负例点是 $x_3=(1,1)^{\mathrm{T}}$，试求最大间隔分离超平面．

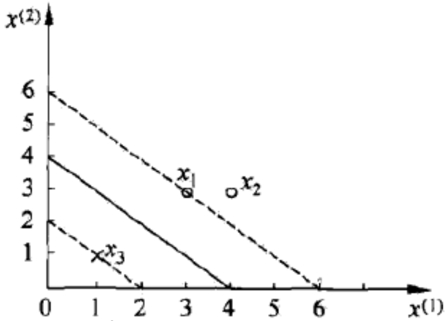



图 7.4　间隔最大分离超平面示例

$$
\begin{aligned}
&\max_{\alpha} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j y_i y_j x_i^T x_j\\
&s.t.,\ \alpha_i\ge 0, i=1,\dots,n\\
&\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i=0
\end{aligned}
$$

**解**　按照算法 7.1，根据训练数据集构造约束最优化问题：

$$
\begin{aligned}
\min_{w,b}\quad & \frac{1}{2}(w_1^2+w_2^2)\\
\text{s.t.}\quad & 3w_1+3w_2+b\geqslant 1\\
& 4w_1+3w_2+b\geqslant 1\\
& -w_1-w_2-b\geqslant 1
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{1}{2}\left(18\alpha_1^2+25\alpha_2^2+2\alpha_3^2+42\alpha_1\alpha_2-12\alpha_1\alpha_3-14\alpha_2\alpha_3\right)+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0\\
&\alpha_i\ge 0,\quad i=1,2,3
\end{aligned}
$$

将 $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$

带入目标函数，得到关于$\alpha_1$，$\alpha_2$的函数：

$$-4\alpha_1^2-\frac{13}{2}\alpha_2^2-10\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1+2\alpha_2$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad i=1,2,3$$

$\alpha_1=1/4$

$\alpha_2=0$

$\alpha_3=1/4$

$$w^*=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i x_i$$

# KKT 条件

首先给出形式化的不等式约束优化问题：

$$
\begin{aligned}
&\min_x \ f(x) \\
&s.t. \quad h_i(x) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m \\
&\qquad\quad g_j(x) \leq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$

列出 Lagrangian 得到无约束优化问题：

$$
L(x, \alpha, \beta) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \beta_i g_i(x)
$$

经过之前的分析，便得知加上不等式约束后可行解 $x$ 需要满足的就是以下的 KKT 条件：

$$
\begin{aligned}
\nabla_x L(x, \alpha, \beta) &= 0 && (1) \\
\beta_j g_j(x) &= 0, \ j = 1, 2, \ldots, n && (2) \\
h_i(x) &= 0, \ i = 1, 2, \ldots, m && (3) \\
g_j(x) &\leq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n && (4) \\
\beta_j &\geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n && (5)
\end{aligned}
$$

# 线性不可分情况下

开课吧
kaikeba.com
慧科集团旗下企业

根据线性可分情况下的结论：

$$w=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y^{(i)}x^{(i)}$$

将分类函数变形得最终分类函数，为：

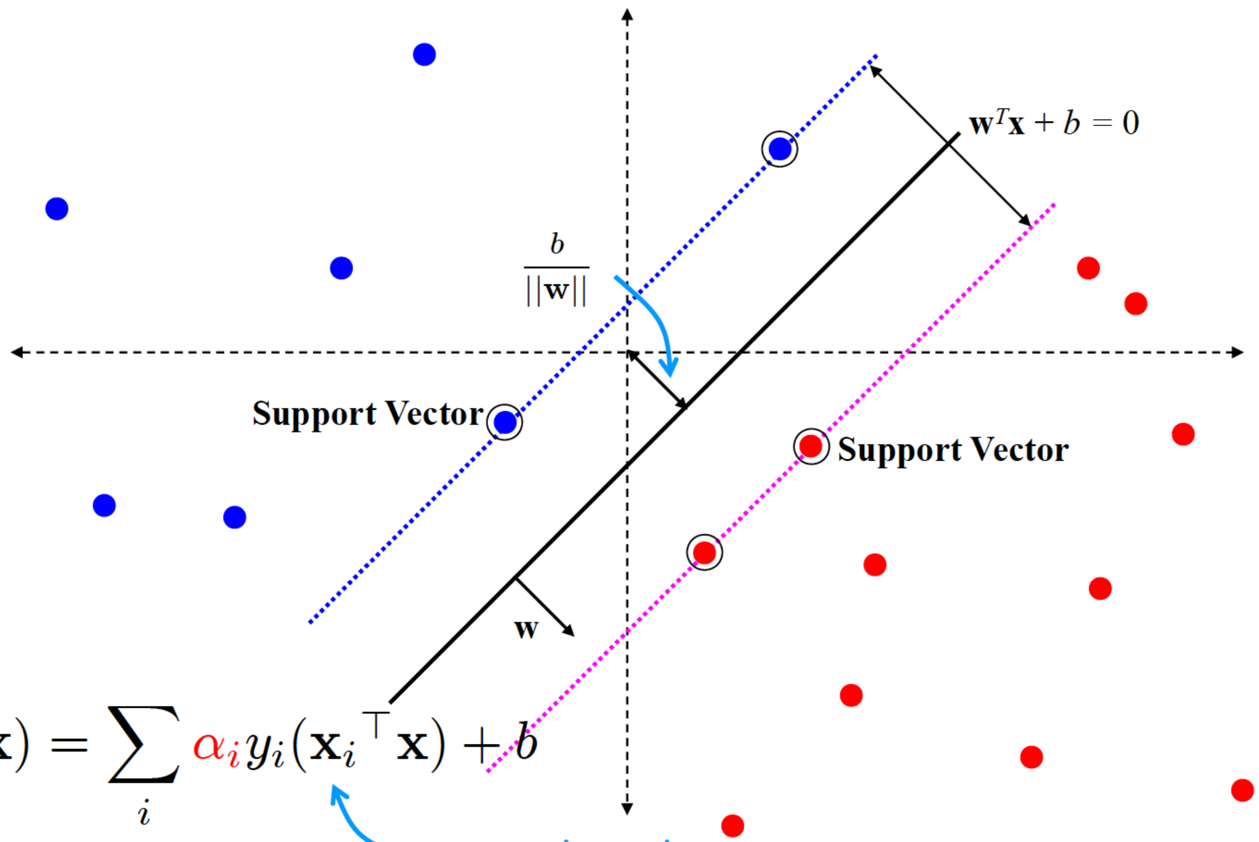
$$f(x)=\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j y_j \mathbf{x}_j\right)^{\top}\mathbf{x}+b=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j y_j\left(\mathbf{x}_j{}^{\top}\mathbf{x}\right)+b$$

• 损失函数：

$$||\mathbf{w}||^2 = \left\{\sum_j \alpha_j y_j \mathbf{x}_j\right\}^\top \left\{\sum_k \alpha_k y_k \mathbf{x}_k\right\} = \sum_{jk} \alpha_j \alpha_k y_j y_k (\mathbf{x}_j{}^\top \mathbf{x}_k)$$

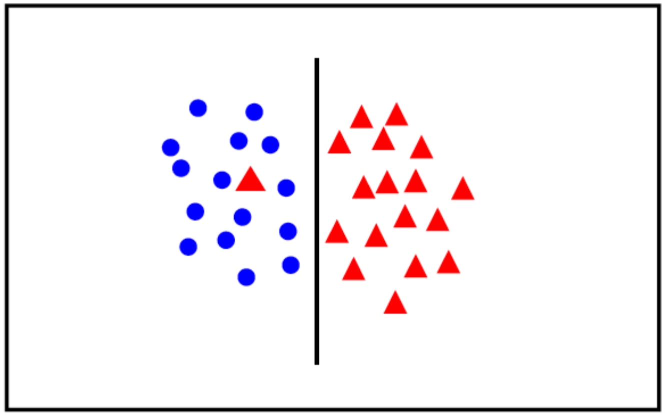
约束条件：

$$y_i \left( \sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j (\mathbf{x}_j{}^\top \mathbf{x}_i) + b \right) \geq 1$$




$$f(\mathbf{x}) = \sum_i {\color{red}\alpha_i} y_i (\mathbf{x}_i{}^\top \mathbf{x}) + b$$

support vectors

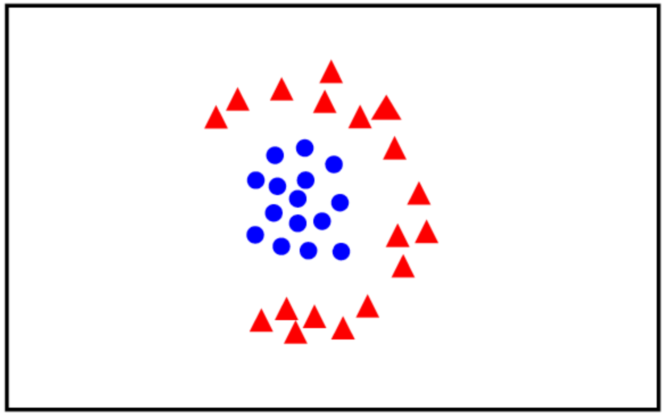


软件隔

$$\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^d,\xi_i\in\mathbb{R}^+} ||\mathbf{w}||^2 + C\sum_i^N \xi_i$$

subject to

$$y_i\left(\mathbf{w}^\top\mathbf{x}_i + b\right) \geq 1 - \xi_i \text{ for } i = 1 \ldots N$$

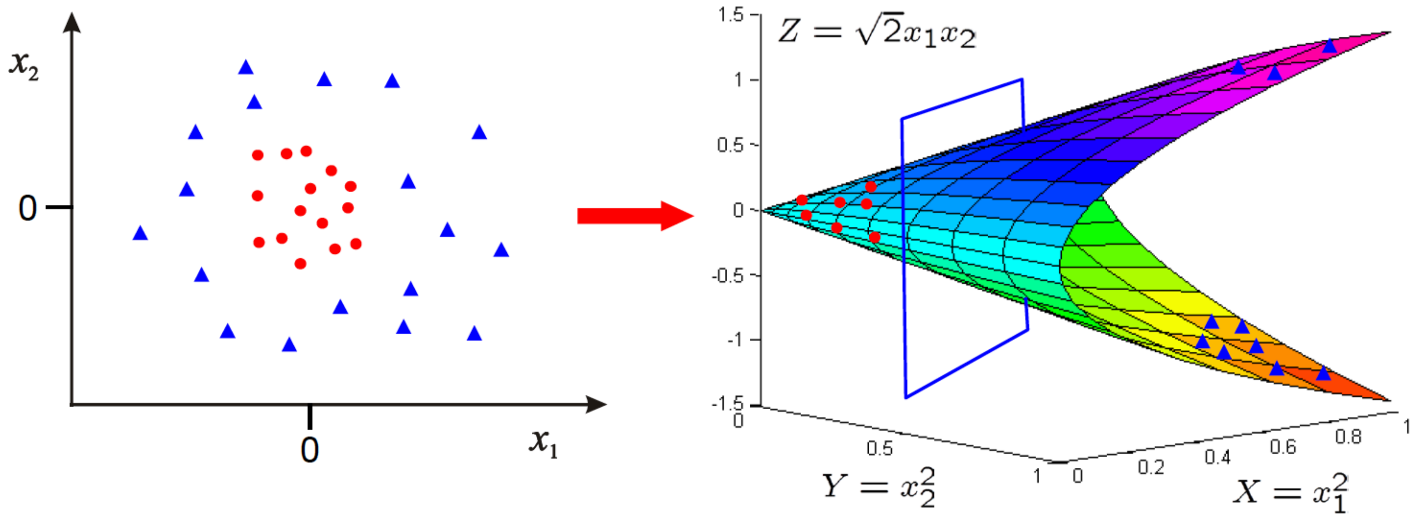


这类问题：

如何解决？？

$$\Phi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \sqrt{2}x_1x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

(0,0)
(1,-1)
(1,1)
(-1,1)
(-1,-1)



分类问题：

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i}^{N} \alpha_i y_i \mathbf{x}_i{}^\top \mathbf{x} + b$$

$$\to f(\mathbf{x}) = \sum_{i}^{N} \alpha_i y_i \Phi(\mathbf{x}_i)^\top \Phi(\mathbf{x}) + b$$

学习问题：

$$\max_{\alpha_i \geq 0} \sum_i \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{jk} \alpha_j \alpha_k y_j y_k \mathbf{x}_j{}^\top \mathbf{x}_k$$

$$\to \max_{\alpha_i \geq 0} \sum_i \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{jk} \alpha_j \alpha_k y_j y_k \Phi(\mathbf{x}_j)^\top \Phi(\mathbf{x}_k)$$

原来在二维空间中一个线性不可分的问题，映射到高维空间后，变成了线性可分的。因此，这也形成了我们最初想解决线性不可分问题的基本思路---向高维空间转化，使其变得线性可分。

而转化的关键的部分在于找到x到y的映射方法。

如何找到这个映射没有系统的方法，此外，在数据维度较大时，计算困难。

- 维度爆炸问题：

$$\Phi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \sqrt{2}x_1x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x})^\top \Phi(\mathbf{z}) &= \left(x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2\right) \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \\ \sqrt{2}z_1z_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2z_1^2 + x_2^2z_2^2 + 2x_1x_2z_1z_2 \end{aligned}$$

计算次数：11次乘法和2次加法

$$
\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{x}^\top \mathbf{z}) &= (\mathbf{x}^\top \mathbf{z})^2 \\
&= (x_1 z_1 + x_2 z_2)^2 \\
&= x_1^2 z_1^2 + x_2^2 z_2^2 + 2 x_1 x_2 z_1 z_2
\end{aligned}
$$

计算次数：3次乘法和1次加法

核函数：对所有x,z属于X，满足

$$k(x,z) = \langle \phi(x) \cdot \phi(z) \rangle$$

可以在特征空间中直接计算内积〈φ(xi ）· φ(x)〉，就像在原始输入点的函数中一样

分类函数为：

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \kappa(x_i, x) + b$$

优化问题的表达式：

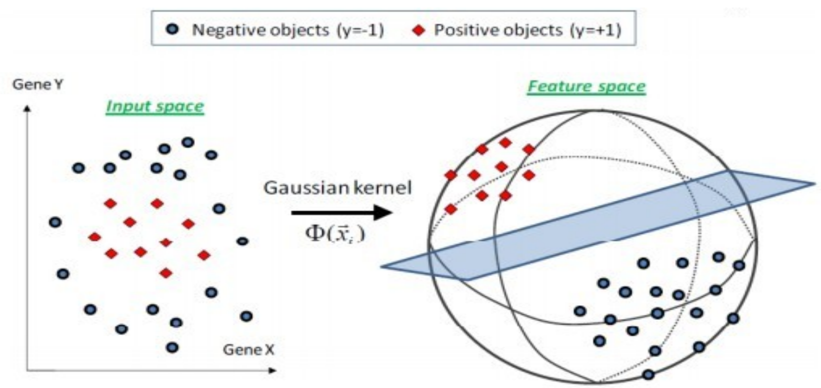
$$\max_{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \kappa(x_i, x_j)$$

$$s.t., \alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$$

# 常见核函数

- 多项式核 $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + c)^d$
- 线性核 $k(x, y) = \langle x \cdot y \rangle$
- 高斯径向基函数核 $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{2\sigma^2}\right)$
- Sigmoid核 $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tanh(\kappa(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + \Theta)$



对于核函数的选择，现在还缺乏指导原则。各种实验的观察结果表明，某些问题用某些核函数效果很好，用另一些很差，但一般来讲，径向基核函数是不会出现太大偏差的一种，一般作为首选。

- 无穷维-高斯核函数

$$
\begin{aligned}
k(x,y) &= \exp(-\|x-y\|^2) \\
&= \exp(-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2) \\
&= \exp(-x_1^2+2x_1y_1-y_1^2-x_2^2+2x_2y_2-y_2^2) \\
&= \exp(-\|x\|^2)\exp(-\|y\|^2)\exp(2x^Ty)
\end{aligned}
$$

$$
k(x,y) = \exp(-\|x\|^2)\exp(-\|y\|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x^Ty)^n}{n!}
$$

- 高斯核函数的理解