隐马尔可夫模型
HMM

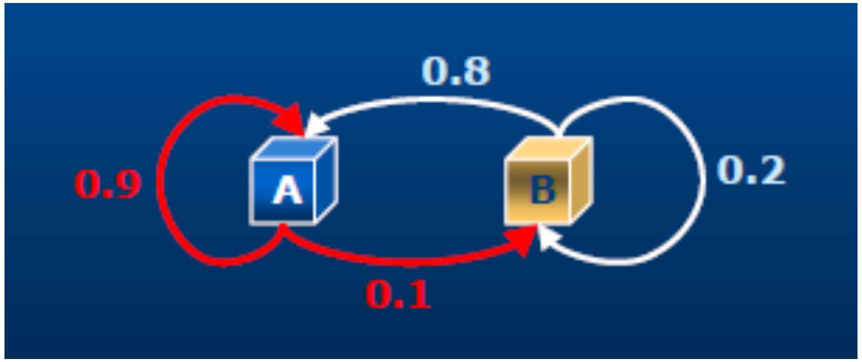
主要内容

- 隐马尔可夫模型的基本概念
- 隐马尔可夫模型中的三个基本问题

隐马尔可夫模型（**hidden Markov model**，记作：**HMM**）是马尔可夫模型的进一步发展。语音识别、生物信息识别、自然语言处理。

隐马尔可夫模型的示例—赌场欺诈问题:

某赌场在投骰子，根据点数决定胜负。在多次投掷骰子的时候采取了如下手段进行作弊：准备了两个骰子A和B，其中A为正常骰子，B为灌铅骰子，由于怕被发现，所有连续投掷的时候偶尔使用一下B，A和B之间转换的概率如下：



A 和 B 之间相互转换的概率写成矩阵如下：

	正常骰子 A	灌铅骰子 B
正常骰子 A	0.9	0.1
灌铅骰子 B	0.8	0.2

A 和 B 产生各观测值概率的区别为：

观测值	1	2	3	4	5	6
正常骰子 A	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
灌铅骰子 B	0	1/8	1/8	3/16	3/16	3/8

骰子作弊问题模型化：

作弊问题由 5 个部分构成：

（1）隐状态空间 S (状态空间)：

$S=\{$正常骰子A，灌铅骰子B$\}$，赌场具体使用哪个骰子，赌徒是不知道的。

（2）观测空间 O：$O=\{1,2,3,4,5,6\}$。正常骰子 A 和灌铅骰子 B 的所有六个面可能取值。

（3）初始状态概率空间 π：

$\pi=\{$初始选择正常骰子的概率,初始选择灌铅骰子的概率$\}$。

（4）隐状态转移概率矩阵 $P_{2\times2}$：

	正常骰子 A	灌铅骰子 B
正常骰子 A	0.9	0.1
灌铅骰子 B	0.8	0.2

（5）观测值生成概率矩阵 $Q_{2\times6}$：

观测值	1	2	3	4	5	6
正常骰子 A	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
灌铅骰子 B	0	1/8	1/8	3/16	3/16	3/8

隐马尔可夫模型的定义：

隐马尔科夫模型由以下五部分构成：

（1）隐状态空间 S (状态空间)：

$S=\{S_1,S_2,S_3,\cdots,S_N\}$，其中 N 为状态的数目。

（2）观测空间 O：$O=\{O_1,O_2,O_3,\cdots,O_M\}$，M 为状态对应的观测值的数目。

（3）初始状态概率空间 π：$\pi=\{\pi_1,\pi_2,\pi_3,\cdots,\pi_N\}$，其中

$$\pi_i=P\{X_1=S_i\}\quad (1\le i\le N)$$

（4）隐状态转移概率矩阵 $P_{N\times N}$ **：**

$$P_{N\times N}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}$$

（5）观测值生成概率矩阵 $Q_{N\times M}$ **：**

$$Q_{N\times M}=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1M} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{N1} & q_{N2} & \cdots & q_{NM} \end{bmatrix}$$

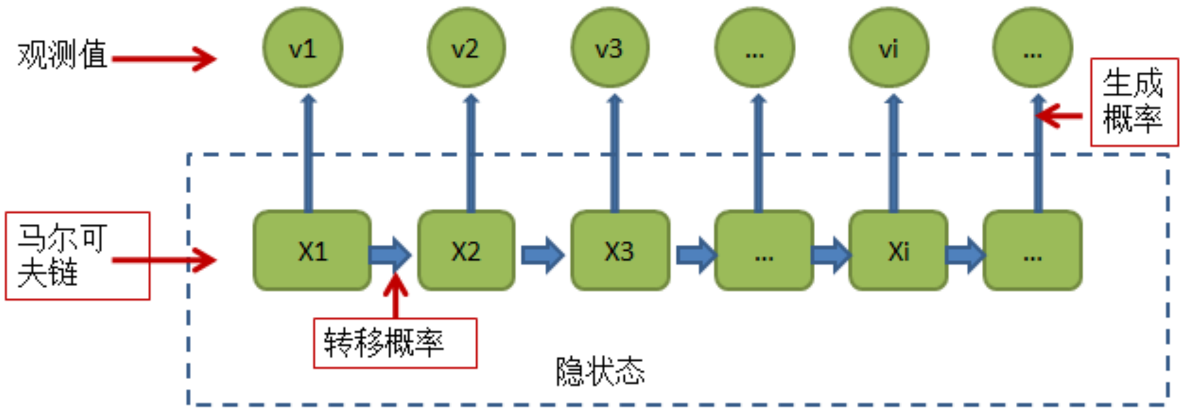
记 HMM 为： $\lambda=(S,O,\pi,P,Q)$ **或简写为** $\lambda=(\pi,P,Q)$ 。

马尔可夫模型的图解：

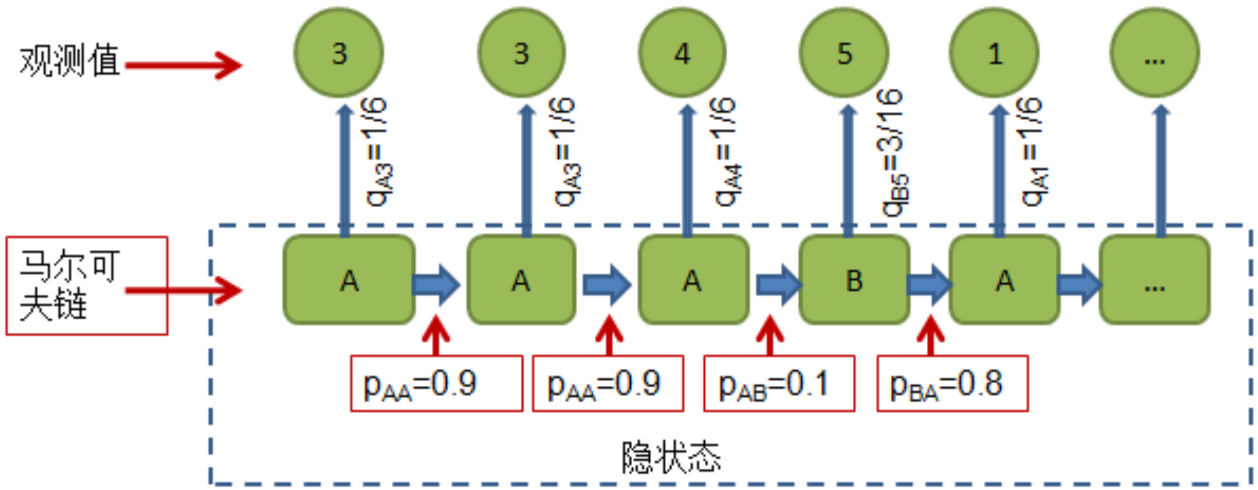
假定观测序列为$v=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_i,\cdots\}$（可见）。

假定隐马尔可夫链为，$X=\{X_1,X_2,X_3,\cdots,X_i,\cdots\}$（不可见）。

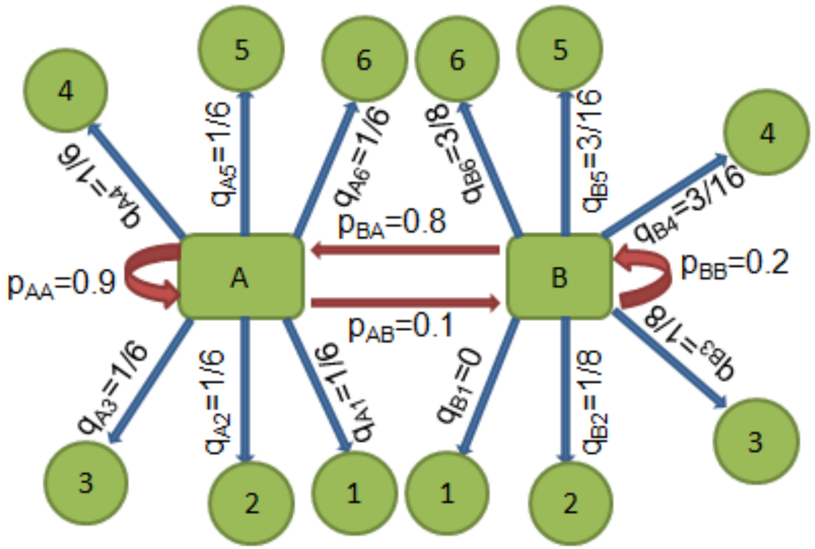
马尔可夫链示意图如下：



我们将图对应到赌场作弊问题，以便深入理解隐马尔可夫模型：



赌场作弊隐马尔可夫模型中，**状态空间—观测空间示意图：**



二、隐马尔可夫模型中的三个基本问题

（1）评估问题（evaluation）：从骰子的数列中推断是否使用了作弊骰子，如果知道使用了作弊骰子，那么在投掷骰子的过程中出现这个序列的概率有多大。求P(O|λ)

（2）解码问题（decoding）：如果确实使用了作弊骰子，这些序列中哪些点是由B投掷出来的。

（3）学习问题（Learning）：也称为参数训练问题，即仅仅给出大量的数据点，如何从中推断出细节问题（如骰子B投出各个点的概率？赌场是何时偷换的骰子的）。训练模型

问题一：给定模型参数 $\lambda=(N,M,A,B,\pi)$ 和观测序列 $O=(o_1o_2...o_T)$，如何快速求出在该模型下，观测事件序列发生的概率 $P(O|\lambda)$ ？

问题二：给定模型参数和观测序列，如何找出一个最佳状态序列？

问题三：如何得到模型中的五个参数？

如何解决三个基本问题

问题一：前向和后向算法（估计问题）

问题二：Viterbi算法 （解码问题）

问题三：Baum-Welch算法（学习问题）

1.评估问题（evaluation）

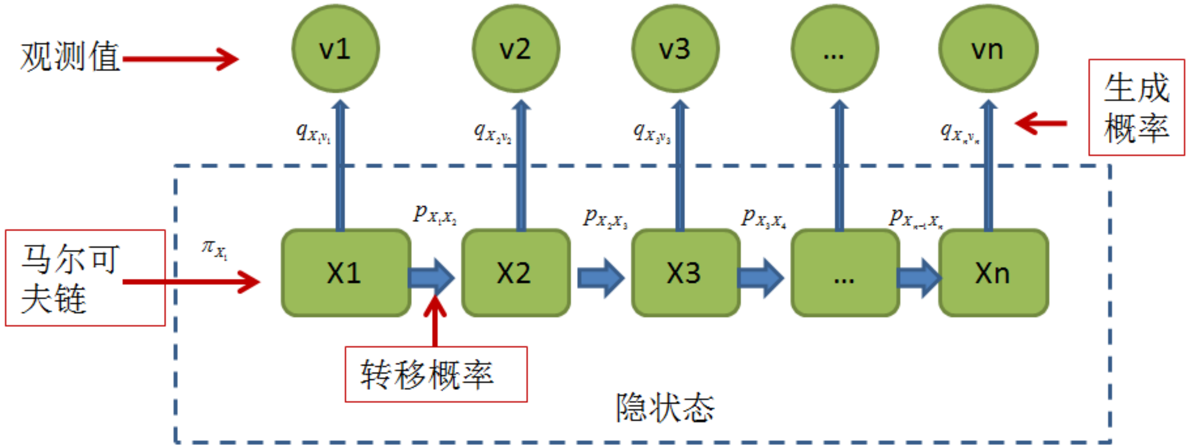
评估问题：是已知观测序列$v=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_i,\cdots\}$ 和模型 $\lambda=(\pi,P,Q)$ ，如何计算给定模型的情况下，产生观测序列V 的概率 $P(v|\lambda)$。

路径：隐马尔可夫模型 $P(v|\lambda)$ 中从初始状态到终止状态的一个彼此到达的状态序列，称为一个路径。也就是马尔可夫链。

假定序列v有 n 个观测点$v=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_i,\cdots,v_n\}$，对应状态路径$X=\{X_1,X_2,X_3,\cdots,X_i,\cdots,X_n\}$。

尽管观测序列$v=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_i,\cdots,v_n\}$已经给定，但生成序列$v$的状态序列$X=\{X_1,X_2,X_3,\cdots,X_i,\cdots,X_n\}$却并不唯一，因为任取一个状态$X_i$都能以一定的概率生成$v_i$。对于某一个观测值，都有 N 中状态可以产生该观测值，一共 n 个观测值，因此，产生观测序列的路径共有N^n种。对于任意一条路径$X=\{X_1,X_2,X_3,\cdots,X_i,\cdots,X_n\}$，生成观测序列$v=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_i,\cdots,v_n\}$的概率为:

$$\pi_{X_1} q_{X_1 v_1} p_{X_1 X_2} q_{X_2 v_2} \cdots p_{X_{n-1} X_n} q_{X_n v_n}$$


观测值
v1
v2
v3
...
vn
生成概率
$q_{x_1v_1}$
$q_{x_2v_2}$
$q_{x_3v_3}$
$q_{x_nv_n}$
马尔可夫链
π_{x_1}
X1
X2
X3
...
Xn
$p_{x_1x_2}$
$p_{x_2x_3}$
$p_{x_3x_4}$
$p_{x_{n-1}x_n}$
转移概率
隐状态

由于产生观测序列的路径共有N^n种，因此，观测序列产生的概率为N^n个路径各自产生观测序列的和，即

$$P(v|\lambda)=\sum_{X_1,\cdots X_n}\pi_{X_1}q_{X_1v_1}p_{X_1X_2}q_{X_2v_2}\cdots p_{X_{n-1}X_n}q_{X_nv_n}$$

如果序列较长，这样的计算是很难实现的。在实际计算中，可以采用前向算法或后向算法来降低计算量。

前向算法：

例 10.2 考虑盒子和球模型 $\lambda=(A,B,\pi)$，状态集合 $Q=\{1,2,3\}$，观测集合 $V=\{红，白\}$，

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.4 & 0.6\\ 0.7 & 0.3\end{bmatrix},\quad \pi=(0.2,0.4,0.4)^{\mathrm{T}}$$

设 $T=3$，$O=(红，白，红)$，试用前向算法计算 $P(O|\lambda)$.

（1）计算初值

$$\alpha_1(1)=\pi_1 b_1(o_1)=0.10$$
$$\alpha_1(2)=\pi_2 b_2(o_1)=0.16$$
$$\alpha_1(3)=\pi_3 b_3(o_1)=0.28$$

（2）递推计算

$$\alpha_2(1)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_1(i)a_{i1}\right]b_1(o_2)=0.154\times 0.5=0.077$$

$$\alpha_2(2)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_1(i)a_{i2}\right]b_2(o_2)=0.184\times 0.6=0.1104$$

$$\alpha_2(3)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_1(i)a_{i3}\right]b_3(o_2)=0.202\times 0.3=0.0606$$

$$\alpha_3(1)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_2(i)a_{i1}\right]b_1(o_3)=0.04187$$

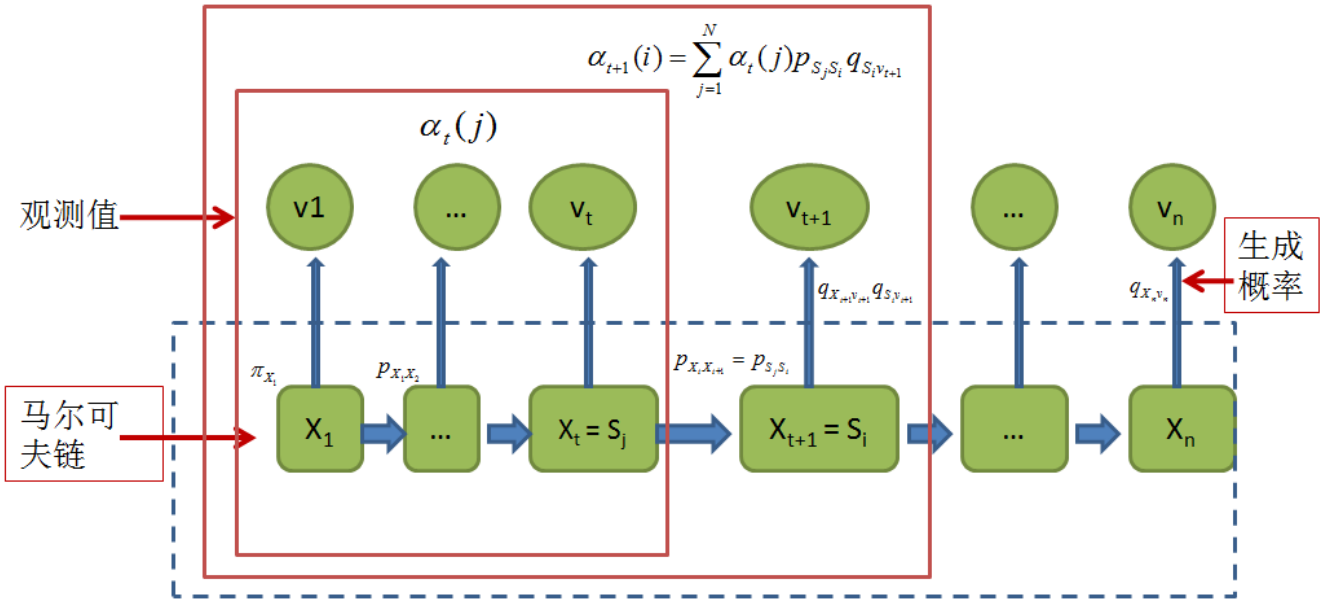
$$\alpha_3(2)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_2(i)a_{i2}\right]b_2(o_3)=0.03551$$

$$\alpha_3(3)=\left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_2(i)a_{i3}\right]b_3(o_3)=0.05284$$

（3）终止

$$P(O\mid\lambda)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_3(i)=0.13022$$

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.4 & 0.6\\ 0.7 & 0.3\end{bmatrix},\quad \pi=(0.2,0.4,0.4)^{\mathrm{T}}$$



$\alpha_{t+1}(i)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(j)p_{s_js_i}q_{s_iv_{t+1}}$
$\alpha_t(j)$
观测值
v1
...
v_t
v_{t+1}
...
v_n
生成概率
$q_{x_{t+1}v_{t+1}}q_{s_iv_{t+1}}$
$q_{x_nv_n}$
π_{x_1}
$p_{x_1x_2}$
$p_{x_tx_{t+1}}=p_{s_js_i}$
马尔可夫链
X_1
...
$X_t=S_j$
$X_{t+1}=S_i$
...
X_n

后向算法：

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.4 & 0.6\\ 0.7 & 0.3\end{bmatrix},\quad \pi=(0.2,0.4,0.4)^{\mathrm{T}}$$

(1）初始化第三次取球为红球时候，即最终时刻所有状态的概率为1

$$\beta_{red}(1)=1$$
$$\beta_{red}(2)=1$$
$$\beta_{red}(3)=1$$

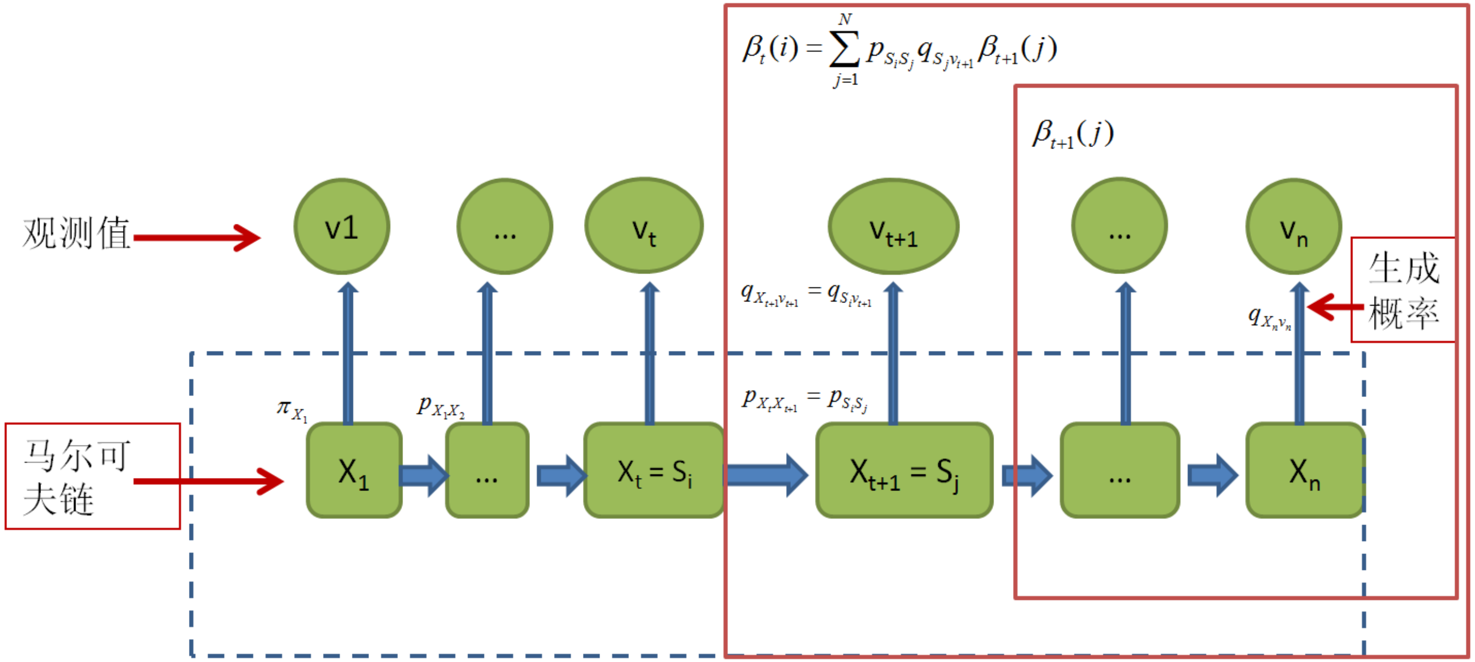
式中下标为观测情况，括号为隐状态，比如第一个式子意思就是第一个隐状态对应的观测到红球的概率

(2）逆推迭代倒数第二次观察情况为白球的情况

$$\begin{aligned}\beta_{white}(1) &= P(white,red|1,\lambda)\\ &= a_{11}*b_1(red)*\beta_{red}(1)+a_{12}*b_2(red)*\beta_{red}(2)+a_{13}*b_3(red)*\beta_{red}(3)\\ &= 0.5*0.5*1+0.2*0.4*1+0.3*0.7*1=0.54\\ \beta_{white}(2) &= P(white,red|2,\lambda)\\ &= a_{21}*b_1(red)*\beta_{red}(1)+a_{22}*b_2(red)*\beta_{red}(2)+a_{23}*b_3(red)*\beta_{red}(3)\\ &= 0.3*0.5*1+0.5*0.4*1+0.2*0.7*1=0.49\\ \beta_{white}(3) &= P(white,red|3,\lambda)\\ &= a_{31}*b_1(red)*\beta_{red}(1)+a_{32}*b_2(red)*\beta_{red}(2)+a_{33}*b_3(red)*\beta_{red}(3)\\ &= 0.2*0.5*1+0.3*0.4*1+0.5*0.7*1=0.57\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{red}(1) &= P(red,white,red|1,\lambda)\\ &= a_{11}*b_1(white)*\beta_{white}(1)+a_{12}*b_2(white)*\beta_{white}(2)+a_{13}*b_3(white)*\beta_{white}(3)\\ &= 0.5*0.5*0.54+0.2*0.6*0.49+0.3*0.3*0.57=0.2451\\ \beta_{red}(2) &= P(red,white,red|2,\lambda)\\ &= a_{21}*b_1(white)*\beta_{white}(1)+a_{22}*b_2(white)*\beta_{white}(2)+a_{23}*b_3(white)*\beta_{white}(3)\\ &= 0.3*0.5*0.54+0.5*0.6*0.49+0.2*0.3*0.57=0.2451\\ \beta_{red}(3) &= P(red,white,red|3,\lambda)\\ &= a_{31}*b_1(white)*\beta_{white}(1)+a_{32}*b_2(white)*\beta_{white}(2)+a_{33}*b_3(white)*\beta_{white}(3)\end{aligned}$$

$$P(O|\lambda)=0.2451*0.2*0.5+0.2622*0.4*0.4+0.2277*0.4*0.7=0.130218$$



$\beta_t(i)=\sum_{j=1}^{N} p_{S_iS_j} q_{S_jv_{t+1}} \beta_{t+1}(j)$
$\beta_{t+1}(j)$
观测值
v1
...
v_t
v_{t+1}
...
v_n
生成概率
$q_{X_{t+1}v_{t+1}}=q_{S_jv_{t+1}}$
$q_{X_nv_n}$
π_{X_1}
$p_{X_1X_2}$
$p_{X_tX_{t+1}}=p_{S_iS_j}$
马尔可夫链
X_1
...
$X_t = S_i$
$X_{t+1} = S_j$
...
X_n

2.解码问题（decoding）

对于骰子作弊问题中，**解码问题**是：如果确实使用了作弊骰子，这些序列中哪些点时由B投掷出来的。

对于一般的隐马尔可夫模型中，解码问题是给定模型 $\lambda=(\pi,P,Q)$ 和一个观测序列 $v=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_i,\cdots,v_n\}$，求出模型 $\lambda=(\pi,P,Q)$ 生成 $v=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_i,\cdots,v_n\}$ 的最有可能状态 $X=\{X_1,X_2,X_3,\cdots,X_i,\cdots,X_n\}$。即推测出隐藏层的状态，也就是解码。

Viterbi算法

思想：与前面介绍的前向、后向算法类似，定义一个路径最优变量,然后采取递推的方式迭代,进而降低计算量。

路径最优变量：

$$\delta_t(i) = \max_{X_1 X_2 \cdots X_{t-1}} P(X_1, X_2, \cdots X_{t-1}, X_t = S_i, v_1, v_2, \cdots v_t \mid \lambda)$$

表示在时刻 t 沿着一条路径 $X_1, X_2, \cdots X_{t-1}, X_t$ ，且在 t 时刻的状态为 $X_t = S_i$ 产生出观测序列 $v_1, v_2, \cdots v_t$ 的最大概率。

另外，为了寻找路径，我们定义一个 $\phi_t(i)$ 专门记录 t 时刻状态 S_i 最有可能由哪个状态转移而来。

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\0.3 & 0.5 & 0.2\\0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\0.4 & 0.6\\0.7 & 0.3\end{bmatrix},\quad \pi=(0.2,0.4,0.4)^{\mathrm{T}}$$

已知观测序列 $O=$(红，白，红)，试求最优状态序列，即最优路径 $I^*=(i_1^*,i_2^*,i_3^*)$.

初始概率：π=（0.2，0.4，0.4）

解答过程：

①初始化，拿到红球

$$\delta_1=\pi_1*P(red|1)=0.2*0.5=0.1$$
$$\psi_1=0$$
$$\delta_2=\pi_2*P(red|2)=0.4*0.4=0.16$$
$$\psi_2=0$$
$$\delta_3=\pi_3*P(red|3)=0.4*0.7=0.28$$
$$\psi_3=0$$

开课吧
kaikeba.com
慧科集团旗下企业

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.4 & 0.6\\ 0.7 & 0.3\end{bmatrix},\quad \pi=(0.2,0.4,0.4)^{\mathrm{T}}$$

已知观测序列 $O=$(红, 白, 红)，试求最优状态序列，即最优路径 $I^*=(i_1^*,i_2^*,i_3^*)$.

$$\delta_2(1)=\max_{1\leqslant j\leqslant 3}[\delta_1(j)a_{j1}]b_1(o_2)$$
$$=\max_j\{0.10\times 0.5, 0.16\times 0.3, 0.28\times 0.2\}\times 0.5$$
$$=0.028$$
$$\psi_2(1)=3$$
$$\delta_2(2)=0.0504,\quad \psi_2(2)=3$$
$$\delta_2(3)=0.042,\quad \psi_2(3)=3$$

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.4 & 0.6\\ 0.7 & 0.3\end{bmatrix},\quad \pi=(0.2,0.4,0.4)^{\mathrm{T}}$$

已知观测序列 $O=$(红, 白, 红)，试求最优状态序列，即最优路径 $I^*=(i_1^*,i_2^*,i_3^*)$.

同样，在 $t=3$ 时，

$$\delta_3(i)=\max_{1\leqslant j\leqslant 3}[\delta_2(j)a_{ji}]b_i(o_3)$$

$$\psi_3(i)=\arg\max_{1\leqslant j\leqslant 3}[\delta_2(j)a_{ji}]$$

$$\delta_3(1)=0.00756,\quad \psi_3(1)=2$$

$$\delta_3(2)=0.01008,\quad \psi_3(2)=2$$

$$\delta_3(3)=0.0147,\quad \psi_3(3)=3$$

3.学习问题（Learning）

也称为参数训练问题，即仅仅给出大量的数据点，如何从中推断出马尔可夫模型的参数$\lambda=(\pi,P,Q)$。

数学描述：给定观测序列$v=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_i,\cdots,v_n\}$，如何估计参数$\pi,P,Q$，使得$P(v\,|\,\lambda)=P(\lambda\,|\,v)$最大。

与其他参数估计问题类似，隐马尔可夫模型的参数估计也使用基于极大似然估计的 **EM** 算法，也称为 **Baum-Welch** 算法。

它的参数学习可以由EM算法实现。

1.确定完全数据的对数似然函数

所有观测数据写成 $O=(o_1,o_2,...,o_T)$，所有隐数据写成 $I=(i_1,i_2,...,i_T)$，完全数据是 $(O,I)=(o_1,o_2,...,o_T,i_1,i_2,...,i_T)$。完全数据的对数似然函数是$\log P(O,I|\lambda)$。

2.EM算法的E步：求Q函数$Q(\lambda,\hat{\lambda})$

$$Q(\lambda,\hat{\lambda})=\sum_I \log P(O,I|\lambda)P(O,I|\hat{\lambda})$$

$$P(O,I|\lambda)=\pi_{i_1}b_{i_1}(o_1)a_{i_1i_2}b_{i_2}(o_2)\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_T}(o_T)$$

于是函数$Q(\lambda,\hat{\lambda})$可以写成：

$$Q(\lambda,\hat{\lambda})=\sum_I \log \pi_{i_1}P(O,I|\hat{\lambda})$$

$$+\sum_I(\sum_{t=1}^{T-1}\log a_{i_ti_tt+1})P(O,I|\hat{\lambda})+\sum_I(\sum_{t=1}^{T}\log b_{i_t}(o_t))P(O,I|\hat{\lambda})$$

$$\sum_{I} \log \pi_{i_1} P(O, I|\hat{\lambda}) = \sum_{i=1}^{N} \log \pi_i P(O, i_1 = i|\hat{\lambda})$$

注意到π_i满足约束条件$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$，利用拉格朗日乘子法，写出拉格朗日函数：

$$\sum_{i=1}^{N} \log \pi_i P(O, i_1 = i|\hat{\lambda}) + \gamma(\sum_{i=1}^{N} \pi_i - 1)$$

对其求偏导数并令结果为0

$$\frac{\partial}{\partial_{\pi_i}}[\sum_{i=1}^{N} \log \pi_i P(O, i_1 = i|\hat{\lambda}) + \gamma(\sum_{i=1}^{N} \pi_i - 1)] = 0$$

$$\pi_i = \frac{P(O, i_1 = i|\hat{\lambda})}{P(O|\hat{\lambda})}$$

$$a_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} P(O, i_t = i, i_{t+1} = j|\hat{\lambda})}{\sum_{t=1}^{T-1} P(O, i_t = i|\hat{\lambda})}$$

$$b_j(k) = \frac{\sum_{t=1}^{T} P(O, i_t = j|\hat{\lambda}) I(o_t = v_k)}{\sum_{t=1}^{T} P(O, i_t = j|\hat{\lambda})}$$

总结三个问题：

评估问题：是已知观测序列 $v=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_i,\cdots\}$ 和模型 $\lambda=(\pi,P,Q)$，如何计算给定模型 λ 的情况下，产生观测序列 v 的概率 $P(v|\lambda)$。

解码问题：已知 $\lambda=(\pi,P,Q)$，在所能生成的观测序列 v 的路径 $X=\{X_1,X_2,X_3,\cdots,X_i,\cdots,X_n\}$ 中，求使得

$$P(v,X|\lambda)=\pi_{X_1}q_{X_1v_1}p_{X_1X_2}q_{X_2v_2}\cdots p_{X_{n-1}X_n}q_{X_nv_n}$$

取得最大值的路径 **X**。