

# 阻尼振动与受迫振动实验

工物 42 李中翔 2024011032

## 摘要

本实验探究了上学期所学的阻尼振动、受迫振动稳态下的幅频和相频特性以及受迫振动中的瞬态过程。本实验中通过最小二乘法对实验测量所得的振幅对数和时间关系进行直线拟合得出不同阻尼下的阻尼系数和不确定度，并在此基础上结合固有频率计算出品质因数。之后通过观察稳态下受迫振动的幅频、相频曲线验证共振特性，并通过所得的数据再次计算品质因数，所得结果和第一次计算结果对比发现在误差范围之内。最后对受迫振动的瞬态过程进行实验研究和电机平均功率的理论推导，实验所得频率变化规律与理论值进行对比发现符合理论计算所得规律。

## 1. 实验仪器

波尔共振仪、刻度尺（用以调整永久磁铁与固定杆顶部的距离）、永久磁铁和手机（用以记录各时刻摆轮的周期与振幅）。

## 2. 实验原理及实验步骤

### A) 观测有粘滞阻尼时的阻尼振动规律

我们知道，当摆轮在运动时会收到弹簧产生的恢复力矩  $M = -k\theta$ ，与此同时由于阻尼的存在，摆轮还会收到一个与速度成正比、方向相反的阻尼力矩  $M_r = -\gamma\dot{\theta}$ ，我们在忽略弹簧等效转动惯量的基础上设摆轮的转动惯量为  $J$ ，从而我们可以写出摆轮的运动方程：

$$J\ddot{\theta} = -k\theta - \gamma\dot{\theta} \quad (1)$$

我们引入阻尼系数  $\beta = \frac{\gamma}{2J}$  和固有频率  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{J}}$ ，可以将 (1) 整理为：

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (2)$$

进而我们得到在欠阻尼条件 ( $\beta < \omega_0$ ) 下，即本实验研究条件下的解为：

$$\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \varphi_0) \quad (3)$$

其中  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  为欠阻尼振动的角频率。

在实验中确保“电机及显示”按钮处于关闭状态后打开电源开关，将有机玻璃转盘上 0 位标志线指示 0 度，检查摇杆和摆轮长缺口处于竖直状态（无激励状态），检查光电门 1 处于摆轮长缺口处，然后使摆轮偏离平衡位置  $150^\circ \sim 180^\circ$  使之自由摆动，分别测量无磁铁、较弱磁阻尼和较强磁阻尼（磁阻尼的强度通过永久磁铁与固定杆顶部的距离  $s$  决定，本实验中选取  $s$  为 20mm 作为较弱磁阻尼， $s$  最大为较强磁阻尼）三种条件下阻尼振动在不同时刻下的周期和振幅，并利用  $\ln \theta_n = \ln \theta_0 - \beta t_n$ （其中  $\theta_n$  为第  $n$  个周期下的振幅， $t_n$  是为第  $n$  个周期对应的时刻）对数据利用最小二乘法进行线性拟合得出不同条件下的阻尼系数  $\beta$  及其不确定度  $U_\beta$ 。此外，实验过程中应当注意最后一组数据振幅尽量不小于  $20^\circ$  以避免测量误差过大。

### B) 分析振动系统受迫振动的基本规律，观测幅频特性

当我们在 A) 中卷形弹簧的另一端引入一个角频率为  $\omega$ 、振幅为  $A_D$  的简谐信号激励，我们将激励源的初相位设为 0，则其轨迹为  $A_D \cos(\omega t)$ 。由于激励源存在，摆轮运动时弹簧的恢复力矩在原来基础上多出一部分  $\Delta M = kA_D \cos(\omega t)$ ，于是摆轮的运动方程变为：

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \omega_0^2 A_D \cos(\omega t) \quad (4)$$

该方程在欠阻尼的条件下有如下形式的解：

$$\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \varphi_0) + \theta_m \cos(\omega t - \varphi) \quad (5)$$

由于 (5) 中第一项会随着时间衰减，因此在  $t$  充分大时会有稳态解  $\theta = \theta_m \cos(\omega t - \varphi)$ ，其中

$$\theta_m = \frac{\omega_0^2 A_D}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \quad (6)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7)$$

实验时开启“电机及显示”，并通过调节“强迫力周期”旋钮改变电机运动角频率  $\omega$ ，分别测定较弱磁阻尼和较强磁阻尼条件下达到稳态时摆轮的周期、摆轮振幅与相位差，并利用上述数据绘制幅频和相频特性曲线。实验中应当保证每条曲线至少有 15 个数据点，测试周期范围在  $0.93T_0 \sim 1.07T_0$ ，并

包含 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 最大振幅处的数据点（用以计算品质因数）。

### C) 探究受迫振动的瞬态过程：振动系统在共振频率激励下从静止到稳态的过程，了解共振现象

我们在 B) 中已经得出  $\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \varphi_0) + \theta_m \cos(\omega t - \varphi)$ , 当我们调节  $\omega$  使得  $\omega = \omega_0$ , 同时由于  $\beta$  较小, 我们可以将 (5) 近似处理为  $\theta = (-\theta_m e^{-\beta t} + \theta_m) \cos(\omega_0 t - \varphi)$ , 从而我们可以测量达到稳态前各周期对应时刻的振幅, 然后并将其与理论值  $\vartheta = -\theta_m e^{-\beta t} + \theta_m$  进行比较。

实验时调节“强迫力周期”旋钮改变使得电机运动周期与摆轮固有频率一致, 然后关闭电机, 待静止后重新打开电机, 使得摆轮在电机作用下从静止开始运动, 记录各个周期对应时间和对应的振幅直至系统达到稳态, 然后将实验测得数据与理论计算值进行比较。

### 3. 数据处理

#### A) 观测有粘滞阻尼时的阻尼振动规律

A. 0 说明  $\beta$  的单位 (量纲) 是什么。

由  $\beta$  的定义式知其单位为  $s^{-1}$ , 量纲为  $T^{-1}$ 。

A. 1-A. 2 测量最小阻尼时 (取下永久磁铁) 的阻尼系数  $\beta$  和固有角频率  $\omega_0$ , 用最小阻尼时的阻尼系数  $\beta$  和振动周期  $T_d$  计算固有角频率  $\omega_0$ 。

我们根据表 1 数据利用 Excel 程序的 *linest* 函数对  $\ln \theta_i$  和  $t$  进行最小二乘法拟合 (拟合结果见图 1), 同时由于共有 19 个测量点, 我们再利用  $t_{17}=2.10982$  计算  $\beta$  的不确定度  $U_\beta$  可得:

$$\text{阻尼系数 } \beta = 0.00698 \text{ } s^{-1}$$

$$\text{标准偏差 } s_\beta = 0.00012$$

$$\text{不确定度 } U_\beta = s_\beta \times t_{17} = 0.00025 \text{ } s^{-1}$$

因此最小阻尼条件下的阻尼系数  $\beta = (0.00698 \pm 0.00025) \text{ } s^{-1}$ , 最小阻尼条件下的阻尼系数  $\beta$  的相对不确定度  $U_\beta/\beta = 3.5\%$  处于合理范围内。

我们对表格中  $T_d$  取平均值得  $\bar{T}_d = 1.56408 \text{ s}$ , 考虑到不确定度可得  $\bar{T}_d = (1.56408 \pm 0.002) \text{ s}$

$$\text{进而计算得 } \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\bar{T}_d}\right)^2 + \beta^2} = 4.01717 \text{ rad/s}.$$

表 1 阻尼振动振幅与时间的关系 (最小阻尼)

序号	振幅 $\theta_i$ (°)	周期 $T_d$ (s)	时间 $t$ (s)	$\ln \theta_i$
1	155	1.5612	1.5612	5.0434
11	144	1.5619	17.1767	4.9698
21	131	1.5625	32.7987	4.8752
31	119	1.5630	48.4262	4.7791
41	109	1.5633	64.0577	4.6913
51	99	1.5637	79.6927	4.5951
61	89	1.5640	95.3312	4.4886
71	80	1.5642	110.9722	4.3820
81	73	1.5644	126.6152	4.2905
91	65	1.5647	142.2607	4.1744
101	59	1.5646	157.9072	4.0775
111	52	1.5648	173.5542	3.9512
121	46	1.5650	189.2032	3.8286
131	41	1.5651	204.8537	3.7136
141	37	1.5650	220.5042	3.6109
151	33	1.5651	236.1547	3.4965
161	29	1.5650	251.8052	3.3673
171	25	1.5650	267.4552	3.2189
181	21	1.5651	283.1057	3.0445

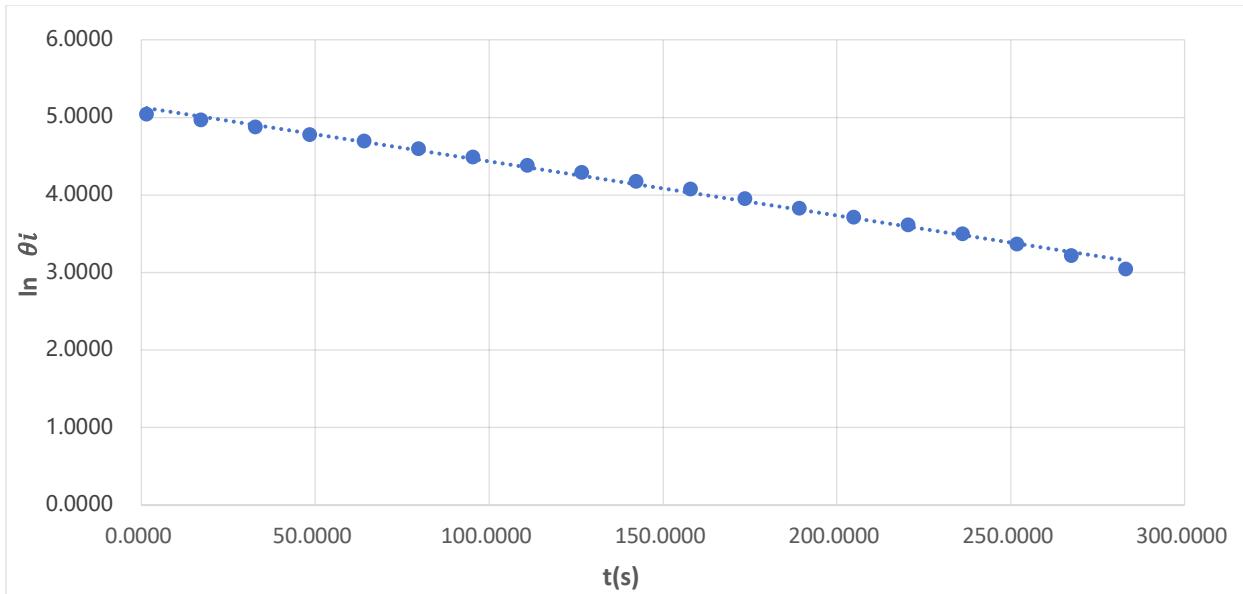


图 1  $\ln \theta_i$  随时间  $t$  的变化曲线 (最小阻尼)

A. 3 测量其他 2 种阻尼状态的振幅: 当磁铁距其固定杆顶部的距离  $s$  为 20 mm 时; 以及当距离  $s$  最大即阻尼最大时。测量后求出  $\beta \pm U_\beta$ 。

我们根据表 2 数据利用 Excel 程序的 *linest* 函数对  $\ln \theta_i$  和  $t$  进行最小二乘法拟合 (拟合结果见图 2), 同时由于共有 13 个测量点, 我们再利用  $t_{11}=2.20099$  计算  $\beta$  的不确定度  $U_\beta$  可得:

$$\text{阻尼系数 } \beta = 0.11432 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{标准偏差 } s_\beta = 0.00074$$

$$\text{不确定度 } U_\beta = s_\beta \times t_{11} = 0.00163 \text{ s}^{-1}$$

因此最小阻尼条件下的阻尼系数  $\beta = (0.11432 \pm 0.00163) \text{ s}^{-1}$  下的阻尼系数  $\beta$  的相对不确定度  $U_\beta/\beta = 1.4\%$  处于合理范围内。

最终结果里, 不确定度取 1~2 位有效数字, 并使最终结果的有效位数与不确定度的有效位数相同

中等阻尼

表 2 阻尼振动振幅与时间的关系 ( $s = 20 \text{ mm}$ )

序号	振幅 $\theta_i$ (°)	周期 $T_d$ (s)	时间 $t$ (s)	$\ln \theta_i$
1	168	1.5615	1.5615	5.1240
2	142	1.5632	3.1247	4.9558
3	119	1.5643	4.689	4.7791
4	101	1.5652	6.2542	4.6151
5	85	1.5685	7.8227	4.4427
6	71	1.5664	9.3891	4.2627
7	59	1.5669	10.956	4.0775
8	49	1.5674	12.5234	3.8918
9	41	1.568	14.0914	3.7136
10	34	1.5686	15.66	3.5264
11	29	1.5693	17.2293	3.3673
12	23	1.5701	18.7994	3.1355
13	20	1.5711	20.3705	2.9957

同一列数据的小数位数要对齐

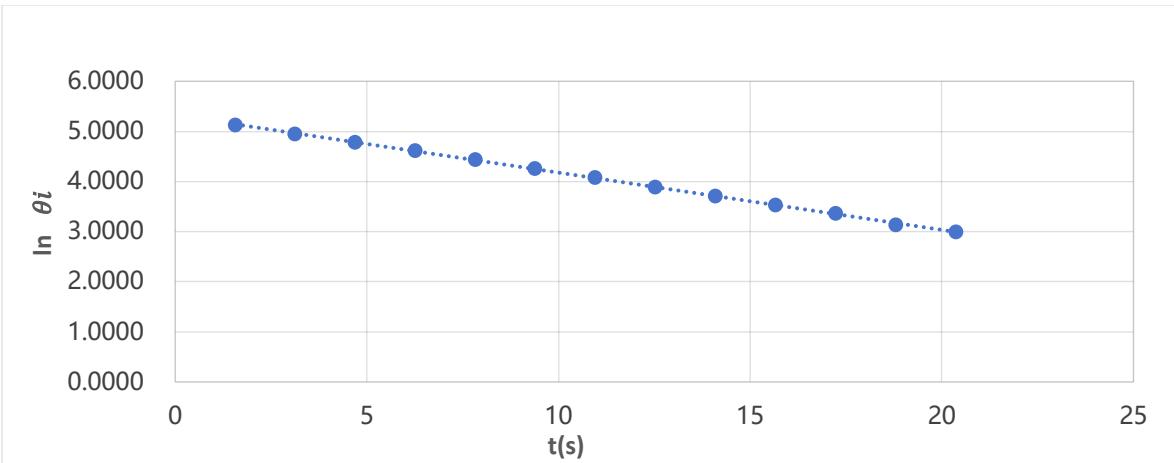


图 2  $\ln \theta_i$  随时间  $t$  的变化曲线 ( $s = 20 \text{ mm}$ )

我们根据表 3 数据利用Excel程序的`linest`函数对 $\ln \theta_i$ 和 $t$ 进行最小二乘法拟合（拟合结果见图 3），同时由于共有 10 个测量点，我们再利用 $t_8=2.30600$ 计算 $\beta$ 的不确定度 $U_\beta$ 可得：

$$\text{阻尼系数 } \beta = 0.15549 \text{ s}^{-1}$$

$$\pm \text{偏差 } s_\beta = 0.00128$$

$$\text{不确定度 } U_\beta = s_\beta \times t_8 = 0.00295 \text{ s}^{-1}$$

因此最小阻尼条件下的阻尼系数 $\beta = (0.15549 \pm 0.00295)\text{s}^{-1}$ ，最小阻尼条件下的阻尼系数 $\beta$ 的相对不确定度 $U_\beta/\beta=1.8\%$ 处于合理范围内。

表 3 阻尼振动振幅与时间的关系 ( $s=\text{max}$ )

序号	振幅 $\theta_i$ (°)	周期 $T_d$ (s)	时间 $t$ (s)	$\ln \theta_i$
1	175	1.5618	1.5618	5.16478597
2	137	1.5634	3.1252	4.91998093
3	107	1.5642	4.6894	4.67282883
4	83	1.5646	6.254	4.41884061
5	65	1.5648	7.8188	4.17438727
6	51	1.5649	9.3837	3.93182563
7	39	1.5646	10.9483	3.66356165
8	31	1.5638	12.5121	3.4339872
9	25	1.5631	14.0752	3.21887582
10	20	1.5624	15.6376	2.99573227

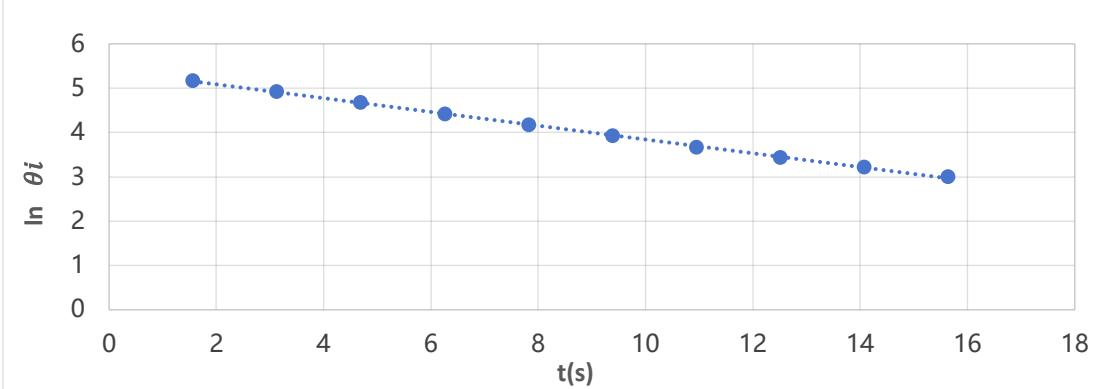


图 3  $\ln \theta_i$  随时间  $t$  的变化曲线 ( $s=\text{max}$ )

**A. 4** 利用 A. 1 和 A. 3 题拟合得到的不同阻尼状态下的  $\beta$ , 由  $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$  式计算相应的品质因数  $Q$ 。

A. 1 中得到  $\omega_0 = 4.01717 \text{ rad/s}$ , 分别带入三种情况下的  $\beta$ , 即可得对应的品质因数  $Q$ 。

在最小阻尼条件下阻尼系数  $\beta = 0.00698 \text{ s}^{-1}$ , 从而  $Q = 287.78424$

在  $s = 20 \text{ mm}$  条件下阻尼系数  $\beta = 0.11432 \text{ s}^{-1}$ , 从而  $Q = 17.56935$

在  $s = \max$  条件下阻尼系数  $\beta = 0.15549 \text{ s}^{-1}$ , 从而  $Q = 12.91745$

### B) 分析振动系统受迫振动的基本规律, 观测幅频特性

**B. 1** 由  $\theta_m = \frac{\omega_0^2 A_D}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}$  式可知, 当振幅  $\theta_m$  达到最大, 振动系统发生共振。此时, 系统的频率

$\omega$  为共振频率。写出共振频率、及其振幅最大值的表达式 (与品质因数  $Q$  有关吗?) 和相位差  $\varphi$ 。推导证明在弱阻尼状态下, 共振频率近似等于振动系统的固有频率  $\omega_0$ 。

当  $\theta_m$  取得最大值时,  $\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}$  须取最小值, 利用二次函数最值的知识可知此时系统频率 (亦即共振频率)  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ , 带入可得最大振幅  $\theta_m = \frac{\omega_0^2 A_D}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ , 由于分式上下都是  $\beta$ 、 $\omega_0$  的

二次式, 因而同除以  $\omega_0^2$ , 会得到关于  $\frac{\beta}{\omega_0}$  的函数, 因此与品质因数  $Q$  有关。相应地得到相位差  $\varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta}$ 。在弱阻尼状态下  $\beta \ll \omega_0$ , 因此  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$  中  $2\beta^2$  可以忽略, 因此  $\omega \approx \omega_0$ 。

**B. 2** 说明如何判断受迫振动达到了稳态?

系统处于稳态时将做一个单一的简谐振动, 周期和振幅都将稳定不变, 因此当系统在较长时间 (如五个周期) 周期和振幅不再发生变化时可以认为系统达到稳态。

**B. 3-B. 4** 测试幅频特性和相频特性, 将不同阻尼系数下的幅频特性曲线画在一副图中, 相频特性曲线画在一副图中。

$s = 20 \text{ mm}$  情形的振幅、相差随频率变化数据见表 4。

表 4 振幅、相差随频率变化情况 ( $s = 20 \text{ mm}$ )

序号	周期 $T$ (s)	振幅 $\theta_i$ (°)	相差 (°)	$\omega/\omega_0$
1	1.5071	47	144	1.0378
2	1.5199	56	136	1.0291
3	1.5368	67	123	1.0178
4	1.5454	72	114	1.0121
5	1.5522	76	106	1.0077
6	1.5563	78	102	1.0050
7	1.5593	79	98	1.0031
8	1.5628	79	94	1.0008
9	1.5663	79	90	0.9986
10	1.5686	79	86	0.9971
11	1.5732	79	82	0.9942
12	1.5761	78	78	0.9924
13	1.5896	71	63	0.9839
14	1.6149	56	45	0.9685
15	1.6449	42	33	0.9509

$s = \max$  情形的振幅、相差随频率变化数据见表 5。

表 5 振幅、相差随频率变化情况 ( $s = \text{max}$ )

序号	周期 $T$ (s)	振幅 $\theta_i$ (°)	相差 (°)	$\omega/\omega_0$
1	1.4941	35	141	1.0468
2	1.5107	41	133	1.0353
3	1.5259	46	123	1.0250
4	1.5317	48	119	1.0211
5	1.5491	53	106	1.0097
6	1.5541	54	102	1.0064
7	1.5585	55	98	1.0036
8	1.5621	56	94	1.0013
9	1.5671	56	90	0.9981
10	1.5722	56	86	0.9948
11	1.5758	55	82	0.9926
12	1.5816	54	78	0.9889
13	1.5982	51	66	0.9787
14	1.6411	40	44	0.9531
15	1.6453	38	42	0.9506

不同阻尼情况下幅频特性曲线和相频特性曲线分别见图 4、图 5。

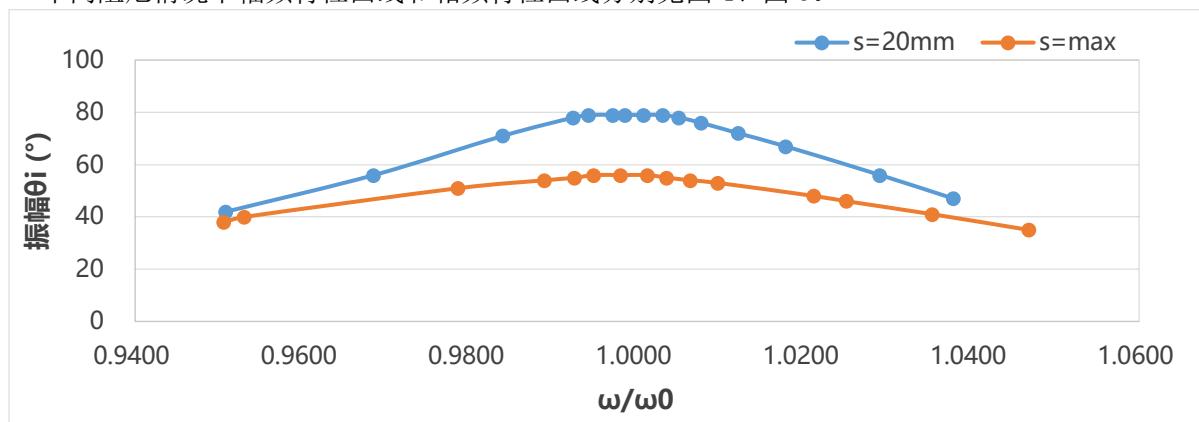


图 4 不同阻尼情况下幅频特性曲线

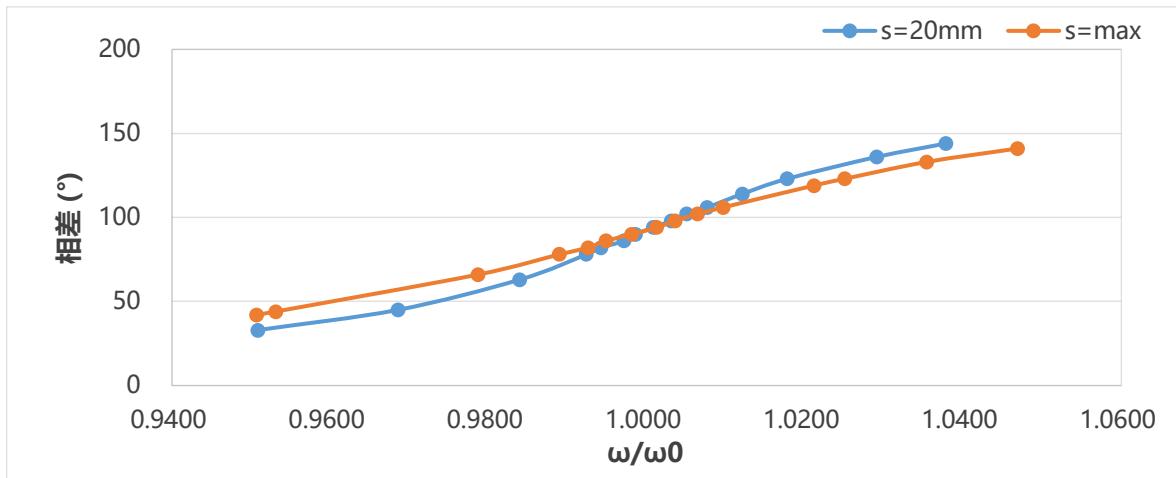


图 5 不同阻尼情况下相频特性曲线

**B. 5**从幅频特性曲线中读出不同阻尼系数下的 $\omega_0$ ,  $\omega_{\pm}$ , 计算Q。将结果与A. 4题的结果相比较。

由幅频特性曲线可知 $s = 20 \text{ mm}$ 时 $\omega_- = 0.9685\omega_0$ ,  $\omega_+ = 1.0291\omega_0$ , 带入 $Q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} = 16.5187$  ,而在 A. 4 中我们算得 $Q = 17.56935$  , 二者的相对误差为 6%, 两种计算方法所得Q相近。

由幅频特性曲线可知 $s = \max$ 时 $\omega_- = 0.9531\omega_0$ ,  $\omega_+ = 1.0353\omega_0$ , 带入 $Q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} = 12.1556$  ,而在 A. 4 中我们算得 $Q = 12.91745$  , 二者的相对误差为 6%, 两种计算方法所得Q相近。

**C) 探究受迫振动的瞬态过程: 振动系统在共振频率激励下从静止到稳态的过程, 了解共振现象**

**C. 1** 阻尼状态为 A. 3 部分测试的磁铁距其固定杆顶部的距离 $s$ 为

20 mm时的阻尼。强迫力周期设置为与摆轮—

弹簧振动系统的固有角频率相同。关闭电机, 使摆轮尽可能静止。

打开电机开关, 观察摆轮从静止到稳态的瞬态过程。其幅度是逐渐增大还是直接达到稳态? 试解释瞬态过程为什么是这样的。

幅度是逐渐增大的, 因为摆轮在电机的作用之下以稳定的振幅和周期振动需要一定时间, 当阻尼耗散功率渐变至于电机输出功率一致时才可以达到稳态, 所以系统无法实现突变至稳态。

**C. 1** 关闭电机, 检查摇杆和(静止)摆轮的长缺口是否竖直, 亦即确保初始时刻: 摆轮位移和速度都为 0。再打开电机开关, 重新使摆轮从静止状态开始振动, 测试并记录受迫振动瞬态过程的振幅。每个周期测量一次振幅值 $\theta_j$ , 直到达到稳态。画出摆轮振幅随时间变化的曲线。

瞬态过程中摆轮振幅随时间变化数据见表 6。

**表 6 瞬态过程中摆轮振幅随时间变化情况**

序号	振幅测量值 $\theta_i(\text{°})$	时间 $t(\text{s})$
0	13	1.5845
1	24	3.155
2	33	4.7226
3	41	6.2891
4	48	7.855
5	54	9.4206
6	59	10.9859
7	63	12.551
8	66	14.1161
9	69	15.6812
10	72	17.2463
11	74	18.8114
12	76	20.3765
13	77	21.9416
14	79	23.5067
15	80	25.0718
16	81	26.6369
17	82	28.202
18	82	29.7671
19	83	31.3322
20	83	32.8973
21	84	34.4624
22	84	36.0275
23	84	37.5926
24	84	39.1577

根据表 6 可以画出摆轮振幅随时间变化的曲线。

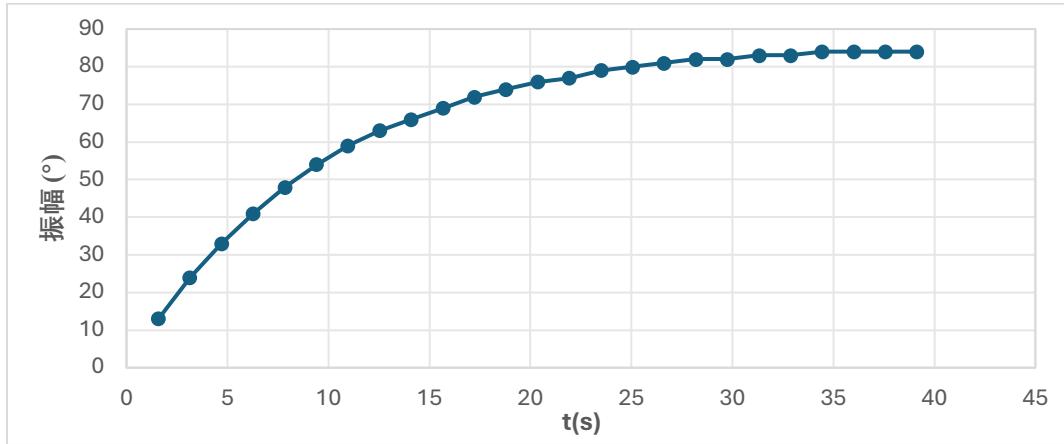


图 6 摆轮振幅随时间变化的曲线

C.1 根据初始条件,由(5)式推导出受迫振动瞬态过程中振幅随时间的变化关系式,计算受迫振动瞬态过程中振幅的理论值 $\vartheta$ (稳态解的振幅 $\theta_m$ : 使用测量结果),并与测试数据画在一副图中比较。

已知 $\omega = \omega_0$ ,同时由于 $\beta$ 较小,我们可以将(5)近似处理为 $\theta = (-\theta_m e^{-\beta t} + \theta_m) \cos(\omega_0 t - \varphi)$ ,于是我们利用表 6 数据进一步计算出理论值得到表 7。

表 7 摆轮振幅测量值与理论值

序号	振幅测量值 $\theta_i$ (°)	时间 $t$ (s)	振幅理论值 $\vartheta$ (°)
0	13	1.5845	13.9176
1	24	3.155	25.4356
2	33	4.7226	35.0444
3	41	6.2891	43.0715
4	48	7.855	49.7801
5	54	9.4206	55.3881
6	59	10.9859	60.0762
7	63	12.551	63.9957
8	66	14.1161	67.2731
9	69	15.6812	70.0135
10	72	17.2463	72.3050
11	74	18.8114	74.2210
12	76	20.3765	75.8231
13	77	21.9416	77.1628
14	79	23.5067	78.2829
15	80	25.0718	79.2196
16	81	26.6369	80.0028
17	82	28.202	80.6577
18	82	29.7671	81.2052
19	83	31.3322	81.6631
20	83	32.8973	82.0460
21	84	34.4624	82.3661
22	84	36.0275	82.6338
23	84	37.5926	82.8576

24	84	39.1577	83.04478
----	----	---------	----------

进一步我们可以将理论值画入图 6 之中得到图 7。从图 7 中我们可以发现测量值和理论值吻合得比较好。

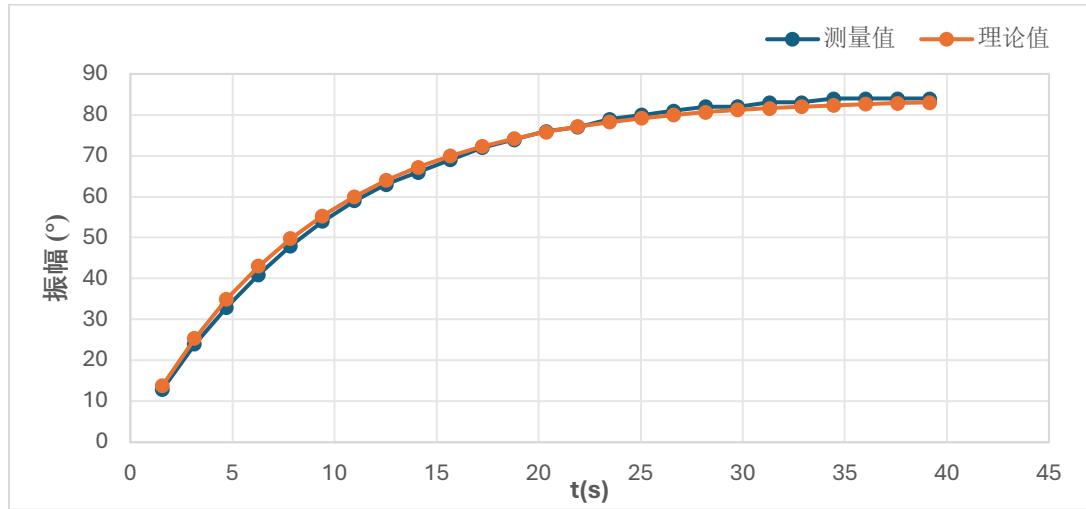


图 7 摆轮振幅测量值与理论值

C.2 在共振频率激励下，受迫振动达到稳态的条件为：一个周期内电机提供给振动系统的能量与电磁阻尼导致的能量损耗相等。当用固有频率激励时，稳态后，系统总的机械能保持不变，如同理想的简谐振动（无阻尼、无激励）一样！

试写出 C.1 题的振动系统达到稳态后，电机在一个周期内提供的平均输入功率的表达式(用  $\theta_m$ 、 $\omega_0$ 、 $k$  和  $Q$  表示)。

在稳态时系统的运动可以由  $\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t - \varphi)$  进行描述，考虑系统在一个周期内因为电磁阻尼能量损耗为：

$$W_r = \int_{\theta_m \cos \varphi}^{\theta_m \cos \varphi + 2\pi} M_r d\theta = - \int_{\theta_m \cos \varphi}^{\theta_m \cos \varphi + 2\pi} \gamma \dot{\theta} d\theta = -\gamma \theta_m^2 \omega_0^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(\omega_0 t - \varphi) dt = -\pi \gamma \theta_m^2 \omega_0$$

由于稳态时电机输出平均功率和能量损耗功率一致，因此电机在一个周期内平均输入功率为：

$$\bar{P} = \frac{-W_r}{T} = \frac{\pi \gamma \theta_m^2 \omega_0^2}{2}$$

由于  $\beta = \frac{\gamma}{2J}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{J}}$ ,  $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$  因此  $\gamma = \frac{k}{Q\omega_0}$ , 代入上式可得：

$$\bar{P} = \frac{k\omega_0\theta_m^2}{2Q}$$

#### 4. 分析讨论

a) 在本实验的 A 部分之中求得了 3 个阻尼系数  $\beta$ ，在和同学的数据进行比对后发现所得的阻尼系数  $\beta$  虽然数量级一致，但是在具体数值上有一定的偏差，甚至偏差超过 10%，而当我们目光聚焦于各自的数据拟合时可以发现我们最小二乘法拟合的结果的  $R^2$  都极其接近 1，所以我们在各自数据基础上所得的阻尼系数  $\beta$  都是没有问题的，同时由相对不确定度并不算特别小可见实验的精密程度还是相对较差的。这可能来源于数据点选取时并不是很多，尤其是加上磁铁后衰减速度较快，振幅迅速降至 20°，而且由于仪器的部分原因，当释放的振幅不一致时也会使得最后振幅衰减的情况有所不同。

b) 在本实验的 B 部分也充分体现出来了本实验的不精密之处，本实验共振是根据相差为 90° 进行判断的，但是在操作中相差为 90° 附近也就是近似共振频率附近振幅的差异无法通过实验进行体现，而现实又是共振频率和固有频率不完全重合，因此 90° 的相差并不是真正的共振频率，因此也不是振幅最大处。但是实验仪器的精度不够，不能很好体现共振频率和固有频率的差异，甚至连相差 90° 时

是近似振幅最大处都无法很好体现。在实验 B 部分还存在电机方面的问题，电机的周期调节通过一个旋钮调节不够均匀也不够稳定。

c) 在实验 C 部分实验结果和理论近似结果吻合得较好，也验证了近似的合理性。C 部分最后的理论推导题也让我思考起稳态时共振频率近似为固有频率时振幅最大处为什么相差为  $90^\circ$ ，我们从做功角度思考，当振幅最大时那么能量肯定吸收的最多，那么做功的速度方向应该与摆轮速度一致，而摆轮运动呈现正弦形式运动，求导所得到的速度和位移有  $90^\circ$  的相差，也因此最大振幅处相差为  $90^\circ$ 。

这个好！

### 原始数据

#### A.1 测最小阻尼(无永磁铁)

序号	振幅 $\theta_i$ ( $^\circ$ )	周期 $T_d$ (s)	时间 $t$ (s)	$\ln(\theta_i)$	振幅理论值( $^\circ$ )
1	155	1.5612	1.5612	5.0434	167.1612
11	144	1.5619	17.1767	4.9698	149.9003
21	131	1.5625	32.7987	4.8752	134.4156
31	119	1.5630	48.4262	4.7791	120.5259
41	109	1.5633	64.0577	4.6913	108.0685
51	99	1.5637	79.6927	4.5951	96.8962
61	89	1.5640	95.3312	4.4886	86.8769
71	80	1.5642	110.9722	4.3820	77.8922
81	73	1.5644	126.6152	4.2905	69.8357
91	65	1.5647	142.2607	4.1744	62.6115
101	59	1.5646	157.9072	4.0775	56.1341
111	52	1.5648	173.5542	3.9512	50.3267
121	46	1.5650	189.2032	3.8286	45.1195
131	41	1.5651	204.8537	3.7136	40.4506
141	37	1.5650	220.5042	3.6109	36.2649
151	33	1.5651	236.1547	3.4965	32.5122
161	29	1.5650	251.8052	3.3673	29.1479
171	25	1.5650	267.4552	3.2189	26.1319
181	21	1.5651	283.1057	3.0445	23.4278
191					
201					

#### A.3 测量2种阻尼: $s = 20$ mm; $s = \max$

$s = 20$  mm

序号	振幅 $\theta_i$ ( $^\circ$ )	周期 $T_d$ (s)	时间 $t$ (s)	$\ln(\theta_i)$	振幅理论值( $^\circ$ )
1	168	1.5615	1.5615	5.123963979	171.1660959
2	142	1.5632	3.1247	4.955827058	143.1544715
3	119	1.5643	4.689	4.779123493	119.711942
4	101	1.5652	6.2542	4.615120517	100.0979883
5	85	1.5685	7.8227	4.442651256	83.66607156
6	71	1.5664	9.3891	4.262679877	69.94838165
7	59	1.5669	10.956	4.077537444	58.4764688
8	49	1.5674	12.5234	3.891820298	48.88321738
9	41	1.568	14.0914	3.713572067	40.86096657
10	34	1.5686	15.66	3.526360525	34.15290885
11	29	1.5693	17.2293	3.36729583	28.5438143
12	23	1.5701	18.7994	3.135494216	23.85374629
13	20	1.5711	20.3705	2.995732274	19.93203009
14					
15					

s = max				
振幅θi (°)	周期Td (s)	时间t(s)	ln(θi)	振幅理论值(°)
175	1.5618	1.5618	5.164785974	173.1180159
137	1.5634	3.1252	4.919980926	135.7580384
107	1.5642	4.6894	4.672828834	106.4473412
83	1.5646	6.254	4.418840608	83.45974827
65	1.5648	7.8188	4.17438727	65.4343536
51	1.5649	9.3837	3.931825633	51.30123374
39	1.5646	10.9483	3.663561646	40.22259274
31	1.5638	12.5121	3.433987204	31.54033762
25	1.5631	14.0752	3.218875825	24.73488442
20	1.5624	15.6376	2.995732274	19.39995416

B.3 测试幅频特性和相频特性								
s = 20 mm								
序号	周期T (s)	振幅θi (°)	相差 (°)	ω/ω₀	周期T (s)	振幅θi (°)	相差 (°)	ω/ω₀
1	1.5071	47	144	1.037811	1.4941	35	141	1.046840379
2	1.5199	56	136	1.02907	1.5107	41	133	1.0353374
3	1.5368	67	123	1.017754	1.5259	46	123	1.025024058
4	1.5454	72	114	1.01209	1.5317	48	119	1.021142659
5	1.5522	76	106	1.007656	1.5491	53	106	1.009672849
6	1.5563	78	102	1.005002	1.5541	54	102	1.006424432
7	1.5593	79	98	1.003068	1.5585	55	98	1.003583067
8	1.5628	79	94	1.000822	1.5621	56	94	1.00127022
9	1.5663	79	90	0.998585	1.5671	56	90	0.99807556
10	1.5686	79	86	0.997121	1.5722	56	86	0.994837941
11	1.5732	79	82	0.994206	1.5758	55	82	0.99256518
12	1.5761	78	78	0.992376	1.5816	54	78	0.988925272
13	1.5896	71	63	0.983948	1.5982	51	66	0.978653617
14	1.6149	56	45	0.968533	1.6411	40	44	0.95307063
15	1.6449	42	33	0.950869	1.6453	38	42	0.950637702

C.1 受迫振动的瞬态过程

s = 20 mm

序号	振幅测量值 $\theta_i$ (°)	时间t(s)	振幅理论值(° )
0	13	1.5845	13.91760825
1	24	3.155	25.43560741
2	33	4.7226	35.04440238
3	41	6.2891	43.07151353
4	48	7.855	49.78009473
5	54	9.4206	55.38809225
6	59	10.9859	60.07622417
7	63	12.551	63.99573668
8	66	14.1161	67.2731023
9	69	15.6812	70.01352611
10	72	17.2463	72.30497709
11	74	18.8114	74.22101195
12	76	20.3765	75.8231364
13	77	21.9416	77.16277941
14	79	23.5067	78.28294422
15	80	25.0718	79.21958866
16	81	26.6369	80.0027795
17	82	28.202	80.65765755
18	82	29.7671	81.20524474
19	83	31.3322	81.66311888
20	83	32.8973	82.04597796
21	84	34.4624	82.36611195
22	84	36.0275	82.63379731
23	84	37.5926	82.85762689
24	84	39.1577	83.04478571