常用数学公式速查手册

目 录

一、高等数学

(一) 函数、极限、连续

考试内容	公式、定理、概念
函数和隐函数	函数：设有两个变量 x 和 y，变量 x 的定义域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则，变量 y 有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作： $y=f\left(x\right)$
基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立：	基本初等函数包括五类函数: 1 幂函数: $y=x^{\mu}\left(\mu\in R\right)$; 2 指数函数 $y=a^{x}$ ($a>0$ 且 $a\neq1$); 3 对数函数: $y=\log_{a}x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$); 4 三角函数:如 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$ 等; 5 反三角函数:如 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$ 等. 初等函数：由常数 C 和基本初等函数经过有限次四则运算与有限此复合步骤所构成，并可用一个数学式子表示的函数，称为初等函数.
数列极限与函数极限的定义及其性质，函数的左极限与右极限	**1** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f_{-}(x_0)=f_{+}(x_0)=A$ **2** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0)=A+a(x)$,其中$\lim\limits_{x\to x_0}a(x)=0$ **3(保号定理)** 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,又$A>0$(或$A<0$),则$\exists$一个$\delta>0$, 当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$,且$x\neq x_0$时，$f(x)>0$(或$f(x)<0$)
无穷小和无穷大的	设$\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=0$

概念及其关系，无穷小的性质及无穷小的比较	(1)若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小， 记为$\alpha(x)=o(\beta(x))$. (2)若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,则$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小， (3)若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c(c\neq 0)$,则$\alpha(x)$与$\beta(x)$ **是同阶无穷小，** (4)若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价的无穷小， 记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$ (5)若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=c(c\neq 0),k>0$,则$\alpha(x)$是$\beta(x)$的k阶无穷小 常用的等阶无穷小：当$x\to 0$时 $\left.\begin{matrix}\sin x\\ \arcsin x\\ \tan x\\ \arctan x\\ \ln(1+x)\\ e^x-1\end{matrix}\right\}\sim x,$ $\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ $\quad (1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}x$ 无穷小的性质 （1） 有限个无穷小的代数和为无穷小 （2） 有限个无穷小的乘积为无穷小 （3） 无穷小乘以有界变量为无穷小 Th 在同一变化趋势下，无穷大的倒数为无穷小；非零的无穷小的倒数为无穷大
极限的四则运算	$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$.则 (1) $\lim(f(x)\pm g(x))=A\pm B$； (2) $\lim f(x)g(x)=A\cdot B$；

	$(3)\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$
极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：	**1** (夹逼定理）设在x_0的邻域内，恒有$\varphi(x)\le f(x)\le\phi(x)$, 且$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=A$, 则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ **2 单调有界定理：单调有界的数列必有极限** **3 两个重要极限：** $(1)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $(2)\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ **重要公式：** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},n=m\\0,n<m\\\infty,n>m\end{cases}$ 4 几个常用极限特例 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arc}\cot x=0,$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arc}\cot x=\pi$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0,$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=\infty,$ $\lim\limits_{x\to+0^+}x^x=1,$
函数连续的概念：函数间断点的类型：初等函数的连续性：闭区间上连	连续函数在闭区间上的性质： (1) (连续函数的有界性)设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$f(x)$ 在$[a,b]$上有界,即$\exists$常数$M>0$，对任意的$x\in[a,b]$,恒有 $\|f(x)\|\le M$.

续函数的性质	(2) (最值定理)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 至少取得最大值与最小值各一次,即 $\exists\xi,\eta$ 使得: $f(\xi)=\max\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\},\quad \xi\in[a,b]$; $f(\eta)=\min\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\},\quad \eta\in[a,b]$. (3) (介值定理)若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, μ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ (或最大值 M 与最小值 m)之间的任一实数,则在 $[a,b]$ 上至少 $\exists$ 一个 ξ ,使得 $f(\xi)=\mu.\quad (a\le\xi\le b)$ (4) (零点定理或根的存在性定理)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在 (a,b) 内至少 $\exists$ 一个 ξ ,使得 $f(\xi)=0.\quad (a<\xi<b)$

(二) 一元函数微分学

考试内容	对应公式、定理、概念
导数和微分的概念左右导数导数的几何意义和物理意义	**1** 导数定义： $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ **(1)** **或** $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **(2)** 2 函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导数分别定义为： 左导数： $f_-'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},(x=x_0+\Delta x)$

	右导数：$f'_{+}(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
函数的可导性与连续性之间的关系，平面曲线的切线和法线	Th1：函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处可导 Th2：若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，反之则不成立.即函数连续不一定可导. Th3：$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_{-}(x_0)=f'_{+}(x_0)$ 设函数$f(x)$在$x=x_0$处可导，则$f(x)$在$M(x_0,y_0)$处的 切线方程：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ 法线方程：$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),\ f'(x_0)\neq 0.$
导数和微分的四则运算，初等函数的导数，	四则运算法则:设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 在点 x 可导则 (1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$　　$d(u\pm v)=du\pm dv$ (2) $(uv)'=uv'+vu'$　　$d(uv)=udv+vdu$ (3) $(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{vu'-uv'}{v^2}(v\neq 0)$　　$d(\dfrac{u}{v})=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$ 基本导数与微分表 (1) $y=c$（常数）　$y'=0$　　$dy=0$ (2) $y=x^{\alpha}$(α 为实数)　$y'=\alpha x^{\alpha-1}$　　$dy=\alpha x^{\alpha-1}dx$ (3) $y=a^x$　$y'=a^x\ln a$　　$dy=a^x\ln adx$ 特例　$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$　　$d(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^xdx$ (4) $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　$dy=\dfrac{1}{x\ln a}dx$ 特例　$y=\ln x$　$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$　　$d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$ (5) $y=\sin x$　$y'=\cos x$　　$d(\sin x)=\cos xdx$ (6) $y=\cos x$　$y'=-\sin x$　　$d(\cos x)=-\sin xdx$ (7) $y=\tan x$　$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$　　$d(\tan x)=\sec^2 xdx$ (8) $y=\cot x$　$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$　　$d(\cot x)=-\csc^2 xdx$ (9) $y=\sec x$　$y'=\sec x\tan x$　　$d(\sec x)=\sec x\tan xdx$

	(10) $y=\csc x$ $y'=-\csc x\cot x$ $d(\csc x)=-\csc x\cot xdx$ (11) $y=\arcsin x$ $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (12) $y=\arccos x$ $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (13) $y=\arctan x$ $y'=\frac{1}{1+x^2}$ $d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$ (14) $y=\operatorname{arccot} x$ $y'=-\frac{1}{1+x^2}$ $d(\operatorname{arccot} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$ (15) $y=shx$ $y'=chx$ $d(shx)=chxdx$ (16) $y=chx$ $y'=shx$ $d(chx)=shxdx$
复合函数，反函数，隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法，	1 反函数的运算法则：设 $y=f(x)$ 在点 x 的某邻域内单调连续，在点 x 处可导且 $f'(x)\neq 0$，则其反函数在点 x 所对应的 y 处可导，并且有 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ 2 复合函数的运算法则:若 $\mu=\varphi(x)$ 在点 x 可导,而 $y=f(\mu)$ 在对应点 μ ($\mu=\varphi(x)$)可导,则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 可导,且 $y'=f'(\mu)\cdot\varphi'(x)$ 3 隐函数导数 $\frac{dy}{dx}$ 的求法一般有三种方法： (1)方程两边对 x 求导，要记住 y 是 x 的函数，则 y 的函数是 x 的复合函数.例如 $\frac{1}{y}$， y^2， $\ln y$， e^y 等均是 x 的复合函数.对 x 求导应按复合函数连锁法则做. (2)公式法.由 $F(x,y)=0$ 知 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$,其中， $F'_x(x,y)$， $F'_y(x,y)$ 分别表示 $F(x,y)$ 对 x 和 y 的偏导数 (3)利用微分形式不变性
高 阶 导	常用高阶导数公式

数，一阶微分形式的不变性，	（1） $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a \quad (a>0)$ $\qquad (\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$ （2） $(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$ （3） $(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$ （4） $(x^m)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$ （5） $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{x^n}$ （6）莱布尼兹公式：若 $u(x),v(x)$ 均 n 阶可导，则 $(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}c_n^i u^{(i)}v^{(n-i)}$，其中 $u^{(0)}=u$， $v^{(0)}=v$
微分中值定理，必达法则，泰勒公式	Th1(费马定理)若函数 $f(x)$ 满足条件： (1)函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，并且在此邻域内恒有 $f(x)\le f(x_0)$ 或 $f(x)\ge f(x_0)$， (2) $f(x)$ 在 x_0 处可导,则有 $f'(x_0)=0$ Th2 (罗尔定理) 设函数 $f(x)$ 满足条件： (1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续； (2)在 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内 $\exists$ 一个 ξ，使 $f'(\xi)=0$ Th3 (拉格朗日中值定理) 设函数 $f(x)$ 满足条件： (1)在 $[a,b]$ 上连续；(2)在 (a,b) 内可导；则在 (a,b) 内 $\exists$ 一个 ξ，使 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ Th4 (柯西中值定理) 设函数 $f(x)$， $g(x)$ 满足条件： (1)在 $[a,b]$ 上连续；(2)在 (a,b) 内可导且 $f'(x)$， $g'(x)$ 均存在，且 $g'(x)\ne 0$ 则在 (a,b) 内 $\exists$ 一个 ξ，使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 洛必达法则： 法则Ⅰ ($\frac{0}{0}$ 型)设函数 $f(x),g(x)$ 满足条件： $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$； $f(x),g(x)$ 在 x_0 的邻域内可导

	(在 x_0 处可除外)且 $g'(x)\neq 0$；$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞).则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. 法则 I′ ($\dfrac{0}{0}$ 型)设函数 $f(x),g(x)$ 满足条件： $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$；$\exists$ 一个 $X>0$，当 $\lvert x\rvert>X$ 时，$f(x),g(x)$ 可导，且 $g'(x)\neq 0$；$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞).则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. 法则 II ($\dfrac{\infty}{\infty}$ 型) 设函数 $f(x),g(x)$ 满足条件： $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$；　$f(x),g(x)$ 在 x_0 的邻域内可 导(在 x_0 处可除外)且 $g'(x)\neq 0$；$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞).则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. 同理法则 II′ ($\dfrac{\infty}{\infty}$ 型)仿法则 I′ 可写出 泰勒公式：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数，则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x，在 x_0 与 x 之间至少 $\exists$ 一个 ξ，使得 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$

	$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$ 其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶泰勒余项.令 $x_0=0$，则 n 阶泰勒公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$ ……(1) 其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$ 在 0 与 x 之间.(1)式称为麦克劳林公式 常用五种函数在 $x_0=0$ 处的泰勒公式 $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$ 或 $=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$ $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\xi+\frac{n+1}{2}\pi)$ 或 $=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+o(x^n)$ $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\xi+\frac{n+1}{2}\pi)$ 或 $=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+o(x^n)$ $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$ 或 $=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

	$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$ $+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1}$ 或 $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$ $+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$
函数单调性的判别，函数的极值，函数的图形的凹凸性，拐点及渐近线，用函数图形描绘函数最大值和最小值，	1 函数单调性的判断： Th1 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 区间内可导，如果对 $\forall x\in(a,b)$，都有 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$），则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的（或单调减少） Th2 （取极值的必要条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取极值，则 $f'(x_0)=0$. Th3 （取极值的第一充分条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内可微，且 $f'(x_0)=0$（或 $f(x)$ 在 x_0 处连续，但 $f'(x_0)$ 不存在.） (1)若当 x 经过 x_0 时，$f'(x)$ 由“+”变“-”，则 $f(x_0)$ 为极大值； (2)若当 x 经过 x_0 时，$f'(x)$ 由“-”变“+”，则 $f(x_0)$ 为极小值； (3)若 $f'(x)$ 经过 $x=x_0$ 的两侧不变号，则 $f(x_0)$ 不是极值. Th4 (取极值的第二充分条件)设 $f(x)$ 在点 x_0 处有 $f''(x)\neq 0$，且 $f'(x_0)=0$，则 当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值； 当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值. 注：如果 $f''(x_0)=0$，此方法失效. 2 渐近线的求法：

	(1)水平渐近线　若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$，则 $y=b$ 称为函数 $y=f(x)$ 的水平渐近线. (2)铅直渐近线　若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$，或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 称为 $y=f(x)$ 的铅直渐近线. (3)斜渐近线　若 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$，则 $y=ax+b$ 称为 $y=f(x)$ 的斜渐近线 3 函数凹凸性的判断： Th1 (凹凸性的判别定理）若在 I 上 $f''(x)<0$（或 $f''(x)>0$），则 $f(x)$ 在 I 上是凸的（或凹的）. Th2 (拐点的判别定理 1)若在 x_0 处 $f''(x)=0$，（或 $f''(x)$ 不存在），当 x 变动经过 x_0 时，$f''(x)$ 变号，则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点. Th3 (拐点的判别定理 2)设 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有三阶导数，且 $f''(x)=0$，$f'''(x)\neq 0$，则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点
弧微分，曲率的概念，曲率半径	1. 弧微分：$dS=\sqrt{1+y'^2}\,dx.$ 2. 曲率：曲线 $y=f(x)$ 在点 (x,y) 处的曲率 $k=\frac{\lvert y''\rvert}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$ 对于参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，$k=\frac{\lvert\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)\rvert}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}.$ 3.曲率半径：曲线在点 M 处的曲率 $k(k\neq 0)$ 与曲线在点 M 处的曲率半径 ρ 有如下关系：$\rho=\frac{1}{k}.$

(三) 一元函数积分学

考试内容	对应公式、定理、概念
原函数和不定积分的概念，不定积分的基本性质	基本性质 1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ （$k \neq 0$ 为常数） 2 $\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_k(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int f_k(x)dx$ 3 求导：$[\int f(x)dx]' = f(x)$ 或微分：$d\int f(x)dx = f(x)dx$ 4 $\int F'(x)dx = F(x) + C$ 或 $\int dF(x) = F(x) + C$ （C 是任意常数）
基本积分公式	$\int x^k dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C$ （$k \neq -1$） $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$ $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0, a \neq 1)$ $\int e^x dx = e^x + C$ $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$ $\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \csc x dx = \ln\lvert \csc x - \cot x\rvert + C$ $\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \sec x dx = \ln\lvert \sec x + \tan x\rvert + C$ $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$ $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

	$\int \tan x dx=-\ln\lvert\cos x\rvert+C$ $\int \cot x dx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$ $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ $\int \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$ $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$ $\int \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert+C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$ **重要公式** (1)设$f(x)$在$[-l,l]$上连续，则 $\int_{-l}^{l} f(x)dx=\int_0^l[f(x)+f(-x)]dx$ $=\begin{cases}0,当f(x)为奇函数\\2\int_0^l f(x)dx,当f(x)为偶函数\end{cases}$ （2）设$f(x)$是以T为周期的连续函数，a为任意实数，则 $\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx.$ (3)$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{4}\pi a^2$ (4)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},当n为偶数\\\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1,当n为奇数\end{cases}$ (5)$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx=\int_0^{2\pi}\sin nx\cos mxdx=\begin{cases}\pi,n=m\\0,n\neq m\end{cases}$ $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx=\int_0^{2\pi}\sin nx\cos mxdx=0$ $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx=\int_0^{2\pi}\cos nx\cos mxdx=0=\begin{cases}\pi,n=m\\0,n\neq m\end{cases}$

<table>
<tr><td>定积分的概念和基本性质，定积分中值定理</td><td>

1. 定积分的基本性质

(1)定积分只与被积函数和积分限有关，而与积分变量无关，即

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots$

(2)$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(3)$\int_a^b dx = b-a$

(4)$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(5)$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$($k$为常数）

(6)$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(7)比较定理：设$f(x) \le g(x), x \in [a,b]$,则$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$

推论：1. 当$f(x) \ge 0, x \in [a,b]$时,$\int_a^b f(x)dx \ge 0;$

2.$|\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx$

(8)估值定理：设$m \le f(x) \le M, x \in [a,b]$,其中$m, M$为常数，则

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

(9)积分中值定理：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少$\exists$一个ξ,

使$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$

$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$————平均值公式

</td></tr>
<tr><td>积分上限的函数及其导数，牛顿——</td><td>

Th1

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，$x \in [a, b]$，则变上限积分

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$对x可导

</td></tr>
</table>

莱布尼兹公式	且有$F'(x)=\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t)dt)=f(x)$ 推论1　设$F(x)=\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt$,则$F'(x)=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x).$ 推论2　$(\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt)_x'=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\phi(x)]\cdot\phi'(x)$ 推论3　$(\int_a^{\varphi(x)} f(t)g(x)dt)_x'=(g(x)\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt)_x'$ $=g'(x)\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt+g(x)f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$ **Th2** 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$x\in[a,b]$，则 $\int_a^x f(x)dt$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数 **Th3** 牛顿-莱布尼茨公式: 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)$ 是$f(x)$**的原函数，则**$\int_a^b f(x)dx=F(x)\mid_a^b=F(b)-F(a)$
不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法	**1 不定积分：** **分部积分法：**$\int udv=uv-\int vdu$ 选择 u，dv 的原则：积分容易者选作 dv，求导简单者选为 u **换元积分法：**　设$\int f(u)du=F(u)+C,$ 则$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$ $\underline{\underline{设u=\varphi(x)}}\int f(u)du=F(u)+C=F[\varphi(x)]+C$ **2.　定积分** **换元法:** 设函数$f(x)$ 在［a，b］上连续，若$x=\varphi(t)$ 满足： (1) $\varphi(t)$ 在［α，β］上连续，且$\varphi'(t)\neq 0.$ (2)$\varphi(\alpha)=a\cdot\varphi(\beta)=b$.并且当$t$在［$\alpha$，$\beta$］上变化时，

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">

$\varphi(t)$ 的值在［a，b］上变化，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

分部积分公式

设$u(x)$，$v(x)$ 在［a，b］上具有连续导函数$u'(x),v'(x)$,则

$$\int_b^a u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)|_b^a-\int_b^a v(x)u'(x)dx$$

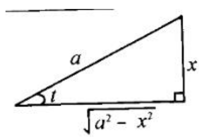
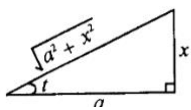
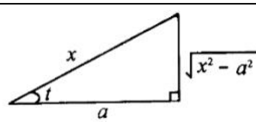
3． 定积分不等式证明中常用的不等式

$(1)a^2+b^2\geq 2ab$ $(2)a>0,a+\frac{1}{a}\geq 2$

(3)柯西不等式：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leq\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right),$$

其中$f(x)$，$g(x)$ 在［a，b］上连续

</td></tr>
<tr><td rowspan="6">**有理函数，三角函数的有理式和简单无理函数的积分，广义积分和定积分的应用**</td><td colspan="3">**1． 三角函数代换**</td></tr>
<tr><td>函数 $f(x)$ 含根式</td><td>所作代换</td><td>三角形示意图</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{a^2-x^2}$</td><td>$x=a\sin t$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{a^2+x^2}$</td><td>$x=a\tan t$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{x^2-a^2}$</td><td>$x=a\sec t$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">

有理函数积分

$$(1)\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$$

</td></tr>
</table>

	(2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx=-\frac{A}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C(n\neq 1)$

(3) $\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{dx}{[(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}]^n}\xrightleftharpoons[\frac{4q-p^2}{4}=a^2]{令x+\frac{p}{2}=u}\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n}$

(4) $\int\frac{x+a}{(x^2+px+q)^n}dx=-\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+(a-\frac{p}{2})\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$

（$p^2-4q<0$）

4. 广义积分

（1） 无穷限的广义积分（无穷积分）

设$f(x)$连续，则 1. $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

2. $\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_c^{+\infty}f(x)dx$

（2） 无界函数的广义积分（瑕积分）

1. $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$,(当$x\to b^-$时，$f(x)\to\infty$)

2. $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$,(当$x\to a^+$时，$f(x)\to\infty$)

3. $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\lim\limits_{\eta\to0^+}\int_{c+\eta}^{b}f(x)dx$

(当$x\to c$时，$f(x)\to\infty$)

(四) 向量代数和空间解析几何

考试内容	对应公式、定理、概念
向量的概念，向量的线性运算，	1.向量：既有大小又有方向的量，又称矢量. 2.向量的模：向量 $\vec{a}$ 的大小.记为$\lvert\vec{a}\rvert$. 3.向量的坐标表示：若向量用坐标表示 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\{x,y,z\}$，则$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 4 向量的运算法则： Ⅰ加减运算　设有矢量$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则 $\vec{a}\pm\vec{b}=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}$. Ⅱ.数乘运算　数乘运算$\underline{\underline{\Delta}}$矢量 $\vec{a}$ 与一数量 λ 之积 $\lambda\vec{a}$， $\lambda\vec{a}=\begin{cases}\lvert\lambda\vec{a}\rvert\overrightarrow{a^0} & \lambda>0,\text{即与}\vec{a}\text{同向}\\ \vec{0} & \lambda=0,\text{即为零矢量}\\ -\lvert\lambda\vec{a}\rvert\overrightarrow{a^0} & \lambda<0,\text{即与}\vec{a}\text{反向}\end{cases}$　设$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，则 $\lambda\vec{a}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}$.
向量的数量积和向量积，向量的混合积，	1 矢量的数积（点积，内积）： 矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. 设$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$. 2 矢量的向量积（叉积，外积）：设有两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，若$\exists$一个矢量 $\vec{c}$，满足如下条件 （1）$\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\sin(\vec{a},\vec{b})$；

	（2） $\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$，即 $\vec{c}$ 垂直于 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 所确定的平面； （3）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 成右手系.则称矢量 $\vec{c}$ 为矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的矢量积，记 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$. 设 $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}.$ 3 混合积：设有三个矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，若先作 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的叉积 $\vec{a}\times\vec{b}$，再与 $\vec{c}$ 作点积 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$，则这样的数积称为矢量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的混合积，记为 (a,b,c)，即 $(a,b,c)=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$ 设 $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\vec{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$， 则 $(a,b,c)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$
两向量垂直、平行的条件，两向量的夹角，向量的坐标表达式及其运算，单位向量，方向数与方向	1 向量之间的位置关系及结论 设 $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\vec{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$ （1） $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$； （2） $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$；

余弦，	其中 x_2,y_2,z_2 之中有一个为“0”，如 $x_2=0$，应理解为 $x_1=0$； （3）$\vec{a}$，$\vec{b}$ 不共线 $\Leftrightarrow\exists$ 不全为零的数 λ,μ 使 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$； （4）矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，可由下式求出 $\cos(\vec{a}\hat{}\vec{b})=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$； （5）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow\exists$ 不全为零的数 λ,μ,v，使 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+v\vec{c}=\vec{0}$ 或者 $(a,b,c)=0$ 2 单位向量：模为 1 的向量. 向量 $\vec{a}$ 的单位向量记作 $\overrightarrow{a^0}$， $\overrightarrow{a^0}=\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=\left\{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$. 3 向量的方向余弦： $\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 α,β,γ 为向量 $\vec{a}$ 与各坐标轴正向的夹角. 4 单位向量的方向余弦：显然 $\overrightarrow{a^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，且有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
曲面方程和空间曲线方程的概念，平	1 平面方程 (1)一般式方程 $Ax+By+Cz+D=0$，法矢量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$，若 方程中某个坐标不出现，则平面就平行于该坐标轴，例

<table>
<tr>
<td>面方程，直线方程，平面与平面、平面与直线、直线与直线的以及平行、垂直的条件，点到平面和点到直线的距离</td>
<td>
如 平面 $Ax+Cz+D=0 // y$ 轴
(2) 平面的点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
$M(x_0,y_0,z_0)$ 为平面上已知点，$\vec{n}=\{A,B,C\}$ 为法矢量
(3)三点式方程 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$
$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，$M_3(x_3,y_3,z_3)$ 为平面上的三个点
(4)截距式方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$a,b,c$ 分别为平面上坐标轴上的截距，即平面通过三点
$(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$
2 直线方程
一般式方程(两平面交线)：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1x+D_1=0 & \text{平面}\pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2x+D_2=0 & \text{平面}\pi_2 \end{cases}$
平面 π_1 与平面 π_2 的法矢量分别为 $\vec{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$，
$\vec{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$ ， 直线的方向矢量为 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$
(2)标准式方程
$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ $M(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上已知点，
$\vec{s}=\{l,m,n\}$ 为直线的方向矢量
(3)两点式方程 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$
其中 $M_1(x_1,y_1,z_1)$， $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为直线上的两点
</td>
</tr>
</table>

(4)参数式方程 $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ $M(x_0, y_0, z_0)$ 为直线上已知

点，$\vec{s} = \{l, m, n\}$ 为直线的方向矢量

3 平面间的关系

设有两个平面：平面 π_1：$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 平面 π_2：$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

(1)平面 π_1 // 平面 $\pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

(2)平面 $\pi_1 \perp$ 平面 $\pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

(3)平面 π_1 与平面 π_2 的夹角 θ，由下式确定

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

4 平面与直线间关系

直线 $L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$

平面 π_1：$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

(1) $L // \pi \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0$

(2) $L \perp \pi \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$

(3) L 与 π 的夹角 θ，由下式确定

$$\sin\theta = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

5 直线间关系

设有两直线：直线 $L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$

直线 $L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$

<table>
<tr><td></td><td>

(1) $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$

(2) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

(3)直线 L_1 与 L_2 的夹角 θ，由下式确定

$$\cos\theta=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

6 点到平面的距离：$M(x_0,y_0,z_0)$ 到平面

$\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

7 点到直线的距离：$M(x_0,y_0,z_0)$ 到直线

$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ 距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\overrightarrow{M_1P}|}{|\overrightarrow{M_1P}|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1\\ l & m & n\end{matrix}\right\|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

</td></tr>
<tr><td>

球面，母线平行于坐标轴的柱面，旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程，

</td><td>

准线为各种形式的柱面方程的求法

(1) 准线为 $\Gamma:\begin{cases} f(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$，母线 $// z$ 轴的柱面方程为

$f(x,y)=0$，

准线为 $\Gamma:\begin{cases} \varphi(x,z)=0\\ y=0\end{cases}$，母线 $// y$ 轴的柱面方程为

$\varphi(x,z)=0$，

</td></tr>
</table>

准线为 $\Gamma:\begin{cases}\psi(y,z)=0\\ x\qquad\quad =0\end{cases}$,母线 // x 轴的柱面方程为

$\psi(y,z)=0$.

(2) 准线为 $\Gamma:\begin{cases}f(x,y,z)=0\\ g(x,y,z)=0\end{cases}$,母线的方向矢量为 $\{l,m,n\}$

的柱面方程的求法

首先,在准线上任取一点 (x,y,z),则过点 (x,y,z) 的母线方程

为 $\dfrac{X-x}{l}=\dfrac{Y-y}{m}=\dfrac{Z-z}{n}$

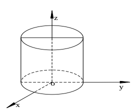
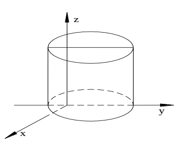
其中 X,Y,Z 为母线上任一点的流动坐标,消去方程组

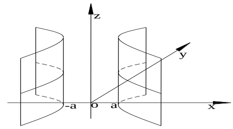
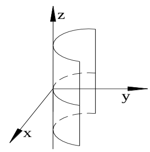
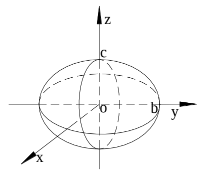
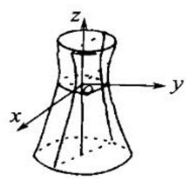
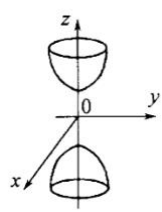
$$\begin{cases}f(x,y,z)=0\\ g(x,y,z)=0\\ \dfrac{X-x}{l}=\dfrac{Y-y}{m}=\dfrac{Z-z}{n}\end{cases}$$

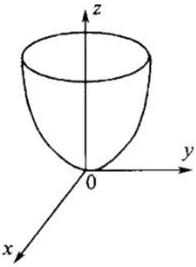
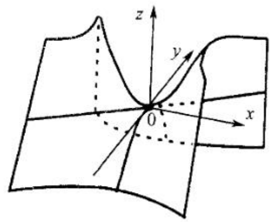
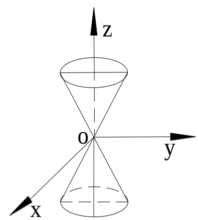
中的 x,y,z 便得所求的柱面方程

常用的二次曲面方程及其图形，空间曲线的参数方程和

常见的柱面方程

名称	方程	图形
圆柱面	$x^2+y^2=R^2$	
椭圆柱面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	

<table>
<tr>
<td rowspan="8">一般方程，空间曲线在坐标面上的投影曲线方程.</td>
<td>双曲柱面</td>
<td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>抛物柱面</td>
<td>$x^2=2py,(p>0)$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">标准二次方程及其图形</td>
</tr>
<tr>
<td>名称</td>
<td>方程</td>
<td>图形</td>
</tr>
<tr>
<td>椭球面</td>
<td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
(a,b,c 均为正数)</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>单叶双曲面</td>
<td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
(a,b,c 均为正数)</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>双叶双曲面</td>
<td>$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
(a,b,c 均为正数)</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

	椭圆的抛物面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$ (a,b,p 为正数)	
	双曲抛物面(又名马鞍面)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$ (a,b,p 均为正数)	
	二次锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (a,b,c 为正数)	

(五) 多元函数微分学

考试内容	对应公式、定理、概念
多元函数的概念，二元函数的几何意义，二元函数的极限和连续的概念，	二元函数 $z=f(x,y)$ 连续，可导（两偏导存在）与可微三者的关系如下： 可导 $\leftarrow$ 可微 $\rightarrow$ 函数连续 “ $\leftarrow$ $\rightarrow$ ” 表示可推出 用全微分定义验证一个可导函数的可微性，只需验证： $\lim\limits_{\rho\to\infty}\frac{\Delta z-f_x^{'}(x,y)\Delta x-f_y^{'}(x,y)\Delta y}{\rho}$ 是否为0
有界闭区域上多元	**基本原理**

连续函数的性质，多元函数偏导数和全微分，全微分存在的必要条件和充分条件，	$Th1$(求偏导与次序无关定理) 设$z=f(x,y)$的两个混合偏导数$f''_{xy}(x,y),\ f''_{yx}(x,y)$ 在区域D内连续，则有$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$ $Th2$(可微与偏导存在的关系定理)若$z=f(x,y)$在$P(x,y)$ 点处可微，则在该点处$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$必存在，且有$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ $Th3$(偏导存在与可微的关系定理) 若$z=f(x,y)$的两个偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$在$P(x,y)$ 上的某领域内存在，且在$P(x,y)$连续， 则$z=f(x,y)$在$P(x,y)$点处可微
多元复合函数、隐函数的求导法，二阶偏导数，方向导数和梯度，	**1 复合函数微分法** (1)设$z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y)$，则$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$ (2)设$z=f(u,v),u=\varphi(x),v=\phi(x)$， 则$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$，称之为$z$的全导数 (3)设$z=f(x,u,v),u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y)$， 则$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$ **注：**复合函数一定要设中间变量，抽象函数的高阶偏导数，其中间变量用数字 1，2，3……表示更简洁. **2 隐函数微分法** (1)设$F(x,y)=0$，则$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$

(2)$F(x,y,z)=0$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$

(3)设由方程组$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$确定的隐函数$y=y(x),z=z(x)$,

则$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$可通过 解关于$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$的线性方程组

$$:\begin{cases}F'_x+F'_y\dfrac{dy}{dx}+F'_z\dfrac{dz}{dy}=0\\G'_x+G'_y\dfrac{dy}{dx}+G'_z\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F'_y\dfrac{dy}{dx}+F'_z\dfrac{dz}{dx}=-F'_x,\\G'_y\dfrac{dy}{dx}+G'_z\dfrac{dz}{dx}=-G'_x\end{cases}$$来求解

方向导数和梯度

Th1 设 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微， 则 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 沿任意方向 $l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 存在方向导数且

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta$$

在平面上l除了用方向角表示外也可用极角表示：

$l=(\cos\theta,\sin\theta)$， θ是l的极角，$\theta\in[0,2\pi]$此时相应的方向导数的计算公式为 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\sin\theta$

Th2 设三元函数$u=f(x,y,z)$在$M_0(x_0,y_0,z_0)$处可微，则

$u=f(x,y,z)$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$沿任意方向

$l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$存在方向导数且有

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\cos\beta$$

$$+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\cos\gamma$$

梯度： $z=f(x,y)$在点M_0的方向导数计算公式可改写成

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)$$

$$=grad(f(x_0,y_0))\cdot l=\left|gradf(x_0,y_0)\right|\cos\langle grad(f(x_0,y_0)),l\rangle$$

	这里向量 $gradf(x_0,y_0)=(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y})$ 成为 $z=f(x,y)$ 在点 M_0 的梯度(向量) $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}$ 随 l 而变化 $l=\frac{grad(f(x_0,y_0))}{\lvert grad(f(x_0,y_0))\rvert}$ 即沿梯度方向时，方向导数取最大值 $\lvert grad\ f(x_0,y_0)\rvert$
空间曲线的切线和法平面，曲面的切平面和法线，	**1. 曲线的切线及法平面方程** (1)曲线 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)在(x_0,y_0,z_0)\leftrightarrow t=t_0\\z=z(t)\end{cases}$ 处的切线方程: $\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$ 法平面方程：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$ (2)空间曲线Γ的一般式方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 则在曲线Γ的 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的 切线方程: $\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right\rvert_p}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right\rvert_p}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\rvert_p}$ **法线方程:** $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right\rvert_p(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right\rvert_p(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\rvert_p(z-z_0)=0$ **2. 空间曲面在其上某点处的切平面和法线方程** (1)设曲面 $\sum$ 为显示方程 $z=f(x,y)$, 则在 $\sum$ 上一点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的 切平面方程: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\rvert_p(x-x_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\rvert_p(y-y_0)-(z-z_0)=0.$

	法线方程：$\dfrac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right\|_p}=\dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right\|_p}=\dfrac{z-z_0}{-1}$ (2)设曲面$\sum$为隐式方程$F(x,y,z)=0$,则在$\sum$上一点$P(x_0,y_0,z_0)$的 切平面方程：$F'_x\|(x-x_0)+F'_y\|_p(y-y_0)+F'_z\|_p(z-z_0)=0$ 法线方程：$\dfrac{x-x_0}{F'_x\|_p}=\dfrac{y-y_0}{F'_y\|_p}=\dfrac{z-z_0}{F'_z\|_p}$
二元函数的二阶泰勒公式，多元函数的极值和条件极值，多元函数的最大值、最小值及其简单应用	**1 多元函数的极值** **定义：** 设函数$z=f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$的某邻域内有定义,**若对于该邻域内异于** $P(x_0,y_0)$ 点的任一点$Q(x,y)$ 恒有 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$(或$<f(x_0,y_0)$) 则称$f(x_0,y_0)$为$f(x,y)$ 的极小值 **(极大值)** $Th1$（取极值的必要条件） 设$z=f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$点的一阶偏导数存在，且 $P(x_0,y_0)$是$z=f(x,y)$的极值点，则$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$ $Th2$（函数取极值的充分条件） 设$z=f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$点的某邻域内有 连续的二阶偏导数，且$f'_x(x_0,y_0)=0$, $f'_y(x_0,y_0)=0$ $[f''_{xy}(x_0,y_0)]^2-f''_{x^2}(x_0,y_0)\cdot f''_{y^2}(x_0,y_0)<0$ 则$P(x_0,y_0)$是$z=f(x,y)$的一个极值点 (1)若$f''_{x^2}(x_0,y_0)>0$(或$f''_{y^2}(x_0,y_0)>0$),则$P(x_0,y_0)$为极小值点。

(2) 若$f''_{x^2}(x_0,y_0)<0$(或$f''_{y^2}(x_0,y_0)<0$),则$P(x_0,y_0)$为极大值点。

2 无条件极值

解题程序：

(1)求出$z=f(x,y)$的驻点（x_0,y_0）；

(2)用$Th2$判别(x_0,y_0)是否为极值点；是，则$f(x_0,y_0)$为

$z=f(x,y)$ 的极值。

3 条件极值（拉格朗日乘数法）

1）由条件$\varphi(x,y)=0$, 求$z=f(x,y)$的极值

解题程序:

令$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$；

解方程组$\begin{cases} f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$ 求驻点(x_0,y_0);

$f(x_0,y_0)$即为$f(x,y)$的极值（存在的话）

2）由条件$\varphi(x,y,z)=0$, 求$u=f(x,y,z)$的极值。解题程序：

令$F(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$;

解方程组$\begin{cases} f'_x(x,y,z)+\lambda\varphi'_x(x,y,z)=0 \\ f'_y(x,y,z)+\lambda\varphi'_y(x,y,z)=0 \\ f'_z(x,y,z)+\lambda\varphi'_z(x,y,z)=0 \\ \varphi(x,y,z)=0 \end{cases}$

若（x_0,y_0,z_0)为其解$f(x_0,y_0,z_0)$即为$f(x,y,z)$的极值（若存在的话）

3）由条件$\varphi_1(x,y,z)=0.\varphi_2(x,y,z)=0$求函数$u=f(x,y,z)$的极值

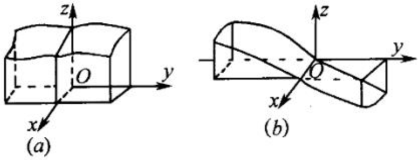
解题程序：

令$F(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi_1(x,y,z)+\lambda_2\varphi_2(x,y,z)$

以下仿 1）,2）

(六) 多元函数积分学

考试内容	对应公式、定理、概念
二重积分与三重积分的概念、性质、计算和应用	**1 二重积分:** $\mathrm{I}=\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_{i,}\eta_i)\Delta\sigma_i$, 其中$d=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$, d_i为$\Delta\sigma_{\mathrm{i}}$的直径($i=1,2,\cdots n$) **几何意义:** 当$z=f(x,y)\ge 0,(x,y)\in D$时,而二重积分I表示以$z=f(x,y)$为曲顶,以D为底的柱体体积。 **2 三重积分:** $\mathrm{I}=\iiint\limits_{D} F(x,y,z)dv=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_{i,}\eta_{i,}\tau_i)\Delta v_i$,其中$d=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$, d_i为$\Delta \mathrm{v}_{\mathrm{i}}$的直径($i=1,2,\cdots n$) **物理意义:** 三重积分$I$表示体密度为$\mu=f(x,y,z)$的空间形体$\Omega$的质量。 **3 性质(只叙述二重积分的性质,三重积分类似)** **(1)** $\iint\limits_{D} kf(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=k\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, k为常数 **(2)** $\iint\limits_{D}[f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma=\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma\pm g(x,y)d\sigma$ **(3)** $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n}\iint\limits_{D_i} f(x,y)d\sigma$,其中$D_i$为 D 的构成子域且任两个子域没有重迭部分($i=1,2,\cdots,m$) (4)$\iint\limits_{D} d\sigma=A$,其中$A$为$D$的面积。 **(5)(比较定理)**

	若在D上恒有$f(x,y)\le g(x,y)$,则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$ (6)(估值定理）设M,m分别为$f(x,y)$在闭域D上的最大与最小值, A为D的面积，则 $mA \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le MA$ (7)(中值定理）若$f(x,y)$在闭域D上连续，A为D的面积， 则在D上至少∃一点（ξ，η），使$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)A$ **(8)**二重积分的**对称性原理** 1）如果积分域D关于x轴对称，$f(x,y)$为y的奇偶函数， 则二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ $=\begin{cases}0, f\text{关于}y\text{为奇函数，即}f(x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, f\text{关于y为偶函数，即}f(x,-y)=f(x,y),\end{cases}$ D_1为D在上半平面部分 这个性质的几何意义见图(a)、(b)  2）如果积分域D关于y轴对称，$f(x,y)$为x的奇偶函数， 则二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ $=\begin{cases}0, f\text{关于}x\text{的奇函数，即}f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma, f\text{关于}x\text{为偶函数，即}f(-x,y)=f(x,y),\end{cases}$ D_2为D在右半平面部分 3）如果D关于原点对称，$f(x,y)$同时为x,y的奇偶函数，

	则二重积分$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ $=\begin{cases}0, f\text{关于x, y的奇函数，即}f(-x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma, f\text{关于x，y为偶函数，即}f(-x,-y)=f(x,y),\end{cases}$ D_1为D在上半平面部分 4）如果D关于直线$y=x$对称，则$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ **注：**注意到二重积分积分域 D 的对称性及被积函数 $f(x,y)$ 的奇偶性，一方面可减少计算量，另一方面可避免出差错，要特别注意的是仅当积分域 D 的对称性与被积函数 $f(x,y)$ 的奇偶性两者兼得时才能用性质 8.
两类曲线积分的概念、性质及计算，两类曲线积分的关系，格林公式，平面曲线积分与路径无关的条件，	**1 平面曲线积分与路径无关的四个等价条件** 设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通区域 D 上具有一阶连续偏导数，则 $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y},\forall(x,y)\in D$ $\Leftrightarrow \oint_L Pdx+Qdy=0, L$ 为一简单分段光滑封闭曲线 $\Leftrightarrow$ 存在函数 $u(x,y),(x,y)\in D$ 使 $du(x,y)=Pdx+Qdy$, 且 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$ 2 格林公式：设平面上的有界闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有 D 连续的一阶偏导数，则有 $\iint\limits_{D}(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$ 或者 $\iint\limits_{D}(\dfrac{\partial Q}{\partial x}+\dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx-Qdy$
二元函数全微分的原函数，	1 高斯(Gauss)公式 设 Ω 是空间中的有界闭区域，由分块光滑的曲面所 S 围成，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 由连续的一阶偏

<table>
<tr>
<td>两类曲面积分的概念、性质及计算，两类曲面积分的关系，高斯公式，斯托克斯公式，</td>
<td>导数，则
$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dV=\iint\limits_{S}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ 或
$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dV=\iint\limits_{S}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$
这里 S 是 Ω 的整个边界的外侧(即取外法向)，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 S 上点 (x,y,z) 处的外法向量的方向余弦.
2 斯托克斯公式
设 Γ 为分段光滑的又向闭曲线，S 是以 Γ 为边界的分块光滑有向曲面，Γ 的正向与 S 的侧(即法向量的指向)符合右手法则，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在包含 S 的一个空间区域内有连续的一阶偏导数，则有
$\iint\limits_{S}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$
$(\iint\limits_{S}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\int_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz)$ 或
$\iint\limits_{S}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma$
$=\int_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$</td>
</tr>
<tr>
<td>散度和旋度的概念及计算，曲线积分和曲面积分的应用</td>
<td>1 散度的计算公式
设 $\vec{A}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k};P,Q,R$ 均可导，则 $\vec{A}$
在 $P(x,y,z)$ 点处的散度为 $div\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$
2 旋度的计算公式
设有矢量场 $\vec{A}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，其中
P,Q,R 均有连续的一阶偏导数，则旋度 $rot\vec{A}$ 为：</td>
</tr>
</table>

	$rot\vec{A}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

(七) 无穷级数

考试内容	对应公式、定理、概念
常数项级数的收敛与发散的概念，收敛级数的和的概念级数的基本性质与收敛的必要条件	**1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的性质：** (1)设$c\neq 0$的常数，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$有相同敛散性 （2）设有两个数级$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s,\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sigma$,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=s\pm\sigma$. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$发散. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均发散,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$敛散性不定. 注：添加或去消有限项不影响一个级数的敛散性. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则对其各项任意加括号后所得新级数仍收敛于原级数的和
几何级数与 p 级数以及他们的收敛性，正项	**正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ （$u_n\geq 0$）的判敛法** (1)比较判敛法：设$0\leq u_n\leq v_n$,若

级数收敛性的判别法，	$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛　　$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散 **(2)**比较法的极限形式：设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$及$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数 且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A(v_n\neq 0)$ 1.若$0\le A<+\infty$,且$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛 2.若$0<A\le+\infty$,且$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散 两个常用的比较级数 $i)$等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\begin{cases}\frac{a}{1-r},\|r\|<1\\ 发散,\|r\|\ge 1\end{cases}$ $ii)\,p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}收敛，p>1时\\ 发散，p\le 1时\end{cases}$ (3)**比值判别法**（达朗贝尔准则）（适用于通项u_n中含有 n！ 或关于 n 的若干连乘积形式） 设$u_n\ge 0,n=1,2\cdots$对于$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$来讲 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}\rho>1时,\sum_{n=1}^{\infty}u_n发散\\ \rho=1时，方法失效\\ \rho<1时,\sum_{n=1}^{\infty}u_n收敛\end{cases}$
交错级数与莱布尼兹定理，任意项级数的绝对	**1.　交错级数** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,(u_n>0)$ **的判敛法** **莱布尼兹准则：** 若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,(u_n>0)$满足条件：

收敛与条件收敛，	(1)$u_n \geq u_{n+1},(n=1,2,\cdots\cdots)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, 则交错级数收敛，其和 $S \leq u_1$，其 n 项余和的绝对值 $\|R_n\| \leq u_{n+1}$.
函数项级数的收敛域与和函数的概念，幂级数及其收敛半径，收敛区间(指开区间)和收敛域，幂级数的和函数，	**1 幂级数：** $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = \rho$，则 $R = \dfrac{1}{\rho}$. **2. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛域的求法步骤：** (1)用比值（或根值）法求 $\rho(x)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\|u_{n+1}(x)\|}{\|u_n(x)\|} = \rho(x)$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|u_n(x)\|} = \rho(x)$); (2)解不等式方程 $\rho(x) < 1$，求出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛区间 (a,b); (3)考察 $x=a$（或 $x=b$）时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$（或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$）的敛散性 （4）写出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域
幂级数在其收敛区间内的基本性质，简单幂级数的和函数的求法，初等幂级数展开式	1 幂级数的四则运算性质： 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)$，其收敛半径分别为 $R_1, R_2, R = \min(R_1, R_2)$，则对 $\forall x \in (-R, R)$，有 (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n) x^n = f(x) \pm g(x)$，且在（-R，R）内绝对收敛 (2) $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) x^n$ $= f(x)g(x)$ (3) 设 $b_0 \neq 0$，则在 $x=0$ 的足够小邻域内

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots}=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n+\cdots$$

利用多项式的长除法可得：$C_0=\dfrac{a_0}{b_0},C_1=\dfrac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2},\cdots$

2 幂级数的分析性质：

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$，则在（$-R$，$R$）内有

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$f$（$x$）是连续的。

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$可逐项微分，且$f_x'=(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$可逐项积分，且$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n)dt$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\int_0^x a_nt^ndt)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

3 函数的幂级数展开

泰勒级数　设f（x）在$x=x_0$的某一邻域内具有任意阶导数，

级数:$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

称为f（x）在$x=x_0$处的泰勒级数。

	当$x_0=0$时，级数化为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$ 称为麦克劳林级数 Th设$f(x)$在$x=x_0$某领域内具有任意阶导数， 则泰勒级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 收敛于$f(x)$的充分条件$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, 其中$\mathrm{R}_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)](x-x_0)^{n+1},0<\theta<1.$ 4 常见的幂级数展开式： (1) $\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots+u^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}u^n,(-1,1)$ (2) $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-\cdots+(-1)^n u^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n,(-1,1)$ (3) $e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\cdots+\frac{u^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!},(-\infty,+\infty)$ (4) $\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!},(-\infty,+\infty)$ (5) $\cos u=1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!},(-\infty,+\infty)$ (6) $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1}+\cdots\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1},(-1,1)$ (7) $(1+u)^a=1+au+\frac{a(a-1)}{2!}u^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}u^n\cdots$ (随 a 的不同而不同，但在(-1，1)总有意义)

函数的傅立叶系数与傅立叶级数，狄利克雷定理，函数在 $[-l,l]$ 上的傅立叶级数	1设$f(x)$是以2π为周期的函数，且在$[-\pi,\pi]$或$[0,2\pi]$上可积，则 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos nxdx,(n=0,1,2,\cdots)$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\sin nxdx,(n=1,2,\cdots)$ 称为$f(x)$的傅立叶系数 2 $f(x)$的傅立叶系数为系数的三角级数$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 称为$f(x)$的傅立叶级数，记为$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 3 设$f(x)$是以$2l$为周期的函数，且在$[-l,l]$上可积，则以 $\mathrm{a}_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,(n=0,1,2\cdots)$ $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,(n=0,1,2\cdots)$ 为系数的三角级数$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$ 称为$f(x)$的傅立叶级数，记为$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$. 3狄里赫莱收敛定理：设函数f(x)在$[-\pi,\pi]$上满足条件： (1)除有限个第一类间断点外都连续。 (2) 只有有限个极值点，则$f(x)$的傅立叶级数在$[-\pi,\pi]$上收敛，且有

	$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos x+b_n\sin nx)=\begin{cases} f(x), x\text{为}f(x)\text{的连续点；} \\ \frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)], x_0\text{为}f(x)\text{ 的第一类间断点；} \\ \frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi_0+0)], x=\pm\pi. \end{cases}$
函数在$[0,l]$上的正弦级数与余弦级数.	1 $f(x)$ 为$[0,l]$上的非周期函数，令： $F(x)=\begin{cases} f(x), 0\le x\le l \\ f(-x), -l\le x<0 \end{cases}$ 则 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$（余弦级数），其中：$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx$（n=0，1，2，……） 2 $f(x)$ 为$[0,l]$上的非周期函数，令： $F(x)=\begin{cases} f(x), 0\le x\le l \\ -f(-x), -l\le x<0 \end{cases}$ 则 $F(x)$ 除 x=0 外在区间$[-\pi,\pi]$上为奇函数则 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$（正弦级数），其中： $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$（n=1，2，……）

（八）常微分方程

考试内容	对应公式、定理、概念
常微分方程的基本概念，变量可分离的微分方	1 常微分方程　含有自变量、未知函数及未知函数的某些导数的方程式称微分方程，而当未知函数是一元函数时称为常微分方程. 2 可分离变量方程 $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$

程	解法：两边同除 $g_1(y)f_2(x)\neq 0$，得 $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0$ $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=C$
奇次微分方程，一阶线性微分方程，伯努利方程，全微分方程，	1 齐次方程 $y'=f(\frac{y}{x})$ 解法：令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux$，$y'=u+x\frac{du}{dx}$ 于是， 原方程 $\Rightarrow u+x\frac{du}{dx}=f(u)\Rightarrow\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln x+C$ 2 可化为齐次型的方程 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ 解法：(1)当 $c_1=c_2=0$ 时 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)=g(\frac{y}{x})$ 属于(2) (2). $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$, 即 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\lambda$ 则 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=g(a_2x+b_2y)$ 令 $a_2x+b_2y=u$，则 $\frac{du}{dx}=a_2+b_2f(u)$ 属于（1） (3). $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0, c_1, c_2$ 不全为 0　解方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ 求交点 (α,β)

	令 $x=X+\alpha, y=Y+\beta$, 则原方程 $\Rightarrow \dfrac{dy}{dX}=\varphi(\dfrac{X}{Y})$ 属于（2） 3 一阶线性方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 解法：用常数变易法求 (1)求对应齐次方程 $y'+p(x)y=0$ 的通解 $y=Ce^{-\int p(x)dx}$ (2)令原方程的解为 $y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$ (3)代入原方程整理得 $C'(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)\Rightarrow C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+\tilde{C}$ (4)原方程通解　$y=[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+\tilde{C}]e^{-\int p(x)dx}$ 4 贝努里方程 $y'+p(x)y=q(x)y^n$，其中 $n\neq 0,1$ 解法：令 $Z=y^{1-n}$，则方程 $\Rightarrow \dfrac{1}{1-n}\dfrac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$， $\dfrac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$ 属于 3 5 全微分方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 为全微分方程 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$.通解为 $\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy=C$
可用简单的变量代换求解的某些微分方程，可降阶的高阶微分方程，线性微分方程解的性质及解的结	注：这里只限于讨论二阶线性方程，其结论可推广到更高阶的方程，二阶线性方程的一般形式为 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$　(8.1)其中 $p(x),q(x),f(x)$ 均为连续函数，当右端项 $f(x)\equiv 0$ 时，称为二阶线性齐次方程，否则称为非齐次方程. 解的性质与结构(以下性质可推广到任意高阶的线性方程)分以下几种： 1 若 $y_1(x),y_2(x)$ 为齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$　(8.2)的两

构定理	个特解，则其线性组合 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 仍为(8.2)的解，特别地，若 $y_1(x),y_2(x)$ 线性无关 (即 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq\lambda$(常数))，则(8.2)的通解为 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 2 设 $y_1(x),y_2(x)$ 为非线性方程(8.1)的两个特解，则其差 $y_1(x)-y_2(x)$ 为相应齐次方程(8.2)的特解 3 设 $y^*(x)$ 为非齐次方程(8.1)的一个特解， $y(x)$ 为齐次方程(8.2)的任意特解，则其和 $y^*(x)+y(x)$ 为(8.1)的解，特别地，若 $y_1(x),y_2(x)$ 为(8.2)两个线性无关的特解，则(8.1)的通解为 $y(x)=y^*(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$，其中 C_1,C_2 为任意常数.
二阶常系数奇次线性微分方程，高于二阶的某些常系数奇次线性微分方程	1 二阶常系数线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$ (1) 其中 p,q 均为常数 解法：特征方程： $\lambda^2+p\lambda+q=0$ （I）当 λ_1,λ_2 为相异的特征根时，方程(1)通解为 $y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$ （II）当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，通解为 $y(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1x}$ （III）当 $\lambda=\alpha\pm i\beta$（复根）时，通解为 $y(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ 2 n 阶常系数齐次线性方程 此种方程的一般形式为 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_ny=0$（*），其中 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数，相应的特征方程为 $\lambda^n+p_1\lambda^{(n-1)}+p_2\lambda^{(n-2)}+\cdots+p_n=0$ 特征根与通解的关系同二阶方程的情形相类似，具体结果为： (1)若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是个 n 相异实根，则方程（*）的通解为

	$y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\cdots+C_ne^{\lambda_n x}$ (2)若 $\lambda=\lambda_0$ 为特征方程的 $k(k\le n)$ 重实根，则(＊)的通解中含有：$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda_0 x}$ (3)若 $\alpha+i\beta$ 为特征方程的 $k(2k\le n)$ 重共轭复根，则(＊)的通解中含有： $e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$ 由于我们不能求出一般的三次以上代数方程的根，也就是说对于三次以上的特征方程一般不能得到齐特征根，自然也就不能求出三阶以上常系数齐次线性微分方程的通解，能够求出的只是某些特殊情形
简单的二阶常系数非奇次线性微分方程，欧拉方程，微分方程简单应用	1 二阶常系数线性非齐次方程 $y''+py'+qy=f(x)$ (2)其中 p,q 均为常数 解法：通解的求法程序 (1)．求对应齐次方程的通解 $Y(x)$ (2)．求出(2)的特解 $y*(x)$ (3)．方程(2)的通解 $y=Y(x)+y*(x)$ 方程(2)特解 $y^*(x)$ 的求法有三种：微分算子法、常数变易法、待定系数法. 2 形如 $x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=0$ 的方程成为欧拉方程.

二、线性代数

(一) 行列式

考试内容	对应公式、定理、概念
行列式的概念和基本性质、行列式按行(列)展开定理	行列式按行（列）展开定理 (1) 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}\lvert A\rvert, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$ 或 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}\lvert A\rvert, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$ 即 $AA^*=A^*A=\lvert A\rvert E$，其中 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\cdots & A_{n1}\\A_{12} & A_{22}\cdots & A_{n2}\\\cdots & \cdots\cdots & \cdots\\A_{1n} & A_{2n}\cdots & A_{nn}\end{pmatrix}=(A_{ji})=(A_{ij})^T$ (2)设 A,B 为 n 阶方阵，则 $\lvert AB\rvert=\lvert A\rvert\lvert B\rvert=\lvert B\rvert\lvert A\rvert=\lvert BA\rvert$ 但 $\lvert A\pm B\rvert=\lvert A\rvert\pm\lvert B\rvert$ 不一定成立 (3) $\lvert kA\rvert=k^n\lvert A\rvert$，$A$为$n$阶方阵 (4) 设$A$为$n$阶方阵，则$\lvert A^T\rvert=\lvert A\rvert$;$\lvert A^{-1}\rvert=\lvert A\rvert^{-1}$（若$A$可逆）$\lvert A^*\rvert=\lvert A\rvert^{n-1}$（$n\geq 2$） (5) $\begin{vmatrix}A & O\\O & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & C\\O & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & O\\C & B\end{vmatrix}=\lvert A\rvert\lvert B\rvert$，$A,B$为方阵， 但 $\begin{vmatrix}O & A_{m\times m}\\B_{n\times n} & O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\cdot\lvert A\rvert\lvert B\rvert$.

	(6)范德蒙行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$ 设 A 是 n 阶方阵，$\lambda_i(i=1,2\cdots,n)$ 是 A 的 n 个特征值，则 $\|A\|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

(二) 矩阵

考试内容	对应公式、定理、概念
矩阵的概念，矩阵的线性运算，矩阵的乘法，	矩阵：$m\times n$个数a_{ij}排成m行n列的表格 $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$ 称为矩阵，简记为 A,或$(a_{ij})_{m\times n}$.若$m=n$, 则称 A 是 n 阶矩阵或 n 阶方阵. 矩阵的线性运算 1 矩阵的加法 设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，则 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})=a_{ij}+b_{ij}$ 称为矩阵 A 与 B 的和，记为 $A+B=C$ 2 矩阵的数乘 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，k 是一个常数，则 $m\times n$ 矩阵 (ka_{ij}) 称为数 k 与矩阵 A 的数乘，记为 kA. 3 矩阵的乘法 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是 $n\times s$ 矩阵，那么 $m\times s$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

	$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ 称为 A与B的乘积 的乘积，记为 $C=AB$
方阵的幂，方阵乘积的行列式，矩阵的转置，逆矩阵的概念和性质，矩阵可逆的充要条件，伴随矩阵，	**1 A^T、A^{-1}、A^* 三者之间的关系** 1)$(A^T)^T=A,(AB)^T=B^TA^T,(kA)^T=kA^T,(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$ 2)$(A^{-1})^{-1}=A,(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$, 但 $(A\pm B)^{-1}=A^{-1}\pm B^{-1}$ 不一定成立， 3)$(A^*)^*=\|A\|^{n-2}\ A(n\geq 3)$， $(AB)^*=B^*A^*,$ $(kA)^*=k^{n-1}A^*(n\geq 2)$. 但 $(A\pm B)^*=A^*\pm B^*$ 不一定成立 4)$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1},(A^{-1})^*=(A^*)^{-1},(A^*)^T=(A^T)^*$ **2 有关 A*的结论** 1)$AA^*=A^*A=\|A\|E$ 2)$\|A^*\|=\|A\|^{n-1}\ (n\geq 2),(kA)^*=k^{n-1}A^*,(A^*)^*=\|A\|^{n-2}\ A(n\geq 3)$ 3)若 A 可逆，则 $A^*=\|A\|A^{-1},(A^*)^*=\frac{1}{\|A\|}A$ 4)若 A 为 n 阶方阵，则 $r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\ 1, & r(A)=n-1\\ 0, & r(A)<n-1\end{cases}$ **3 有关 A^{-1} 的结论** A可逆 $\Leftrightarrow AB=E;\Leftrightarrow\|A\|\neq 0;\Leftrightarrow r(A)=n;$ $\Leftrightarrow A$可以表示为初等矩阵的乘积； $\Leftrightarrow A$无零特征值；$\Leftrightarrow Ax=0$只有零解
矩阵的初等变换，初等矩阵，矩阵的秩，矩阵等价，	**1 有关矩阵秩的结论** 1）秩 r（A）=行秩=列秩； 2） $r(A_{m\times n})\leq\min(m,n);$ 3） $A\neq 0\Rightarrow r(A)\geq 1$； 4） $r(A\pm B)\leq r(A)+r(B);$

分块矩阵及其运算	5）初等变换不改变矩阵的秩 6） $r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le \min(r(A),r(B))$, 特别若 $AB=O$ 则 $r(A)+r(B)\le n$ 7）若 A^{-1} 存在 $\Rightarrow r(AB)=r(B)$;　　若 B^{-1} 存在 $\Rightarrow r(AB)=r(A)$; 若 $r(A_{m\times n})=n\Rightarrow r(AB)=r(B)$; 若 $r(A_{m\times s})=n\Rightarrow r(AB)=r(A)$; 8） $r(A_{m\times s})=n\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解 **2 分块求逆公式** $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$　　这里 A，B 均为可逆方阵

(三) 向量

考试内容	对应公式、定理、概念
向量的概念，向量的线性组合和线性表示，向量的线性	**1 有关向量组的线性表示** **(1)** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少有一个向量可以用其余向量线性表示. (2) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 惟一线性表示.

相关与线性无关	(3) β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ r ($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$) $=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$) **2 有关向量组的线性相关性** (1)部分相关，整体相关；整体无关，部分无关. (2) ① n 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$线性无关$\Leftrightarrow\|[\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n]\|\neq 0$, n 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow\|[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\|=0$, ② n+1 个 n 维向量线性相关. ③若 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_S$ 线性无关，则添加分量后仍线性无关； 或一组向量线性相关，去掉某些分量后仍线性相关
向量组的极大线性无关组，等价向量组，向量组的秩	**1 有关向量组的线性表示** **(1)** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少有一个向量可以用其余向量线性表示. (2) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 惟一线性表示. (3) β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$
向量组的秩与矩阵的秩之间的关系，向量空间及相关概念	1 设 $r(A_{m\times n})=r$，则 A 的秩 $r(A)$ 与 A 的行列向量组的线性相关性关系为： (1)若 $r(A_{m\times n})=r=m$，则 A 的行向量组线性无关. (2)若 $r(A_{m\times n})=r<m$，则 A 的行向量组线性相关. (3)若 $r(A_{m\times n})=r=n$，则 A 的列向量组线性无关.

	(4)若 $r(A_{m\times n})=r<n$，则 A 的列向量组线性相关
n 维向量空间的基变换和坐标变换，过渡矩阵	1 基变换公式及过渡矩阵 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是向量空间 V 的两组基，则基变换公式为 $$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$$ 其中 C 是可逆矩阵，称为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵 2 坐标变换公式 若向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的坐标分别是 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$， $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 即 $\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_n\beta_n$，则向量坐标变换公式为 $X=CY$或$Y=C^{-1}X$ 其中 C 是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵
向量的内积，线性无关向量组的正交规范化方法	内积：$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$ Schmidt 正交化 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则可构造 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 使其两两正交，且 β_i 仅是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$ 的线性组合 $(i=1,2,\cdots,n)$，再把 β_i 单位化，记 $\gamma_i=\dfrac{\beta_i}{\lvert\beta_i\rvert}$，则 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_i$ 是规范正交向量组.其中

	$\beta_1=\alpha_1$， $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$ $\beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$ …………………………………… $\beta_s=\alpha_s-\dfrac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\dfrac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}$
规范正交基，正交矩阵及其性质	1 正交基及规范正交基 向量空间一组基中的向量如果两两正交，就称为正交基；若正交基中每个向量都是单位向量，就称其为规范正交基

(四) 线性方程组

考试内容	对应公式、定理、概念
线性方程组的克莱姆法则，奇次线性方程组有非零解的充分必要条件	1 克莱姆法则 线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$，如果系数行列式 $D=\|A\|\neq 0$，则方程组有唯一解 $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$，其中 D_j 是把 D 中第 j 列元素换成方程组右端的常数列所得的行列式. 2 n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解. $\Leftrightarrow \forall b, Ax=b$ 总有唯

	一解，一般地， $r(A_{m\times n})=n \Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解.
非奇次线性方程组有解的充分必要条件，线性方程组解的性质和解的结构	1 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若 $r(A_{m\times n})=m$，则对 $Ax=b$ 而言必有 $r(A)=r(A\vdots b)=m$, 从而 $Ax=b$ 有解. 2 设 $x_1,x_2,\cdots x_s$ 为 $Ax=b$ 的解，则 $k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_sx_s$ 当 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$ 时仍为 $Ax=b$ 的解；但当 $k_1+k_2+\cdots+k_s=0$ 时，则为 $Ax=0$ 的解.特别 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 为 $Ax=b$ 的解；$2x_3-(x_1+x_2)$ 为 $Ax=0$ 的解. 3 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A)+1=r(\overline{A})\Leftrightarrow b$ 不能由 A 的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.
奇次线性方程组的基础解系和通解，解空间，非奇次线性方程组的通解.	1 齐次方程组 $Ax=0$ 恒有解(必有零解).当有非零解时，由于解向量的任意线性组合仍是该齐次方程组的解向量，因此 $Ax=0$ 的全体解向量构成一个向量空间，称为该方程组的解空间，解空间的维数是 $n-r(A)$，解空间的一组基称为齐次方程组的基础解系. 2 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，即 (1) $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的解； (2) $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关； (3) $Ax=0$ 的任一解都可以由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性表出. $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的通解，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 是任意常数.

(五) 矩阵的特征值和特征向量

考试内容	对应公式、定理、概念
矩阵的特征值和特	**1** 设 λ 是 A 的一个特征值，则 $kA,aA+bE,A^2,A^m,f(A),A^T,A^{-1},A*$ 有一个特征值分别为

征向量的概念及性质，	$k\lambda, a\lambda+b, \lambda^2, \lambda^m, f(\lambda), \lambda, \lambda^{-1}, \frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$, 且对应特征向量相同（$A^T$ 例外）. 2若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的n个特征值，则 $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i = \sum\limits_{i=1}^n a_{ii}, \prod\limits_{i=1}^n \lambda_i = \lvert A\rvert$ 从而 $\lvert A\rvert\neq 0 \Leftrightarrow A$ 没有特征值. 3 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为 A 的 s 个特征值，对应特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，若 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$, 则 $A^n\alpha = k_1A^n\alpha_1 + k_2A^n\alpha_2 + \cdots + k_sA^n\alpha_s = k_1\lambda_1^n\alpha_1 + k_2\lambda_2^n\alpha_2 + \cdots k_s\lambda_s^n\alpha_s$
相似变换、相似矩阵的概念及性质，	1 若 $A\sim B$，则 (1) $A^T \sim B^T, A^{-1}\sim B^{-1}, A^*\sim B^*$. (2) $\lvert A\rvert=\lvert B\rvert, \sum\limits_{i=1}^n A_{ii} = \sum\limits_{i=1}^n b_{ii}, r(A)=r(B)$ (3) $\lvert\lambda E-A\rvert=\lvert\lambda E-B\rvert$, 对 $\forall\lambda$ 成立
矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵，	1 设 A 为 n 阶方阵，则 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ 对每个 k_i 重根特征值 λ_i，有 $n-r(\lambda_i E-A)=k_i$ 2 设 A 可对角化，则由 $P^{-1}AP=\Lambda$, 有 $A=P\Lambda P^{-1}$，从而 $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$ 3 重要结论 (1)若 $A\sim B, C\sim D$，则 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B & O \\ O & D \end{bmatrix}$. (2)若 $A\sim B$，则 $f(A)\sim f(B), \lvert f(A)\rvert \sim \lvert f(B)\rvert$，其中 $f(A)$ 为关 于 n 阶方阵 A 的多项式. (3)若 A 为可对角化矩阵，则其非零特征值的个数(重根重复计算)＝秩(A)
实对称矩	1 相似矩阵：设 A,B 为两个 n 阶方阵，如果存在一个可逆矩

阵的特征值、特征向量及相似对角阵	阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$ 成立，则称矩阵 $A与B$ 相似，记为 $A\sim B$． 2 相似矩阵的性质 如果 $A\sim B$ 则有 (1) $A^T\sim B^T$ (2) $A^{-1}\sim B^{-1}$ $(若A,\ B均可逆)$ (3) $A^k\sim B^k\,(k为正整数)$ (4) $\lvert\lambda E-A\rvert=\lvert\lambda E-B\rvert,从而A,B有相同的特征值$ (5) $\lvert A\rvert=\lvert B\rvert,从而A,B同时可逆或同时不可逆$ (6) $秩(A)=秩(B),\lvert\lambda E-A\rvert=\lvert\lambda E-B\rvert,A、\ B不一定相似$

(六) 二次型

考试内容	对应公式、定理、概念
二次型及其矩阵表示，合同变换与合同矩阵，二次型的秩	1 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$ ，其中 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$ ，称为 n 元二次型，简称二次型．若令 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$,这二次型 f 可改写成矩阵向量形式 $f=x^TAx$ ．其中 A 称为二次型矩阵，因为 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，所以二次型矩阵均为对称矩阵，且二次型与对称矩阵一一对应，并把矩阵 A 的秩称为二次型的秩．

惯性定理，二次型的标准形和规范形	1 惯性定理 对于任一二次型，不论选取怎样的合同变换使它化为仅含平方项的标准型，其正负惯性指数与所选变换无关，这就是所谓的惯性定理. 2 标准形 二次型 $f=(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 经过合同变换 $x=Cy$ 化为 $f=x^TAx=y^TC^TACy=\sum_{i=1}^{r}d_iy_i^2$ 称为 f $(r\le n)$ 的标准形.在一般的数域内，二次型的标准形不是唯一的，与所作的合同变换有关，但系数不为零的平方项的个数由 $r(A$的秩$)$ 唯一确定. 3 规范形 任一实二次型 f 都可经过合同变换化为规范形 $f=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$，其中 r为A 的秩，p 为正惯性指数，$r-p$ 为负惯性指数，且规范型唯一.
用正交变换和配方法化二次型为标准形，二次型及其矩阵的正定性	1 设 A 正定 $\Rightarrow kA(k>0),A^T,A^{-1},A^*$ 正定；$\|A\|>0$, A 可逆； $a_{ii}>0$，且$\|A_{ii}\|>0$ 2 A，B 正定$\Rightarrow$A+B 正定，但 AB，BA 不一定正定 3 A 正定$\Leftrightarrow$ $f(x)=x^TAx>0,\forall x\neq 0$ $\Leftrightarrow$A 的各阶顺序主子式全大于零 $\Leftrightarrow$A 的所有特征值大于零 $\Leftrightarrow$A 的正惯性指数为 n $\Leftrightarrow$ ∃可逆阵 P 使 $A=P^TP$

	$\Leftrightarrow$存在正交矩阵 Q，使 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$, 其中 $\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n$. 正定 $\Rightarrow kA(k>0),A^T,A^{-1},A^*$ 正定； $\|A\|>0$, A 可逆； $a_{ii}>0$， 且$\|A_{ii}\|>0$

三、概率论与数理统计

(一) 随机事件和概率

考试内容	对应概念、定理、公式
随机事件与样本空间，事件的关系与运算，完全事件组	1 事件的关系与运算 (1)子事件：$A\subset B$，若 A 发生，则 B 发生. (2)相等事件：A=B，即 $A\subset B$，且 $B\subset A$. (3)和事件：$A\bigcup B$（或 A+B），A 与 B 中至少有一个发生. (4)差事件：A-B，A 发生但 B 不发生. (5)积事件：$A\bigcap B$（或 AB），A 与 B 同时发生. (6)互斥事件（互不相容）：$A\bigcap B=\varnothing$. (7)互逆事件（对立事件）： $A\bigcap B=\varnothing,且A\bigcup B=\Omega,记A=\bar{B}或B=\bar{A}$ 2 运算律： (1)交换律：$A\bigcup B=B\bigcup A,\ A\bigcap B=B\bigcap A$ (2)结合律：$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$； $(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$ (3)分配律：$(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$ 3 德□摩根律：$\overline{A\bigcup B}=\bar{A}\bigcap\bar{B},\overline{A\bigcup B}=\bar{A}\bigcup\bar{B}$ 4 完全事件组：A_1，$A_2\cdots$，A_n，两两互斥，且和事件为必然事件，即 $A_i\cap A_j=\varnothing$，$i\neq j$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}=\Omega$。
概率的概念，概率的基本性质，古典概率，几何型概率	1 概率：事件发生的可能性大小的度量，其严格定义如下：概率 $P(\square)$ 为定义在事件集合上的满足下面 3 个条件的函数： (1)对任何事件 A，$P(A)\geq 0$; (2)对必然事件 Ω，$P(\Omega)=1$;

	(3)对 A_1，$A_2,\cdots$，$A_n,\cdots$，若$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，则$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$. 2 概率的基本性质 (1) $P(\bar{A})=1-P(A)$; (2) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$; (3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$; 特别， 当$B\subset A$时，$P(A-B)=P(A)-P(B)$且$P(B)\leq P(A)$； $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)$ $-P(AC)+P(ABC)$; (4)若$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互斥，则$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}(P(A_i)$. 3 古典型概率：实验的所有结果只有有限个， 且每个结果发生的可能性相同，其概率计算公式： $P(A)=\dfrac{\text{事件}A\text{发生的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$ 4 几何型概率：样本空间Ω为欧氏空间中的一个区域， 且每个样本点的出现具有等可能性，其概率计算公式： $P(A)=\dfrac{A\text{的度量（长度、面积、体积）}}{\Omega\text{的度量（长度、面积、体积）}}$
概率的基本公式，事件的独立性，独立重复试验	1 概率的基本公式: (1)条件概率: $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，表示$A$发生的条件下，$B$发生的概率 (2)全概率公式：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i),B_iB_j=\varnothing,i\neq j,\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega.$$

(3) Bayes 公式： $P(B_j|A)=\dfrac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)},j=1,2,\cdots,n$

注：上述公式中事件 B_i 的个数可为可列个.

(4)乘法公式：

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=P(A_2)P(A_1|A_2)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

2 事件的独立性

(1)A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

(2)A，B，C 两两独立

$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B);\ P(BC)=P(B)P(C);$

$P(AC)=P(A)P(C);$

(3)A，B，C 相互独立

$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B);\qquad P(BC)=P(B)P(C);$

$P(AC)=P(A)P(C);\qquad P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$

3 独立重复试验：将某试验独立重复 n 次，若每次实验中事件 A 发生的概率为 p，则 n 次试验中 A 发生 k 次的概率为：$P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}.$

4 重要公式与结论

(1)$P(\bar{A})=1-P(A)$

(2)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

(3)$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

(4)$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB),P(A)=P(AB)+P(A\bar{B}),$

$P(A\cup B)=P(A)+P(\bar{A}B)=P(AB)+P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)$

(5)条件概率 $P(\cdot|B)$ 满足概率的所有性质，

	例如：. $P(\bar{A}_1 \mid B)=1-P(A_1 \mid B)$ $P(A_1 \cup A_2 \mid B)=P(A_1 \mid B)+P(A_2 \mid B)-P(A_1A_2 \mid B)$ $P(A_1A_2 \mid B)=P(A_1 \mid B)P(A_2 \mid A_1B)$ (6)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i)$, $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))$ (7)互斥、互逆与独立性之间的关系： A 与 B 互逆$\Rightarrow$A 与 B 互斥，但反之不成立，A 与 B 互斥（或互逆）且均非零概率事件$\Rightarrow$A 与 B 不独立. (8)若 $A_1,A_2,\cdots,A_m,B_1,B_2,\cdots,B_n$ 相互独立，则 $f(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 与 $g(B_1,B_2,\cdots,B_n)$ 也相互独立，其中 $f(\square),g(\square)$ 分别表示对相应事件做任意事件运算后所得的事件，另外，概率为 1（或 0）的事件与任何事件相互独立.

(二) 随机变量及其概率分布

考试内容	对应公式、概念、定理
随机变量，随机变量的分部函数的概念及其性质	1 随机变量及概率分布：取值带有随机性的变量，严格地说是定义在样本空间上，取值于实数的函数称为随机变量，概率分布通常指分布函数或分布律 2 分布函数的概念与性质 定义：$F(x)=P(X \le x),-\infty<x<+\infty$ 性质：(1) $0 \le F(x) \le 1$　　(2) $F(x)$ 单调不减 (3)右连续 $F(x+0)=F(x)$　　(4) $F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$
离散型随机变量的概率分布，连续型随机变量的概率	1 离散型随机变量的概率分布 $P(X=x_i)=p_i,i=1,2,\cdots,n,\cdots$　　$p_i \ge 0,\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$ **2** 连续型随机变量的概率密度 概率密度 $f(x)$;非负可积，且

<table>
<tr><td>密度性质</td><td>(1) $f(x)\ge 0,$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

(3) x为$f(x)$的连续点，则$f(x)=F'(x)$分布函数$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$</td></tr>
<tr><td>常见随机变量的概率分布，随机变量函数的概率分布</td><td>1 常见分布
(1) 0-1 分布： $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1$
(2) 二项分布 $B(n,p)$：
$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n$
(3) Poisson 分布 $p(\lambda)$：
$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\lambda>0,k=0,1,2\cdots$
(4) 均匀分布 U（a，b）： $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a},a<x<b\\ 0,其他\end{cases}$
(5) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$：
$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\sigma>0,-\infty<x<+\infty$
(6)指数分布 $E(\lambda)$：$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},x>0,\lambda>0\\ 0,其他\end{cases}$
(7)几何分布 $G(p):P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,0<p<1,k=1,2,\cdots.$
(8)超几何分布
$H(N,M,n):P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ k=0,1,\cdots,\min(n,M)$
2 随机变量函数的概率分布
(1)离散型： $P(X=x_1)=p_i,Y=g(X)$ 则
$P(Y=y_j)=\sum_{g(x_i)=y_i} P(X=x_i)$
(2)连续型： $X\sim f_X(x),Y=g(x)$ 则</td></tr>
</table>

	$F_y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\int\limits_{g(x)\le y} f_x(x)dx$， $f_Y(y)=F'_Y(y)$ **3 重要公式与结论** $(1) X\sim N(0,1)\Rightarrow \varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\Phi(0)=\frac{1}{2}$, $\Phi(-a)=P(X\le -a)=1-\Phi(a)$ $(2) X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$且$P(X\le a)=\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$ $(3) X\sim E(\lambda)\Rightarrow P(X>s+t\mid X>s)=P(X>t)$ $(4) X\sim G(p)\Rightarrow P(X=m+k\mid X>m)=P(X=k)$ (5)离散型随机变量的分布函数为阶梯间断函数；连续型随机变量的分布函数为连续函数，但不一定为处处可导函数. (6)存在既非离散也非连续型随机变量.

(三) 多维随机变量及其分布

考试内容	对应公式、概念、定理
多维随机变量及其分布，二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布	1 二维随机变量及其联合分布 由两个随机变量构成的随机向量（X，Y）， 联合分布为 $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$ 2 二维离散型随机变量的联合概率分布、边缘分布、条件分布(1)联合概率分布律 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij};i,j=1,2,\cdots$ (2) 边缘分布律 $p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},i=1,2,\cdots$ $p_{\cdot j}=\sum_{i}^{\infty}p_{ij},j=1,2,\cdots$ (3) 条件分布律

	$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ $P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$
二维连续性随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件密度	1 联合概率密度 $f(x,y)$: (1) $f(x,y)\ge 0$ (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$ 2 分布函数：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$ 3 边缘概率密度： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$　　$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$ 4 条件概率密度：$f_{X\|Y}(x\|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$　　$f_{Y\|X}(y\|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$
随机变量的独立性和不相关性，常用二维随机变量的分布	1 常见二维随机变量的联合分布 (1)二维均匀分布：$(x,y)\sim U(D)$，$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(D)},(x,y)\in D\\ 0,其他\end{cases}$ (2)二维正态分布：（X，Y）~ N（μ_1，μ_2，σ_1^2，σ_2^2，ρ） $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$ $\cdot\exp\left\{\dfrac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\dfrac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\dfrac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\dfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$ 2 随机变量的独立性和相关性 X 和 Y 的相互独立 $\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$， $\Leftrightarrow p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$(离散型）$\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$(连续型） X 和 Y 的相关性：相关系数 $\rho_{XY}=0$ 时，称 X 和 Y 不相关，

	否则称 X 和 Y 相关
两个及两个以上随机变量简单函数的分布	1 两个随机变量简单函数的概率分布 (1)离散型： $P(X=x_i,Y=y_i)=p_{ij},Z=g(X,Y)$则 $P(Z=z_k)=P\{g(X,Y)=z_k\}=\sum\limits_{g(x_i,y_i)=z_k}P(X=x_i,Y=y_j)$ (2)连续型： $(X,Y)\sim f(x,y),Z=g(X,Y)$则 $F_z(z)=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint\limits_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy$， $f_z(z)=F'_z(z)$ **2 重要公式与结论** (1) 边缘密度公式： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,\qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx.$ (2) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ (3)若（X，Y）服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 则有 ① $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2).$ ②X 与 Y 相互独立$\Leftrightarrow\rho=0$，即 X 与 Y 不相关. ③ $C_1X+C_2Y\sim N(C_1\mu_1+C_2\mu_2,C_1^2\sigma_1^2+C_2^2\sigma_2^2+2C_1C_2\sigma_1\sigma_2\rho).$ ④X 关于 Y=y 的条件分布为： $N(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2)).$ ⑤Y 关于 X=x 的条件分布为： $N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)).$ (4)若 X 与 Y 独立，且分别服从 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_1,\sigma_2^2)$, 则 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$, $C_1X+C_2Y\sim N(C_1\mu_1+C_2\mu_2,C_1^2\sigma_1^2+C_2^2\sigma_2^2).$

	(5)若 X 与 Y 相互独立， $f(x)和g(x)$ 为连续函数， 则 $f(X)与g(Y)$ 也相互独立.

(四) 随机变量的数字特征

考试内容	对应概念、定义、定理、公式
随机变量的数学期望（均值）、方差和标准差及其性质	1 数学期望 离散型： $P\{X=x_i\}=p_i,E(X)=\sum_i x_i p_i$ ； 连续型： $X\sim f(x),E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 性质： (1) $E(C)=C,E[E(X)]=E(X)$ (2) $E(C_1X+C_2Y)=C_1E(X)+C_2E(Y)$ (3)若 X 和 Y 独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$ (4) $[E(XY)]^2\le E(X^2)E(Y^2)$ 2 方差： $D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2$ 3 标准差： $\sqrt{D(X)}$ ， 4 离散型： $D(X)=\sum_i[x_i-E(X)]^2 p_i$ 5 连续型： $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$ 性质： (1) $D(C)=0,D[E(X)]=0,D[D(X)]=0$ (2)X 与 Y 相互独立，则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$ (3) $D(C_1X+C_2)=C_1^2D(X)$ (4)一般有

	$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$ (5) $D(X)<E(X-C)^2, C\neq E(X)$ (6) $D(X)=0\Leftrightarrow P\{X=C\}=1$
随机变量函数的数学期望，矩、协方差，相关系数的数字特征	1 随机变量函数的数学期望 (1)对于函数 $Y=g(x)$ X 为离散型： $P\{X=x_i\}=p_i, E(Y)=\sum_i g(x_i)p_i$ ； X 为连续型： $X\sim f(x), E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ (2) $Z=g(X,Y)$; $(X,Y)\sim P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$; $E(Z)=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$ $(X,Y)\sim f(x,y)$; $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$ 2 协方差 $Cov(X,Y)=E\left[(X-E(X)(Y-E(Y))\right]$ 3 相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$,k 阶原点矩 $E(X^k)$; k 阶中心矩 $E\left\{[X-E(X)]^k\right\}$ 性质： (1) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$ (2) $Cov(aX,bY)=abCov(Y,X)$ (3) $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$ (4) $\lvert\rho(X,Y)\rvert\leq 1$ (5) $\rho(X,Y)=1\Leftrightarrow P(Y=aX+b)=1$, 其中 $a>0$ $\rho(X,Y)=-1\Leftrightarrow P(Y=aX+b)=1$, 其中 $a<0$ **4 重要公式与结论**

	（1） $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$ （2） $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ （3） $\lvert\rho(X,Y)\rvert\le 1,$ 且 $\rho(X,Y)=1\Leftrightarrow P(Y=aX+b)=1,$ 其中$a>0$ $\rho(X,Y)=-1\Leftrightarrow P(Y=aX+b)=1,$ 其中$a<0$ （4）下面 5 个条件互为充要条件： $\rho(X,Y)=0$ $\Leftrightarrow Cov(X,Y)=0$ $\Leftrightarrow E(X,Y)=E(X)E(Y)$ $\Leftrightarrow D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ $\Leftrightarrow D(X-Y)=D(X)+D(Y)$ 注：X 与 Y 独立为上述 5 个条件中任何一个成立的充分条件，但非必要条件.

(五) 大数定律和中心极限定理

考试内容	对应概念、定理、重要公式
切比雪夫（Chebyshev）不等式，切比雪夫大数定律	1 切比雪夫不等式：$P\{\lvert X-E(X)\rvert\ge\varepsilon\}\le\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 或 $P\{\lvert X-E(X)\rvert<\varepsilon\}\ge 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 2 切比雪夫大数定律：设 $X_1,X_2\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，且 $E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2(i=1,2,\cdots),$ 则对于任意正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left\lvert\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu\right\rvert<\varepsilon\right\}=1$
伯努利大数定律，辛钦（Khinc	1 伯努利大数定律 设 $X_1,X_2\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，同 0-1 分布 $B(1,p)$，则对任意

hine）大数定律	正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right\| < \varepsilon\right\} = 1$ 2 辛钦大数定律 设 $X_1, X_2 \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立同分布， $EX_i = \mu, i = 1, 2,$ 则对于任 意正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right\| < \varepsilon\right\} = 1$
隶莫弗—拉普拉斯（De Movire-Laplace）定理，列维—林德伯格（Levy-Undbe）定理	1 棣莫弗---拉普斯定理 设 $\eta_n \sim B(n, p)$,（即 $X_1, X_2 \cdots, X_n,$ 相互独立且同服从 0-1 分布 $\eta_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ）则有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 2 列维---林德伯格定理 设 $X_1, X_2 \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立分布， $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 (\sigma \ne 0) i = 1, 2, \cdots,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

(六) 数理统计的基本概念

考试内容	对应公式、概念、定理
总体，个体，简单随机样本，统计量，样本	总体：研究对象的全体，它是一个随机变量，用 X 表示 个体：组成总体的每个基本元素 简单随机样本：来自总体 X 的 n 个相互独立且与总体同分布的随机变量 $X_1, X_2 \cdots, X_n,$ 称为容量为 n 的

均值，样本方差和样本矩	简单随机样本，简称样本 统计量：设 $X_1, X_2\cdots, X_n$，是来自总体 X 的一个样本，$g(X_1, X_2\cdots, X_n)$）是样本的连续函数，且 $g(\square)$ 中不含任何未知参数，则称 $g(X_1, X_2\cdots, X_n)$ 为统计量 样本均值：$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 样本矩：样本 k 阶原点矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k, k=1,2,\cdots$ 样本 k 阶中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k, k=1,2,\cdots$
χ^2 分布，t 分布，F 分布，分位数	χ^2 分布：$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\sim\chi^2(n)$，其中 $X_1, X_2\cdots, X_n$，相互独立，且同服从 $N(0,1)$ t 分布：$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$ 其中 $X\sim N(0,1), Y\sim\chi^2(n)$, 且 X，Y 相互独立 F 分布：$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$，其中 $X\sim\chi^2(n_1), Y\sim\chi^2(n_2)$, 且 X，Y 相互独立 分位数：若 $P(X\le x_\alpha)=\alpha$, 则称 x_α 为 X 的 α 分位数
正态总体的常用样本分布	1 设 $X_1, X_2\cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本， $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$, 则 (1) $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$或$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ (2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$ (3) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$

	(4) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ **重要公式与结论** （1）对于 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$，有 $E(\chi^2(n))=n, D(\chi^2(n))=2n;$ （2）对于 $T \sim t(n)$，有 $E(T)=0, D(T)=\dfrac{n}{n-2}(n>2)$； （3）对于 $F \sim F(m,n)$，有 $\dfrac{1}{F} \sim F(n,m), F_{a/2}(m,n)=\dfrac{1}{F_{1-a/2}(n,m)};$ （4）对于任意总体 X，有 $E(\bar{X})=E(X), E(S^2)=D(X), D(\bar{X})=\dfrac{D(X)}{n}$

(七) 参数估计

考试内容	对应公式、概念、定理
点估计的概念，估计量与估计值，矩估计法，最大似然估计	1 $\hat{\theta}$ 为 θ 的矩估计，g（x）为连续函数，则 g（$\hat{\theta}$）为 g（θ）的矩估计. 2 $\hat{\theta}$ 为 θ 的极大似数估计，g（x）为单调函数，则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的极大似然估计 3 $E(\bar{X})=E(X), E(S^2)=D(X),$ 即 $\bar{X}$， S^2 分别为总体 $E(X)$, $D(X)$ 的无偏估计量. 4 由大数定律易知 $\bar{X}$， S^2 也分别是 $E(X)$, $D(X)$ 的一致估量. 5 若 $E(\hat{\theta})=\theta, D(\hat{\theta}) \to 0(n \to \infty)$ 则 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计.

<table>
<tr><td>法</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>估计量的评选标准区间估计的概念</td><td colspan="4">1 估计量的选取标准：无偏性、有效性、相合性

2 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 为 θ 的置信度是 $1-\alpha$ 的置信区间，g（x）为单调增加（或单调减少）函数，则 $(g(\hat{\theta}_1),g(\hat{\theta}_2)$或$g(\hat{\theta}_2)，g(\hat{\theta}_1))$ 为 g(θ) 的置信度

是 $1-\alpha$ 的置信区间</td></tr>
<tr><td rowspan="6">单个正态总体的均值和方差的区间估计，两个正态总体的均值差和方差比的区间估计</td><td colspan="4">正态总体均值与方差的置信区间</td></tr>
<tr><td colspan="2">待估参数</td><td>抽样分布</td><td>双侧置信区间</td></tr>
<tr><td rowspan="2">μ</td><td>σ^2 已知</td><td>$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$</td><td>$(\overline{X}-\mu_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\mu_{\frac{\alpha}{2}})$
$P\{\lvert\mu\rvert\geq\mu_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$</td></tr>
<tr><td>σ^2 未知</td><td>$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$</td><td>$(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}})$
$P\{\lvert T\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">σ^2</td><td>μ 已知</td><td>$W'=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$
$\sim\chi^2(n)$</td><td>$(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)})$
$P\{W'\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\}=$
$P\{W'\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\}=\dfrac{\alpha}{2}$</td></tr>
<tr><td>μ 未知</td><td>$W=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$</td><td>$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$</td></tr>
</table>

	$\mu_1-\mu_2$	${\sigma_1}^2,\sigma_2^2$ 已知	$U=\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ $\sim N(0,1)$	$\left((\overline{X}_1-\overline{X}_2)-\mu_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}},\right.$ $\left.(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+\mu_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$ $P\{\lvert U\rvert\ge\mu_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$
		已知 ${\sigma_1}^2=\sigma_2^2$ $=\sigma^2$，但 σ^2 未知	$T=\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ $S^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\left((\overline{X}_1-\overline{X}_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}},\right.$ $\left.(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$ $P\{\lvert T\rvert\ge t_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$
		$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$F=\dfrac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_2^2}}{\dfrac{S_1^2}{\sigma_2^2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\cdot\dfrac{S_1^2}{S_2^2},\right.$ $\left.F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)\cdot\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\right)$ $P\{F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\}=\dfrac{\alpha}{2}$ $P\{\dfrac{1}{F}\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)\}=\dfrac{\alpha}{2}$

(八) 假设检验

考试内容	对应公式、概念、定理
显著性检验，假设	1 假设检验的一般步骤 (1)确定所要检验的基本假设 H_0； (2)选择检验的统计量，并要求知道其在一定条件下的分布；

检验的两类错误	(3)对确定的显著性水平 α，查相应的概率分布，得临界值，从而确定否定域； (4)由样本计算统计量，并判断其是否落入否定域，从而对假设 H_0 作出拒绝还是接受的判断 2 假设检验的两类错误 统计推断是由样本推断总体，所作的结论不能保证绝对不犯错误，而只能以较大概率来保证其可靠性. 第一类错误是否定了真实的假设，即假设本来成立，但被错误地否认了，成为“弃真”，检验水平 α 就是犯第一类错误的概率的最大允许值. 第二类错误是把本来不成立的假设错误地接受了，称为“存伪”.犯这类错误的大小一般用 β 表示，它的大小要视具体情况而定.			
单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验		原假设 H_0	H_0 下的检验统计量及分布	H_0 的拒绝域
	一个正态总体	$\mu=\mu_0$ (σ^2已知)	$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\lvert u\rvert=\left\lvert\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\rvert \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
		$\mu=\mu_0$ (σ^2未知)	$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\lvert t\rvert=\left\lvert\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right\rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
		$\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ 已知)	$W=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(n)$	$w=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ 或 $w\leq\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$
		$\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ 未知)	$W=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$	$w=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 或 $w\leq\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$

	两个正态总体	$\mu_1-\mu_2=\delta$ (σ_1^2,σ_2^2 已知）	$U=\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\lvert u\rvert=\left\lvert\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right\rvert\ge u_{\frac{\alpha}{2}}$
		$\mu_1-\mu_2=\delta$ (σ_1^2,σ_2^2未知，但$\sigma_1^2=\sigma_2^2$)	$T=\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-\delta}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ $S_W^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\lvert t\rvert=\left\lvert\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-\delta}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right\rvert\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
		$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ （μ_1，μ_2 未知）	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$f=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $f\le F_{\frac{\alpha}{2}}^{-1}(n_2-1,n_1-1)$

四、初等数学公式

初等代数

1．乘法公式与因式分解

$(1)(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(2)(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$(3)a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$(4)(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$(5)a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

$(6)a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

2．比例 $(\frac{a}{b}=\frac{c}{d})$

(1)合比定理 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

(2)分比定理 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

(3)合分比定理 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

(4)若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$，则令 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=t$.于是 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$

(5)若y与x成正比，则$y=kx$（k为比例系数）

(6)若y与x成反比，则$y=\frac{k}{x}$（k为比例系数）

3．不等式

(1) 设$a>b>0,n>0$，则$a^n>b^n$

（2）设$a>b>0,n$为正整数，则$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

(3)设 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，则 $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

(4)非负数的算术平均值不小于其几何平均值，即

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab},$$

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc},$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3\cdots\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}$$

(5)绝对值不等式

1) $|a+b|\leq|a|+|b|$

2) $|a-b|\leq|a|+|b|$

3) $|a-b|\geq|a|-|b|$

4) $-|a|\leq a\leq|a|$

4．二次方程 $ax^2+bx+c=0$

(1)根：$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(2)韦达定理：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

(3)判别式$\Delta=b^2-4ac\begin{cases}>0,\text{方程有两不等实根}\\=0,\text{方程有两相等实根}\\<0,\text{方程有两共轭虚根}\end{cases}$

5．一元三次方程的韦达定理：

若$x^3+px^2+qx+r=0$的三个根分别为x_1,x_2,x_3，则

$$x_1+x_2+x_3=-p$$

$$x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1=q$$

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3=-r$$

6. 指数

(1)$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

(2)$a^m\div a^n=a^{m-n}$

(3)$(a^m)^n=a^{mn}$

(4)$(ab)^n=a^nb^n$

$$(5)(\frac{a}{b})^m=\frac{a^m}{b^m}$$

$$(6)a^{-m}=\frac{1}{a^m}$$

7．对数 $\log_a N,(a>0,a\neq 1,N>0)$

(1)对数恒等式$N=a^{\log_a N}$,更常用$N=e^{\ln N}$

$$(2)\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$$

$$(3)\log_a(\frac{M}{N})=\log_a M-\log_a N$$

$$(4)\log_a(M^n)=n\log_a M$$

$$(5)\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$$

(6)换底公式$\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

$$(7)\log_a 1=0$$

$$(8)\log_a a=1$$

8．数列

（1）等差数列

设 a_1----首项， a_n----通项

d----公差， S_n----前 n 项和

$$1)a_n=a_1+(n-1)d$$

$$2)S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

$$3)\text{设}a,b,c\text{成等差数列,则等差中项}b=\frac{1}{2}(a+c)$$

（2）等比数列

设 a_1----首项， q----公比， a_n ----通项， 则

$$1)\text{通项}a_n=a_1q^{n-1}$$

$$2)\text{前}n\text{项和}S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$$

（3）常用的几种数列的和

$$1)1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$2)1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$3)1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=[\frac{1}{2}n(n+1)]^2$$

$$4)1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$4)1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

9．排列、组合与二项式定理

（1）排列

$$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]$$

（2）全排列

$$P_n^n=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$$

（3）组合

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合的性质：

$1)C_n^m=C_n^{n-m}$　　　　$2)C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$

（4）二项式定理

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n$$

（一）　平面几何

1、 图形面积

（1）　任意三角形

$$S=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\text{其中}s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

平行四边形

$$S=bh=ab\sin\varphi$$

（2）　梯形 S=中位线$\times$**高**

（3）　扇形 $S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r^2\theta$

2、 旋转体

（1）　圆柱

设 R----底圆半径，H----拄高，则

1）侧面积　$S_{侧}=2\pi RH$ ，

2）全面积　$S_{全}=2\pi R(H+R)$

3）体积　$V=\pi R^2H$

（2）圆锥 （$l=\sqrt{R^2+H^2}$母线）

1）侧面积　$S_{侧}=\pi Rl$

2）全面积　$S_{全}=\pi R(l+R)$

3）体积　$V=\frac{1}{3}\pi R^2H$

（3）球

设 R----半径， d----直径，则

1）全面积 $S_{全}=4\pi R^2$

2）体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

（4） 球缺（球被一个平面所截而得到的部分）

1） 面积 $S=2\pi Rh$(不包括底面)

2） 体积 $V=\pi h^2(R-\dfrac{h}{3})$

3．棱拄及棱锥

设 S----底面积，H----高：

（1）棱拄体积 $V=SH$

（2）棱锥体积 $V=\dfrac{1}{3}SH$

（3）正棱锥侧面积 $A=\dfrac{1}{2}\times$母线$\times$底周长

三、平面三角

1．三角函数间的关系

（1） $\sin\alpha\csc\alpha=1$

（2） $\cos\alpha\sec\alpha=1$

（3） $\tan\alpha\cot\alpha=1$

（4） $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

（5） $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

（6） $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

（7） $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

（8） $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

2 倍角三角函数

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

(3) $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(4) $\cot 2\alpha=\dfrac{1-\cot^2\alpha}{2\cot\alpha}$

$$(5)\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\qquad (6)\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

3．三角函数的和差化积与积化和差公式

$$(1)\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(2)\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(3)\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(4)\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(5)\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$(6)\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

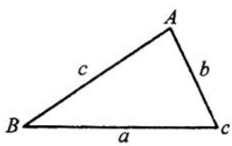
$$(7)\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$(8)\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

4．边角关系

（1）正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，R 为外接圆半径



（2）　余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

5．反三角函数

恒等式

$$(1)\arcsin x\pm\arcsin y=\arcsin(x\sqrt{1+y^2}\pm y\sqrt{1-x^2})$$

$$(2)\arccos x\pm\arccos y=\arccos(xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})$$

$$(3)\arctan x \pm \arctan y = \arctan(\frac{x \pm y}{1 \mp xy})$$

$$(4)\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$(5)\arctan x + \operatorname{arc}\cot x = \frac{\pi}{2}$$