上海交大-巴黎高科卓越工程师学院

Algèbre linéaire

Alain Chillès (祁冲), 吉宏俊, 欧亚飞, Valentin Vinoles, Adrien Joseph

Remerciements
Nous tenons à remercier chaudement tous les professeurs qui nous ont aidés à écrire ce livre, notamment en corrigeant les inévitables fautes.
Par ordre chronologique d'intervention : 陆佳亮, 牛一帅, Marguerite Rossillon, Vésale Nicolas, Bastien Marmet, Geoffrey Boutard et Rémi Weidenfeld.

Préambule à la première version

Je tiens avant toutes choses à remercier ici le professeur 陆佳亮 pour son aide précieuse lors de la relecture de ce polycopié. Je tiens aussi à remercier mon ami Franz Ridde, professeur en MPSI au lycée du Parc de Lyon, qui m'a fourni un grand nombre d'exercices.

Ce livre *n'est pas le cours*. Il servira de support au cours, de guide et permettra, à ceux qui le souhaitent, d'approfondir quelques sujets. Il ne s'agit en aucun cas d'apprendre par cœur son contenu. D'ailleurs, l'apprentissage par cœur est, en général, une mauvaise technique d'apprentissage pour les mathématiques, qui proposent peu de résultats, peu de notions, mais demandent une compréhension profonde de ces notions.

Le cours est découpé en quatre parties :
— espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
— matrices et systèmes linéaires ;
— déterminant ;
— réduction des endomorphismes.

Les calculs et les dessins ont été, pour la plupart, effectués grâce aux logiciels `Wxmaxima` et `Python, sympy, matplotlib`, outils d'une très grande qualité, gratuits et fonctionnant sur tout système (Linux, Windows, Mac, Androïd). Signalons aussi l'outil de géométrie plane `Geogebra` et l'excellent `Ipe` qui permet d'annoter en $\LaTeX\,2_\varepsilon$ les dessins produits directement ou à l'aide d'un autre outil.

Alain Chillès

Préambule à la seconde version

前言

线性代数是大学数学教育中的一门重要的基础课程。本书根据中法“卓越工程师教育培养计划”数学教学的要求，本着为社会发展储备未来的精英工程师的目标，并参考我们多年来在上海交通大学-巴黎高科卓越工程师学院大二和大三年级线性代数课程的教学实践和改革探索的基础上编写而成。

全书共分为五个章节。第一章主要介绍了实和复线性空间，并包含了线性映射，对偶空间，超平面及应用等内容，熟练掌握第一章内容是后面章节学习的重要基础。第二章主要介绍了矩阵和线性方程组系统，包含了矩阵的代数运算，可逆矩阵，矩阵的换底公式，相似矩阵，矩阵的初等变换，解线性方程组系统，分块矩阵等内容。 第三章主要介绍了行列式及其重要性质，通过行列式了解了矩阵与线性映射的内在联系等。 经过第一、二、三章节的铺垫，在第四章和第五章中，我们重点介绍了自同态的约化，介绍了对角化，上三角化等多种方法，并介绍了和多项式的联系等内容。本书相对传统的线性代数教材，无论从角度以及难度都有所不同。本书除了配有大量的习题之外，同时还提供了大量的 `Wxmaxima` 和 `Python`，`sympy`，`matplotlib` 代码便于同学理解和计算。

本书的出版首先感谢 Alain Chillès 教授辛勤的撰写和不断反复的修改完善，其次要感谢上海交通大学-巴黎高科卓越工程师学院数学组全体同事对初稿的认真阅读及纠错，并给予了非常宝贵的修改意见。本书的出版同时得到了上海交通大学-巴黎高科卓越工程师学院的鼎力支持，在此深表致谢！

由于编者水平有限，不妥甚至错误之处再所难免，欢迎广大读者给予批评指正。

吉宏俊

Table des matières

Liste des codes `Wxmaxima`

Liste des codes `Python`

Liste des figures

Notations

Notation	Signification
Ensembles usuels	
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$	Ensemble des entiers naturels ou relatifs non nuls
$[\![p, q]\!]$	Ensemble des entiers relatifs compris entre p et q
$\mathbb{Q}$	Ensemble des rationnels
$\mathbb{R}$	Ensemble des réels
$\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{R}_+$	Ensemble des rationnels ou des réels strictement positifs
$\mathbb{C}$	Ensemble des complexes
$\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$	Ensemble des rationnels ou des réels ou des complexes non nuls
$\mathbb{K}$	Corps commutatif quelconque (désigne souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, en ce cas, c'est signalé en début de chapitre)
$\mathbb{K}^n$	Ensemble des n-uplets (si $n = 2$, on parle de *couple* et si $n = 3$, on parle de *triplet*) ; un n-uplet sera parfois noté $\underline{x}$ au lieu de $(x_1, \dots, x_n)$, où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in \mathbb{K}$
$\mathfrak{S}(E)$	Ensemble des permutations de l'ensemble E
Notations usuelles	
$\delta_{i,j}$	Symbole de Kronecker (vaut 1, si $i = j$ et 0 sinon)
$\mathfrak{S}_n$	Groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$
$\varepsilon(\sigma)$	Signature de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$
Opérations sur les ensembles	
$E \times F$	Produit cartésien d'ensembles
E^2	$E \times E$
E^n	$\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$ (où $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)
$\displaystyle\prod_{i=1}^{n} E_i$	Produit cartésien des n ensembles E_1, ..., E_n
$\displaystyle\prod_{i \in I} E_i$	Produit cartésien de la famille d'ensembles $(E_i)_{i \in I}$, où I est un ensemble quelconque ; les éléments de $\prod_{i \in I} E_i$ sont notés $(x_i)_{i \in I}$ où, pour tout $i \in I$, $x_i \in E_i$
E^F	Ensemble des familles d'éléments de l'ensemble E indexées par l'ensemble F (correspond à $\prod_{i \in F} E_i$ où *tous* les E_i sont égaux à E)
Classe$(x, \mathscr{R})$	Classe d'équivalence de x pour la relation $\mathscr{R}$
Quantificateurs	
$\forall \dots$	« Quel que soit... » (ou « Pour tout »)
$\exists \dots$	« Il existe... »
$\exists! \dots$	« Il existe un unique... »
$\nexists \dots$	« Il n'existe pas... »
Quantificateurs (usage)	
$\forall (x, y) \in E^2$	Signifie $\forall x \in E$, $\forall y \in E$ *L'écriture* $\forall x$, $y \in E$ n'est pas correcte !

Notation	Signification
Opérations	
$.$	Multiplication externe
$\bullet$	Multiplication des matrices
Notations de définitions	
$\overset{\text{Not}}{=}$	Introduit une nouvelle notation
$\overset{\text{Def}}{=}$	Introduit une nouvelle définition
Fonctions	
$\mathscr{F}(X,Y)$	Ensemble des fonctions définies sur l'ensemble X à valeurs dans l'ensemble Y
$\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$	Ensemble des fonctions continues définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$	$\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$
$\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}(I,\mathbb{K})$	Ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\mathscr{C}^k(I,\mathbb{K})$	Ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Espaces vectoriels	
$\mathbb{K}.x$	Droite vectorielle engendrée par x
$\mathrm{Vect}(A)$	Sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E engendré par la partie A
$E_1 + E_2$	Somme des sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 d'un même espace vectoriel E
$\sum_{i\in I} E_i$	Somme des E_i, où $(E_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E et où I est un ensemble quelconque
$E_1 \oplus E_2$	Somme directe des sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 d'un même espace vectoriel E
$\bigoplus_{i\in I} E_1$	Somme directe des E_i, où $(E_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E et où I est un ensemble quelconque
$\dim E$ ou $\dim(E)$ ou $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$	La dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E
$\mathscr{L}(E,F)$	Ensemble des applications linéaires de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F
$\mathscr{L}(E)$	$\mathscr{L}(E,E)$, ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel E
$\mathscr{GL}(E)$	Ensemble des automorphismes de l'espace vectoriel E
$E^\star$	$\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; c'est l'ensemble des formes linéaires sur l'espace vectoriel E (noter le $\star$ et non pas $*$)
$\mathrm{Ker}(f)$	Noyau d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$
$\mathrm{Im}(f)$	Image d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$
id_E	Application linéaire *identité* de l'espace vectoriel E
$f_{\vert_{E'}}$	Restriction d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ à un sous-espace vectoriel E' de E
$f^{\vert^{F'}}$	Co-restriction d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ à un sous-espace vectoriel F' de F contenant $\mathrm{Im}(f)$
$f\Big\vert_{E'}^{F'}$	$\left(f_{\vert_{E'}}\right)^{\vert^{F'}}$
$p_{F\Vert G}$	Projection sur F parallèlement à G, où $E = F \oplus G$
$s_{F\Vert G}$	Symétrie par rapport à F parallèlement à G
$\mathrm{rang}(f)$	Rang de l'application linéaire f
$(e_i^\star)_{i\in I}$	Famille duale de la base $(e_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel E
$\mathrm{codim}(F)$	Dimension d'un supplémentaire de F
$\mathrm{Sol}(\mathcal{S})$	Ensemble des solutions du système linéaire S
Matrices	
$[a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$	Matrice $n \times p$ dont les coefficients sont les $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$

Notation	Signification
	Nous utiliserons systématiquement *les crochets* [] *pour noter les matrices !*
$\mathrm{M}_{n,p}(A)$	Ensemble des matrices à coefficients dans l'ensemble A ayant n lignes et p colonnes
$\mathrm{M}_n(A)$	$\mathrm{M}_{n,p}(A)$ où $p=n$
I_p	Matrice identité de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$
$0_{n,p}$	Matrice nulle de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
0_n	$0_{n,n}$
$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x)$	Matrice du vecteur $x \in E$ dans la base $\mathscr{E}$ de l'espace vectoriel E
$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)$	Matrice de l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,E')$ dans les bases $\mathscr{E}$ de E et $\mathscr{E}'$ de E'
$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$	Matrice de l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dans la base $\mathscr{E}$ de E (correspond à $\mathrm{Mat}(f,\mathscr{E},\mathscr{E})$)
$E_{k,l}$	Matrice ne contenant que des 0 sauf sur la k-ième ligne et la l-ième colonne où il y a un 1 (*Attention* : les dimensions de ces matrices ne sont pas précisées...)
${}^tA$	Transposée de A, où $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
$\mathrm{S}_p(\mathbb{K})$	Ensemble des matrices *symétriques* de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$
$\mathrm{A}_p(\mathbb{K})$	Ensemble des matrices *antisymétriques* de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$
$\mathrm{Diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$	Matrice diagonale
$\mathrm{D}_p(\mathbb{K})$	Ensemble des matrices *diagonales* de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$
$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{X})$	Matrice du système de vecteurs $\mathscr{X}=(x_1,\dots,x_p) \in E^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) dans la base $\mathscr{E}$ de l'espace vectoriel E
$P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{B})$, matrice de *passage* de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{B}$
$J_{n,p,r}$	Matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ne contenant que des 0, sauf lorsque $i=j \in [\![1,r]\!]$ où il y a des 1
$T_{k,l}(\lambda)$	Matrice de transvection dans $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ (où $p \geq \max(k,l)$), égale à $I_p+\lambda.E_{k,l}$ ($k \neq l$)
$D_k(\lambda)$	Matrice de dilatation dans $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ (où $p \geq n$), égale à $I_p+(\lambda-1).E_{k,k}$
P_σ	Matrice de permutation
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$	Groupe des matrices inversibles d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathrm{T}_n^+(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathrm{T}_n^-(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices triangulaires inférieures d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathrm{trace}(A)$	Trace de la matrice A
$\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{rang}(A)$	Image, noyau et rang d'une matrice $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
$A \otimes B$	Produit de Kronecker des matrices A et B
$A \sim B$	A semblable à B
$A \approx B$	A équivalente à B
Déterminants	
$\det(A)$	Déterminant de la matrice $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$
$\lvert a_{i,j}\rvert_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$	$\det\left([a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}\right)$
$\det_{\mathscr{E}}(x_1,\dots,x_n)$	Déterminant des vecteurs $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base $\mathscr{E}$
$\det(u)$	Déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$
$\mathrm{Cofacteur}_{i,j}(A)$	Cofacteur d'indices (i,j) de la matrice A
$\mathrm{Com}(A)$	Comatrice de A
$V(a_1,\dots,a_n)$	Déterminant de Vandermonde
$\mathscr{L}_p(E,\mathbb{K})$	Ensemble des formes p-linéaires de E dans $\mathbb{K}$
$\mathscr{S}_p(E,\mathbb{K})$	Ensemble des formes p-linéaires *symétriques* de E dans $\mathbb{K}$
$\mathscr{A}_p(E,\mathbb{K})$	Ensemble des formes p-linéaires *antisymétriques* de E dans $\mathbb{K}$
Réduction des endomorphismes	
$E_u(\lambda)$ ou $E_A(\lambda)$	Espace propre de $u \in \mathscr{L}(E)$ ou A pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$
$\mathrm{Sp}(u)$ ou $\mathrm{Sp}(A)$	Spectre de $u \in \mathscr{L}(E)$ ou A
χ_u ou χ_A	Polynôme caractéristique de $u \in \mathscr{L}(E)$ ou A
$\mathrm{mult}_u(\lambda)$ ou $\mathrm{mult}_A(\lambda)$	Multiplicité de λ dans χ_u ou χ_A
$\mathbb{K}[u]$ ou $\mathbb{K}[A]$	Algèbre engendrée par u ou A

Notation	Signification
$P(u)$ ou $P(A)$	Polynôme d'endomorphisme ou de matrice
$\mathscr{I}_u$ ou $\mathscr{I}_A$	Idéal annulateur de u ou A
π_u ou π_A	Polynôme minimal de u ou A
$C(P)$	Matrice compagnon du polynôme P
$\lVert\lvert u\rvert\rVert$ ou $\lVert\lvert A\rvert\rVert$	Norme subordonnée de u ou A
$\mathscr{L}_c(E)$	Espace des endomorphismes *continus* de E
$\rho(u)$ ou $\rho(A)$	Rayon spectral de u ou A
$\mathscr{C}(u)$ ou $\mathscr{C}(A)$	Commutant de u ou A
$F_u(\lambda)$ ou $F_u(A)$	Espace caractéristique de u ou A

Chapitre 1

Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Dans ce chapitre, nous noterons $\mathbb{K}$ les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cela signifie alors que le résultat énoncé est vrai dans $\mathbb{R}$ et *dans $\mathbb{C}$.*

这里域 $\mathbb{K}$ 表示实数域或者复数域，域 $\mathbb{K}$ 是影响线性空间性质的重要因素。

1.1 Généralités

1.1.1 Premières définitions

Définition 1.1 – Espace vectoriel

Soit E un ensemble non vide, on dit que E *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$)* s'il vérifie les axiomes suivants :

1. Il est muni d'une opération *interne*[a], notée $+$ et appelée *addition* qui vérifie :
   (a) $+$ est associative :
   $$\forall (x,y,z) \in E^3,\ (x+y)+z = x+(y+z) \overset{\text{Not}}{=} x+y+z$$
   (b) $+$ possède un élément neutre noté 0_E (ou 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) :
   $$\forall x \in E,\ x+0_E = 0_E + x = x$$
   (c) Tout élément de E possède un unique opposé :
   $$\forall x \in E,\ \exists! y \in E,\ x+y = y+x = 0_E,\ \text{on le note } y \overset{\text{Not}}{=} -x$$
   de plus, on note $-$ l'opération :
   $$\forall (x,y) \in E^2,\ x+(-y) \overset{\text{Not}}{=} x-y$$
   (d) $+$ est commutative :
   $$\forall (x,y) \in E^2,\ x+y = y+x$$
2. Il est muni d'une opération *externe*[b], notée $.$ et appelée *multiplication par un scalaire* qui vérifie :
   (a) $.$ est distributive par rapport à l'addition de E :
   $$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E^2,\ \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$$
   (b) $.$ est distributive par rapport à l'addition de $\mathbb{K}$:
   $$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$$

(c) . est distributive par rapport à la multiplication de $\mathbb{K}$:

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall x\in E,\ (\lambda\,\mu).x=\lambda.(\mu.x)$$

(d) L'unité 1 du corps est respectée :

$$\forall x\in E,\ 1.x=x$$

Les éléments de E s'appellent alors *vecteurs* et les éléments de $\mathbb{K}$ *scalaires*.

---

a. Cela signifie que si x et y sont dans E, alors $x+y$ est dans E.
b. Cela signifie que si λ est un *scalaire* (il est dans $\mathbb{K}$) et si x est dans E, alors $\lambda.x$ est dans E.

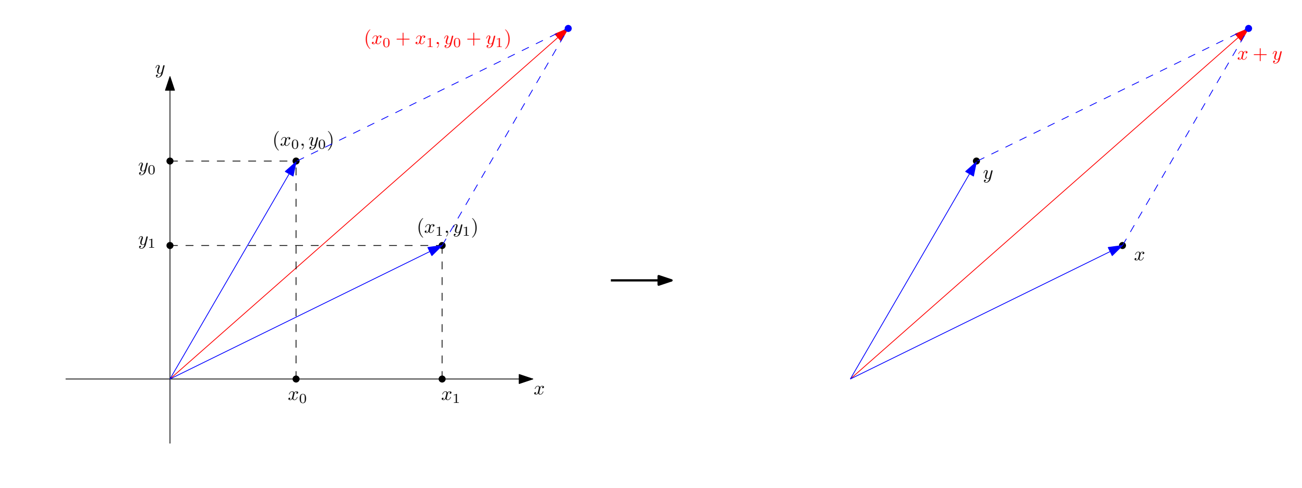
集合E 叫做域$\mathbb{K}$上的线性空间；当$\mathbb{K}=\mathbb{R}$时，集合 E 叫做实线性空间；当$\mathbb{K}=\mathbb{C}$时，集合 E 叫做复线性空间。

Remarque 1.1

Que veut-on faire ? Garder l'essentiel, et éliminer les coordonnées.

— Pour la somme de deux vecteurs, voir la figure 1.1, de la présente page.
— Pour le produit d'un vecteur par un scalaire, voir la figure 1.2, page suivante.

Figure 1.1 – Somme de deux vecteurs



Exemple 1.1 – Espaces vectoriels

1. Le corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, alors les ensembles suivants sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

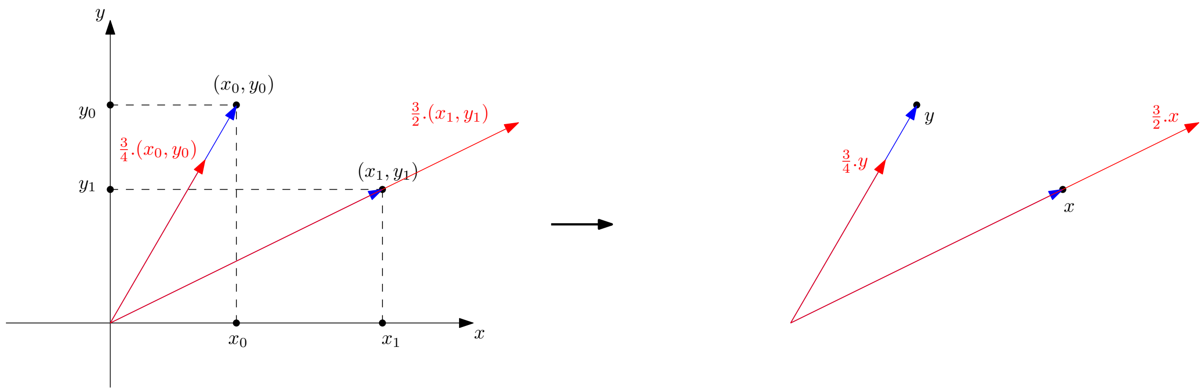
$$\mathscr{C}^k(I,\mathbb{K})\overset{\text{Not}}{=}\{f\ :\ I\to\mathbb{K},\ \text{de classe }\mathscr{C}^k\}$$

3. De même, l'ensemble suivant est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

$$\mathscr{C}^0_{\text{pm}}(I,\mathbb{K})\overset{\text{Not}}{=}\{f\ :\ I\to\mathbb{K},\ \text{continue par morceaux}\}$$

4. L'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; de même que les fonctions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.
5. Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (la réciproque est fausse).

Figure 1.2 – Produit d'un vecteur par un scalaire



6. Si X est un ensemble et si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors

$$\mathscr{F}(X, E) \overset{\text{Not}}{=} \{f \ : \ X \to E\} \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel}$$

Définition 1.2 – Combinaison linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ n vecteurs de E, on appelle *combinaison linéaire de ces vecteurs* toute expression de la forme :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k . x_k, \quad \text{où pour tout } k \in [\![1, n]\!], \ \lambda_k \in \mathbb{K}$$

Combinaison linéaire d'un nombre quelconque de vecteurs

Plus généralement, si on a un nombre quelconque de vecteurs de E, $(x_i)_{i \in I}$, on appelle *combinaison linéaire de ces vecteurs*, toute combinaison linéaire d'une *sous-famille finie* $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, où

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ i_k \in I$$

注意我们定义中的关键词有限的(finie)。

Exemple 1.2 – Combinaisons linéaires

1. Dans $\mathbb{R}^2$, tout vecteur est combinaison linéaire de $\overrightarrow{\imath} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{\jmath} = (0, 1)$.
2. Dans $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, tout nombre complexe est combinaison linéaire de 1 et i, mais aussi de 1 et $\exp(2\,i\,\pi/3) \overset{\text{Not}}{=} j$, ou de i et j, ou de 1, i et j, etc.
3. Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales, toute fonction polynomiale est combinaison linéaire de la famille :

$$\left(x \mapsto x^i\right)_{i \in \mathbb{N}}$$

Remarque importante 1.2

On ne sait faire que des sommes finies de vecteurs ! D'où la présence du n. Lorsque $n = 0$, on obtient (par convention) 0_E.

Définition 1.3 – Produit d'espaces vectoriels

Produit fini d'espaces vectoriels

Soit E_1, ..., E_n des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, l'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_n$ est alors muni d'une *structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* définie par (avec des notations évidentes) :

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n) &\overset{\text{Def}}{=} (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n) \\ \lambda.(x_1, \ldots, x_n) &\overset{\text{Def}}{=} (\lambda.x_1, \ldots, \lambda.x_n) \end{aligned}$$

Produit quelconque d'espaces vectoriels

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble (d'indices), alors, de même, E^I est muni d'une *structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* définie par (avec des notations évidentes) :

$$\begin{aligned} (x_i)_{i\in I} + (x'_i)_{i\in I} &\overset{\text{Def}}{=} (x_i + x'_i)_{i\in I} \\ \lambda.(x_i)_{i\in I} &\overset{\text{Def}}{=} (\lambda.x_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

Exemple 1.3 – Produit d'espaces vectoriels

1. $\mathbb{K}^n$ (l'ensemble des n-uplets à coefficients dans $\mathbb{K}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$ indexées par $\mathbb{N}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice(s) 1.1

1.1.1 Démontrer que, dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, &\quad 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, &\quad \lambda.0_E = 0_E \\ \forall x \in E, &\quad (-1).x = -x \\ \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, &\quad \lambda.x = 0_E \iff \big(\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E\big) \end{aligned}$$

1.1.2 Parmi les ensembles suivants, lesquels, munis des opérations usuelles, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

(a) $\mathbb{Z}$?

(b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = 0\}$?

(c) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = 1\}$?

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\,y = 0\}$?

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\,y = 1\}$?

1.1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.4 – Sous-structure

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$, on dit que F est un *sous-espace vectoriel de* E si :
- $0_E \in F$;
- F est stable par $+$ (c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$) ;
- F est stable par . (c'est-à-dire que pour tout $x \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.x \in F$).

证明集合F为E的子空间时，需要验证以上三个条件。

Exemple 1.4 – Sous-espaces vectoriels

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que $E \neq \{0_E\}$ et soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. La *droite vectorielle dirigée par* x, notée $\mathbb{K}.x$, est le sous-ensemble de E défini par

$$\mathbb{K}.x \overset{\text{Def}}{=} \{\lambda.x,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$

   Les droites vectorielles sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. L'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.
3. De même, pour I intervalle de $\mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^{p+1}(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^p(I, \mathbb{K})$.
4. De plus, $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^p(I, \mathbb{K})$.

Propriété 1.1

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E admet toujours les sous-espaces vectoriels (dits *triviaux*) E et $\{0_E\}$.

Démonstration

On démontre que E et $\{0_E\}$ vérifient les trois axiomes de la définition 1.4, de la présente page.

Propriété 1.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $F \subset E$, $F \neq \emptyset$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, F muni des mêmes opérations $+$ et . est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

- Supposons que F soit sous-espace vectoriel de E. Alors $+$ est une opération interne sur $F \times F$ (car F est stable par $+$), qui est associative (car elle l'est sur $E \supset F$), possède un élément neutre $0_E \in F$, tout élément de F possède un unique opposé dans F (si $x \in F$, $-x = (-1).x \in F$ car F est stable par .) et est commutative (car elle l'est sur $E \supset F$).
  De plus, . est une opération externe sur $\mathbb{K} \times F$ (car F est stable par .), est distributive par rapport à l'addition de F ainsi que l'addition et la multiplication de $\mathbb{K}$ et l'unité du corps est respectée (car ces propriétés sont vraies sur $E \supset F$).
  Conclusion : F muni des opérations $+$ et . est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Réciproquement, si F muni des opérations $+$ et . est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors il est immédiat que F vérifie les trois axiomes de la définition 1.4, de la présente page.

Remarque 1.3

Pour démontrer qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il est très souvent plus simple et plus rapide de démontrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel déjà connu.

Propriété 1.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $F \subset E$, $F \neq \emptyset$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, F est stable par combinaisons linéaires.

Démonstration

— Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E. Soit $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de F (qui existent car $F \neq \emptyset$) et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors $\lambda_k.x_k \in F$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ car F est stable par . et par une récurrence immédiate sur n, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k \in F$$

donc F est stable par combinaisons linéaires.

— Réciproquement, supposons que F soit stable par combinaisons linéaires. Il est alors immédiat que F est stable par $+$ et par . (cas particuliers de combinaisons linéaires). De plus, puisque $F \neq \emptyset$, il existe $x \in F$. On a alors

$$0_E = x - x = x + (-1).x \in F$$

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 1.4 – Stabilité par intersection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Stabilité par intersection finie

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Stabilité par intersection quelconque

Plus généralement, si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E, alors

$$\bigcap_{i\in I} F_i \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$

Démonstration

Notons $F = \bigcap_{i\in I} F_i \subset E$.

— On a $0_E \in F$ car $0_E \in F_i$ pour tout $i \in I$;

— Soit $(x, y) \in F^2$. En particulier, pour tout $i \in I$ on a $x \in F_i$ et $y \in F_i$ donc $x + y \in F_i$ pour tout $i \in I$ (car les F_i sont stables par $+$). On a donc $x + y \in F$.

— Soit $x \in F$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. En particulier, pour tout $i \in I$ on a $x \in F_i$ donc $\lambda.x \in F_i$ pour tout $i \in I$ (car les F_i sont stables par .). On a donc $\lambda.x \in F$.

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 1.5 – Non stabilité par réunion

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $F_1 \cup F_2$ n'est *jamais* un sous-espace vectoriel de E sauf si $F_1 \subset F_2$ ou $F_1 \supset F_2$.

Démonstration

— ($\Leftarrow$) Si $F_1 \subset F_2$ ou $F_1 \supset F_2$, alors $F_1 \cup F_2 = F_1$ ou $F_1 \cup F_2 = F_2$ donc $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

— (*Un exemple*) Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les droites vectorielles $F_1 = \mathbb{R}.(1, 0)$ et $F_2 = \mathbb{R}.(0, 1)$. On a $(1, 0) \in F_1 \cup F_2 \supset F_1$ et $(0, 1) \in F_1 \cup F_2 \supset F_2$, mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F_1 \cup F_2$, donc $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (il n'est pas stable par addition).

— ($\Rightarrow$) Si $F_1 \not\subset F_2$, il existe $x_1 \in F_1 \setminus F_2$. De même, si $F_2 \not\subset F_1$, il existe $x_2 \in F_2 \setminus F_1$, et, en ce cas

$$x_1 + x_2 \notin F_1 \cup F_2.$$

Définition 1.5 – Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $A \subset E$, on appelle *sous-espace vectoriel engendré par* A le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A. On le note :

$$\mathrm{Vect}(A)$$

Démonstration que la notion de sous-espace vectoriel engendré par une partie est bien définie

L'existence d'un plus petit sous-espace vectoriel contenant A mérite une justification.
Posons

$$\mathcal{F} = \{F \text{ sous-espace vectoriel de } E,\ F \supset A\} \text{ et } \mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

Alors $\mathrm{Vect}(A) \neq \emptyset$ car $E \in \mathcal{F}$ et c'est bien un sous-espace vectoriel de E d'après la propriété 1.4, page ci-contre.
Par définition, tout sous-espace vectoriel de E qui contient A contient aussi $\mathrm{Vect}(A)$, c'est donc bien le petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

Exemple 1.5 – Engendrement de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. On a $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.
2. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\mathrm{Vect}(F) = F$.
3. Si $E \neq \{0_E\}$ et si $x \in E$, $x \neq 0_E$, alors $\mathrm{Vect}(\{x\})$ est la droite vectorielle engendrée par x :

$$\mathrm{Vect}(\{x\}) = \mathbb{K}.x = \{\lambda.x,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Proposition 1.1

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, alors $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires construites à partir des vecteurs de A :

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ x \in E,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{K}, \exists\, a_k \in A,\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.a_k \right\}$$

注释 1.1

$\mathrm{Vect}(A)$ 叫做由 A 生成的子空间，注意到 $\mathrm{Vect}(A)$ 是 A 中有限元素线性组合的集合。

Démonstration

($\subset$) L'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A est un sous-espace vectoriel de E qui contient A, il contient donc $\mathrm{Vect}(A)$.
($\supset$) A est inclus dans $\mathrm{Vect}(A)$ (par définition) qui est stable par combinaisons linéaires, donc $\mathrm{Vect}(A)$ contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de A.

Définition 1.6 – Partie ou famille génératrice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Partie génératrice

Soit $A \subset E$, on dit que A est *une partie génératrice de* E si

$$\mathrm{Vect}(A) = E$$

Famille génératrice

Soit $(a_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E, on dit que c'est une *famille génératrice de E* si

$$\mathrm{Vect}\left(\{a_i,\ i\in I\}\right) = E$$

Remarque 1.4

Quelle différence y a-t-il entre la famille $(a_i)_{i\in I}$ et $\{a_i,\ i\in I\}$? Dans un ensemble, les termes n'apparaissent qu'une seule fois, alors que dans une famille, il est possible de les répéter. C'est la même différence qu'entre une liste et un ensemble en informatique ! [a] Voir le code 1.1, de la présente page.

[a] L'ensemble $\{a_i,\ i\in I\}$ associé à la famille $(a_i)_{i\in I}$ s'appelle *le support de la famille*.

集合中不包含相同的元素，而 famille 可以包含。

Session Wxmaxima 1.1 – Partie ou famille génératrice ?

```
(%i1) Famille : [1,2,3,1,0,1,2,3,0];
(%o1) [1, 2, 3, 1, 0, 1, 2, 3, 0]
(%i2) Partie : setify(Famille);
(%o2) {0, 1, 2, 3}
```

Session Python 1.1 – Initialisation de Sympy

Ces deux commandes sont à faire au début de chaque session ! *Nous ne les présenterons pas à chaque calcul, c'est pourquoi les codes commencent par* `In[2]` *!*

In[1]

```
from sympy import *
init_session()
%matplotlib inline
```

```
IPython console for SymPy 1.6.2 (Python 3.8.2-64-bit) (ground types: python)

These commands were executed:
>>> from __future__ import division
>>> from sympy import *
>>> x, y, z, t = symbols('x y z t')
>>> k, m, n = symbols('k m n', integer=True)
>>> f, g, h = symbols('f g h', cls=Function)
>>> init_printing()

Documentation can be found at https://docs.sympy.org/1.6.2/
```

Session Python 1.2 – Partie ou famille génératrice ?

Traduction du Wxmaxima.

In [2]

```python
Famille = [1, 2, 3, 1, 0, 1, 2, 3, 0]
Famille
```

Out [2]

[1, 2, 3, 1, 0, 1, 2, 3, 0]

In [3]

```python
Partie = {i for i in Famille}
Partie
```

Out [3]

$\{0, 1, 2, 3\}$

Exemple 1.6 – Partie ou famille génératrice

1. $(1, i)$, $(1, j)$, (i, j), $(1, i, j)$ sont des familles génératrices de $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. La base canonique $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{C}^n$, où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ième coordonnée}}, 0, \dots, 0)$$
3. Plus généralement, si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et si $(f_j)_{j \in J}$ est une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F, alors la partie
$$\{(e_i, 0_F),\ i \in I\} \cup \{(0_E, f_j),\ j \in J\} \text{ est une partie génératrice de } E \times F$$

Exercice(s) 1.2

1.2.1 Démontrer que
$$\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$$
est une partie génératrice de $\mathbb{K}^3$.

1.2.2 Déterminer une partie génératrice simple du plan de $\mathbb{K}^3$ d'équation
$$x + y + z = 0$$

1.2.3 Déterminer une famille génératrice simple du plan vectoriel de $\mathbb{K}^4$, d'équations :
$$\begin{cases} x + y + z + t & = 0 \\ x - y - 2z + t & = 0 \end{cases}$$

1.2.4 Soit $a \in \mathbb{R}$, démontrer que la famille $(x \mapsto (x - a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales.

1.2.5 Déterminer dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:
$$\mathrm{Vect}\left(\{f,\ f \geq 0\}\right)$$

1.2.6 Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, que dire de
$$\mathrm{Vect}\left(E \setminus F\right) ?$$

1.2.7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit E_1, E_2 et E_3 trois sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$E_1 \subset E_2 \cup E_3$$

Que peut-on en conclure ?

1.2.8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B deux parties de E, comparer :

$$\mathrm{Vect}(A \cap B) \text{ et } \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$$

puis :

$$\mathrm{Vect}(A \cup B) \text{ et } \mathrm{Vect}(A) \cup \mathrm{Vect}(B)$$

1.2.9 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que $E \neq \{0_E\}$ et soit $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ des sous-espaces vectoriels de E, tous distincts de E. Démontrer que :

$$\Delta = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \neq E$$

À quelle condition Δ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

1.2.10 Reprendre l'exercice précédent lorsque l'on considère une famille *dénombrable* de sous-espaces vectoriels $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Plus précisément, pour $E = \mathbb{R}^p$, on pourra démontrer que le résultat est toujours vrai, mais qu'il devient faux pour l'espace vectoriel des fonctions polynomiales.

1.2.11 Donner un exemple d'une famille de sous-espaces $(E_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{R}^p$, distincts de $\mathbb{R}^p$, tels que

$$\bigcup_{i \in I} E_i = E$$

1.1.3 Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition 1.7 – Somme de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Somme finie

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, on appelle *somme de* E_1 *et* E_2 et on note $E_1 + E_2$ le sous-espace vectoriel :

$$E_1 + E_2 \overset{\text{Def}}{=} \{x_1 + x_2,\ x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$$

Somme quelconque

Plus généralement, si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E, on appelle *somme des* E_i et on note $\sum_{i \in I} E_i$ le sous-espace vectoriel :

$$\sum_{i \in I} E_i \overset{\text{Def}}{=} \left\{ x \in E,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists (i_1, \ldots, i_n) \in I^n,\ \exists (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in E_{i_1} \times \cdots \times E_{i_n},\ x = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} = x_{i_1} + \cdots + x_{i_n} \right\}$$

E 的子空间相加所得的空间还是E的子空间。

Remarque importante 1.5

Il est faux de penser :

$$x \in E_1 + E_2 \text{ et } x \notin E_1 \ \Rightarrow\ x \in E_2 \qquad \boxed{\text{FAUX}}$$

需要理解子空间相加的定义。

Exemple 1.7 – Sommes de sous-espaces vectoriels

1. $\mathbb{R}^2$ est somme de $\mathbb{R}.\overrightarrow{\imath}$ et de $\mathbb{R}.\overrightarrow{\jmath}$.
2. $\mathbb{C}$ est somme de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}.i$.
3. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors :
$$E = \sum_{i\in I} \mathrm{Vect}(\{x_i\})$$
4. Si P_1 est le plan d'équation $x+y+z=0$ et P_2 est le plan d'équation $x-2\,y-z=0$ de $\mathbb{R}^3$, alors
$$\mathbb{R}^3 = P_1 + P_2$$

Propriété 1.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Somme finie

Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors :
$$E_1 + E_2 = \mathrm{Vect}(E_1 \cup E_2)$$

Somme quelconque

Plus généralement, si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E, alors :
$$\sum_{i\in I} E_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$$

Démonstration

($\subset$) Soit $x \in \sum_{i\in I} E_i$. En reprenant les notations de la définition 1.7, page ci-contre, on a
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_{i_k}$$
où $x_{i_k} \in \bigcup_{i\in I} E_i \supset E_{i_k}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Le vecteur x s'écrit donc comme une combinaison linéaire d'éléments de $\bigcup_{i\in I} E_i$, donc $x \in \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$.

($\supset$) Soit $x \in \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$. On a donc
$$x = x_1 + \cdots + x_n$$
où $x_k \in \bigcup_{i\in I} E_i$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. En particulier, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe $i_k \in I$ tel que $x_k \in E_{i_k}$, donc $x \in \sum_{i\in I} E_i$.

Propriété 1.7

Il est équivalent de dire :

1. $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E ;
2. on a :
$$E = \sum_{i\in I} \mathrm{Vect}(\{e_i\}) = \sum_{i\in I} \mathbb{K}.e_i$$

Démonstration

Immédiat à partir des définitions.

Exercice(s) 1.3

1.3.1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit E_1, E_2 et E_3 trois sous-espaces vectoriels de E.

(a) Comparer pour l'inclusion les sous-espaces :

$$E_1 + (E_2 \cap E_3) \text{ et } (E_1 + E_2) \cap (E_1 + E_3)$$

(b) Comparer pour l'inclusion les sous-espaces :

$$E_1 \cap (E_2 + E_3) \text{ et } (E_1 \cap E_2) + (E_1 \cap E_3)$$

(c) Comparer pour l'inclusion les sous-espaces :

$$(E_1 \cap E_2) + (E_1 \cap E_3) \text{ et } E_1 \cap (E_2 + (E_1 \cap E_3))$$

1.3.2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit E_1, E_2 et E_3 trois sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que :

$$\left.\begin{array}{r} E_1 + E_2 = E_1 + E_3 \\ E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 \\ E_2 \subset E_3 \end{array}\right\} \implies E_2 = E_3$$

Démontrer que ce n'est plus vrai, si l'on enlève une des hypothèses à gauche.

1.1.4 Sommes directes

Définition 1.8 – Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, on dit que E_1 *et* E_2 *sont en somme directe* si tout élément de $E_1 + E_2$ s'écrit, *de manière unique* sous la forme $x_1 + x_2$, où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. On écrit alors :

$$E_1 \oplus E_2 \text{ à la place de } E_1 + E_2$$

子空间 $E_1 + E_2$ 为直和，注意区分与上一小节子空间和的定义，特别注意惟一性。

Propriété 1.8 – Caractérisation limitée à deux sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E sont en somme directe si, et seulement si,

$$E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$$

Démonstration

— Supposons que E_1 et E_2 soient en somme directe. Soit $x \in E_1 \cap E_2$. On a

$$x = \underbrace{x}_{\in E_1} + \underbrace{0_E}_{\in E_2} = \underbrace{0_E}_{\in E_1} + \underbrace{x}_{\in E_2}$$

donc $x = 0_E$ par définition de la somme directe. On a donc $E_1 \cap E_2 \subset \{0_E\}$ et comme $\{0_E\} \subset E_1 \cap E_2$ (car $E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de E), on a $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

— Supposons que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Soit $x \in E$, qu'on écrit sous la forme

$$x = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2} = \underbrace{y_1}_{\in E_1} + \underbrace{y_2}_{\in E_2}$$

On a

$$\underbrace{x_1 - y_1}_{\in E_1} = \underbrace{x_2 - y_2}_{\in E_2} \in E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$$

donc $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$. On en déduit que E_1 et E_2 sont en somme directe.

Propriété 1.9 – Caractérisation générale

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E sont en somme directe si, et seulement si, il y a *écriture unique de* 0_E, c'est-à-dire :

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,\ x_1 + x_2 = 0_E \implies (x_1 = 0_E \text{ et } x_2 = 0_E)$$

Démonstration

- Supposons que E_1 et E_2 soient en somme directe. Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tels que $x_1 + x_2 = 0_E$. On a

$$\underbrace{x_1}_{\in E_1} = \underbrace{-x_2}_{\in E_2} \in E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$$

donc $x_1 = x_2 = 0_E$.
- Supposons qu'il y ait écriture unique de 0_E. Soit $x \in E$ qu'on écrit sous la forme

$$x = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2} = \underbrace{y_1}_{\in E_1} + \underbrace{y_2}_{\in E_2}$$

Alors

$$\underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in E_1} + \underbrace{(x_2 - y_2)}_{\in E_2} = 0_e$$

donc $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = 0_E$ d'où $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$. On en déduit que E_1 et E_2 sont en somme directe.

Définition 1.9 – Somme directe d'une famille d'espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E, on dit qu'ils sont *en somme directe*, si on a écriture unique de 0_E, soit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \underbrace{(i_1, \ldots, i_n)}_{\text{distincts 2 à 2}} \in I^n,\ \forall (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in E_{i_1} \times \cdots \times E_{i_n},\ x_{i_1} + \cdots + x_{i_n} = 0_E \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_{i_k} = 0_E$$

On écrit alors

$$\bigoplus_{i \in I} E_i \text{ à la place de } \sum_{i \in I} E_i$$

Remarque importante 1.6

Ne pas oublier que l'on ne sait faire que des sommes <u>finies</u> de vecteurs !!

Remarque importante 1.7

Si I contient strictement plus de deux éléments, la condition $\bigcap_{i \in I} E_i = \{0_E\}$ ne suffit pas pour assurer que les E_i sont en somme directe, de même que les conditions $E_i \cap E_j = \{0_E\}$ pour tout $(i, j) \in I^2$ tels que $i \neq j$.
Pour s'en convaincre, on peut considérer les sous-espaces vectoriels $E_1 = \mathbb{R}.(1, 0)$, $E_2 = \mathbb{R}.(0, 1)$ et $E_3 = \mathbb{R}.(1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.8 – Sommes directes

1. $\mathbb{R}^2$ est somme directe de $\mathbb{R}.\overrightarrow{\imath}$ et de $\mathbb{R}.\overrightarrow{\jmath}$.
2. $\mathbb{C}$ est somme directe de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}.i$.

3. Si P_1 est le plan d'équation $x+y+z=0$ et P_2 est le plan d'équation $x-2\,y-z=0$ de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\mathbb{R}^3 = P_1 + P_2$$

mais la somme n'est pas directe car $(1,2,-3)\in P_1\cap P_2$.

Exercice(s) 1.4

1.4.1 Soit $E=\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, démontrer que le sous-espace vectoriel des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont en somme directe. Quelle est leur somme ?

1.4.2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit E_1, E_2 et E_3 trois sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E=E_1\oplus E_2$.

(a) Démontrer que si $E_2\subset E_3$, alors

$$E_3 = (E_1\cap E_3)\oplus(E_2\cap E_3)$$

(b) Démontrer que le résultat devient faux lorsque $E_2\not\subset E_3$ et $E_1\not\subset E_3$.

1.4.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(E_i)_{i\in I}$ et $(E'_i)_{i\in I}$ deux familles de sous-espaces vectoriels de E, telles que :

$$\forall i\in I,\ E'_i\subset E_i$$

Démontrer que :

$$\bigoplus_{i\in I} E_i = \bigoplus_{i\in I} E'_i \Rightarrow \forall i\in I,\ E_i = E'_i$$

1.4.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit E_1, E_2 et E_3 trois sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que :

$$\left.\begin{array}{r} E=E_1+E_2 \\ E_2=(E_1\cap E_2)\oplus E_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow E=E_1\oplus E_3$$

1.1.5 Supplémentaires

Définition 1.10 – Espaces supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Supplémentaire

Soit E_1 et E_2 des sous-espace vectoriels de E, on dit que E_2 est un *supplémentaire de* E_1 si :

$$E = E_1\oplus E_2$$

On dit aussi que les deux espaces E_1 et E_2 sont *supplémentaires*.

Décomposition en somme directe

On appelle *décomposition en somme directe de* E toute famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels de E telle que :

$$E = \bigoplus_{i\in I} E_i$$

子空间的互补与集合的互补并不一样。

Exemple 1.9 – Supplémentaires

1. Dans $\mathbb{R}^2$, deux droites vectorielles distinctes sont supplémentaires.
2. Dans $\mathbb{C}$ (vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel), deux droites vectorielles engendrées par des complexes z_1 et z_2 non nuls tels que
$$\frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$$
sont supplémentaires. Ainsi :
$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.i = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.j = \mathbb{R}.i \oplus \mathbb{R}.j = \cdots$$
3. Dans $\mathbb{R}^3$, une droite vectorielle D et un plan vectoriel P tels que $D \not\subset P$ sont supplémentaires.
4. Dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les sous-espaces vectoriels des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.
5. Dans $E = \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([0, 1], \mathbb{R})$, la droite engendrée par la fonction $x \mapsto 1$ est supplémentaire de
$$\left\{f \in E,\ \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 0\right\}$$

Propriété 1.10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E sont supplémentaires dans E si, et seulement si :
$$E = E_1 + E_2 \text{ et } E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$$

此性质是证明子空间互补的重要方法，而证明两集合相等我们通常用double inclusion的方法。

Remarque 1.8

Si $E_1 \neq E$ et $E \neq \{0_E\}$, il y a une *infinité* de supplémentaires de E_1 (cela peut être faux sur d'autres corps $\mathbb{K}$ que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Nous admettrons que tout sous-espace vectoriel de E (quelconque) admet un supplémentaire.

Exercice(s) 1.5

1.5.1 Dans $\mathbb{R}^3$, trouver un supplémentaire du plan d'équation $x - y + z = 0$. Recommencer dans $\mathbb{C}^3$ (en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

1.5.2 Dans $\mathbb{R}^3$, trouver un supplémentaire de la droite d'équations :
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2\,x - y + 3\,z = 0 \end{cases}$$

1.5.3 Dans $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, trouver des supplémentaires de :
$$\{f \in E,\ f(0) = 0\}$$
$$\{f \in E,\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0\}$$
$$\mathrm{Vect}(\{x \mapsto x\})$$

1.5.4 Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit $n \in \mathbb{N}$, trouver un supplémentaire de
$$E_n = \{f \in E,\ f(x) = o(x^n)\}$$

1.5.5 On considère ici $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (on a ici $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$). En prenant en considération un supplémentaire de
$$\mathrm{Vect}(\{1, \sqrt{2}\}) \text{ dans } \mathbb{R}$$

démontrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est 1-périodique et une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est $\sqrt{2}$-périodique telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g(x) = x$$

1.1.6 Bases

Définition 1.11 – Partie ou famille libre et liée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Famille libre (finie)

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on dit que cette famille est *libre*, ou que les vecteurs sont *linéairement indépendants*, si (écriture unique de 0_E) :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . x_k = 0_E \implies \forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$$

On parle aussi de *partie libre*.

Famille liée (finie)

Une famille qui n'est pas libre est dite *famille liée* et les vecteurs de cette famille sont dits *linéairement dépendants*.

Famille libre

Plus généralement, une famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite *libre* (vecteurs *indépendants*), si (écriture unique de 0_E) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \underbrace{(i_1, \dots, i_n)}_{\text{distincts 2 à 2}} \in I^n,\ (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \text{ est libre.}$$

Autrement dit, $(x_i)_{i \in I}$ est libre si toute sous-famille *finie* est libre.

理解线性相关及线性无关的定义。

Proposition 1.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. Il est équivalent de dire :

1. *la famille $(x_i)_{i \in I}$ est liée ;*
2. *il existe une écriture de 0_E non triviale, soit*[a] *:*

$$\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists \underbrace{(i_1, \dots, i_n)}_{\textit{distincts 2 à 2}} \in I^N,\ \exists (\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} . x_{i_k} = 0_E$$

3. *autre formulation :*

$$\exists i_0 \in I,\ x_{i_0} \in \mathrm{Vect}(\{x_i,\ i \in I \setminus \{i_0\}\})$$

[a] Nous utiliserons parfois l'expression *non tous nuls*, pour parler de coefficients qui ne sont pas tous nuls. Notons la différence avec *tous non nuls* qui signifient que tous les coefficients sont non nuls, alors que *non tous nuls* signifie qu'il en existe au moins un non nul !

Démonstration

Immédiat.

Exemple 1.10 – Libre ou liée ?

1. Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $(1,2)$ et $(1,1)$ sont linéairement indépendants alors que les vecteurs $(1,2)$, $(1,1)$ et $(2,3)$ sont liés.
2. Dans $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel les parties $\{1,i\}$, $\{1,j\}$ et $\{i,j\}$ sont libres, alors que la partie $\{1,i,j\}$ est liée.
3. Dans $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, les parties $\{1,i\}$, $\{1,j\}$ et $\{i,j\}$ sont liées.

Propriété 1.11

Si $\{e_i,\ i\in I\}$ est une partie libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et si $x\notin \mathrm{Vect}(\{e_i,\ i\in I\})$, alors

$$\{x\}\cup\{e_i,\ i\in I\}\text{ est encore une partie libre de } E$$

Démonstration

Soit $\lambda\in\mathbb{K}$, $(i_1,\dots,i_n)\in I^n$ (distincts 2 à 2) et $(\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_n})\in\mathbb{K}^n$ tels que

$$\lambda.x+\sum_{k=1}^{n}\lambda_{i_k}.x_{i_k}=0_E$$

Supposons que $\lambda\neq 0_{\mathbb{K}}$. Alors

$$x=\sum_{k=1}^{n}\frac{-\lambda_{i_k}}{\lambda}.x_{i_k}\in\mathrm{Vect}(\{e_i,\ i\in I\})$$

ce qui contredit $x\notin\mathrm{Vect}(\{e_i,\ i\in I\})$. On a donc $\lambda=0_{\mathbb{K}}$ donc

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_{i_k}.x_{i_k}=0_E$$

d'où, puisque $\{e_i,\ i\in I\}$ est une partie libre de E, $\lambda_{i_1}=\cdots=\lambda_{i_n}=0_{\mathbb{K}}$.
On en déduit que $\{x\}\cup\{e_i,\ i\in I\}$ est une partie libre de E.

Propriété 1.12

Soit $\mathcal{X}=(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors :

1. s'il existe $i_0\in I$ tel que $x_{i_0}=0_E$, alors $\mathcal{X}$ est liée ;
2. s'il existe $(i,j)\in I^2$ tel que $i\neq j$ et $x_i=x_j$, alors $\mathcal{X}$ est liée ;
3. si une sous-famille $(x_i)_{i\in J}$ où $J\subset I$ est liée, alors $\mathcal{X}$ est liée ;
4. si $\mathcal{X}$ est libre, alors toute sous-famille de $\mathcal{X}$ est libre.

Démonstration

1. Il existe une écriture de 0_E non trivial, car $0_E=1.x_{i_0}$, donc $\mathcal{X}$ est liée.
2. Il existe une écriture de $0_{\mathbb{K}}$ non trivial, car $0_E=x_i-x_j=1.x_i+(-1).x_j$, donc $\mathcal{X}$ est liée.
3. S'il existe une écriture de 0_E non trivial à partir des $(x_i)_{i\in J}$, c'est encore une écriture de 0_E non trivial à partir des vecteurs de $\mathcal{X}$, car $(x_i)_{i\in J}$ est une sous-famille de $\mathcal{X}$.
4. C'est la contraposée de la propriété précédente.

Définition 1.12 – Base d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, une famille $(x_i)_{i\in I}$ est appelée *base de* E, si elle est à la fois famille libre et famille génératrice.

一族向量是向量空间 E 的基底,需要同时满足线性无关和生成的空间是 E。

Propriété 1.13 – Propriété des bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors [a] :

$$\boxed{\forall x \in E,\ \exists! n \in \mathbb{N},\ \exists! \underbrace{\{i_1, \dots, i_n\}}_{\text{distincts 2 à 2}} \subset I,\ \exists! (\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) \in (\mathbb{K} \setminus \{0_K\})^n,\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}.e_{i_k}}$$

Cela signifie que tout vecteur de E s'écrit *de manière unique* comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$.

a. Notons que dans cette écriture, lorsque $x = 0_E$, on a $n = 0$.

向量空间 E 中的向量 x 在不同的基底下有不同的坐标。

Démonstration

Immédiat : x s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ est génératrice et cette combinaison linéaire est unique car $\mathcal{B}$ est libre.

Remarque 1.9

La famille $(\mu_i)_{i\in I}$ définie par :

$$\forall i \in \{i_1, \dots, i_n\},\ \mu_i = \lambda_i \text{ et } \forall i \in I \setminus \{i_1, \dots, i_n\},\ \mu_i = 0_{\mathbb{K}}$$

est appelée *coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.*

Remarque 1.10

L'ensemble vide $\emptyset$ est une base de $\{0_E\}$.

Exemple 1.11

1. La *base canonique* de $\mathbb{K}^n$ est la famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ième élément}}, 0, \dots, 0)$$

   La base canonique est une base de $\mathbb{K}^n$.
2. La famille $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales.

Propriété 1.14

Il est équivalent de dire :

1. la famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E ;
2. on a la décomposition en somme directe de E suivante :

$$E = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Vect}(\{e_i\}) = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{K}.e_i$$

Démonstration

Immédiat : on utilise la proposition 1.7, page 29 et on remarque que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si les $\mathrm{Vect}(\{e_i\})$ sont en somme directe.

Remarque 1.11

La notion de base n'est donc qu'un cas très particulier de la décomposition en somme directe.

Exercice(s) 1.6

1.6.1 Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille de vecteurs de E, démontrer que :

(a) Dans tous les cas :

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!],\ \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_n\}) = \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_p\}) + \mathrm{Vect}(\{e_{p+1}, \dots, e_n\})$$

(b) Si de plus, $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, alors :

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!],\ \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_n\}) = \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_p\}) \oplus \mathrm{Vect}(\{e_{p+1}, \dots, e_n\})$$

1.6.2 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \;\middle|\; \text{et} \quad \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ \\ x - 2\,y + 3\,z - 5\,t = 0 \end{array} \right\} \text{ et } G = \mathrm{Vect}\left(\{(1, -2, 0, 2), (0, 0, 1, 3)\}\right)$$

(a) Démontrer que
$$\mathbb{R}^4 = F \oplus G$$

(b) Trouver une base de E $(e_1, \dots, e_4)$ où $\{e_1, e_2\} \subset F$ et $\{e_3, e_4\} \subset G$.

(c) Exprimer les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ dans cette base.

1.6.3 Dans $\mathbb{R}^5$, on considère les vecteurs :

$$a = (2, 3, 0, 1, 2),\ b = (3, 0, 1, 2, 3),\ c = (0, 1, 2, 3, 0),\ d = (1, 2, 3, 0, 1) \text{ et } e = (-1, 4, 1, 2, -1)$$

On pose
$$F = \mathrm{Vect}(\{a, b, c\}) \text{ et } G = \mathrm{Vect}(\{d, e\})$$

(a) Trouver des bases de F, G, $F + G$ et $F \cap G$.

(b) Trouver des équations de ces sous-espaces vectoriels.

1.6.4 On considère dans $\mathbb{R}^4$ les cinq vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, -3, 5, -1),\ u_2 = (-2, 5, 0, 1),\ u_3 = (-3, 7, 5, 1),\ u_4 = (3, -1, -2, 1) \text{ et } u_5 = (2, 1, 3, 1)$$

Donner une équation du sous-espace vectoriel engendré par ces cinq vecteurs.

1.6.5 Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions :

$$f_1 \ :\ x \mapsto \sin(x + 1),\ f_2 \ :\ x \mapsto \sin(x + 2) \text{ et } f_3 \ :\ x \mapsto \sin(x + 3)$$

Déterminer une base de F.

1.6.6 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_\alpha \ :\ \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\alpha\, x} \end{cases}$$

Démontrer que :
$$(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}} \text{ est une famille libre de } \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

1.6.7 Soit A un ensemble, f une application de A dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que $f(A)$ est infini. Démontrer que la famille $(f^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$.

1.6.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1 < \cdots < x_n$ des réels. On pose $x_0 = -\infty$ et $x_{n+1} = +\infty$. Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$, telles que la restriction de f à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $(i \in [\![0, n]\!])$ est une fonction polynomiale de degré ≤ 2. Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en donner une base.

1.6.9 Démontrer que dans $\mathbb{R}^n$, il existe une famille infinie F de vecteurs tels que chaque sous famille de cardinal n est libre.

1.1.7 Dimension finie

注释 1.2

本小结关于线性空间的性质和定理都是在有限维的情况下得出，无限维的情况并不成立。

Définition 1.13 – Espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est *de dimension finie* s'il possède une base de cardinal fini. Dans le cas contraire, il est dit de *dimension infinie*.

Exemple 1.12 – Dimensions

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie.
2. Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, alors E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
3. L'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Théorème 1.1 – Échange

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $(g_1, \ldots, g_n)$ une famille génératrice et $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ une famille libre de E, alors :

1. $p \leq n$.
2. *On peut* échanger *certains vecteurs de la famille génératrice avec des vecteurs de la famille libre tout en gardant la propriété d'être génératrice, soit :*

$$\exists (i_{p+1}, \ldots, i_n) \in [\![1, n]\!]^{n-p}, \; (\ell_1, \ldots, \ell_p, g_{i_{p+1}}, \ldots, g_{i_n}) \text{ est une famille génératrice de } E$$

Démonstration

— Puisque $(g_1, \ldots, g_n)$ est génératrice, ℓ_1 est combinaison linéaire de $(g_1, \ldots, g_n)$. De plus, $\ell_1 \neq 0_E$ (car (ℓ_1) est libre), on peut supposer que les coefficients ne sont pas tous nuls, par exemple le premier :

$$\ell_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i . g_i$$

avec $\lambda_1 \neq 0$. Alors

$$g_1 = \frac{1}{\lambda_1} . \ell_j - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} . g_i \in \mathrm{Vect}(\{\ell_1, g_2, \ldots, g_p\})$$

On a donc

$$E = \mathrm{Vect}(\{g_1, \ldots, g_p\}) = \mathrm{Vect}(\{\ell_1, g_2, \ldots, g_p\})$$

— On itère le procédé. Supposons qu'on ait formé une famille génératrice de la forme

$$(\ell_1, \ldots, \ell_k, g_{k+1}, \ldots, g_n)$$

avec $k \leq p-1$ et $k \leq n-1$. Alors

$$\ell_{k+1} \in \mathrm{Vect}(\{\ell_1, \ldots, \ell_k, g_{k+1}, \ldots, g_n\})$$

donc on peut écrire

$$\ell_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i . \ell_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i . g_i$$

Ce n'est pas possible d'avoir $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ (car sinon $(\ell_1, \ldots, \ell_{k+1})$ donc $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ serait liées). Par le même argument qui ci-dessus, on a donc

$$\ell_{k+1} \in \mathrm{Vect}(\{\ell_1, \ldots, \ell_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_n\})$$

On a donc

$$E = \mathrm{Vect}(\{\ell_1, \ldots, \ell_k, g_{k+1}, \ldots, g_n\}) = \mathrm{Vect}(\{\ell_1, \ldots, \ell_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_n\})$$

— Il reste à démontrer que $p \leq n$. Si $p > n$, en prenant $k = n-1$ dans la construction ci-dessus, on obtient que $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ est une partie génératrice de E. On aurait alors $\ell_{n+1} \in \operatorname{Vect}(\{\ell_1, \ldots, \ell_n\})$, donc $(\ell_1, \ldots, \ell_{n+1})$ serait liée, ce qui contredit le fait que $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ est libre. On a donc $p \leq n$.

Remarque 1.12

On peut aussi énoncer ce résultat avec une famille génératrice de cardinal quelconque (peut-être infini), où l'on pourra échanger p vecteurs de cette famille tout en la gardant génératrice.

Théorème 1.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors toutes *les bases ont même cardinal. Ce cardinal commun est appelé* dimension de E *et est notée*[a] *:*

$$\dim_{\mathbb{K}} E \text{ ou } \dim E \text{ s'il n'y a pas ambiguïté sur le corps } \mathbb{K}$$

[a] On utiliser aussi parfois la notation $\dim(E)$ ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Démonstration

C'est une application immédiate du théorème de l'échange car les bases sont à la fois libres et génératrices.

Définition 1.14

Droite

On appelle *droite vectorielle* tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

Plan

On appelle *plan vectoriel* tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

Dimension nulle

On convient que l'espace vectoriel $\{0_E\}$ est de dimension 0.

Remarque 1.13

Cette définition est cohérente avec celle de droite vectorielle engendrée : si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel différent de $\{0_E\}$ et si $x \in E$, $x \neq 0_E$, alors $\{x\}$ est une base de $\mathbb{K}.x$, la droite vectorielle engendrée par x, qui est bien de dimension 1.

Exemple 1.13 – Dimensions

1. On a clairement :
$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n,\ \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$$
2. Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, alors :
$$\dim_{\mathbb{C}} E = n \implies \dim_{\mathbb{R}} E = 2\,n$$
3. Quelques espaces de dimensions infinies : le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales, mais aussi :
$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \mathscr{C}^p(\mathbb{R},\mathbb{R})\ (p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}),\ \ldots$$

由上例可以发现 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$，线性空间的维数和域相关.

Théorème 1.3 – Base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ une famille libre de E, alors

1. $p \leq n$.
2. *On peut compléter la famille libre en une base, soit :*

$$\exists (\ell_{p+1}, \dots, \ell_n) \in E^{n-p},\ (\ell_1, \dots, \ell_n) \text{ est une base de } E$$

Démonstration

C'est une application immédiate du théorème de l'échange, en prenant comme famille génératrice une base de E (qui a n éléments).

Principe de construction de bases (en dimension finie). Si on veut trouver une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, on procède par itération :

1. Supposons construits les p premiers vecteurs de la base (au départ $p = 0$), notés $(e_1, \dots, e_p)$, on prend alors un vecteur de E qui n'est pas dans $\text{Vect}(\{e_1, \dots, e_p\})$, cela fait un nouveau vecteur. Si l'on dispose d'une partie génératrice de E, on cherche le premier vecteur de la partie génératrice qui n'est pas dans $\text{Vect}(\{e_1, \dots, e_p\})$.
2. On réitère.

Exemple 1.14

Trouvons une base du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$, d'équations $x+y+z+t = 0$ et $x-y+2\,z+3\,t = 0$. Les calculs sont explicités dans la session `Wxmaxima` 1.2, de la présente page. Ce qui nous donne, par exemple, la base $e_1 = (-2, 1, 0, 1)$ et $e_2 = (-3, 1, 2, 0)$.

Session `Wxmaxima` 1.2 – Recherche d'une base dans $\mathbb{R}^4$

(%i1) `solve([x+y+z+t=0,x-y+2*z+3*t=0],[x,y,z,t]);`

(%o1) $[[x = -\frac{3\,\%r2 + 4\,\%r1}{2}, y = \frac{\%r2 + 2\,\%r1}{2}, z = \%r2, t = \%r1]]$

(%i2) `subst([%r1=1,%r2=0],%);`

(%o2) $[[x = -2, y = 1, z = 0, t = 1]]$

(%i3) `subst([%r2=2,%r1=0],%o1);`

(%o3) $[[x = -3, y = 1, z = 2, t = 0]]$

Session `Python` 1.3 – Recherche d'une base dans $\mathbb{R}^4$

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```
X = Matrix([x, y, z, t])
X
```

Out [2]

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

In [3]

```
solve([Eq(x+y+z+t, 0),
       Eq(x-y+2*z+3*t, 0)], [x, y, z, t])
```

Out [3]

$$\left\{x : -2t - \frac{3z}{2},\ y : t + \frac{z}{2}\right\}$$

In [4]

```
X.subs(_)
```

Out [4]

$$\begin{bmatrix} -2t - \frac{3z}{2} \\ t + \frac{z}{2} \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

In [5]

```
(_.subs({z: 2, t: 0}),
 _.subs({z: 0, t: 1}))
```

Out [6]

$$\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Exemple 1.15

Cherchons un supplémentaire de F (et une base de ce supplémentaire) : on cherche un vecteur qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}(\{e_1, e_2\})$. Pour cela, il suffit d'imposer $z = t = 0$ et $(x, y) \neq (0, 0)$, car

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a.e_1 + b.e_2 = (-2\,a - 3\,b, a + b, 2\,b, a)$$

Par exemple, on peut prendre :

$$e_3 = (1, 0, 0, 0) \text{ puis } e_4 = (0, 1, 0, 0)$$

Remarque 1.14

Remarquons que nous avons utilisé une partie génératrice bien connue : la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Propriété 1.15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $\dim E = n$, alors :

1. toute famille de plus de $n+1$ éléments est liée ;
2. toute partie génératrice a plus de n éléments ;
3. toute partie libre a moins de n éléments ;
4. toute partie génératrice de n éléments est une base ;
5. toute partie libre de n éléments est une base.

Démonstration

1. Si une famille de plus de $n+1$ éléments est libre, on pourrait la compléter en une base qui contiendrait au moins $n+1$ éléments, ce qui contredit $\dim E = n$.
2. On utilise le théorème de l'échange avec une base comme famille libre.
3. C'est le théorème de la base incomplète.
4. Soit $\mathcal{G}$ une partie génératrice à n éléments. On utilise le théorème de l'échange pour extraire une base $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ de E (en partant d'une une sous-famille libre de $\mathcal{G}$). Mais $\mathcal{B}$ a $n = \dim E$ élément car c'est une base, donc on a $\mathcal{G} = \mathcal{B}$, c'est donc une base.
5. Soit $\mathcal{L}$ une partie libre à n éléments. On utilise le théorème de la base incomplète pour obtenir une base $\mathcal{L}' \supset \mathcal{L}$ de E. Mais $\mathcal{L}'$ a $n = \dim E$ élément car c'est une base, donc on a $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, c'est donc une base.

Propriété 1.16

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors de toute partie génératrice on peut extraire une base (finie).

Démonstration

Si $E = \{0_E\}$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $E \neq \{0_E\}$.
Soit $\mathscr{G}$ une partie génératrice de E (éventuellement infinie). Il existe une base $\mathcal{B}$ de E qui est finie. Tous les vecteurs (en nombre fini) de $\mathcal{B}$ peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{G}$ donc E est en fait engendré par une sous-famille finie $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$.
Comme $E \neq \{0_E\}$, $\mathcal{G}'$ contient un vecteur $x \neq 0_E$. Le théorème de la base incomplète permet alors de construire une base de E en complétant la famille (x) par des éléments de $\mathcal{G}$.

Propriété 1.17

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors E est de dimension finie si, et seulement si, il possède une partie génératrice finie (c'est d'ailleurs une définition fréquente des espaces de dimension finie).

Démonstration

C'est une conséquence immédiate de la définition de la dimension finie et de la proposition précédente.

Propriété 1.18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors E est de dimension infinie si, et seulement si, il existe des parties libres de cardinal quelconque $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

Cela revient à démontrer que E est de dimension finie si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que toute famille de E à n éléments soit liée. On peut prendre $n = \dim E + 1$.

Propriété 1.19 – Dimension finie et sous-espaces

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si E est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et, de plus :

$$\dim F \leq \dim E$$

De plus

$$E = F \iff \dim E = \dim F$$

Démonstration

Si $F = \{0_E\}$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $F \neq \{0_E\}$.
Notons p le nombre maximal d'éléments que peut avoir une famille libre $\mathcal{L}$ de F. On a $1 \leq p \leq \dim E$ (car $F \neq \{0_E\}$ et que $\mathcal{L}$ est une famille libre de E).
Soit $\mathcal{L}$ une famille libre d'éléments de F de cardinal p. Pour tout $x \in F$, la famille $(\mathcal{L}, x)$ est liée (car sinon cela contredit la définition de p), donc x est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{L}$, donc $\mathcal{L}$ est une famille génératrice de F, c'est donc une base de F. On a donc $\dim F = p \leq \dim E$.
Si $\dim E = \dim F = p$, $\mathcal{L}$ est une famille libre de E à $p = \dim E$ éléments, donc c'est une base de E : on a $\text{Vect}(\mathcal{L}) = E$. Comme de plus $\text{Vect}(\mathcal{L}) = F$, on a bien $E = F$.

Remarque 1.15

La proposition précédente est très pratique pour démontrer l'égalité de deux espaces vectoriels : au lieu de démontrer le résultat par double inclusion, on peut se limiter à démontrer une inclusion et conclure par une égalité de dimension.

Remarque importante 1.16

Attention à une erreur courante : si $\mathcal{B}$ est une base de E et si F est un sous-espace vectoriel de E, il est faux en général qu'une sous-famille de $\mathcal{B}$ soit une base de F.
Par exemple, une base de $F = \mathbb{R}.(1,1)$ n'est jamais une sous-famille de la base canonique $((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.15 – Base adaptée à une décomposition en somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Base adaptée à une somme directe de deux sous-espaces vectoriels

On suppose que $E = F \oplus G$, on peut alors construire une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que

$$(e_1, \dots, e_p) \text{ base de } F \text{ et } (e_{p+1}, \dots, e_n) \text{ base de } G, \text{ où } p = \dim F$$

Une telle base est dite *base adaptée à la somme directe.*

Base adaptée à une somme directe finie

De même, lorsque l'on a une décomposition en somme directe de E, on peut toujours construire une base adaptée à cette somme directe.

Propriété 1.20

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et si $E = F \oplus G$, alors :

$$\boxed{\dim E = \dim F + \dim G}$$

Plus généralement, si E admet une décomposition en somme directe [a] :

$$\boxed{E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k \ \Rightarrow \ \dim E = \sum_{k=1}^{p} \dim E_k}$$

[a] Il y alors un nombre *fini* de termes dans la décomposition en somme directe, si on enlève les espaces réduits à $\{0_E\}$. Notons ce nombre p.

Démonstration

C'est immédiat en considérant une base adaptée à cette décomposition en somme directe.

Propriété 1.21

Si E_1 et E_2 sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, alors $E_1 \times E_2$ est de dimension finie et :

$$\boxed{\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2}$$

Plus généralement, si $E_1, \dots, E_p$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ est de dimension finie et :

$$\boxed{\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \sum_{k=1}^{p} \dim E_k}$$

Démonstration

Si $E_1 = \{0_E\}$ ou $E_2 = \{0_E\}$, c'est immédiat. Supposons que $E_1 \neq \{0_E\}$ et $E_2 \neq \{0_E\}$.
Si $(e_1, \dots, e_{n_1})$ est une base de E_1 et $(e'_1, \dots, e'_{n_2})$ est une base de E_2 (avec $n_1 = \dim E_1$ et $n_2 = \dim E_2$), alors on vérifie que

$$((e_1, 0_{E_2}), \dots, (e_{n_1}, 0_{E_2}), (0_{E_1}, e'_1), \dots, (0_{E_1}, e'_{n_2}))$$

est une base de $E_1 \times E_2$ (en démontrant que c'est une famille libre et génératrice) et qui a $n_1 + n_2 = \dim E_1 + \dim E_2$ éléments.
On en conclut que $E_1 \times E_2$ est de dimension finie et que $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$.
Dans le cas général, on procède par récurrence sur p.

Proposition 1.3 – Formule de Grassman

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors :

$$\boxed{\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$$

Démonstration

Soit F_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans F et soit G_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans G :

$$F = (F \cap G) \oplus F_1 \text{ et } G = (F \cap G) \oplus G_1$$

On a alors

$$F + G = (F \cap G) \oplus F_1 \oplus G_1$$

Pour conclure, il suffit de prendre une base adaptée à cette décomposition en somme directe.

Propriété 1.22

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors, pour tout $p \in [\![2, n-1]\!]$:

$$\mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_p\}) \text{ et } \mathrm{Vect}(\{e_{p+1}, \dots, e_n\}) \text{ sont supplémentaires dans } E.$$

2. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors il existe (au moins) un sous-espace supplémentaire de F dans E.

Démonstration

1. C'est immédiat : puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i . e_i}_{\in \mathrm{Vect}(\{e_1,\dots,e_p\})} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i . e_i}_{\mathrm{Vect}(\{e_{p+1},\dots,e_n\})}$$

2. On considère une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F (avec $p = \dim F \leq n = \dim E$). C'est une famille libre de E qu'on peut compléter en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E. Alors d'après ce qui précède, $F = \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_p\})$ et $\mathrm{Vect}(\{e_{p+1}, \dots, e_n\})$ sont supplémentaires.

Exercice(s) 1.7

1.7.1 Soit

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2\,x - 3\,y + z = 0\} \text{ et } F_2 = \{(\lambda + 2, \mu, \lambda - \mu, \lambda - 7, \mu),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Démontrer que $F_1 = F_2$.

1.7.2 Dans $\mathbb{R}^5$, on pose

$$F = \{(v, w, x, y, z),\ v + y + z = x + y - z = 0\}$$
$$G_a = \{(v, w, x, y, z),\ v - x + a\,z = 0 = a\,v + w + x + 2\,y\},\ a \in \mathbb{R}$$

Quelle est la dimension de $F \cap G_a$? Quelle est la dimension de $F + G_a$?

1.7.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on suppose qu'on a la somme directe $E = F_1 \oplus F_2$. Soit G un sous-espace vectoriel de E tel que :

$$G \cap F_1 = \{0_E\} \text{ et } F_2 \subset G$$

Démontrer que $F_2 = G$.

1.7.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = \{0_E\}$. Démontrer qu'il existe un supplémentaire de F contenant G.

1.7.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel strict de E ($F \neq E$). Démontrer que F admet une infinité de supplémentaires.

1.7.6 Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $k \in \mathbb{N}^*$ et V_1 , V_2 , …, V_k des sous-espaces vectoriels de V tels que

$$\sum_{i=1}^{k} \dim(V_i) > (k-1)\,n$$

Démontrer que

$$\bigcap_{i=1}^{k} V_i \neq \{0_V\}$$

1.7.7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension $p < n$.

(a) Démontrer que l'on peut alors trouver un supplémentaire commun à F_1 et F_2.

(b) Généraliser lorsque le corps est $\mathbb{R}$ à un nombre fini de sous-espaces vectoriels de dimension p.

(c) Puis, à une infinité dénombrable de tels sous-espaces vectoriels.

(d) Donner un contre-exemple pour une infinité non-dénombrable.

1.2 Applications linéaires

1.2.1 Généralités

Définition 1.16 – Applications linéaires

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, une application $f : E \to E'$ est dite *application linéaire* si elle est compatible avec les structures d'espaces vectoriels, c'est-à-dire [a] :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans E' se note :

$$\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,E') \text{ ou } \mathscr{L}(E,E') \text{ lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur le corps } \mathbb{K}$$

1. Lorsque $E = E'$, on parle *d'endomorphisme de* E et on note $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\mathscr{L}(E)$.
2. Lorsque f est bijective, on parle *d'isomorphisme entre* E *et* E'.
3. Lorsque $E = E'$ et f est bijective, on parle *d'automorphisme de* E et on note $\mathscr{GL}_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\mathscr{GL}(E)$.
4. Lorsque $E' = \mathbb{K}$, on parle *de forme linéaire* et on note $E^\star$.

a. L'image d'une combinaison linéaire est donc la combinaison linéaire des images.

注释 1.3

我们把f称作 E 到 E' 的线性映射。当线性映射从向量空间到它本身称作自同态；当线性映射是双射时称作同构；当线性映射同时满足自同态和同构时称作自同构；当线性映射是从向量空间到它所对应的域$\mathbb{K}$ 时称作线性泛函。

Exemple 1.16 – Applications linéaires

1. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'*application identité*, notée id_E et définie par $\mathrm{id}_E(x) = x$ pour tout $x \in E$ est une application linéaire de E dans lui-même (c'est donc un endomorphisme de E). Plus généralement, si $\alpha \in \mathbb{K}$, l'*homothétie de rapport* α, définie par $x \mapsto \alpha.x$, est un endomorphisme de E. En particulier, l'application nulle $x \mapsto 0_E$ est un endomorphisme de E.
2. Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien, les projections, symétries, rotations, homothéties vectorielles sont des endomorphismes. Les symétries, rotations et homothéties (de rapport non nul) sont des automorphismes. Les translations de vecteur non nul *ne sont pas* des applications linéaires !
3. La dérivation des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est une application linéaire de
$$\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}) \text{ dans } \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$$
4. L'application définie pour $a < b$ par :
$$\begin{cases} \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \to \left\{f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R}),\ f(a) = 0\right\} \\ f \mapsto \left(x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\right) \end{cases}$$

est un isomorphisme.

5. L'application définie par :

$$\begin{cases} \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \end{cases} \quad \text{est une forme linéaire}$$

Remarque 1.17

Si $f \in \mathscr{L}(E,E')$, alors $f(0_E) = 0_{E'}$ car

$$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E) = 2.f(0_E)$$

Propriété 1.23

Si E et E' sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors :

$$\mathscr{L}(E,E') \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel}$$

Démonstration

Montrons que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,E')$.

— Il est immédiat que l'application nulle $x \mapsto 0_{E'}$ est linéaire de E dans E'.
— Soit $f \in \mathscr{L}(E,E')$ et $g \in \mathscr{L}(E,E')$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in E^2,\ \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda.f + \mu.g)(\alpha.x + \beta.y) &= \lambda.f(\alpha.x + \beta.y) + \mu.g(\alpha.x + \beta.y) \\ &= \lambda.\big(\alpha.f(x) + \beta.f(y)\big) + \mu.\big(\alpha.g(x) + \beta.g(y)\big) \\ &= (\lambda\,\alpha).f(x) + (\lambda\,\beta).f(y) + (\mu\,\alpha).g(x) + (\mu\,\beta).g(y) \\ &= \alpha.\big(\lambda.f(x) + \mu.g(x)\big) + \beta.\big(\lambda.f(y) + \mu.g(y)\big) \\ &= \alpha.(\lambda.f + \mu.g)(x) + \beta.(\lambda.f + \mu.g)(y) \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\lambda.f + \mu.g \in \mathscr{L}(E,E')$.

Finalement, $\mathscr{L}(E,E')$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,E')$, c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété 1.24

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,E')$.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors :

$$f(F) \overset{\text{Not}}{=} \{f(x),\ x \in F\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E'$$

De même, si F' est un sous-espace vectoriel de E', alors :

$$f^{-1}(F') \overset{\text{Not}}{=} \{x \in E,\ f(x) \in F'\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$

Démonstration

— On a vu (voir la remarque 1.17, de la présente page) que $0_{E'} = f(0_E) \in f(F)$ (avec $0_E \in F$).
Soit $y_1 = f(x_1) \in f(F)$ et $y_2 = f(x_2) \in f(F)$ (avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F$) et soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Par linéarité de f, on a

$$\lambda.y_1 + \mu.y_2 = \lambda.f(x_1) + \mu.f(x_2) = f(\underbrace{\lambda.x_1 + \mu.x_2}_{\in F}) \in f(F)$$

donc $f(F)$ est stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de E.
— On a bien $0_E \in f^{-1}(F')$ car $0_{E'} = f(0_E)$.
Soit $x_1 \in f^{-1}(F')$ et $x_2 \in f^{-1}(F')$ et soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Par linéarité de f, on a

$$f(\lambda.x_1 + \mu.x_2) = \lambda.\underbrace{f(x_1)}_{\in F'} + \mu.\underbrace{f(x_2)}_{\in F'} \in F'$$

car F' est stable par combinaison linéaire. On en déduit que $f^{-1}(F')$ est stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 1.17

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire. En particulier, on a :

1. Si E, E' et E'' sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, si $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et $g \in \mathscr{L}(E', E'')$ les applications :

$$\rho_f \ : \begin{cases} \mathscr{L}(E', E'') \to \mathscr{L}(E, E'') \\ \varphi \mapsto \varphi \circ f \end{cases} \quad \text{et } \lambda_g \ : \begin{cases} \mathscr{L}(E, E') \to \mathscr{L}(E, E'') \\ \varphi \mapsto g \circ \varphi \end{cases}$$

sont des applications linéaires.

2. On peut donc définir pour un endomorphisme f de E, la notion *d'itéré* de la manière suivante :

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{id}_E \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ f^n = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f \end{cases}$$

On a alors les formules suivantes, si f et g sont deux endomorphismes de E tels que $\boxed{f \circ g = g \circ f}$:

(a) (Formule du binôme) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ (f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . f^k \circ g^{n-k}}$$

(b) (Identité remarquable) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ f^n - g^n = (f-g) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k} \right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k} \right) \circ (f-g)}$$

3. Si f est un automorphisme de E, alors f^{-1} est aussi un automorphisme de E (en particulier c'est un endomorphisme de E) et on définit de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ f^{-n} = \left(f^{-1}\right)^n$$

Exercice(s) 1.8

1.8.1 Soit f un endomorphisme de E, calculer

$$(2. \mathrm{id}_E + 3.f)^4$$

1.8.2 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (on dit que f *est nilpotent*). Démontrer que $\mathrm{id}_E - f$ est inversible.

1.2.2 Images et noyaux

Définition 1.17 – Image et noyau d'une application linéaire

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E, E')$, alors :

— L'image de E par f est un sous-espace vectoriel de E' noté :

$$\mathrm{Im}(f) \overset{\text{Not}}{=} f(E) = \{f(x),\ x \in E\}$$

— L'image réciproque de $\{0_{E'}\}$ par f est un sous-espace vectoriel de E appelé *noyau de f* et noté

$$\mathrm{Ker}(f) \overset{\text{Not}}{=} f^{-1}(\{0_{E'}\}) = \{x \in E,\ f(x) = 0_{E'}\}$$

像空间和核空间，它们分别是E' 和 E 的子空间。

Exemple 1.18 – Images et noyaux

1. Pour tout endomorphisme p d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E

$$\boxed{p \circ p = p \ \Rightarrow\ E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)}$$

En effet, un raisonnement par analyse-synthèse démontre que x se décompose de manière unique sous la forme

$$\forall x \in E,\ x = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}\, p} + \underbrace{\big(x - p(x)\big)}_{\in \mathrm{Ker}\, p}$$

2. On peut utiliser les images et noyaux pour démontrer que des ensembles sont des sous-espaces vectoriels :
   (a) (Image – peu fréquent) :

$$\big\{f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R}),\ f(a) = 0\big\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$$

   en considérant l'endomorphisme de $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$:

$$f \mapsto \left(x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\right)$$

   (b) (Noyau – très fréquent) :

$$\big\{f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R}),\ f(a) = 0\big\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$$

   en considérant la forme linéaire de $\mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$:

$$f \mapsto f(a)$$

Proposition 1.4

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, E')$, alors :

$$f \text{ est injective si, et seulement si, } \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$
$$f \text{ est surjective si, et seulement si, } \mathrm{Im}(f) = E'$$

Démonstration

La caractérisation de la surjectivité est immédiate. Pour l'injectivité, on utilise le fait que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \iff f(x) - f(y) = 0_{E'} \iff f(x-y) = 0_{E'} \iff x - y \in \mathrm{Ker}(f)$$

证明过程中运用了线性映射和核空间定义的性质。

Remarque importante 1.18

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E, alors pour connaître une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,E')$, il faut et il suffit de connaître la famille des images $(f(e_i))_{i\in I}$.
Plus formellement :

$$\begin{cases} \mathscr{L}(E,E') \to {E'}^I \\ f \mapsto (f(e_i))_{i\in I} \end{cases} \quad \text{est un isomorphisme}$$

C'est pourquoi il suffit de donner uniquement les images des vecteurs d'une base pour décrire une application linéaire.
Plus généralement, pour tout $(x_i)_{i\in I} \in {E'}^I$, il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,E')$ telle que

$$\forall i \in I,\ f(e_i) = x_i$$

Propriété 1.25

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $f \in \mathscr{L}(E,E')$ et si $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I}$ est une famille de E, alors :

$$\begin{aligned} f \text{ injective et } \mathcal{X} \text{ libre} &\implies (f(x_i))_{i\in I} \text{ libre} \\ f \text{ surjective et } \mathcal{X} \text{ génératrice} &\implies (f(x_i))_{i\in I} \text{ génératrice} \\ f \text{ bijective et } \mathcal{X} \text{ base} &\implies (f(x_i))_{i\in I} \text{ base} \\ \mathcal{X} \text{ génératrice} &\implies \mathrm{Vect}\big(\{f(x_i),\ i \in I\}\big) = \mathrm{Im}(f) \end{aligned}$$

Ces propriétés sont vraies même si E est de dimension infinie (mais ce sera surtout utile en dimension finie).

Démonstration

1. Notons $(i_1,\dots,i_p)$ une sous-famille finie quelconque de I. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_i.f(x_{i_k}) = 0_{E'}$$
Par linéarité, on a donc
$$f\Big(\sum_{k=1}^{p} \lambda_i.x_{i_k}\Big) = 0_{E'}$$
donc
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_i.x_{i_k} \in \mathrm{Ker}\, f$$
Puisque f est injective, on a $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$ donc
$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_i.x_{i_k} = 0_E$$
Comme $\mathcal{X}$ est libre, on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$, ce qui démontre que $(f(x_{i_1}),\dots,f(x_{i_p}))$ est libre, donc que $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre.
2. Soit $y \in E'$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $\mathcal{X}$ est génératrice, il existe $(i_1,\dots,i_p)$ une sous-famille finie de I et $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que
$$x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i.x_{i_k}$$
On a alors par linéarité de f
$$y = f(x) = f\Big(\sum_{k=1}^{p} \lambda_i.x_{i_k}\Big) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i.f(x_{i_k})$$
ce qui démontre que y s'écrit comme une combinaison linéaire finie d'éléments de $(f(x_i))_{i\in I}$. Finalement, $(f(x_i))_{i\in I}$ est génératrice.
3. On applique les points 1 et 2 pour démontrer que $(f(x_i))_{i\in I}$ est à la fois libre et génératrice.
4. Il s'agit du point 2 en remplaçant E' par $\mathrm{Im}\, f$ et en remarquant que f est surjective sur son image.

Remarque importante 1.19

En particulier, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et si $f \in \mathscr{L}(E,E')$, alors

1. f est surjective si, et seulement si, $(f(e_i))_{i\in I}$ engendre E' ;
2. f est injective si, et seulement si, $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre ;
3. f est bijective si, et seulement si, $(f(e_i))_{i\in I}$ est une base de E'.

Propriété 1.26

Soit E, E' et E'' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g\circ f), &\qquad (f\in\mathscr{L}(E,E'),\ g\in\mathscr{L}(E',E''))\\
\operatorname{Im}(g\circ f) \subset \operatorname{Im}(g), &\qquad (f\in\mathscr{L}(E,E'),\ g\in\mathscr{L}(E',E''))\\
g\circ f = 0_{\mathscr{L}(E,E'')} \iff \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g), &\qquad (f\in\mathscr{L}(E,E'),\ g\in\mathscr{L}(E',E''))\\
\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im}(f)+\operatorname{Im}(g), &\qquad (f\in\mathscr{L}(E,E'),\ g\in\mathscr{L}(E,E'))\\
\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Ker}(g) \subset \operatorname{Ker}(f+g), &\qquad (f\in\mathscr{L}(E,E'),\ g\in\mathscr{L}(E,E'))
\end{aligned}$$

Démonstration

1. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$, on a $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(0_{E'}) = 0_{E''}$ donc $x \in \operatorname{Ker}(g\circ f)$.
2. Soit $z = (g\circ f)(x) \in \operatorname{Im}(g\circ f)$ avec $x \in E$. En particulier, $z = g(f(x))$ avec $f(x) \in E'$ donc $z \in \operatorname{Im} g$.
3. Supposons $g\circ f = 0_{\mathscr{L}(E,E'')}$. Soit $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$ avec $x \in E$. On a alors $g(y) = g(f(x)) = (g\circ f)(x) = 0_{E''}$ donc $y \in \operatorname{Ker} g$. Supposons $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$. Soit $x \in E$. On a $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = 0_{E''}$ car $f(x) \in \operatorname{Im}(f)$, donc $g\circ f = 0_{\mathscr{L}(E,E'')}$.
4. Soit $y = (f+g)(x) \in \operatorname{Im}(f+g)$ avec $x \in E$. Alors $y = f(x)+g(x)$ avec $f(x) \in \operatorname{Im} f$ et $g(x) \in \operatorname{Im} g$ donc $y \in \operatorname{Im}(f)+\operatorname{Im}(g)$.
5. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Ker}(g)$. Alors $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 0_{E'}+0_{E'} = 0_{E'}$ donc $x \in \operatorname{Ker}(f+g)$.

Propriété 1.27

Soit f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $f\circ g = g\circ f$, alors :

$$g\left(\operatorname{Im}(f)\right) \subset \operatorname{Im}(f) \text{ et } g\left(\operatorname{Ker}(f)\right) \subset \operatorname{Ker}(f)$$

Démonstration

— Soit $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$ avec $x \in E$. Alors $g(f(x)) = f(g(x)) \in \operatorname{Im} f$.
— Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$ donc $g(x) \in \operatorname{Ker} f$.

Propriété 1.28

Si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \operatorname{Ker}\left(f^n\right) \subset \operatorname{Ker}\left(f^{n+1}\right) \text{ et } \operatorname{Im}\left(f^{n+1}\right) \subset \operatorname{Im}\left(f^n\right)$$

Démonstration

On utilise les deux premiers points de la propriété 1.26, de la présente page avec f^n à la place de f et f à la place de g.

Définition 1.18 – Sous-espace stable

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$, soit F un sous-espace vectoriel de E, on dit que F *est f-stable* *ou stable par f* si :

$$f(F) \subset F, \text{ c'est-à-dire que, pour tout } x \in F,\ f(x) \in F$$

Exemple 1.19 – Sous-espaces stables

1. $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ sont stables par f.
2. Plus généralement,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \operatorname{Im}\left((f - \lambda.\operatorname{id}_E)^k\right) \text{ et } \operatorname{Ker}\left((f - \lambda.\operatorname{id}_E)^k\right)$$

   sont stables par f.
3. Si f est un automorphisme et F de dimension finie, alors

$$F \text{ est stable par } f \iff F \text{ est stable par } f^{-1}$$

Exercice(s) 1.9

1.9.1 Soit f, g et h trois endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que :

$$f \circ g = h,\ g \circ h = f \text{ et } h \circ f = g$$

Démontrer que ces trois endomorphismes ont même image et même noyau.

1.9.2 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, démontrer que :

$$\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = f\left(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\right)$$

1.9.3 Soit f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, démontrer que :

$$\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f) \iff \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(g) = \{0_E\} \tag{1.1}$$

$$\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g) \iff E = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(g) \tag{1.2}$$

1.2.3 Projecteurs et symétries

注释 1.4

本小节介绍了投影映射和对称映射，它们是一类特殊线性映射的例子。

Définition 1.19 – Projection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On appelle *projection de E sur F parallèlement à G* l'endomorphisme de E défini par :

$$p_{F\|G} : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x_F \quad \text{où } x = x_F + x_G \text{ avec } x_F \in F \text{ et } x_G \in G \end{cases}$$

Remarque 1.20

Puisque $E = F \oplus G$, x_F et x_G sont uniques donc $p_{F\|G}$ est bien définie. De plus, c'est un endomorphisme de E.

Propriété 1.29

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Alors :

$$p_{F\|G} + p_{G\|F} = \mathrm{id}_E$$

On a de plus :

$$G = \mathrm{Ker}(p_{F\|G}) \text{ et, pour tout } x \in G,\ p_{F\|G}(x) = 0_E$$

et :

$$F = \mathrm{Im}(p_{F\|G}) = \mathrm{Ker}(p_{F\|G} - \mathrm{id}_E) \text{ et, pour tout } x \in F,\ p_{F\|G}(x) = x$$

Démonstration

Soit $x \in E$ qu'on écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F = p_{F\|G}(x) \in F$ et $x_G = p_{G\|F}(x) \in G$.

— On a

$$p_{F\|G}(x) + p_{G\|F}(x) = x_F + x_G = x$$

donc $p_{F\|G} + p_{G\|F} = \mathrm{id}_E$.

— On a

$$x \in G \iff x_F = 0_E \iff p_{F\|G}(x) = 0_E \iff x \in \mathrm{Ker}(p_{F\|G})$$

donc $G = \mathrm{Ker}(p_{F\|G})$. En particulier, $p_{F\|G}(x) = 0_E$ pour tout $x \in G$.

— On a

$$x \in F \iff x_G = 0_E \iff x - x_F = 0_E \iff (\mathrm{id}_E - p_{F\|G})(x) = 0_E$$

donc $F = \mathrm{Ker}(p_{F\|G} - \mathrm{id}_E)$. De plus,

$$x \in F \iff x - x_F = 0_E \iff x = x_F = p_{F\|G}(x)$$

donc $F = \mathrm{Im}(p_{F\|G})$. En particulier, $p_{F\|G}(x) = x$ pour tout $x \in F$.

Définition 1.20 – Projecteur

Soit E un espace vectoriel, on appelle *projecteur de E* tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.

Proposition 1.5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Toute projection de E est un projecteur de E et, réciproquement, tout projecteur de E est une projection de E.

Démonstration

1. Une projection est un projecteur, d'après la propriété 1.29, de la présente page. En effet, si F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$ et si $p = p_{F\|G}$, alors pour tout $x \in E$ qu'on écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, on a

$$p(x) = p(x_F + x_G) = p(x_F) + p(x_G) = x_F + 0_E = x_F$$

donc

$$(p \circ p)(x) = p(x_F) = x_F$$

d'où $(p \circ p)(x) = p(x)$ donc $p \circ p = p$.

2. Si p est un projecteur, on a alors :

$$\boxed{E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p}$$

d'après l'exemple 1.18, page 49, donc p est la projection de E sur son image $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à son noyau $\mathrm{Ker}\, p$.

Définition 1.21 – Symétrie par rapport à un sous-espace

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On peut définir de même la notion de *symétrie de E par rapport à F, parallèlement à G*. C'est l'automorphisme de E défini par :

$$s_{F\|G} : \begin{cases} E \to E \\ x = x_F + x_G \mapsto x_F - x_G, \quad \text{où } x = x_F + x_G \text{ avec } x_F \in F \text{ et } x_G \in G \end{cases}$$

Propriété 1.30

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On a alors :

$$s_{F\|G} \circ s_{F\|G} = \mathrm{id}_E$$

De plus, on a

$$s_{F\|G} = 2.p_{F\|G} - \mathrm{id}_E \text{ et } p_{F\|G} = \frac{1}{2}.\left(\mathrm{id}_E + s_{F\|G}\right)$$

et

$$F = \mathrm{Ker}(s_{F\|G} - \mathrm{id}_E) \text{ et } G = \mathrm{Ker}(s_{F\|G} + \mathrm{id}_E)$$

Démonstration

Analogue à la démonstration de la propriété 1.29, page précédente.

Remarque 1.21

On peut définir plus généralement la notion de *symétrie de E*, ce sont les endomorphismes s de E tels que $s \circ s = \mathrm{id}_E$.
On peut alors démontrer (à l'aide de la propriété 1.30, de la présente page) que si $s_{F\|G}$ est la symétrie de E par rapport à F, parallèlement à G, alors $s_{F\|G} \circ s_{F\|G} = \mathrm{id}_E$. Réciproquement, si s est une symétrie de E, c'est-à-dire un endomorphisme s de E tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$, alors (par un raisonnement par analyse-synthèse)

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)}$$

et que s est la symétrie de E par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
Enfin, si p est un projecteur de E, alors $s = 2.p - \mathrm{id}_E$ est une symétrie. Réciproquement, si s est une symétrie de E, alors $p = \frac{1}{2}.(s + \mathrm{id}_E)$ est un projecteur de E.

Exercice(s) 1.10

1.10.1 Soit p est une projection d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. Démontrer que $p - \lambda.\mathrm{id}_E$ est bijective.

1.10.2 Soit

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2\,x - 2\,y, x - y) \end{cases}$$

Démontrer que ϕ est une projection (sur quoi ? parallèlement à quoi ?).

1.10.3 Soit l'application :

$$\phi : \begin{cases} \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto (x \mapsto f(-x)) \end{cases}$$

Démontrer que ϕ est une symétrie (par rapport à quoi ? parallèlement à quoi ?).

1.10.4 Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(a) $p+q$ est un projecteur.

(b) $p\circ q+q\circ p=0_{\mathscr{L}(E)}$.

(c) $p\circ q=q\circ p=0_{\mathscr{L}(E)}$.

1.10.5 Si p et q sont deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $p\circ q=q\circ p=0_{\mathscr{L}(E)}$, démontrer que $p+q$ est un projecteur et en calculer son image et son noyau.

1.10.6 Si p et q sont deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $p\circ q=0_{\mathscr{L}(E)}$, démontrer que $p+q-q\circ p$ est un projecteur et en calculer son image et son noyau.

1.10.7 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et p un projecteur de E, démontrer que :

$$f\circ p=p\circ f \iff [f(\mathrm{Ker}(p))\subset \mathrm{Ker}(p) \text{ et } f(\mathrm{Im}(p))\subset \mathrm{Im}(p)]$$

1.2.4 Cas particulier de la dimension finie

Propriété 1.31

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et si $f\in\mathscr{L}(E,E')$, alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et

$$\dim \mathrm{Im}(f)\leq \dim E$$

De plus, on a

$$\dim \mathrm{Im}(f)=\dim E \iff f \text{ injective}$$

Démonstration

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, avec $n=\dim E$.

— La famille $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im}\, f$ et à n éléments, donc $\dim \mathrm{Im}(f)\leq n=\dim E$.

— Si f est injective, d'après la propriété 1.25, page 50, $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est libre car $(e_1,\dots,e_n)$ l'est aussi. C'est donc une base de $\mathrm{Im}\, f$, d'où $\dim \mathrm{Im}\, f=n=\dim E$.
Si $\dim \mathrm{Im}(f)=\dim E$, la famille génératrice $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ de $\mathrm{Im}\, f$ a $n=\dim E$ éléments, c'est donc une base de $\mathrm{Im}\, f$. En particulier, c'est une famille libre, donc f est injective.

Définition 1.22 – Rang d'une application linéaire

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f\in\mathscr{L}(E,E')$ telle que $\mathrm{Im}(f)$ soit de dimension finie, on appelle *rang de f* et on note :

$$\mathrm{rang}(f)\overset{\text{Not}}{=}\dim(\mathrm{Im}(f))$$

在有限维时，像空间的维数称作f的秩。

Remarque 1.22

Lorsque E est de dimension finie, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie.

Propriété 1.32

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f\in\mathscr{L}(E,E')$, alors :

$$\begin{aligned} E' \text{ de dimension finie} &\implies \mathrm{rang}(f)\leq \dim E' \\ &\qquad \text{et } \left[\mathrm{rang}(f)=\dim E' \iff f \text{ surjective}\right] \\ E \text{ de dimension finie} &\implies \mathrm{rang}(f)\leq \dim E \\ &\qquad \text{et } \left[\mathrm{rang}(f)=\dim E \iff f \text{ injective}\right] \end{aligned}$$

Démonstration

— $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de E' qui est de dimension finie donc $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f \leq \dim E'$.
Si f est surjective, alors $\operatorname{Im} f = E'$ donc $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim E'$.
Si $\dim \operatorname{Im} f = \dim E'$, comme $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de E' de dimension finie, on a $\operatorname{Im} f = E$ (propriété 1.19, page 43) donc f est surjective.
— C'est la propriété 1.31, page précédente.

Propriété 1.33

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si E et E' sont de dimensions finies, alors :

$$\begin{aligned}
\dim E \leq \dim E' &\iff \exists f \in \mathscr{L}(E,E') \text{ injective}\\
\dim E \geq \dim E' &\iff \exists f \in \mathscr{L}(E,E') \text{ surjective}\\
\dim E = \dim E' &\iff \exists f \in \mathscr{L}(E,E') \text{ bijective}
\end{aligned}$$

En particulier, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $(e'_1, \ldots, e'_p)$ une base de E' (avec $n = \dim E$ et $p = \dim E'$).
— Si $n \leq p$, on peut définir l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,E')$ telle que $f(e_i) = e'_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. La famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = (e'_1, \ldots, e'_n)$ est une sous-famille de la base $(e'_1, \ldots, e'_p)$ qui est libre, elle est donc libre, ce qui démontre que f est injective (voir la remarque 1.19, page 51).
Réciproquement, s'il existe $f \in \mathscr{L}(E,E')$ injective, alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre à n éléments dans un espace de dimension p, donc $n \leq p$.
— Si $n \geq p$, on peut définir l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,E')$ telle que $f(e_i) = e'_i$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ et $f(e_i) = 0_{E'}$ si $i > p$. La famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ contient la famille $(e'_1, \ldots, e'_p)$ qui est une base de E', donc est génératrice. En particulier, f est surjective.
Réciproquement, s'il existe $f \in \mathscr{L}(E,E')$ surjective, alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice à n éléments dans un espace de dimension p, donc $n \geq p$.
— Si $n = p$, on peut définir l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,E')$ telle que $f(e_i) = e'_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!] = [\![1,p]\!]$. D'après ce qui précède, f est injective et surjective donc bijective.
Réciproquement, s'il existe $f \in \mathscr{L}(E,E')$ bijective, alors d'après ce qui précède $n \leq p$ et $p \leq n$, donc $n = p$.

Ces propriétés sont très importantes pour démontrer des égalités ou des inégalités de dimensions !

Proposition 1.6 – Rang d'une composition

Soit E, E' et E'' trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $u \in \mathscr{L}(E,E')$ et $v \in \mathscr{L}(E',E'')$, alors :

$$\operatorname{rang}(v \circ u) + \dim E' \geq \operatorname{rang}(v) + \operatorname{rang}(u)$$

Démonstration

— On peut déjà remarquer que :

$$\operatorname{Im}(u) \subset E' \text{ et } \operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im}(v)$$

donc, en introduisant des supplémentaires :

$$E' = \operatorname{Im}(u) \oplus F' \text{ et } \operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}(v \circ u) \oplus F''$$

l'inégalité demandée devient :

$$\dim F' \geq \dim F''$$

— Or, il existe une « application naturelle » qui va de F' dans F'', l'application :

$$\varphi : x \in F' \mapsto = p_{F'' \| \operatorname{Im}(v \circ v)} \circ v(x)$$

L'énoncé devient :

$$\operatorname{Im}\varphi = F'' ?$$

— La démonstration n'est alors qu'une vérification : soit $x'' \in F''$, alors $x'' \in \operatorname{Im}(v)$, donc, il existe $x' \in E'$ tel que $x'' = v(x')$. Mais

$$x' = \underbrace{x'_{\operatorname{Im}(u)}}_{\in \operatorname{Im}(u)} + \underbrace{x'_{F'}}_{\in F'}$$

donc

$$\varphi(x'_{F'}) = \varphi(x' - x'_{\operatorname{Im}(u)}) = p_{F'' \| \operatorname{Im}(v \circ v)}\big(\underbrace{v(x')}_{\in F''} - \underbrace{v(x'_{\operatorname{Im}(u)})}_{\in \operatorname{Im}(v \circ u)}\big) = v(x') = x''$$

Théorème 1.4 – Théorème du rang

Soit E et E' des $\mathbb{K}$-espace vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, E')$. Si E est de dimension finie, alors :

$$\boxed{\operatorname{rang}(f) = \dim E - \dim \operatorname{Ker}(f)}$$

Théorème du rang 是线性代数的一个重要定理，它给出了线性映射的秩和它核空间维数之间的关系。

Démonstration

C'est une application immédiate du théorème de factorisation (théorème 1.5, page 62) dans le cas de la dimension finie.

Exemple 1.20 – Propriétés de rangs

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathscr{L}(E, E')$, alors
$$\dim f(F) = \dim F - \dim(F \cap \operatorname{Ker}(f))$$
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, alors :
   (a) En posant $f^0 = \mathrm{id}_E$, on a :
   $$\forall p \in \mathbb{N},\ \operatorname{Ker}(f^p) \subset \operatorname{Ker}(f^{p+1})$$
   (b) De plus,
   $$\forall p \in \mathbb{N},\ \operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}(f^{p+1}) \ \Rightarrow\ \forall n \geq p,\ \operatorname{Ker}(f^n) = \operatorname{Ker}(f^p)$$
   (c) On peut alors poser :
   $$p_0 = \min\left\{p \in \mathbb{N},\ \operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}(f^{p+1})\right\}$$
   (d) Et on a :
   $$E = \operatorname{Ker}(f^{p_0}) \oplus \operatorname{Im}(f^{p_0})$$

Proposition 1.7 – Caractérisation des automorphismes en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, alors :

$$\boxed{f \textit{ injective} \iff f \textit{ surjective} \iff f \textit{ bijective}}$$

⚠ *C'est faux en dimension infinie.*

Démonstration

1. C'est une application immédiate du théorème du rang. On peut remarquer que le résultat est encore vrai lorsque $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et $\dim E = \dim E'$.
2. En dimension infinie, on peut considérer, par exemple, la dérivation sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est surjective, mais pas injective !

Proposition 1.8

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, alors

$$\boxed{\mathscr{L}(E \times E') \text{ est de dimension finie, égale à } \dim E \times \dim E'}$$

Démonstration

Si $E = \{0_E\}$ ou $E' = \{0_{E'}\}$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que $E \neq \{0_E\}$ et $E' \neq \{0_{E'}\}$.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(e'_1, \dots e'_n)$ une base de E', il suffit de vérifier alors que :

$$(u_{k,l})_{(k,l) \in [\![1,n]\!]\ [\![1,p]\!]} \text{ est une base de } \mathscr{L}(E \times E')$$

où si $(k, l) \in [\![1, n]\!]\ [\![1, p]\!]$, $u_{k,l}$ est définie par [a] :

$$\forall j \in [\![1, p]\!]\,,\ u_{k,l}(e_j) = \delta_{l,j}.e'_k$$

a. On rappelle la définition du *symbole de Kronecker* :

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque importante 1.23

On voit donc que si E et E' sont de dimensions finies, alors

$$\mathscr{L}(E \times E') \text{ et } \mathscr{L}(E' \times E) \text{ sont isomorphes}$$

car ils ont même dimension ! *Nous verrons que c'est faux en dimension infinie !* Il y a en fait deux sortes d'isomorphismes :

1. Des isomorphismes *géométriques* : c'est-à-dire vrais sans propriétés de dimensions.
2. Des isomorphismes *non géométriques* : c'est-à-dire qu'ils ne traduisent qu'une égalité de dimensions.

Exercice(s) 1.11

1.11.1 Soit E, E', F et F' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Démontrer que

(a) Pour toute $\phi \in \mathscr{L}(E', E)$ surjective, $\operatorname{rang}(f \circ \phi) = \operatorname{rang} f$.

(b) Pour toute $\psi \in \mathscr{L}(F, F')$ injective, $\operatorname{rang}(\psi \circ f) = \operatorname{rang} f$.

1.11.2 Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, E')$, $\varphi \in \mathscr{GL}(E)$ et $\psi \in \mathscr{GL}(E')$, alors :

$$\operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}(\psi \circ f) = \operatorname{rang}(f \circ \varphi) = \operatorname{rang}(\psi \circ f \circ \varphi)$$

1.11.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\exists p \in \mathbb{N}^*,\ f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

(a) Démontrer que :

$$f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

(b) Démontrer que, si $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \dim \operatorname{Ker}(f^k) = k$$

1.11.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, démontrer qu'il existe un automorphisme $g \in \mathscr{GL}(E)$ et p un projecteur de E tel que :

$$f = g \circ p$$

1.11.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, on considère les applications :

$$\phi\ :\begin{cases} \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E) \\ u \mapsto f \circ u \end{cases} \quad \text{et } \psi\ :\begin{cases} \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E) \\ f \mapsto u \circ f \end{cases}$$

(a) Démontrer que ϕ et ψ sont dans $\mathscr{L}\left(\mathscr{L}(E)\right)$.

(b) Calculer $\operatorname{rang}(\phi)$ et $\operatorname{rang}(\psi)$.

1.11.6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. On considère

$$\mathcal{F} = \{v \in \mathscr{L}(E),\ u \circ v \circ u = u\}$$

(a) Démontrer que $\mathcal{F}$ est non vide.

(b) Soit $v_0 \in \mathcal{F}$, démontrer que

$$-v_0 + \mathcal{F} \overset{\text{Not}}{=} \{v - v_0,\ v \in \mathcal{F}\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(E)$$

On suppose dorénavant que E est de dimension finie n.

(c) Calculer la dimension de $-v_0 + \mathcal{F}$.

(d) Que peut-on dire du rang de v lorsque $v \in \mathcal{F}$?

1.11.7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \operatorname{rang}\left(f^{k+1}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\operatorname{rang}\left(f^k\right) + \operatorname{rang}\left(f^{k+2}\right)\right)$$

1.11.8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, démontrer que :

$$\dim \operatorname{Ker}(f^2) \leq 2 \dim \operatorname{Ker}(f)$$

1.11.9 Soit E, E', E'' et E''' quatre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathscr{L}(E, E')$, $g \in \mathscr{L}(E', E'')$ et $h \in \mathscr{L}(E'', E''')$, démontrer que :

$$\operatorname{rang}(h \circ g \circ f) + \operatorname{rang}(g) \geq \operatorname{rang}(g \circ f) + \operatorname{rang}(h \circ g)$$

1.11.10 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E) \setminus \mathscr{GL}(E)$.

(a) Démontrer que :

$$\exists g \in \mathscr{L}(E) \setminus \left\{0_{\mathscr{L}(E)}\right\},\ g \circ f = f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

(b) Soit :

$$\mathcal{X} = \left\{g \in \mathscr{L}(E),\ g \circ f = f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}\right\}$$

Démontrer que c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et en calculer sa dimension.

1.2.5 Factorisation des applications linéaires

注释 1.5

本小节中介绍几种特殊的线性映射，从先前小结的知识出发引出了如何把线性映射分解成不同线性映射的复合。

Propriété 1.34 – Restriction d'une application linéaire

Si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors la *restriction* d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, E')$, notée $f_{|_F}$ et définie par :

$$\forall x \in F,\ f_{|_F}(x) = f(x)$$

est une application linéaire de F dans E'. De plus,

$$\begin{cases} \mathscr{L}(E, E') \to \mathscr{L}(F, E') \\ f \mapsto f_{|_F} \end{cases} \quad \text{est une application linéaire}$$

Démonstration

Immédiat.

Propriété 1.35 – Co-restriction d'une application linéaire

Si $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et F' est un sous-espace vectoriel de E' tel que $\boxed{f(E) \subset F'}$, alors la *co-restriction* de f, notée $f^{|^{F'}}$ et définie par :

$$\forall x \in E,\ f^{|^{F'}}(x) = f(x) \in F'$$

est une application linéaire de E dans F'. De plus,

$$\begin{cases} \{f \in \mathscr{L}(E, E'),\ f(E) \subset F'\} \to \mathscr{L}(E, F') \\ f \mapsto f^{|^{F'}} \end{cases} \quad \text{est une application linéaire}$$

Démonstration

Immédiat.

Notation 1.1

Par abus de notation, si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, F' un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E' et $f \in \mathscr{L}(E, E')$ tels que $\boxed{f(F) \subset F'}$, nous noterons :

$$f\Big|_F^{F'} \overset{\text{Not}}{=} \left(f_{|_F}\right)^{|^{F'}}$$

Exemple 1.21

Soit E, E' et E'' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

— Si F est un sous-espace vectoriel de E, si $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et $g \in \mathscr{L}(E', E'')$ alors :

$$(g \circ f)_{|_F} = g \circ \left(f_{|_F}\right)$$

— De même, si F'' est un sous-espace vectoriel de E'' *contenant* $g(E')$, alors :

$$(g \circ f)^{|F''} = \left(g^{|F''}\right) \circ f$$

Propriété 1.36 – Noyau d'une restriction

Si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et f une application linéaire de E dans E', alors :

$$\boxed{\operatorname{Ker}\left(f_{|F}\right) = F \cap \operatorname{Ker}(f)}$$

Démonstration

- Soit $x \in \operatorname{Ker} f_{|F}$. Alors $x \in F$ (car l'ensemble de départ de $f_{|F}$ est F) donc $f(x) = f_{|F}(x) = 0_{E'}$ donc $x \in F \cap \operatorname{Ker} f$.
- Soit $x \in F \cap \operatorname{Ker} f$. On a $0_{E'} = f(x) = f_{|F}(x)$ donc $x \in \operatorname{Ker}\left(f_{|F}\right)$.

Par double inclusion, $\operatorname{Ker}\left(f_{|F}\right) = F \cap \operatorname{Ker}(f)$.

Notation 1.2 – Inclusion canonique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, on peut définir *l'inclusion canonique de F dans E* par :

$$i_{F \subset E} : \begin{cases} F \to E \\ x \mapsto x \end{cases}$$

On a donc :

$$i_{F \subset E} \overset{\text{Not}}{=} (\mathrm{id}_E)_{|F}$$

Remarque 1.24

Si G est un supplémentaire de F dans E ($E = F \oplus G$), on a :

$$\left(p_{F \| G}\right)^{|F} \circ i_{F \subset E} = \mathrm{id}_F$$

Ce ne sont pas des réciproques !

Propriété 1.37

Pour connaître une application linéaire définie sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont on connaît une décomposition en somme directe, il faut et il suffit d'en connaître ses restrictions à chaque sous-espace vectoriel composant la décomposition.

Démonstration

Supposons que :

$$E = \bigoplus_{i \in I} E_i$$

1. Supposons connue $f \in \mathscr{L}(E, E')$, il est alors facile de connaître :
$$\forall i \in I,\ f_{|E_i} \in \mathscr{L}(E_i, E')$$
2. Réciproquement, si on connaît :
$$\forall i \in I,\ f_{|E_i} = f_i \in \mathscr{L}(E_i, E')$$
alors on connaît f car si $x \in E$, il existe un entier n, des indices 2 à 2 distincts $(i_1, \ldots, i_n)$ de I et des

vecteurs $x_{i_k} \in E_{i_k}$, quelque soit $k \in [\![1, n]\!]$ tels que :

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k}$$

On a alors :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_{i_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} f_{i_k}\left(x_{i_k}\right)$$

Remarque 1.25

Une autre façon de dire est que :

$$E = \bigoplus_{i \in I} E_i \implies \mathscr{L}(E, E') \text{ est isomorphe à } \prod_{i \in I} \mathscr{L}(E_i, E')$$

grâce à l'application (clairement linéaire) :

$$f \longmapsto \left(f_{|E_i}\right)_{i \in I}$$

Exemple 1.22 – Construction par morceaux

Soit $E = F \oplus G$, alors il existe un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, tel que

$$\operatorname{Ker}(f) = F \text{ et } \operatorname{Im}(f) = G$$

On construit [a] :

$$f_{|F} = 0_{\mathscr{L}(F,E)} \text{ et } f_{|G} = (\mathrm{id}_E)_{|G}$$

a. Remarquons que l'on obtient bien sûr la projection sur G parallèlement à F.

Théorème 1.5 – Factorisation des applications linéaires

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, E')$, F un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f)$ dans E ($E = \operatorname{Ker}(f) \oplus F$), alors

$$\boxed{f\Big|_F^{\operatorname{Im}(f)} \text{ est un isomorphisme entre } F \text{ et } \operatorname{Im}(f)}$$

Démonstration

Posons $\widetilde{f} = f\Big|_F^{\operatorname{Im}(f)}$.

1. $\widetilde{f}$ est injective. En effet,

$$\operatorname{Ker}\left(\widetilde{f}\right) = \operatorname{Ker}(f) \cap F = \{0_E\}$$

2. $\widetilde{f}$ est surjective. En effet, soit $x' \in \operatorname{Im}(f)$, on sait alors qu'il existe $x \in E$, tel que $f(x) = x'$. Mais, par décomposition en somme directe, on a :

$$\exists!(x_F, x_{\operatorname{Ker}(f)}) \in F \times \operatorname{Ker}(f)),\ x = x_F + x_{\operatorname{Ker}(f)}$$

En appliquant f, il vient :

$$x' = f(x) = f(x_F + x_{\operatorname{Ker}(f)}) = f(x_F) + f(x_{\operatorname{Ker}(f)}) = f(x_F) = \widetilde{f}(x_F)$$

Remarque 1.26

Dans le cas de la dimension finie ($\dim E < +\infty$), on obtient que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et que

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim F$$

Or, la formule de Grasmann (proposition 1.3, page 44) nous donne que

$$\dim F = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(f)$$

soit, le théorème du rang ! (théorème 1.4, page 57)

Remarque 1.27

Pourquoi appelle-t-on ce résultat *théorème de factorisation des applications linéaires* ? Si on regarde le diagramme 1.3, de la présente page. On a donc obtenu une factorisation de f à l'aide d'applications linéaires simples et d'un isomorphisme :

$$\boxed{f = i_{\mathrm{Im}(f)\subset E'} \circ \widetilde{f} \circ \left(p_{F\|\mathrm{Ker}(f)}\right)^{|F}}$$

Figure 1.3 – Factorisation d'une application linéaire

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\left(p_{F\|\mathrm{Ker}(f)}\right)^{|F}"'] & E' \\
F \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "i_{\mathrm{Im}(f)\subset E'}"']
\end{tikzcd}$$

Exemple 1.23

À quoi cela sert-il ? À faire apparaître un isomorphisme, ce qui permet d'utiliser sa réciproque ! Ainsi, sur le schéma précédent, il apparaît une application linéaire « naturelle » permettant d'aller de E' dans E (sans pour autant que f soit inversible), en introduisant un supplémentaire F' de $\mathrm{Im}(f)$ dans E'. Voir le diagramme 1.4, page suivante. Notons cette application :

$$g = i_{F\subset E} \circ \widetilde{f}^{-1} \circ \left(p_{\mathrm{Im}(f)\|F'}\right)^{|\mathrm{Im}(f)}$$

regardons ce que deviennent $g \circ f$ et $f \circ g$. Soit un élément $x \in E$, que l'on décompose suivant la somme directe $F \oplus \mathrm{Ker}(f)$, alors

$$\begin{array}{rcl} g \circ f(x) & = & g\big(f(x_F + x_{\mathrm{Ker}(f)})\big) \\ & = & g\big(\widetilde{f}(x_F)\big) \\ & = & i_{F \subset E}\Big(\widetilde{f}^{-1}\Big(p_{\mathrm{Im}(f) \| F'}\big(\widetilde{f}(x_F)\big)\Big)\Big) \\ & = & i_{F \subset E}\Big(\widetilde{f}^{-1}\big(\widetilde{f}(x_F)\big)\Big) \\ & = & i_{F \subset E}(x_F) = x_F = p_{F \| \mathrm{Ker}(f)}(x) \end{array}$$

De même, si $x' \in E'$ que l'on décompose sous la forme $x' = x_{F'} + f(x) = x_{F'} + \widetilde{f}(x_F)$, alors :

$$\begin{array}{rcl} f \circ g(x') & = & f\big(g(x_{F'} + \widetilde{f}(x_F)\big) \\ & = & ... \\ & = & f(x_F) = p_{\mathrm{Im}(f) \| F'}(x') \end{array}$$

Finalement, on obtient :

$$g \circ f = p_{F \| \mathrm{Ker}(f)} \text{ et } f \circ g = p_{\mathrm{Im}(f) \| F'}$$

Figure 1.4 – Utilisation de la factorisation

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dashed, "f"] & E' = \mathrm{Im}(f) \oplus F' \arrow[d, "\left(p_{\mathrm{Im}(f) \| F'}\right)^{|\mathrm{Im}(f)}"'] \\ F \arrow[u, "i_{F \subset E}"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[l, "\widetilde{f}^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Remarque importante 1.28

g dépend du choix de F' (et bien sûr de F).

Remarque 1.29

Notons de plus, que si f est un isomorphisme, alors $\widetilde{f} = f$ et $g = f^{-1}$.

Remarque importante 1.30

Notons que l'on a toujours les résultats suivants :

$$\boxed{f_{|F} \text{ est injective, et } f^{|\mathrm{Im}(f)} \text{ est surjective}}$$

On obtient donc, à l'aide de ce théorème, deux méthodes de démonstrations :

1. Quand on aura besoin de construire une application linéaire allant d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E', on pourra essayer d'utiliser des « chemins naturels » allant de E à E'.
2. Quand le problème est simple lorsqu'une application linéaire est bijective, on peut toujours essayer de se ramener à cette situation avec le théorème de factorisation.

Théorème 1.6 – Relèvement linéaire

Soit E, E' et E'' trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $w \in \mathscr{L}(E, E'')$ et $v \in \mathscr{L}(E', E'')$, alors :

$$\exists u \in \mathscr{L}(E, E'),\ w = v \circ u \iff \mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(v)$$

Démonstration

— ($\Rightarrow$) Évident. Si $x'' \in \mathrm{Im}(w)$, alors il existe un $x \in E$, tel que $x'' = w(x) = v\big(u(x)\big) \in \mathrm{Im}(v)$.

— ($\Leftarrow$) Nous allons essayer les deux méthodes :

1. *(Chemins naturels)* On a le diagramme 1.5, page suivante.

($Analyse$) En utilisant le théorème de factorisation, on peut construire un chemin naturel allant de E à E' (en passant par E''). Voir le diagramme 1.6, page suivante. On obtient un candidat au rôle de u. Il s'écrit :

$$u = i_{F' \subset E'} \circ \widetilde{v}^{-1} \circ \left(p_{\mathrm{Im}(v) \| F''}\right)^{|\mathrm{Im}(v)} \circ w$$

($Synthèse$) Il suffit alors de vérifier qu'il convient [a], si $x \in E$, alors :

$$\begin{aligned} v \circ u(x) &= v\left(i_{F' \subset E}\left(\widetilde{v}^{-1}\left(p_{\mathrm{Im}(v) \| F''}\left(w(x)\right)\right)\right)\right) \\ &\quad \text{or } w(x) \in \mathrm{Im}(v) \text{ par hypothèse} \\ &= v\left(i_{F' \subset E}\left(\widetilde{v}^{-1}(w(x))\right)\right) \\ &= v\big(i_{F' \subset E}(x')\big) \text{ où } x' \in F',\ v(x') = w(x) \\ &= v(x') = w(x) \end{aligned}$$

2. *(Et si v était inversible .)*

— Si v est inversible, alors $u = v^{-1} \circ w$.

— Dans le cas contraire, nous allons essayer de nous y ramener :

($Analyse$) Si u existe, alors [b]

$$w = v \circ u \text{ donc } w^{|\mathrm{Im}(v)} = (v \circ u)^{|\mathrm{Im}(v)} = v^{|\mathrm{Im}(v)} \circ u$$

Pour pouvoir restreindre v à F' (supplémentaire de $\mathrm{Ker}(v)$), nous allons imposer une condition supplémentaire à u permettant la co-restriction à F' de u :

$$\boxed{\mathrm{Im}(u) \subset F'}$$

Alors :

$$w^{|\mathrm{Im}(v)} = \underbrace{v\Big|_{F'}^{\mathrm{Im}(v)}}_{\widetilde{v} \text{ inversible !}} \circ u^{|F'}$$

donc, dans ce cas, on a la condition nécessaire :

$$u^{|F'} = \widetilde{v}^{-1} \circ w^{|\mathrm{Im}(v)}$$

($Synthèse$) Soit $u \in \mathscr{L}(E, E')$ défini par :

$$\forall x \in E,\ u(x) = \widetilde{v}^{-1} \circ w^{|\mathrm{Im}(v)}(x) = \widetilde{v}^{-1}(w(x))$$

ou, si l'on préfère :

$$u = i_{F' \subset E'} \circ \widetilde{v}^{-1} \circ w^{|\mathrm{Im}(v)}$$

Alors, si $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} v \circ u(x) &= v\left(i_{F' \subset E'}\left(\widetilde{v}^{-1}\left(w^{|\mathrm{Im}(v)}(x)\right)\right)\right) \\ &= v\left(i_{F' \subset E'}\left(\widetilde{v}^{-1}(w(x))\right)\right) \\ &= v\big(i_{F' \subset E'}(x')\big) \text{ où } x' \in F',\ v(x') = w(x) \\ &= v(x') = w(x) \end{aligned}$$

---

a. ⚠ Le candidat n'est parfois pas celui dont on a besoin ! La vérification est <u>indispensable</u> !
b. La co-restriction est possible d'après l'hypothèse.

Figure 1.5 – Relèvement linéaire : position du problème

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "w"] \arrow[dr, dashed, "u\ ?"'] & E'' \\
 & E' \arrow[u, "v"']
\end{tikzcd}$$

Figure 1.6 – Relèvement linéaire : construction des chemins

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "w"] \arrow[ddd, dashed, blue, bend right, to path={}] \arrow[dddr, dashed, blue, bend left] & E'' = \mathrm{Im}(v) \oplus F'' \arrow[dr, "\left(p_{\mathrm{Im}(v)\parallel F''}\right)_{/\mathrm{Im}(v)}"] & \\
 & & \mathrm{Im}(v) \arrow[d, "\widetilde{v}^{-1}"'] \\
 & & F' \arrow[dl, "i_{F'\subset E'}"'] \\
 & E' = \mathrm{Ker}(v) \oplus F' \arrow[uuu, dashed, "v"] &
\end{tikzcd}$$

Théorème 1.7 – Extension linéaire

Soit E, E' et E'' trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $w \in \mathscr{L}(E, E'')$ et $u \in \mathscr{L}(E, E')$, alors

$$\exists v \in \mathscr{L}(E', E''),\ w = v \circ u \iff \mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(w)$$

Démonstration

Laissé en exercice. Cette démonstration est très proche de celle du relèvement linéaire.

Proposition 1.9 – Surjectivité

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $v \in \mathscr{L}(E', E)$, alors :

$$\exists u \in \mathscr{L}(E, E'),\ \mathrm{id}_E = v \circ u \iff v \text{ surjective}$$

Démonstration

Prendre $w = \mathrm{id}_E$ dans le théorème de relèvement.

Proposition 1.10 – Injectivité

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, E')$, alors :

$$\exists v \in \mathscr{L}(E', E),\ \mathrm{id}_E = v \circ u \iff u \text{ injective}$$

Démonstration

Prendre $w = \mathrm{id}_E$ dans le théorème d'extension.

Exercice(s) 1.12

1.12.1 Démontrer le théorème d'extension linéaire.

1.12.2 Soit E_0, E_1 et E_2 trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que :

$$E_0 \oplus E_1 = E_0 \oplus E_2$$

démontrer que E_1 et E_2 sont isomorphes.

1.12.3 Soit E_1, E_2, E_3 et E_4 quatre sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que :

$$E_1 + E_2 = E_2 \oplus E_3 \text{ et } E_1 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_4$$

démontrer que E_3 et E_4 sont isomorphes.

1.12.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(u, v, w) \in \mathscr{L}(E)^3$.

(a) Démontrer que

$$\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(w) \iff \exists (a, b) \in \mathscr{L}(E)^2,\ w = a \circ u + b \circ v$$

(b) Donner une CNS pour que :

$$\exists (a, b) \in \mathscr{L}(E)^2,\ w = u \circ a + v \circ b$$

(c) Donner une CNS pour que :

$$\exists (a, b) \in \mathscr{L}(E)^2,\ w = a \circ u + v \circ b$$

1.12.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathscr{L}(E)$, démontrer que

$$\exists g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g \circ f = f$$

1.3 Dualité

注释 1.6

本小节介绍了线性空间的对偶空间和超平面。

1.3.1 Étude du dual

Définition 1.23 – Dual d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle *dual de* E et on note :

$$E^\star \overset{\text{Not}}{=} \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$$

Les éléments de $E^\star$ s'appellent des *formes linéaires* [a].

a. Le mot « forme », désigne en général une application à valeurs dans le corps de base. On aura des formes linéaires, des formes bilinéaires, etc.

Propriété 1.38

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $E^\star$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

对偶空间本身也是线性空间，它的元素是线性映射也称作线性泛函。

Démonstration

C'est un cas particulier de la propriété 1.23, page 47.

Propriété 1.39

Si E est de dimension finie, alors $E^\star$ est de dimension finie et

$$\dim E = \dim E^\star$$

En dimension finie, les deux espaces sont donc isomorphes. C'est faux en dimension infinie.

在有限维时，线性空间E 和它的对偶空间$E^\star$ 是同构的。

Démonstration

Si E est de dimension finie, c'est un cas particulier de la proposition 1.8, page 58 :

$$\dim E^\star = \dim \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K} = \dim E \times 1 = \dim E$$

Si E n'est pas de dimension finie, voir l'exemple ci-dessous.

Exemple 1.24 – Dual et espace non isomorphes

Prenons

$$E = \operatorname{Vect}(\{x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}\}),\ \text{sous-espace vectoriel du } \mathbb{Q}\text{-espace vectoriel } \mathscr{F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$$

On a alors :

— E *est dénombrable* car :

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\operatorname{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in [\![0, n]\!]\})}_{\text{en bijection avec } \mathbb{Q}^{n+1} \text{ donc } \mathbb{Q},}$$

et une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

— $E^\star$ *n'est pas dénombrable* car :

$$E^\star \text{ isomorphe à (donc en bijection avec) } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$$

par l'isomorphisme usuel :

$$\varphi \mapsto (\varphi(x \mapsto x^n))_{n\in\mathbb{N}}$$

Or, $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable (voir le procédé diagonal de Cantor) [a].
Remarquons que le dual est toujours *plus gros que l'espace de départ !*

C'est donc un isomorphisme non-géométrique.

a. Ceci est aussi un exemple où

$$\mathscr{L}(E, E') \text{ n'est pas isomorphe à } \mathscr{L}(E', E)$$

Définition 1.24 – Famille duale

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, on peut définir la *famille duale* associée $(e_i^\star)_{i\in I} \in (E^\star)^I$ par :

$$\forall j \in I,\ e_i^\star(e_j) = \delta_{i,j}$$

Remarque importante 1.31

Cette notation est très dangereuse ! En effet, si l'on change *un des vecteurs* e_i, alors on change *tous les vecteurs* $e_i^\star$.

Propriété 1.40

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. La famille duale associée est une partie libre de $E^\star$.

Démonstration

Soit $(i_1, \dots, i_p)$ une sous-famille quelconque finie de I d'éléments distincts deux-à-deux et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . e_{i_k}^\star = 0_{E^\star}$$

Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Par définition de la famille duale, on a

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . e_{i_k}^\star(e_{i_j})}_{=\lambda_j} = 0_{E^\star}(e_j) = 0$$

donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, ce qui montre que la famille duale $(e_i^\star)_{i\in I}$ est libre.

Propriété 1.41 – Base duale

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si E est de dimension finie et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors la famille duale associée est une base de $E^\star$ (dite *base duale*).

简称为$E^\star$的对偶基底。

Démonstration

D'après la propriété précédente, c'est une famille libre à n éléments. Or $\dim E^\star = \dim E = n$ (propriété 1.39, page ci-contre) donc c'est bien une base de $E^\star$.

Propriété 1.42

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Si E est de dimension infinie, alors la famille duale associée *n'est jamais* génératrice.

Démonstration

Considérons la forme linéaire $f \in E^\star$ définie par $f(e_i) = 1$ pour tout $i \in I$. Si la famille duale associée à $(e_i)_{i\in I}$ était génératrice, il existerait une sous-famille $(i_1, \ldots, i_p)$ finie de I tel que $f \in \mathrm{Vect}(\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_p}\})$. En considérant $j \in I$ tel que $j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$ (possible car E est de dimension infinie donc I est infini), on a $f(e_j) = 1$ mais $f_{i_1}(e_j) = \ldots = f_{i_p}(e_j) = 0$, contradiction.

Proposition 1.11 – Base ante-duale

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de $E^\star$, alors il existe une unique base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \,,\; e_i^\star = \varphi_i$$

Cette base est appelée base ante-duale de la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Démonstration

Soit l'application définie par :

$$\phi \;:\; \begin{cases} E \to \mathbb{K}^n \\ x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \end{cases}$$

Cette application a les propriétés suivantes :

- ϕ est linéaire.
- ϕ est injective. Donc, comme E et $\mathbb{K}^n$ ont même dimension n, ϕ est un isomorphisme.
- Considérons $(b_1, \ldots, b_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Comme un isomorphisme envoie une base sur une base, si l'on pose :

  $$\forall i \in [\![1, n]\!] \,,\; e_i = \phi^{-1}(b_i)$$

  la famille obtenue convient, et c'est clairement la seule.

Remarque 1.32

Comment démontrer qu'une famille de formes linéaires est une base ? En utilisant la base ante-duale (si l'on est capable de la trouver). On veut étudier $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une famille de formes linéaires de $E^\star$. Si on considère la base ante-duale $(e_1, \ldots, e_n)$, (ou la famille que l'on imagine être la base ante-duale), c'est alors facile : soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ des scalaires tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k . \varphi_k = 0_{E^\star}$$

alors

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \,,\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . \underbrace{\varphi_k(e_j)}_{\delta_{k,j}} = \lambda_j = 0$$

注释 1.7

设 $(e_1, \ldots, e_n)$ 是 E 的基底， $(e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ 是 $E^\star$ 的对偶基底，我们有如下性质：

1. 当 $f = k_1.e_1^\star + \cdots + k_n.e_n^\star \in E^\star$, $x = l_1.e_1 + \cdots + l_n.e_n \in E$ 时，

   $$f(x) = k_1\, l_1 + \cdots + k_n\, l_n$$

2. $x \in E$ 可以表示成，

   $$x = e_1^\star(x).e_1 + \cdots + e_n^\star(x).e_n$$

3. $f \in E^\star$ 可以表示成，

$$f = f(e_1).e_1^\star + \cdots + f(e_n).e_n^\star$$

Exercice(s) 1.13

1.13.1 Soit $E = \mathbb{K}^n$, n impair, pour $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, on convient de noter $x_{n+1} = x_1$. On pose :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \varphi_i\ :\begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ \underline{x} \mapsto x_i + x_{i+1} \end{cases}$$

(a) Dédémontrer que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $E^\star$.

(b) Calculer sa base ante-duale.

1.13.2 Soit

$$E = \mathrm{Vect}(\{x \mapsto x^k,\ k \in [\![0, 3]\!]\})$$

(a) Calculer $\dim E$.

(b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a < c < b$, on pose :

$$\varphi_1\ :\ f \mapsto f(a),\ \varphi_2\ :\ f \mapsto f(b),\ \varphi_3\ :\ f \mapsto f(c) \text{ et } \varphi_4\ :\ f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

i. À quelle CNS la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_4)$ est-elle une base de $E^\star$?

ii. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, exprimer φ_4 en fonction des trois autres.

iii. En déduire une méthode de calcul approché d'une intégrale.

iv. Lorsque la fonction $f \in \mathscr{C}^\infty([a, b], \mathbb{R})$, évaluer l'erreur de méthode.

1.13.3 Trouver les formes linéaires ψ définies sur $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (f, g) \in E^2,\ \psi(f\,g) = \psi(f)\,\psi(g)$$

1.13.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit E_1, E_2, ..., E_p des sous-espaces vectoriels de E, donner une CNS pour que :

$$\forall\,(\varphi_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in \prod_{k=1}^{p} E_k^\star,\ \left[\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2\,,\ \varphi_{i|_{E_i\cap E_j}} = \varphi_{j|_{E_i\cap E_j}}\right] \Rightarrow \left[\exists \varphi \in E^\star,\ \forall i \in [\![1,p]\!]\,,\ \varphi_{|_{E_i}} = \varphi_i\right]$$

1.3.2 Hyperplans

Définition 1.25 – Hyperplan d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle *hyperplan de E*, tout sous-espace vectoriel H tel que :

$$\exists \varphi \in E^\star \setminus \{0_{E^\star}\},\ H = \mathrm{Ker}(\varphi)$$

L'écriture :

$$(H) \qquad \varphi(x) = 0$$

s'appelle *équation de l'hyperplan H*.

超平面是线性空间的子空间，它是对偶空间中线性泛函的核空间，我们可以写出超平面方程。

Remarque 1.33

Il n'y a pas unicité de l'équation, car, si φ convient, alors, quelque soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda.\varphi$ convient.

Définition 1.26 – Codimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, on dit que F *est de codimension finie*, si F possède un supplémentaire de dimension finie. La dimension commune de tous les supplémentaires de F est appelée *codimension de* F et notée (si $E = F \oplus G$) :

$$\operatorname{codim} F \overset{\text{Not}}{=} \dim G$$

称作子空间的余维数，这一定义简化了线性空间E 和子空间F是无限维时性质和定理的表示。

Remarque 1.34

Si E est de dimension finie, tous les sous-espaces vectoriels de E sont de codimension finie et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors :

$$\operatorname{codim} F = \dim E - \dim F$$

Cette notion n'est donc pas intéressante en dimension finie, elle nous sera surtout utile en dimension infinie.

Exemple 1.25 – Hyperplans

1. Dans $\mathbb{K}^3$, tout plan est un hyperplan, dans $\mathbb{K}^2$, ce sont les droites (ces sous-espaces vectoriels sont usuellement décrits par *une* équation).
2. Dans $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si $a \in \mathbb{R}$, le sous-espace vectoriel défini par :

$$F_a = \{f \in E,\ f(a) = 0\}$$

est un hyperplan d'équation : $f(a) = 0$. F_a est de plus de codimension 1, car :

$$E = F_a \oplus \underbrace{\mathbb{K}.(x \mapsto 1)}_{\text{de dimension } 1}$$

en effet :

$$\forall f \in E,\ f = \underbrace{(f - f(a))}_{\in F_a} + \underbrace{f(a)}_{\in \mathbb{K}.(x \mapsto 1)}$$

et cette écriture est clairement unique.

Proposition 1.12 – Caractérisation des hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, H un sous-espace vectoriel de E, alors :

$$\boxed{H \text{ hyperplan de } E \iff \operatorname{codim} H = 1}$$

Démonstration

— ($\Rightarrow$) Soit $\varphi(x) = 0$ une équation de H, comme φ est non nulle, on peut trouver un vecteur $a \in E$, tel que $\varphi(a) \neq 0$. Alors :

$$\forall x \in E,\ x = \underbrace{\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}.a\right)}_{\in H} + \underbrace{\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}.a}_{\in \mathbb{K}.a}$$

donc

$$E = H \oplus \mathbb{K}.a, \text{ car } a \notin H$$

— ($\Leftarrow$) Si $E = H \oplus \mathbb{K}.a$, $a \in E \setminus \{0_E\}$, alors, on peut prendre comme forme linéaire associée à H :

$$\varphi \text{ telle que } \varphi_{|H} = 0_{H^\star} \text{ et } \varphi(a) = 1$$

Remarque 1.35

Si E est de dimension finie, les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de dimension $\dim E - 1$.

当E的维数为n时，超平面是E的$n-1$维子空间，不同的线性泛函对应不同的超平面。

Exemple 1.26 – Hyperplans

1. Dans $\mathbb{R}^2$, une équation de la droite (hyperplan) engendrée par $(1, 2)$ est, par exemple :
$$2\,x - y = 0$$
2. Dans $\mathbb{R}^3$, une équation du plan (hyperplan) engendré par $(1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 2)$ est, par exemple :
$$2\,x - 2\,y + z = 0$$
3. Dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, un supplémentaire de la droite engendrée par $x \mapsto x$, pourrait être donné par une équation du type :
$$f(a) = 0 \text{ si } a \neq 0$$

Théorème 1.8 – Faisceaux d'hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in {E^\star}^n$, alors

$$\boxed{\forall \psi \in E^\star,\ \psi \in \mathrm{Vect}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) \iff \mathrm{Ker}(\psi) \supset \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k)}$$

Démonstration

— ($\Rightarrow$) Immédiat.
— ($\Leftarrow$) Par récurrence sur n.
(*Initialisation*) : si $n = 1$ et $\mathrm{Ker}(\psi) \supset \mathrm{Ker}(\varphi)$, si φ est nulle, ψ l'est aussi. Si φ est non nulle, alors, il existe un vecteur $a \in E$, $\varphi(a) \neq 0$. Alors :

$$\psi = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}.\varphi$$

Il suffit de le vérifier pour $x = h + \lambda.a$, où $h \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
(*Hérédité*) : supposons le résultat vrai au rang $p \geq 1$, soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_{p+1})$ des formes linéaires de E et $\psi \in E^\star$ telle que :

$$\mathrm{Ker}(\psi) \supset \bigcap_{k=1}^{p+1} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$$

Si φ_{p+1} est nulle, c'est terminé. Supposons donc φ_{p+1} non nulle et posons $H = \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1})$. On a alors

$$\mathrm{Ker}(\psi_{|H}) \supset \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}({\varphi_k}_{|H})$$

on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence qui nous donne :

$$\exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p,\ \psi_{|H} = \sum_{k=1}^{p}\lambda_k.\varphi_{k|H}$$

On a alors :

$$\mathrm{Ker}\left(\psi - \left(\sum_{k=1}^{p}\lambda_k.\varphi_k\right)\right) \supset \mathrm{Ker}(\varphi_{p+1})$$

donc, d'après l'initialisation :

$$\exists\lambda_{p+1}\in\mathbb{K},\ \psi = \sum_{k=1}^{\mathbf{p+1}}\lambda_k.\varphi_k$$

Exemple 1.27 – Hyperplans de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, les hyperplans sont des plans et on a la situation géométrique de la figure 1.7, de la présente page. Notons $H_1 = \mathrm{Ker}(\varphi_1)$, $H_2 = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$, si φ_1 et φ_2 sont indépendantes, les deux plans se coupent suivant la droite D. Soit K un plan contenant D (comme sur le dessin), où $K = \mathrm{Ker}(\psi)$, le théorème nous assure alors que :

$$\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2,\ (\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0),\ \psi = \lambda_1.\varphi_1 + \lambda_2.\varphi_2$$

Le plan K a donc pour équation :

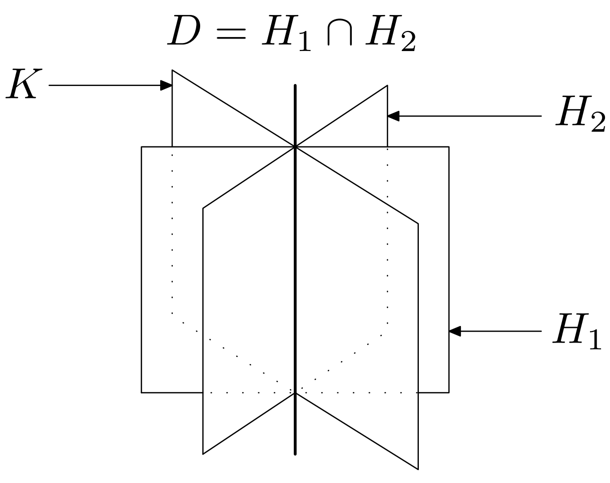
$$(K) \qquad \lambda_1\,\varphi_1(x) + \lambda_2\,\varphi_2(x) = 0$$

Cette équation est définie à un coefficient de proportionnalité près, donc

$$\cos(\theta)\,\varphi_1(x) + \sin(\theta)\,\varphi_2(x) = 0$$

est l'équation de K, pour un certain $\theta\in\mathbb{R}$, (qui vérifie $\cos(\theta) = \lambda_1/\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$, et $\sin(\theta) = \lambda_2/\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$).

Figure 1.7 – Hyperplans de $\mathbb{R}^3$



Remarque 1.36

Le résultat de cette proposition est particulièrement intéressant en géométrie affine. Ainsi si $\mathcal{H}_1$, ..., $\mathcal{H}_p$ sont des hyperplans affines (espaces affines ayant pour directions des hyperplans vectoriels) d'intersection non vide (soit A un point de l'intersection), d'équations :

$$(\mathcal{H}_1) \quad \varphi_1(\overrightarrow{A_1M}) = 0, \ldots, (\mathcal{H}_p) \quad \varphi_p(\overrightarrow{A_pM}) = 0$$

alors, pour tout hyperplan $\mathcal{H}$ d'équation $\psi(\overrightarrow{AM})=0$, contenant cette intersection,

$$\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p,\ \psi=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k.\varphi_k$$

Exemple 1.28 – Utilisation des faisceaux d'hyperplans

Soit $V=\mathbb{R}^3$, l'espace usuel muni de sa structure affine euclidienne usuelle. Soit D une droite affine et A un point, cherchons les plans tangents à la sphère de centre A de rayon 1, contenant D. Par exemple : Soit D la droite définie par : $4\,x+y+z=0$, $2\,x+5\,y+3\,z+4=0$. Cherchons le plan P contenant D tel que P soit à une distance 1 du point $(1,1,1)$.
On va chercher le plan demandé sous la forme :

$$(P)\qquad \cos(\theta)\,(4\,x+y+z)+\sin(\theta)\,(2\,x+5\,y+3\,z+4)=0$$

Pour trouver θ, il suffit d'écrire $d((1,1,1),P)=1$.

Théorème 1.9 – Mise en équation des sous-espaces de codimensions finies

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit E_1 un sous-espace de E, alors, pour $p\in\mathbb{N}$, on a

$$\boxed{\operatorname{codim}(E_1)=p\iff\begin{cases}\exists(\varphi_1,\dots,\varphi_p)\in E^{\star p},\ \textit{indépendantes}\\ E_1=\bigcap_{k=1}^{p}\operatorname{Ker}(\varphi_k)\end{cases}}$$

此定理是超平面性质的拓展。

Démonstration

($\Rightarrow$) Si $\operatorname{codim}(E_1)=p$, on peut, par définition trouver un supplémentaire F de dimension p, et une base de F : $(e_1,\dots,e_p)$. Construisons alors, pour $k\in[\![1,p]\!]$, la forme linéaire

$$\varphi_k \text{ définie par }\begin{cases}\varphi_k|_{E_1}=0_{E_1^\star}\\ \forall j\in[\![1,p]\!],\ j\neq k,\ \varphi_k(e_j)=0\\ \varphi_k(e_k)=1\end{cases}$$

Alors, $(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ sont indépendantes et

$$E_1=\bigcap_{k=1}^{p}\operatorname{Ker}(\varphi_k)$$

($\Leftarrow$) Par récurrence sur p.
(*Initialisation*) C'est la proposition caractérisant les hyperplans comme les espaces de codimension 1.
(*Hérédité*) Supposons le résultat vrai au rang p et prenons $p+1$ formes linéaires *indépendantes*, $(\varphi_1,\dots,\varphi_{p+1})$ et posons :

$$E_1=\bigcap_{k=1}^{p+1}\operatorname{Ker}(\varphi_k)\text{ et }E_2=\bigcap_{k=1}^{p}\operatorname{Ker}(\varphi_k)\text{ alors }E_1=E_2\cap\operatorname{Ker}(\varphi_{p+1})$$

D'après l'hypothèse de récurrence, nous savons que E_2 est de codimension p. Soit F un supplémentaire de E_2 dans E de dimension p.
De plus,

$$\varphi_{p+1}\notin\operatorname{Vect}(\{\varphi_1,\dots,\varphi_p\})\ \Rightarrow\ E_2\not\subset\operatorname{Ker}(\varphi_{p+1})$$

On peut donc trouver un vecteur $a\in E_2\setminus E_1$. Il reste à montrer que :

$$E=E_1\oplus\underbrace{\mathbb{K}.a\oplus F}_{\text{de dimension }p+1}$$

Or, on a

$$E=\operatorname{Ker}(\varphi_{p+1})\oplus\mathbb{K}.a$$

donc, en utilisant la première question de l'exercice 1.4.2, page 32, on obtient, puisque $a\in E_2$

$$E_2=(E_2\cap\operatorname{Ker}(\varphi_{p+1}))\oplus(E_2\cap\mathbb{K}.a)\,,\ \text{soit }E_2=E_1\oplus\mathbb{K}.a$$

Remarque 1.37

C'est ainsi que l'on retrouve que dans l'espace, les droites sont définies par 2 équations.

Remarque 1.38

Que se passe-t-il lorsque les formes linéaires (et donc les équations) ne sont pas indépendantes ? Il est immédiat que :

$$\boxed{\operatorname{codim}(E_1) = \operatorname{rang}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)}$$

Remarque 1.39

En dimension finie, cela permet de calculer des dimensions. On dit souvent que :
- la dimension de l'espace est le *nombre de degrés de liberté* ;
- le nombre d'équations indépendantes est le *nombre de contraintes* ;
- la dimension du sous-espace vectoriel est donc égale à « nombre de degré de liberté $-$ nombre de contraintes ».

⚠ Cette relation n'est valable qu'avec des contraintes *linéaires* !

Remarque 1.40

Le théorème se généralise facilement à la situation affine. Cependant, l'intersection d'hyperplans affines peut-être vide, aussi faut-il, avant toutes choses, s'assurer qu'elle ne l'est pas ! Puis, en s'appuyant sur un point trouvé de l'intersection, on est ramené au cas vectoriel.

Proposition 1.13

Soit V un espace affine de direction un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ sont des formes linéaires de E indépendantes, *et si $\mathcal{H}_k$ est un hyperplan affine de direction* $\operatorname{Ker} \varphi_k$ *pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, alors :*

$$\bigcap_{k=1}^{p} \mathcal{H}_k \neq \emptyset$$

Démonstration

Laissé en exercice.

Exercice(s) 1.14

1.14.1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $(x_1, \ldots, x_p)$ des vecteurs de E. Démontrer que :

$$(x_1, \ldots, x_p) \text{ libre } \iff \left[\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \exists \varphi \in E^\star,\ \forall k \in [\![1, p]\!],\ \varphi(x_k) = \lambda_k\right]$$

1.14.2 (a) $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est-il un hyperplan de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

(b) Démontrer que $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est isomorphe à un hyperplan de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.14.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit V un sous-espace vectoriel de $E^\star$. On dit que V *sépare les vecteurs*, si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \neq y \ \Rightarrow\ \left[\exists \varphi \in V,\ \varphi(x) \neq \varphi(y)\right]$$

Démontrer que V sépare les vecteurs si, et seulement si, $V = E^\star$.

1.14.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour $A \in \mathscr{P}(E)$, on appelle *orthogonal (direct) de* A et on note :

$$A^{\perp} = \{\varphi \in E^{\star},\ \forall a \in A,\ \varphi(a) = 0\}$$

Démontrer que :

(a) $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\star}$.

(b) $A^{\perp} = \mathrm{Vect}(A)^{\perp}$.

Dans la suite A et B sont des sous-espaces vectoriels de E.

(c) $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$.

(d) $(A + B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.

(e) Si $E = A \oplus B$, alors $A^{\perp}$ est isomorphe à $B^{\star}$.

(f) Si E est de dimension finie, alors $\dim A^{\perp} = \operatorname{codim} A$.

1.14.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $B \in \mathscr{P}(E^{\star})$, on appelle *orthogonal (indirect) de* B et on note :

$$B^{\top} = \{x \in E,\ \forall \varphi \in B,\ \varphi(x) = 0\}$$

Démontrer que :

(a) $B^{\top}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) $B^{\top} = \mathrm{Vect}(B)^{\top}$.

Dans la suite, A et B sont des sous-espaces vectoriels de $E^{\star}$.

(c) $(A + B)^{\top} = A^{\top} \cap B^{\top}$.

(d) $(A \cap B)^{\top} \supset A^{\top} + B^{\top}$.

(e) Si E est de dimension finie, alors

$$\dim B^{\top} = \operatorname{codim} B$$

(f) En déduire que l'inclusion de la question (d) est une inégalité en dimension finie.

(g) Donner un contre-exemple à l'égalité dans la question (d) lorsque E est de dimension infinie.

(h) Si A est un sous-espace vectoriel de E, comparer :

$$A \text{ et } \left(A^{\perp}\right)^{\top}$$

(i) Si B est un sous-espace vectoriel de $E^{\star}$, comparer :

$$B \text{ et } \left(B^{\top}\right)^{\perp}$$

1.14.6 Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $u \in \mathscr{L}(E, E')$. On définit l'application *transposée de u* et on note :

$$^{t}u\ :\begin{cases} E'^{\star} \to E^{\star} \\ \varphi \mapsto \varphi \circ u \end{cases}$$

(a) Démontrer que $^{t}(u \circ v) = {}^{t}u \circ {}^{t}v$.

(b) Démontrer que :

$$\mathrm{Ker}({}^{t}u) = \mathrm{Im}(u)^{\perp}$$

(c) Démontrer que :

$$\mathrm{Im}({}^{t}u) = \mathrm{Ker}(u)^{\perp}$$

1.4 Applications

1.4.1 Systèmes linéaires

注释 1.8

常见的一类线性系统应用问题是解线性方程组。本小节的结果也适用于其他线性系统问题。

Ce paragraphe, très simple, est *fondamental* ! Nous nous en servirons très souvent !

Définition 1.27 – Système linéaire

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,E')$ et $e' \in E'$, on appelle *système linéaire* l'équation d'inconnue $x \in E$:

$$(\mathcal{S}) \qquad u(x) = e'$$

L'ensemble :

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) = \{x \in E,\ u(x) = e'\}$$

est appelé *ensemble des solutions de* $(\mathcal{S})$.

Exemple 1.29

Pour $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ définie par $u(x) = (x,x)$ et pour $e' = (1,2)$, on a $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) = \emptyset$.

Propriété 1.43

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,E')$ et $e' \in E'$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) \neq \emptyset$, appelée *condition de compatibilité de* $(\mathcal{S})$ est :

$$\boxed{e' \in \mathrm{Im}(u)}$$

Démonstration

Si $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) \neq \emptyset$, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = e'$, en particulier $e' \in \mathrm{Im}\, u$.
Si $e' \in \mathrm{Im}\, u$, il existe $x \in E$ tel que $e' = u(x)$, donc $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) \neq \emptyset$.

Définition 1.28 – Système linéaire homogène

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,E')$ et $e' \in E'$. Si $e' = 0_{E'}$, le système est dit *homogène*. Dans ce cas,

$$\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) = \mathrm{Ker}(u) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$

En particulier, $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) \neq \emptyset$.

Définition 1.29 – Système linéaire homogène associé

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,E')$ et $e' \in E'$. Si $e' \neq 0_{E'}$, le système :

$$(\mathcal{H}) \qquad u(x) = 0_{E'}$$

est dit *système homogène associé de* $(\mathcal{S})$.

Propriété 1.44

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, E')$ et $e' \in E'$. Si $x_0 \in \mathrm{Sol}(\mathcal{S})$ existe alors :

$$\boxed{\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) = x_0 + \mathrm{Ker}(u)}$$

$\mathrm{Sol}(\mathcal{S})$ est un espace affine de direction $\mathrm{Ker}(u)$.

线性系统的解集为系统的一个特解加线性映射的核空间，即仿射空间。

Démonstration

Soit $x_0 \in \mathrm{Sol}(\mathcal{S})$.

— Soit $x \in \mathrm{Sol}(\mathcal{S})$. On a $u(x) = e' = u(x_0)$ donc $u(x - x_0) = 0_{E'}$ et donc $x - x_0 \in \mathrm{Ker}\, u$. On a donc bien $x \in x_0 + \mathrm{Ker}(u)$.

— Soit $x = x_0 + y \in x_0 + \mathrm{Ker}(u)$ (donc $y \in \mathrm{Ker}\, u$). On a $u(x) = u(x_0) + u(y) = e' + 0_{E'} = e'$ donc $x \in \mathrm{Sol}(\mathcal{S})$.

Par double inclusion, $\mathrm{Sol}(\mathcal{S}) = x_0 + \mathrm{Ker}(u)$.

Propriété 1.45 – Principe de superposition des solutions

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, E')$ et $e' \in E'$. Si e' s'écrit comme une somme :

$$e' = \sum_{k=1}^{p} e'_k, \text{ où pour tout } k \in [\![1, p]\!],\ e'_k \in \mathrm{Im}(u)$$

Si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, x_k est une solution du système linéaire :

$$(\mathcal{S}_k) \qquad u(x) = e'_k$$

alors une solution de $(\mathcal{S})$ est

$$\sum_{k=1}^{p} x_k$$

Démonstration

C'est immédiat par linéarité de u :

$$u(x) = u\Big(\sum_{k=1}^{p} x_k\Big) = \sum_{k=1}^{p} u(x_k) = \sum_{k=1}^{p} e'_k = e'$$

donc $x \in \mathrm{Sol}(\mathcal{S})$.

Exemple 1.30 – Systèmes linéaires

1. Les systèmes de n équations à p inconnues $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$\begin{cases} a_{1,1}\, x_1 + \cdots + a_{1,p}\, x_p &= b_1 \\ \quad \vdots & \\ a_{n,1}\, x_1 + \cdots + a_{n,p}\, x_p &= b_n \end{cases} \qquad \text{où les } a_{i,j} \text{ et les } b_i \text{ sont des scalaires}$$

2. Les équations différentielles linéaires du premier ordre :

$$y' + a(x)\, y = b(x), \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont continues sur } I$$

3. Les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants :

$$y'' + a\, y' + b\, y = c(x), \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des scalaires et } c \text{ est continue sur } I$$

4. Les équations récurrentes :

$$u_{n+1} + a_n\, u_n = b_n,\ \text{où } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont dans } \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

Exercice(s) 1.15

1.15.1 Soit l'équation récurrente :

$$(\mathcal{S}) \qquad (n+1)\, u_{n+1} - (4\, n+2)\, u_n = 1 - 3\, n^2$$

(a) Démontrer que c'est bien un système linéaire en précisant E, E' et u.
(b) Justifier l'existence de solutions.
(c) Écrire le système homogène associé et le résoudre.
(d) En utilisant une méthode de variation de la constante, trouver toutes les solutions de $(\mathcal{S})$.

1.15.2 Soit l'équation différentielle :

$$(\mathcal{S}) \qquad y'' + 3\, y' + 2\, y = \sqrt{x}$$

(a) Démontrer que c'est bien un système linéaire en précisant E, E' et u.
(b) Justifier l'existence de solutions.
(c) Écrire le système homogène associé et le résoudre.
(d) Trouver toutes les solutions de $(\mathcal{S})$.
(e) Comparer aux solutions du système récurrent obtenu par discrétisation :

$$(u_{n+2} - 2\, u_{n+1} + u_n) + 3\, (u_{n+1} - u_n) + 2\, u_n = \sqrt{n}$$

1.4.2 Interpolation

Proposition 1.14 – Interpolation de Lagrange

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $x_1 < \cdots < x_n$ des réels dans I, on appelle fonction polynomiale d'interpolation de Lagrange *l'unique fonction polynomiale P de degré $< n$, telle que*

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ P(x_k) = f(x_k)$$

Elle est égale à :

$$\boxed{\forall x \in I,\ P(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=1,\ i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) f(x_k).}$$

多项式插值函数用作函数的数值模拟。

Démonstration

Soit

$$E = \{f \text{ polynomiale de degré } < n\}$$

Cet espace vectoriel est clairement de dimension n, de base

$$\left(x \mapsto x^k\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$$

La famille de $E^\star$ définie par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \varphi_k\ : P \mapsto P(x_k)$$

étant une base de $E^\star$, on sait qu'il existe une base ante-duale $(P_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ qui vérifie :

$$\forall (j,k)\in[\![1,n]\!]^2\,,\ \varphi_k(x\mapsto x^j)=\delta_{j,k}$$

Un calcul simple nous démontre que :

$$\forall k\in[\![1,n]\!]\,,\ P_k=\prod_{i=1,\ i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

On cherche ensuite une solution sous la forme :

$$P=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.P_k$$

en évaluant sur les x_j, on trouve l'unique solution de l'énoncé.

Exemple 1.31 – Interpolation de Lagrange

Soit la fonction sin sur l'intervalle $[0,2\pi]$, pour un $p\in\mathbb{N}^*$, prenons

$$\forall k\in[\![0,p]\!]\,,\ x_{k,p}=\frac{2k\,\pi}{p}$$

et regardons les interpolations pour différentes valeurs de p. Voir la session `Wxmaxima` 1.3, de la présente page.

Session `Wxmaxima` 1.3 – Interpolation de Lagrange

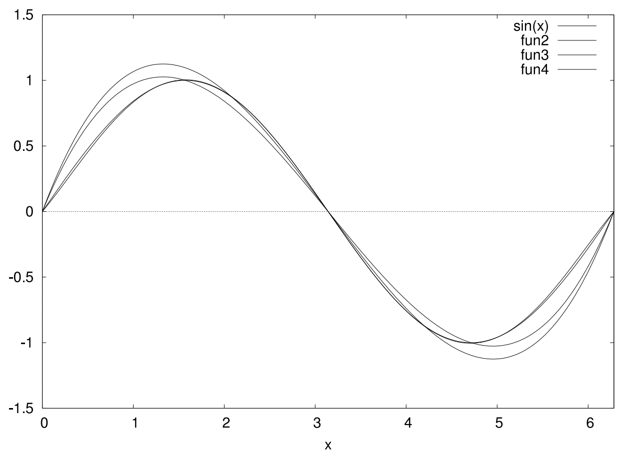
```
(%i1) x(k,p) := 2*k*%pi/p$

(%i2) load(interpol)$

(%i3) for p:3 thru 5 do
      P[p] : lagrange(makelist([x(k,p),sin(x(k,p))],k,0,p));
```

(%o3) *done*

```
(%i4) makelist(P[p],p,3,5);
```

(%o4) $$\left[\frac{3^{\frac{7}{2}}\,x\,(x-2\,\pi)\,\left(x-\frac{2\,\pi}{3}\right)}{32\,\pi^3}+\frac{3^{\frac{7}{2}}\,x\,(x-2\,\pi)\,\left(x-\frac{4\,\pi}{3}\right)}{32\,\pi^3},\frac{8\,x\,(x-2\,\pi)\,(x-\pi)\,\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{3\,\pi^4}-\frac{8\,x\,(x-2\,\pi)\,\left(x-\frac{3\,\pi}{2}\right)\,(x-\pi)}{3\,\pi^4},-\frac{3125\sin\left(\frac{8\,\pi}{5}\right)\,x\,(x-2\,\pi)\,\left(x-\frac{6\,\pi}{5}\right)\,\left(x-\frac{4\,\pi}{5}\right)\,\left(x-\frac{2\,\pi}{5}\right)}{768\,\pi^5}+\frac{3125\sin\left(\frac{6\,\pi}{5}\right)\,x\,(x-2\,\pi)\,\left(x-\frac{8\,\pi}{5}\right)\,\left(x-\frac{4\,\pi}{5}\right)\,\left(x-\frac{2\,\pi}{5}\right)}{384\,\pi^5}-\frac{3125\sin\left(\frac{4\,\pi}{5}\right)\,x\,(x-2\,\pi)\,\left(x-\frac{8\,\pi}{5}\right)\,\left(x-\frac{6\,\pi}{5}\right)\,\left(x-\frac{2\,\pi}{5}\right)}{384\,\pi^5}+\frac{3125\sin\left(\frac{2\,\pi}{5}\right)\,x\,(x-2\,\pi)\,\left(x-\frac{8\,\pi}{5}\right)\,\left(x-\frac{6\,\pi}{5}\right)\,\left(x-\frac{4\,\pi}{5}\right)}{768\,\pi^5}\right]$$

```
(%i5) plot2d([sin(x),P[3],P[4],P[5]],[x,0,2*%pi])$
```



Session Python 1.4 – Interpolation de Lagrange

Traduction du Wxmaxima.

In [2]

```
def xk(k, m):   # Éviter le nom x !
    return(2*k*pi/m)
```

In [3]

```
[interpolate([(xk(k, m),
               sin(xk(k, m)))
              for k in range(0, m+1)], x)
 for m in range(3, 6)]
```

Out [3]

$$\left[\frac{27\sqrt{3}x^3}{16\pi^3} - \frac{81\sqrt{3}x^2}{16\pi^2} + \frac{27\sqrt{3}x}{8\pi}, \frac{8x^3}{3\pi^3} - \frac{8x^2}{\pi^2} + \frac{16x}{3\pi}, -\frac{3125x^5\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}}{192\pi^5} + \frac{3125x^5\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8}+\frac{5}{8}}}{384\pi^5} - \frac{15625x^4\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8}+\frac{5}{8}}}{384\pi^4} + \frac{15625x^4\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}}{192\pi^4} - \frac{1125x^3\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}}{8\pi^3} + \frac{875x^3\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8}+\frac{5}{8}}}{12\pi^3} - \frac{5375x^2\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8}+\frac{5}{8}}}{96\pi^2} + \frac{4625x^2\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}}{48\pi^2} - \frac{125x\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}}{6\pi} + \frac{125x\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8}+\frac{5}{8}}}{8\pi}\right]$$

In [4]

```
Mp = plot(sin(x), (x, 0, 2*pi),
          show=False, line_color='red')
```

In[5]

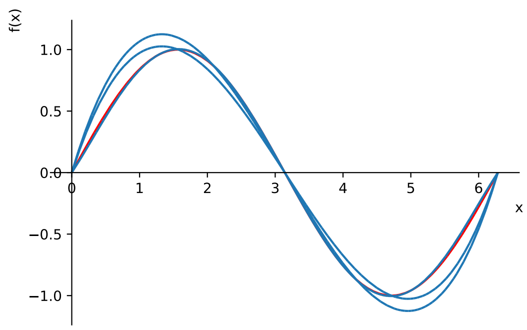
```python
for q in _:
    Mp.append(
        plot(q, (x, 0, 2*pi),
             show=False)[0])
```

In[6]

```python
Mp.show()
```

Voir la figure 1, de la présente page.

Figure 1



Exercice(s) 1.16

1.16.1 Redémontrer l'existence et l'unicité des fonctions polynomiales d'interpolation de Lagrange en utilisant un raisonnement sur les systèmes linéaires.

1.16.2 Soit $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^1$, soit $x_1 < \cdots < x_n$ des points de I. Démontrer l'existence et l'unicité d'une fonction polynomiale P de degré $< 2\,n$, telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\; P(x_k) = f(x_k) \text{ et } P'(x_k) = f'(x_k)$$

1.16.3 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $L_p(f)$ la fonction polynomiale d'interpolation de Lagrange de f pour les points :

$$x_{k,p} = a + k\,\frac{b-a}{p},\; k \in [\![0, p]\!]$$

On suppose que :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*,\; \forall x \in [a, b],\; \forall k \in \mathbb{N},\; \left|f^{(k)}(x)\right| \leq M$$

Démontrer que :

$$\sup_{x\in[a,b]} \left|L_p(f)(x) - f(x)\right| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

1.16.4 Soit $f : x \mapsto |x|$, définie sur $[-1, 1]$. Pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, on pose $L_p(f)$ la fonction polynomiale d'interpolation de Lagrange de f pour les points :

$$x_{k,p} = -1 + \frac{2k}{p},\; k \in [\![1, p-1]\!]$$

Démontrer que :

$$L_p(f)(1) \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

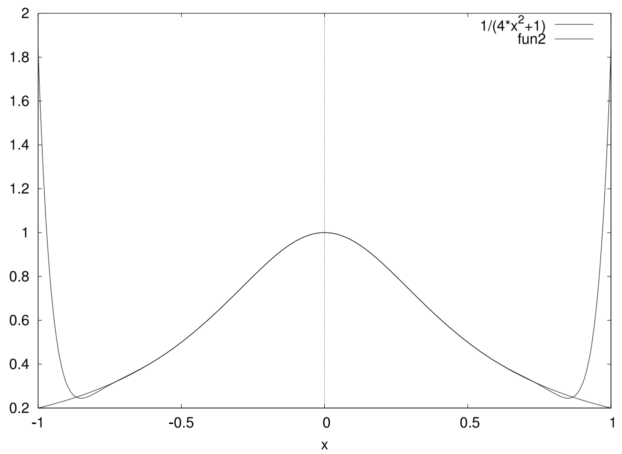
1.4.3 Fonctions *spline*

Remarque 1.41

L'interpolation par les polynômes de Lagrange n'est pas toujours efficace pour être proche de la fonction de base. Voir la session `Wxmaxima` 1.4, de la présente page.

Session `Wxmaxima` 1.4 – Phénomène de Runge

```
(%i1)  load(interpol)$

(%i2)  f(x) := 1/(1+4*x^2)$
       X(n) := makelist(-1+2*k/n,k,1,n-1)$
       Pts(m) := makelist([X(m)[k],f(X(m)[k])],k,1,m-1)$
       g(n) := lagrange(Pts(n))$

(%i6)  plot2d([f(x),g(15)],[x,-1,1])$
```



Session `Python` 1.5 – Phénomène de Runge

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```python
def f(x):
    return(1/(1+4*x**2))


def xk(n):
    return([-1+S(2)*k/n for k in range(1, n)])


def Pts(m):
    return([(xk(m)[k], f(xk(m)[k]))
```

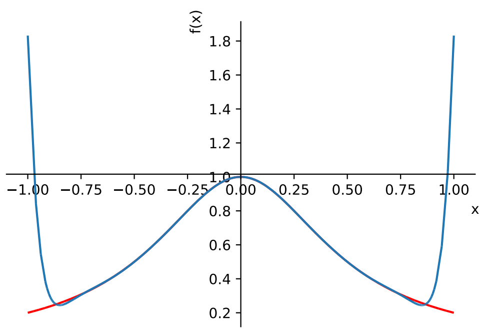
```
                for k in range(m-1)])


def g(n):
    return(interpolate(Pts(n), x))
```

In[3]

```
Mp = plot(f(x), (x, -1, 1), show=False,
          line_color='red')
Mp.append(plot(g(15), (x, -1, 1),
               show=False)[0])
Mp.show()
```

Voir la figure 2, de la présente page.

Figure 2



Remarque 1.42

C'est pourquoi, il a fallu faire appel à d'autres classes de fonctions telles que :
— elles soient faciles à calculer ;
— elles approximent bien la fonction initiale ;
— elles soient insensibles à ce phénomène de divergence.

Définition 1.30 – Fonctions spline

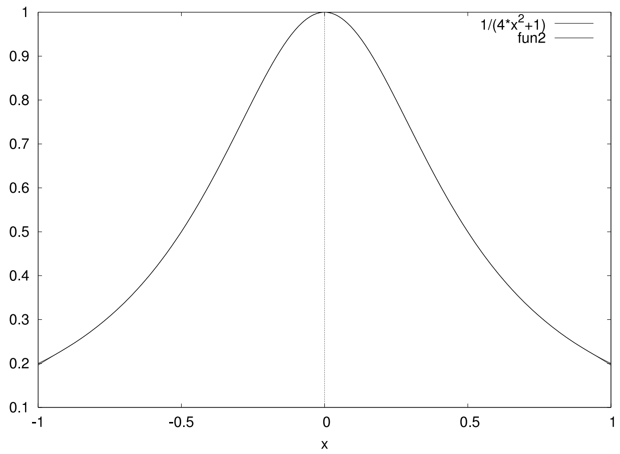
On appelle *fonctions spline*, des fonctions qui ont une classe fixée (par exemple $\mathscr{C}^2$) et qui sont polynomiales par morceaux.

Exemple 1.32 – Fonction spline

Voici ce que donne l'approximation avec 30 points (pour Lagrange, cela diverge). Voir la session `Wxmaxima` 1.5, page suivante.

Session Wxmaxima 1.5 – Fonctions spline

```
(%i1)  f(x) := 1/(1+4*x^2)$
       X(n) := makelist(-1+2*k/n,k,1,n-1)$
       Pts(n) := makelist([X(n)[k],f(X(n)[k])],k,1,n-1)$
       load(interpol)$

(%i5)  h(n) := cspline(Pts(n))$
       plot2d([f(x),h(30)],[x,-1,1])$
```



Session Python 1.6 – Fonctions spline

Traduction du `Wxmaxima`.

Pour faire comme en `Wxmaxima`, il faut choisir des *spline* cubiques.

In[4]

```
def h(n):
    return(
        interpolating_spline(
            3, x,
            [Pts(n)[k][0] for k in range(n-1)],
            [Pts(n)[k][1] for k in range(n-1)]))
```

In[5]

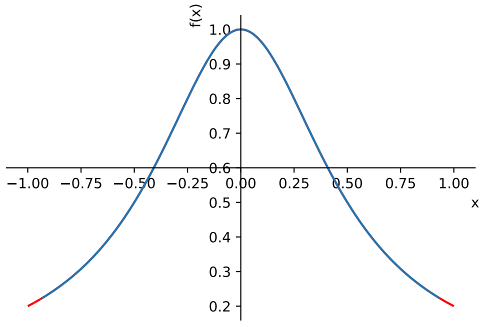
```
res = h(30)
```

In[6]

```
Mp = plot(f(x), (x, -1, 1),
          show=False, line_color='red')
Mp.append(plot(res, (x, -1, 1),
               show=False)[0])
Mp.show()
```

Voir la figure 3, page ci-contre.

Figure 3



Chapitre 2

Matrices et systèmes linéaires

2.1 Matrices

2.1.1 Définitions

注释 2.1

本章节从线性空间中向量的基底表示法出发，得出了在基底确定的有限维线性空间中的线性映射，可以用惟一对应的矩阵来表示，进而引出矩阵的定义和运算，本章节是上一章节的延续。

Rappel 2.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, alors :

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{k=1}^{p} x_k.e_k$$

Autrement dit, en utilisant la dualité, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $x_k = e_k^\star(x)$.

Rappel 2.2

Soit E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ des bases de E et E, $f \in \mathscr{L}(E, E')$, alors :

$$\exists!(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathbb{R}^{n\times p},\ \forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e'_i$$

Autrement dit, en utilisant la dualité, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $a_{i,j} = (e'_i)^\star(u(e_j))$.
Pour tout $x \in E$, on a donc :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j.\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e'_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j\right).e'_i$$

Définition 2.1 – Matrice

On appelle *matrice à n lignes et p colonnes* $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, toute famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ d'éléments d'un ensemble A représentée sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes entouré par des crochets [a] :

$$M = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}$$

Les éléments $a_{i,j}$ de la matrice s'appellent *coefficients de la matrice*.
On dit aussi que la matrice M est $n \times p$.
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans A se note :

$$\mathrm{M}_{n,p}(A)$$

Lorsque $n = p$, on dit que la matrice M est une *matrice carrée*. L'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans A se note :

$$\mathrm{M}_n(A)$$

a. On trouve aussi souvent des parenthèses (), mais nous utiliserons les crochets [] pour différencier familles et matrices.

当 $A = \mathbb{R}$ 时, $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 表示实 n 阶矩阵 (方阵) 的集合。

Définition 2.2 – Matrice d'un vecteur, d'une application linéaire

1. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p, si $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E et si x est un vecteur de E, alors on appelle *matrice de x dans la base $\mathscr{E}$* et on note :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x) \overset{\text{Not}}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \text{ où } x = \sum_{k=1}^{n} x_k.e_k$$

   On dit que M est une *matrice colonne*.

2. Si E et E' sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, E')$, si $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E, si $\mathscr{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une base de E', alors on appelle *matrice de f dans les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$* et on note :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ où pour tout } j \in [\![1,p]\!]\,,\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e'_i$$

   Noter que n le nombre de lignes est la dimension de l'espace *d'arrivée* et p le nombre de colonnes est la dimension de l'espace de *départ* !

3. Réciproquement, si $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut lui associer *canoniquement* l'application linéaire f définie sur $\mathbb{K}^p$ (de base canonique $(e_1, \dots, e_p)$) à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ (de base canonique $(e'_1, \dots, e'_n)$) telle que :

$$\forall j \in [\![1,p]\!]\,,\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e'_i$$

4. Dans le cas particulier d'un endomorphisme ($E = E'$, $\mathscr{E} = \mathscr{E}'$ et $f \in \mathscr{L}(E)$), on appelle *matrice de f dans la base $\mathscr{E}$* et on note :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) \overset{\text{Not}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}}(f)$$

   La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$ est une matrice carrée (nombre de lignes=nombre de colonnes).

以上四个例子非常重要，是理解本章节的重要基础。

Exemple 2.1

Si $E = \mathbb{R}^2$ et f est la symétrie par rapport à $y = x$, parallèlement à $y = -x$ et si $\mathscr{E} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathscr{E}' = \{(1,1),(1,-1)\}$ et $\mathscr{E}'' = \{(1,1),(0,1)\}$, calculons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)$ en utilisant l'ordinateur.

Session `Wxmaxima` 2.1 – Matrice d'une application linéaire

f est une symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice, car les droites $y = x$ et $y = -x$ sont orthogonales. Donc :

1. L'expression de f s'obtient à l'aide de la formule des symétries orthogonales vue en première année :

```
(%i1) f(x,y) := [y,x];
```

(%o1) $\mathrm{f}(x,y) := [y,x]$

2. La matrice de cette application dans la base $\mathscr{E}$ (qui est orthonormée) s'obtient alors facilement :

```
(%i2) E : [[1,0],[0,1]];
```

(%o2) $[[1,0],[0,1]]$

```
(%i3) A : genmatrix(lambda([i,j],E[i].apply(f,E[j])),2,2);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. La base $\mathscr{E}'$ est orthogonale, on peut donc facilement calculer la matrice dans cette base.

```
(%i4) Ep : [[1,1],[1,-1]];
```

(%o4) $[[1,1],[1,-1]]$

```
(%i5) B : genmatrix(lambda([i,j],(Ep[i]/(Ep[i].Ep[i])).apply(f,Ep[j])),2,2);
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4. La base $\mathscr{E}''$ n'est pas orthogonale. Pour trouver la matrice dans cette base, il faut calculer.

```
(%i6) Es : [[1,1],[0,1]];
```

(%o6) $[[1,1],[0,1]]$

```
(%i7) solve(apply(f,a*Es[1]+b*Es[2])-(x*Es[1]+y*Es[2]),[x,y]);
```

(%o7) $[[x = b + a, y = -b]]$

```
(%i8) C : matrix([1,1],[0,-1]);
```

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

5. En fait, il suffit que la base d'arrivée soit orthonormée pour que le calcul soit simple, ainsi la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}'',\mathscr{E}}(f)$ vaut :

```
(%i9) D : genmatrix(lambda([i,j],E[i].apply(f,Es[j])),2,2);
```

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Session `Python` 2.1 – Matrice d'une application linéaire

Traduction du `Wxmaxima`.

In [2]

```python
def f(x, y):
    return([y, x])
```

In [3]

```python
A = Matrix([f(1, 0),
            f(0, 1)]).transpose()
A
```

Out [3]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mieux : utiliser directement les notations usuelles !

In [4]

```python
def f(X):
    return(Matrix([X[1], X[0]]))
```

In [5]

```python
X = Matrix([x, y])
X, f(X)
```

Out [5]

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \right)$$

Attention aux ordres des éléments !

In [6]

```python
Matrix([X.subs({x: 1, y: 2}),
        X.subs({x: 3, y: 4})]).reshape(2, 2)
```

Out [6]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Il faudra donc transposer [1] pour mettre plusieurs vecteurs en colonne ! (la méthode `.transpose()`)

1. Voir la définition de la transposition, définition 2.5, page 103

In[7]

```python
A = Matrix(3, 4, [4*i+j-4
                  for i in range(1, 4)
                  for j in range(1, 5)])
A
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\5 & 6 & 7 & 8\\9 & 10 & 11 & 12\end{bmatrix}$$

In[8]

```python
A.transpose()
```

Out[8]

$$\begin{bmatrix}1 & 5 & 9\\2 & 6 & 10\\3 & 7 & 11\\4 & 8 & 12\end{bmatrix}$$

In[9]

```python
e1 = X.subs({x: 1, y: 0})
e2 = X.subs({x: 0, y: 1})
e1, e2
```

Out[9]

$$\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

In[10]

```python
Matrix([f(e1),
        f(e2)]).reshape(2, 2).transpose()
```

Out[10]

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

In[11]

```python
ep1 = X.subs({x: 1, y: 1})
ep2 = X.subs({x: 1, y: -1})
```

```
ep1, ep2
```

Out[11]

$$\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$$

In[12]

```
ep1.dot(ep2)
```

Out[12]

$$0$$

In[13]

```
Matrix(2, 2,
       [f(ep1).dot(ep1)/ep1.dot(ep1),
        f(ep1).dot(ep2)/ep2.dot(ep2),
        f(ep2).dot(ep1)/ep1.dot(ep1),
        f(ep2).dot(ep2)/ep2.dot(ep2)]).transpose()
```

Out[13]

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

In[14]

```
es1 = X.subs({x: 1, y: 1})
es2 = X.subs({x: 0, y: 1})
es1, es2
```

Out[14]

$$\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

In[15]

```
[solve(f(es1)-x*es1-y*es2, [x, y]),
 solve(f(es2)-x*es1-y*es2, [x, y])]
```

Out[15]

$$[\{x : 1,\ y : 0\},\ \{x : 1,\ y : -1\}]$$

In[16]

```
Matrix([X.subs(_[0]),
        X.subs(_[1])]).reshape(2, 2).transpose()
```

Out[16]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.1.2 Opérations sur les matrices

On a vu qu'il y a une correspondance entre $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{L}(E, E')$ via l'application

$$\begin{cases} \mathscr{L}(E, E') \to \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \end{cases}$$

Puisque $\mathscr{L}(E, E')$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il est naturel de définir des opérations sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de manière à ce que $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que l'application ci-dessus soit un isomorphisme.

Définition 2.3 – Addition et multiplication externe

On définit les deux opérations suivantes sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

— *L'addition*[a] : si $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit $A + B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}}_{=A} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} \end{bmatrix}}_{=B} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \cdots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{bmatrix}}_{=A+B}$$

— *La multiplication externe* : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit $\lambda.A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$\lambda.\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}}_{=A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda\, a_{1,1} & \cdots & \lambda\, a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\, a_{n,1} & \cdots & \lambda\, a_{n,p} \end{bmatrix}}_{=\lambda.A}$$

---

[a] Il faut que les dimensions des matrices A et B soient les mêmes !

Remarque 2.1

L'élément neutre pour l'addition de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée la *matrice nulle*, notée $0_{n,p}$ et définie par

$$0_{n,p} \overset{\text{Not}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = [0]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

Cette matrice correspond à l'application linéaire nulle $0_{\mathscr{L}(E,E')}$.
Lorsque $n = p$, on note

$$0_n \overset{\text{Not}}{=} 0_{n,n}$$

Proposition 2.1

L'ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *muni des deux opérations ci-dessus est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel isomorphe à* $\mathscr{L}(E,E')$ *pour tous* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels* E *et* E'*, toute base* $\mathscr{E}$ *de* E *et toute base* $\mathscr{E}'$ *de* E'*, via l'isomorphisme*

$$\Phi : \begin{cases} \mathscr{L}(E,E') \to \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \end{cases}$$

En particulier :

$$\dim \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n\,p$$

et

$$\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,E')^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(\lambda.f + \mu.g) = \lambda.\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) + \mu.\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(g)$$

Démonstration

— Il est immédiat que $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : c'est le même espace que $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p$ muni des opérations usuelles (il est donc de dimension finie $n\,p$).

— La linéarité de Φ est immédiate.

— Démontrons que Φ est injective. Soit $f \in \operatorname{Ker}\Phi$. On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) = 0_{n,p}$. Autrement dit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et en notant $\mathscr{E} = (e_1,\dots,e_p)$, les coefficients de $u(e_i)$ dans la base $\mathscr{E}'$ sont tous nuls. On a donc $u = 0_{\mathscr{L}(E,E')}$ et on en déduit que $\operatorname{Ker}\Phi = \{0_{\mathscr{L}(E,E')}\}$ donc Φ est injective.

— Φ est linéaire et injective entre deux espaces de même dimension, elle est bijective. C'est donc un isomorphisme. En particulier, on retrouve le fait que

$$\dim \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \dim \mathscr{L}(E,E') = n\,p$$

et la propriété de linéarité

$$\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,E')^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(\lambda.f + \mu.g) = \lambda.\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) + \mu.\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(g)$$

Remarque importante 2.2

En dimension finie, connaître une application linéaire revient à connaître sa matrice dans des bases données. Ainsi, pour résoudre un problème d'algèbre linéaire en dimension finie, on peut travailler *géométriquement* avec les applications linéaires, ou bien *algébriquement* avec des matrices, en fonction de ce qui est le plus pertinent.

Remarque 2.3

Il existe une base naturelle de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée *base canonique*, donnée par

$$(E_{k,\ell})_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

avec

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]\,,\ E_{k,\ell} \overset{\text{Not}}{=} [\delta_{i,k}\,\delta_{j,\ell}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

Autrement dit, le coefficient en (i,j) de $E_{k,\ell}$ est nul, sauf pour $(i,j) = (k,\ell)$ en lequel il vaut 1. On a donc

$$\forall A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ A = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{p} a_{k,l}.E_{k,\ell}$$

Session `Wxmaxima` 2.2 – Addition et multiplication externe

```
(%i1) A : genmatrix(lambda([i,j], a[i,j]), 3, 4);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}$

(%i2) `B : genmatrix(lambda([i,j], b[i,j]), 3, 4);`

(%o2)
$$\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \end{bmatrix}$$

(%i3) `A+B;`

(%o3)
$$\begin{bmatrix} b_{1,1}+a_{1,1} & b_{1,2}+a_{1,2} & b_{1,3}+a_{1,3} & b_{1,4}+a_{1,4} \\ b_{2,1}+a_{2,1} & b_{2,2}+a_{2,2} & b_{2,3}+a_{2,3} & b_{2,4}+a_{2,4} \\ b_{3,1}+a_{3,1} & b_{3,2}+a_{3,2} & b_{3,3}+a_{3,3} & b_{3,4}+a_{3,4} \end{bmatrix}$$

(%i4) `k*A;`

(%o4)
$$\begin{bmatrix} a_{1,1}\,k & a_{1,2}\,k & a_{1,3}\,k & a_{1,4}\,k \\ a_{2,1}\,k & a_{2,2}\,k & a_{2,3}\,k & a_{2,4}\,k \\ a_{3,1}\,k & a_{3,2}\,k & a_{3,3}\,k & a_{3,4}\,k \end{bmatrix}$$

Session `Python` 2.2 – Addition et multiplication externe

Traduction du `Wxmaxima`.

In [2]

```
a = IndexedBase('a')
A = Matrix(3, 4,
           [a[i, j]
            for i in range(1, 4)
            # Noter l'ordre des boucles !!!
            for j in range(1, 5)])
A
```

Out [2]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}$$

In [3]

```
b = IndexedBase('b')
B = Matrix(3, 4,
           [b[i, j]
            for i in range(1, 4)
            for j in range(1, 5)])
B
```

Out [3]

$$\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \end{bmatrix}$$

In [4]

```
A+B
```

Out [4]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & a_{1,3}+b_{1,3} & a_{1,4}+b_{1,4} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & a_{2,3}+b_{2,3} & a_{2,4}+b_{2,4} \\ a_{3,1}+b_{3,1} & a_{3,2}+b_{3,2} & a_{3,3}+b_{3,3} & a_{3,4}+b_{3,4} \end{bmatrix}$$

In [5]

```
t*A
```

Out [5]

$$\begin{bmatrix} ta_{1,1} & ta_{1,2} & ta_{1,3} & ta_{1,4} \\ ta_{2,1} & ta_{2,2} & ta_{2,3} & ta_{2,4} \\ ta_{3,1} & ta_{3,2} & ta_{3,3} & ta_{3,4} \end{bmatrix}$$

Puisque la composition de deux applications linéaires est encore une application linéaire, il est naturel de chercher à comprendre quelle est l'opération correspondante sur les matrices.

Définition 2.4 – Produit de deux matrices

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on définit le *produit de A par B* comme la matrice $A \centerdot B \in \mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$\boxed{A \centerdot B \overset{\text{Def}}{=} \left[\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, b_{k,j}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]}}$$

Voir la figure 2.1, page ci-contre [a].

a. Tiré de http://www.texample.net/tikz/examples/matrix-multiplication/

⚠ ⚠ Il faut bien faire attention à ce que les dimensions des matrices soient *compatibles* : lorsque l'on veut faire le produit $A \centerdot B$, le nombre de colonnes de A *doit être égal* au nombre de lignes de B.

只有在矩阵A 的列数等于矩阵B 的行数时矩阵才可以相乘。 另外矩阵的乘法满足结合律和分配律，但不满足交换律。

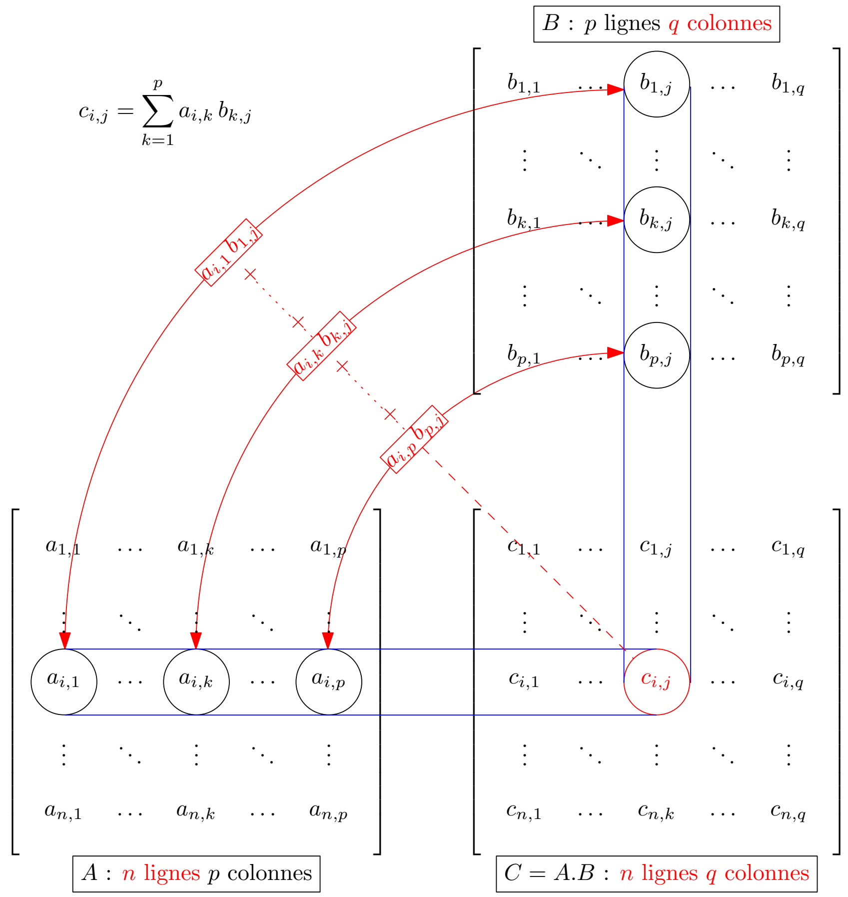
Propriété 2.1 – Évaluation d'une application linéaire

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie (avec $p = \dim E$ et $n = \dim E'$), soit $\mathscr{E}$ une base de E et $\mathscr{E}'$ une base de E', soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et soit $x \in E$. Alors

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}'}\big(f(x)\big)}_{\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)}_{\in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \centerdot \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x)}_{\in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})}$$

Autrement dit, le produit matriciel $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \centerdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x)$ traduit le calcul de $f(x)$.

Figure 2.1 – Produit matriciel



Démonstration

On reprend les notations des points 1 et 2 de la définition 2.2, page 90. On a

$$f(x) = f\Big(\sum_{j=1}^{p} x_j.e_j\Big) = \sum_{j=1}^{p} x_j.f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j.\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e'_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j\Big).e'_i$$

Autrement dit, $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j$ est le i-ième coefficient de $f(x)$ dans la base $\mathscr{E}' = (e'_1, \dots, e'_p)$. On a donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}'}\,(f(x)) = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, x_j$$

qui est par définition du produit matriciel le i-ième coefficient de la matrice colonne $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x)$, d'où le résultat.

Proposition 2.2 – Correspondance entre composition et produit matriciel

Soit E, E' et E'' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ($p = \dim E$, $n = \dim E'$ et $q = \dim E''$), soit $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$ des bases de E, E' et E'' et soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et $g \in \mathscr{L}(E', E'')$. Alors

$$\boxed{\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}''}(g \circ f)}_{\in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{K})} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}',\mathscr{E}''}(g)}_{\in \mathrm{M}_{q,n}(\mathbb{K})} \bullet \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)}_{\in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})}}$$

Autrement dit, le produit matriciel $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}',\mathscr{E}''}(g) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)$ traduit le calcul de $g \circ f$.

线性映射的复合引出了矩阵的乘法。

Démonstration

Notons $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$. Soit $j \in [\![1, p]\!]$. La j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}''}(g \circ f)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}''}(g \circ f) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(e_j) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}''}\left((g \circ f)(e_j)\right)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}''}\left(g(f(e_j))\right)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}',\mathscr{E}''}(g) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}'}\left(f(e_j)\right)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}',\mathscr{E}''}(g) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(e_j)\end{aligned}$$

en remarquant que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(e_j) \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ a des zéros partout sauf en position j et en utilisant plusieurs fois la propriété 2.1, page 98. Finalement, les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}''}(g \circ f)$ et de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}',\mathscr{E}''}(g) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)$ sont les mêmes, ces deux matrices sont donc égales.

Remarque 2.4

Lorsque $p = n$, on appelle *matrice identité d'ordre* p et on note :

$$I_p \overset{\text{Not}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\delta_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$$

La matrice identité I_p correspond l'endomorphisme id_E, l'application identité de E (avec $p = \dim E$), dans n'importe quelle base de E.

I_n 叫做 n 阶单位矩阵。

Session `Wxmaxima` 2.3 – Produit de matrices

```
(%i13) A : genmatrix(lambda([i,j], a[i,j]), 4, 3);
```

(%o13) $$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix}$$

```
(%i1) B : genmatrix(lambda([i,j], b[i,j]), 3, 2);
```

(%o1) $$\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix}$$

```
(%i3) A.B;
```

(%o3) $$\begin{bmatrix} a_{1,3} \times b_{3,1} + a_{1,2} \times b_{2,1} + a_{1,1} \times b_{1,1} & a_{1,3} \times b_{3,2} + a_{1,2} \times b_{2,2} + a_{1,1} \times b_{1,2} \\ a_{2,3} \times b_{3,1} + b_{2,1} \times a_{2,2} + b_{1,1} \times a_{2,1} & a_{2,3} \times b_{3,2} + a_{2,2} \times b_{2,2} + b_{1,2} \times a_{2,1} \\ b_{3,1} \times a_{3,3} + b_{2,1} \times a_{3,2} + b_{1,1} \times a_{3,1} & b_{3,2} \times a_{3,3} + b_{2,2} \times a_{3,2} + b_{1,2} \times a_{3,1} \\ b_{3,1} \times a_{4,3} + b_{2,1} \times a_{4,2} + b_{1,1} \times a_{4,1} & b_{3,2} \times a_{4,3} + b_{2,2} \times a_{4,2} + b_{1,2} \times a_{4,1} \end{bmatrix}$$

Session `Python` 2.3 – Produit de matrices

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```
a = IndexedBase('a')
A = Matrix(4, 3,
           [a[i, j]
            for i in range(1, 5)
            for j in range(1, 4)])
A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix}$$

In[3]

```
B = Matrix(3, 2,
           [b[i, j]
            for i in range(1, 4)
            for j in range(1, 3)])
B
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix}$$

In[4]

```
A*B
```

Out[4]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b_{3,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} + a_{2,3}b_{3,2} \\ a_{3,1}b_{1,1} + a_{3,2}b_{2,1} + a_{3,3}b_{3,1} & a_{3,1}b_{1,2} + a_{3,2}b_{2,2} + a_{3,3}b_{3,2} \\ a_{4,1}b_{1,1} + a_{4,2}b_{2,1} + a_{4,3}b_{3,1} & a_{4,1}b_{1,2} + a_{4,2}b_{2,2} + a_{4,3}b_{3,2} \end{bmatrix}$$

Exemple 2.2

Il est important de savoir calculer les produits de matrices *et de savoir prouver que le résultat est correct* ! Ainsi, si $E_{k,\ell}$ est de taille $n \times p$, et $E_{r,s}$ est de taille $p \times q$, alors :

$$\boxed{E_{k,\ell} \centerdot E_{r,s} = \delta_{\ell,r}.E_{k,s}}$$

En effet :

$$E_{k,\ell} = [\delta_{i,k}\,\delta_{j,\ell}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \text{ et } E_{r,s} = [\delta_{i,r}\,\delta_{j,s}]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$$

Les dimensions sont compatibles, on peut effectuer le produit et :

$$E_{k,\ell} \centerdot E_{r,s} = [\delta_{i,k}\,\delta_{j,\ell}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \centerdot [\delta_{i,r}\,\delta_{j,s}]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} = \left[\sum_{t=1}^{p} \delta_{i,k}\,\delta_{t,\ell}\,\delta_{t,r}\,\delta_{j,s}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]},$$

Or

$$\forall(\ell,t,r)\in[\![1,p]\!]^3,\ \delta_{t,\ell}\,\delta_{t,r} = \delta_{\ell,r}\,\delta_{t,r}$$

donc

$$E_{k,\ell} \centerdot E_{r,s} = \delta_{\ell,r}.E_{k,s}$$

Propriété 2.2 – Propriétés du produit de matrices

— Le produit est associatif :

$$\forall(A,B,C)\in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})\times \mathrm{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ A\centerdot(B\centerdot C) = (A\centerdot B)\centerdot C \overset{\text{Not}}{=} A\centerdot B\centerdot C$$

— Le produit est distributif à gauche et à droite :

$$\forall(A,B)\in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2,\ \forall(C,D)\in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2,\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \begin{cases}(\lambda.A+\mu.B)\centerdot C = \lambda.A\centerdot C + \mu.B\centerdot C\\ A\centerdot(\lambda.C+\mu.D) = \lambda.A\centerdot C + \mu.A\centerdot D\end{cases}$$

— Existence d'éléments neutres (à gauche et à droite) pour la multiplication :

$$\forall A\in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ I_n\centerdot A = A\centerdot I_p = A$$

— Existence d'éléments absorbants pour la multiplication :

$$\forall A\in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ 0_{q,n}\centerdot A = 0_{q,p} \text{ et } A\centerdot 0_{p,q} = 0_{n,q}$$

注释 2.2

矩阵的乘法与数乘运算之间也满足以上结合律的规律；矩阵的乘法与转置之间则满足倒置的分配律。注意区分矩阵的左乘和右乘的区别。

Démonstration

Deux méthodes : on peut vérifier ces égalités en calculant tous ces produits en utilisant la définition du produit (définition 2.4, page 98) ; on peut également utiliser l'isomorphisme Φ de la proposition 2.1, page 96, les égalités ci-dessus découlent alors des propriétés de la composition des applications linéaires (la démonstration est laissée en exercice).

Remarque 2.5

Pour toute matrice *carrée* $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$A^0 = I_n \text{ et pour tout } k\in\mathbb{N},\ A^{k+1} = A^k\centerdot A$$

Si A et B sont deux matrices carrées *qui commutent* (c'est-à-dire $A\centerdot B = B\centerdot A$), alors on a la formule du binôme :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ (A+B)^k = \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}.A^\ell\centerdot B^{k-\ell}$$

⚠⚠ L'hypothèse $A\centerdot B = B\centerdot A$ est indispensable. En général,

$$(A+B)^2 = A^2 + \underbrace{A\centerdot B + B\centerdot A}_{\neq 2.A\centerdot B} + B^2$$

Exercice(s) 2.1

2.1.1 Calculer pour $M \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les matrices $M.E_{k,\ell}$ et $E_{k,\ell}.M$ pour les valeurs de k et ℓ (à préciser).

2.1.2 Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ où

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \,,\; a_{i,j} = i$$

Calculer A^2.

2.1.3 Résoudre l'équation $M^2 = 0_2$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

2.1.4 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \,,\; \begin{cases} a_{i,j} = a & \text{si } i = j \\ a_{i,j} = b & \text{si } (i = 1 \text{ et } j \geq 2) \text{ ou } (j = n \text{ et } i \geq 2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Trouver toutes les matrices qui commutent avec A, c'est-à-dire déterminer l'ensemble

$$\{B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\; A \centerdot B = B \centerdot A\}$$

2.1.5 On suppose que a, b et c sont trois nombrs complexes tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = A^2 + I_3$$

Démontrer que :

$$A \centerdot B = B \centerdot A = 0_3 \text{ et } B^2 = B$$

2.1.6 Soit A, B et C trois matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall k \in [\![1,3]\!] \,,\; A^k = B + k.C$$

Démontrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\; A^p = B + p.C$$

2.1.3 Transposition

Définition 2.5 – Transposée d'une matrice

Soit A un ensemble, $(n,p) \in {\mathbb{N}^*}^2$, alors l'application définie par :

$$\begin{cases} \mathrm{M}_{n,p}(A) \to \mathrm{M}_{p,n}(A) \\ M = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix} \mapsto {}^tM = [a_{j,i}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,p} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix} \end{cases}$$

est appelée *transposition*. La matrice ${}^tM$ est appelée *la transposée* [a] *de* M.

a. On rencontre également la notation $M^\top$ pour la transposée de M.

${}^tM$ 叫做 M 的转置矩阵。

Propriété 2.3 – Propriétés de la transposition

— La transposition est une application linéaire :

$$\forall (A,B)\in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2,\ {}^t(\lambda.A+\mu.B)=\lambda.{}^tA+\mu.{}^tB$$

— La transposition est involutive :

$$\forall A\in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ {}^t\left({}^tA\right)=A$$

— La transposition est contravariante :

$$\forall (A,B)\in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ {}^t(A\bullet B)={}^tB\bullet {}^tA$$

Démonstration

Les deux premiers points sont immédiats par définition. En notant $X_{i,j}$ le coefficient en (i,j) d'une matrice X, pour tout $(i,j)\in [\![1,q]\!]\times[\![1,n]\!]$, on a

$$\left({}^t(A\bullet B)\right)_{i,j}=\left(A\bullet B\right)_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}A_{j,k}\,B_{k,i}=\sum_{k=1}^{p}B_{k,i}\,A_{j,k}=\sum_{k=1}^{p}({}^tB)_{i,k}\,({}^tA)_{k,j}=\left({}^tB\bullet{}^tA\right)_{i,j}$$

d'où le troisième point.

Exemple 2.3

1. Il y deux manières de considérer les formes linéaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie :
   — comme des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$; elles sont alors représentées par des matrices de $\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ en fixant une base de E (avec $p=\dim E$) ;
   — comme des vecteurs de $E^\star$; elles sont alors représentées dans une base de $E^\star$ par des matrices de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

   Y a-t-il un lien entre ces deux représentations ? Soit $\mathscr{E}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E et $\varphi\in E^\star$, en prenant (1) comme base de $\mathbb{K}$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},(1)}(\varphi)=\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_p\end{bmatrix},\quad \text{où pour tout } i\in[\![1,p]\!],\ \varphi(e_i)=a_i$$

   On a donc, pour tout $x\in E$:

$$\mathrm{Mat}_{(1)}\left(\varphi(x)\right)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},(1)}(\varphi)\bullet\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x)=\begin{bmatrix}\displaystyle\sum_{k=1}^{p}a_k\,x_k\end{bmatrix},\quad \text{avec }\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x)=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{bmatrix}$$

   Notation 2.1

   Dans la suite de ce cours, on conviendra que les matrices à 1 ligne et 1 colonne seront notées comme des scalaires. Soit :

$$\forall a\in\mathbb{K},\ a\overset{\text{Not}}{=}[a]$$

   On a donc, avec cet abus de notation,

$$\mathrm{Mat}_{(1)}\left(\varphi(x)\right)=\sum_{k=1}^{p}a_k\,x_k$$

   Soit $\mathscr{E}^\star$ la base duale de $\mathscr{E}$, notons :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}^\star}(\varphi)=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_p\end{bmatrix}$$

de sorte que :

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{p} b_k . e_k^\star(x) = \sum_{k=1}^{p} b_k \, x_k .$$

Finalement :

$$\forall k \in [\![1, p]\!] \, , \; a_k = b_k$$

Autrement dit,

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},(1)}(\varphi) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}^\star}(\varphi)}$$

2. En Wxmaxima, on obtient :

Session Wxmaxima 2.4 – Transposée d'une matrice

```
(%i1) A : genmatrix(lambda([i,j], 4*i+j-4), 3, 4);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

```
(%i2) transpose(A);
```

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

Session Python 2.4 – Transposée d'une matrice

Traduction du Wxmaxima.

In [2]

```python
A = Matrix(3, 4, [4*i+j-4
                  for i in range(1, 4)
                  for j in range(1, 5)])
A
```

Out [2]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

In [3]

```python
A.transpose()
```

Out [3]

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Définition 2.6 – Matrices symétriques et matrices antisymétriques

Soit $M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

— On dit que $M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ est *symétrique* [a] si elle vérifie ${}^tM = M$. L'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ est noté

$$\mathrm{S}_p(\mathbb{K}) = \{M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}),\ {}^tM = M\}$$

— On dit que $M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ est *antisymétrique* si elle vérifie ${}^tM = -M$. L'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ est noté

$$\mathrm{A}_p(\mathbb{K}) = \{M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}),\ {}^tM = -M\}$$

a. Les matrices M vérifiant ${}^tM = M$ sont nécessairement carrées !

Exercice(s) 2.2

2.2.1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

(a) Démontrer que $\mathrm{S}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_p(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

(b) Démontrer que

$$\mathrm{M}_p(\mathbb{K}) = \mathrm{S}_p(\mathbb{K}) \oplus \mathrm{A}_p(\mathbb{K})$$

(c) Déterminer la dimension de $\mathrm{S}_p(\mathbb{K})$ et la dimension de $\mathrm{A}_p(\mathbb{K})$.

2.1.4 Matrices diagonales, matrices triangulaires

Définition 2.7 – Matrices diagonales et matrices triangulaires

Soit [a] $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

— On dit que A est *diagonale* si tous ses coefficients non-diagonaux sont nuls, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \implies a_{i,j} = 0$$

Autrement dit :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{p,p} \end{bmatrix} \overset{\text{Not}}{=} \mathrm{Diag}(a_{1,1}, \dots, a_{p,p})$$

On note $\mathrm{D}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

— On dit que A est *triangulaire supérieure* si tous ses coefficients au-dessous de sa diagonale sont nuls, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i > j \implies a_{i,j} = 0$$

Autrement dit :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{p,p} \end{bmatrix}$$

On note $\mathrm{T}_p^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

— On dit que A est *triangulaire inférieur* si tous ses coefficients au-dessus de sa diagonale sont nuls, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ j > i \implies a_{i,j} = 0$$

Autrement dit :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{p,1} & \cdots & \cdots & a_{p,p} \end{bmatrix}$$

On note $\mathrm{T}_p^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

---

a. Il est indispensable que A soit une matrice carrée !

Exercice(s) 2.3

2.3.1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

(a) Démontrer que $\mathrm{D}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{T}_p^+(\mathbb{K})$ et $\mathrm{T}_p^-(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$. Quelles sont leurs dimension respectives ?

(b) Démontrer que ces trois espaces sont stables par produit et exprimer simplement les coefficients diagonaux du produit.

2.1.5 Trace d'une matrice

Définition 2.8 – Trace d'une matrice

Soit [a] $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$. On définit la *trace* de A, notée $\mathrm{trace}(A)$, comme la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{trace}(A) = \sum_{k=1}^{p} a_{k,k}$$

---

a. Il est indispensable que A soit une matrice carrée !

Propriété 2.4

1. $A \mapsto \mathrm{trace}(A)$ est une forme linéaire sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.
2. La trace est invariante par transposition :

$$\forall \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}),\ \mathrm{trace}({}^tA) = \mathrm{trace}(A)$$

3. La trace est invariante par commutation de deux matrices [a] :

$$\forall A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K}),\ \mathrm{trace}(A \centerdot B) = \mathrm{trace}(B \centerdot A)$$

---

a. Mais il est *faux* de penser que

$$\mathrm{trace}(A \centerdot B \centerdot C) = \mathrm{trace}(A \centerdot C \centerdot B)$$

On peut commuter deux matrices, mais on ne peux pas changer n'importe quel ordre !

Démonstration

En exercice.

2.1.6 Matrices inversibles

Définition 2.9

Soit [a] $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$. On dit que A est *inversible* si :

$$\exists B \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}),\ A \centerdot B = B \centerdot A = I_p$$

On dit alors que B est l'*inverse* de A et on note

$$A^{-1} \overset{\text{Not}}{=} B$$

On note

$$\mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ l'ensemble des matrices inversibles de } \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$$

a. Il est indispensable que A soit une matrice carrée !

Remarque 2.6

S'il existe, l'inverse est unique. En effet, si B et B' sont deux inverses de A, on a :

$$B = B \centerdot I_p = B \centerdot (A \centerdot B') = (B \centerdot A) \centerdot B' = I_p \centerdot B' = B'$$

Exemple 2.4

Soit $A \in \mathrm{D}_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonale :

$$A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$$

Alors A est inversible si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_k \neq 0$. Si c'est le cas, on a

$$A^{-1} = \mathrm{Diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_p^{-1})$$

Proposition 2.3 – Lien entre automorphismes et matrices inversibles

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $\mathscr{E}$ une base de E et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors f est inversible si, et seulement si, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$ est inversible. Si c'est le cas :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)^{-1}$$

Démonstration

— Supposons f inversible. On a

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$$

d'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f \circ f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f^{-1} \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathrm{id}_E)$$

et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) \centerdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f^{-1}) \centerdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = I_p$$

ce qui démontre que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$ est inversible et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)^{-1}$.

— Supposons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$ inversible. D'après la proposition 2.1, page 96, il existe un unique $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)^{-1}$$

On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) \centerdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g) \centerdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = I_p$$
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathrm{id}_E)$$

d'où

$$f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E$$

ce qui démontre que f est inversible.

Remarque 2.7

Ainsi, les matrices inversibles représentent les automorphismes. À noter qu'il suffit de vérifier l'inversibilité matriciel dans une seule base.

Propriété 2.5

Soit $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$. Alors :

1. $A^{-1} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $A \centerdot B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $(A \centerdot B)^{-1} = B^{-1} \centerdot A^{-1}$;
3. pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, on note alors $A^{-k} \overset{\text{Not}}{=} (A^k)^{-1}$;
4. ${}^tA \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

Démonstration

- La relation $A \centerdot A^{-1} = A^{-1} \centerdot A$ démontre que A^{-1} est inversible et que son inverse est A.
- On a
$$(A \centerdot B) \centerdot (B^{-1} \centerdot A^{-1}) = A \centerdot (B \centerdot (B^{-1}) \centerdot A^{-1} = A \centerdot I_p \centerdot A^{-1} = A \centerdot A^{-1} = I_p$$
et de même $(B^{-1} \centerdot A^{-1}) \centerdot (A \centerdot B) = I_p$, d'où le résultat.
- Par récurrence sur k en utilisant le point 2.
- On a
$${}^tA \centerdot {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1} \centerdot A) = {}^tI_p = I_p$$
et de même ${}^t(A^{-1}) \centerdot {}^tA = I_p$, d'où le résultat.

Remarque importante 2.8

Si A et B sont inversibles, il est faux en général que $A + B$ est inversible.
Par exemple $A - A = 0_p$ n'est jamais inversible.
En particulier, $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$. Il est cependant stable par produit.

2.1.7 Changement de bases

注释 2.3

本小结首先介绍了在同一域$\mathbb{K}$上的线性空间下，单位映射不同基底的矩阵表示方法(matrice de passage)，接着介绍了不同线性空间下线性映射在不同基底下的矩阵表示法及变换关系。

Définition 2.10 – Matrice d'une famille

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E (avec $p = \dim E$). Soit $\mathscr{X} = (x_1, \dots, x_r)$ une famille de r vecteurs de E. On appelle *matrice de la famille* $\mathscr{X} = (x_1, \dots, x_r)$ *dans la base* $\mathscr{E}$ et on note :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{X}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}\left((x_1, \dots, x_r)\right) = [a_{i,j}]_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_r \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,r} \end{bmatrix} \end{array}$$

où $a_{i,j}$ est le i-ième coefficient de x_j dans la base $\mathscr{E}$:

$$\forall j \in [\![1, r]\!] \,,\ x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e_i$$

Autrement dit, par dualité, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]$, $a_{i,j} = e_i^\star(x_j)$.

Exemple 2.5

1. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{E}$ une base de E et $x \in E$, alors :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}\left((x)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x)$$
2. Si E et E' sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E (avec $p = \dim E$), $\mathscr{E}'$ une base de E' et $f \in \mathscr{L}(E, E')$, alors :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}'}\left((u(e_1), \dots, u(e_p)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(u)$$

Définition 2.11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_p)$ deux bases de E (avec $p = \dim E$). On appelle *matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{B}$* et on note :
$$P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} \overset{\text{Not}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{B}) = [e_i^\star(b_j)]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$$
C'est donc la matrice de la *nouvelle base* $\mathscr{B}$ exprimée dans l'*ancienne base* $\mathscr{E}$.

Remarque 2.9

On a (attention à l'ordre des bases !) :
$$\boxed{P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{E}}(\mathrm{id}_E)}$$

Propriété 2.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ deux bases de E.
Alors la matrice de passage $P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}$ est inversible et
$$\boxed{\left(P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}}}$$

Démonstration

On a
$$P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} \cdot P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{E}}(\mathrm{id}_E) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = I_p$$
et de même $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}} \cdot P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} = I_p$, d'où le résultat.

Propriété 2.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ trois bases de E. Alors :
$$\boxed{P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} \cdot P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}}$$

Démonstration

Analogue à la démonstration de la propriété 2.6, page ci-contre (en exercice).

Remarque 2.10

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie avec $p = \dim E$, si $\mathscr{E}$ est une base de E, alors une famille $\mathscr{X} = (x_1, \dots, x_p)$ de p vecteurs de E est une base de E si, et seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{X})$ est inversible.
Si c'est le cas, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\mathscr{X}) = P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{X}}$.

Proposition 2.4 – Changement de base pour les vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ deux bases de E, $x \in E$. Alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x) = P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)}$$

Autrement dit, en multipliant à gauche par $P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}$, on obtient les anciennes coordonnées *en fonction des* nouvelles coordonnées.

Démonstration

On a

$$P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{E}}(\mathrm{id}_E) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}\left(\mathrm{id}_E(x)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x)$$

Proposition 2.5 – Changement de base pour les applications linéaires

Soit E et E' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ deux base de E, $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E', $f \in \mathscr{L}(E, E')$. Alors (voir la figure 2.2, page suivante) :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \left(P_{\mathscr{E}'}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \cdot P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}}$$

Dans le cas particulier où f est un endomorphisme de E ($E' = E$, $\mathscr{E}' = \mathscr{E}$, $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$), on a

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) \cdot P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}}$$

注意E和E'都是有限维线性空间，理解线性映射在不同基底下的矩阵表示关系。
此公式是上一性质的特殊情况，解题时经常使用。

Démonstration

L'égalité $f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{E'} \circ f$ donne

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{E}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{E}'}(\mathrm{id}_{E'}) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) \cdot P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{E}'}^{\mathscr{B}'} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$$

d'où le résultat.

Figure 2.2 – Changement de base pour les applications linéaires

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathscr{B}) \arrow[r, "P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}"] \arrow[d, "\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)"'] & (E,\mathscr{E}) \arrow[d, "\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)"] \\
(E',\mathscr{B}') & (E',\mathscr{E}') \arrow[l, "P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{E}'}=\left(P_{\mathscr{E}'}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Session `Wxmaxima` 2.5 – Changement de base

Reprenons l'exemple de la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice :

$$f(x,y) = (y,x).$$

On avait travaillé avec deux bases :

$$\mathscr{E} = ((1,0),(0,1)) \text{ et } \mathscr{E}' = ((1,1),(1,-1)).$$

```
(%i1) E : [[1,0],[0,1]]$
      Ep : [[1,1],[1,-1]]$
(%i3) P : apply(matrix,Ep);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

La matrice de passage.

```
(%i4) A : matrix([0,1],[1,0]);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

La matrice de f dans la base canonique $\mathscr{E}$.

```
(%i5) invert(P).A.P;
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

La matrice de f dans la base $\mathscr{E}'$ (ce qui est d'ailleurs évident).

```
(%i6) A.P;
```

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}',\mathscr{E}}(f)$.

```
(%i7) invert(P).A;
```

(%o7) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)$.

Session Python 2.5 – Changement de base

Traduction du Wxmaxima.

In [2]

```
X = Matrix([x, y])
B = [X.subs({x: 1, y: 0}),
     X.subs({x: 0, y: 1})]
Bp = [X.subs({x: 1, y: 1}),
      X.subs({x: 1, y: -1})]
```

In [3]

```
P = Matrix(Bp).reshape(
    2, 2).transpose()
P
```

Out [3]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

In [4]

```
A = Matrix([B[1], B[0]]).reshape(
    2, 2).transpose()
A
```

Out [4]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In [5]

```
P**(-1)*A*P
```

Out [5]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

In [6]

```
A*P
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

In[7]

```
P**(-1)*A
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2.1.8 Noyau, image et rang

Définition 2.12 – Noyau, image et rang d'une matrice

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ [a].

— Le *noyau* de A est le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\mathrm{Ker}(A) \overset{\mathrm{Def}}{=} \left\{X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ A \centerdot X = 0_{n,1}\right\}$$

— L'*image* de A est le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\mathrm{Im}(A) \overset{\mathrm{Def}}{=} \left\{A \centerdot X,\ X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})\right\}$$

— Le *rang* de A, noté $\mathrm{rang}(A)$, est la dimension de $\mathrm{Im}(A)$:

$$\mathrm{rang}(A) \overset{\mathrm{Def}}{=} \dim \mathrm{Im}(A)$$

[a] On notera aussi $\mathrm{Ker}\, A$, $\mathrm{Im}\, A$ et $\mathrm{rang}\, A$.

注释 2.4

不难发现，矩阵所具有的性质与线性空间章节所学性质完全类似。

Remarque 2.11

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A (vues comme des matrices colonnes de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$). Alors :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(\{C_1, \dots, C_p\})$$

En particulier,

$$\mathrm{rang}(A) = \dim \mathrm{Im}(A) = \dim \mathrm{Vect}(\{C_1, \dots, C_p\})$$

Remarque 2.12

Si $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$\mathrm{rang}\, A \leq \min(n, p)$$

car $\mathrm{Im}\, A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les p colonnes de A.

Propriété 2.8

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, soit $\mathscr{E}$ une base de E, soit $\mathscr{E}'$ une base de E' et soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f)$. Alors :

1. Pour tout $x \in E$, $x \in \mathrm{Ker}\, f$ si, et seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x) \in \mathrm{Ker}\, A$. En particulier,
$$\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, A$$
2. Pour tout $y \in E'$, $y \in \mathrm{Im}\, f$ si, et seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}'}(y) \in \mathrm{Im}\, A$. En particulier, $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Im}\, A$ c'est-à-dire
$$\mathrm{rang}\, f = \mathrm{rang}\, A$$

Remarque 2.13

Si $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a le *théorème du rang* (voir le théorème 1.4, page 57) :
$$\mathrm{rang}\, A = p - \dim \mathrm{Ker}\, A$$

De plus, si $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ (matrice carrée), les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible ;
2. $\mathrm{Ker}\, A = \{0_{p,1}\}$;
3. $\mathrm{rang}\, A = p$;
4. Les colonnes $(C_1, \dots, C_p)$ de A forment une base de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Remarque 2.14

La multiplication par une matrice inversible conserve le rang : si $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors
$$\forall P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}),\ \forall Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{rang}(A \centerdot P) = \mathrm{rang}(Q \centerdot A) = \mathrm{rang}\, A$$

Exercice(s) 2.4

2.4.1 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, existe-t-il $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
$$A \centerdot B \centerdot A \centerdot B = 0_n \text{ et } B \centerdot A \centerdot B \centerdot A \neq 0_n \ ?$$

2.4.2 Soit A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, telles que :
$$\forall X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ A \centerdot X \centerdot B = 0_n$$
Démontrer que A ou B est la matrice nulle.

2.4.3 Démontrer que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices inversibles.

2.4.4 Démontrer que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

2.4.5 Soit A et B dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, démontrer que :
$$\mathrm{rang}(A) \leq \mathrm{rang}(B) \iff \big(\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists Q \in M_p(\mathbb{K}),\ A = P \centerdot B \centerdot Q\big)$$

2.2 Relations d'équivalence et matrices

2.2.1 Relations d'équivalence

Définition 2.13 – Relation d'équivalence

Soit E un ensemble non vide, $\mathscr{R}$ une relation [a] sur E. On dit que :

— $\mathscr{R}$ est *réflexive* si :

$$\forall x \in E,\ x\mathscr{R}x$$

— $\mathscr{R}$ est *symétrique* si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathscr{R}y \implies y\mathscr{R}x$$

— $\mathscr{R}$ est *transitive* si :

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ \big(x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z\big) \implies x\mathscr{R}z$$

On dit que $\mathscr{R}$ est une *relation d'équivalence sur* E si $\mathscr{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

a. c'est-à-dire la donnée d'un sous-ensemble A de $E \times E$, où on définit pour tout $(x,y) \in E^2$, $x\mathscr{R}y \overset{\text{Not}}{\Leftrightarrow} (x,y) \in A$

Exemple 2.6

1. L'égalité sur un ensemble est *toujours* une relation d'équivalence !
2. « avoir même parité » est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.
3. « avoir même dimension » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E de dimension finie.
4. « être en bijection avec » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble E.
5. « être parallèle » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des droites du plan.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, « avoir le même reste dans la division euclidienne par n » est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Définition 2.14 – Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble non vide, on appelle *partition de* E, la donnée d'une famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de E tels que :

— tous les E_i sont non vides :

$$\forall i \in I,\ E_i \neq \emptyset$$

— ils sont disjoints deux-à-deux :

$$\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \implies E_i \cap E_j = \emptyset$$

— ils recouvrent E :

$$E = \bigcup_{i \in I} E_i$$

Exemple 2.7

1. L'ensemble des singletons d'un ensemble est une partition de cet ensemble.
2. L'ensemble $2\,\mathbb{N} = \{2\,n,\ n \in \mathbb{N}\}$ des nombres pairs et l'ensemble $1+2\,\mathbb{N} = \{2\,n+1,\ n \in \mathbb{N}\}$ des nombres impairs forment une partition de $\mathbb{N}$.
3. Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on peut s'intéresser aux ensembles :

$$E_k = \{p \in \mathbb{N},\ n \text{ divise } (p-k)\}\,, \quad k \in [\![0, n-1]\!]$$

Alors
$$(E_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]} \text{ est une partition de } \mathbb{N}$$

Propriété 2.9

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une partition d'un ensemble E non vide et soit $\mathscr{R}$ la relation sur E définie par :
$$\forall (x,y)\in E^2,\ x\mathscr{R}y \overset{\text{Def}}{\iff} \big(\exists i\in I,\ x\in E_i \text{ et } y\in E_i\big)$$
(autrement dit, x et y sont en relation lorsque x et y appartiennent à un même E_i). Alors $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

Démonstration

C'est immédiat, une fois qu'on a remarqué que pour tout $x\in E$, il existe $i\in I$ tel que $x\in E_i$ car la partition $(E_i)_{i\in I}$ recouvre E.

Définition 2.15 – Classe d'équivalence et représentant

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E non vide et soit $x\in E$. La *classe d'équivalence de x modulo $\mathscr{R}$* est le sous-ensemble de E défini par :
$$\text{Classe}(x,\mathscr{R}) \overset{\text{Def}}{=} \{y\in E,\ x\mathscr{R}y\}$$
Un élément d'une classe d'équivalence est appelé un *représentant* de cette classe d'équivalence.

Remarque 2.15

Pour tout $x\in E$, on a toujours $x\in \text{Classe}(x,\mathscr{R})$ car $x\mathscr{R}x$. En particulier, une classe d'équivalence n'est jamais vide.

Propriété 2.10

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E non vide. Alors :
$$\forall (x,y)\in E^2,\ x\mathscr{R}y \iff \text{Classe}(x,\mathscr{R}) = \text{Classe}(y,\mathscr{R})$$

Démonstration

Soit $(x,y)\in E^2$.
- Supposons $x\mathscr{R}y$. Soit $z\in \text{Classe}(x,\mathscr{R})$. On a donc $x\mathscr{R}z$ d'où $z\mathscr{R}x$. Or $x\mathscr{R}y$ donc $z\mathscr{R}y$ d'où $y\mathscr{R}z$, c'est-à-dire $z\in \text{Classe}(x,\mathscr{R})$. On a donc $\text{Classe}(x,\mathscr{R})\subset \text{Classe}(y,\mathscr{R})$. De même, on démontre que $\text{Classe}(x,\mathscr{R})\supset \text{Classe}(y,\mathscr{R})$, donc $\text{Classe}(x,\mathscr{R}) = \text{Classe}(y,\mathscr{R})$.
- Supposons $\text{Classe}(x,\mathscr{R}) = \text{Classe}(y,\mathscr{R})$. Comme $y\in \text{Classe}(y,\mathscr{R})$, on a $y\in \text{Classe}(x,\mathscr{R})$ donc $x\mathscr{R}y$.

Propriété 2.11

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E non vide. Alors les classes d'équivalence forment une partition de E.
Plus formellement, si on définit la famille $(E_i)_{i\in I}$ des classes d'équivalence, donnée par
$$I = \{\text{Classe}(x,\mathscr{R}),\ x\in E\} \text{ et pour tout } i\in I,\ E_i = i$$
alors $(E_i)_{i\in I}$ est une partition de E.

Démonstration

- On a vu que pour tout $i \in I$, E_i est non vide. (remarque 2.15, page précédente).
- Pour tout $x \in E$, on a $x \in \text{Classe}(x, \mathscr{R})$ donc il existe $i \in E$ tel que $x \in E_i$. On en déduit que $(E_i)_{i\in I}$ recouvre E
- Soit $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$. Supposons que $E_i \cap E_j \neq \emptyset$. Il existe donc $z \in E_i \cap E_j$. Comme $z \in E_i$, on a $x_i \mathscr{R} z$ où x_i est un représentant de E_1, donc $\text{Classe}(z, \mathscr{R}) = E_i$ (propriété 2.10, page précédente). De même, on a $\text{Classe}(z, \mathscr{R}) = E_j$. On a donc $E_i = E_j$, ce qui contredit $i \neq j$ donc $E_i \cap E_j = \emptyset$.

Exercice(s) 2.5

2.5.1 On définit sur $\mathbb{C}$ la relation :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ z \mathscr{R} z' \iff |z| = |z'|$$

(a) Démontrer que c'est une relation d'équivalence.
(b) Préciser les classes d'équivalence.
(c) Donner un ensemble de représentants réels de ces classes d'équivalence.

2.5.2 Soit E un ensemble non vide et $A \subset E$, on définit une relation sur $\mathscr{P}(E)$ par :

$$\forall (X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2,\ X \mathscr{R} Y \iff A \cap X = A \cap Y$$

(a) Démontrer que c'est une relation d'équivalence.
(b) Démontrer que l'ensemble des classes d'équivalence est en bijection avec $\mathscr{P}(A)$.
On définit de même la relation sur $\mathscr{P}(E)$ par :

$$\forall (X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2,\ X \mathscr{S} Y \iff A \cup X = A \cup Y$$

(c) C'est une relation d'équivalence, trouver une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence avec un ensemble connu.

2.5.3 Soit E un ensemble non vide, on définit la relation sur $\mathscr{P}(E)$ par :

$$\forall (X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2,\ X \mathscr{R} Y \iff \big(\exists f \in \mathscr{F}(X, Y),\ \text{injective}\big)$$

Cette relation est-elle réflexive ? Symétrique ? Transitive ?

2.5.4 Soit E un ensemble non vide muni d'une relation $\mathscr{R}$ réflexive et transitive. On définit les deux relations suivantes :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \mathscr{S} y \iff \big(x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} x\big)$$

et

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \mathscr{T} y \iff \big(x \mathscr{R} y \text{ ou } y \mathscr{R} x\big)$$

Les relations $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$ sont-elles réflexives ? Symétriques ? Transitives ?

2.5.5 Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$, on pose :

$$\forall A \subset E,\ s(A) = \bigcup_{a \in A} \text{Classe}(a, \mathscr{R})$$

Soit A une partie de E.
(a) Démontrer que $A \subset s(A)$. Peut-on avoir $A = s(A)$? Donner un exemple.
(b) Que vaut $s(s(A))$?
(c) Que vaut $s(E \setminus s(A))$?
(d) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E. Comparer pour l'inclusion les ensembles :

$$s\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \text{ et } \bigcup_{i\in I} s(A_i),\ \text{ puis } s\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \text{ et } \bigcap_{i\in I} s(A_i)$$

2.2.2 Équivalence et similitudes

Définition 2.16 – Matrices équivalentes et matrices semblables

1. Deux matrices M et N de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes* si :
$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}),\ N = P \centerdot M \centerdot Q$$
Si c'est le cas, on note
$$M \approx N$$
Cela définit une relation sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée *équivalence*.
2. Deux matrices M et N de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* si :
$$\exists P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}),\ N = P^{-1} \centerdot M \centerdot P$$
Si c'est le cas, on note
$$M \sim N$$
Cela définit une relation sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ appelée *similitude*.

Remarque 2.16

D'après la formule de changement de base (proposition 2.5, page 111) :
— deux matrices de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si, elles représentent la même application linéaire ;
— deux matrices de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme.

注释 2.5

注意区别等价矩阵以及相似矩阵，显然相似矩阵是等价矩阵，反之则不一定。两矩阵等价，则表示它们对应了同一的线性映射；两矩阵相似，则它们对应了同一自同态在不同基底下的表示。

Propriété 2.12

1. L'équivalence $\approx$ est une relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. La similitude $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

Démonstration

Laissée en exercice (utiliser la formule de changement de base et les propriété des matrices de passage).

Notation 2.2

Nous noterons $J_{n,p,r}$ la matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :
$$J_{n,p,r} = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \text{ où } \begin{cases} a_{i,j} = 1 & \text{si } i = j \leq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
avec $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$.

Proposition 2.6 – Caractérisation des matrices équivalentes

Deux matrices de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même rang.*

Démonstration

Soit M et N deux matrices de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$\Rightarrow$ Supposons-les équivalentes, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $N = P \bullet M \bullet Q$. En notant u_X l'application linéaire canoniquement associée à une matrice X, on a

$$u_N = u_P \circ u_M \circ u_Q$$

La conservation du rang en découle, car u_P et u_Q sont inversibles (voir la remarque 2.14, page 115).

$\Leftarrow$ Supposons que rang N = rang M. Posons $r = \mathrm{rang}(M) = \mathrm{rang}(N)$. La factorisation de u_M nous donne l'existence d'un supplémentaire E_1 de $\mathrm{Ker}(u_M)$ isomorphe à $\mathrm{Im}(u_M)$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de E_1, que l'on complète avec une base $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ de $\mathrm{Ker}(u_M)$ ce qui nous donne une base $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ de $\mathbb{K}^p$. Alors $(u_M(e_1), \dots, u_M(e_r))$ est une partie libre de $\mathbb{K}^n$ que l'on complète en une base $\mathscr{E}'$ de $\mathbb{K}^n$. On a alors, par construction des bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(u_M) = J_{n,p,r}, \text{ donc } M \approx J_{n,p,r}$$

De même, on démontre que $N \approx J_{n,p,r}$. Puisque $\approx$ est une relation d'équivalence, on a donc $M \approx N$.

Remarque 2.17

On a donc démontré qu'il y a $\min(n,p)+1$ classe d'équivalence pour la relation d'équivalence $\approx$ dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, chaque classe d'équivalence est l'ensemble des matrices de rang $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$ et un représentant de chaque classe est $J_{n,p,r}$.
Il est beaucoup plus difficile de caractériser les classes d'équivalence pour la similitude $\sim$ (voir la partie sur les classes de similitude dans chapitre 4 sur la réduction des endormophismes).

Exercice(s) 2.6

2.6.1 Soit $(A, B) \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.
   (a) Démontrer que si $A \sim B$, alors $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$ et $\mathrm{trace}(A) = \mathrm{trace}(B)$.
   (b) Trouver un exemple où $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$ et $\mathrm{trace}(A) = \mathrm{trace}(B)$ mais A et B sont pas semblables.
   (c) Trouver un exemple où A et B sont équivalentes mais ne sont pas semblables.

2.6.2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
   (a) Justifier que la trace de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{E}$ de E choisie.
   On définit alors la *trace de* f, notée $\mathrm{trace}(f)$, comme la valeur de $\mathrm{trace}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f))$ dans n'importe quelle base $\mathscr{E}$ de E.
   (b) Soit p un projecteur de E. Démontrer que $\mathrm{trace}(p) = \mathrm{rang}(p)$.

2.6.3 Démontrer que
$$\forall A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \mathrm{rang}({}^tA) = \mathrm{rang}(A)$$

2.6.4 Démontrer que toute matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ non inversible est équivalente à une matrice B telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^k = 0_p$ (matrice dite *nilpotente*).

2.3 Systèmes linéaires

2.3.1 Algorithme du pivot de Gauss

注释 2.6

本小节介绍了高斯消元法，以及初等变换。通常应用此方法求解线性方程组及判断方阵是否可逆。

<

Notation 2.3

Soit $(k, \ell) \in [\![1, p]\!]^2$, $k \neq \ell$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on appelle *matrice de transvection* la matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ définie par :

$$T_{k,\ell}(\lambda) = I_p + \lambda . E_{k,\ell}$$

Cette matrice est inversible et son inverse est :

$$T_{k,\ell}(\lambda)^{-1} = T_{k,\ell}(-\lambda)$$

Démonstration

Un calcul direct donne

$$T_{k,\ell}(\lambda) \bullet T_{k,\ell}(-\lambda) = (I_p + \lambda . E_{k,\ell}) \bullet (I_p - \lambda . E_{k,\ell}) = I_p$$

et $T_{k,\ell}(-\lambda) \bullet T_{k,\ell}(\lambda) = I_p$.

Notation 2.4

Soit $k \in [\![1, p]\!]$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on appelle *matrice de dilatation* la matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ définie par :

$$D_k(\lambda) = I_p + (\lambda - 1).E_{k,k} = \underbrace{\mathrm{Diag}(1, \cdots, 1, \lambda, 1, \cdots, 1)}_{\lambda \text{ à la } k\text{-ième place}}$$

Cette matrice est inversible et son inverse est :

$$D_k(\lambda)^{-1} = D_k\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Démonstration

Un calcul immédiat démontre que

$$D_k(\lambda) \bullet D_k\left(\frac{1}{\lambda}\right) = D_k\left(\frac{1}{\lambda}\right) \bullet D_k(\lambda) = I_p$$

Notation 2.5

Soit σ une permutation [a] de $[\![1, p]\!]$, on appelle *matrice de permutation* la matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ définie par :

$$P_\sigma = \left[\delta_{i,\sigma(j)}\right]_{(i,j) \in [\![1,p]\!]^2}$$

Cette matrice est inversible et son inverse est :

$$(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}.$$

a. C'est-à-dire une bijection de de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.

Démonstration

Si σ et σ' sont deux permutations de $[\![1,p]\!]$ alors on remarque que :

$$P_\sigma \centerdot P_{\sigma'} = \left[\sum_{k=1}^{p} \delta_{i,\sigma(k)}\, \delta_{k,\sigma'(j)}\right]_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} = P_{\sigma\circ\sigma'}$$

On prend alors $\sigma' = \sigma^{-1}$ en remarquant que si $\sigma = \mathrm{id}_{[\![1,p]\!]}$, alors $P_\sigma = I_p$.

Propriété 2.13 – Opérations élémentaires sur les lignes

Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $L_1,\dots,L_n$ les lignes de A (vues comme des matrices $1\times p$), et $C_1,\dots,C_p$ les colonnes de A (vues comme des matrices $n\times 1$).

Produit à gauche = manipulation des lignes !

1. *Transvection*

$$T_{k,\ell}(\lambda) \centerdot A = A + \lambda.E_{k,\ell} \centerdot A = [a_{i,j} + \lambda\, \delta_{i,k}\, a_{\ell,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

Cela revient donc à faire la transformation (dite *opération élémentaire*) :

$$\boxed{L_k \leftarrow L_k + \lambda.L_\ell}$$

(on remplace la k-ième ligne par la k-ième ligne à laquelle on a ajouté λ fois la ℓ-ième ligne).

2. *Dilatation*

$$D_k(\lambda) \centerdot A = [a_{i,j} + (\lambda-1)\times \delta_{i,k}\, a_{k,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

Cela revient donc à faire la transformation (dite *opération élémentaire*) :

$$\boxed{L_k \leftarrow \lambda.L_k}$$

(on remplace la k-ième ligne par λ fois la k-ième ligne).

3. *Permutation*

$$P_\sigma \centerdot A = \left[\sum_{t=1}^{n} \delta_{i,\sigma(t)}\, a_{t,j}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = \left[a_{\sigma^{-1}(i),j}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$

Cela revient donc à faire la transformation (dite *opération élémentaire*) :

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ L_k \leftarrow L_{\sigma^{-1}(k)}}$$

Session `Wxmaxima` 2.6 – Permutations des lignes

```
(%i1) sigma : [3,1,2];
```

(%o1) $[3,1,2]$

```
(%i2) Psigma : genmatrix(lambda([i,j], if i=sigma[j] then 1 else 0),3,3);
```

(%o2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i3) A : genmatrix(lambda([i,j],a[i,j]),3,4);
```

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}$$

```
(%i4) Psigma.A;
```

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \end{bmatrix}$$

Session Python 2.6 – Permutations des lignes

Traduction du Wxmaxima.

In [2]

```
sigma = [3, 1, 2]  # La permutation s(1)=3, s(2)=1, s(3)=2

Psigma = Matrix(3, 3,
                [KroneckerDelta(
                    i+1, sigma[j])
                 for i in range(3)
                 for j in range(3)])
Psigma
```

Out [2]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In [3]

```
# On peut aussi écrire
Psigma = Matrix(3, 3,
                lambda i, j:
                KroneckerDelta(i+1, sigma[j]))
Psigma
```

Out [3]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In [4]

```
a = IndexedBase('a')
A = Matrix(3, 4,
           [a[i, j]
            for i in range(1, 4)
            for j in range(1, 5)])
```

```
A
```

Out[4]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}$$

In[5]

```
Psigma*A # On applique sigma**(-1) aux lignes !!!
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \end{bmatrix}$$

In[6]

```
A = Matrix(4, 3,
           [a[i, j]
            for i in range(1, 5)
            for j in range(1, 4)])
A
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix}$$

In[7]

```
A*Psigma # On applique sigma aux colonnes !!!
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix} a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,3} & a_{4,1} & a_{4,2} \end{bmatrix}$$

Propriété 2.14 – Opérations élémentaires sur les colonnes

Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A (vues comme des matrices $1 \times p$), et $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A (vues comme des matrices $n \times 1$).

Produit à droite = manipulation des colonnes !

1. *Transvection*
$$A \centerdot T_{k,\ell}(\lambda) = A + \lambda.A \centerdot E_{k,\ell} = [a_{i,j} + \lambda\, \delta_{j,\ell}\, a_{i,k}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$
Cela revient donc à faire la transformation (dite *opération élémentaire*) :
$$\boxed{C_\ell \leftarrow C_\ell + \lambda.C_k}$$
(on remplace la ℓ-ième colonne par la ℓ-ième colonne à laquelle on a ajouté λ fois la k-ième colonne).
2. *Dilatation*
$$A \centerdot D_k(\lambda) = [a_{i,j} + (\lambda - 1)\, \delta_{j,k} \times a_{i,k}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$$
Cela revient donc à faire la transformation (dite *opération élémentaire*) :
$$\boxed{C_k \leftarrow \lambda.C_k}$$
(on remplace la k-ième colonne par λ fois la k-ième colonne).
3. *Permutation*
$$A \centerdot P_\sigma = \left[a_{i,\sigma(j)}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}.$$
Cela revient donc à faire la transformation (dite *opération élémentaire*) :
$$\boxed{\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ C_k \leftarrow C_{\sigma(k)}}$$

Session `Wxmaxima` 2.7 – Opérations élémentaires sur les colonnes

```
(%i1) sigma : [3,1,2];
```
(%o1) $[3,1,2]$
```
(%i2) Psigma : genmatrix(lambda([i,j], if i=sigma[j] then 1 else 0),3,3);
```
(%o2) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
```
(%i3) A : genmatrix(lambda([i,j],a[i,j]),4,3);
```
(%o3) $$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix}$$
```
(%i4) A.Psigma;
```
(%o4) $$\begin{bmatrix} a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,3} & a_{4,1} & a_{4,2} \end{bmatrix}$$

Session `Python` 2.7 – Opérations élémentaires sur les colonnes

Traduction du `Wxmaxima`.

In[8]

```python
A.elementary_col_op('n->kn',
                    col=0,
                    k=3)
```

Out[8]

$$\begin{bmatrix} 3a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 3a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 3a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ 3a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix}$$

In[9]

```python
A.elementary_col_op('n<->m',
                    col1=0,
                    col2=2)
```

Out[9]

$$\begin{bmatrix} a_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,1} \\ a_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{3,3} & a_{3,2} & a_{3,1} \\ a_{4,3} & a_{4,2} & a_{4,1} \end{bmatrix}$$

In[10]

```python
A.elementary_col_op('n->n+km',
                    col1=0,
                    col2=1,
                    k=3)
```

Out[10]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} + 3a_{1,2} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} + 3a_{2,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} + 3a_{3,2} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} + 3a_{4,2} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix}$$

Remarque 2.18

Lorsqu'on utilise des opérations élémentaires, c'est généralement pour faire apparaître le plus de 0 possibles dans la matrice. Il est alors *indispensable* de présenter les calculs de manière lisible par le lecteur. Le principe est :

1. on encadre le *pivot* (terme dont on se sert pour faire apparaître les 0) ;
2. on signale la ou les opérations élémentaires effectuées sous la matrice.

Exemple 2.8

Soit la matrice :

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{a_{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}}_{L_2 \leftarrow L_2 - a_{2,1}/a_{1,1}.L_1} \to \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & a_{2,2} - \frac{a_{1,2}\,a_{2,1}}{a_{1,1}} & a_{2,3} - \frac{a_{1,3}\,a_{2,1}}{a_{1,1}} & a_{2,4} - \frac{a_{1,4}\,a_{2,1}}{a_{1,1}} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}$$

Théorème 2.1 – du pivot généralisé de Gauss

Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de rang r, alors il existe des matrices de transvection-dilatation-permutation de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, notées $R_1, \ldots, R_q$ et des matrices de transvection-dilatation-permutation de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, notées $S_1, \ldots, S_s$ telles que :

$$R_1 \centerdot \cdots \centerdot R_q \centerdot A \centerdot S_1 \centerdot \cdots \centerdot S_s = J_{n,p,r}$$

Démonstration (algorithme du pivot de Gauss généralisé)

La démonstration est essentiellement l'algorithme du pivot de Gauss généralisé.

- Si $A = 0_{n,p}$, alors il n'y a rien à démontrer (on a $A = J_{n,p,0} = 0_{n,p}$ avec $r = 0$).
- Supposons $A \neq 0_{n,p}$.
  1. Il existe alors un élément non nul de A, qu'on place en position $(1, 1)$ par permutation, puis qu'on transforme en 1 par dilatation. Ce coefficient s'appelle le *pivot*.
  2. Par transvection sur les lignes, on annule tous les coefficients en-dessous du pivot et par transvection sur les colonnes, on annule tous les coefficients à droite du pivot.
  3. On obtient donc une matrice de la forme (voir la partie suivante sur les matrices-blocs) :

  $$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,p-1} \\ \hline 0_{n-1,1} & A' \end{array}\right]$$

  Si A' est vide ($n = 1$ ou $p = 1$) ou si $A' = 0_{n-1,p-1}$, on s'arrête. Sinon on recommence l'algorithme avec A' à la place de A

À la fin, on obtient une matrice $J_{n,p,r}$, obtenue par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'où le résultat. On a nécessairement $r = \mathrm{rang}(A)$, car le rang est invariant par multiplication par une matrice inversible (remarque 2.14, page 115).

Remarque 2.19

Autrement dit, toute matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r est équivalente à $J_{n,p,r}$. On retrouve ainsi le résultat de la proposition 2.6, page 120.

Exemple 2.9

En utilisant `Wxmaxima` :

Session `Wxmaxima` 2.8 – Algorithme du pivot de Gauss

(%i1) `A : matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

1. $L_2 \leftarrow L_2 - 4.L_1$

   (%i2) `(ident(3)+ematrix(3,3,-4,2,1)).A;`

   (%o2) $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

2. $L_3 \leftarrow L_3 - 7.L_1$

```
(%i3) (ident(3)+ematrix(3,3,-7,3,1)).%;
```

$$(\%o3) \quad \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

3. $C_2 \leftarrow C_2 - 2.C_1$

```
(%i4) %.(ident(3)+ematrix(3,3,-2,1,2));
```

$$(\%o4) \quad \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

4. $C_3 \leftarrow C_3 - 3.C_1$

```
(%i5) %.(ident(3)+ematrix(3,3,-3,1,3));
```

$$(\%o5) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

5. $L_3 \leftarrow L_3 - 2.L_2$

```
(%i6) (ident(3)+ematrix(3,3,-2,3,2)).%;
```

$$(\%o6) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. $C_3 \leftarrow C_3 - 2.C_2$

```
(%i7) %.(ident(3)+ematrix(3,3,-2,2,3));
```

$$(\%o7) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. $L_2 \leftarrow -1/3.L_2$

```
(%i8) %.(ident(3)+ematrix(3,3,-4/3,2,2));
```

$$(\%o8) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Session Python 2.8 – Algorithme du pivot de Gauss

Traduction du Wxmaxima.

In [2]

```python
def Ematrix(p, q, k, i0, j0):  # Pour reproduire les calculs de Wxmaxima
    return(Matrix(
        p, q,
        lambda i, j:
        k*KroneckerDelta(
            i, i0)*KroneckerDelta(j, j0)))
```

In [3]

```python
Ematrix(3, 3, -4, 1, 0)
```

Out [3]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In [4]

```python
A = Matrix(3, 3,
           list(range(1, 10)))
```

In [5]

```python
(eye(3)+
 Ematrix(3, 3, -4, 1, 0))*A
```

Out [5]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

In [6]

```python
(eye(3)+
 Ematrix(3, 3, -7, 2, 0))*_
```

Out [6]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

In [7]

```python
_*(eye(3)+
   Ematrix(3, 3, -2, 0, 1))
```

Out [7]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

In[8]

```
_*(eye(3)+
   Ematrix(3, 3, -3, 0, 2))
```

Out[8]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -3 & -6\\0 & -6 & -12\end{bmatrix}$$

In[9]

```
(eye(3)+
 Ematrix(3, 3, -2, 2, 1))*_
```

Out[9]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -3 & -6\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

In[10]

```
_*(eye(3)+
   Ematrix(3, 3, -2, 1, 2))
```

Out[10]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -3 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

In[11]

```
(eye(3)+
 Ematrix(3, 3, -S(4)/3, 1, 1))*_
```

Out[11]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Exemple 2.10

On peut aussi travailler « à la main ».

Session Wxmaxima 2.9 – Algorithme du pivot de Gauss

(%i1) `A : matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(%i2) `rowop(%,2,1,4);`

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(%i3) `rowop(%,3,1,7);`

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$

(%i4) `columnop(%,2,1,2);`

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$

(%i5) `columnop(%,3,1,3);`

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$

(%i6) `rowop(%,3,2,2);`

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(%i7) `columnop(%,3,2,2);`

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Je ne trouve pas les dilatations. Écrivons une fonction qui travaille sur les lignes.

(%i8) `D(M,k,a) := block([],for j:1 thru matrix_size(M)[2] do M[k,j] : a*M[k,j],M)$`

(%i9) `D(%o7,2,-1/3);`

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Session Python 2.9 – Algorithme du pivot de Gauss

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```python
A = Matrix(3, 3,
           list(range(1, 10)))
A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

In[3]

```
A.elementary_row_op('n->n+km',
                    row1=1,
                    row2=0,
                    k=-4)
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

In[4]

```
_.elementary_row_op('n->n+km',
                    row1=2,
                    row2=0,
                    k=-7)
```

Out[4]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

In[5]

```
_.elementary_col_op('n->n+km',
                    col1=1,
                    col2=0,
                    k=-2)
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

In[6]

```
_.elementary_col_op('n->n+km',
                    col1=2,
                    col2=0, k=-3)
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

In[7]

```
_.elementary_row_op('n->n+km',
                    row1=2,
                    row2=1,
                    k=-2)
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In[8]

```
_.elementary_col_op('n->n+km',
                    col1=2,
                    col2=1,
                    k=-2)
```

Out[8]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In[9]

```
_.elementary_row_op('n->kn',
                    row=1,
                    k=-S(1)/3)
```

Out[9]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 2.11

Que se passe-t-il lorsque, par exemple, la première colonne est remplie de 0 ? On commence par permuter les colonnes ! Ici, nous allons écrire les matrices nous-mêmes...

Session Wxmaxima 2.10 – Algorithme du pivot de Gauss

(%i1) `A : matrix([0,2,3],[0,5,6]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(%i2) `sigma : [2,3,1]$`
`Psigma : genmatrix(lambda([i,j],if i=sigma[j] then 1 else 0),3,3);`

(%o3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$C_1 \leftarrow C_2$, $C_2 \leftarrow C_3$, $C_3 \leftarrow C_1$.

(%i4) `A.Psigma;`

(%o4) $\begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 5/2.L_1$

(%i5) `matrix([1,0],[-5/2,1]).%;`

(%o5) $\begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$C_2 \leftarrow C_2 - 3/2.C_1$

(%i6) `%.matrix([1,-3/2,0],[0,1,0],[0,0,1]);`

(%o6) $\begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$C_1 \leftarrow 1/2.C_1$

(%i7) `matrix([1/2,0],[0,1]).%;`

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-\dfrac{3}{2}} & 0 \end{bmatrix}$

$C_2 \leftarrow -2/3.C_2$

(%i8) `matrix([1,0],[0,-2/3]).%;`

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Session Python 2.10 – Algorithme du pivot de Gauss

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```
A = Matrix(2, 3,
           [0, 2, 3, 0, 5, 6])
A
```

Out [2]

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

In [3]

```
sigma = [2, 3, 1]
Psigma = Matrix(3, 3,
                lambda i, j:
                KroneckerDelta(i+1, sigma[j]))
```

In [4]

```
A*Psigma
```

Out [4]

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

In [5]

```
_.elementary_row_op('n->n+km',
                   row1 = 1,
                   row2 = 0,
                   k = -S(5)/2)
```

Out [5]

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

In [6]

```
_.elementary_col_op('n->n+km',
                   col1 = 1,
                   col2 = 0,
                   k = -S(3)/2)
```

Out [6]

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

In [7]

```
_.elementary_col_op('n->kn',
                   col = 1,
```

```
                      k = -S(2)/3)
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In[8]

```
_.elementary_col_op('n->kn',
                    col = 0,
                    k = S(1)/2)
```

Out[8]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriété 2.15 – Les permutations sont inutiles

Toute matrice de permutation peut s'exprimer comme produit de matrices de transvection-dilatation.

Démonstration

1. Toute permutation de $[\![1,p]\!]$ peut s'exprimer comme une composée de transpositions (une permutation qui échange seulement deux éléments). Ceci peut se démontrer par récurrence sur p.
   — *Initialisation* $p=1$, c'est évident.
   — *Hérédité* Soit $p\in\mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai au rang p. Soit σ une permutation de $[\![1,p+1]\!]$. Alors $\sigma(p+1)=k\in[\![1,p+1]\!]$. Si $\sigma(p+1)=p+1$, on pose $\sigma'=\sigma$, sinon, on multiplie σ par la transposition $\tau_{k,p+1}$ de $[\![1,p+1]\!]$ définie par :
   $$\forall j\in[\![1,p+1]\!]\,,\ \tau_{k,p+1}(j)=\begin{cases} j & \text{si } j\notin\{k,p+1\}\\ p+1 & \text{si } j=k\\ k & \text{si } j=p+1\end{cases}$$
   On pose alors $\sigma'=\tau_{k,p+1}\circ\sigma$. On applique l'hypothèse de récurrence à $\sigma'\Big|_{[\![1,p]\!]}$
2. Soit P_σ une matrice de permutation de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$. On écrit
   $$\sigma=\tau_1\circ\cdots\circ\tau_s$$
   où les τ_j sont des transpositions de $[\![1,p]\!]$. On a alors
   $$P_\sigma=P_{\tau_1}\bullet\cdots\bullet P_{\tau_s}$$
3. Il suffit donc de démontrer le résultat pour une transposition. Par décalage d'indices, il suffit de démontrer cela pour la transposition qui échange 1 et 2. On peut procéder de la manière suivante :
   $$\underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\begin{bmatrix} 0 & 1\\ \boxed{1} & 0\end{bmatrix}}\to\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}\to\underset{C_2\leftarrow C_2-C_1}{\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}}\to\underset{C_2\leftarrow -C_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & \boxed{-1}\end{bmatrix}}\to I_2$$

Session Wxmaxima 2.11 – Décomposition d'une permutation en produit de transpositions

```
(%i1)  compose(s1,s2) := makelist(s1[s2[k]],k,1,length(s2));
```

(%o1) $\mathrm{compose}\,(s1,s2):=\mathrm{makelist}\,(s1_{s2_k},k,1,\mathrm{length}\,(s2))$

```
(%i2) sigma : random_permutation(makelist(k,k,1,5));
```

(%o2) $[3, 4, 5, 1, 2]$

```
(%i3) tau(k,l):= makelist(if i=k then l elseif i=l then k else i,i,1,5)$
(%i4) compose(tau(sigma[5],5),sigma);
```

(%o4) $[3, 4, 2, 1, 5]$

```
(%i5) compose(tau(%[4],4),%);
```

(%o5) $[3, 1, 2, 4, 5]$

```
(%i6) compose(tau(%[3],3),%);
```

(%o6) $[2, 1, 3, 4, 5]$

```
(%i7) compose(tau(%[2],2),%);
```

(%o7) $[1, 2, 3, 4, 5]$

Session Python 2.11 – Décomposition d'une permutation en produit de transpositions

Traduction du Wxmaxima.

In [2]

```python
def compose(s1, s2):
    return([s1[s2[k]-1]
            for k in range(len(s2))])
```

In [3]

```python
sigma = [3, 4, 5, 1, 2]


def tau(k, l):
    s = [1, 2, 3, 4, 5]
    s[k-1] = l
    s[l-1] = k
    return(s)
```

In [4]

```python
compose(tau(sigma[4], 5),
        sigma)
```

Out [4]

[3, 4, 2, 1, 5]

In [5]

```python
compose(tau(_[3], 4), _)
```

Out[5]

[3, 1, 2, 4, 5]

In[6]

```
compose(tau(_[2], 3), _)
```

Out[6]

[2, 1, 3, 4, 5]

In[7]

```
compose(tau(_[1], 2), _)
```

Out[7]

[1, 2, 3, 4, 5]

Propriété 2.16

Soit $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, alors il existe des matrices de transvection-dilatation-permutation de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, notées $R_1, \ldots, R_q$ et des matrices de transvection-dilatation-permutation de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, notées $S_1, \ldots, S_s$ telles que :

$$R_1 \bullet \cdots \bullet R_q \bullet A = I_p \text{ et } A \bullet S_1 \bullet \cdots \bullet S_s = I_p$$

Autrement dit, quand A est inversible, on peut se contenter de travailler soit uniquement sur les lignes, soit uniquement sur les colonnes.

Démonstration

En reprenant le résultat du théorème 2.1, page 127, il existe un produit de matrices de transvection-dilatation-permutation de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, noté R et un produit de matrices de transvection-dilatation-permutation de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, noté S tels que :

$$R \bullet A \bullet S = I_p$$

car $\mathrm{rang}(A) = p$ (car A est inversible) et $J_{p,p,p} = I_p$.
En multipliant à gauche par S et à droite par S^{-1}, on obtient $(S \bullet R) \bullet A = I_p$. De même, $A \bullet (S \bullet R) = I_p$, d'où le résultat.

Remarque 2.20

Lorsque la matrice A est dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, on peut se limiter à au plus une dilatation de type $D_p(\lambda)$ (et ne faire donc autrement que des transvections).
En effet, il suffit de savoir le faire sur une matrice 2×2 ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) :

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\begin{bmatrix} \boxed{a} & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}} \to \underset{L_1 \leftarrow L_1 - (1-1/a).L_2}{\begin{bmatrix} a & 0 \\ \boxed{a} & b \end{bmatrix}} \to \underset{L_2 \leftarrow L_2 - a.L_1}{\begin{bmatrix} \boxed{1} & -(1-1/a)\,b \\ a & b \end{bmatrix}}$$

$$\to \underset{L_2 \leftarrow L_2 - a.L_1}{\begin{bmatrix} \boxed{1} & -(1-1/a)\,b \\ 0 & a \times b \end{bmatrix}} \to \underset{L_1 \leftarrow L_1 + (1-1/a)/a\, L_2}{\begin{bmatrix} 1 & -(1-1/a)\,b \\ 0 & \boxed{a\,b} \end{bmatrix}} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a\,b \end{bmatrix}$$

Remarque importante 2.21

Il est important de noter que :

1. Lorsque l'on calcule un rang : on peut travailler à la fois sur les lignes et les colonnes.
2. Lorsque l'on résout un système d'équations linéaires, on ne travaille *que sur les lignes*.
3. Lorsque l'on calcule un noyau, on ne travaille que sur les lignes.
4. Lorsque l'on calcule une image, on ne travaille *que sur les colonnes*.

En effet, les opérations élémentaires correspondent à des multiplications par des matrices *inversibles*. Donc, lorsqu'on multiplie :

— *à gauche*, on ne change pas le rang, ni le noyau (manipulation sur les lignes) ;
— *à droite*, on ne change pas le rang, ni l'image (manipulation sur les colonnes).

Exercice(s) 2.7

2.7.1 Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

(a) Calculer son rang r.

(b) Trouver deux matrices P et Q inversibles telles que :

$$P \centerdot A \centerdot Q = J_{3,4,r}$$

2.7.2 Déterminer les $a \in \mathbb{K}$ tels que la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & 1 \\ a & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ soit inversible}$$

2.7.3 Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = \min(i,j)$$

Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.

2.7.4 Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Déterminer le rang de A.

(b) Déterminer une base de l'image de A.

(c) Donner des équations de $\mathrm{Im}(A)$.

(d) Déterminer une base du noyau de A.

2.7.5 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\varphi : \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ X \mapsto A \centerdot X \centerdot A \end{cases}$$

(a) Démontrer que φ est un isomorphisme si, et seulement si, A est inversible.

(b) Calculer le rang de φ en fonction de celui de A.

2.7.6 Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tri-diagonale (c'est-à-dire vérifiant $a_{i,j} = 0$ dès que $|i-j| \geq 2$). On suppose de plus que

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!]\,,\ a_{i,i+1}\, a_{i+1,i} > 0$$

Démontrer qu'il existe une matrice diagonale D inversible, telle que $D^{-1} \centerdot A \centerdot D \in S_n(\mathbb{R})$.

2.7.7 Soit $T \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$, soit $\varepsilon > 0$, démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{D}_n(\mathbb{K}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$P^{-1} \centerdot T \centerdot P = [a_{i,j}]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{K}) \text{ et vérifiant } \left(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,,\ i < j \implies |a_{i,j}| \leq \varepsilon\right)$$

2.3.2 Systèmes linéaires

On a déjà vu au chapitre précédent (section 1.4.1, page 78) qu'en toute généralité, un système linéaire est une équation de la forme :

$$u(x) = b$$

où $u \in \mathscr{L}(E, E')$ et $b \in E'$ sont fixés et x est l'inconnue (E et E' sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels).
Dans le cas de la dimension finie et une fois des bases fixées, ce système linéaire est équivalent à un système de n équations à n inconnues, que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$A \centerdot X = B$$

où A est la matrice $n \times p$ de u, X la matrice $p \times 1$ de x et B la matrice $n \times 1$ de b (avec $p = \dim E$ et $n = \dim E'$)

Exemple 2.12

Lorsque l'on a un système de n équations à p inconnues, la condition de compatibilité (c'est-à-dire la condition pour que le système admette des solutions) s'écrit (voir la partie suivante sur les matrices-blocs) :

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}\left([A \,|\, B]\right)$$

ce qui se vérifie facilement à l'aide d'une méthode de pivot sur les lignes, où l'on ne prend *jamais* le pivot sur la colonne constituée des éléments de B.
La matrice $[A \,|\, B] \in \mathrm{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$ s'appelle la *matrice augmentée* du système $A \centerdot X = B$.

Définition 2.17 – Système de Cramer

Un système de n équations à n inconnues :

$$A \centerdot X = B$$

est dit *de Cramer*, lorsque A est inversible. En ce cas, il y a existence et unicité de la solution, donnée par $X = A^{-1} \centerdot B$.

Remarque importante 2.22

Pour résoudre un système de Cramer, on ne calcule *jamais* l'inverse de la matrice A, on utilise l'algorithme du pivot de Gauss !

Exemple 2.13

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2\,x + \lambda\,y - z & = 5 \\ (\lambda-5)\,x + 3\,y + 7\,z & = 7 \\ x + 3\,y + 2\,z & = 4 \end{cases}$$

Appliquons l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice augmentée $[A\,|\,B]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & -1 & 5 \\ \lambda-5 & 3 & 7 & 7 \\ \boxed{1} & 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -6+\lambda & \boxed{-5} & -3 \\ 0 & -3\,\lambda+18 & -2\,\lambda+17 & -4\,\lambda+27 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2.L_3$ $\qquad$ $L_2 \leftarrow L_2 + (17-2\,\lambda)/5.L_1$

$L_2 \leftarrow L_2 - (\lambda-5).L_3$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -6+\lambda & -5 & -3 \\ 0 & -\dfrac{2}{5}\,(\lambda-1)\,(-6+\lambda) & 0 & -\dfrac{14}{5}\,\lambda + \dfrac{84}{5} \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

La deuxième ligne permet de discerner trois cas :

1. $\lambda = 1$, le système est incompatible car $\operatorname{rang}(A) = 2$ et $\operatorname{rang}[A\,|\,B] = 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

2. $\lambda = 6$, le système est compatible car $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}[A\,|\,B] = 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Comme on a travaillé sur les lignes, les solutions du système sont les solutions du système réduit, soit :

$$\begin{cases} -5\,z & = -3 \\ x + 3\,y + 2\,z & = 4 \end{cases} \quad \text{soit } x = \frac{14}{5} - 3\,y,\ y = y,\ z = \frac{3}{5}$$

3. $\lambda \notin \{1, 6\}$, le système est de Cramer (solution unique), le système réduit s'écrit :

$$\begin{cases} (\lambda-6)\,y - 5\,z & = -3 \\ \frac{2}{5}\,(\lambda-1)\,(\lambda-6)\,y & = -\frac{14}{5}\,\lambda + \frac{84}{5} \\ x + 3\,y + 2\,z & = 4 \end{cases}$$

soit

$$x = \frac{7}{1-\lambda},\ y = \frac{7}{\lambda-1},\ z = \frac{2\,\lambda-9}{\lambda-1}$$

On voit que le cas $\lambda = 6$ ne s'obtient pas par continuité du cas de Cramer. Donc : l'ordinateur ne fait pas apparaître le cas !!!

Session Wxmaxima 2.12 – Exemple de résolution d'un système linéaire

```
(%i1)  solve([2*x+a*y-z=5,(a-5)*x+3*y+7*z=7,x+3*y+2*z=4],[x,y,z]);
```

(%o1) $[[x=-\frac{7}{a-1},y=\frac{7}{a-1},z=\frac{2\,a-9}{a-1}]]$

(%i2)
```
solve(ev([2*x+a*y-z=5,(a-5)*x+3*y+7*z=7,x+3*y+2*z=4],a=6),[x,y,z]);
```

solve : dependent equations eliminated : (3)

(%o2) $[[x=-\frac{15\,\%r1-14}{5},y=\%r1,z=\frac{3}{5}]]$

Session Python 2.12 – Exemple de résolution d'un système linéaire

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```
a = Symbol('a')
solve([Eq(2*x+a*y-z, 5),
       Eq((a-5)*x+3*y+7*z, 7),
       Eq(x+3*y+2*z, 4)],
      [x, y, z])
```

Out[2]

$$\left\{x:-\frac{7}{a-1},\ y:\frac{7}{a-1},\ z:\frac{2a-9}{a-1}\right\}$$

In[3]

```
solve([Eq(2*x+a*y-z, 5).subs({a: 6}),
       Eq((a-5)*x+3*y+7*z, 7).subs({a: 6}),
       Eq(x+3*y+2*z, 4)], [x, y, z])
```

Out[3]

$$\left\{x:\frac{14}{5}-3y,\ z:\frac{3}{5}\right\}$$

Remarque 2.23

Si on a vraiment besoin de calculer l'inverse d'une matrice $A\in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ inversible, on peut appliquer l'algorithme du pivot de Gauss généralisée à la matrice augmentée $[A\,|\,I_p]$, avec des opérations sur les lignes. On obtient à la fin une matrice augmentée de la forme

$$[I_p\,|\,A^{-1}]$$

En effet, si on note E la matrice correspondante aux opérations élémentaires sur les lignes lors de l'algorithme, on a $E\centerdot A=I_p$, d'où $E\centerdot I_p=A^{-1}$. Autrement dit, en effectuant les mêmes opérations sur I_p, on obtient A^{-1}.

Exercice(s) 2.8

2.8.1 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^2$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + j\,y + j^2\,z = b \\ x + j^2\,y + j\,z = c \end{cases}$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que les solutions soient réelles.

2.8.2 Inverser la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.8.3 Résoudre le système

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + \cdots + x_n & = 2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n & = n \end{cases}$$

2.4 Matrices-blocs

注释 2.7

当矩阵很复杂时，有时我们可以借助分块矩阵来简化矩阵的计算。

2.4.1 Définitions

Notation 2.6

Si $A = [a_{i,j}] \in \mathrm{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $B = [b_{i,j}] \in \mathrm{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $C = [c_{i,j}] \in \mathrm{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$ et $D = [d_{i,j}] \in \mathrm{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$, écrire :

$$M = [m_{i,j}] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \in M_{n_1+n_2,p_1+p_2}(\mathbb{K})$$

signifie que :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, n_1]\!]\,,\ \forall j \in [\![1, p_1]\!]\,, & m_{i,j} = a_{i,j} \\ \forall i \in [\![n_1+1, n_1+n_2]\!]\,,\ \forall j \in [\![1, p_1]\!]\,, & m_{i,j} = c_{i-n_1,j} \\ \forall i \in [\![1, n_1]\!]\,,\ \forall j \in [\![p_1+1, p_1+p_2]\!]\,, & m_{i,j} = b_{i,j-p_1} \\ \forall i \in [\![n_1+1, n_1+n_2]\!]\,,\ \forall j \in [\![p_1+1, p_1+p_2]\!]\,, & m_{i,j} = d_{i-n_1,j-p_1} \end{cases}$$

On parle alors de *matrice-blocs*.
On peut généraliser cette notation à un nombre de blocs plus grand.

Exemple 2.14

La matrice $J_{n,p,r}$ (voir la notation 2.2, page 119) peut s'écrire sous la forme d'une matrice-blocs :

$$J_{n,p,r} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right]$$

Propriété 2.17

— *Multiplication d'une matrice-bloc par un scalaire.* Si $A \in \mathrm{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$, alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda.A & \lambda.B \\ \hline \lambda.C & \lambda.D \end{array}\right]$$

— *Somme de deux matrices-blocs compatibles.* Si $(A_1, A_2) \in \mathrm{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})^2$, $(B_1, B_2) \in \mathrm{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})^2$, $(C_1, C_2) \in \mathrm{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})^2$ et $(D_1, D_2) \in \mathrm{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})^2$, alors :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ \hline C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{array}\right] \in \mathrm{M}_{n_1+n_2,p_1+p_2}(\mathbb{K})$$

Les sommes entre matrices-blocs incompatibles ne peuvent s'exprimer en termes de blocs.

— *Produit*[a] *entre matrices-blocs compatibles.* Si $A \in \mathrm{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$ et si $E \in \mathrm{M}_{p_1,q_1}(\mathbb{K})$, $F \in \mathrm{M}_{p_1,q_2}(\mathbb{K})$, $G \in \mathrm{M}_{p_2,q_1}(\mathbb{K})$ et $H \in \mathrm{M}_{p_2,q_2}(\mathbb{K})$, alors :

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \bullet \left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A \bullet E + B \bullet G & A \bullet F + B \bullet H \\ \hline C \bullet E + D \bullet G & C \bullet F + D \bullet H \end{array}\right] \in \mathrm{M}_{n_1\,q_1+n_1\,q_2,n_2\,q_1+n_2\,q_2}(\mathbb{K})$$

Même remarque que précédemment, lorsque les dimensions ne sont pas compatibles.

— On peut bien sûr, généraliser à un nombre de blocs plus grand, il faut faire attention à bien conserver les compatibilités entre les dimensions.

---

a. Attention à ne pas oublier que la multiplication entre matrices *n'est pas commutative* !

Démonstration

Il s'agit de simples vérifications par calculs (laissées en exercice).

Proposition 2.7 – Correspondance matrices-blocs et décomposition en somme directe

Soit E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, avec

$$E = E_1 \oplus E_2 \text{ et } E' = E_1' \oplus E_2'$$

Soit :

— $(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ *une base de E adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$;*

— $(\mathscr{E}_1', \mathscr{E}_2')$ *une base de E' adaptée à la somme directe $E' = E_1' \oplus E_2'$.*

Soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{E}'}(f) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

avec

— $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_1'}(\pi_1|^{E_1'} \circ f|_{E_1})$ *où π_1 est la projection sur E_1' parallèlement à E_2' ;*

— $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}_2,\mathscr{E}_1'}(\pi_1|^{E_1'} \circ f|_{E_2})$ *;*

— $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2'}(\pi_2|^{E_2'} \circ f|_{E_1})$ *où $\pi_2 = \mathrm{id}_{E'} - \pi_1$ est la projection sur E_2' parallèlement à E_1' ;*

— $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}_2,\mathscr{E}_2'}(\pi_2|^{E_2'} \circ f|_{E_2})$.

Démonstration

Immédiat en décomposant chaque élément de $f(\mathscr{E}_1)$ et chaque élément de $f(\mathscr{E}_2)$ sur la base $(\mathscr{E}_1', \mathscr{E}_2')$ (en exercice)

Remarque 2.24

En particulier, pour le cas des endomorphismes (c'est-à-dire $E = E'$, $E'_1 = E_1$ et $E'_2 = E_2$), on a :

$$E_1 \text{ stable par } f \iff C = 0_{n_2,p_1} \quad \text{et} \quad E_2 \text{ stable par } f \iff B = 0_{n_1,p_2}$$

avec $n_1 = \dim E_1$, $n_2 = \dim E_2$, $p_1 = \dim E'_1$ et $p_2 = \dim E'_2$.
Ainsi, les matrices-blocs permettent de visualiser simplement certains sous-espaces stables.

2.4.2 Utilisation

Remarque 2.25

La notation par blocs est extrêmement pratique pour faire des récurrences, ainsi que pour représenter simplement les matrices.

Exemple 2.15

1. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par la multiplication externe et par l'addition et la multiplication interne. De plus,

$$\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ est stable par } M \mapsto M^{-1}$$

2. Soit :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right]$$

où $A \in \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{K})$, alors $M \in \mathrm{GL}_{n_1+n_2}(\mathbb{K})$ et son inverse est de la forme :

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline 0 & H \end{array}\right]$$

Remarque 2.26

On rencontre souvent des transvections-blocs, des dilatations-blocs et des permutations-blocs, ainsi :

$$\Theta_{1,2}(\Lambda) = \left[\begin{array}{c|c} I_k & \Lambda \\ \hline 0_{\ell,k} & I_\ell \end{array}\right], \text{ où } \Lambda \in M_{k,\ell}(\mathbb{K})$$

vérifie clairement (en choisissant k et ℓ pour avoir des dimensions compatibles) :

$$\Theta_{1,2}(\Lambda) \centerdot \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A + \Lambda \centerdot C & B + \Lambda \centerdot D \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

soit une opération élémentaire sur les blocs :

$$L_1 \leftarrow L_1 + \Lambda \centerdot L_2 \qquad \text{(produit à gauche)}$$

et

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \centerdot \Theta_{1,2}(\Lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A & A \centerdot \Lambda + B \\ \hline C & C \centerdot \Lambda + D \end{array}\right]$$

soit :

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \centerdot \Lambda \qquad \text{(produit à droite)}$$

De même avec les dilatations [a] :

$$\Gamma_1(\Lambda) = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda & 0 \\ \hline 0 & I_{p_2} \end{array}\right], \text{ où } \Lambda \in \mathrm{GL}_{p_1}(\mathbb{K})$$

vérifie :

$$\Gamma_1(\Lambda)\bullet\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda\bullet A & \Lambda\bullet B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

soit

$$L_1 \leftarrow \Lambda\bullet L_1 \qquad \text{(produit à gauche)}$$

et

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]\bullet\Gamma_1(\Lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A\bullet\Lambda & B \\ \hline C\bullet\Lambda & D \end{array}\right]$$

soit :

$$C_1 \leftarrow C_1\bullet\Lambda \qquad \text{(produit à droite)}$$

La permutation-bloc serait par exemple :

$$\Pi_{(1,2)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right]$$

Cela permet (avec quelques précautions de calcul) de faire des manipulations sur les matrices-blocs comme sur des matrices usuelles.

a. Λ *doit être inversible*, car on veut conserver le rang !!

Exemple 2.16

1. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est de la forme :

$$\left[\begin{array}{c|c} \alpha & L \\ \hline C & A_1 \end{array}\right], \text{ où } \alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$$

   alors :

$$A_1 - \frac{1}{\alpha}.C\bullet L \text{ est inversible}$$

2. On peut en déduire que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors il existe une matrice de permutation P_σ, une matrice T_1 triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et une matrice T_2 triangulaire supérieure telles que :

$$A = P_\sigma\bullet T_1\bullet T_2.$$

2.4.3 Produit de Kronecker

Définition 2.18 – Produit de Kronecker

Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathrm{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$, on définit le *produit de Kronecker* de A et B comme la matrice-blocs :

$$A\otimes B = \left[\begin{array}{c|c|c} a_{1,1}.B & \cdots & a_{1,p_1}.B \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{n_1,1}.B & \cdots & a_{n_1,p_1}.B \end{array}\right] \in \mathrm{M}_{n_1\,n_2,p_1\,p_2}(\mathbb{K})$$

Exemple 2.17

1. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   alors pour toute matrice B à coefficients dans $\mathbb{K}$, on a

$$A\otimes B = \left[\begin{array}{c|c} B & 2.B \\ \hline 3.B & 4.B \end{array}\right]$$

2. Pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice de l'application :

$$\begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto M \centerdot A \end{cases}$$

dans la base canonique (judicieusement ordonnée) est :

$$I_n \otimes {}^t A$$

3. En prenant le même ordre de la base canonique, pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de de l'application :

$$\begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto A \centerdot M \end{cases}$$

est

$$A \otimes I_n$$

Proposition 2.8

Soit $(A_1, A_2) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2$ *et* $(B_1, B_2) \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})^2$, *alors :*

$$(A_1 \otimes B_1) \centerdot (A_2 \otimes B_2) = (A_1 \centerdot A_2) \otimes (B_1 \centerdot B_2)$$

Démonstration

Il s'agit d'une simple vérification par calculs (laissée en exercice).

Session `Wxmaxima` 2.13 – Produit de Kronecker

(%i1) `A : matrix([a,b],[c,d]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(%i2) `B : genmatrix(lambda([i,j],bb[i,j]),3,4);`

(%o2) $\begin{bmatrix} bb_{1,1} & bb_{1,2} & bb_{1,3} & bb_{1,4} \\ bb_{2,1} & bb_{2,2} & bb_{2,3} & bb_{2,4} \\ bb_{3,1} & bb_{3,2} & bb_{3,3} & bb_{3,4} \end{bmatrix}$

(%i3) `kronecker_product(A,B);`

(%o3) $$\begin{bmatrix} bb_{1,1} \times a & bb_{1,2} \times a & bb_{1,3} \times a & bb_{1,4} \times a & bb_{1,1} \times b & bb_{1,2} \times b & bb_{1,3} \times b & bb_{1,4} \times b \\ bb_{2,1} \times a & bb_{2,2} \times a & bb_{2,3} \times a & bb_{2,4} \times a & bb_{2,1} \times b & bb_{2,2} \times b & bb_{2,3} \times b & bb_{2,4} \times b \\ bb_{3,1} \times a & bb_{3,2} \times a & bb_{3,3} \times a & bb_{3,4} \times a & bb_{3,1} \times b & bb_{3,2} \times b & bb_{3,3} \times b & bb_{3,4} \times b \\ bb_{1,1} \times c & bb_{1,2} \times c & bb_{1,3} \times c & bb_{1,4} \times c & bb_{1,1} \times d & bb_{1,2} \times d & bb_{1,3} \times d & bb_{1,4} \times d \\ bb_{2,1} \times c & bb_{2,2} \times c & bb_{2,3} \times c & bb_{2,4} \times c & bb_{2,1} \times d & bb_{2,2} \times d & bb_{2,3} \times d & bb_{2,4} \times d \\ bb_{3,1} \times c & bb_{3,2} \times c & bb_{3,3} \times c & bb_{3,4} \times c & bb_{3,1} \times d & bb_{3,2} \times d & bb_{3,3} \times d & bb_{3,4} \times d \end{bmatrix}$$

Session `Python` 2.13 – Produit de Kronecker

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```
a = IndexedBase('a')
A = Matrix(2, 2,
```

```
            [a[i, j]
             for i in range(1, 3)
             for j in range(1, 3)])
A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

In[3]

```
b = IndexedBase('b')
B = Matrix(3, 4,
           lambda i, j:
           b[i+1, j+1])
B
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \end{bmatrix}$$

In[4]

```
a[0,0]*B # Étrange erreur, contournons la difficulté
```

```
IndexException:
Range is not defined for all indices in: a[0, 0]
```

In[5]

```
A0 = Matrix(2, 2,
            lambda i, j:
            str(a)+str(i)+str(j))
BlockMatrix([[A0[i, j]*B
              for i in range(2)]
             for j in range(2)])
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00}b_{1,1} & a_{00}b_{1,2} & a_{00}b_{1,3} & a_{00}b_{1,4} \\ a_{00}b_{2,1} & a_{00}b_{2,2} & a_{00}b_{2,3} & a_{00}b_{2,4} \\ a_{00}b_{3,1} & a_{00}b_{3,2} & a_{00}b_{3,3} & a_{00}b_{3,4} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{10}b_{1,1} & a_{10}b_{1,2} & a_{10}b_{1,3} & a_{10}b_{1,4} \\ a_{10}b_{2,1} & a_{10}b_{2,2} & a_{10}b_{2,3} & a_{10}b_{2,4} \\ a_{10}b_{3,1} & a_{10}b_{3,2} & a_{10}b_{3,3} & a_{10}b_{3,4} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{01}b_{1,1} & a_{01}b_{1,2} & a_{01}b_{1,3} & a_{01}b_{1,4} \\ a_{01}b_{2,1} & a_{01}b_{2,2} & a_{01}b_{2,3} & a_{01}b_{2,4} \\ a_{01}b_{3,1} & a_{01}b_{3,2} & a_{01}b_{3,3} & a_{01}b_{3,4} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11}b_{1,1} & a_{11}b_{1,2} & a_{11}b_{1,3} & a_{11}b_{1,4} \\ a_{11}b_{2,1} & a_{11}b_{2,2} & a_{11}b_{2,3} & a_{11}b_{2,4} \\ a_{11}b_{3,1} & a_{11}b_{3,2} & a_{11}b_{3,3} & a_{11}b_{3,4} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

In[6]

```python
Matrix(_).subs({str(a)+
                str(i)+str(j): A[i, j]
                for i in range(2)
                for j in range(2)})
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} & a_{1,1}b_{1,3} & a_{1,1}b_{1,4} & a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,1}b_{1,2} & a_{2,1}b_{1,3} & a_{2,1}b_{1,4} \\ a_{1,1}b_{2,1} & a_{1,1}b_{2,2} & a_{1,1}b_{2,3} & a_{1,1}b_{2,4} & a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,1}b_{2,2} & a_{2,1}b_{2,3} & a_{2,1}b_{2,4} \\ a_{1,1}b_{3,1} & a_{1,1}b_{3,2} & a_{1,1}b_{3,3} & a_{1,1}b_{3,4} & a_{2,1}b_{3,1} & a_{2,1}b_{3,2} & a_{2,1}b_{3,3} & a_{2,1}b_{3,4} \\ a_{1,2}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} & a_{1,2}b_{1,3} & a_{1,2}b_{1,4} & a_{2,2}b_{1,1} & a_{2,2}b_{1,2} & a_{2,2}b_{1,3} & a_{2,2}b_{1,4} \\ a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,2}b_{2,2} & a_{1,2}b_{2,3} & a_{1,2}b_{2,4} & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} & a_{2,2}b_{2,3} & a_{2,2}b_{2,4} \\ a_{1,2}b_{3,1} & a_{1,2}b_{3,2} & a_{1,2}b_{3,3} & a_{1,2}b_{3,4} & a_{2,2}b_{3,1} & a_{2,2}b_{3,2} & a_{2,2}b_{3,3} & a_{2,2}b_{3,4} \end{bmatrix}$$

Exercice(s) 2.9

2.9.1 Soit $(A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right]$$

(a) Démontrer que :

$$\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}\left(\left[\begin{array}{c|c} A & 0_n \\ \hline A & B-A \end{array}\right]\right).$$

(b) En déduire le rang de M.

(c) On suppose M inversible. Calculer M^{-1}.

2.9.2 Inverser la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.9.3 Calculer $\operatorname{rang}(A \otimes B)$ en fonction de $\operatorname{rang}(A)$ et $\operatorname{rang}(B)$ pour $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{q,s}(\mathbb{K})$.

2.9.4 Soit A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A & B & \cdots & B \\ \hline B & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & B \\ \hline B & \cdots & B & A \end{array}\right] \in \mathrm{M}_{n\,p}(\mathbb{R})$$

Soit $E = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A - \lambda.B \text{ inversible}\}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur E pour que M soit inversible et, dans ce cas, calculer M^{-1}.

2.9.5 Soit $A_1 \in \mathrm{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, ... $A_q \in \mathrm{M}_{n_q,p_q}(\mathbb{K})$. On considère la matrice diagonale par blocs :

$$M = \operatorname{Diag}(A_1, \dots, A_q) \overset{\text{Not}}{=} \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0_{n_1,p_2} & \cdots & 0_{n_1,p_q} \\ \hline 0_{n_2,p_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0_{n_{q-1},p_q} \\ \hline 0_{n_q,p_1} & \cdots & 0_{n_q,p_{q-1}} & A_q \end{array}\right] \in \mathrm{M}_{(n_1+\cdots+n_q)\times(p_1+\cdots+p_q)}(\mathbb{K})$$

(a) Démontrer que

$$\operatorname{rang}(M) = \sum_{k=1}^{q} \operatorname{rang}(A_k)$$

Soit $B \in M_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$ et $D \in M_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$, on pose

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0_{n_2,p_1} & D \end{array}\right]$$

(b) Démontrer que :

$$\operatorname{rang}(A) \geq \operatorname{rang}(B) + \operatorname{rang}(D)$$

(c) Donner un exemple où l'inégalité est stricte.

(d) Démontrer que si B ou D est une matrice carrée inversible, alors il y a égalité.

Chapitre 3

Déterminant

3.1 Permutations et groupe symétrique

Définition 3.1 – Permutation

Soit E un ensemble non vide. Une *permutation de E* est une bijection de E dans E. On note

$$\mathfrak{S}(E) \text{ l'ensemble des permutations de } E$$

Dans le cas particulier où $E = [\![1,p]\!]$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathfrak{S}_p \overset{\text{Not}}{=} \mathfrak{S}([\![1,p]\!]) \text{ l'ensemble des permutations de } [\![1,p]\!]$$

Remarque 3.1

On a les propriétés suivantes :

— $\mathrm{id}_E \in \mathfrak{S}(E)$, en particulier $\mathfrak{S}(E)$ n'est jamais vide ;

— $\mathfrak{S}(E)$ est stable par composition :

$$\forall (\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}(E)^2,\ \sigma \circ \sigma' \in \mathfrak{S}(E)$$

— la composition est associative :

$$\forall (\sigma, \sigma', \sigma'') \in \mathfrak{S}(E)^2,\ (\sigma \circ \sigma') \circ \sigma'' = \sigma \circ (\sigma' \circ \sigma'') \overset{\text{Not}}{=} \sigma \circ \sigma' \circ \sigma''$$

— il existe un élément neutre, en l'occurrence id_E :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}(E)^2,\ \sigma \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ \sigma = \sigma$$

— $\mathfrak{S}(E)$ est stable par passage à l'inverse (qui existe toujours et est unique) :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}(E)^2,\ \sigma^{-1} \in \mathfrak{S}(E) \text{ et } \sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \mathrm{id}_E$$

On dit que $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ est un *groupe*. On l'appelle le *groupe symétrique de E* et $\mathfrak{S}_p$ s'appelle le *groupe symétrique de degré p*.

Propriété 3.1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\operatorname{card} \mathfrak{S}_p = p!$$

Démonstration

Pour construire une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$:
- On a p choix possibles pour $\sigma(1)$ (les p éléments de $[\![1, p]\!]$) ;
- Une fois $\sigma(1)$ choisi, on a $p-1$ choix possibles pour $\sigma(2)$ (les $p-1$ éléments de $[\![1, p]\!] \setminus \{\sigma(1)\}$) ;
- Plus généralement, une fois $\sigma(1), \ldots, \sigma(i)$ choisis, on a $p-i$ choix possibles pour $\sigma(i+1)$ (les $p-i$ éléments de $[\![1, p]\!] \setminus \{\sigma(1), \ldots, \sigma(i)\}$) ;
- Une fois $\sigma(1), \ldots, \sigma(p-1)$ choisis, il ne reste plus qu'un seul choix pour $\sigma(p)$ (l'unique élément de $[\![1, p]\!] \setminus \{\sigma(1), \ldots, \sigma(p-1)\}$).

Finalement, on a
$$p\,(p-1)\cdots 1 = p!$$
choix possibles pour construire σ, d'où le résultat. La démonstration peut se faire plus rigoureusement par récurrence sur p.

Définition 3.2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$, et soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $i \neq j$. La *transposition* $\tau_{i,j}$ est la permutation de $\mathfrak{S}_p$ qui échange i et j et qui laisse stable les autres entiers :
$$\tau_{i,j}(i) = j,\ \tau_{i,j}(j) = i \text{ et pour tout } k \in [\![1, p]\!] \setminus \{i, j\},\ \tau_{i,j}(k) = k$$

Propriété 3.2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$. Toute permutation $\sigma \in [\![1, p]\!]$ s'écrit à l'aide de transpositions, c'est-à-dire qu'il existe des transpositions de $\mathfrak{S}_p$, notée $\tau_1, \ldots, \tau_r$, telles que
$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$$

Démonstration

Déjà démontré lors de la démonstration de la proposition 2.15, page 136 du chapitre 2.

Définition 3.3 – Signature d'une permutation

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, on appelle *signature de* σ et on note [a] :
$$\varepsilon(\sigma) \overset{\text{Def}}{=} \prod_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

a. On fait le produit sur tous les couples $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ tels que $i < j$. Pour $p = 1$, on obtient un produit vide qui vaut 1 par convention.

ε 用来表示置换 σ 的符合，用来判断置换为偶置换或者奇置换。根据定义可以发现其值只能是1和-1。

Remarque 3.2

On a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$, où N est le nombre d'*inversions*, c'est-à-dire les couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. La signature mesure donc la parité du nombre d'inversions.

Propriété 3.3

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La signature ε est à valeurs dans $\{-1, +1\}$ et :
$$\forall (\sigma, \sigma') \in (\mathfrak{S}_p)^2,\ \varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\sigma')$$

Démonstration

Soit $(\sigma, \sigma') \in (\mathfrak{S}_p)^2$. On a :

$$\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \prod_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{j-i} = \underbrace{\left(\prod_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \right)}_{=\varepsilon(\sigma)} \underbrace{\left(\prod_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j-i} \right)}_{=\varepsilon(\sigma')}$$

En effet, pour le premier produit, on peut faire le changement de variable $(i, j) \leftarrow (\sigma'(i), \sigma'(j))$ (grâce à la bijectivité de σ').

Remarque 3.3

On a $\varepsilon(\mathrm{id}_{[\![1,p]\!]}) = 1$ et

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p,\ \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$$

car

$$\underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{\in\{-1,+1\}} \underbrace{\varepsilon(\sigma^{-1})}_{\in\{-1,+1\}} = \varepsilon(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \varepsilon(\mathrm{id}_{[\![1,p]\!]}) = 1$$

Propriété 3.4

La signature d'une transposition est -1.

Démonstration

On se place dans $\mathfrak{S}_p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$.

- C'est vrai pour $\sigma = \tau_{1,2}$, car en séparant les cas $(i = 1,\ j = 2)$, $(i = 1,\ j \geq 3)$, $(i = 2,\ j \geq 3)$ et $(3 \leq i < j)$:

$$\varepsilon(\sigma) = \underbrace{\left(\frac{1-2}{2-1}\right)}_{=-1} \underbrace{\left(\prod_{j=3}^{p} \frac{j-2}{j-1}\right)}_{=1/(p-1)} \underbrace{\left(\prod_{j=3}^{p} \frac{j-1}{j-2}\right)}_{=p-1} \underbrace{\left(\prod_{3 \leq i < j \leq p} \frac{j-i}{j-i}\right)}_{=1} = -1$$

- C'est vrai pour $\tau_{2,1} = \tau_{1,2}^{-1}$ car

$$\varepsilon(\tau_{2,1}) = \varepsilon(\tau_{1,2}^{-1}) = \varepsilon(\tau_{1,2}) = -1$$

- On exprime alors les autres transpositions à l'aide de $\tau_{1,2}$ et $\tau_{2,1}$. Par exemple, si $(k, \ell) \in [\![1,p]\!]^2$, $2 < k < \ell$, on a :

$$\tau_{k,\ell} = \tau_{1,k} \circ \tau_{2,\ell} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{2,\ell} \circ \tau_{1,k}$$

d'où

$$\varepsilon(\tau_{k,\ell}) = \varepsilon(\tau_{1,k})^2\, \varepsilon(\tau_{2,\ell})^2\, \varepsilon(\tau_{1,2}) = -1$$

- Les autres cas sont analogues (laissés en exercice).

Exemple 3.1

Cela nous donne un moyen effectif de calculer la signature d'une permutation (bien qu'il existe des algorithmes nettement plus performants). En effet, en décomposant une permutation à l'aide de transpositions :

$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$$

alors

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^{r} \varepsilon(\tau_i) = (-1)^r$$

et cela ne dépend pas de la décomposition choisie (qui n'est pas unique) car si

$$\sigma = \tau'_1 \circ \cdots \circ \tau'_s$$

est une autre décomposition à l'aide de transpositions, on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r = (-1)^s$ (r et s ont même parité).
Soit la permutation de $[\![1, 9]\!]$ donnée par [a] :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 9 & 7 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

alors sa signature vaut : $+1$. En effet :

- on a $\sigma(1) = 3$ et $\sigma(3) = 1$, ce qui donne la transposition $\tau_{1,3}$;
- on a le *cycle* $\sigma(2) = 5$, $\sigma(5) = 9$, $\sigma(9) = 4$ et $\sigma(4) = 2$, ce qui donne $\tau_{2,5} \circ \tau_{5,9} \circ \tau_{9,4}$;
- on a le cycle $\sigma(6) = 7$, $\sigma(7) = 8$ et $\sigma(8) = 6$, ce qui donne $\tau_{6,7} \circ \tau_{7,8}$.

Finalement, on a une décomposition en 6 transpositions :

$$\sigma = \tau_{1,3} \circ \tau_{2,5} \circ \tau_{5,9} \circ \tau_{9,4} \circ \tau_{6,7} \circ \tau_{7,8}$$

donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^6 = +1$.

a. C'est-à-dire que l'entier en $(2, j)$ (deuxième ligne) est l'image par σ de l'entier en $(1, j)$ (première ligne).

Bien retenir qu'il suffit de regarder ce qui se passe avec les transpositions !

3.2 Formes p-linéaires sur un espace vectoriel de dimension n

Définition 3.4 – Formes p-linéaires sur un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $p \in \mathbb{N}^*$.
On appelle *forme p-linéaire sur E* toute application :

$$\phi : \begin{cases} E^p \to \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto \phi(x_1, \dots, x_p) \end{cases}$$

telle que :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p,\ \forall k \in [\![1, p]\!],\ \begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \phi(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_p) \end{cases} \quad \text{soit linéaire}$$

On note

$$\mathscr{L}_p(E, \mathbb{K}) \text{ l'ensemble des formes } p\text{-linéaires sur } E$$

对偶空间中线性泛函定义的拓展。

Remarque 3.4

- L'ensemble $\mathscr{L}_p(E, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles.
- Pour $p = 1$, on retrouve les formes linéaires : $\mathscr{L}_1(E) = E^\star$.
- Pour $p = 2$, on dit *forme bilinéaire* au lieu de forme 2-linéaire.
- Attention à ne pas confondre les formes p-linéaires sur E avec les formes linéaires sur E^p. Considérons

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \longmapsto & x\,y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$$

La première application est bilinéaire sur $\mathbb{K}$ mais n'est pas linéaire sur $\mathbb{K}^2$ alors que la seconde est linéaire sur $\mathbb{K}^2$ mais pas bilinéaire sur $\mathbb{K}$.

Exemple 3.2

1. Le produit scalaire

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) & \longmapsto & x_1\,y_1+\dots+x_n\,y_n \end{array}$$

est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$.

2. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})\times\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est une forme bilinéaire sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

3. Si $f_1,\dots,f_p$ sont des formes linéaires sur E, alors

$$\begin{array}{ccc} E^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_p) & \longmapsto & f_1(x_1)\,f_2(x_2)\cdots f_p(x_p) \end{array}$$

est une forme p-linéaire sur E.

Définition 3.5 – Formes p-linéaires symétriques et antisymétriques

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$, et soit $\phi\in\mathscr{L}_p(E,\mathbb{K})$.

— On dit que ϕ est *symétrique* si :

$$\forall\sigma\in\mathfrak{S}_p,\ \forall(x_1,\dots,x_p)\in E^p,\ \phi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)})=\phi(x_1,\dots,x_p)$$

On note

$\mathscr{S}_p(E,\mathbb{K})$ l'ensemble des formes p-linéaires sur E symétriques

— On dit que ϕ est *antisymétrique* si :

$$\forall\sigma\in\mathfrak{S}_p,\ \forall(x_1,\dots,x_p)\in E^p,\ \phi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)})=\varepsilon(\sigma)\,\phi(x_1,\dots,x_p)$$

On note

$\mathscr{A}_p(E,\mathbb{K})$ l'ensemble des formes p-linéaires sur E antisymétriques

Exemple 3.3

1. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, si ϕ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, alors l'application :

$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\mapsto\phi(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$$

est bilinéaire antisymétrique.

2. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, l'application *produit mixte* définie par :

$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\mapsto\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\rangle$$

(où $\langle\,,\,\rangle$ est le produit scalaire euclidien) est 3-linéaire antisymétrique.

Remarque 3.5

— $\mathscr{S}_p(E,\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_p(E,\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}_p(E,\mathbb{K})$.
— D'après l'étude de $\mathfrak{S}_p$ de la partie précédent, pour savoir si une forme p-linéaire est symétrique ou anti-symétrique, il suffit de se restreindre aux transpositions. En particulier :
  — ϕ est symétrique si, et seulement si, échanger deux vecteurs ne change pas le signe (ci-dessous

seules les i-èmes et j-ièmes variables sont explicitées) :

$$\forall (x_1,\ldots,x_p)\in E^p, \forall (i,j)\in\{1,\ldots,p\}^2,\ \phi(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots)=\phi(\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots)$$

— ϕ est antisymétrique si, et seulement si, échanger deux vecteurs change le signe (ci-dessous seules les i-èmes et j-ièmes variables sont explicitées) :

$$\forall (x_1,\ldots,x_p)\in E^p, \forall (i,j)\in\{1,\ldots,p\}^2,\ \phi(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots)=-\phi(\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots)$$

Propriété 3.5

Soit $\phi\in\mathscr{L}_p(E,\mathbb{K})$. Alors ϕ est antisymétrique si, et seulement si, elle est *alternée*, c'est-à-dire :

$$\forall (x_1,\ldots,x_p)\in E^p,\ \left[\exists (i,j)\in[\![1,p]\!]^2,\ i\neq j \text{ et } x_i=x_j\right] \implies \phi(x_1,\ldots,x_p)=0$$

Démonstration

Soit $(x_1,\ldots,x_p)\in E^p$ et soit $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$ tel que $i\neq j$ (ci-dessous, seules les i-èmes et j-ièmes variables sont explicitées).

— Supposons ϕ antisymétrique. Alors :

$$\phi(\ldots,x_i,\ldots,x_i,\ldots)=-\phi(\ldots,x_i,\ldots,x_i,\ldots)$$

d'où $\phi(\ldots,x_i,\ldots,x_i,\ldots)=0$ donc ϕ est alternée.

— Supposons ϕ alternée. Alors :

$$\begin{aligned}0&=\phi(\ldots,x_i+x_j,\ldots,x_i+x_j,\ldots)\\&=\underbrace{\phi(\ldots,x_i,\ldots,x_i,\ldots)}_{=0}+\phi(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots)+\phi(\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots)+\underbrace{\phi(\ldots,x_j,\ldots,x_j,\ldots)}_{=0}\end{aligned}$$

d'où $\phi(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots)=-\phi(\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots)$ donc ϕ est antisymétrique (car on peut se restreindre aux transpositions, voir la remarque ci-dessus).

Remarque 3.6

Attention, ce résultat n'est plus vrai dans d'autres corps K que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour lesquels $1_K+1_K=0_K$. Par exemple, $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$.

Propriété 3.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$, soit $\phi\in\mathscr{A}_p(E,\mathbb{K})$ et soit $(x_1,\ldots,x_p)\in E^p$.

1. Si $(x_1,\ldots,x_p)$ est liée, alors $\phi(x_1,\ldots,x_p)=0$.
2. Soit $i\in\{1,\ldots,n\}$. La valeur de $\phi(x_1,\ldots,x_p)$ ne change pas en ajoutant à x_i une combinaison linéaire de tous les x_k avec $k\in\{1,\ldots,p\}$, $k\neq i$.

Démonstration

1. Si $(x_1,\ldots,x_p)$ est liée, cela veut dire qu'il existe $i\in[\![1,p]\!]$ tel que x_i soit une combinaison linéaire des autres vecteurs : il existe $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^{p-1}$ tel que

$$x_i=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}\lambda_k.x_k$$

Puisque ϕ est linéaire par rapport à sa i-ème variable :

$$\phi(x_1,\ldots,x_p)=\phi\Big(\ldots,x_{i-1},\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}\lambda_k.x_k,x_{i+1},\ldots\Big)=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}\lambda_k\,\underbrace{\phi(\ldots,x_{i-1},x_k,x_{i+1},\ldots)}_{=0}=0$$

puisque x_k apparaît deux fois dans $(\ldots,x_{i-1},x_k,x_{i+1},\ldots)$ car $k\neq i$ et ϕ est alternée.

2. Soit $i\in\{1,\ldots,p\}$ et soit $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^{p-1}$. Puisque ϕ est linéaire par rapport à sa

i-ème variable :

$$\begin{aligned}\phi(x_1,\dots,x_p) &= \phi\Big(\dots,x_{i-1},x_i+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}\lambda_k.x_k,x_{i+1},\dots\Big)\\ &= \phi(x_1,\dots,x_p)+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}\lambda_k\,\underbrace{\phi(\dots,x_{i-1},x_k,x_{i+1},\dots)}_{=0}\\ &= \phi(x_1,\dots,x_p)\end{aligned}$$

Théorème 3.1 – Dimension de l'espace des formes n-linéaires alternées

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie *avec $n=\dim E\geq 1$. Alors :*

$$\boxed{\dim\mathscr{A}_n(E,\mathbb{K})=1}$$

Démonstration

Soit $\phi\in\mathscr{A}_n(E,\mathbb{K})$, soit $\mathscr{E}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et soit $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$. On a :

$$\forall j\in[\![1,n]\!]\,,\ \exists!(x_{1,j},\dots,x_{n,j})\in\mathbb{K}^n,\quad x_j=\sum_{i=1}^{n}x_{i,j}.e_i$$

— Comme ϕ est une forme p-linéaire :

$$\begin{aligned}\phi(x_1,\dots,x_n) &= \phi\Big(\sum_{i_1=1}^{n}x_{i_1,1}.e_{i_1},\dots,\sum_{i_n=1}^{n}x_{i_n,n}.e_{i_n}\Big)\\ &= \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in[\![1,n]\!]}x_{i_1,1}\cdots x_{i_n,n}\,\phi(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\end{aligned}$$

Or $\phi(e_{i_1},\dots,e_{i_n})=0$ dès que deux éléments sont égaux car ϕ est alternée (voir la propriété 3.5, page précédente). Dans la somme ci-dessus, on peut garder uniquement les familles $(i_1,\dots,i_n)$ d'indices tous distincts, ce qui correspond exactement aux permutations de $[\![1,n]\!]$. On a donc, en utilisant le fait que ϕ est antisymétrique :

$$\begin{aligned}\phi(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}x_{\sigma(1),1}\cdots x_{\sigma(n),n}\,\phi(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})\\ &= \phi(e_1,\dots,e_n)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\,x_{\sigma(1),1}\cdots x_{\sigma(n),n}\end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à démontrer que

$$D\colon(x_1,\dots,x_n)\longmapsto\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}x_{\sigma(j),j}$$

est une forme n-linéaire alternée non nulle.

— Le fait que D soit une forme n-linéaire est une simple vérification (en exercice).

— Soit $\sigma'\in\mathfrak{S}_n$. On a

$$D(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}x_{\sigma(j),\sigma'(j)}$$

Par le changement de variable $k=\phi(j)$:

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\prod_{j=1}^{n}x_{\sigma(j),\sigma'(j)}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\prod_{k=1}^{n}x_{(\sigma\circ(\sigma')^{-1})(k),k}$$

L'application $s\mapsto\sigma\circ(\sigma')^{-1}$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même donc on peut faire le changement de variable $\theta=\sigma\circ(\sigma')^{-1}$:

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\prod_{k=1}^{n}x_{(\sigma\circ(\sigma')^{-1})(k),k}=\sum_{\theta\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\theta\circ\sigma')\prod_{k=1}^{n}x_{\theta(k),k}$$

Or $\varepsilon(\theta\circ\sigma')=\varepsilon(\theta)\varepsilon(\sigma')$ (propriété 3.3, page 152), donc finalement :

$$D(x_{\sigma'(1)},\dots,x_{\sigma'(n)})=\varepsilon(\sigma')\sum_{\theta\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\theta)\prod_{k=1}^{n}x_{\theta(k),k}=\varepsilon(\phi)D(x_1,\dots,x_n)$$

ce qui démontre que D est antisymétrique.

— On a

$$D(e_1,\ldots,e_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}e_{\sigma(j),j}$$

Or $e_{i,j}=0$ si $i\neq j$ et $e_{i,i}=1$, donc les produits ci-dessus sont nuls pour tous les σ différents de l'identité. Finalement,

$$D(e_1,\ldots,e_n)=\prod_{i=1}^{n}e_{i,i}=\prod_{i=1}^{n}1=1$$

En particulier, D n'est pas la forme n-linéaire nulle.

Finalement, on a démontré que $\phi=\lambda.D$ avec $\lambda=\phi(e_1,\ldots,e_n)$ et D une forme n-linéaire alternée non nulle, ce qui démontre que

$$\mathscr{A}_n(E,\mathbb{K})=\mathrm{Vect}\{D\}$$

d'où le résultat.

Remarque 3.7

Plus généralement, on a les dimensions suivantes :

$$\dim\mathscr{L}_p(E,\mathbb{K})=n^p,\ \dim\mathscr{S}_p(E,\mathbb{K})=\binom{n+p-1}{p}\text{ et }\dim\mathscr{A}_p(E,\mathbb{K})=\begin{cases}0 & \text{si } p>n\\ \binom{n}{p} & \text{si } p\leq n\end{cases}$$

1. On remarque en particulier que la famille $\left(e^\star_{(i_1,\ldots,i_n)}\right)_{(i_1,\ldots,i_p)\in[\![1,n]\!]^p}$ est une base de $\mathscr{L}_p(E,\mathbb{K})$, avec :

$$\forall(i_1,\ldots,i_p)\in[\![1,n]\!]^p,\ \forall(x_1,\ldots,x_p)\in E^p,\ e^\star_{(i_1,\ldots,i_p)}(x_1,\ldots,x_p)=e^\star_{i_1}(x_1)\,e^\star_{i_2}(x_2)\cdots e^\star_{i_p}(x_p)$$

2. de même, la famille

$$\left(e^\star_{(i_1,\ldots,i_n)}\right)_{(i_1,\ldots,i_p)\in[\![1,n]\!]^p,\ 1\leq i_1\leq\cdots\leq i_p\leq n}$$

est une base de $\mathscr{S}_p(E,\mathbb{K})$;

3. et la famille, lorsque $p\leq n$

$$\left(e^\star_{(i_1,\ldots,i_n)}\right)_{(i_1,\ldots,i_p)\in[\![1,n]\!]^p,\ 1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n}$$

est une base de $\mathscr{A}_p(E,\mathbb{K})$.

3.3 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 3.6 – Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de *dimension finie* avec $n=\dim E\geq 1$, soit $\mathscr{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E et soit [a] $(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$ avec

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\ x_j=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{x_{i,j}}_{\in\mathbb{K}}.e_i$$

On appelle *déterminant des vecteurs* $(x_1,\ldots,x_n)$ *dans la base* $\mathscr{E}$ et on note :

$$\boxed{\det_{\mathscr{E}}(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}x_{\sigma(j),j}}$$

a. Attention, le nombre de vecteurs doit être égal à la dimension de l'espace.

Exemple 3.4

Considérons $E = \mathbb{K}^2$ muni de la base canonique $\mathscr{E} = (e_1, e_2)$ ainsi que deux vecteurs $u = (a, b) = a.e_1 + b.e_2$ et $v = (c, d) = c.e_1 + d.e_2$ de E. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_2$ a $2! = 2$ éléments, l'identité $\mathrm{id}_{[\![1,2]\!]}$ et la transposition $\tau_{1,2}$. On a donc :

$$\det_{\mathscr{E}}(u, v) = \varepsilon(\mathrm{id}_{[\![1,2]\!]})\, a\, d + \varepsilon(\tau_{1,2})\, b\, c = a\, d - b\, c$$

Propriété 3.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie avec $n = \dim E \geq 1$, soit $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

1. $\det_{\mathscr{E}}$ est une forme n-linéaire antisymétrique sur E (et donc alternée).
2. On a
$$\boxed{\forall \phi \in \mathscr{A}_n(E),\ \phi = \phi(e_1, \dots, e_n).\det_{\mathscr{E}}}$$
3. On a :
$$\det_{\mathscr{E}}(e_1, \dots, e_n) = 1$$
4. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $\det_{\mathscr{E}}(x_1, \dots, x_p) = 0$.
5. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. La valeur de $\det_{\mathscr{E}}(x_1, \dots, x_p)$ ne change pas en ajoutant à x_i une combinaison linéaire de tous les x_j avec $j \in \{1, \dots, p\}$, $j \neq i$.

Démonstration

Les trois propriétés ont déjà été démontrées lors de la démonstration du théorème 3.1, page 157 et les deux dernières sont exactement la propriété 3.6, page 156.

Propriété 3.8 – Changement de base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie avec $n = \dim E \geq 1$ et soit $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Si $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_n)$ est une base de E, alors :
$$\det_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n).\det_{\mathscr{E}}$$
2. Une famille $\mathscr{C} = (c_1, \dots, c_n) \in E^n$ est une base de E si, et seulement si, $\det_{\mathscr{E}}(c_1, \dots, c_n) \neq 0$. Si c'est le cas :
$$\det_{\mathscr{C}}(e_1, \dots, e_n) = \frac{1}{\det_{\mathscr{E}}(c_1, \dots, c_n)}$$

Démonstration

1. C'est le point 2 de la propriété 3.7, de la présente page en remarquant que $\det_{\mathscr{B}}$ est une forme n-linéaire alternée sur E.
2. Supposons que $\mathscr{C}$ soit une base de E. D'après le résultat précédent, nous avons
$$\underbrace{\det_{\mathscr{C}}(c_1, \dots, c_n)}_{=1} = \det_{\mathscr{C}}(e_1, \dots, e_n)\ \det_{\mathscr{E}}(c_1, \dots, c_n)$$
donc $\det_{\mathscr{E}}(c_1, \dots, c_n)$ et
$$\det_{\mathscr{C}}(e_1, \dots, e_n) = \frac{1}{\det_{\mathscr{E}}(c_1, \dots, c_n)}$$
Par contraposition, si la famille $\mathscr{C}$ n'est pas une base de E alors elle est liée donc $\det_{\mathscr{E}}(c_1, \dots, c_n) = 0$ d'après la propriété 3.6, page 156.

3.4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 3.7 – Déterminant d'une matrice carrée

Soit [a] $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle déterminant de A et on note

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Autrement dit, c'est le déterminant de la famille des n colonnes de A dans la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

a. Attention, il faut que la matrice soit carrée.

Exemple 3.5

1. On a :

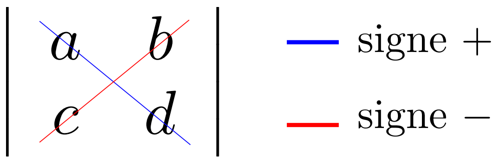
$$\boxed{\det I_n = 1}$$

car $\det I_n = \det_{\mathscr{C}}(C_1, \ldots, C_n) = 1$, en notant $\mathscr{C} = (C_1, \ldots, C_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^2$, on a

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c}$$

d'après l'exemple 3.4, page précédente. On mémorise par :



Propriété 3.9 – Propriétés issues du déterminant d'une matrice

1. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (A_1, \ldots, A_n) & \longmapsto & \det \underbrace{[A_1|\cdots|A_n]}_{\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})} \end{array}$$

est une forme n-linéaire antisymétrique sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (donc alternée). En particulier,

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda . A) = \lambda^n \det A$$

2. On a

$$\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \det(A \centerdot B) = \det(A) \det(B)$$

3. Pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$. Si c'est le cas :

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

4. On a

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ \det({}^tA) = \det A$$

Démonstration

Notons $\mathscr{C} = (C_1, \dots, C_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1. C'est une conséquence immédiate du fait que $\det_{\mathscr{C}}$ est une forme n-linéaire alternée sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Considérons l'application
$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (B_1, \dots, B_n) & \longmapsto & \det \underbrace{[A \bullet B_1 | \cdots | A \bullet B_n]}_{\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})} \end{array}$$
On vérifie alors que c'est une forme n-linéaire alternée. D'après le point 2 de la propriété 3.7, page 159, on a
$$\phi = \phi(C_1, \dots, C_n).\det_{\mathscr{C}} = \det_{\mathscr{C}}(A_1, \dots, A_n).\det_{\mathscr{C}} = \det(A).\det_{\mathscr{C}}$$
où $A_1, \dots, A_n$ sont les colonnes de A. Pour toute $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, en note $B_1, \dots, B_n$ ses colonnes,
$$\det(A \bullet B) = \phi(B_1, \dots, B_n) = \det(A).\det_{\mathscr{C}}(B_1, \dots, B_n) = \det(A)\ \det(B)$$
3. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si, et seulement si, ses colonnes $A_1, \dots, A_n$ forment une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ si, et seulement si $\det A = \det_{\mathscr{C}}(A_1, \dots, A_n) \neq 0$ (propriété 3.8, page 159). Si c'est le cas :
$$1 = \det I_n = \det(A \bullet A^{-1}) = \det(A)\ \det(A^{-1})$$
d'où le résultat.
4. Considérons l'application
$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (A_1, \dots, A_n) & \longmapsto & \det({}^t[A_1 | \cdots | A_n]) \end{array}$$
On vérifie alors que c'est une forme n-linéaire alternée. D'après le point 2 de la propriété 3.7, page 159, on a
$$\phi = \phi(C_1, \dots, C_n).\det_{\mathscr{C}} = \det({}^tI_n).\det_{\mathscr{C}} = \det(I_n).\det_{\mathscr{C}} = \det_{\mathscr{C}}$$
d'où, pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $A_1, \dots, A_n$:
$$\det({}^tA) = \phi(A_1, \dots, A_n) = \det_{\mathscr{C}}(A_1, \dots, A_n) = \det A$$

Remarque importante 3.8

⚠ Le déterminant n'est pas linéaire ! Il est en général faux que $\det(A+B) = \det A + \det B$.

Remarque 3.9

On a donc une information intéressante : si A et B sont deux matrices semblables de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors :
$$\det A = \det B$$
En effet, s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1} \bullet A \bullet P$:
$$\det(B) = \det(P^{-1})\ \det(A)\ \det(P) = \frac{1}{\det(P)} \det(A)\ \det(P) = \det(A)$$

⚠ La réciproque est fausse (par exemple, une matrice non inversible est de déterminant nulle, mais n'est pas semblable à la matrice nulle sauf si elle est elle-même nulle).

3.5 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 3.8 – Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Le *déterminant de* u, noté $\det u$, est défini par

$$\det u = \det\big(\operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}(u)\big)$$

où $\mathscr{E}$ est une base quelconque de E

Remarque 3.10

Cette définition a bien un sens : les matrices de u dans deux bases de E différentes sont semblables, donc elles ont même déterminant (remarque 3.9, page précédente).

Exemple 3.6

On a

$$\det \mathrm{id}_E = \det I_n = 1$$

Propriété 3.10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $\mathscr{E}$ une base de E et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n,\ \det_{\mathscr{E}}\big(u(x_1), \ldots, u(x_n)\big) = \det(u)\ \det_{\mathscr{E}}(x_1, \ldots, x_n)$$

Démonstration

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. On a :

$$\begin{aligned}
\det_{\mathscr{E}}\big(u(x_1), \ldots, u(x_n)\big) &= \det \operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) \\
&= \det\big(\operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}(u) \boldsymbol{\cdot} \det_{\mathscr{E}}(x_1, \ldots, x_n)\big) \\
&= \det\big(\operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}(u)\big)\ \det\big(\operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}(x_1, \ldots, x_n)\big) \\
&= \det(u)\ \det_{\mathscr{E}}(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

Propriété 3.11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda.u) = \lambda^n\ \det(u)$
2. $\det(u \circ v) = \det(u)\ \det(v)$
3. u est inversible si, et seulement si, $\det(u) \neq 0$. Si c'est le cas $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$

Démonstration

Soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. posons $U = \operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$ et $V = \operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}(v)$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a
$$\det(\lambda.u) = \det(\lambda.U) = \lambda^n\ \det U = \lambda^n\ \det u$$
2. On a
$$\det(u \circ v) = \det(U.V) = \det(U)\ \det(V) = \det(u) \det(v)$$
3. u est inversible si, et seulement si, U est inversible si, et seulement si, $\det u = \det U \neq 0$. Si c'est le cas, U est inversible donc
$$\det(u^{-1}) = \det(U^{-1}) = (\det U)^{-1} = (\det u)^{-1}$$

3.6 Méthodes de calcul de déterminants

Remarque 3.11

La formule définissant le déterminant et faisant intervenir $\mathfrak{S}_n$ est utile théoriquement [a] mais inutilisable en pratique dès que n est plus grand que 4 ou 5. En effet, il y a $n!$ permutations de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même. Ainsi, pour calculer un déterminant d'une matrice carrée d'ordre 5, il faut effectuer $5! = 120$ opérations...
Pire encore, $60! \simeq 10^{82}$ est supérieur au nombre d'atomes observables dans l'univers, alors que les problèmes de mathématiques appliquées et d'ingénierie moderne nécessitent de traiter des matrices qui ont des centaines de milliers voire des millions de lignes...
Il faut donc trouver des méthodes plus efficaces.

a. Par exemple pour démontrer que $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \mapsto \det\left([a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\right)$ est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Déterminant d'une matrice triangulaire

Propriété 3.12

Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire supérieure (ou triangulaire inférieure, ou diagonale), alors

$$\boxed{\det A = \prod_{j=1}^{n} a_{j,j}}$$

Démonstration

Supposons que A soit triangulaire supérieure. On a :

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$$

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, s'il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(j) > j$, alors $a_{\sigma(j),j} = 0$ car A est triangulaire supérieure. Dans l'expression ci-dessus, il ne reste plus que les termes correspondant à une permutation σ telle que $\sigma(j) \leq j$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.
Démontrons qu'une telle permutation σ est l'identité.

— On a $\sigma(1) \leq 1$ donc $\sigma(1) = 1$ car $\sigma(1) \in [\![1,n]\!]$.
— Supposons que $s|_{[\![1,k]\!]}$ soit l'identité pour un $k \in [\![1,n]\!]$. On a d'une part $\sigma(k+1) \leq k+1$ mais comme σ est injective, $\sigma(k+1) \notin [\![1,k]\!]$ d'où $\sigma(k+1) = k+1$, c'est-à-dire que $\sigma|_{[\![1,k+1]\!]}$ est l'identité.

Par principe de récurrence, σ est l'identité.
Dans la formule du déterminant ci-dessus, il ne reste donc plus que le terme correspondant à $\sigma = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$, d'où

$$\det A = \varepsilon(\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}) \prod_{j=1}^{n} a_{j,j} = \prod_{j=1}^{n} a_{j,j}$$

Pour une matrice triangulaire inférieure, on utilise le fait que sa transposée est triangulaire supérieure.

Propriété 3.13

Soit $A \in \mathrm{M}_{n_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_{n_2}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{n_2,n_1} & D \end{array}\right] = \det(A)\,\det(D)$$

Démonstration

Considérons l'application

$$\phi\colon \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{n_1,1}(\mathbb{K})^{n_1} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (A_1,\dots,A_{n_1}) & \longmapsto & \det\left[\begin{array}{c|c} [A_1|\dots|A_p] & B \\ \hline 0_{n_2,n_1} & C \end{array}\right] \end{array}$$

On vérifie que c'est une forme n_1-linéaire alternée sur $\mathrm{M}_{n_1,1}(\mathbb{K})^p$ donc, en notant $\mathscr{C} = (C_1,\dots,C_{n_1})$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n_1,1}(\mathbb{K})$:

$$\phi = \phi(C_1,\dots,C_{n_1}).\det_{\mathscr{C}} = \det\left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & B \end{array}\right].\det_{\mathscr{C}}$$

donc si $A_1,\dots,A_{n_1}$ sont les colonnes d'une matrice $A \in \mathrm{M}_{n_1}(\mathbb{K})$:

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & B \end{array}\right] = \phi(A_1,\dots,A_{n_1}) = \det\left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & B \end{array}\right].\det_{\mathscr{C}}(A_1,\dots,A_{n_1}) = \det\left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & B \end{array}\right]\det A$$

Considérons maintenant l'application

$$\psi\colon \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{n_2,1}(\mathbb{K})^{n_2} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (B_1,\dots,B_{n_2}) & \longmapsto & \det\left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & [B_1|\cdots|B_{n_2}] \end{array}\right] \end{array}$$

On vérifie que c'est une forme n_2-linéaire alternée sur $\mathrm{M}_{n_2,1}(\mathbb{K})^{n_2}$ donc, en notant $\mathscr{C}' = (C'_1,\dots,C'_{n_2})$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n_2,1}(\mathbb{K})$:

$$\psi = \psi(C'_1,\dots,C'_{n_2}).\det_{\mathscr{C}'} = \det\left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & I_{n-p} \end{array}\right].\det_{\mathscr{C}'}$$

donc si $B_1,\dots,B_{n_2}$ sont les colonnes d'une matrice $B \in \mathrm{M}_{n_2,1}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \det\left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & B \end{array}\right] &= \det\left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & B \end{array}\right]\det A \\ &= \det(A)\,\psi(C'_1,\dots,C'_{n_2}) \\ &= \psi(C'_1,\dots,C'_{n_2})\,\det_{\mathscr{C}'}(B_1,\dots,B_{n_2})\,\det(A) \\ &= \left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & I_{n-p} \end{array}\right]\det(B)\,\det(A) \end{aligned}$$

Mais :

$$\det\left[\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0_{n_2,n_1} & I_{n-p} \end{array}\right] = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1$$

car c'est une matrice triangulaire supérieure (voir la propriété 3.12, page précédente), d'où le résultat.

Remarque 3.12

Il n'y a pas de formule générale pour les déterminants des matrices-blocs. Par exemple, si A, B, C et D sont dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors, si D est inversible [a] :

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \det(A\,.\,D - B\,.\,D^{-1}\,.\,C\,.\,D)$$

mais cela ne fonctionne pas lorsque D n'est pas inversible.

a. Exercice conseillé.

Par l'algorithme du pivot de Gauss

Remarque 3.13

En pratique, lors de l'algorithme du pivot de Gauss :

1. les opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda.C_j$ (transvections) ne modifient pas la valeur du déterminant (d'après le point 5 de la propriété 3.7, page 159) ;
2. les opérations $L_i \leftarrow \lambda.L_i$ et $C_i \leftarrow \lambda.C_i$ (dilatations) multiplient le déterminant par λ (car le détermi-

nant est n-linéaire par rapport aux colonnes et aux lignes) ;

3. les opérations $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$ (échanges) multiplient le déterminant par -1 (car le déterminant est n-linéaire alternée par rapport aux colonnes et aux lignes).

Ainsi, cet algorithme permet de calculer des déterminants en se ramenant à des matrices triangulaires supérieures.
On peut démontrer que le calcul du déterminant d'une matrice carrée de taille n par la méthode du pivot de Gauss nécessite un nombre d'opération de l'ordre de n^3, ce qui est bien meilleur que $n!$.

Exemple 3.7

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \\ {\scriptstyle L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1} \end{matrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow 2.L_3} \\
&= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \\ {\scriptstyle L_4 \leftarrow L_4 - L_1} \end{matrix} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \end{vmatrix} \quad {\scriptstyle L_4 \leftarrow 10.L_4} \\
&= \frac{1}{20} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} \quad {\scriptstyle L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \\
&= \frac{1 \times (-4) \times 10 \times (-9)}{20} \\
&= 18
\end{aligned}$$

Exemple 3.8

Soit à calculer ($n \geq 2$) :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & n+1 & \cdots & n^2-n+1 \end{vmatrix}.$$

En faisant les transvections successives (qui conservent le déterminant) :

$$L_n \leftarrow L_n - L_{n-1} \text{ et } L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2},$$

On fait apparaître deux lignes identiques, donc :

$$\forall n \geq 2,\ \Delta_n = 0$$

Session Wxmaxima 3.1 – Pivot de Gauss

```
(%i1) A : genmatrix(lambda([i,j],1+(j-1)*(i)),5,5);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \end{bmatrix}$

```
(%i2) determinant(A);
```

(%o2) 0

```
(%i3) rowop(A,5,4,1);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

```
(%i4) rowop(%,4,3,1);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Session Python 3.1 – Pivot de Gauss

Traduction du Wxmaxima.

In [2]

```python
A = Matrix(5, 5,
           lambda i, j:
           1+j*(i+1))
A
```

Out [2]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \end{bmatrix}$$

In [3]

```python
_.det()
```

Out [3]

0

In[4]

```
A.elementary_row_op('n->n+km',
                    row1=4,
                    row2=3,
                    k=-1)
```

Out[4]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

In[5]

```
_.elementary_row_op('n->n+km',
                    row1=3,
                    row2=2,
                    k=-1)
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Développement selon une ligne ou une colonne

Session `Wxmaxima` 3.2 – Déterminant 3×3

```
(%i1) A : matrix([a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

```
(%i2) determinant(A);
```

(%o2) $a \times (e \times i - f \times h) - b \times (d \times i - f \times g) + c \times (d \times h - e \times g)$

Intéressant ! Que fait-il ?

```
(%i3) expand(%);
```

(%o3) $a \times e \times i - b \times d \times i - a \times f \times h + c \times d \times h + b \times f \times g - c \times e \times g$

Session `Python` 3.2 – Déterminant 3×3

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```python
a = IndexedBase('a')
A = Matrix(3, 3,
           lambda i, j:
           a[i+1, j+1])
A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

In[3]

```python
A.det()
```

Out[3]

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$$

In[4]

```python
det(A)
```

Out[4]

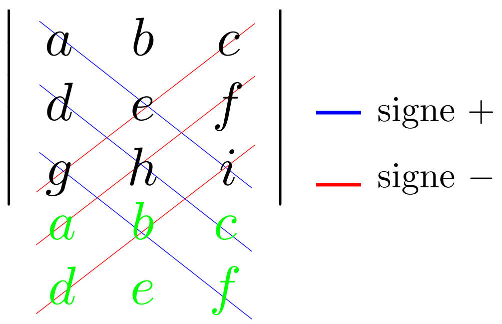
$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$$

Exemple 3.9

Si a, b, c, d, e, f, g, h et i sont dans $\mathbb{K}$, alors

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\,e\,i + d\,h\,c + g\,b\,f - g\,e\,c - a\,h\,f - d\,b\,i$$

que l'on peut mémoriser par la *règle de Sarrus* :



Remarque 3.14

On remarque, qu'avant développement, `Wxmaxima` nous proposait une formule non développée, qu'on peut ré-écrire :

$$a\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Que se passe-t-il pour n plus grand ?

Session `Wxmaxima` 3.3 – Développement du déterminant

```
(%i1) A : matrix([a,b,c,d],[e,f,g,h],[i,j,k,l],[m,n,o,p]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$

```
(%i2) determinant(A);
```

(%o2) $a \times (f \times (k \times p - l \times o) - g \times (j \times p - l \times n) + h \times (j \times o - k \times n)) - b \times (e \times (k \times p - l \times o) - g \times (i \times p - l \times m) + h \times (i \times o - k \times m)) + c \times (e \times (j \times p - l \times n) - f \times (i \times p - l \times m) + h \times (i \times n - j \times m)) - d \times (e \times (j \times o - k \times n) - f \times (i \times o - k \times m) + g \times (i \times n - j \times m))$

Session `Python` 3.3 – Développement du déterminant

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```python
a = IndexedBase('a')
A = Matrix(4, 4,
           lambda i, j:
           a[i+1, j+1])
det(A)
```

Out[2]

$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4} - a_{1,1}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,4} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,2} + a_{1,1}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,3} - a_{1,1}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,4} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,4} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,1} - a_{1,2}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,3} + a_{1,2}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,4} - a_{1,3}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,4} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,1} + a_{1,3}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,2} - a_{1,3}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,1} - a_{1,4}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3} + a_{1,4}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,2} + a_{1,4}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,3} - a_{1,4}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,1} - a_{1,4}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,2} + a_{1,4}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1}$

Remarque 3.15

On reconnaît l'expression :

$$a\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

Session `Wxmaxima` 3.4 – Développement suivant une ligne

```
(%i3) a*determinant(submatrix(1,A,1))
      -b*determinant(submatrix(1,A,2))
      +c*determinant(submatrix(1,A,3))
      -d*determinant(submatrix(1,A,4))$

(%i4) ratsimp(%-determinant(A));

(%o4) 0
```

Session `Python` 3.4 – Développement suivant une ligne

Traduction du `Wxmaxima`.

In [3]

```python
sum([(-1)**j*A[0, j]*det(
    A.extract([1, 2, 3],
              list(range(j))+
              list(range(j+1, 4))))
     for j in range(4)])
```

Out [3]

$$-\left(a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3}-a_{2,1}a_{3,3}a_{4,2}-a_{2,2}a_{3,1}a_{4,3}+a_{2,2}a_{3,3}a_{4,1}+a_{2,3}a_{3,1}a_{4,2}-a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1}\right)a_{1,4}+\left(a_{2,1}a_{3,2}a_{4,4}-a_{2,1}a_{3,4}a_{4,2}-a_{2,2}a_{3,1}a_{4,4}+a_{2,2}a_{3,4}a_{4,1}+a_{2,4}a_{3,1}a_{4,2}-a_{2,4}a_{3,2}a_{4,1}\right)a_{1,3}-\left(a_{2,1}a_{3,3}a_{4,4}-a_{2,1}a_{3,4}a_{4,3}-a_{2,3}a_{3,1}a_{4,4}+a_{2,3}a_{3,4}a_{4,1}+a_{2,4}a_{3,1}a_{4,3}-a_{2,4}a_{3,3}a_{4,1}\right)a_{1,2}+\left(a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}-a_{2,2}a_{3,4}a_{4,3}-a_{2,3}a_{3,2}a_{4,4}+a_{2,3}a_{3,4}a_{4,2}+a_{2,4}a_{3,2}a_{4,3}-a_{2,4}a_{3,3}a_{4,2}\right)a_{1,1}$$

In [4]

```python
ratsimp(_-__)
```

Out [4]

0

Définition 3.9 – Mineur, cofacteur et comatrice

Soit $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, soit $(k,\ell)\in [\![1,n]\!]^2$, on note[a] $A_{k,\ell}$ la matrice de $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue à partir de A en supprimant sa k-ième ligne et sa ℓ-ième colonne.

1. Le déterminant de $A_{k,\ell}$ s'appelle *mineur d'indice* (k,ℓ) *de* A ;
2. on appelle *cofacteur d'indice* (k,ℓ) *de* A l'expression :

$$\mathrm{Cofacteur}_{k,\ell}(A)=(-1)^{k+\ell}\det A_{k,\ell}(A)$$

3. on appelle *comatrice de* A la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\mathrm{Com}(A)=\left[\mathrm{Cofacteur}_{i,j}(A)\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}=\begin{bmatrix}\mathrm{Cofacteur}_{1,1}(A) & \cdots & \mathrm{Cofacteur}_{n,1}(A)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{Cofacteur}_{n,1}(A) & \cdots & \mathrm{Cofacteur}_{n,n}(A)\end{bmatrix}$$

a. Attention, cette notation peut également désigner le coefficient en (k,ℓ) de A.

注释 3.1

这里我们定义了方阵A的余子式，代数余子式以及余子矩阵（$\mathrm{Com}(A)$），余子矩阵的转置叫做A的伴随矩阵。

Remarque 3.16

Pour retrouver les signes dans la comatrice, il suffit d'alterner les signes lorsque qu'on se « déplace de case en case dans la comatrice » :

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Proposition 3.1 – Développement selon une ligne ou une colonne

Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$*. Alors :*

1. *pour tout* $i \in \{1,\dots,n\}$*, on a le* développement suivant la i-ème ligne *:*

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\ \mathrm{Cofacteur}_{i,j}(A)}$$

2. *pour tout* $j \in \{1,\dots,n\}$*, on a le* développement suivant la j-ième colonne *:*

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\ \mathrm{Cofacteur}_{i,j}(A)}$$

Démonstration

Notons $A_1,\dots,A_n$ les vecteurs colonnes de A et $\mathscr{C} = (C_1,\dots,C_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Comme le déterminant est une forme n-linéaire par rapport aux colonnes :

$$\det A = \det_{\mathscr{C}}\left(\dots, A_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.C_i, A_{j+1}, \dots\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det_{\mathscr{C}}(\dots, A_{j-1}, C_i, A_{j+1}, \dots)$$

En échangeant la j-ième colonne avec la $j-1$-ième, puis la $j-1$-ième avec la $j-1$-ième jusqu'à ce que la première colonne soit C_i, puisqu'il y a au total $j-1$ échanges :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \det_{\mathscr{C}}(\dots, A_{j-1}, C_i, A_{j+1}, \dots) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{i,j} \det_{\mathscr{C}}(C_i, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots)$$

En échangeant la i-ème ligne avec la $i-1$-ième, puis la $i-1$-ième avec la $i-1$-ième jusqu'à ce que la première ligne soit $[1\,0\,\cdots\,0]$, puisqu'il y a au total $i-1$ échanges, on a par la formule du déterminant d'une matrice-blocs (propriété 3.13, page 163) :

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(-1)^{i+j-2}}_{(-1)^{i+j}} a_{i,j} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det([1]) \det A_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\ \mathrm{Cofacteur}_{i,j}(A)
\end{aligned}$$

La formule du développement selon une colonne se démontre de la même façon (ou en utilisant la transposée).

Remarque 3.17

Les formules de développements selon une ligne ou une colonne sont très utiles théoriquement mais inefficaces en général dès que $n \geq 5$. En effet, ces formules ramènent le calcul d'un déterminant d'une matrice d'ordre n à n calculs de déterminants de matrice d'ordre $n-1$. En itérant, nous avons donc au total $n!$ calculs à faire.
Par contre, ces formules sont très utiles lorsque la matrice comporte plein de zéros (*matrice creuse*) ou pour obtenir des formules de récurrence.

注释 3.2

注意我们只有在三阶方阵下可以使用此方法快速计算矩阵的行列式，当$n > 3$时并不适用。

Exemple 3.10

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, calculer :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

On développe suivant la première colonne, puis le cofacteur d'indice $(2, 1)$ suivant la première ligne. Il vient :

$$\Delta_n = a\,\Delta_{n-1} - b\,c\,\Delta_{n-2}$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On peut obtenir son terme général en utilisant le fait que $\Delta_1 = a$ et $\Delta_2 = a^2 - b\,c$.

Exemple 3.11

Soit $(a, b, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^{n+2}$, avec $a \neq b$, calculer :

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & \gamma_n \end{vmatrix}$$

On considère la fonction :

$$x \mapsto \begin{vmatrix} \gamma_1 + x & b + x & \cdots & b + x \\ a + x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b + x \\ a + x & \cdots & a + x & \gamma_n + x \end{vmatrix}$$

C'est une fonction polynomiale en x. En effectuant les opérations élémentaires $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $C_k \leftarrow C_k - C_1$, puis en développant suivant la première colonne, on en déduit que cette fonction polynomiale est de degré inférieur ou égale à 1. Elle s'écrit donc sous la forme : $\alpha \times x + \beta$. Pour $x = -a$, le déterminant vaut

$$\prod_{k=1}^{n} (\gamma_k - a) = \beta - \alpha\,a$$

Pour $x=-b$, le déterminant vaut
$$\prod_{k=1}^{n}(\gamma_k-b)=\beta-b\,\alpha$$
On en déduit alors β, puis la valeur du déterminant en évaluant en $x=0$.

Proposition 3.2 – Déterminant de Vandermonde

Soit $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n$, alors :
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

Démonstration

1. On a :
$$\det(V(a_1,a_2))=\begin{vmatrix}1 & a_1\\ 1 & a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1.$$
$$\boxed{\det(V(a_1,a_2))=a_2-a_1}$$
On a :
$$\det(V(a_1,a_2,a_3))=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2\\ 1 & a_2 & a_2^2\\ 1 & a_3 & a_3^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2\\ 0 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1^2\\ 0 & a_3-a_1 & a_3^2-a_1^2\end{vmatrix}\quad\begin{matrix}(L_2\leftarrow L_2-L_1)\\(L_3\leftarrow L_3-L_1)\end{matrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a_2-a_1 & a_2^2-a_1^2\\ a_3-a_1 & a_3^2-a_1^2\end{vmatrix}=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\begin{vmatrix}1 & a_2+a_1\\ 1 & a_3+a_1\end{vmatrix}$$
$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$
$$\boxed{\text{Conclusion : }\det(V(a_1,a_2))=a_2-a_1\text{ et }\det(V(a_1,a_2,a_3))=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$
2. On a :
$$\det(V(a_1,\dots,a_n))=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 1 & a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2-a_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1)\end{vmatrix}\quad\begin{matrix}(C_2\leftarrow C_2-a_1.C_1)\\ \vdots\\ \vdots\\ (C_n\leftarrow C_n-a_1.C_1)\end{matrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2-a_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1)\end{vmatrix}$$
$$=\left(\prod_{j=2}^{n}(a_j-a_1)\right)\det(V(a_2,\dots,a_n))$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \det(V(a_1, \dots, a_n)) = \left(\prod_{j=2}^{n}(a_j - a_1)\right) \det(V(a_2, \dots, a_n))}$$

3. Par une récurrence sur n on obtient :

$$\boxed{\det(V(a_1, \dots, a_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)}$$

4. La matrice $V(a_1, \dots, a_n)$ est inversible si et seulement si $\det(V(a_1, \dots, a_n)) \neq 0$ si et seulement si les a_i sont tous différents.

Théorème 3.2 – Propriété de la comatrice

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$\boxed{A \centerdot {}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A) \centerdot A = \det(A).I_n}$$

En particulier, si A est inversible :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.{}^t\mathrm{Com}(A)$$

Démonstration

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

— Pour $i = j$, le coefficient en (i,i) de $A \centerdot {}^t\mathrm{Com}(A)$ vaut, en utilisant la formule du développement suivant la i-ième ligne :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \,\mathrm{Cofacteur}_{i,k}(A) = \det A$$

— Pour $i \neq j$, posons B la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la j-ième ligne par la i-ème ligne de A. Puisque B a deux lignes égales, $\det B = 0$. De plus, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $A_{j,k} = B_{j,k}$. Le coefficient en (i,j) de $A \centerdot {}^t\mathrm{Com}(A)$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \,\mathrm{Cofacteur}_{j,k}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \,\mathrm{Cofacteur}_{k,j}(B) = \det B = 0$$

Finalement, $A \centerdot {}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A).I_n$.

La relation ${}^t\mathrm{Com}(A) \centerdot A = \det(A).I_n$ se démontre exactement de la même manière.
Si A est inversible, en multipliant par A^{-1} :

$${}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A).A^{-1}$$

et comme $\det A \neq 0$, on obtient le résultat.

Remarque 3.18

Cette formule est *inutile pour calculer un inverse* ! En effet, elle mène à des calculs trop complexe.
Pour calculer l'inverse d'une matrice A, on peut par exemple utiliser la méthode du pivot de Gauss sur la matrice augmentée $[A \,|\, I_n]$ (voir la partie sur les systèmes linéaires du chapitre précédent), ou résoudre, toujours avec la méthode du pivot de Gauss, un système générique $A \centerdot X = Y$, où X et Y sont dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$, ce qui donne $X = A^{-1} \centerdot Y$.
Mais cette formule a un intérêt théorique. Si on note $A^{-1} = [\alpha_{i,j}]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$, alors l'application :

$$(a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \mapsto (\alpha_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (en particulier *continue*), donc une petite variation sur les coefficients de A provoque une petite variation sur les coefficients de A^{-1} : *on peut donc faire un calcul approché de A^{-1} !*

注释 3.3

当方阵阶数$n > 3$，如果用此公式计算逆矩阵, 计算量会相当大，使用高斯消元法会更简单。

Exemple 3.12

Faisons quelques calculs en Wxmaxima :

Session Wxmaxima 3.5 – Comatrice

(%i1) `A : matrix([a,b],[c,d]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(%i2) `Com(A) := genmatrix(lambda([i,j], (-1)^(i+j)*determinant(submatrix(i,A,j))),matrix_size(A)[1],matrix_size(A)[2])$`

(%i3) `Com(A);`

(%o3) $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

(%i4) `A.transpose(%);`

(%o4) $\begin{bmatrix} a \times d - b \times c & 0 \\ 0 & a \times d - b \times c \end{bmatrix}$

(%i5) `A : matrix([a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]);`

(%o5) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

(%i6) `Com(A);`

(%o6) $\begin{bmatrix} e \times i - f \times h & f \times g - d \times i & d \times h - e \times g \\ c \times h - b \times i & a \times i - c \times g & b \times g - a \times h \\ b \times f - c \times e & c \times d - a \times f & a \times e - b \times d \end{bmatrix}$

(%i7) `ratsimp(A.transpose(%)-determinant(A)*identfor(A));`

(%o7) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Session Python 3.5 – Comatrice

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```python
a = IndexedBase('a')
A = Matrix(2, 2,
           lambda i, j:
           a[i+1, j+1])
A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

In[3]

```
A.cofactor_matrix()
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{2,1} \\ -a_{1,2} & a_{1,1} \end{bmatrix}$$

In[4]

```
A.transpose()*_
```

Out[4]

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} & 0 \\ 0 & a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \end{bmatrix}$$

In[5]

```
A = Matrix(3, 3,
           lambda i, j:
           a[i+1, j+1])
A.cofactor_matrix()
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix} a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2} & -a_{2,1}a_{3,3} + a_{2,3}a_{3,1} & a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1} \\ -a_{1,2}a_{3,3} + a_{1,3}a_{3,2} & a_{1,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{3,1} & -a_{1,1}a_{3,2} + a_{1,2}a_{3,1} \\ a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2} & -a_{1,1}a_{2,3} + a_{1,3}a_{2,1} & a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \end{bmatrix}$$

In[6]

```
(_.transpose()*A-
 det(A)*eye(3)).expand()
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.7 Un peu de géométrie

Remarque 3.19

— Dans $\mathbb{R}^n$, nous avons une base de référence : la base canonique $\mathscr{C}_n$. Soit $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une autre base, alors :
$$\det_{\mathscr{C}_n}(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{R}^*.$$
Lorsque ce déterminant est positif, on dit que la base $\mathscr{E}$ est *directe*. Lorsqu'il est négatif, on dit qu'elle est *indirecte*.

— On peut alors interpréter le déterminant de la manière suivante :

1. Si $n = 2$, soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, alors :
$$|\det_{\mathscr{C}_2}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| = \mu(\Delta),$$
où $\mu(\Delta)$ désigne l'aire de Δ, le parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On peut alors donner un sens à une aire orientée en considérant le déterminant sans la valeur absolue.
2. Si $n = 3$, soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors :
$$|\det_{\mathscr{C}_3}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| = \mu(\Delta),$$
où $\mu(\Delta)$ désigne le volume de Δ, le parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.
On avait trouvé une autre formule (qui est la même) car :
$$\det_{\mathscr{C}_3}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \rangle$$

Remarque 3.20

Plus généralement, si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases de E, on dit que $\mathscr{E}'$ *a la même orientation que* $\mathscr{E}$ si $\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}') > 0$.
On démontre alors que la relation « avoir la même orientation » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E.
En fixant une base $\mathscr{E}$ de E, nous pouvons ainsi séparer les bases de E en deux ensembles (les deux classes d'équivalences) : celles qui ont la même orientation que $\mathscr{E}$ et celles qui n'ont pas la même orientation que $\mathscr{E}$.
On peut alors décréter arbitrairement qu'une base $\mathscr{E}$ est une *base directe*, on dit alors que E est *orienté*. Toutes les bases ayant la même orientation que $\mathscr{E}$ sont dites *directes* et les autres *indirectes*.
Dans $\mathbb{R}^n$, il est bien entendu naturel de décréter que la base canonique est directe (ce qui est cohérent avec la remarque précédente).

3.8 Retour sur les systèmes linéaires

On rappelle qu'un système linéaire de n équations à n inconnues de la forme
$$A \bullet X = B$$
d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est dit de Cramer lorsqu'il y a existence et unicité de la solution. Autrement dit, c'est un système de Cramer si, et seulement si, A est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$.

Proposition 3.3

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *de colonnes* $A_1, \dots, A_n$ *et* $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*. Alors l'unique solution*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

du système de Cramer

$$A \bullet X = B$$

est donnée par

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ x_k = \frac{\det[A_1 \,|\, \cdots \,|\, A_{k-1} \,|\, B \,|\, A_{k+1} \,|\, \cdots \,|\, A_n]}{\det(A)}}$$

注释 3.4

克莱姆法则求解线性方程组时，需要注意矩阵行列式不为0, 即矩阵可逆。

Démonstration

On a :

$$B = \sum_{j=1}^{n} x_j . A_j$$

donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\det[A_1 \,|\, \cdots \,|\, A_{k-1} \,|\, B \,|\, A_{k+1} \,|\, \cdots \,|\, A_n] = \sum_{j=1}^{n} x_j \det[A_1 \,|\, \cdots \,|\, A_{k-1} \,|\, A_j \,|\, A_{k+1} \,|\, \cdots \,|\, A_n]$$

Lorsque $k \neq j$, le déterminant ci-dessus est nul puisque deux colonnes sont égales, donc :

$$\det[A_1 \,|\, \cdots \,|\, A_{k-1} \,|\, B \,|\, A_{k+1} \,|\, \cdots \,|\, A_n] = x_j \det A$$

ce qui donne le résultat puisque $\det A \neq 0$.

Remarque 3.21

Cette proposition *n'est pas* une méthode pratique de résolution (il est bien plus efficace d'utiliser la méthode du pivot de Gauss). Elle a cependant un intérêt théorique, elle permet d'obtenir que la solution X dépend de manière continue (et même $\mathscr{C}^\infty$) des coefficients de A et B : une petite variation sur les coefficients de A ou de B provoque une petite variation sur les coefficients de X : *on peut donc faire un calcul approché de* X *!*

Exercice(s) 3.1

3.1.1 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Démontrer que A est inversible et que :

$$|\det(A)| \geq \prod_{i=1}^{n} \left(|a_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right)$$

3.1.2 Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $p_1 \in \mathbb{N}^*$, $p_2 \in \mathbb{N}^*$, $p_2 \leq n$. On considère l'ensemble des formes (p_1+p_2)-linéaires ϕ vérifiant pour tout $(x_1, \dots, x_{p_1+p_2}) \in V^{p_1+p_2}$, toute $\sigma_1 \in \mathfrak{S}_{p_1}$

et toute $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_{p_2}$:

$$\phi(x_{\sigma_1(1)}, \ldots, x_{\sigma_1(p_1)}, x_{p_1+\sigma_2(1)}, \ldots, x_{p_1+\sigma_2(p_2)}) = \varepsilon(\sigma_2)\phi(x_1, \ldots, x_{p_1+p_2})$$

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel des formes p-linéaires vérifiant cette propriété ?

3.1.3 Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, démontrer que :

$$\det(A \otimes B) = \det(A)^p \det(B)^n$$

3.1.4 Démontrer que le volume d'un tétraèdre de sommets A, B, C et D, vaut :

$$\left| \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})}{6} \right|$$

3.1.5 Calculer les déterminants suivants :

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & 2 \\ 2 & 1 & & & 3 \\ \vdots & 2 & & & \vdots \\ n-1 & \vdots & & & n \\ n & n-1 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

(b) $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

(c) $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & \iddots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

(d) $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_0 & \vdots & \cos n\,\theta_0 \\ 1 & \cos\theta_1 & \vdots & \cos n\,\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \vdots & \cos n\,\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \vdots & \cos n\,\theta_n \end{vmatrix}$$

(e)

$$\left| \binom{n+p-j+1}{n-i+1} \right|_{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2}$$

(f) Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{p-1} & \cdots & a_n^{p-1} \\ a_1^{p+1} & \cdots & a_n^{p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

3.1.6 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, démontrer que :

$$\operatorname{trace}(A) = 0 \iff \exists (X, Y) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2,\ A = X \centerdot Y - Y \centerdot X.$$

3.1.7 Soit $(A, B, C, D) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})^4$ telles que

$$C \centerdot {}^tD + D \centerdot {}^tC = 0$$

(a) On suppose D inversible ; démontrer que

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \det(A \centerdot {}^tD + B \centerdot {}^tC)$$

Démontrer par un exemple que ce n'est pas toujours vrai si D est non inversible.

(b) Démontrer que pour D quelconque,

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]^2 = \det(A \centerdot {}^tD + B \centerdot {}^tC)^2$$

(c) Calculer, dans le cas général $\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$

3.1.8 On appelle décomposition LU d'une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, la donnée de deux matrices L et U de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

— $A = L \centerdot U$;
— L est triangulaire inférieure (*lower*), avec des 1 sur la diagonale ;
— U est triangulaire supérieure (*upper*).

(a) Démontrer si une décomposition LU existe, alors elle est unique.

(b) Démontrer que A possède une décomposition LU si, et seulement si, tous ses mineurs principaux m_1, ... m_n sont non nuls, définis par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ m_k = \det\left([a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,k]\!]^2}\right)$$

3.1.9 (a) Démontrer que si A, B, C et D sont dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et que $A \centerdot C = C \centerdot A$, alors :

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \det(A \centerdot D - C \centerdot B)$$

(b) Démontrer que c'est faux, en général, lorsqu'il n'y a plus commutation.

3.1.10 Soit A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que :

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array}\right] \geq 0$$

3.1.11 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$. Démontrer que :

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}(A) = n &\iff \operatorname{rang}(\operatorname{Com}(A)) = n \\ \operatorname{rang}(A) = n-1 &\iff \operatorname{rang}(\operatorname{Com}(A)) = 1 \\ \operatorname{rang}(A) \leq n-2 &\iff \operatorname{Com}(A) = 0_n \end{aligned}$$

3.1.12 Démontrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \operatorname{Com}(A \centerdot B) = \operatorname{Com}(A) \centerdot \operatorname{Com}(B)$$

3.1.13 Soit A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre les équations suivantes d'inconnues $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

(a) $X = \operatorname{trace}(X).A + B$

(b) $X + {}^tX = \operatorname{trace}(X).A$

3.1.14 À quelle(s) condition(s), connaissant les affixes des milieux des côtés d'un polygone fermé à n côtés, existe-t-il un tel polygone ? Préciser dans tous les cas le procédé de construction du ou des polygone(s) solution(s). Que signifie géométriquement la condition de compatibilité obtenue ?

3.1.15 Déterminer les ensembles de quatre points du plan tels que la somme des distances d'un point au trois autres est constante.

Chapitre 4

Réduction des endomorphismes

注释 4.1

本章节介绍了自同态的约化，也就是说找到一组基底下其对应的自同态或者矩阵更加简单，比如对角矩阵，上三角矩阵等。自同态经过约化后，自同态的复合或者矩阵的计算会变得简单。本章节的最后一部分介绍了几种不同类型的约化方法以及计算机数学软件的实现。

4.1 Éléments propres

Définition 4.1 – Valeurs propres, vecteurs propres et espaces propres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

— On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre de u* s'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que

$$u(x) = \lambda . x$$

On dit alors que x est un *vecteur propre de u associé à λ*.

— L'ensemble des valeurs propres de u s'appelle, dans ce cours, *le spectre* de u et se note $\mathrm{Sp}(u)$.

— Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on appelle *espace propre de u associé à λ* le sous-espace vectoriel de E noté $E_u(\lambda)$ et défini par

$$E_u(\lambda) = \mathrm{Ker}(u - \lambda . \mathrm{id}_E)$$

理解特征值，特征向量, 谱和特征空间是学习本章节的基础。

Remarque 4.1

— Par définition, un vecteur propre n'est jamais nul.

— La restriction de u à un espace propre $E_u(\lambda)$ est une homothétie de rapport λ.

— De même pour une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle valeur propre et vecteur propre de A tout couple $(\lambda, X) \in \mathbb{K} \times \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\}$ tel que

$$A \centerdot X = \lambda . X$$

Le spectre $\mathrm{Sp}(A)$ de A est l'ensemble des valeurs propres de A et pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $E_A(\lambda) = \mathrm{Ker}(A - \lambda . I_n)$ est l'espace propre associé.

Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$ est la matrice de u dans une base $\mathscr{E}$ de E (en dimension finie), alors $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u)$ et x est un vecteur propre de u si, et seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(x)$ est un vecteur propre de A.

Remarque 4.2

La recherche des valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme u (on parle d'*éléments propres*) revient à résoudre un système linéaire homogène :

$$(u - \lambda.\,\mathrm{id}_E)(x) = 0_E$$

Exemple 4.1

On utilise donc les diverses méthodes de résolution des systèmes linéaires.
Par exemple, la matrice :

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

ne possède qu'une valeur propre -2. L'espace propre associé est de dimension 1.

Session `Wxmaxima` 4.1 – Exemple de réduction : valeurs propres

(%i1)
```
A : matrix([-3,-3,2],
[1,1,-2],[2,4,-4]);
```

On peut faire les calculs directement (ne marche qu'avec des matrices numériques !)

(%o1) $\begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

(%i2)
```
eigenvalues(A);
```

(%o2) $[[-2], [3]]$

(%i3)
```
eigenvectors(A);
```

(%o3) $[[[-2], [3]], [[[1, -1, -1]]]]$

Le principe général est d'utiliser l'algorithme du pivot.

(%i4)
```
A-X*ident(3);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} -X-3 & -3 & 2 \\ 1 & 1-X & -2 \\ 2 & 4 & -X-4 \end{bmatrix}$

(%i5)
```
factor(rowop(%,1,2,%[1,1]));
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 0 & -X \times (X+2) & -2 \times (X+2) \\ 1 & -(X-1) & -2 \\ 2 & 2^2 & -(X+4) \end{bmatrix}$

(%i6)
```
factor(rowop(%,3,2,%[3,1]));
```

(%o6) $\begin{bmatrix} 0 & -X \times (X+2) & -2 \times (X+2) \\ 1 & -(X-1) & -2 \\ 0 & 2 \times (X+1) & -X \end{bmatrix}$

(%i7)
```
%o6,X=-2;
```

(%o7) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(%i8)
```
rank(%);
```

(%o8) 2

La fonction `rank` ne fonctionne qu'avec des matrices numériques. On a trouvé que -2 est valeur propre et que la dimension de l'espace propre associé est 1. Pour continuer, nous allons simplifier par $(X+2)$ la première ligne. Ce faisant, nous supposons maintenant que la valeur propre est *différente* de -2.

```
(%i9) factor(rowop(%o6,1,1,1-1/(X+2)));
```

(%o9) $\begin{bmatrix} 0 & -X & -2 \\ 1 & -(X-1) & -2 \\ 0 & 2\times(X+1) & -X \end{bmatrix}$

```
(%i11) factor(rowop(%,3,1,%[3,3]/%[1,3]));
```

(%o11) $\begin{bmatrix} 0 & -X & -2 \\ 1 & -(X-1) & -2 \\ 0 & \frac{(X+2)^2}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Session `Python` 4.1 – Exemple de réduction : valeurs propres

Traduction du `Wxmaxima`.

In [2]

```python
A = Matrix(3, 3,
           [-3, -3, 2, 1, 1,
            -2, 2, 4, -4])
A
```

Out [2]

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

In [3]

```python
A.eigenvals()
```

Out [3]

$\{-2 : 3\}$

In [4]

```python
A.eigenvects()
```

Out [4]

$$\left[\left(-2,\ 3,\ \left[\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]\right)\right]$$

In [5]

```
M = A-x*eye(3)
M
```

Out [5]

$$\begin{bmatrix} -x-3 & -3 & 2 \\ 1 & 1-x & -2 \\ 2 & 4 & -x-4 \end{bmatrix}$$

In [6]

```
_.elementary_row_op('n->n+km',
                    row1=2,
                    row2=1,
                    k=-2)
```

Out [6]

$$\begin{bmatrix} -x-3 & -3 & 2 \\ 1 & 1-x & -2 \\ 0 & 2x+2 & -x \end{bmatrix}$$

In [7]

```
_.elementary_row_op('n->n+km',
                    row1=0,
                    row2=1,
                    k=x+3)
```

Out [7]

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-x)(x+3)-3 & -2x-4 \\ 1 & 1-x & -2 \\ 0 & 2x+2 & -x \end{bmatrix}$$

In [8]

```
N = expand(_)
N
```

Out [8]

$$\begin{bmatrix} 0 & -x^2-2x & -2x-4 \\ 1 & 1-x & -2 \\ 0 & 2x+2 & -x \end{bmatrix}$$

In[9]

```python
# -2 annule la première ligne
_.subs({x: -2})
```

Out[9]

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 3 & -2\\0 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

In[10]

```python
_.rank()
```

Out[10]

2

In[10]

```python
M.rank()
```

Out[10]

3

In[11]

```python
N.elementary_row_op('n->kn',
                    row=0,
                    k=-1/(x+2))
```

Out[11]

$$\begin{bmatrix}0 & -\frac{-x^{2}-2x}{x+2} & -\frac{-2x-4}{x+2}\\1 & 1-x & -2\\0 & 2x+2 & -x\end{bmatrix}$$

In[12]

```python
_.applyfunc(ratsimp)
```

Out[12]

$$\begin{bmatrix}0 & x & 2\\1 & 1-x & -2\\0 & 2x+2 & -x\end{bmatrix}$$

In[13]

```
_.elementary_row_op('n->n+km',
                     row1=2,
                     row2=0,
                     k=x/2)
```

Out[13]

$$\begin{bmatrix} 0 & x & 2 \\ 1 & 1-x & -2 \\ 0 & \frac{x^2}{2}+2x+2 & 0 \end{bmatrix}$$

In[14]

```
_.applyfunc(sympy!factor)
```

Out[14]

$$\begin{bmatrix} 0 & x & 2 \\ 1 & 1-x & -2 \\ 0 & \frac{(x+2)^2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque 4.3

Comme la valeur propre est différente de -2, le rang est toujours 3. Il n'y a pas d'autre valeur propre que celles trouvées.
Par ailleurs, comme nous avons travailler *sur les lignes uniquement*, les vecteurs propres sont solutions d'un système triangulaire très facile à résoudre.

Session `Wxmaxima` 4.2 – Exemple de réduction : vecteurs propres

```
(%i12) expand(%o7.matrix([x],[y],[z]));
```

(%o12) $\begin{bmatrix} 0 \\ -2\times z+3\times y+x \\ 2\times z-2\times y \end{bmatrix}$

```
(%i13) solve(list_matrix_entries(%),[x,y,z]);
```

solve : dependent equations eliminated : (1)
(%o13) $[[x=-\%r1, y=\%r1, z=\%r1]]$

Session `Python` 4.2 – Exemple de réduction : vecteurs propres

Traduction du `Wxmaxima`.

In[15]

```
X = Matrix(3, 1,
           [x, y, z])
N.subs({x: -2})
```

Out[15]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

In[16]

```
_*X
```

Out[16]

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x + 3y - 2z \\ -2y + 2z \end{bmatrix}$$

In[17]

```
solve(_,
      [x, y, z])
```

Out[17]

$\{x : -z, \ y : z\}$

In[18]

```
X.subs(_)
```

Out[18]

$$\begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \end{bmatrix}$$

Exemple 4.2

On peut parfois trouver des valeurs propres et les vecteurs propres directement à partir de la matrice, sans résoudre un système linéaire. Par exemple, si $n \geq 2$ et si a et b sont dans $\mathbb{K}$, $a \neq b$, la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$$

possède les valeurs propres $a+(n-1)\,b$ et $a-b$ (on verra qu'il n'y en a pas d'autre) et les espaces propres associés sont :

$$E_A(a+(n-1)\,b) = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\right\}\right) \text{ et } E_A(a-b) = \mathrm{Vect}\left(\{E_{1,1}-E_{k,1},\ k\in\{2,\ldots,n\}\}\right)$$

Session Wxmaxima 4.3 – Exemple de réduction

(%i1) `A(n) := genmatrix(lambda([i,j],if i=j then a else b),n,n);`

(%o1) $\mathrm{A}\,(n) := \mathrm{genmatrix}\,(\mathrm{lambda}\,([i,j], \mathrm{if} i = j \mathrm{then} a \mathrm{else} b)\,, n, n)$

(%i2) `A(3);`

(%o2) $\begin{bmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{bmatrix}$

(%i3) `eigenvalues(A(n)),n=5;`

(%o3) $[[4\times b+a, a-b], [1,4]]$

(%i4) `eigenvectors(A(n)),n=6;`

(%o4) $[[[5\times b+a, a-b], [1,5]], [[[1,1,1,1,1,1]], [[1,0,0,0,0,-1], [0,1,0,0,0,-1], [0,0,1,0,0,-1], [0,0,0,1,0,-1], [0,0,0,0,1,-1]]]]$

Session Python 4.3 – Exemple de réduction : vecteurs propres

Traduction du Wxmaxima.

In [2]

```
a, b = symbols('a b')
def A(n):
    return(Matrix(n, n,
                  lambda i, j:
                  b+(a-b)*
                  KroneckerDelta(i, j)))
```

In [3]

```
A(3)
```

Out [3]

$$\begin{bmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{bmatrix}$$

In [4]

```
(A(5)).eigenvals()
```

Out[4]

$$\{a - b : 4,\ a + 4b : 1\}$$

In[5]

```
(A(6)).eigenvects()
```

Out[5]

$$\left[\left(a-b,\ 5,\ \left[\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right]\right),\ \left(a+5b,\ 1,\ \left[\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right]\right)\right]$$

Exemple 4.3

Si E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $2\,n$ et si $k \in \mathbb{R}$, alors l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par :

$$\forall P \in E,\ u(P) = \Big(x \mapsto (x^2-1)\,P'(x) - (2\,n\,x + k)\,P(x)\Big)$$

vérifie :

$$\mathrm{Sp}(u) = \{-k + 2i,\ i \in \{-n, \ldots, +n\}\}$$

et

$$\forall i \in \{-n, \ldots, +n\},\ E_u(-k+2i) = \mathrm{Vect}\left(\{x \mapsto (x-1)^{n+i}\,(x+1)^{n-i}\}\right)$$

Session Wxmaxima 4.4 – Exemple de réduction

(%i1) `eq : (x^2-1)*'diff(y,x)-(2*n*x+k)*y;`

(%o1) $(x^2-1) \times \left(\dfrac{d}{d\,x} \times y\right) - (2 \times n \times x + k) \times y$

(%i2) `ode2(eq,y,x);`

(%o2) $y = \%c \times e^{\frac{(2\times n-k)\times \log(x+1)}{2} + \frac{(2\times n+k)\times\log(x-1)}{2}}$

(%i3) `solve([n-k/2=p,n+k/2=2*n-p],k);`

solve : dependent equations eliminated : (2)
(%o3) $[[k = 2 \times n - 2 \times p]]$

(%i4) `P[p] : subst(%[1],(x+1)^(n-k/2)*(x-1)^(n+k/2));`

(%o4) $(x-1)^{\frac{2\times n-2\times p}{2}+n} \times (x+1)^{n-\frac{2\times n-2\times p}{2}}$

(%i5) `ratsimp(%);`

(%o5) $(x-1)^{2\times n-p} \times (x+1)^p$

Session Python 4.4 – Exemple de réduction

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```python
f = Function('f')
eq = Eq((x**2-1)*
        diff(f(x), x)-(2*n*x+t)*f(x),
        0)
```

In[3]

```python
dsolve(eq, f(x))
```

Out[3]

$$f(x) = C_1 e^{n\log(x-1)+n\log(x+1)+\frac{t\log(x-1)}{2}-\frac{t\log(x+1)}{2}}$$

In[4]

```python
p = Symbol('p', integer=True)
solve([Eq(n+t/2, 2*n-p),
       Eq(n-t/2, p)], t)
```

Out[4]

$$\{t : 2n - 2p\}$$

In[5]

```python
((x+1)**(n-t/2)*(x-1)**(n+t/2)).subs(_)
```

Out[5]

$$(x-1)^{2n-p}(x+1)^p$$

Exemple 4.4

Il faut parfois faire preuve de vision géométrique : si E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n et si $u \in \mathscr{L}(E)$ est défini par :

$$\forall P \in E,\ u(P) = \Big(x \mapsto P(1-x)\Big)$$

alors alors les valeurs propres de u sont -1 et $+1$ et les vecteurs propres se calculent facilement dans une base adaptée.

4.2 Polynôme caractéristique

Propriété 4.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$;
2. $\mathrm{Ker}(u - \lambda . \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$;
3. $u - \lambda . \mathrm{id}_E$ n'est pas injectif.

En particulier, comme E est de dimension finie, u est n'est pas inversible si, et seulement si, $0_E \in \mathrm{Sp}(u)$. Si c'est le cas, $\mathrm{Ker}\, u = E_u(0)$.

Démonstration

On a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \exists x \in E \backslash \{0_E\},\ u(x) = \lambda . x \iff \exists x \in E \backslash \{0_E\},\ (u - \lambda . \mathrm{id}_E)(x) = 0_E \iff \mathrm{Ker}(u - \lambda . \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$$

et on remarque que u est injectif si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(u - \lambda . \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$.
Si E est de dimension finie, u est inversible si, et seulement si, il est injectif, d'où le résultat en prenant $\lambda = 0$.

Définition 4.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Le *polynôme caractéristique* de u, noté χ_u, correspond à la fonction polynomiale :

$$x \longmapsto \det(u - x . \mathrm{id}_E)$$

Remarque 4.4

— Afin d'alléger les notations et les calculs, on note le polynôme caractéristique χ_u sous la forme d'un *polynôme formel* (voir le cours sur les polynômes) :

$$\chi_u = \det(u - X . \mathrm{id}_E)$$

au lieu d'une fonction polynomiale, où X est l'*indéterminée*, une variable ayant les mêmes règles de calcul que celles d'une variable dans $\mathbb{K}$.
Ainsi, une fonction polynomiale sur $\mathbb{K}$ de la forme

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{\in \mathbb{K}}\ x^k$$

se représente par

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$$

Autrement dit, X correspond à la fonction polynomiale $x \mapsto x$.
On note $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes (formels) à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

— On définit de la même manière le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(A - X . I_n)$ d'une matrice carrée $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est la matrice de u dans une base de E, alors $\chi_A = \chi_u$.

— Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. La réciproque est fausse.

Propriété 4.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors χ_u est de degré n. De plus, si $n \geq 2$, alors :

$$\chi_u = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \operatorname{trace}(u) + \cdots + \det(u)$$

Démonstration

Si $n = 1$, c'est évident. Supposons $n \geq 2$. Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de u dans une base quelconque de E (donc $\chi_u = \chi_A$). Posons :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \,,\; \alpha_{i,j} = \begin{cases} a_{i,i} - X & \text{si } i = j \\ a_{i,j} \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On a :

$$\chi_A = \det\left([\alpha_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\right) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \alpha_{\sigma(i),i}$$

Pour $\sigma = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$, on a :

$$\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \alpha_{\sigma(i),i} = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\alpha_{i,i}}_{=a_{i,i}-X} = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{1,1} + \cdots + a_{n,n})}_{=\operatorname{trace} A = \operatorname{trace} u} X^{n-1} + (\text{termes d'ordre} \leq n-2)$$

Si $\sigma \neq \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$, alors il existe $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $k \neq \ell$, $\sigma(k) \neq k$ et $\sigma(\ell) \neq \ell$ ce qui démontre que :

$$\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \alpha_{\sigma(i),i} \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$$

puisque $\alpha_{\sigma(k),k} = a_{\sigma(k),k}$ et $\alpha_{\sigma(\ell),\ell} = a_{\sigma(\ell),\ell}$ ne dépendent pas de X. On en déduit le résultat, en remarquant que le terme constant est $\chi_u(0) = \det(u - 0.\,\mathrm{id}_E) = \det u$.

Propriété 4.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est une valeur propre de u si, et seulement si, $\chi_u(\lambda) = 0$. Autrement dit :

$$\boxed{\operatorname{Sp}(u) = (\chi_u)^{-1}(\{0\})}$$

Démonstration

Immédiat en utilisant la propriété 4.1, page précédente et en remarquant que $u - \lambda.\,\mathrm{id}_E$ n'est pas injectif si, et seulement si, $\chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda.\,\mathrm{id}_E) = 0$.

Remarque 4.5

— Si E est de dimension $n \geq 1$, alors u a au plus n valeurs propres (car χ_u est un polynôme de degré n, il admet donc au plus n racines).
— Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors u a au moins une valeur propre car sur $\mathbb{C}$ les polynômes non constants admettent toujours une racine (c'est faux pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Remarque importante 4.6

Il pourrait être tentant de passer systématiquement par le polynôme caractéristique pour trouver les éléments propres de u, ce serait pourtant une grosse erreur, car s'il nous permet de trouver les valeurs propres de u, il ne nous donne aucune information sur les espaces propres. Ainsi :

$$A_k = \left[\begin{array}{c|c} I_k + N_k & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k} \end{array}\right] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$$

où $N_k = \sum_{i=1}^{k-1} E_{i,i+1} \in \mathrm{M}_k(\mathbb{K})$ sont telles que toutes les A_k ($k \in [\![1,n]\!]$) ont même polynôme caractéristique alors que les espaces propres associés ont des dimensions allant de 1 à n.

Définition 4.3 – Multiplicité d'une valeur propre

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. La *multiplicité de* λ est la multiplicité [a] de λ en tant que racine du polynôme χ_u. On note

$$\mathrm{mult}_u(\lambda) \text{ la multiplicité de } \lambda$$

Si $\mathrm{mult}_u(\lambda) = 1$ on parle de valeur propre *simple*.

a. Une racine $\alpha \in \mathbb{K}$ de $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul a pour multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$ si $P = (X-\alpha)^r Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(\alpha) \neq 0$.

Propriété 4.4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ 1 \leq \dim E_u(\lambda) \leq \mathrm{mult}_u(\lambda)$$

En particulier, si $\mathrm{mult}_u(\lambda) = 1$ (valeur propre simple), alors $\dim E_u(\lambda) = 1$.

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Par définition, il existe un vecteur propre associé à λ (donc non nul), d'où $E_u(\lambda) \neq \{0_E\}$ et donc $\dim E_u(\lambda) \geq 1$.
Posons $d = \dim E_u(\lambda)$. Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de $E_u(\lambda)$ qu'on complète en une base $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E (avec $n = \dim E$). La restriction de u à $E_u(\lambda)$ est une homothétie de rapport λ donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \left[\begin{array}{c|c} \lambda.I_d & B \\ \hline 0_{n-d,d} & C \end{array}\right], \quad B \in \mathrm{M}_{d,n-d}(\mathbb{K}),\ C \in \mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{K})$$

On a donc

$$\chi_u = \det \left[\begin{array}{c|c} (\lambda - X).I_d & B \\ \hline 0_{n-d,d} & C - X.I_{n-d} \end{array}\right] = \det\big((\lambda - X).I_d\big) \det(C - X.I_{n-d}) = (\lambda - X)^d \det(C - X.I_{n-d})$$

d'où $d \leq \mathrm{mult}_u(\lambda)$.

4.3 Diagonalisation

Proposition 4.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de u toutes différentes ($k \geq 2$). Alors les espaces propres associés $E_u(\lambda_1), \dots, E_u(\lambda_k)$ sont en somme directe.

Démonstration

Par récurrence sur k.

— Pour $k = 2$, si $x \in E_u(\lambda_1) \cap E_u(\lambda_2)$, alors $u(x) - \lambda_1.x = u(x) - \lambda_2.x = 0_E$ donc $(\lambda_1 - \lambda_2).x = 0_E$. Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $x = 0_E$ donc $E_u(\lambda_1) \cap E_u(\lambda_2) = \{0_E\}$, ce qui démontre que $E_u(\lambda_1)$ et $E_u(\lambda_2)$ sont en somme directe.

— Soit $k \in [\![2,n]\!]$. Supposons le résultat vrai au rang k. Prenons pour tout $j \in [\![1,k+1]\!]$, $x_j \in E_u(\lambda_j)$ tel que (écriture de 0_E) :

$$\sum_{j=1}^{k+1} x_j = 0_E, \quad \text{donc } x_{k+1} = -\sum_{j=1}^{k} x_j$$

Alors :

$$0_E = u\left(\sum_{j=1}^{k+1} x_j = 0_E\right) = \sum_{j=1}^{k+1} u(x_j) = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j.x_j$$

D'après ces deux égalités :

$$\sum_{j=1}^{k} \underbrace{(\lambda_j - \lambda_{k+1})}_{\neq 0}.x_j = 0_E$$

donc, par hypothèse de récurrence, $x_1 = \cdots = x_k = 0_E$ et donc $x_{k+1} = 0_E$. Le résultat est donc vrai au rang $k+1$.

Par principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $k \in [\![2, n]\!]$.

Définition 4.4 – Endomorphisme diagonalisable

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est *diagonalisable* si :

$$\boxed{E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_u(\lambda)}$$

Comme E est de dimension finie, alors u est diagonalisable si, et seulement si, E admet une base de vecteurs propres de u (on dit alors que u se *diagonalise* dans cette base).

Remarque 4.7

— Si E est de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable, alors dans toute base $\mathscr{E}$ de E formé de vecteurs propres de u, la matrice de u est diagonale et ses éléments sont les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ qui apparaissent avec leur multiplicité :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{\mathrm{mult}_u(\lambda_1)\text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{\mathrm{mult}_u(\lambda_2)\text{ fois}}, \ldots)$$

— On dit qu'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé l'est. Autrement dit, une matrice est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Cependant, pour une matrice, il est fondamental de préciser le corps $\mathbb{K}$ dans lequel on travaille (il est possible qu'une matrice $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ne soit pas diagonalisable mais qu'elle soit diagonalisable si on la voit comme une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$). Par exemple, la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{ où } \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi.\mathbb{Z}$$

est diagonalisable dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, mais pas dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

注释 4.2

正如前面章节所讲，我们通过线性映射引出矩阵的定义，所以自同态的可对角化性质等价于矩阵的可对角化性质。

Propriété 4.5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors

$$u \text{ est diagonalisable si, et seulement si, } \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_u(\lambda) = \dim E$$

Démonstration

— Le sens direct est immédiat en considérant une base adaptée à la décomposition de E en somme directe d'espaces propres de u.

— Notons $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et supposons que

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_u(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \dim E_u(\lambda_i) = \dim E$$

Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, soit $\mathscr{E}_i$ une base de $E_u(\lambda_i)$. Alors $\mathscr{E} = (\mathscr{E}_1, \dots, \mathscr{E}_k)$ est une famille libre (car les espaces propres sont en somme directe, proposition 4.1, page 195) qui a $\sum_{i=1}^{k} \dim E_u(\lambda_i) = \dim E$ éléments par hypothèse. On en déduit que $\mathscr{E}$ est une base de E formée de vecteurs propres de u, donc u est diagonalisable.

Théorème 4.1 – Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors

$$u \text{ est diagonalisable si, et seulement si, } \chi_u \text{ est scindé et pour tout } \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim E_u(\lambda) = \mathrm{mult}_u(\lambda)\big)$$

Remarque 4.8

Par définition, un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant est scindé s'il est de la forme

$$P = a\,(X-\alpha_1)\,(X-\alpha_2)\,\cdots\,(X-\alpha_k), \quad \text{avec } a \in \mathbb{K}^* \text{ et, pour tout } i \in [\![1,k]\!],\ \alpha_i \in \mathbb{K}$$

Les α_i ne sont pas nécessairement tous différents.

Démonstration

Notons $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $d_i = \dim E_u(\lambda_i)$.

— Supposons que u soit diagonalisable. Dans une base $\mathscr{E}$ de E adaptée à la décomposition

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_u(\lambda_i)$$

la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$ de u dans la base $\mathscr{E}$ est diagonale :

$$\chi_u = \det(A - X.I_n) = \mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{d_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_k, \dots, \lambda_k}_{d_k \text{ fois}})$$

On a donc ($n = \dim E$)

$$\chi_u = \det(A - X.I_n) = (\lambda_1 - X)^{d_1} \cdots (\lambda_k - X)^{d_k}$$

ce qui démontre que χ_u est scindé. De plus, il est de degré n (propriété 4.2, page 194) donc

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{mult}_u(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} d_j = n$$

Mais pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $1 \leq d_i \leq \mathrm{mult}_u(\lambda_i)$ (propriété 4.4, page 195), ce qui implique que, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $d_i = \mathrm{mult}_u(\lambda_i)$.

— Supposons que χ_u soit scindé et que, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $d_i = \mathrm{mult}_u(\lambda_i)$. Puisque les zéros de χ_u sont les valeurs propres de u, on a :

$$\chi_u = (\lambda_1 - X)^{d_1} \cdots (\lambda_k - X)^{d_k}$$

donc :

$$\sum_{i=1}^{k} d_j = n = \dim E$$

D'après la propriété 4.5, page précédente, u est diagonalisable.

Remarque importante 4.9

Si u admet n valeurs propres toutes différentes ($n = \dim E$), alors u est diagonalisable car $\dim E_u(\lambda) = \mathrm{mult}_u(\lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. C'est le seul cas où il n'est pas nécessaire de calculer les dimensions des espaces propres de u, et où l'étude du polynôme caractéristique χ_u suffit pour démontrer que u est diagonalisable.

Remarque 4.10

On retrouve le fait qu'il est indispensable de préciser le corps dans lequel on se place quand on s'intéresse à la diagonalisation d'une matrice : sur $\mathbb{C}$ tous les polynômes non constants sont scindés, ce qui est faux sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4.5

- La matrice de l'exemple 4.1, page 184 n'est pas diagonalisable (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$).
- La matrice de l'exemple 4.2, page 189 est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
- L'endomorphisme de l'exemple 4.3, page 191 est diagonalisable.
- Une rotation du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ d'angle $\theta \in \mathbb{R} \backslash \pi.\mathbb{Z}$ n'est pas diagonalisable. Cependant, sa matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice(s) 4.1

4.1.1 Pour $a \in \mathbb{C}$, dire si

$$\begin{bmatrix} a+1 & 1 & -1 \\ 2a+2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est diagonalisable.}$$

4.1.2 Diagonaliser (c'est-à-dire démontrer qu'elle est diagonalisable et l'écrire sous la forme $P \centerdot D \centerdot P^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale) la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

4.1.3 Démontrer que les matrices suivantes sont semblables :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

4.1.4 Diagonaliser l'endomorphisme ϕ de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par (pour $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \phi(P) = P + \frac{1-X}{n} P'$$

4.1.5 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $B \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ diagonalisable, démontrer que $A \otimes B$ est diagonalisable et préciser les éléments propres de $A \otimes B$ en fonction de ceux de A et de B.

4.1.6 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ pour que

$$\left[\begin{array}{c|c} 0_n & I_n \\ \hline 2.A & A \end{array}\right] \text{ soit diagonalisable}$$

4.1.7 Démontrer que toute matrice circulante, c'est-à-dire de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & a_1 \end{bmatrix},\ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$$

est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et donner ses éléments propres.

4.1.8 La matrice suivante est-elle diagonalisable ($n \geq 2$) ?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

4.1.9 La matrice suivante est-elle diagonalisable ($n \geq 2$) ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

4.1.10 Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. À quelle condition nécessaire et suffisante la matrice M suivante est-elle diagonalisable ?

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \iddots & a_2 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

Même question avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

4.1.11 Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice suivante soit diagonalisable :

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin(\phi) & \sin(2\,\phi) \\ \sin(\phi) & 0 & \sin(2\,\phi) \\ \sin(2\,\phi) & \sin(\phi) & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\ \phi \in \mathbb{R}$$

4.1.12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer l'équivalence de :

(a) u diagonalisable ;

(b) tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

4.1.13 Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$P \mapsto X^n\, P\left(\frac{1}{X}\right)$$

4.4 Trigonalisation

Définition 4.5 – Endomorphisme trigonalisable

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est dit *trigonalisable* s'il existe un *drapeau* stable pour u, c'est-à-dire des sous-espaces vectoriels $V_1, \dots, V_n$ de E qui sont stables par u et tels que :

$$\{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = E$$

Remarque 4.11

— Nécessairement pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\dim V_k = k$.
— u est trigonalisable si, et seulement si, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (considérer une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E adaptée au drapeau, c'est-à-dire telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $(e_1,\dots,e_k)$ est une base de V_k).
La diagonale de cette matrice est alors constituée des valeurs propres de u (avec leurs multiplicités).
— On dit qu'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé l'est. Autrement dit, une matrice est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. De même que pour la diagonalisation, il est indispensable de préciser le corps $\mathbb{K}$ dans lequel on travaille.

Théorème 4.2 – Caractérisation des endomorphismes trigonalisables

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors

u est trigonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé

我们通常用此定理来判断自同态是否可三角化，如约化为上三角矩阵。

Démonstration

— Supposons que u soit trigonalisable. Il existe une base $\mathscr{E}$ de E telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $n = \dim E$) soit triangulaire supérieure. On a alors :

$$\chi_u = \det(A - X.I_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_{i,i} - X)$$

donc χ_u est scindé.
— Démontrons la réciproque par récurrence sur $n = \dim E$.
  — Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.
  — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai au rang n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $\dim E = n+1$ tel que χ_u soit scindé. En particulier, il admet au moins une racine donc il existe un vecteur propre e_1 de u : $u(e_1) = \lambda_1.e_1$ avec $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ la valeur propre associée à e_1. Comme $e_1 \neq 0_E$, on peut compléter (e_1) en une base $\mathscr{E} = (e_1,\dots,e_{n+1})$ de E. On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & M \\ \hline 0_{n,1} & N \end{array}\right], \quad M \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{K}),\ N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$$

  donc
$$\chi_u = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) - X.I_{n+1}\right) = (\lambda - X)\,\chi_N$$
  Puisque χ_u est scindé, nécessairement χ_N est aussi scindé. Or :
$$N = \mathrm{Mat}_{(e_2,\dots,e_{n+1})}\left(\pi_H \circ u\big|_H\right)$$
  avec $H = \mathrm{Vect}(e_2,\dots,e_{n+1})$ qui est de dimension n, π_H la projection de H parallèlement à $\mathrm{Vect}(\{e_1\})$ et $\pi_H \circ u\big|_H \in \mathscr{L}(H)$ qui a pour polynôme caractéristique χ_N qui est scindé. Par hypothèse de récurrence, $\pi_H \circ u\big|_H$ est trigonalisable donc il existe une base $(h_2,\dots,h_{n+1})$ de H telle que la matrice de $\pi_H \circ u\big|_H$ dans cette base soit triangulaire supérieure. Alors, par construction, la matrice de u dans la base $(e_1,h_2,\dots,h_{n+1})$ est triangulaire supérieure, donc u est trigonalisable.
Par principe de récurrence, le résultat est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 4.12

En particulier, tous les endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle sont trigonalisables (car les polynômes non constants sont scindés sur $\mathbb{C}$). Ils possèdent des espaces stables de dimension quelconque.

Exemple 4.6

La matrice :

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

se trigonalise dans $\mathbb{C}$. Il suffit pour effectuer la trigonalisation de suivre la démonstration du théorème. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$ où $\mathscr{C} = (c_1, c_2, c_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On a vu que le vecteur $e_1 = -c_1 + c_2 + c_3$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre -2. On peut compléter en une base $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ en prenant $e_2 = c_1$ et $e_3 = c_2$.

   Bien vérifier que l'on a une base !.

2. Pour trouver la matrice de u dans la base $\mathscr{B}_1$, on procède comme ceci :
   — $u(e_1) = -2.e_1$
   — $u(e_2) = u(c_1) = -3.c_1 + c_2 + 2.c_3 = 2.e_1 - c_2 - c_1 = 2.e_1 - e_2 - e_3$ (on regarde la première colonne de la matrice A).
   — $u(e_3) = u(c_2) = -3.c_1 + c_2 + 4.c_3 = 4.e_1 + c_1 - 3.c_2 = 4.e_1 + e_2 - 3.e_3$ (on regarde la deuxième colonne de la matrice.

   On obtient donc, si $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

   On peut vérifier en `Wxmaxima`, mais *il faut savoir le faire à la main !*

Session `Wxmaxima` 4.5 – Exemple de réduction

(%i1) `A : matrix([-3,-3,2],[1,1,-2],[2,4,-4]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

(%i2) `P : transpose(matrix([-1,1,1],[1,0,0],[0,1,0]));`

(%o2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(%i3) `invert(P).A.P;`

(%o3) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

Session `Python` 4.5 – Exemple de réduction

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```
A = Matrix(3, 3,
           [-3, -3, 2, 1, 1,
            -2, 2, 4, -4])
```

In[2]

```
P = Matrix(3, 3,
          [-1, 1, 1, 1, 0,
           0, 0, 1, 0]).transpose()
```

In[3]

```
P**(-1)*A*P
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Exemple 4.6 – (suite)

On recommence sur la sous-matrice 2×2 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

A_1 est la matrice d'un endomorphisme u_1 de E_1 dans la base (e_2, e_3), où $E_1 = \text{Vect}\{e_2, e_3\}$.

1. On cherche un vecteur propre de A_1, il vérifie :

$$\begin{aligned} -x + y &= -2\,x \\ -x - 3\,y &= -2\,y \end{aligned}$$

   ce qui donne immédiatement : $x = a$, $y = -a$ où $a \neq 0$, par exemple $(x, y) = (1, -1)$.
2. Ce vecteur est exprimé dans la base (e_2, e_3), c'est donc :

$$b_2 = e_2 - e_3$$

3. On complète la base $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ avec :

$$b_1 = e_1 \text{ et } b_3 = e_2$$

   où b_1 est choisi pour conserver le vecteur propre de A et b_3 est choisi pour compléter $\{b_2\}$ en une base de E_1.
4. On a alors :
   — $u(b_1) = -2\,b_1$
   — $u(b_2) = u(e_2 - e_3) = u(e_2) - u(e_3) = (2.e_1 - e_2 - e_3) - (4.e_1 + e_2 - 3.e_3) = -2.e_1 - 2.e_2 + 2.e_3 = -2.b_1 - 2.b_2$
   — $u(b_3) = u(e_2) = 2.e_1 - e_2 - e_3 = 2.b_1 + b_2 - 2.b_3$

   Finalement :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} u(b_1) & u(b_2) & u(b_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vérifions en `Wxmaxima` :

Session `Wxmaxima` 4.6 – Vérification

```
(%i4) Q : transpose(matrix([1,0,0],[0,1,-1],[0,1,0]));
```

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
(%i5) invert(Q).%o3.Q;
```

$$(\%o5)\quad \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Session `Python` 4.6 – Vérification

Traduction du `Wxmaxima`.

In[4]

```
Q = Matrix(3, 3,
           [1, 0, 0, 0, 1,
            -1, 0, 1, 0]).transpose()
Q**(-1)*_*Q
```

Out[4]

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Le calcul « à la main » est très différent de celui effectué à la machine.

L'objectif est de ne jamais inverser de matrice !

4.5 Réduction simultanée

Propriété 4.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, soit $u \in \mathscr{E}$ et soit $F \neq \{0_E\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par u (c'est-à-dire $u(F) \subset F$). Alors :

1. pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(v)$, $E_v(\lambda) = E_u(\lambda) \cap F$ avec $v = u\big|_F^F$;
2. si u est diagonalisable, alors $u\big|_F^F$ est diagonalisable ;
3. si u est trigonalisable, alors $u\big|_F^F$ est trigonalisable.

Démonstration

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(v)$.
   — On a $E_v(\lambda) \subset E_u(\lambda) \cap F$ car $E_v(\lambda) \subset E_u(\lambda)$ par définition de v et $E_v(\lambda) \subset F$ car $v \in \mathscr{L}(F)$.
   — Soit $x \in E_u(\lambda) \cap F$. Alors :
   $$v(x) = u\big|_F^F(x) = u(x) = \lambda.x$$

donc $x \in E_v(\lambda)$, d'où $E_u(\lambda) \cap F \subset E_v(\lambda)$.

Par double inclusions, $E_v(\lambda) = E_u(\lambda) \cap F$.

2. Notons $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $d_i = \dim E_u(\lambda_i)$. Soit $x \in F$. Puisque u est diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres de E donc on peut écrire :

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i, \qquad \text{avec, pour tout } i \in [\![1,k]\!],\ x_i \in E_u(\lambda_i)$$

On a donc :

$$\forall j \in [\![0,k-1]\!]\,,\ u^j(x) = \sum_{j=1}^{k} (\lambda_i)^j . x_i$$

Autrement dit, on a un système linéaire d'inconnues $x_1, \dots, x_k$ vectorielles (éléments de E). Pour se ramener à un système linéaire d'inconnues scalaires, considérons $\phi \in E^\star$ une forme linéaire. On a alors

$$\forall j \in [\![0,k-1]\!]\,,\ \phi\big(u^j(x)\big) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i)^j . \phi(x_i)$$

On a donc un système linéaire dont le déterminant de la matrice associée est un déterminant de Vandermonde (proposition 3.2, page 173). En particulier, comme les valeurs propres λ_i sont toutes différentes, ce déterminant est non nul donc le système admet une unique solution. On peut donc écrire :

$$\forall i \in [\![1,k]\!]\,,\ \phi(x_i) = \sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{\alpha_{i,j}}_{\in \mathbb{K}}\ \phi\big(u^j(x)\big)$$

Puisque que ceci est vrai pour toute forme linéaire $\phi \in E^\star$ et en remarquant que les $\alpha_{i,j}$ ne dépendent pas de ϕ (formules de Cramer), on a :

$$\forall i \in [\![1,k]\!]\,,\ x_i = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{i,j} . \underbrace{u^j(x)}_{\in F} \in F$$

en utilisant le fait que F est stable par tous les u^j. On a donc démontré que tout élément de F s'écrit de manière unique comme une somme de vecteurs propres de u qui sont dans F, d'où :

$$F = \bigoplus_{i=1}^{k} \big(E_u(\lambda_i) \cap F\big) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(v)} E_v(\lambda)$$

d'après le point 1. On en déduit que $v = u\big|_F^F$ est diagonalisable.

3. Si $F = E$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $F \neq E$. Soit $\mathscr{F}$ une base de F que l'on complète en une base $\mathscr{E}$ de E. On a alors ($n = \dim E$ et $p = \dim F$) :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{n-p,p} & D \end{array}\right], \quad A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(v) \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}),\ B \in \mathrm{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}),\ D \in \mathrm{M}_{n-p}(\mathbb{K})$$

On en déduit que $\chi_u = \chi_v\,\chi_D$. Or χ_u est scindé car u est trigonalisable donc nécessairement χ_v est aussi scindé, ce qui démontre que v est trigonalisable.

Remarque 4.13

— On peut démontrer le point 2 beaucoup plus rapidement avec la notion de polynôme d'endomorphisme (voir le chapitre suivant).

— On peut retenir cette idée : lorsqu'on a un système linéaire dont les inconnues $x_1, \dots, x_p$ sont des vecteurs d'un espace vectoriel E :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} . x_j = b_i$$

on peut utiliser la dualité. On considère une forme linéaire quelconque $\phi \in E^\star$ et on obtient le système linéaire

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} . \phi(x_j) = \phi(b_i)$$

dont les inconnues $\phi(x_1), \dots, \phi(x_p)$ sont des scalaires, que l'on sait résoudre (typiquement avec l'algorithme du pivot de Gauss). Si elles existent, les solutions s'écrivent sous la forme :

$$\forall j \in [\![1,p]\!]\,,\ \phi(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j}.\phi(b_i)$$

Comme ceci est vrai pour toute forme linéaire $\phi \in E^\star$ et les $\alpha_{i,j}$ ne dépendent pas de ϕ, on a

$$\forall j \in [\![1,p]\!]\,,\ x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j}.b_i$$

Propriété 4.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent ($u \circ v = v \circ u$). Alors :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ v\big(E_u(\lambda)\big) \subset E_u(\lambda)$$

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et soit $x \in E_u(\lambda)$. On a donc $u(x) = \lambda.x$ donc :

$$v\big(u(x)\big) = v(\lambda.x) = \lambda.v(x)$$

mais comme u et v commutent, on a $v\big(u(x)\big) = u\big(v(x)\big)$ donc :

$$u\big(v(x)\big) = \lambda.v(x)$$

c'est-à-dire $v(x) \in E_u(\lambda)$.

Théorème 4.3 – Critère de co-diagonalisation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit u et v deux endomorphismes de E qui sont diagonalisables. Alors u et v commutent ($u \circ v = v \circ u$) si, et seulement si, ils sont co-diagonalisables, *c'est-à-dire qu'ils se diagonalisent dans une même base de vecteurs propres.*

Démonstration

— Supposons que u et v soient co-diagonalisables. Il existe une base $\mathscr{E}$ de E dans laquelle les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(v)$ sont diagonales. En particulier, elles commutent donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(v) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(v) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(v \circ u)$$

d'où $u \circ v = v \circ u$.

— Supposons que $u \circ v = v \circ u$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. D'après la propriété 4.7, de la présente page, $E_u(\lambda)$ est stable par v. Comme v est diagonalisable, on en déduit que $v\big|_{E_u(\lambda)}^{E_u(\lambda)}$ est diagonalisable (propriété 4.6, page 203). Il existe donc une base de vecteurs propres (pour v) de $E_u(\lambda)$. Mais ces vecteurs propres sont dans $E_u(\lambda)$, donc ce sont aussi des vecteurs propres pour u.
Puisque u est diagonalisable, on a

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_u(\lambda)$$

D'après ce qui précède, pour toute $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on peut considérer une base de $E_u(\lambda)$ de vecteurs propres à la fois de u et de v, donc on construit par somme directe une base de E de vecteurs propres à la fois de u et de v, donc u et v sont co-diagonalisables.

Théorème 4.4 – Critère de co-trigonalisation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit u et v deux endomorphismes de E qui sont trigonalisables. Si u et v commutent ($u \circ v = v \circ u$) alors ils sont co-trigonalisables, *c'est-à-dire qu'ils se trigonalisent dans une même base de vecteurs propres.*

Démonstration

On procède par récurrence sur $n = \dim E$.
- Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai au rang n et considérons u et v deux endomorphismes de E trigonalisables qui commutent (avec $\dim E = n+1$). On démontre comme dans la démonstration du théorème 4.3, page précédente qu'il existe un vecteur propre x commun à u et v. En particulier il est non nul donc on peut compléter (x) en une base $\mathscr{E} = (x, e_2, \ldots, e_{n+1})$ de E. Puisque $\mathrm{Vect}(\{x\})$ est stable par u et par v, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(B, C) \in \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})^2$ et $(M, N) \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})^2$ tels que :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & B \\ \hline 0_{n-1,1} & M \end{array}\right] \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(v) = \left[\begin{array}{c|c} \beta & C \\ \hline 0_{n-1,1} & N \end{array}\right]$$
Comme u et v commutent, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(v)$ aussi et comme : commutent aussi, ce qui donne
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) \bullet \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(v) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha\,\beta & \alpha.C + B \bullet N \\ \hline 0_{n-1,1} & M \bullet N \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \beta\,\alpha & \beta.N + M \bullet C \\ \hline 0_{n-1,1} & N \bullet M \end{array}\right]$$
donc $M \bullet N = N \bullet M$. De plus, $\chi_u = (\alpha - X)\,\chi_M$ et χ_u est scindé (car u est trigonalisable) donc nécessairement χ_M est scindé donc M est trigonalisable. De même, χ_N est trigonalisable.
En notant $H = \mathrm{Vect}(\{e_2, \ldots, e_{n+1}\})$, $u' = \pi_h \circ u|_H$ et $v' = \pi_H \circ v|_H$ où π_H est la projection sur H parallèlement à $\mathrm{Vect}(\{x\})$, on a $M = \mathrm{Mat}_{(e_2,\ldots,e_{n+1})}(u')$ et $N = \mathrm{Mat}_{(e_2,\ldots,e_{n+1})}(v')$. Or M et N commutent et sont trigonalisables, donc u' et v' aussi. Comme $\dim H = n$, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathscr{H} = (h_2, \ldots, h_{n+1})$ de H dans laquelle les matrices de u' et v' sont triangulaires supérieures.
Par construction, dans la base $(x, h_2, \ldots, h_{n+1})$, les matrices de u et v sont triangulaires supérieures donc le résultat est vrai au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 4.14

On peut généraliser les résultats des théorèmes 4.3, page précédente et 4.4, page précédente à un nombre quelconque d'endomorphismes qui commutent deux à deux.

Exercice(s) 4.2

4.2.1 Soit $\mathscr{C} = (c_1, c_2, c_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & 8 \\ -12 & -4 & -9 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(v) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$
Démontrer que u et v sont co-diagonalisables et trouver une base de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(v)$ sont diagonales.

4.2.2 Soit E est $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et u et v sont deux endomorphismes de E qui vérifient :
$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2,\ u \circ v - v \circ u = \alpha.u + \beta.v$$
Démontrer que u et v possèdent au moins un vecteur propre commun.

4.2.3 Soit E est $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et u, v et w trois endomorphismes de E qui vérifient :
$$u \circ w = w \circ v$$
Démontrer que u et v possèdent au moins $\mathrm{rang}(w)$ valeurs propres communes (en comptant les multiplicités).

4.2.4 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Démontrer que u et v sont co-trigonalisables.

4.6 Applications de la réduction

注释 4.3

本小结我们给出了大量的关于矩阵的 Wxmaxima 和 Python 计算机代码，方便读者实际操作所学知识。

4.6.1 Systèmes linéaires récurrents à coefficients constants

Définition 4.6 – Système linéaire récurrent à coefficients constants

On appelle *système linéaire récurrent à coefficients constants* tout ensemble d'équations récurrentes qui peut se mettre sous la forme :

$$X_{n+1} = A \centerdot X_n + B_n, \text{ où } A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}),\ (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})^{\mathbb{N}},\ X_0 \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

X_0 s'appelle la *condition initiale* et B_n le *second membre*. Le système :

$$X_{n+1} = A \centerdot X_n,$$

s'appelle le *système homogène associé*.

La résolution passe par :

1. La résolution du système homogène associé :
$$X_n = A^n \centerdot \Lambda \text{ où } \Lambda \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$
2. La recherche d'une solution particulière, soit évidente, soit par variation de la constante [a] :
$$A^{n+1} \centerdot (\Lambda_{n+1} - \Lambda_n) = B_n$$

Nous sommes donc ramenés au calcul de A^n.

a. Cette méthode ne fonctionne que lorsque A est inversible.

Exemple 4.7

On peut utiliser la formule du binôme de Newton, notamment lorsque A est somme d'une matrice d'homothétie $\lambda.I_n$ et d'une matrice nilpotente N (c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0_n$) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ k \geq p \implies A^n = (N + \lambda.I_p)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .N^k \centerdot (\lambda.I_n)^{n-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \lambda^{n-k}.N^k$$

On a ainsi :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 2^n & n\,2^{n-1} & n\,(n-1)\,2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n\,2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

Session Wxmaxima 4.7 – A^n : binôme de Newton pour les matrices

```
(%i1) A : matrix([2,1,0],[0,2,1],[0,0,2]);
```

$$(\%o1) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
(%i2) N : A-2*ident(3);
```

$$(\%o2)\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
(%i3) ratsimp(2^n*ident(3)+binomial(n,1)*2^(n-1)*N+binomial(n,2)*2^(n-2)*N^^2);
```

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} 2^n & n\,2^{n-1} & \left(n^2-n\right)\,2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n\,2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

Session `Python` 4.7 – A^n :Binôme de Newton pour les matrices

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```python
A = Matrix(3, 3,
           [2, 1, 0, 0, 2,
            1, 0, 0, 2])
A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

In[3]

```python
N = A-2*eye(3)
```

In[3]

```python
2**n*eye(3)+binomial(
    n, 1)*2**(n-1)*N+binomial(
    n, 2)*2**(n-2)*N**2
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-2}\binom{n}{2} \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

Exemple 4.8

Lorsque la matrice A est diagonalisable, il suffit de la diagonaliser, car si $A = P \boldsymbol{.} \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \boldsymbol{.} P^{-1}$, alors :

$$A^n = P \boldsymbol{.} \operatorname{Diag}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_p^n) \boldsymbol{.} P^{-1}$$

Par exemple si :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

alors A est diagonalisable et on trouve :

$$A^n = \begin{bmatrix} -4+3\times 2^n+2\times 3^n & 4-4\times 3^n & -4+6\times 2^n-2\times 3^n \\ -3+2\times 2^n+3^n & 3-2\times 3^n & -3+4\times 2^n-3^n \\ 2-2^n-3^n & -2+2\times 3^n & 2-2\times 2^n+3^n \end{bmatrix}$$

Session `Wxmaxima` 4.8 – A^n : en diagonalisant

(%i1) `A : matrix([8,-8,2],[4,-3,2],[-3,4,1]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} 8 & -8 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) `eigenvectors(A);`

(%o2) $[[[1,2,3],[1,1,1]],[[[1,\frac{3}{4},-\frac{1}{2}]],[[1,\frac{2}{3},-\frac{1}{3}]],[[1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]]]]$

(%i3) `P : transpose(matrix([1,3/4,-1/2],[1,2/3,-1/3],[1,1/2,-1/2]));`

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(%i4) `invert(P).A.P;`

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(%i5) `P.diag_matrix(1,2^n,3^n).invert(P);`

(%o5) $\begin{bmatrix} 2\,3^n+3\,2^n-4 & 4-4\,3^n & 3\,2^{n+1}-2\,3^n-4 \\ 2^{n+1}+3^n-3 & 3-2\,3^n & 2^{n+2}-3^n-3 \\ -3^n-2^n+2 & 2\,3^n-2 & -2^{n+1}+3^n+2 \end{bmatrix}$

Session `Python` 4.8 – A^n : en diagonalisant

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```python
A = Matrix(3, 3,
           [8, -8, 2, 4, -3, 2, -3, 4, 1])
P, D = A.diagonalize()
D
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

In[3]

```
P*diag(1, 2**n, 3**n)*P**(-1)
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} 3\times 2^n+2\times 3^n-4 & 4-4\times 3^n & 6\times 2^n-2\times 3^n-4 \\ 2\times 2^n+3^n-3 & 3-2\times 3^n & 4\times 2^n-3^n-3 \\ -2^n-3^n+2 & 2\times 3^n-2 & -2\times 2^n+3^n+2 \end{bmatrix}$$

Exemple 4.9

Dans le cas où A est trigonalisable (ce qu'on peut toujours supposer en se plaçant dans $\mathbb{C}$), on se contente de trigonaliser la matrice et on résout le système triangulaire associé :

$$Y_{n+1} = T \centerdot Y_n,$$

ce qui est facile car il est triangulaire. Il n'est alors pas utile de calculer la matrice inverse de la matrice de passage, car on a seulement $X_n = P \centerdot Y_n$.
Considérons par exemple :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

et trigonalisons-la avec `Wxmaxima`.

Session `Wxmaxima` 4.9 – A^n : en trigonalisant

```
(%i1) A : matrix([-1,-4,-10],[-2,-1,-7],[1,2,6]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

```
(%i2) eigenvectors(A);
```

(%o2) $[[[2,1],[1,2]],[[[1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]],[[1,\frac{3}{4},-\frac{1}{2}]]]]$

```
(%i3) P : transpose(matrix([1,1/2,-1/2],[1,3/4,-1/2],[1,0,0]));
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i4) T : invert(P).A.P;
```

(%o4) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Il est rappelé que sans machine on essaye de *ne pas calculer* P^{-1} *!*

```
(%i5) Y[n] : matrix([a[n]],[b[n]],[c[n]]);
```

(%o5) $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$

```
(%i6) ratsimp(subst([n=n+1],Y[n])-T.Y[n]);
```

(%o6) $\begin{bmatrix} a_{n+1} - 2\,c_n - 2\,a_n \\ b_{n+1} + 4\,c_n - b_n \\ c_{n+1} - c_n \end{bmatrix}$

```
(%i7) load(solve_rec)$
(%i8) solve_rec(%o6[3,1],c[n],c[0]=y[3]);
```

(%o8) $c_n = y_3$

```
(%i9) solve_rec(subst([%],%o6[2,1]),b[n],b[0]=y[2]);
```

(%o9) $b_n = y_2 - 4\,y_3\,n$

```
(%i10) solve_rec(subst([%,%o8],%o6[1,1]),a[n],a[0]=y[1]);
```

(%o10) $a_n = y_3\,2^{n+1} + y_1\,2^n - 2\,y_3$

```
(%i11) subst([%,%o9,%o8],Y[n]);
```

(%o11) $\begin{bmatrix} y_3\,2^{n+1} + y_1\,2^n - 2\,y_3 \\ y_2 - 4\,y_3\,n \\ y_3 \end{bmatrix}$

```
(%i12) coefmatrix(list_matrix_entries(%),[y[1],y[2],y[3]]);
```

(%o12) $\begin{bmatrix} 2^n & 0 & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 & -4\,n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i13) ratsimp(P.%.invert(P));
```

(%o13) $\begin{bmatrix} 2^{n+1} - 4\,n - 1 & 4 - 2^{n+2} & -2^{n+1} - 8\,n + 2 \\ 2^n - 3\,n - 1 & 3 - 2^{n+1} & -2^n - 6\,n + 1 \\ -2^n + 2\,n + 1 & 2^{n+1} - 2 & 2^n + 4\,n \end{bmatrix}$

```
(%i14) %,n=1;
```

(%o14) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Session `Python` 4.9 – A^n : en trigonalisant

Traduction du `Wxmaxima`.

In [8]

```
A
```

Out [8]

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

In [9]

```
A.eigenvects()
```

Out[9]

$$\left[\left(1,\ 2,\ \left[\begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right),\ \left(2,\ 1,\ \left[\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right) \right]$$

In[10]

```
P = Matrix([_[0][2][0],
            _[1][2][0],
            Matrix([1, 0, 0])]
           ).reshape(3, 3).transpose()
```

In[11]

```
T = P**(-1)*A*P
T
```

Out[11]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In[12]

```
alpha, beta, gamma = symbols(
    '\\alpha \\beta \\gamma',
    cls=Function)
```

In[13]

```
Y0 = Matrix([x, y, z])


def Y(n):
    return(Matrix([alpha(n),
                   beta(n),
                   gamma(n)]))
```

In[14]

```
Y(n+1)-T*Y(n)
```

Out[14]

$$\begin{bmatrix} -\alpha(n) + \alpha(n+1) - 2\gamma(n) \\ -2\beta(n) + \beta(n+1) + \gamma(n) \\ -\gamma(n) + \gamma(n+1) \end{bmatrix}$$

In[15]

```
res = _
rsolve(res[2, 0],
       gamma(n),
       {gamma(0): Y0[2]})
```

Out[15]

$$z$$

In[16]

```
rsolve(res[1, 0].subs({gamma(n): _}),
       beta(n),
       {beta(0): Y0[1]})
```

Out[16]

$$2^{n}\left(y - z\right) + z$$

In[17]

```
rsolve(res[0, 0].subs({gamma(n): __,
                       beta(n): _}),
       alpha(n),
       {alpha(0): Y0[0]})
```

Out[17]

$$\frac{x}{2z+1} + 2z\left(n + \frac{x}{2z+1}\right)$$

In[18]

```
(Y(n)).subs({alpha(n): _,
             beta(n): __,
             gamma(n): ___})
```

Out[18]

$$\left[\begin{matrix}\frac{x}{2z+1} + 2z\left(n + \frac{x}{2z+1}\right)\\2^{n}\left(y - z\right) + z\\z\end{matrix}\right]$$

In[19]

```
Tn = Matrix([_.subs({x: 1, y: 0, z: 0}),
             _.subs({x: 0, y: 1, z: 0}),
```

```
                _.subs({x: 0, y: 0, z: 1})]
            ).reshape(3, 3).transpose()
```

In[20]

```
Tn
```

Out[20]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 2^n & 1-2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In[21]

```
P*Tn*P**(-1)
```

Out[21]

$$\begin{bmatrix} 2\times 2^n - 4n - 1 & 4 - 4\times 2^n & -2\times 2^n - 8n + 2 \\ 2^n - 3n - 1 & 3 - 2\times 2^n & -2^n - 6n + 1 \\ -2^n + 2n + 1 & 2\times 2^n - 2 & 2^n + 4n \end{bmatrix}$$

In[22]

```
_.subs({n: 1})  # Petite vérification !
```

Out[22]

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Remarque 4.15

Lorsque l'on part d'une suite récurrente multiple (les coefficients étant constants), on peut vectorialiser et la considérer comme un système récurrent. La recherche des racines de l'équation caractéristique correspond au calcul du polynôme caractéristique de la matrice du système associé. La forme générale des solutions s'en déduit (parfois difficilement).
Par exemple, on peut transformer :

$$u_{n+3} - 6\,u_{n+2} + 11\,u_{n+1} - 6\,u_n = 0$$

en :

$$X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix} \text{ et } X_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix} . X_n$$

Exercice(s) 4.3

4.3.1 Résoudre le système récurrent :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2\,u_n + 4\,v_n + 8\,w_n \\ v_{n+1} &= -2\,u_n - 5\,v_n - 11\,w_n \\ w_{n+1} &= 2\,u_n + 3\,v_n + 5\,w_n + n \end{aligned}$$

4.3.2 Calculer les puissances de A, où

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & -1 & 11 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

4.3.3 Soit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

(a) A est-elle diagonalisable ?

(b) Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

4.3.4 Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$ lorsque :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -5 & -6 \\ 5 & 7 & 5 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ -2 & -6 & -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

4.3.5 Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

(a) A est-elle diagonalisable ?

(b) Démontrer que A est semblable à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

4.6.2 Systèmes linéaires différentiels à coefficients constants

Définition 4.7 – Système linéaire différentiel à coefficients constants

On appelle *système linéaire différentiel à coefficients constants* tout système d'équations différentielles qui peut se mettre sous la forme :

$$X'(t) = A\centerdot X(t) + B(t),\ \text{ où } A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}),\ B \in \mathscr{C}^0(I, \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})) \text{ et } X_0 \in \mathrm{M}_{p,1}$$

avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et où $X_0 = X(t_0)$ est la condition initiale à l'instant $t_0 \in I$.

Remarque 4.16

La résolution passe par :

1. La résolution du système homogène associé :

$$X'(t) = A \centerdot X(t)$$

2. La recherche d'une solution particulière (par exemple par la méthode de variation de la constante).

Remarque 4.17

Lorsque l'on part d'une équation différentielle linéaire d'ordre p, à coefficients constants de la forme :

$$y^{(p)} + a_1\, y^{(p-1)} + \cdots + a_p\, y = b(t)$$

on peut la vectorialiser, pour se ramener à un système en posant

$$X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(p-1)}(t) \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$$

Par exemple, on peut transformer :

$$\theta''(t) + \theta(t) = 0$$

en

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \centerdot X(t), \quad X(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{bmatrix}$$

Exemple 4.10

Le cas où la matrice A est diagonalisable est facile car si $A = P \centerdot D \centerdot P^{-1}$ avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, alors $X'(t) = A \centerdot X(t) = P \centerdot D \centerdot P^{-1} \centerdot X(t)$ donc :

$$P^{-1} \centerdot X'(t) = D \centerdot P^{-1} \centerdot X(t)$$

En posant $Y(t) = P^{-1} \centerdot X(t)$, on est ramené au système différentiel :

$$Y'(t) = D \centerdot Y(t)$$

qui est un système diagonal. En notant y_i les composantes de Y, on a donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ y_i'(t) = \lambda_i\, y_i(t)$$

donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \exists c_i \in \mathbb{K},\ y_i(t) = c_i\, \exp(\lambda_i\, t)$$

On calcule alors $X(t) = P \centerdot Y(t)$. En particulier, on a jamais besoin de calculer l'inverse de P.
Par exemple, en reprenant le système de la remarque précédente (obtenu à partir de $\theta''(t) + \theta(t) = 0$), on a

$$X'(t) = A \centerdot X(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il n'est pas difficile de démontrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, ses valeurs propres sont $\pm i$ et

$$A = P \centerdot \mathrm{Diag}(i, -i) \centerdot P^{-1}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

En posant $Y = P^{-1} \mathbin{.} X$, on a le système

$$\begin{cases} y_1'(t) = i\, y_1(t) \\ y_2'(t) = -i\, y_2(t) \end{cases}$$

donc il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 \, \exp(i\, t) \\ y_2(t) = c_2 \, \exp(-i\, t) \end{cases}$$

d'où

$$X(t) = P \mathbin{.} Y(t) = \begin{bmatrix} c_1 \, \exp(i\, t) + c_2 \, \exp(-i\, t) \\ i\, c_1 \, \exp(i\, t) - i\, c_2 \, \exp(-i\, t) \end{bmatrix}$$

Si on ajoute la condition initiale

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(qui correspond à $\theta(0) = 1$ et $\theta'(0) = 0$), on trouve $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ donc en particulier :

$$\theta(t) = \frac{\exp(i\, t) + \exp(-i\, t)}{2} = \cos(t)$$

On retrouve donc la solution bien connue de $\theta''(t) + \theta(t) = 0$, $\theta(0) = 1$ et $\theta'(0) = 0$.

Exemple 4.11

Dans le cas général, on trigonalise A (ce qui est toujours possible en se plaçant dans $\mathbb{C}$) par $A = P \mathbin{.} T \mathbin{.} P^{-1}$ où T est une matrice triangulaire supérieure. On est donc ramené (par la même démarche qu'à l'exemple précédent en posant $Y(t) = P^{-1} \mathbin{.} X(t)$) à un système de la forme

$$Y'(t) = T \mathbin{.} Y(t)$$

où T est une matrice triangulaire supérieure que l'on peut résoudre facilement et on revient à X grâce à la relation $X(t) = P \mathbin{.} Y(t)$.

Session `Wxmaxima` 4.10

(%i1) `load(diag)$`

(%i2) `A : matrix([-1,-4,-10],[-2,-1,-7],[1,2,6]);`

$$(\%o2) \quad \begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(%i3) `eigenvectors(A);`

$$(\%o3) \quad [[[2,1],[1,2]],[[[1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]],[[1,\frac{3}{4},-\frac{1}{2}]]]]$$

(%i4) `P : transpose(matrix([1,1/2,-1/2],[1,3/4,-1/2],[1,0,0]));`

$$(\%o4) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

(%i5) `T : invert(P).A.P;`

$$(\%o5) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i6) `Y(t) := matrix([a(t)],[b(t)],[c(t)]);`

$$(\%o6)\quad \mathrm{Y}(t) := \begin{bmatrix} \mathrm{a}(t) \\ \mathrm{b}(t) \\ \mathrm{c}(t) \end{bmatrix}$$

(%i7) `diff(Y(t),t);`

$$(\%o7)\quad \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\,\mathrm{a}(t) \\ \frac{d}{dt}\,\mathrm{b}(t) \\ \frac{d}{dt}\,\mathrm{c}(t) \end{bmatrix}$$

(%i8) `syst : ratsimp(%o7-T.Y(t));`

$$(\%o8)\quad \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\,\mathrm{a}(t) - 2\,\mathrm{c}(t) - 2\,\mathrm{a}(t) \\ \frac{d}{dt}\,\mathrm{b}(t) + 4\,\mathrm{c}(t) - \mathrm{b}(t) \\ \frac{d}{dt}\,\mathrm{c}(t) - \mathrm{c}(t) \end{bmatrix}$$

(%i9) `ode2(syst[3,1],c(t),t);`

$$(\%o9)\quad \mathrm{c}(t) = \%c\,e^{t}$$

(%i10) `subst([%c=c0],%);`

$$(\%o10)\quad \mathrm{c}(t) = c0\,e^{t}$$

(%i11) `ode2(subst([%],syst[2,1]),b(t),t);`

$$(\%o11)\quad \mathrm{b}(t) = (\%c - 4\,c0\,t)\;e^{t}$$

(%i12) `subst([%c=b0],%);`

$$(\%o12)\quad \mathrm{b}(t) = (b0 - 4\,c0\,t)\;e^{t}$$

(%i13) `ode2(subst([%,%o10],syst[1,1]),a(t),t);`

$$(\%o13)\quad \mathrm{a}(t) = \left(\%c - 2\,c0\,e^{-t}\right)\;e^{2\,t}$$

(%i14) `subst([%c=a0+2*c0],%);`

$$(\%o14)\quad \mathrm{a}(t) = \left(-2\,c0\,e^{-t} + 2\,c0 + a0\right)\;e^{2\,t}$$

(%i15) `ratsimp(subst([%o10,%o12,%o14],Y(t)));`

$$(\%o15)\quad \begin{bmatrix} (2\,c0 + a0)\;e^{2\,t} - 2\,c0\,e^{t} \\ (b0 - 4\,c0\,t)\;e^{t} \\ c0\,e^{t} \end{bmatrix}$$

(%i16) `coefmatrix(list_matrix_entries(%),[a0,b0,c0]);`

$$(\%o16)\quad \begin{bmatrix} e^{2\,t} & 0 & 2\,e^{2\,t} - 2\,e^{t} \\ 0 & e^{t} & -4\,t\,e^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

(%i17) `P.%.invert(P);`

$$(\%o17)\quad \begin{bmatrix} 2\,e^{2\,t} - 4\,t\,e^{t} - e^{t} & 4\,e^{t} - 4\,e^{2\,t} & 2\,\left(2\,e^{2\,t} - 2\,e^{t}\right) - 6\,e^{2\,t} - 8\,t\,e^{t} + 6\,e^{t} \\ \frac{2\,e^{2\,t} - 2\,e^{t}}{2} - 3\,t\,e^{t} & 3\,e^{t} - 2\,e^{2\,t} & \frac{2\,\left(2\,e^{2\,t} - 2\,e^{t}\right) - 6\,e^{2\,t}}{2} + \frac{3\,\left(4\,e^{t} - 8\,t\,e^{t}\right)}{4} \\ 2\,t\,e^{t} - \frac{2\,e^{2\,t} - 2\,e^{t}}{2} & 2\,e^{2\,t} - 2\,e^{t} & -\frac{2\,\left(2\,e^{2\,t} - 2\,e^{t}\right) - 6\,e^{2\,t}}{2} - \frac{4\,e^{t} - 8\,t\,e^{t}}{2} \end{bmatrix}$$

(%i18)
```
f(x) := exp(t*x)$
ratsimp(%o17-mat_function(f,A));
```

$$(\%o19)\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Session Python 4.10

Traduction du Wxmaxima.

In [7]

```
A.eigenvects()
```

Out [7]

$$\left[\left(1, \ 2, \ \left[\begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right), \ \left(2, \ 1, \ \left[\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right) \right]$$

In [8]

```
C3 = Matrix([1, 0, 0])
P = Matrix([_[0][2][0],
            _[1][2][0],
            C3]).reshape(
    3, 3).transpose()
P
```

Out [8]

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In [9]

```
T = P**(-1)*A*P
```

In [10]

```
eq = diff(Y(t), t)-T*Y(t)
eq
```

Out [10]

$$\begin{bmatrix} -\alpha(t) - 2\gamma(t) + \frac{d}{dt}\alpha(t) \\ -2\beta(t) + \gamma(t) + \frac{d}{dt}\beta(t) \\ -\gamma(t) + \frac{d}{dt}\gamma(t) \end{bmatrix}$$

In [11]

```
dsolve(eq[2, 0],
       gamma(t),
       ics={gamma(0): z})
```

Out[11]

$$\gamma(t) = ze^t$$

In[12]

```
dsolve(eq[1, 0].subs({gamma(t): _.rhs}),
       beta(t),
       ics={beta(0): y})
```

Out[12]

$$\beta(t) = \left(y - z + ze^{-t}\right)e^{2t}$$

In[13]

```
dsolve(eq[0, 0].subs({gamma(t): __.rhs,
                      beta(t): _.rhs}),
       alpha(t), ics={alpha(0): x})
```

Out[13]

$$\alpha(t) = (2tz + x)\,e^t$$

In[14]

```
Yt = Y(t).subs({alpha(t): _.rhs,
                beta(t): __.rhs,
                gamma(t): ___.rhs})
```

In[15]

```
exptT = Matrix([Yt.subs({x: 1, y: 0, z: 0}),
                Yt.subs({x: 0, y: 1, z: 0}),
                Yt.subs({x: 0, y: 0, z: 1})]
              ).reshape(3, 3).transpose()
```

In[16]

```
exptT
```

Out[16]

$$\begin{bmatrix} e^t & 0 & 2te^t \\ 0 & e^{2t} & \left(-1 + e^{-t}\right)e^{2t} \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

In[17]

```
(P*exptT*P**(-1)).applyfunc(ratsimp)
```

Out[17]

$$\begin{bmatrix} -4te^t+2e^{2t}-e^t & -4e^{2t}+4e^t & -8te^t-2e^{2t}+2e^t \\ -3te^t+e^{2t}-e^t & -2e^{2t}+3e^t & -6te^t-e^{2t}+e^t \\ 2te^t-e^{2t}+e^t & 2e^{2t}-2e^t & 4te^t+e^{2t} \end{bmatrix}$$

In[18]

```
(_-f(A)).applyfunc(ratsimp)
```

Out[18]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice(s) 4.4

4.4.1 Résoudre

$$x' = 2\,x + y + 3\,z, \quad y' = 2\,y \text{ et } z' = x$$

4.4.2 Résoudre

$$x' = x + z, \quad y' = 2\,x - y \text{ et } z' = x - y + \frac{1}{2}\,z$$

4.4.3 Résoudre le système différentiel :

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \centerdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

4.4.4 Soit $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ non inversible. Démontrer que les solutions de $X' = A \centerdot X$ sont des courbes planes.

4.4.5 Résoudre le système différentiel

$$x'(t) = 7\,x(t) + 3\,y(t) + t \text{ et } y'(t) = -3\,x(t) - 3\,y(t) + e^t$$

4.4.6 Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que le système

$$x' = a\,x + y \text{ et } y' = -x + y$$

admette au moins une solution non nulle bornée au voisinage de $+\infty$.

4.4.7 Quelle est la nature des courbes intégrales de $X' = A \centerdot X$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} ?$$

4.6.3 Espaces stables

Remarque 4.18

La recherche des espaces stables par un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie en dimension finie repose sur quelques résultats :

1. Si u est diagonalisable et E_1 est un sous-espace vectoriel stable par u, alors :

$$E_1 = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_1 \cap E_u(\lambda)$$

(voir la propriété 4.6, page 203). En particulier, E_1 a une base constituée de vecteurs propres de u.

2. Si u est trigonalisable, alors il admet des espaces stables de toute dimension (donné par le drapeau) et de plus, si E_1 est un sous-espace vectoriel stable par u, alors :

$$E_1 = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_1 \cap F_u(\lambda)$$

3. S'il existe un hyperplan H de E stable par u, alors u admet un vecteur propre.
En effet, soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de H ($n = \dim E$) que l'on complète en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Par projection, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_n) - \lambda.e_n \in H$. Alors pour tout $x \in E$, $u(x) - \lambda.x \in H$ (vrai sur $\mathrm{Vect}(\{e_n\})$ et aussi sur H car il est stable par u) donc $\mathrm{Im}(u - \lambda.\mathrm{id}_e) \subset H$. On a donc $\mathrm{Ker}(u - \lambda.\mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$.

- Ces résultats suffisent en général lorsque l'on est en dimension 3, car il n'y a que les droites dirigées par un vecteur propre et les hyperplans qui peuvent être stables (avec en plus, bien évidemment, $\{0_E\}$ et E).

Exemple 4.12

Soit la matrice [a] :

$$\begin{bmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{bmatrix}, \quad j = \exp\left(\frac{2\,i\,\pi}{3}\right)$$

Session `Wxmaxima` 4.11 – Une matrice symétrique *non* diagonalisable

```
(%i1) j : exp(2*%i*%pi/3)$
(%i2) A : matrix([1,j,j^2],[j,j^2,1],[j^2,1,j]);
```

(%o2) $$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}\,i}{2} - \frac{1}{2} & \left(\frac{\sqrt{3}\,i}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \frac{\sqrt{3}\,i}{2} - \frac{1}{2} & \left(\frac{\sqrt{3}\,i}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 & 1 \\ \left(\frac{\sqrt{3}\,i}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 & 1 & \frac{\sqrt{3}\,i}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
(%i3) eigenvectors(A);
```

(%o3) $$[[[0], [3]], [[[1, 0, \frac{1 - \sqrt{3}\,i}{2}], [0, 1, \frac{\sqrt{3}\,i + 1}{2}]]]]$$

Session `Python` 4.11 – Une matrice symétrique *non* diagonalisable

Traduction du `Wxmaxima`.

In [2]

```
J = exp(2*I*pi/3)
```

In [3]

```
A = Matrix(3, 3,
           [1, J, J**2, J, J**2,
            1, J**2, 1, J])
A
```

Out [3]

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{\frac{2i\pi}{3}} & e^{-\frac{2i\pi}{3}} \\ e^{\frac{2i\pi}{3}} & e^{-\frac{2i\pi}{3}} & 1 \\ e^{-\frac{2i\pi}{3}} & 1 & e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{bmatrix}$$

In [4]

```
A.eigenvects()
```

Out [4]

$$\left[\left(0,\ 2,\ \left[\begin{bmatrix} -e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -e^{-\frac{2i\pi}{3}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right]\right), \left(1 - \sqrt[3]{-1} + (-1)^{\frac{2}{3}},\ 1,\ \left[\begin{bmatrix} (-1)^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{2i\pi}{3}} + e^{-\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{2i\pi}{3}} - \sqrt[3]{-1} e^{-\frac{2i\pi}{3}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -e^{-\frac{2i\pi}{3}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right]\right)\right]$$

Voilà qui est faux !!! On a deux fois le même vecteur propre !

In [5]

```
X = Symbol('X',
           real=True)
det(A-X*eye(3)).factor()
```

Out [5]

$$-X^2 \left(Xe^{\frac{2i\pi}{3}} - 1 - e^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right) e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

In [6]

```
re(_)
```

Out [6]

$$-X^3$$

In [7]

```
im(__)
```

Out [7]

0

Remarque 4.19

Le polynôme caractéristique est bien $-X^3$.

Les espaces stables sont :

$$\begin{aligned}
&\text{(dimension 0)} && \{0_{3,1}\},\\
&\text{(dimension 1)} && \left\{ \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ -j\,x - j^2\,y \end{bmatrix}\right),\quad (x,y)\in\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\} \right\},\\
&\text{(dimension 2)} && \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ a\times x + b\,y + c\,z = 0 \right\},\ (a,b,c)\in\mathbb{C}^3\setminus\{(0,0,0)\},\ a + j\,b + j^2\,c = 0 \right\},\\
&\text{(dimension 3)} && \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{C}).
\end{aligned}$$

a. On remarquera que la matrice est symétrique et non diagonalisable, seules les matrices symétriques *réelles* sont automatiquement diagonalisables.

Exercice(s) 4.5

4.5.1 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Démontrer que u laisse un plan stable.

4.5.2 Soit $E = \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note T_σ l'application de E dans E définie par

$$T_\sigma((x_1,\dots,x_n)) = (x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}).$$

Démontrer que T_σ est dans $\mathscr{GL}(E)$. Trouver les sous-espaces vectoriels F de E tels que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $T_\sigma(F) \subset F$.

4.5.3 Trouver tous les sous-espaces stables de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_5(\mathbb{C})$$

4.5.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Démontrer que les sous espaces stables par f sont les $\operatorname{Ker}(f^k)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.

4.5.5 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Démontrer que si u n'admet qu'un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables alors chaque sous-espace propre est de dimension 1.

(b) Quels sont les sous-espaces vectoriels stables par u si $u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$?

(c) Démontrer la réciproque de la question (a).

4.5.6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que u est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé et que tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable.

4.5.7 On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ qui sont stables par f.

Chapitre 5

Compléments sur la réduction des endomorphismes

5.1 Polynômes d'endomorphisme

5.1.1 Polynômes d'endomorphisme et polynômes annulateurs

Définition 5.1 – Polynôme d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit

$$P = \sum_{k=0}^{\deg P} a_k\, X^k \in \mathbb{K}[X]$$

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on définit alors l'endomorphisme $P(u) \in \mathscr{L}(E)$ par [a] :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{\deg P} a_k . u^k \in \mathscr{L}(E)$$

On dit que $P(u)$ est un *polynôme d'endomorphisme en* u. On note :

$$\mathbb{K}[u] = \big\{ P(u),\ P \in \mathbb{K}[X] \big\} \text{ l'ensemble des polynômes en } u$$

a. On a $u^0 = \mathrm{id}_E$ et $u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$ si $k \geq 1$.

Remarque 5.1

— On définit de même la notion de *polynôme de matrice* :

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k . A^k \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$$

Attention, il faut que la matrice soit carrée. Si $\mathscr{E}$ est une base de E (en dimension finie), alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}\,\big(P(u)\big) = P\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)\big)$$

— Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$:

$$\begin{cases} (\lambda.P + \mu.Q)(u) = \lambda.P(u) + \mu.Q(u) \\ (P\,Q)(u) = P(u) \circ Q(u) \\ (1_{\mathbb{K}[X]})(u) = \mathrm{id}_E \end{cases}$$

⚠ $P(u+v) \neq P(u)+P(v)$ en général !

— En particulier, $\mathbb{K}[u]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ et $(0_{\mathbb{K}[X]})(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. De plus, $P(u)$ et $Q(u)$ commutent car :

$$P(u) \circ Q(u) = (P\,Q)(u) = (Q\,P)(u) = Q(u) \circ P(u)$$

Définition 5.2 – Polynôme annulateur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que P est un *polynôme annulateur de u* si

$$P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

Propriété 5.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u. Alors :

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ P(\lambda) = 0}$$

Autrement dit, les valeurs propres de λ sont racines de tout polynôme annulateur de P.

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et soit x un vecteur propre associé : $u(x) = \lambda.x$. Alors :

$$P(u)(x) = \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{\deg P} a_k\, X^k}_{=P}\Big)(u)(x) = \Big(\sum_{k=0}^{\deg P} a_k.u^k\Big)(x) = \sum_{k=0}^{\deg P} a_k.u^k(x) = \sum_{k=0}^{\deg P} a_k\,\lambda^k.x = P(\lambda).x$$

(ce calcul est valable même quand P n'est pas annulateur de u). Puisque P est annulateur de u, on a $P(u)(x) = 0_E = P(\lambda).x$. Mais $x \neq 0_E$ (c'est un vecteur propre) donc $P(\lambda) = 0$.

Remarque 5.2

Attention, la réciproque est fausse : $X\,(X-1)$ est un polynôme annulateur de id_E mais $0 \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{id}_E) = \{1\}$. Ainsi, connaître les racines d'un polynôme annulateur de u ne donne que des candidats *potentiels* pour les valeurs propres de u.

5.1.2 Le lemme des noyaux

Théorème 5.1 – dit lemme des noyaux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Si $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ sont premiers deux à deux, alors :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,\big[(P\,Q)(u)\big] = \mathrm{Ker}\,P(u) \oplus \mathrm{Ker}\,Q(u)}$$

premiers deux à deux 表示互质。

Démonstration

Puisque P et Q sont premiers deux à deux, il existe $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que (identité de Bézout) :

$$U\,P + V\,Q = 1$$

— Soit $x \in \operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u)$. D'après l'identité de Bézout :

$$U(u)\big(\underbrace{P(u)(x)}_{=0_E}\big) + V(u)\big(\underbrace{Q(u)(x)}_{=0_E}\big) = x$$

donc $x = 0_E$. On en déduit que $\operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u) = \{0_E\}$.

— Soit $x \in \operatorname{Ker}\big[(P\,Q)(u)\big]$. D'après l'identité de Bézout :

$$x = \underbrace{(U\,P)(u)(x)}_{x_1} + \underbrace{(V\,Q)(u)(x)}_{=x_2}$$

Les polynômes en u commutent donc :

$$Q(u)(x_1) = \big[Q(u) \circ (U\,P)(u)\big](x) = (Q\,U\,P)(u)(x) = (U\,P\,Q)(u)(x) = U(u)\big(\underbrace{(P\,Q)(u)(x)}_{=0_E}\big) = 0_E$$

donc $x_1 \in \operatorname{Ker} Q(u)$. De même, $x_2 \in \operatorname{Ker} P(u)$ donc

$$\operatorname{Ker}\big[(P\,Q)(u)\big] = \operatorname{Ker} P(u) + \operatorname{Ker} Q(u)$$

On en déduit le résultat.

Remarque 5.3

Ce résultat se généralise par récurrence : si $P = P_1 \cdots P_k \in \mathbb{K}[X]$ avec $P_1, \dots, P_k$ des polynômes premiers deux à deux, alors :

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} P_i(u)$$

Théorème 5.2 – Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *u est diagonalisable ;*
2. *il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples*[a].

a. C'est-à-dire $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de la forme $P = a\,(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_k)$ où $a \in \mathbb{K}^*$ et les $\alpha_j \in \mathbb{K}$ sont tous différents.

我们通常用此定理来判断自同态是否可对角化。

Démonstration

— Supposons u soit diagonalisable et notons $\operatorname{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Soit

$$P = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)$$

Le polynôme P est scindé à racines simples. Les polynômes $X - \lambda_i$, $i \in [\![1, k]\!]$ sont premiers deux à deux donc d'après le lemme des noyaux :

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}\big((X - \lambda_i)(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i.\operatorname{id}_E) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_u(\lambda_i) = E$$

car u est diagonalisable. On a donc $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, c'est-à-dire que P est un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

— Supposons qu'il existe un polynôme P annulateur de u scindé à racines simples. Écrivons-le sous la forme

$$P = a \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)$$

avec $a \in \mathbb{K}$ et les $\lambda_i \in \mathbb{K}[X]$ tous différents. Les polynômes $X - \lambda_i$, $i \in [\![1, k]\!]$ sont premiers deux à deux donc d'après le lemme des noyaux :

$$E = \operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i.\operatorname{id}_E)$$

Soit

$$I = \{i \in [\![1, k]\!]\,,\ \operatorname{Ker}(u - \lambda_i . \operatorname{id}_E) \neq \{0_E\}\}$$

Alors $I \neq \emptyset$ (car $E \neq \{0_E\}$). Pour tout $i \in I$, λ_i est une valeur propre de u donc :

$$E = \bigoplus_{i \in I} E_u(\lambda_i)$$

donc u est diagonalisable.

Remarque 5.4

Si $F \neq \{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par u et si u est diagonalisable, alors $u\big|_F^F$ est diagonalisable, car tout polynôme scindé à racines simples qui est annulateur de u est aussi annulateur de $u\big|_F^F$. On retrouve ainsi le résultat de la propriété 4.6, page 203 du chapitre 4.

Exemple 5.1

1. Toute matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_n$ est diagonalisable. En particulier, les matrices de symétries sont les seules qui vérifient $A^2 = I_n$.
2. Si une matrice $M \in \mathrm{M}_{2\,n}(\mathbb{K})$ de la forme :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_n & C \end{array}\right], \quad (A, C) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2$$

est diagonalisable, alors A et C sont diagonalisables (la réciproque est fausse).

Démonstration

1. La polynôme $X^p - 1$ est annulateur de A et est scindé, à racines simples dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. De plus, toute symétrie (cas $p = 2$) vérifient par définition $A^2 = I_n$. Réciproquement, si A vérifie $A^2 = I_n$, alors le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de A, scindé, à racines simples (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), donc A est semblable à une matrice diagonale avec des ± 1 sur la diagonale. C'est une symétrie par rapport à $E_A(1)$ parallèlement à $E_A(-1)$.
2. Si M est diagonalisable, il existe un polynôme P non nul, scindé, à racines simples qui annule M. Or

$$P(M) = \left[\begin{array}{c|c} P(A) & * \\ \hline 0_n & P(C) \end{array}\right]$$

donc, $P(A)$ et $P(C)$ sont des matrices nulles, donc A et C sont diagonalisables.
Un contre-exemple simple est $A = C = [0]$ et $B = [1]$.

5.1.3 Polynôme minimal

Définition 5.3 – Idéal annulateur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. L'*idéal annulateur de u* est défini par :

$$\mathscr{I}_u = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}\}$$

Propriété 5.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

1. $\mathscr{I}_u$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$;
2. si E est de dimension finie non nulle, $\mathscr{I}_u \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.

Démonstration

1. On vérifie immédiatement que $\mathscr{I}_u$ est un sous-groupe de $\mathbb{K}[X]$ et qu'il est stable par multiplication par un élément quelconque de $\mathbb{K}[X]$. C'est donc un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
2. Si $\dim E = n \geq 1$, alors $\dim \mathscr{L}(E) = n^2$. La famille $(\mathrm{id}_E, u, u^2, \dots, u^{n^2})$ a n^2+1 éléments, elle est donc liée : il existe $(a_0, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1}$, $(a_0, \dots, a_{n^2}) \neq (0, \dots, 0)$, tel que
$$\sum_{k=0}^{n^2} a_k.u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$$
c'est-à-dire que
$$\sum_{k=0}^{n^2} a_k\, X^k \in \mathscr{I}_u \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$$

Définition 5.4 – Polynôme minimal d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Le *polynôme minimal de u* est l'unique polynôme unitaire de degré ≥ 1 $\pi_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que
$$\boxed{\mathscr{I}_u = \pi_u\, \mathbb{K}[X]}$$
Autrement dit, si $P \in \mathbb{K}[X]$ est annulateur de u, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \pi_u\, Q$.

Remarque 5.5

— L'existence et l'unicité du polynôme minimal sont assurées par le fait que $\mathbb{K}[X]$ est principal et que $\mathscr{I}_u$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ (voir le cours sur les anneaux).
Rappelons quand même l'argument qui repose sur la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. Soit :
$$E = \left\{ \deg P,\ P \in \mathscr{I}_u \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\} \right\} \subset \mathbb{N}$$
Alors E est non vide donc admet un plus petit élément $d \in \mathbb{N}$. On pose $\pi_u \in \mathscr{I}_u \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ unitaire tel que $\deg \pi_u = d$, et $d \neq 0$. Soit $P \in \mathscr{I}_u$. On effectue la division euclidienne de P par π_u :
$$\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X],\ P = Q\,\pi_u + R \text{ et } R = 0 \text{ ou } \deg R < d$$
Or $Q\,\pi_u \in \mathscr{I}_u$ car $\mathscr{I}_u$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ donc $R = P - Q\,\pi_u \in \mathscr{I}_u$. On a nécessairement $R = 0_{\mathbb{K}[X]}$ (sinon cela contredit la définition de d) donc $P = Q\,\pi_u$, autrement dit $\mathscr{I}_u \subset \pi_u\, \mathbb{K}[X]$ (l'autre inclusion est immédiate puisque $\pi_u \in \mathscr{I}_u$ et que $\mathscr{I}_u$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$).

— On définit de même pour une matrice carrée $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ la notion de polynôme annulateur, d'idéal annulateur $\mathscr{I}_A$ et de polynôme minimal π_A. Si $\mathscr{E}$ est une base de E (en dimension finie) et si A est la matrice de u dans la base $\mathscr{E}$, alors :
$$\pi_a = \pi_u$$

Propriété 5.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors :
$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \pi_u(\lambda) = 0}$$
En particulier, le polynôme minimal π_u a les mêmes racines que le polynôme caractéristique χ_u.

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

— Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, alors $\pi_u(\lambda) = 0$ car π_u est annulateur de u (propriété 5.1, page 228).

— Supposons que $\pi_u(\lambda) = 0$. Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\pi_u = (X - \lambda)^k P$$

Comme $\pi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on obtient :

$$0_{\mathscr{L}(E)} = (u - \lambda.\mathrm{id}_E) \circ P(u)$$

On a $P(u) \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ car $\deg P < \deg \pi_u$ (sinon cela contredirait le fait que π_u est le polynôme minimal de u). On en déduit que $u - \lambda.\mathrm{id}_E$ n'est pas injectif, c'est-à-dire que $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

Proposition 5.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

u est diagonalisable si, et seulement si, π_u est scindé à racines simples

Démonstration

— Si π_u est scindé à racines simples, comme π_u est annulateur de u, le théorème 5.2, page 229 démontre que u est diagonalisable.

— Supposons que u soit diagonalisable. Notons $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Alors :

$$P = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i) \in \mathbb{K}[X]$$

est scindé à racines simples et est annulateur de u car il existe une base une base $\mathscr{E}$ de E constituée de vecteurs propres de u donc pour tout $e \in \mathscr{E}$, $P(u)(e) = 0_E$ (car e est associé à une valeur propre λ_i) d'où $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On en déduit que π_u est scindé à racines simples car il divise P qui est lui-même scindé à racines simples.

5.1.4 Théorème de Cayley-Hamilton

Définition 5.5 – Matrice compagnon

Soit P un polynôme unitaire :

$$P = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k + X^p \in \mathbb{K}[X]$$

La *matrice compagnon du polynôme* P est définie par :

$$C(P) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$$

Propriété 5.4

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire. Alors :

$$\boxed{\chi_{C(P)} = (-1)^{\deg P} P}$$

Démonstration

Reprenons les notations de la définition 5.5, page précédente et effectuons l'opération élémentaire :

$$L_1 \longleftarrow L_1 + X.L_2 + \cdots + X^{p-1}.L_p$$

de sorte que (on développe ensuite selon la première ligne et on reconnaît le déterminant d'une matrice triangulaire) :

$$\chi_{C(P)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -P \\ 1 & -X & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} - X \end{vmatrix} = (-1)^p\, P \begin{vmatrix} 1 & -X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^p\, P$$

Théorème 5.3 – Cayley-Hamilton

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors

$$\boxed{\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}}$$

Autrement dit, le polynôme caractéristique χ_u de u est annulateur de u.

Démonstration

Soit $x \in E$, $x \neq 0_E$ (possible car $n = \dim E \geq 1$). Il existe un plus petit entier $p \geq 1$ tel que la famille $(x, u(x), \ldots, u^p(x))$ soit liée, donc la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre. En particulier, il existe $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$u^p(x) + a_{p-1}.u^{p-1}(x) + \cdots + a_1.u(x) + a_0.x = 0_E$$

Posons

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k\, X^k \in \mathbb{K}[X]$$

de sorte que $P(u)(x) = 0_E$. Complétons $\mathscr{E}_1 = (x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ en une base $(E_1, \mathscr{E}_2)$ de E. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)}(u) = \left[\begin{array}{c|c} C(P) & B \\ \hline 0_{n-p+1,p} & C \end{array}\right], \quad B \in \mathrm{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}),\ C \in \mathrm{M}_{n-p}(\mathbb{K})$$

en reconnaissant la matrice compagnon $C(P)$ de P (qui est unitaire). On a alors d'après la propriété 5.4, page ci-contre :

$$\chi_u = \chi_{C(P)}\, \chi_C = (-1)^P\, P\, \chi_C$$

d'où, puisque $P(u)(x) = 0_E$:

$$\chi_u(u)(x) = 0_E$$

Puisque ceci est vrai pour tout $x \in E$ (c'est aussi vrai pour $x = 0_E$), on a $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Remarque 5.6

— Le théorème de Cayley-Hamilton peut se reformuler ainsi : le polynôme minimal π_u divise le polynôme caractéristique χ_u.
En particulier, puisque $\deg \chi_u = \dim E$ et $\pi_u \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, on a :

$$\boxed{1 \leq \deg \pi_u \leq \dim E}$$

De plus :

$$\text{si } \chi_u = (-1)^{\dim E} \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{r_i}, \text{ alors } \pi_u = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{q_i},\ 1 \leq q_i \leq r_i$$

— On peut également démontrer ce théorème sans passer par la notion de matrice compagnon, en le démontrant d'abord dans le cas d'une matrice trigonalisable (en utilisant notamment le fait que dans ce cas son polynôme caractéristique est scindé). Mais on peut toujours s'y ramener en se plaçant dans le corps des racines de $\chi_A = \chi_u$ avec A la matrice de u dans une base de E (dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cela revient à considérer A comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$). On peut également, dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ utiliser un argument topologique (voir la partie suivante).

Théorème 5.4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *u est trigonalisable ;*
2. *il existe un polynôme annulateur de u scindé ;*
3. *π_u est scindé ;*
4. *χ_u est scindé.*

我们通常用此定理来判断自同态是否可三角化，如约化为上三角矩阵。

5.1.5 Retour sur le calcul de puissances de matrices

Remarque 5.7

Lorsqu'on connaît un polynôme annulateur $P \in \mathbb{K}[X]$ d'une matrice $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, pour calculer A^n on peut utiliser la division euclidienne de X^n par P :

$$X^n = P\,Q + R, \quad (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2,\ \deg R < \deg P$$

donc

$$A^n = P(A)\boldsymbol{.}Q(A) + R(A) = R(A)$$

Exemple 5.2

La matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

a pour polynôme annulateur $(X+2)^3$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = (-1)^n\,n\,(n-1)\,2^{n-3}.A^2 + (-1)^n\,n\,(n-2)\,2^{n-1}.A + (-1)^n\,(n-1)\,(n-2)\,2^{n-1}.I_3$$

Session `Wxmaxima` 5.1 – A^n : polynôme annulateur

(%i1) `A : matrix([-3,-3,2],[1,1,-2],[2,4,-4]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

(%i2) `factor(charpoly(A,X));`

(%o2) $-(X+2)^3$

(%i3) `P : X^n - ((X+2)^3*Q+a[n]*X^2+b[n]*X+c[n]);`

(%o3) $X^n - Q\,(X+2)^3 - a_n\,X^2 - b_n\,X - c_n$

(%i4) eq1 : P,X=-2;

(%o4) $-c_n+2\,b_n-4\,a_n+(-2)^n$

(%i5) diff(P,X)$
eq2 : %,X=-2;

(%o6) $-b_n+4\,a_n+n\,(-2)^{n-1}$

(%i7) diff(P,X,2)$
eq3 : %,X=-2;

(%o8) $(n-1)\;n\,(-2)^{n-2}-2\,a_n$

(%i9) solve([eq1,eq2,eq3],[a[n],b[n],c[n]]);

(%o9) $[[a_n=-\left(n^2-n\right)\;(-2)^{n-3},b_n=-\left(n^2-2\,n\right)\;(-2)^{n-1},c_n=-\left(n^2-3\,n+2\right)\;(-2)^{n-1}]]$

(%i10) ratsimp(subst(%[1],a[n]*A^^2+b[n]*A+c[n]*ident(3)));

(%o10) $$\begin{bmatrix}\left(n^2+n+4\right)\;(-2)^{n-2} & \left(n^2+5\,n\right)\;(-2)^{n-2} & -n\,(-2)^n\\ -\left(n^2+n\right)\;(-2)^{n-2} & -\left(n^2+5\,n-4\right)\;(-2)^{n-2} & n\,(-2)^n\\ -\left(n^2+3\,n\right)\;(-2)^{n-2} & -\left(n^2+7\,n\right)\;(-2)^{n-2} & (n+1)\;(-2)^n\end{bmatrix}$$

Session Python 5.1 – A^n : polynôme annulateur

Traduction du Wxmaxima.

In [2]

```
A = Matrix(3, 3,
           [-3, -3, 2, 1, 1,
            -2, 2, 4, -4])
A.charpoly(x)
```

Out [2]

$\operatorname{PurePoly}\left(x^3+6x^2+12x+8, x, domain=\mathbb{Z}\right)$

In [3]

```
_.factor_list()
```

Out [3]

$(1,\ [(\operatorname{PurePoly}(x+2, x, domain=\mathbb{Z}),\ 3)])$

In [4]

```
# Plus simplement
det(X*eye(3)-A).factor()
```

Out [4]

$$(X+2)^3$$

In [5]

```python
Q, X = symbols('Q X')
a = IndexedBase('a')
b = IndexedBase('b')
c = IndexedBase('c')
P = X**n-((X+2)**3*Q+
          a[n]*X**2+b[n]*X+c[n])
```

In [6]

```python
solve([P.subs({X: -2}),
       (diff(P, X)).subs({X: -2}),
       (diff(P, X, 2)).subs({X: -2})],
      [a[n], b[n], c[n]])
```

Out [6]

$$\left\{a_n : \frac{(-2)^n\, n\,(n-1)}{8},\ b_n : \frac{(-2)^n\, n\,(n-2)}{2},\ c_n : (-2)^{n-1}\left(-n^2+3n-2\right)\right\}$$

In [7]

```python
a[n]*A   # Étrange erreur, contournons la difficulté !
```

```
IndexException:
Range is not defined for all indices in: a[n]
```

In [8]

```python
(x*A**2+y*A+z*eye(3)).subs(
    {x: a[n], y: b[n],
     z: c[n]}).subs(_).applyfunc(ratsimp)
```

Out [8]

$$\begin{bmatrix} \frac{(-2)^n n^2}{4} + \frac{(-2)^n n}{4} + (-2)^n & \frac{(-2)^n n^2}{4} + \frac{5(-2)^n n}{4} & -(-2)^n\, n \\ -\frac{(-2)^n n^2}{4} - \frac{(-2)^n n}{4} & -\frac{(-2)^n n^2}{4} - \frac{5(-2)^n n}{4} + (-2)^n & (-2)^n\, n \\ -\frac{(-2)^n n^2}{4} - \frac{3(-2)^n n}{4} & -\frac{(-2)^n n^2}{4} - \frac{7(-2)^n n}{4} & (-2)^n\, n + (-2)^n \end{bmatrix}$$

Exercice(s) 5.1

5.1.1 Pour les matrices suivantes, préciser les polynômes caractéristiques, minimaux, espaces propres et préciser si elles sont diagonalisables (dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$) :

(a) $D_k(\lambda)$ (matrice de dilatation) ;

(b) $T_{k,\ell}(\lambda)$ (matrice de transvection) ;

(c) P_σ (matrice de permutation).

5.1.2 Soit E l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de déterminant égal à 1. Quelle est la structure algébrique de E ? Démontrer que si $A \in E$ vérifie $A^p = I_2$ pour un $p \in \mathbb{N}^*$, alors $A^{12} = I_2$.

5.1.3 Soit $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0_3$ et $A^3 + A = 0_3$. Démontrer que :

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5.1.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $x \in E$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.

(a) Démontrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant :
— $P(f)(x) = 0$;
— $\forall Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(f)(x) = 0 \Rightarrow P \mid Q$.

On note m_x ce polynôme.

(b) Soit m_x et m_y premiers deux à deux, démontrer que $m_{x+y} = m_x\, m_y$.

(c) Démontrer que le polynôme minimal π_f de f vérifie :

i. $\pi_f = \mathrm{PPCM}(m_x,\, x \in E)$.

ii. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors :

$$\pi_f = \mathrm{PPCM}(m_{e_k},\ k \in \{1, \ldots, n\}).$$

iii. Il existe un $x \in E$ tel que $\pi_f = m_x$.

iv. $\chi_f = \pi_f \iff \exists x \in E,\ (x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E

5.1.5 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$u^2 \text{ diagonalisable } \implies u \text{ diagonalisable}$$

Que devient ce résultat lorsque le corps est $\mathbb{R}$?

5.1.6 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3\,A + 2\,I_n = 0_n$. A est-elle diagonalisable ? Calculer A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.

5.2 Topologie sur les endomorphismes

Remarque 5.8

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé [a], on peut munir $\mathscr{L}_\mathrm{c}(E)$ (l'espace des endomorphismes continus de E) de la norme subordonnée $|||\ |||$ donnée par :

$$\forall u \in \mathscr{L}_\mathrm{c}(E),\ |||u||| = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|u(x)\|}{x}$$

On a alors :

$$\forall u \in \mathscr{L}_\mathrm{c}(E),\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq |||u|||\ \|x\|$$

De plus, $|||\ |||$ est une *norme d'algèbre* :

$$\forall (u, v) \in \mathscr{L}_\mathrm{c}(E)^2,\ |||u \circ v||| \leq |||u|||\ |||v|||$$

Si E est de dimension finie, tous les endomorphismes sont continues : $\mathscr{L}_\mathrm{c}(E) = \mathscr{L}(E)$ (c'est faux en dimension infinie). On se placera dans ce cadre dans la suite.

a. Dans cette partie, quand on parle d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$, on se place toujours dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 5.2 – Densité des endomorphismes inversibles et diagonalisables

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie non nulle. Alors :

1. *$\mathscr{GL}(E)$ est un ouvert dense dans $\mathscr{L}(E)$;*
2. *si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'ensemble des endomorphismes de E diagonalisables est dense dans $\mathscr{L}(E)$.*

Démonstration

1. $\mathscr{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E)$ car $\mathscr{GL}(E) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ avec $\det\colon \mathscr{L}(E) \to \mathbb{K}$ continue et $\mathbb{K}^*$ ouvert de $\mathbb{K}$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Son polynôme caractéristique χ_u n'a qu'un nombre fini de racines (car $\deg \chi_u = \dim E \geq 1$) donc il existe $r > 0$ tel que χ_u ne s'annule pas sur $B(0, r) \setminus \{0\}$. Autrement dit, pour tout $\lambda \in B(0, r) \setminus \{0\}$, $u - \lambda.\mathrm{id}_E \in \mathscr{GL}(E)$. Comme $u - \lambda.\mathrm{id}_E \to u$ quand $\lambda \to 0$, u est bien la limite d'une suite d'endomorphismes inversibles, donc $\mathscr{GL}(E)$ est dense dans $\mathscr{L}(E)$.
2. Puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe une base $\mathscr{E}$ dans laquelle $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$ est triangulaire supérieure ($n = \dim E$) :

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Posons :

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si les valeurs propres } \lambda_i \text{ sont toutes égales} \\ \min\{|\lambda_i - \lambda_j|,\ (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j\} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad T_p = T + \mathrm{Diag}\left(\frac{\varepsilon}{p}, \frac{\varepsilon}{2\,p}, \dots, \frac{\varepsilon}{n\,p}\right)$$

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$, T_p est diagonalisable car elle a n valeurs propres distinctes par construction et $T_p \to T$ quand $p \to +\infty$, donc u est bien la limite d'une suite d'endomorphismes diagonalisables de E (les u_p correspondant aux matrices T_p dans la base $\mathscr{E}$ de E).

Remarque 5.9

— Le deuxième résultat est faux sur $\mathbb{R}$, par exemple la matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

n'est pas la limite d'une suite de matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisables. Cependant, la démonstration ci-dessus n'utilise que le fait que u est trigonalisable donc on a démontré que tout endomorphisme trigonalisable est limite d'une suite d'endomorphismes diagonalisables.

— Ces propriétés de densité sont utiles pour démontrer des résultats sur $\mathscr{L}(E)$: on démontre le résultat pour les endomorphismes inversibles ou digonalisables, puis on étend le résultat par densité (voir les exercices 5.2, page 244).

Propriété 5.5

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et $u \in \mathscr{L}_c(E)$. Alors :

$$\text{pour toute valeur propre } \lambda \text{ de } u,\ |\lambda| \leq |\!|\!| u |\!|\!|$$

Démonstration

Si λ est une valeur propre de u, en notant $x \in E \setminus \{0_E\}$ un vecteur propre associé, on a

$$\|u(x)\| \leq |\!|\!| u |\!|\!|\ \|x\|$$

mais

$$\|u(x)\| = \|\lambda.x\| \leq |\lambda|\, \|x\|$$

d'où $|\lambda| \leq |\!|\!| u |\!|\!|$ en divisant par $\|x\| \neq 0_E$.

Définition 5.6 – Rayon spectral

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Le *rayon spectral de* A est défini par :

$$\rho(A) = \max\left\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\right\}$$

Remarque 5.10

D'après la propriété précédente, pour n'importe quelle norme d'algèbre $\|\!|\ \|\!|$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),\ \rho(A) \leq \|\!|A\|\!|$$

Propriété 5.6

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe une norme subordonnée $\|\!|\ \|\!|_{A,\varepsilon}$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\rho(A) \leq \|\!|A\|\!|_{A,\varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon$$

Démonstration

On trigonalise $A = P \centerdot T \centerdot P^{-1}$ avec $T = [t_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On pose :

$$\forall \delta > 0,\ D_\delta = \mathrm{Diag}(1, \delta, \ldots, \delta^{n-1}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Un calcul démontre que :

$$(D_\delta)^{-1} \centerdot T \centerdot D_\delta = \left[\delta^{j-i}\, t_{i,j}\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

donc en particulier :

$$(D_\delta)^{-1} \centerdot T \centerdot D_\delta \underset{\delta\to 0^+}{\longrightarrow} \mathrm{Diag}(t_{1,1}, \ldots, t_{n,n})$$

Posons alors :

$$\forall \delta > 0,\ \forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),\ N_\delta(A) = \|\!|(P \centerdot D_\delta)^{-1} \centerdot M \centerdot (P \centerdot D_\delta)\|\!|_\infty$$

D'après ce qui précède :

$$N_\delta(A) \underset{\delta\to 0^+}{\longrightarrow} \|\!|\mathrm{Diag}(t_{1,1}, \ldots, t_{n,n})\|\!|_\infty = \rho(A)$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, si $\delta > 0$ est assez petit :

$$\|\!|A\|\!|_{A,\varepsilon} \overset{\mathrm{Def}}{=} N_\delta(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$$

Il reste alors à vérifier que $\|\!|\ \|\!|_{A,\varepsilon}$ est une norme subordonnée (ce qui donne alors l'inégalité $\|\!|A\|\!|_{A,\varepsilon} \geq \rho(A)$ d'après la remarque 5.10, de la présente page).
Pour cela, on démontre que $X \mapsto \|(P \centerdot D_\delta)^{-1} \centerdot X\|_\infty$ est une norme sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et que N_δ est sa norme subordonnée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (en exercice).

Remarque 5.11

Dans beaucoup d'applications, on s'intéresse à des suites récurrentes de la forme :

$$U_{k+1} = A \centerdot U_k, \quad U_k \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$$

par exemple pour résoudre de manière approchée des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles.
Il est souvent crucial que la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bornée (par exemple pour garantir la stabilité du schéma numérique considéré). Comme :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ U_k = A^k \centerdot U_0$$

il faut que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit borné. La propriété précédente implique que :

$$\boxed{(A^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est bornée, alors } \rho(A) \leq 1 \text{ et si } \rho(A) < 1 \text{ alors } (A^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}}$$

Ainsi, le calcul du rayon spectral de A (souvent calculé de manière approchée dans les applications) nous permet de démontrer la stabilité d'une méthode numérique.

Propriété 5.7

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et soit $\sum_k a_k\, z^k$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que $|||u||| < R$, la série $\sum_k a_n\, u^k$ est convergente et sa somme définit un endomorphisme de E. De plus, l'application

$$u \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.u^k$$

est continue sur $\{u \in \mathscr{L}(E),\ |||u||| < R\}$.

Démonstration

La série converge absolument car, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|||a_k.u^k||| \leq |a_k|\ |||u|||^k$ et que $\sum_k |a_k|\ |||u|||^k$ converge (on est dans le disque de convergence $D(0, R)$). Puisque $\mathscr{L}(E)$ est fermé (car de dimension finie), la somme définit bien un élément de $\mathscr{L}(E)$.
L'argument ci-dessus démontre que la convergence de $\sum_k a_k.u^k$ est normale sur tous les disques $\{u \in \mathscr{L}(E),\ |||u||| < r\}$ avec $r \in [0, R[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u \mapsto a_k.u^k$ est continue, donc $u \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.u^k$ est continu sur $\{u \in \mathscr{L}(E),\ |||u||| < r\}$ pour tout $r \in [0, R[$, donc sur $\{u \in \mathscr{L}(E),\ |||u||| < R\}$.

Remarque 5.12

- On peut ainsi parler d'exponentielle, de sinus, de logarithmes, etc. d'endomorphismes ou de matrices.
- $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.u^k$ est un polynôme en u car c'est la limite de la suite des sommes partielles qui sont des polynômes en u et $\mathbb{K}[u]$ est fermé car de dimension finie. En particulier, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.u^k$ commute avec u.

Exemple 5.3

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $|||u||| < 1$. Alors $\mathrm{id}_E - u$ est inversible et

$$(\mathrm{id}_E - u)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k$$

En effet, cette somme existe d'après la propriété ci-dessus et :

$$(\mathrm{id}_E - u) \circ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u^k\right) \circ u = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k - \sum_{k=1}^{+\infty} u^k = \mathrm{id}_E$$

et de même :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u^k\right) \circ (\mathrm{id}_E - u) = \mathrm{id}_E$$

Définition 5.7 – Exponentielle d'un endomorphisme

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. L'*exponentielle de u* est défini par :

$$\exp(u) = e^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}.u^k$$

Propriété 5.8

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et soit $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$. Alors :

1. $\exp(0_{\mathscr{L}(E)}) = \mathrm{id}_E$;

2. $\|\exp(u)\| \leq \exp(\|u\|)$;
3. pour tout $p \in \mathscr{GL}(E)$, $\exp(p^{-1} \circ u \circ p) = p^{-1} \circ \exp(u) \circ p$ (en particulier, deux matrices semblables ont des exponentielles semblables) ;
4. si $u \circ v = v \circ u$, alors $\exp(u+v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u)$;
5. $\exp(u) \in \mathscr{GL}(E)$ et $\exp(u)^{-1} = \exp(-u)$;
6. pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, $\exp(\mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \mathrm{Diag}(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n})$

Démonstration

1. Immédiat à partir de la définition.
2. Puisque $\|\|$ est une norme d'algèbre :
$$\|\exp(u)\| = \left\| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}.u^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|u\|^k = \exp(\|u\|)$$
3. C'est un produit de Cauchy. Soit $N \in \mathbb{N}$, posons :
$$\Delta_N = \Big(\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!}.u^i \Big) \circ \Big(\sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!}.v^j \Big) - \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}.(u+v)^k \Big)$$
Comme u et v commutent :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k!}.(u+v)^k = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} \frac{1}{k!}.u^i \circ v^j = \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!}.u^i \circ \frac{1}{j!}.v^j$$
d'où :
$$\Delta_N = \Big(\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!}.u^i \Big) \circ \Big(\sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!}.v^j \Big) - \sum_{i+j \leq k} \frac{1}{i!}.u^i \circ \frac{1}{j!}.v^j = \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq j \\ n+1 \leq i+j \leq 2n}} \frac{1}{i!}.u^i \circ \frac{1}{j!}.v^j$$
donc :
$$\begin{aligned} \|\Delta_N\| &\leq \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq j \\ n+1 \leq i+j \leq 2n}} \frac{1}{i!}. \|u\|^i \circ \frac{1}{j!}. \|v\|^j \\ &\leq \Big(\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!}. \|u\|^i \Big) \circ \Big(\sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!}. \|v\|^j \Big) - \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}.(\|u\| + \|v\|)^k \Big) \\ &\underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \exp(\|u\|) \exp(\|v\|) - \exp(\|u\| + \|v\|) = 0 \end{aligned}$$
d'où le résultat puisque $\Delta_N \to \exp(u) \circ \exp(v) - \exp(u+v)$ quand $N \to +\infty$.
4. D'après ce qui précède, comme u et $-u$ commutent :
$$\exp(u) \circ \exp(-u) = \exp(u-u) = \exp(0_{\mathscr{L}(E)}) = \mathrm{id}_E = \exp(-u) \circ \exp(u)$$
d'où le résultat.
5. On a :
$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}. \mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^k = \mathrm{Diag} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{N} \frac{\alpha_n^k}{k!} \right)$$
d'où le résultat en passant à la limite $N \to +\infty$.

Remarque 5.13

L'exponentielle de matrices sert notamment pour étudier les systèmes linéaires différentiels à coefficients constants (voir le chapitre 4) :
$$X'(t) = A \centerdot X(t) + B(t),\ \text{où } A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathscr{C}^0(I, \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K}))$$
La solution vérifiant la condition initiale $X(t_0) = X_0$ est donnée par :
$$X(t) = \exp(t.A) \centerdot \left(\exp(-t_0.A) \centerdot X_0 + \int_{t_0}^{t} \exp(-s.A) \centerdot B(s)\ \mathrm{d}s \right)$$
Nous sommes donc ramenés au calcul de $\exp(t.A)$

Pour calculer $\exp(t.A)$ on peut :

1. Calculer A^n puis sommer la série $\sum_n t^n/n!.A^n$ (c'est rarement une méthode efficace).
2. Si la matrice A est diagonalisable : $A = P \centerdot \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \centerdot P^{-1}$, on a :

$$\exp(t.A) = P \centerdot \mathrm{Diag}(e^{t\,\lambda_1}, \ldots, e^{t\,\lambda_p}) \centerdot P^{-1}$$

   (voir le code ci-dessous).
3. Dans le cas général, on peut utiliser la décomposition de Dunford (voir la partie suivante).

► Cependant, si la matrice n'est pas diagonalisable, il est souvent plus efficace pour résoudre un système linéaire différentielle de trigonaliser la matrice A et de résoudre un système différentiel triangulaire (voir le chapitre 4).

Session Wxmaxima 5.2 – e^A : en diagonalisant

```
(%i1) load(diag)$
(%i2) A : matrix([8,-8,2],[4,-3,2],[-3,4,1]);
```

(%o2) $\begin{bmatrix} 8 & -8 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i3) f(x) := exp(t*x);
```

(%o3) $\mathrm{f}(x) := \exp(t\,x)$

Wxmaxima sait le faire!!!

```
(%i4) mat_function(f,A);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} 2\,e^{3\,t}+3\,e^{2\,t}-4\,e^{t} & 4\,e^{t}-4\,e^{3\,t} & -2\,e^{3\,t}+6\,e^{2\,t}-4\,e^{t} \\ e^{3\,t}+2\,e^{2\,t}-3\,e^{t} & 3\,e^{t}-2\,e^{3\,t} & -e^{3\,t}+4\,e^{2\,t}-3\,e^{t} \\ -e^{3\,t}-e^{2\,t}+2\,e^{t} & 2\,e^{3\,t}-2\,e^{t} & e^{3\,t}-2\,e^{2\,t}+2\,e^{t} \end{bmatrix}$

À nous !

```
(%i5) eigenvectors(A);
```

(%o5) $[[[1,2,3],[1,1,1]],[[[1,\frac{3}{4},-\frac{1}{2}]],[[1,\frac{2}{3},-\frac{1}{3}]],[[1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]]]]$

```
(%i6) P : transpose(matrix([1,3/4,-1/2],[1,2/3,-1/3],[1,1/2,-1/2]));
```

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

```
(%i7) invert(P).A.P;
```

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

```
(%i8) P.diag_matrix(exp(t),exp(2*t),exp(3*t)).invert(P);
```

(%o8) $\begin{bmatrix} 2\,e^{3\,t}+3\,e^{2\,t}-4\,e^{t} & 4\,e^{t}-4\,e^{3\,t} & -2\,e^{3\,t}+6\,e^{2\,t}-4\,e^{t} \\ e^{3\,t}+2\,e^{2\,t}-3\,e^{t} & 3\,e^{t}-2\,e^{3\,t} & -e^{3\,t}+4\,e^{2\,t}-3\,e^{t} \\ -e^{3\,t}-e^{2\,t}+2\,e^{t} & 2\,e^{3\,t}-2\,e^{t} & e^{3\,t}-2\,e^{2\,t}+2\,e^{t} \end{bmatrix}$

```
(%i9) ratsimp(%-%o4);
```

(%o9) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Session Python 5.2 – e^A : en diagonalisant

Traduction du Wxmaxima.

In [2]

```
A = Matrix(3, 3,
           [8, -8, 2, 4, -3,
            2, -3, 4, 1])
```

In [3]

```
def f(x):
    return(exp(t*x))
```

In [4]

```
f(A)
```

Out [4]

$$\begin{bmatrix} 2e^{3t}+3e^{2t}-4e^{t} & -4e^{3t}+4e^{t} & -2e^{3t}+6e^{2t}-4e^{t} \\ e^{3t}+2e^{2t}-3e^{t} & -2e^{3t}+3e^{t} & -e^{3t}+4e^{2t}-3e^{t} \\ -e^{3t}-e^{2t}+2e^{t} & 2e^{3t}-2e^{t} & e^{3t}-2e^{2t}+2e^{t} \end{bmatrix}$$

In [5]

```
P, D = A.diagonalize()
P, D
```

Out [5]

$$\left(\begin{bmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

In [6]

```
A.eigenvects()
```

Out[6]

$$\left[\left(1,\ 1,\ \left[\begin{bmatrix}-2\\-\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}\right]\right),\ \left(2,\ 1,\ \left[\begin{bmatrix}-3\\-2\\1\end{bmatrix}\right]\right),\ \left(3,\ 1,\ \left[\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}\right]\right)\right]$$

In[7]

```
P*diag(exp(t),
       exp(2*t),
       exp(3*t))*P**(-1)
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix}2e^{3t}+3e^{2t}-4e^{t} & -4e^{3t}+4e^{t} & -2e^{3t}+6e^{2t}-4e^{t}\\ e^{3t}+2e^{2t}-3e^{t} & -2e^{3t}+3e^{t} & -e^{3t}+4e^{2t}-3e^{t}\\ -e^{3t}-e^{2t}+2e^{t} & 2e^{3t}-2e^{t} & e^{3t}-2e^{2t}+2e^{t}\end{bmatrix}$$

In[8]

```
_-f(A)
```

Out[8]

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Exercice(s) 5.2

5.2.1 Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$.

(a) Démontrer que $u \mapsto \chi_u$ est continue de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathbb{K}_n[X]$.

(b) En déduire par un argument de densité que :

$$\forall (u, v) \in \mathscr{L}(E)^2,\ \chi_{u \circ v} = \chi_{v \circ u}$$

(c) Démontrer que le résultat est encore vrai dans n'importe quel corps $\mathbb{K}$ et n'importe quel $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (par un argument algébrique).

5.2.2 Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ par un argument de densité.

5.2.3 Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$.

(a) Démontrer que l'intérieur de l'ensemble des endomorphismes de E diagonalisables est l'ensemble des endomorphismes de E diagonalisables avec n valeurs propres distinctes.

(b) Démontrer que l'adhérence des endomorphismes de E diagonalisables est l'ensemble des endomorphismes de E trigonalisables.

5.2.4 Soit $n \geq 2$ un entier et soit $p \in [\![1, n]\!]$.

(a) Démontrer que $\Gamma_p = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rang}\, A \leq p\}$ est fermé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer l'adhérence de $\Delta_p = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rang}\, A = p\}$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

5.2.5 Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Démontrer que :

$$\forall u \in \mathscr{L}(E),\ \lim_{k \to +\infty} \left(\mathrm{id}_E + \frac{1}{k}.u\right)^k = \exp(u)$$

5.2.6 Démontrer que :

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{trace}(A))$$

5.3 Décomposition de Dunford

Propriété 5.9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent [a]. Alors :

$$\chi_u = (-1)^{\dim E}\, X^{\dim E}$$

a. C'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démonstration

Par récurrence sur $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n = 1$, c'est évident.
- Soit $\mathbb{N}^*$, on suppose que le résultat est vrai au rang n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent (avec $\dim E = n+1$), soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On a $\det(u)^p = \det(u^p) = 0$ donc $\det(u) = 0$. En particulier, $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0_E\}$ donc il existe $e_1 \in \mathrm{Ker}(u)$. On complète en une base $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_{n+1})$ de E. On a alors :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0_{n,1} & C \end{array}\right], \quad B \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{K}),\ C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$$
Mais u est nilpotent : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ donc
$$0_{n+1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u^p) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & B' \\ \hline 0_{n,1} & C^p \end{array}\right], \quad B' \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{K}),\ C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}$$
donc $C^p = 0_n$. L'hypothèse de récurrence démontre que $\chi_C = (-1)^n\, X^n$ d'où
$$\chi_u = \left|\left[\begin{array}{c|c} -X & B \\ \hline 0_{n,1} & C - X.I_n \end{array}\right]\right| = (-X)\,\chi_C = (-1)^{n+1}\, X^{n+1}$$
donc le résultat est vrai au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $\in \mathbb{N}^*$.

Définition 5.8 – Espace caractéristique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. Si le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé :

$$\chi_u = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

où les λ_k sont distincts, on appelle *espace caractéristique associé à la valeur propre* λ_k :

$$F_u(\lambda_k) = \mathrm{Ker}(u - \lambda_k.\,\mathrm{id}_E)^{\alpha_k}$$

Propriété 5.10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé :

$$\chi_u = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}, \quad \text{où les } \lambda_k \text{ sont distincts}$$

Alors :

1. pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $F_u(\lambda_k)$ est stable par u ;

2. on a :
$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_u(\lambda_k)$$
3. pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\dim F_u(\lambda_k) = \alpha_k$;
4. pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, la projection π_k sur $F_u(\lambda_k)$ parallèlement à $\bigoplus_{k'=1,\, k'\neq k}^{p} F_u(\lambda_{k'})$ est un polynôme en u.

Démonstration

1. Soit $k \in [\![1,p]\!]$. On a :
$$\forall x \in F_u(\lambda_k),\ (u - \lambda_k.\mathrm{id}_E)(u(x)) = u \circ (u - \lambda_k.\mathrm{id}_E)(x) = u(0_E) = 0_E$$
donc $u(x) \in F_u(\lambda_k)$.
2. C'est une conséquence immédiate du lemme des noyaux car les $(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ sont premiers deux à deux et du fait que $\mathrm{Ker}\,\chi_u(u) = E$ (théorème de Cayley-Hamilton).
3. Soit $k \in [\![1,p]\!]$. Notons u_k la restriction de u à $F_u(\lambda_k)$. On a donc $\left(u_k - \lambda_k.\mathrm{id}_{F_u(\lambda_k)}\right)^{\alpha_k} = 0_{\mathscr{L}(E)}$ donc $u_k - \lambda_k.\mathrm{id}_{F_u(\lambda_k)}$ est nilpotent. Son polynôme caractéristique est $(-X)^{\dim F_u(\lambda_k)}$ (propriété 5.9, page précédente). Mais χ_{u_k} divise χ_u, donc $\dim F_u(\lambda_k) \leq \alpha_i$. D'après le point 2 on a :
$$n = \sum_{k=1}^{p} \dim F_u(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k$$
d'où $\dim F_u(\lambda_k) = \alpha_k$.
4. On pose :
$$\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ Q_k = (-1)^n \prod_{k'=1,\, k'\neq k}^{p} (X - \lambda_{k'})^{\alpha_{k'}}$$
Alors les Q_k sont premiers deux à deux, donc d'après l'identité de Bézout, il existe des polynômes $U_1, \dots, U_p$ tels que :
$$\mathrm{id}_E = (U_1\, Q_1)(u) + \cdots + (U_p\, Q_p)(u)$$
Posons, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $P_k = U_k\, Q_k$ et $\pi_k = P_k(u)$. On a :
$$\mathrm{id}_E = \pi_1 + \cdots + \pi_p$$
Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $i \neq j$, $Q_i\, Q_j$ divise χ_u donc $(Q_i\, Q_j)(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (théorème de Cayley-Hamilton). On a donc :
$$\pi_i \circ \pi_j = (Q_i\, Q_j)(u) \circ (U_i\, U_j)(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$$
donc
$$\forall i \in [\![1,p]\!]\,,\ \pi_i = \pi_1 \circ \pi_i + \cdots + \pi_p \circ \pi_i = \pi_i^2$$
donc π_i est un projecteur. On conclut en démontrant que $\mathrm{Im}\,\pi_i = F_u(\lambda_i)$ et $\mathrm{Ker}\,\pi_i = \bigoplus_{j=1,\, j\neq i}^{p} F_u(\lambda_j)$ (en exercice).

Remarque 5.14

— Si u est diagonalisable, alors pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $F_u(\lambda_k) = E_u(\lambda_k)$. En particulier, les projecteurs sur les espaces propres sont des polynômes en u.
— Il est toujours possible de se ramener au cas où χ_u est scindé en se plaçant dans le corps des racines de χ_u (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on se place dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
— Le point 2 démontre que si χ_u est scindé, alors dans une base $\mathscr{E}$ de E adaptée à la décomposition $E = F_u(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus F_u(\lambda_p)$, la matrice de u est *diagonale par blocs* :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \mathrm{Diag}(B_1|\cdots|B_p) \overset{\mathrm{Not}}{=} \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & 0_{\alpha_1,\alpha_2} & \cdots & 0_{\alpha_1,\alpha_p} \\ \hline 0_{\alpha_2,\alpha_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0_{\alpha_{p-1},\alpha_p} \\ \hline 0_{\alpha_p,\alpha_1} & \cdots & 0_{\alpha_p,\alpha_{p-1}} & B_p \end{array}\right]\,,\quad \forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ B_k \in \mathrm{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K})$$

Théorème 5.5 – Décomposition de Dunford

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé. Il existe un unique couple $(d, n) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que :

$$u = d + n$$

avec d diagonalisable et n nilpotent et qui commutent ($d \circ n = n \circ d$).

Démonstration

On reprend les notations de la propriété 5.10, page 245.

— *Existence.* D'après le point 2, il suffit de définir d et n sur chacun des $F_u(\lambda_k)$:

$$\forall x \in F_u(\lambda_k),\ d(x) = \lambda_k.x \text{ et } n(x) = u(x) - \lambda_k.x$$

Par construction d est diagonalisable. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $(n|_{F_u(\lambda_k)})^{\alpha_k} = 0_{\mathscr{L}(F_u(\lambda_k))}$ donc $n^\alpha = 0_{\mathscr{L}(E)}$ avec $\alpha = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ donc n est nilpotent.
De plus, n et d commutent sur chaque $F_u(\lambda_k)$, donc sur E.

— *Unicité.* Voir la remarque ci-dessous.

Remarque 5.15

— On peut démontrer que d et n sont des polynômes en u, puisque (en reprenant les notations de la propriété 5.10, page 245) :

$$d = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\pi_k \text{ et } n = \sum_{k=1}^{p} (u - \lambda_k.\mathrm{id}_E) \circ \pi_k$$

En particulier, le couple (d, n) est unique. Si (d', n') est un autre couple convenant, alors d' et n' (qui sont des polynômes en u) commutent avec u donc avec d et n. Ainsi, d et d' sont co-diagonalisables (voir le théorème 4.3, page 205 du chapitre 4) donc $d - d' = n - n'$ est diagonalisable. Or le seul endomorphisme à la fois nilpotent et diagonalisable est $0_{\mathscr{L}(E)}$, d'où l'unicité.

— La décomposition de Dunford $\phi\colon u \mapsto (d, n)$ n'est pas continue ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). En effet, on a $\phi(u) = (u, 0_{\mathscr{L}(E)})$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable donc si ϕ était continue, par densité des endomorphismes diagonalisables (proposition 5.2, page 238), on aurait $\phi(u) = (u, 0_{\mathscr{L}(E)})$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire que tout endomorphisme serait diagonalisable. La décomposition de Dunford n'est donc pas un outil adapté au calcul numérique approché.

— Attention :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

n'est pas la décomposition de Dunford de A car A est diagonalisable (elle a deux valeurs propres distinctes 1 et 2). Sa décomposition de Dunford est elle-même : $A = A + 0_2$.

Remarque 5.16

On peut se servir de la décomposition de Dunford pour calculer les puissances A^n ou l'exponentielle $\exp(A)$ d'une matrice carrée A.
Soit $A = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotent la décomposition de Dunford de A. On note q l'indice de nilpotence de N (le plus petit entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^q = 0_n$).

— Puisque D et N commutent, on a d'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq q \implies A^k = (D + N)^k = \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1}{k} . D^{q-1-k} \centerdot N^k$$

— Puisque D et N commutent, on a :

$$\exp(A) = \exp(D) \centerdot \exp(N)$$

On a déjà vu comment calculer l'exponentielle d'une matrice diagonalisable. Pour N, on a simplement :

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{t^k}{k!}.N^k$$

En pratique :

1. on prend une base $\mathscr{E}$ de E adaptée à la décomposition de E en espaces caractéristiques, pour obtenir la matrice A de u dans cette base sous la forme d'une matrice diagonale par blocs :

$$A \sim \mathrm{Diag}(B_1|\cdots|B_q).$$

2. on trigonalise B_k de manière à la mettre sous la forme :

$$B_k \sim \lambda_k.I_{n_k} + N_k$$

où N_k est triangulaire supérieure nilpotente.

- Mais ces méthodes sont fastidieuses (et peu adaptées au calcul numérique approchée, voir la remarque 5.15, page précédente). On préfère donc passer par la trigonalisation de A et résoudre des systèmes triangulaires.

5.4 Commutant et réduction de Jordan

Définition 5.9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Le *commutant de* u est défini par :

$$\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(E),\ u \circ v = v \circ u\}$$

Remarque 5.17

1. $\mathscr{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u) \in \mathscr{C}(u)$.
3. Les sous-espaces propres de u sont stables par les endomorphismes de $\mathscr{C}(u)$.

Propriété 5.11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Alors :

$$\mathscr{C}(u) \text{ est isomorphe à } \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathscr{L}\big(E_u(\lambda)\big)$$

En particulier :

$$u \text{ a } n \text{ valeurs propres distinctes si, et seulement si, } \mathbb{K}[u] = \mathscr{C}(u) \text{ si, et seulement si, } \dim \mathscr{C}(u) = n$$

Démonstration

Notons $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. On a $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u = p$.

— Considérons l'application linéaire ψ de $\mathscr{C}(u)$ dans $\prod_{k=1}^{p} \mathscr{L}\big(E_u(\lambda_k)\big)$ définie par :

$$\psi(v) = \Big(v|_{E_u(\lambda_1)}, \ldots, \mathscr{L}(v|_{E_u(\lambda_p)}\Big)$$

On vérifie alors que ψ est bien définie et bijective (car les espaces propres $E_u(\lambda_k)$ sont stables par les éléments de $\mathscr{C}(u)$ et que $E = E_u(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E_u(\lambda_p)$) d'où le résultat.

— En particulier, on a :

$$\dim \mathbb{K}[u] = p = \sum_{k=1}^{p} \dim E_u(\lambda_k) \leq \sum_{k=1}^{p} \big(\dim E_u(\lambda_k)\big)^2 = \dim \mathscr{C}(u)$$

Alors u a n valeurs propres distinctes si, et seulement si, $\dim \mathbb{K}[u] = n$ si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\dim E_u(\lambda_k) = 1$ (donc l'inégalité ci-dessus est une égalité), d'où le résultat (on a déjà l'inclusion $\mathbb{K}[u] \subset \mathscr{C}(u)$).

Remarque 5.18

Si on veut déterminer $\mathscr{C}(u)$, on peut utiliser la décomposition de Dunford :

$$u = d + n, d \text{ diagonalisable, } n \text{ nilpotent, et qui commutent}$$

ce qui revient à trouver $\mathscr{C}(d)$ (on utilise ce qui précède) et $\mathscr{C}(n)$. On doit donc maintenant étudier ce qui se passe pour un endomorphisme nilpotent.

Proposition 5.3 – Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent. Alors il existe une base $\mathscr{E}$ de E pour laquelle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \mathrm{Diag}(B_1 \,|\, \cdots \,|\, B_s)$$

où les blocs B_k, appelés blocs de Jordan, *sont soit nuls, soit de la forme :*

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Démonstration

On passe par les invariants de similitude (voir la dernière partie) : si $(P_1, \ldots, P_r)$ est la suite des invariants de similitude de u alors le produit $P_1 \cdots P_r$ est égal au signe près à χ_u, qui vaut $(-1)^n X^n$ (propriété 5.9, page 245). Les P_i sont donc de la forme X^{n_i}. On en déduit que les matrices compagnons $C(P_i)$ des P_i sont des transposées de blocs de Jordan. On conclut alors en appliquant la réduction de Frobenius à u.
On peut aussi le démontrer directement (voir l'exercice 5.3.11, page 251).

Théorème 5.6 – Réduction de Jordan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique χ_u soit scindé. Alors il existe une base $\mathscr{E}$ de E pour laquelle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \mathrm{Diag}(B_1 \,|\, \cdots \,|\, B_s)$$

où les blocs B_k, appelés blocs de Jordan, *sont soit diagonales, soit de la forme :*

$$B_k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

注释 5.1

当一些矩阵不可对角化时，我们采用若尔当型将更多的矩阵化简到一类只比对角矩阵稍微复杂的矩阵：若尔当型。实际上这是一种简单的分块对角矩阵,因为每一若尔当块都比较接近对角矩阵。

Démonstration

On reprend les notations de la définition 5.8, page 245. Sur chaque espace caractéristique $F_u(\lambda_k)$, on décompose $u|_{F_u(\lambda_k)}^{F_u(\lambda_k)}$ en la somme d'un endomorphisme nilpotent et d'un endomorphisme diagonalisable. On utilise alors la réduction de Jordan pour les endomorphismes nilpotents et le fait que E est la somme directe des espaces caractéristiques de u.

Exemple 5.4

1. Lorsque les valeurs propres sont *séparées*, tout se passe bien :

$$\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \left\{\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & 0 & a' \end{bmatrix},\ (a,b,a',b') \in \mathbb{K}^2\right\}$$

2. Lorsque les valeurs propres sont *confondues*, il y a de mauvaises surprises, ainsi :

$$\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \left\{\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & 0 & e \\ f & g & a' & h \\ 0 & k & 0 & a' \end{bmatrix},\ (a,a',b,c,d,e,f,g,h,k) \in \mathbb{K}^{10}\right\}$$

Exercice(s) 5.3

5.3.1 Trouver le commutant de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

5.3.2 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer qu'il existe des entiers $n_1, \dots, n_p$ (avec p à déterminer) tels que :

$$n = n_1 + \cdots + n_p \text{ et } \dim \mathcal{C}(u) = n_1^2 + \cdots + n_p^2$$

5.3.3 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie de dimension n, soit $f_1, \dots f_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux. Démontrer que

$$f_1 \circ \cdots \circ f_n = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

5.3.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.

(a) Démontrer que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

(b) Démontrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de base

$$\left(\mathrm{id}_E, f, \dots, f^{n-1}\right).$$

5.3.5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $u \in \mathscr{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie. Déterminer la dimension du commutant de u.

5.3.6 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. Calculer la dimension du commutant de

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

5.3.7 Soit A une matrice réelle triangulaire supérieure. Démontrer qu'elle commute avec sa transposée si, et seulement si, elle est diagonale.

5.3.8 Soit $T \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{C})$ (l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ triangulaires supérieures).

(a) Démontrer que

$$\left\{M \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{C}),\ M \centerdot T = T \centerdot M\right\}$$

est de dimension au moins n.

(b) Démontrer que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ alors son commutant est de dimension au moins n.

(c) Que dire d'une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ dont le commutant est égal à l'ensemble $\mathbb{C}[A]$?

5.3.9 Pour quels entiers n le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ admet-il un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/4\,\mathbb{Z}$?

5.3.10 Soit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & 12 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) Démontrer que A est semblable à :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) Trouver les matrices réelles qui commutent avec A.

5.3.11 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent de E. Soit q l'indice de nilpotence de u :

$$q = \min\left(\left\{k \in \mathbb{N}^*,\ u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}\right\}\right)$$

Soit $x \in E$ tel que :

$$u^{q-1}(x) \neq 0_E$$

(a) Démontrer que la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{q-1}(x)\right)$ est libre.

(b) En déduire que si E est de dimension finie alors $\dim E \geq q$.

- *On pose* $E_1 = \mathrm{Vect}\left(x, u(x), \ldots, u^{q-1}(x)\right)$ *et on suppose que* E *est de dimension finie* $n \geq p$.
- *Par ailleurs, soit* $\phi \in E^\star$ *une forme linéaire telle que :*

$$\phi\left(u^{q-1}(x)\right) \neq 0$$

On pose alors :

$$\Gamma = \mathrm{Vect}\left(\varphi, \varphi \circ u, \ldots, \varphi \circ u^{q-1}\right)$$

- *Finalement, on pose :*

$$G = \bigcap_{k=0}^{q-1} \mathrm{Ker}\left(\varphi \circ u^k\right)$$

(c) Justifier l'existence de ϕ.

(d) Quelle est la dimension de Γ ? (Justifier).

(e) Quelle est la dimension de G ? (Justifier).

(f) Démontrer que :

$$E_1 \oplus G = E$$

(g) Démontrer que :

$$u(G) \subset G$$

(h) En déduire la proposition 5.3, page 249

5.5 Résolution d'équations matricielles

Nous allons nous intéresser à deux types d'équations :

1. *Extraction de racine* : soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}^*$, existe-t-il des matrices B telles que $B^p = A$? Et si c'est le cas, comment les trouver toutes ?
2. *Logarithme* : soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), existe-t-il des matrices B telles que $B^p = A$? Et si c'est le cas, comment les trouver toutes ?

L'extraction de racine possède deux propriétés immédiates :

1. Si B existe, alors $\det(B)^p = \det(A)$ donc une condition nécessaire d'existence est que $\det(A)$ admette une racine p-ième dans le corps $\mathbb{K}$.
2. Si B existe, alors B *commute* avec A ($A \bullet B = B \bullet A$), donc B est nécessairement un élément du commutant $\mathscr{C}(A)$ de A. C'est facile lorsque A est diagonalisable. On est alors ramené à la résolution de $B^p = \lambda.I_n$, ce qui est aisée. Lorsque A n'est plus diagonalisable, il n'y a plus de méthode générale.

Exemple 5.5

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

résolvons $B^p = A$, pour $p \in \{2, 3\}$, d'inconnue $B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On a $\det(A) = -2$, donc il n'y a pas de solution pour $p = 2$ (car on est dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mais il en existe dans $\mathbb{C}$).
2. Pour $p = 3$, on peut diagonaliser A : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1} \bullet A \bullet P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & -2 \end{array}\right]$$

Les matrices qui commutent avec cette dernière matrice sont de la forme $\mathrm{Diag}(B_1|[\mu])$ avec $B_1 \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On doit donc résoudre $B_1^3 = I_2$ et $\mu^3 = -2$. On en déduit que B_1 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, égale à I_2 ou semblable à $\mathrm{Diag}(j, j^2)$ avec $j = \exp(2\,i\,\pi/3)$, ce qui ramené dans $\mathbb{R}$ nous donne :

$$B_1 \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = R_1.$$

Finalement, les B qui conviennent vérifient :

$$B = P \bullet \left[\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & -\sqrt[3]{2} \end{array}\right] \bullet P^{-1} \text{ ou } B = P \bullet \left[\begin{array}{c|c} Q^{-1} \bullet R_1 \bullet Q & 0 \\ \hline 0 & -\sqrt[3]{2} \end{array}\right] \bullet P^{-1}, \quad Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

Remarque 5.19

Le calcul brutal n'est pas efficace ! Même si l'on pense à montrer que $B \in \mathscr{C}(A)$.

Session `Wxmaxima` 5.3 – Racine de A : méthode brutale

(%i1) `A : matrix([-2,3,3],[-3,4,3],[3,-3,-2]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

(%i2) `determinant(A);`

(%o2) -2

(%i3) `eigenvectors(A);`

(%o3) $[[[-2,1],[1,2]],[[[1,1,-1]],[[1,0,1],[0,1,-1]]]]$

(%i4) `P : transpose(matrix([1,1,-1],[1,0,1],[0,1,-1]));`

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(%i5) `invert(P).A.P;`

(%o5) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matrices qui commutent.

(%i6) `P.matrix([mu,0,0],[0,a,b],[0,c,d]).invert(P);`

(%o6) $\begin{bmatrix} \mu - b & -\mu + 2\,b + a & -\mu + b + a \\ \mu - d & -\mu + 2\,d + c & -\mu + d + c \\ -\mu + d - b & \mu - 2\,d - c + 2\,b + a & \mu - d - c + b + a \end{bmatrix}$

Le commutant est donc de dimension 5.

(%i7) `ratsimp(A-%o6^^3)$`

(%i8) `solve(list_matrix_entries(%),[mu,a,b,c,d]);`

On obtient, après une très longue attente...

```
Maxima encountered a Lisp error: Error in PROGN [or a callee]: The storage for
CONS is exhausted.Currently, 9351 pages are allocated.Use ALLOCATE to expand the
space.Automatically continuing.To enable the Lisp debugger set *debugger-hook* to nil.
```

Session `Python` 5.3 – Racine de A : méthode brutale

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```
A = Matrix(3, 3,
           [-2, 3, 3, -3, 4,
            3, 3, -3, -2])
A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

In[3]

```
det(A)
```

Out[3]

$$-2$$

In[4]

```
A.eigenvects()
```

Out[4]

$$\left[\left(-2,\ 1,\ \left[\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right),\ \left(1,\ 2,\ \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right) \right]$$

In[5]

```
P = Matrix([_[0][2][0],
            _[1][2][0],
            _[1][2][1]]).reshape(
    3, 3).transpose()
P
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In[6]

```
P**(-1)*A*P
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In[7]

```
P*Matrix(3, 3,
          [x, 0, 0, 0, y,
           z, 0, a, b])*P**(-1)
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix} x-y+z-a+b & -x+2y-z+2a-b & -x+y+a \\ x-y+z & -x+2y-z & -x+y \\ -x-a+b & x+2a-b & x+a \end{bmatrix}$$

In[8]

```
eq = A-_**3
```

In[8]

```
solve(eq, [a, b, x, y, z]) # Interminable et n'aboutit pas !
```

```
KeyboardInterrupt:
```

Exemple 5.6

Si la matrice n'est plus diagonalisable (mais est inversible), on considère la décomposition de Dunford de A : $A = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente, et on cherche B également sous la forme $B = D' + N'$ avec D' diagonalisable et N' nilpotente. On obtient :

$$(D' + N')^p = D'^p \, . \left(I_n + D'^{-1} . N'\right)^p = D + N$$

Il vient alors :

$$D'^p = D \text{ et } \left(I_n + D'^{-1} . N'\right)^p = I_n + D^{-1} . N,$$

que l'on peut résoudre en utilisant le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^{1/p}$ et le fait que la matrice $D'^{-1} . N'$ est nilpotente.

Session Wxmaxima 5.4 – Racine de A : avec la décomposition de Dunford

(%i1) `load(diag)$`
`A : matrix([-1,-4,-10],[-2,-1,-7],[1,2,6]);`

(%o2) $$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(%i3) `jor : jordan(A)$`
`J : dispJordan(jor);`

(%o4) $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i5) `P : ModeMatrix(A,jor);`

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & -12 & 1 \\ \frac{1}{2} & -9 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 6 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i6) D : P.diag_matrix(2,1,1).invert(P);
```

(%o6) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

```
(%i7) N : A-D;
```

(%o7) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -8 \\ -3 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

```
(%i8) Dprime : P.diag_matrix(sqrt(2),1,1).invert(P);
```

(%o8) $\begin{bmatrix} 2^{\frac{3}{2}}-1 & 4-2^{\frac{5}{2}} & 2-2^{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{2}-1 & 3-2^{\frac{3}{2}} & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 2^{\frac{3}{2}}-2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

```
(%i9) Nprime : ratsimp(1/2*invert(Dprime).N);
```

(%o9) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

```
(%i10) ratsimp((Dprime+Nprime)^^2);
```

(%o10) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Tout va bien donc. Changeons un peu la matrice D'.

```
(%i11) Dprime : P.diag_matrix(-sqrt(2),-1,1).invert(P);
```

(%o11) $\begin{bmatrix} \frac{5}{3}-2^{\frac{3}{2}} & 2^{\frac{5}{2}}-4 & 2^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3} \\ 1-\sqrt{2} & 2^{\frac{3}{2}}-3 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-\frac{1}{3} & 2-2^{\frac{3}{2}} & \frac{4}{3}-\sqrt{2} \end{bmatrix}$

```
(%i12) Nprime : ratsimp(1/2*invert(Dprime).N);
```

(%o12) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

```
(%i13) ratsimp((Dprime+Nprime)^^2);
```

(%o13) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Cela ne fonctionne plus ! Pourquoi ? Parce que D' et N' ne commutent plus ! On ne peut pas prendre n'importe quel D' qui vérifie ${D'}^2 = D$...

```
(%i14) ratsimp(Dprime.Nprime-Nprime.Dprime);
```

(%o14) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -8 \\ -3 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Session Python 5.4 – Racine de A : avec la décomposition de Dunford

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```python
A = Matrix(3, 3,
            [-1, -4, -10, -2, -1,
             -7, 1, 2, 6])
A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

In[3]

```python
P, J = A.jordan_form()
P, J
```

Out[3]

$$\left(\begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ -6 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

In[4]

```python
D = P*diag(1, 1, 2)*P**(-1)
D
```

Out[4]

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

In[5]

```python
N = A-D
Dprime = P*diag(1, 1,
                sqrt(2))*P**(-1)
Dprime
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix} -1+2\sqrt{2} & 4-4\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} & 3-2\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

In[6]

```
Nprime = S(1)/2*Dprime**(-1)*N
Nprime.applyfunc(ratsimp)
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

In[7]

```
## Petite vérification
(Dprime+Nprime)**2
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

In[8]

```
Dprime = P*diag(-1, 1,
                -sqrt(2))*P**(-1)
Nprime = S(1)/2*Dprime**(-1)*N
((Dprime+Nprime)**2).applyfunc(ratsimp)
```

Out[8]

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

In[9]

```
(Dprime*Nprime-Nprime*
 Dprime).applyfunc(ratsimp)
```

Out[9]

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -8 \\ -3 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Pour la recherche de logarithme $\exp(B) = A$, on a les deux propriétés suivantes :

1. Si B existe, alors $\det(A) = \det(\exp(B)) = \exp(\operatorname{trace}(B))$ (voir l'exercice 6 de la série d'exercices 5.2, page 244). Une condition nécessaire d'existence est donc que le $\det(A)$ soit lui-même l'exponentielle d'un élément de $\mathbb{K}$.
2. Si B existe, alors B et A commutent. Les solutions sont donc à chercher parmi les éléments de $\mathscr{C}(A)$. Lorsque A est diagonalisable, on a
$$A \sim \operatorname{Diag}(\lambda_1.I_{n_1}|\cdots|\lambda_p.I_{n_p})$$
donc B est de la forme $\operatorname{Diag}(B_1|\cdots|B_p)$. On est ramené à résoudre $\exp(B_k) = \lambda_k.I_{n_k}$, $(\lambda_k \neq 0)$. Nécessairement, B_k doit être diagonalisable (conséquence de la décomposition de Dunford).

Exemple 5.7

Soit A la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

Elle est de déterminant $2 > 0$. Donc, par exemple :

$$B = \begin{bmatrix} -2\ln(2) & 4\ln(2) & -2\ln(2) \\ -\ln(2) & 2\ln(2) & -\ln(2) \\ \ln(2) & -2\ln(2) & \ln(2) \end{bmatrix}$$

vérifie $\exp(B) = A$ (ce n'est pas la seule car plusieurs matrices B' vérifient $\exp(B') = I_2$).

Session Wxmaxima 5.5 – $\ln(A)$

(%i1) `A : matrix([-1,4,-2],[-1,3,-1],[1,-2,2]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(%i2) `determinant(A);`

(%o2) 2

(%i3) `eigenvectors(A);`

(%o3) $[[[2,1],[1,2]],[[[1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]],[[1,0,-1],[0,1,2]]]]$

(%i4) `P : transpose(matrix([1,1/2,-1/2],[1,0,-1],[0,1,2]));`

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(%i5) `invert(P).A.P;`

(%o5) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i6) `P.matrix([log(2),0,0],[0,0,0],[0,0,0]).invert(P);`

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} -2\log(2) & 4\log(2) & -2\log(2) \\ -\log(2) & 2\log(2) & -\log(2) \\ \log(2) & -2\log(2) & \log(2) \end{bmatrix}$$

(%i7) `load(diag)$`
`mat_function(exp,%o6);`

$$(\%o8)\quad \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(%i9) `P.matrix([log(2),0,0],[0,0,-2*%pi],[0,2*%pi,0]).invert(P);`

$$(\%o9)\quad \begin{bmatrix} -2\log(2)-2\pi & 4\log(2)+2\pi & -2\log(2)-2\pi \\ 6\pi-\log(2) & 2\log(2)-8\pi & 4\pi-\log(2) \\ \log(2)+14\pi & -2\log(2)-18\pi & \log(2)+10\pi \end{bmatrix}$$

(%i10) `ratsimp(mat_function(exp,%));`

$$(\%o10)\quad \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & \frac{-51\log(2)^2-204\pi^2}{-17\log(2)^2-68\pi^2} & -1 \\ 1 & -\frac{-34\log(2)^2-136\pi^2}{-17\log(2)^2-68\pi^2} & \frac{-34\log(2)^2-136\pi^2}{-17\log(2)^2-68\pi^2} \end{bmatrix}$$

(%i11) `%,numer;`

$$(\%o11)\quad \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3.0 & -1 \\ 1 & -2.0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

Session `Python` 5.5 – $\ln(A)$

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```
A = Matrix(3, 3,
           [-1, 4, -2, -1, 3,
            -1, 1, -2, 2])
A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

In[3]

```
det(A)
```

Out[3]

2

In[4]

```
A.eigenvects()
```

Out[4]

$$\left[\left(1, \ 2, \ \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right), \ \left(2, \ 1, \ \left[\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right) \right]$$

In[5]

```
P = Matrix([_[0][2][0],
            _[0][2][1],
            _[1][2][0]]).reshape(
    3, 3).transpose()
P
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

In[6]

```
P**(-1)*A*P
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

In[7]

```
P*diag(0, 0, ln(2))*P**(-1)
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix} -2\log(2) & 4\log(2) & -2\log(2) \\ -\log(2) & 2\log(2) & -\log(2) \\ \log(2) & -2\log(2) & \log(2) \end{bmatrix}$$

In[8]

```
exp(_)
```

Out [8]

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

In [9]

```
P*Matrix(3, 3,
         [0, -2*pi, 0, 2*pi, 0,
          0, 0, 0, ln(2)])*P**(-1)
```

Out [9]

$$\begin{bmatrix} -2\log(2) + 2\pi & -6\pi + 4\log(2) & -2\pi - 2\log(2) \\ -\log(2) + 2\pi & -4\pi + 2\log(2) & -\log(2) \\ \log(2) + 2\pi & -2\pi - 2\log(2) & \log(2) + 2\pi \end{bmatrix}$$

In [10]

```
exp(_).applyfunc(ratsimp)
```

Out [10]

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Remarque 5.20

Si $\exp(B) = A$ et si considère les décompositions de Dunford $A = D + N$ et $B = D' + N'$ alors $\exp(D').\exp(N') = D + N$ donc $\exp(D') = D$ et $\exp(N') = I_n + D^{-1}.N$. En utilisant la série entière du logarithme, on a donc :

$$N' = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{D^{-k}.N^k}{k} = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k+1} \frac{D^{-k}.N^k}{k}$$

où p est l'indice de nilpotence de N, c'est-à-dire le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0_n$.

Exemple 5.8

Avec `Wxmaxima` :

Session `Wxmaxima` 5.6 – $\ln(A)$: décomposition de Dunford

```
(%i1) A : matrix([-1,-4,-10],[-2,-1,-7],[1,2,6]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

```
(%i2) load(diag)$
```

(%i3) J : dispJordan(jordan(A));

(%o3) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i4) P : ModeMatrix(A,jordan(A));

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & -12 & 1 \\ \frac{1}{2} & -9 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 6 & 1 \end{bmatrix}$

(%i5) D : P.diag_matrix(2,1,1).invert(P);

(%o5) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(%i6) N : A-D;

(%o6) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -8 \\ -3 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(%i7) N^^2;

(%o7) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(%i8) Dprime : P.diag_matrix(log(2),0,0).invert(P);

(%o8) $\begin{bmatrix} 2\log(2) & -4\log(2) & -2\log(2) \\ \log(2) & -2\log(2) & -\log(2) \\ -\log(2) & 2\log(2) & \log(2) \end{bmatrix}$

(%i9) Nprime : invert(D).N;

(%o9) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -8 \\ -3 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(%i10) mat_function(exp,Dprime+Nprime);

(%o10) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Session `Python` 5.6 – $\ln(A)$: décomposition de Dunford

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```
A = Matrix(3, 3,
           [-1,-4,-10,-2,-1,
            -7,1,2,6])
A
```

Out [2]

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

In [3]

```
P, J = A.jordan_form()
J
```

Out [3]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

In [4]

```
D = P*diag(1, 1,
           2)*P**(-1)
N = A-D
N**2
```

Out [4]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In [5]

```
Dprime = P*diag(0, 0,
                ln(2))*P**(-1)
Nprime = D**(-1)*N
Dprime+Nprime
```

Out [5]

$$\begin{bmatrix} -4+2\log(2) & -4\log(2) & -8-2\log(2) \\ -3+\log(2) & -2\log(2) & -6-\log(2) \\ 2-\log(2) & 2\log(2) & \log(2)+4 \end{bmatrix}$$

In [6]

```
exp(_)
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -10 \\ -2 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Exercice(s) 5.4

5.4.1 Soit

$$T : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \\ P \mapsto (1+X^2)\, P'' - 2\, X\, P' \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, existe-t-il $h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ tel que $h^n = T$? Si oui, déterminer h.

5.4.2 Quelles sont les $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $X \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = X^3$?

5.4.3 Démontrer que

$$\exp\big(\mathrm{M}_n(\mathbb{C})\big) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

et

$$\exp\big(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})\big) = \big\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \exists B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ A = B^2\big\}$$

5.4.4 (a) Démontrer que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $\exp(A) = I_n$, alors A est diagonalisable.

(b) Résoudre l'équation $\exp(X) = I_n$.

5.4.5 Résoudre l'équation

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.4.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation

$$X^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5.4.7 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation suivante ait une solution dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

$$X^2 + 2.X - A = 0_n$$

5.4.8 Soit A la matrice de l'exemple 5.5, page 252. Trouver toutes les solutions dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation :

$$X^2 = A$$

5.4.9 Soit A la matrice de l'exemple 5.7, page 259. Trouver toutes les solutions dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation :

$$\exp(X) = A$$

5.6 Invariants de similitudes

Quand on a une relation d'équivalence, il est naturel d'essayer de caractériser ses classes d'équivalence. Nous nous intéressons ici à la relation de similitude.

Remarque 5.21

Soit $(A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $A \sim B$. Alors :

1. $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$, $\mathrm{trace}(A) = \mathrm{trace}(B)$ et $\det(A) = \det(B)$;
2. $\chi_A = \chi_B$ et $\pi_A = \pi_B$;

3. $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$ et pour toute $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$, $\dim E_A(\lambda) = \dim E_B(\lambda)$ et $\dim F_A(\lambda) = \dim F_B(\lambda)$.
   Malheureusement, ce ne sont que des conditions nécessaires. Les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   ont le même rang (4), la même trace (0), le même déterminant (0), le même polynôme caractéristique ($(-X)^7$), le même polynôme minimal (X^3), le même spectre ($\{0\}$), la même dimension des espaces propres (3) et la même dimension des espaces caractéristiques (7). Mais elles ne sont pas semblables car A^2 et B^2 n'ont pas même rang !
   Cependant, si A et B sont diagonalisables, alors :

$$A \sim B \iff \Big[\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B) \text{ et } \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim E_A(\lambda) = \dim E_B(\lambda)\Big]$$

Exemple 5.9

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $n = 2$ les classes de similitude sont :
   (a) les homothéties de rapport $\lambda \in \mathbb{C}$ (avec $\chi = (X-\lambda)^2$ et $\pi = X - \lambda$) ;
   (b) les matrices dont le spectre est $\{\lambda, \mu\}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, avec $\lambda \neq \mu$ (avec $\chi = \pi = (X-\lambda)(X-\mu)$) ;
   (c) les matrices non diagonalisables semblables à

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

   où $\lambda \in \mathbb{C}$ (avec $\chi = \pi = (X-\lambda)^2$).
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $n = 3$, les classes de similitude sont :
   (a) les homothéties (avec $\chi = -(X-\lambda)^3$ et $\pi = X - \lambda$) ;
   (b) les matrices semblables à

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

   où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda \neq \mu$ (avec $\chi = -(X-\lambda)(X-\mu)^2$ et $\pi = (X-\lambda) \times (X-\mu)$) ;
   (c) les matrices semblables à

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix}$$

   où $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ sont distincts deux à deux (avec $-\chi = \pi = (X-\lambda)(X-\mu) \times (X-\nu)$) ;
   (d) les matrices semblables à

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

   où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda \neq \mu$ (avec $-\chi = \pi = (X-\lambda)(X-\mu)^2$) ;
   (e) les matrices semblables à

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

   où $\lambda \in \mathbb{C}$ (avec $\chi = -(X-\lambda)^3$ et $\pi = (X-\lambda)^2$) ;

(f) les matrices semblables à

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ (avec $-\chi = \pi = (X-\lambda)^3$).

Remarque 5.22

La méthode générale pour montrer que $A \sim B$ est de ramener A et B à la même forme réduite : diagonale, Dunford, Frobenius (voir plus loin), etc. Cela revient souvent à résoudre des systèmes linéaires.

Exemple 5.10

Les matrices suivantes sont semblables :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Session `Wxmaxima` 5.7 – Similitude : en diagonalisant

```
(%i1) load(diag)$
(%i2) A : matrix([-1,7,1],[-1,4,0],[1,-3,1]);
```

(%o2) $\begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i3) B : matrix([1,0,1],[-2,3,-1],[-1,1,0]);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i4) jordan(A);
```

(%o4) $[[2,1],[1,2]]$

```
(%i5) jordan(B);
```

(%o5) $[[2,1],[1,2]]$

```
(%i6) P : ModeMatrix(A,%o4)$
      Q : ModeMatrix(B,%o5)$
(%i8) Q.invert(P).A.P.invert(Q);
```

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Session `Python` 5.7 – Similitude : en diagonalisant

Traduction du `Wxmaxima`.

In[2]

```
A = Matrix(3, 3,
           [-1, 7, 1, -1, 4,
            0, 1, -3, 1])
A
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

In[3]

```
B = Matrix(3, 3,
           [1, 0, 1, -2, 3,
            -1, -1, 1, 0])
```

In[3]

```
P, JA = A.jordan_form()
Q, JB = B.jordan_form()
JA == JB
```

Out[3]

```
True
```

In[4]

```
Q*P**(-1)*A*P*Q**(-1) == B
```

Out[4]

```
True
```

Définition 5.10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $x \in E$. On définit :

— $\langle x \rangle = \mathrm{Vect}(\{u^p(x),\, p \in \mathbb{N}\})$;

— $\mathscr{I}_x$ l'idéal des polynômes annulateurs x, c'est-à-dire le noyau de $\Phi : \mathbb{K}[X] \to E$ définie par $\Phi(P) = P(u)(x)$;

— π_x le polynôme minimal de x (le polynôme unitaire engendrant l'idéal $\mathscr{I}_x$).

Remarque 5.23

— Le sous-espace vectoriel $\langle x \rangle$ de E est stable par u et :

$$\dim(\langle x \rangle) = \deg \pi_x$$

par factorisation de Φ. Si :

$$\pi_x = a_0 + a_1\, X + \cdots + a_{q-1}\, X^{q-1} + X^q$$

alors $\langle x\rangle = \mathrm{Vect}(\{x, \dots, u^{q-1}(x)\})$ et la matrice de la restriction de u à $\langle x\rangle$ dans la base $(x, \dots, u^{q-1}(x))$ est la matrice compagnon de π_x (voir la définition 5.5, page 232) :

$$\mathrm{Mat}_{(x,\dots,u^{q-1}(x))}\left(u|_{\langle x\rangle}^{\langle x\rangle}\right) = C(\pi_x) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{q-1} \end{bmatrix}$$

— Il existe $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$ (voir l'exercice 4 de la série d'exercices 5.1, page 236).

Théorème 5.7 – Théorème de Frobenius

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_r) \in E^r \setminus \{(0_E, \dots, 0_E)\}$ tels que ;

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \langle x_i\rangle \text{ et, pour tout } i \in [\![1, r-1]\!],\ \pi_{x_i} | \pi_{x_{i+1}} \text{ et } \pi_{x_r} = \pi_u$$

Démonstration

Soit $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$ (voir la remarque précédente). Alors $\dim(\langle x\rangle) = \deg \pi_u$ et en particulier $x \neq 0_E$.
En notant $k = \deg \pi_u$, une base de $\langle x\rangle$ est donnée par :

$$(e_1, \dots, e_k) = \big(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)\big)$$

On complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Si $(e_1^\star, \dots, e_n^\star)$ est la base duale associée, posons :

$$G = \big\{x \in E,\ \forall i \in [\![0, k-1]\!],\ (e_k^\star \circ u^i)(x) = 0\big\}$$

Alors G est un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Démontrons que $E = \langle x\rangle \oplus G$.

- Soit $y \in \langle x\rangle \cap G$. Si $y \neq 0_E$, il existe $p \in [\![1, k]\!]$ tel que $y = \alpha_1.e_1 + \cdots + \alpha_p.e_p$ avec $\alpha_p \neq 0$. On a alors :

$$(e_k^\star \circ u^{k-p})(y) = e_k^\star(a_1.e_{k-p+1} + \cdots + a_p.e_k) = a_p \neq 0$$

  ce qui contredit $y \in G$. On a donc $y = 0_E$ d'où $\langle x \cap G = \{0_E\}$.
- Par dualité, pour montrer que $\dim G = n - \dim(\langle x\rangle) = n - k$, il suffit de montrer que

$$\dim \mathrm{Vect}(\underbrace{\{(e_k^\star \circ u^i),\ i \in [\![0, k-1]\!]\}}_{=\Gamma}) = k$$

  Considérons l'application ϕ de $\mathbb{K}[u]$ dans $\mathrm{Vect}\,\Gamma$ qui a $P(u) \in \mathbb{K}[u]$ associe $e_k^\star \circ P(u)$. Par définition de Γ, ϕ est surjective. Elle est de plus injective car si $e_k^\star \circ P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ avec $P(u) \in \mathbb{K}[u] \setminus \{0_{\mathscr{L}(E)}\}$, alors il existe $p \in [\![1, k]\!]$ tel que $P(u) = \alpha_1.\,\mathrm{id}_E + \cdots + \alpha_p.u^{p-1}$ avec $\alpha_p \neq 0$ donc :

$$0_E = (e_k^\star \circ P(u))(y) = e_k^\star(a_1.u^{k-p}(x) + \cdots + a_p.u^{k-1}(x)) = a_p \neq 0$$

  ce qui est une contradiction, donc $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ donc ϕ est injective. Finalement, $\mathbb{K}[u]$ et $\mathrm{Vect}(\Gamma)$ sont isomorphes donc la même dimension : $\dim \mathrm{Vect}(\Gamma) = \dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u = k$.

On a donc bien $E = \langle x\rangle \oplus G$ avec G stable par u. Le polynôme minimal de $u|_{\langle x\rangle}^{\langle x\rangle}$ est $\pi_x = \pi_u$ donc divise le polynôme minimal de $u|_G^G$.
On recommence alors la démonstration avec G à la place de E et $u|_G^G$ à la place de u. En un nombre fini r d'étapes, on obtient la décomposition voulue.

Remarque 5.24

— Cette décomposition est unique, dans le sens où si $(y_1, \dots, y_s) \in E^s \setminus \{(0_E, \dots, 0_E)\}$ vérifie :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} \langle y_i \rangle \text{ et, pour tout } i \in [\![1, r-1]\!],\ \pi_{y_i} | \pi_{y_{i+1}} \text{ et } \pi_{y_s} = \pi_u$$

alors $s = r$ et pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $\pi_{y_i} = \pi_{x_i}$.

— On a $\chi_u = (-1)^n \, \pi_{x_1} \cdots \pi_{x_r}$.

Définition 5.11 – Invariants de similitude

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$.

— Les polynômes $P_1, \dots, P_r$ où, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $P_i = \pi_{x_i}$ donné par le théorème 5.7, page précédente, sont appelées les *invariants de similitude de* u.

— La matrice de u dans la base $\mathscr{E}$ de E adaptée à la décomposition de E du théorème 5.7, page précédente :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \mathrm{Diag}\left(C(P_1) \,|\, \cdots \,|\, C(P_r)\right)$$

est appelée *forme de Frobenius*.

Théorème 5.8 – Caractérisation des classes de similitudes

Deux matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si, elles sont les mêmes invariants de similitude.

Démonstration

C'est une application directe du théorème de Frobenius (théorème 5.7, page précédente).

Remarque 5.25

Les théorèmes 5.7, page précédente et 5.8, de la présente page permettent de montrer de nombreux résultats théoriques, par exemple :

— la réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents (voir la proposition 5.3, page 249) ;

— le fait que toute matrice est semblable à sa transposée ;

— si deux matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables en tant que matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{L})$, où $\mathbb{L}$ est un surcorps de $\mathbb{K}$, alors elles sont semblables sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (en effet, par unicité, les invariants de similitude dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont les invariants de similitudes dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{L})$).

Exemple 5.11

Si $C(P)$ est une matrice compagnon, sa forme de Jordan ne fait apparaître qu'un et un seul bloc pour chaque valeur propre λ (λ est une racine de P et la taille du bloc est son ordre de multiplicité). On peut ainsi obtenir la forme de Jordan d'une matrice à partir de sa forme de Frobenius.

Session `Wxmaxima` 5.8 – De Frobenius à Jordan

```
(%i1) load(diag)$

(%i2) A : polytocompanion((X-2)^4,X);
```

(%o2)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

(%i3) dispJordan(jordan(A));

$$\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix} \quad (\%o3)$$

(%i4) B : polytocompanion((X-1)^2*(X-2)^3,X);

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&8\\1&0&0&0&-28\\0&1&0&0&38\\0&0&1&0&-25\\0&0&0&1&8\end{bmatrix} \quad (\%o4)$$

(%i5) dispJordan(jordan(B));

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{bmatrix} \quad (\%o5)$$

(%i6) C : polytocompanion((X-3)^2,X)$
CC : diag([C,C,C]);

$$\begin{bmatrix}0&-9&0&0&0&0\\1&6&0&0&0&0\\0&0&0&-9&0&0\\0&0&1&6&0&0\\0&0&0&0&0&-9\\0&0&0&0&1&6\end{bmatrix} \quad (\%o7)$$

(%i8) dispJordan(jordan(CC));

$$\begin{bmatrix}3&1&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0\\0&0&3&1&0&0\\0&0&0&3&0&0\\0&0&0&0&3&1\\0&0&0&0&0&3\end{bmatrix} \quad (\%o8)$$

Session Python 5.8 – De Frobenius à Jordan

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```
def Compagnon(p):
    P = Poly(p, x)
    n = P.degree()
    L = P.all_coeffs()[1:]

    A = zeros(n, n)
    for i in range(n-1):
        A[i+1, i] = 1
    for i in range(n):
        A[i, n-1] = -L[n-1-i]
    return(A)
```

In [3]

```
Compagnon((x-2)**4)
```

Out [3]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

In [4]

```
P, J = _.jordan_form()
J
```

Out [4]

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

In [5]

```
P, J = Compagnon(
    (x-1)**2*(x-2)**3
).jordan_form()
J
```

Out [5]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

In [6]

```
C = Compagnon((x-3)**3)
CC = Matrix(BlockDiagMatrix(C,
                            C,
                            C))
```

In [7]

```
P, J = CC.jordan_form()
J
```

Out [7]

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Remarque 5.26

On peut montrer que si une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}$ a pour invariants de similitude $P_1, \dots, P_r$, alors :

$$\exists (P,Q) \in \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{K}[X]\right)^2,\ P\centerdot(A - X.I_n)\centerdot Q = \mathrm{Diag}(I_{n-r}\,|\,P_1\,|\,\dots\,|P_r)$$

On parle alors de *forme de Smith.*
On a un algorithme simple (à base de pivots, voir plus bas) qui permet de calculer cette forme et ainsi trouver les invariants de similitude de A et sa forme de Frobenius. Cela permet notamment de répondre à la question :

Les matrices A et B sont-elles semblables ?

De plus, dans cet algorithme, il n'y a pas besoin de factoriser les polynômes, cela fonctionne dans n'importe quel corps.

⚠ Les matrices P et Q du théorème sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}[X])$, leurs déterminants sont donc inversibles dans $\mathbb{K}[X]$, ces déterminants sont donc des polynômes constants non nuls !
On note $M = A - X.I_n = [m_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et

$$\delta(M) = \min\left\{\deg(m_{i,j}),\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ et } m_{i,j} \neq 0\right\}$$

Étape 1 Par permutations de lignes et de colonnes, on se ramène au cas où $\deg m_{1,1} = \delta(M)$.

Étape 2 S'il existe sur la première ligne (ou la première colonne) un élément $m_{1,k}$ (ou $m_{k,1}$) non multiple de $m_{1,1}$, on le remplace (en utilisant une transvection) par le reste de la division euclidienne de $m_{1,k}$ (ou $m_{k,1}$) par $m_{1,1}$ et on revient à l'étape 1 en permutant les colonnes (ou les lignes) 1 et k.

Etape 3 L'étape 2 a pour effet de diminuer strictement $\delta(M)$, elle ne peut donc se réaliser qu'un nombre fini de fois. Ainsi, on se ramène au cas où tous les éléments de la première ligne et de la première colonne sont multiples de $m_{1,1}$. On utilise alors $m_{1,1}$ comme pivot pour les annuler.

Étape 4 On obtient une matrice de la forme

$$\left[\begin{array}{c|c} m_{1,1} & 0 \\ \hline 0 & M_1 \end{array}\right]$$

et, si $m_{1,1}$ ne divise pas un des éléments de M_1, par exemple $m_{i,j}$, on fait apparaître (par des transvections) le reste de la division euclidienne de $m_{i,j}$ par $m_{1,1}$ puis par des permutations on l'échange avec $m_{1,1}$ et on recommence l'étape 1.

Étape 5 Au bout d'un nombre fini d'étapes, on obtient une matrice de la forme

$$\left[\begin{array}{c|c} m_{1,1} & 0 \\ \hline 0 & M_1 \end{array}\right]$$

où $m_{1,1}$ divise tous les éléments de M_1 et on recommence l'étape 1 à partir de la matrice M_1 qui est de taille strictement plus petite.

Exemple 5.12

Soit :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

La forme de Smith correspondante est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (X+2)^3 \end{bmatrix}$$

donc les invariants de similitude de A sont $(\pi_A = (X+2)^3)$ (un seul élément). On en déduit que sa forme de Frobenius est :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Session `Wxmaxima` 5.9 – Forme de Smith

(%i1) `A : matrix([-3,-3,2],[1,1,-2],[2,4,-4]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

(%i2) `ratsimp(A-X*ident(3));`

(%o2) $\begin{bmatrix} -X-3 & -3 & 2 \\ 1 & 1-X & -2 \\ 2 & 4 & -X-4 \end{bmatrix}$

(%i3)
```
rowop(%,1,2,%[1,1])$
rowop(%,3,2,%[3,1])$
columnop(%,2,1,%[2,2])$
columnop(%,3,1,%[2,3])$
ratsimp(rowswap(%,1,2));
```

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -X^2-2X & -2X-4 \\ 0 & 2X+2 & -X \end{bmatrix}$

(%i8)
```
columnop(%,2,3,-2)$
ratsimp(rowop(%,3,3,1/2));
```

(%o9) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -X^2-6X-8 & -2X-4 \\ 0 & 1 & -\frac{X}{2} \end{bmatrix}$

(%i10)
```
rowswap(%,2,3)$
rowop(%,3,2,%[3,2])$
ratsimp(columnop(%,3,2,%[2,3]));
```

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{X^3+6X^2+12X+8}{2} \end{bmatrix}$

```
(%i13) rowop(%,3,3,3)$
       factor(%);
```

$$(\%o14)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (X+2)^3 \end{bmatrix}$$

Session Python 5.9 – Forme de Smith

Traduction du Wxmaxima.

In[2]

```python
X = Symbol('X')
A = Matrix(3, 3,
[-3, -3, 2, 1, 1, -2, 2, 4, -4])
A-X*eye(3)
```

Out[2]

$$\begin{bmatrix} -X-3 & -3 & 2 \\ 1 & 1-X & -2 \\ 2 & 4 & -X-4 \end{bmatrix}$$

In[3]

```python
_.elementary_row_op('n->n+km',
row1=0,
row2=1,
k=-_[0, 0])
```

Out[3]

$$\begin{bmatrix} 0 & (1-X)(X+3)-3 & -2X-4 \\ 1 & 1-X & -2 \\ 2 & 4 & -X-4 \end{bmatrix}$$

In[4]

```python
_.elementary_row_op('n->n+km',
row1=2,
row2=1,
k=-_[2, 0]).applyfunc(factor)
```

Out[4]

$$\begin{bmatrix} 0 & -X(X+2) & -2(X+2) \\ 1 & 1-X & -2 \\ 0 & 2(X+1) & -X \end{bmatrix}$$

In[5]

```python
_.elementary_col_op('n->n+km',
col1=1,
col2=0,
k=-_[1, 1]).applyfunc(factor)
```

Out[5]

$$\begin{bmatrix}0 & -X\left(X+2\right) & -2\left(X+2\right)\\1 & 0 & -2\\0 & 2\left(X+1\right) & -X\end{bmatrix}$$

In[6]

```python
_.elementary_col_op('n->n+km',
col1=2,
col2=0,
k=-_[1, 2]).applyfunc(factor)
```

Out[6]

$$\begin{bmatrix}0 & -X\left(X+2\right) & -2\left(X+2\right)\\1 & 0 & 0\\0 & 2\left(X+1\right) & -X\end{bmatrix}$$

In[7]

```python
_.elementary_row_op('n<->m',
row1=0,
row2=1)
```

Out[7]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -X\left(X+2\right) & -2\left(X+2\right)\\0 & 2\left(X+1\right) & -X\end{bmatrix}$$

In[8]

```python
_.elementary_col_op('n->n+km',
col1=1,
col2=2,
k=2).applyfunc(factor)
```

Out[8]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -\left(X+2\right)\left(X+4\right) & -2\left(X+2\right)\\0 & 2 & -X\end{bmatrix}$$

In [9]

```
_.elementary_row_op('n->kn',
row=2,
k=S(1)/2)
```

Out [9]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -\left(X+2\right)\left(X+4\right) & -2\left(X+2\right)\\0 & 1 & -\frac{X}{2}\end{bmatrix}$$

In [10]

```
_.elementary_row_op('n<->m',
row1=1,
row2=2)
```

Out [10]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -\frac{X}{2}\\0 & -\left(X+2\right)\left(X+4\right) & -2\left(X+2\right)\end{bmatrix}$$

In [11]

```
_.elementary_row_op('n->n+km',
row1=2,
row2=1,
k=-_[2, 1]).applyfunc(factor)
```

Out [11]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -\frac{X}{2}\\0 & 0 & -\frac{\left(X+2\right)^{3}}{2}\end{bmatrix}$$

In [12]

```
_.elementary_col_op('n->n+km',
col1=2, col2=1,
k=-_[1, 2]).applyfunc(factor)
```

Out [12]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -\frac{\left(X+2\right)^{3}}{2}\end{bmatrix}$$

In[13]

```
_.elementary_row_op('n->kn',
row=2,
k=-2)
```

Out[13]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (X+2)^3\end{bmatrix}$$

Exemple 5.13

Soit :

$$A = \begin{bmatrix}-3 & -2 & 3\\ -4 & -1 & 3\\ -8 & -4 & 7\end{bmatrix}$$

La forme de Smith correspondante est

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & X-1 & 0\\ 0 & 0 & (X-1))^2\end{bmatrix}$$

donc les invariants de similitude de A sont $(X-1, \pi_A = (X-1)^2)$. On en déduit que sa forme de Frobenius est :

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Session Wxmaxima 5.10 – Invariants de similitude

(%i1) `A : matrix([-3,-2,3],[-4,-1,3],[-8,-4,7]);`

(%o1) $\begin{bmatrix}-3 & -2 & 3\\ -4 & -1 & 3\\ -8 & -4 & 7\end{bmatrix}$

(%i2) `A-X*ident(3);`

(%o2) $\begin{bmatrix}-X-3 & -2 & 3\\ -4 & -X-1 & 3\\ -8 & -4 & 7-X\end{bmatrix}$

(%i3)
```
rowop(%,2,2,5/4)$
rowop(%,1,2,%[1,1])$
rowop(%,3,2,%[3,1])$
columnop(%,2,1,%[2,2])$
columnop(%,3,1,%[2,3])$
ratsimp(rowswap(%,1,2));
```

(%o8) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{X^2+4\,X-5}{4} & -\frac{3\,X-3}{4}\\ 0 & 2\,X-2 & 1-X\end{bmatrix}$

```
(%i9) rowswap(%,2,3)$
      columnswap(%,2,3)$
      rowop(%,3,2,3/4)$
      columnop(%,3,2,-2)$
      ratsimp(rowop(%,2,2,2));
```

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{X^2-2\,X+1}{4} \end{bmatrix}$

```
(%i14) rowop(%,3,3,-3);
```

(%o14) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X^2-2\,X+1 \end{bmatrix}$

Session Python 5.10 – Invariants de similitude

Traduction du Wxmaxima.

In [2]

```
A = Matrix(3, 3,
           [-3, -2, 3, -4, -1,
            3, -8, -4, 7])
A
```

Out [2]

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & 3 \\ -8 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

In [3]

```
A-x*eye(3)
```

Out [3]

$$\begin{bmatrix} -x-3 & -2 & 3 \\ -4 & -x-1 & 3 \\ -8 & -4 & 7-x \end{bmatrix}$$

In [4]

```
_.elementary_row_op('n->kn',
                    row=1,
                    k=-S(1)/4)
```

Out [4]

$$\begin{bmatrix} -x-3 & -2 & 3 \\ 1 & \frac{x}{4}+\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -8 & -4 & 7-x \end{bmatrix}$$

In [5]

```
_.elementary_row_op('n->n+km',
                     row1=0,
                     row2=1,
                     k=-_[0,0])
```

Out [5]

$$\begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\right)(x+3)-2 & \frac{3}{4}-\frac{3x}{4} \\ 1 & \frac{x}{4}+\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -8 & -4 & 7-x \end{bmatrix}$$

In [6]

```
_.elementary_row_op('n->n+km',
                     row1=2,
                     row2=1,
                     k=-_[2,0])
```

Out [6]

$$\begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\right)(x+3)-2 & \frac{3}{4}-\frac{3x}{4} \\ 1 & \frac{x}{4}+\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 2x-2 & 1-x \end{bmatrix}$$

In [7]

```
_.elementary_col_op('n->n+km',
                     col1=1,
                     col2=0,
                     k=-_[1,1])
```

Out [7]

$$\begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\right)(x+3)-2 & \frac{3}{4}-\frac{3x}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 2x-2 & 1-x \end{bmatrix}$$

In [8]

```
_.elementary_col_op('n->n+km',
                     col1=2,
                     col2=0,
```

```
                            k=-_[1,2])
```

Out[8]

$$\begin{bmatrix}0 & \left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\right)(x+3)-2 & \frac{3}{4}-\frac{3x}{4}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2x-2 & 1-x\end{bmatrix}$$

In[9]

```
_.elementary_row_op('n<->m',
                    row1=0,
                    row2=1
                   ).applyfunc(factor)
```

Out[9]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{(x-1)(x+5)}{4} & -\frac{3(x-1)}{4}\\ 0 & 2(x-1) & 1-x\end{bmatrix}$$

In[10]

```
_.elementary_row_op('n<->m',
                    row1=1,
                    row2=2)
```

Out[10]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2(x-1) & 1-x\\ 0 & \frac{(x-1)(x+5)}{4} & -\frac{3(x-1)}{4}\end{bmatrix}$$

In[11]

```
_.elementary_col_op('n<->m',
                    col1=1,
                    col2=2)
```

Out[11]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-x & 2(x-1)\\ 0 & -\frac{3(x-1)}{4} & \frac{(x-1)(x+5)}{4}\end{bmatrix}$$

In[12]

```python
_.elementary_row_op('n->kn',
                    row=1,
                    k=-1)
```

Out[12]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & x-1 & -2\left(x-1\right)\\0 & -\frac{3(x-1)}{4} & \frac{(x-1)(x+5)}{4}\end{bmatrix}$$

In[13]

```python
_.elementary_col_op('n->n+km',
                    col1=2,
                    col2=1,
                    k=2).applyfunc(ratsimp)
```

Out[13]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & x-1 & 0\\0 & \frac{3}{4}-\frac{3x}{4} & \frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

In[14]

```python
_.elementary_row_op('n->n+km',
                    row1=2,
                    row2=1,
                    k=S(3)/4
                   ).applyfunc(ratsimp)
```

Out[14]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & x-1 & 0\\0 & 0 & \frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

In[15]

```python
_.elementary_col_op('n->kn',
                    col=2,
                    k=4)
```

Out[15]

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & x-1 & 0\\ 0 & 0 & x^2-2x+1\end{bmatrix}$$

Exercice(s) 5.5

5.5.1 Déterminer la forme de Frobenius de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -5 & -6\\ 5 & 7 & 5 & 5 & 4\\ -2 & 0 & -1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & -1 & 4 & 5\\ -2 & -6 & -3 & -6 & -6\end{bmatrix}$$

5.5.2 Démontrer que :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1\\ -1 & 4 & 0\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

sont semblables.

5.5.3 Démontrer que si $n \in \{2,3\}$, deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si, elles ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal. Démontrer que ce résultat est faux pour $n \geq 4$.

5.5.4 Résoudre :

$$A + {}^t\mathrm{Com}(A) = z.I_n,\ \text{où } A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } z \in \mathbb{C}$$

5.5.5 Démontrer que :

$$\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),\ \chi_A = (-1)^n \pi_A\}$$

est un ouvert dense de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

5.5.6 Démontrer que l'adhérence de :

$$\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = I_n\}$$

est l'ensemble des matrices A telles que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.

5.5.7 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

(a) On suppose que P est scindé dans $\mathbb{K}$, à quelle condition $C(P)$ est-elle diagonalisable ?

(b) On suppose que P est irréductible, montrer qu'en ce cas $\mathbb{K}[C(P)]$ est un corps P admet au moins une racine (laquelle ?). En déduire la construction d'un corps à 4 éléments et d'un corps à 8 éléments.

5.7 Un exemple d'utilisation de la réduction sur un corps fini

Dans tout ce chapitre, nous avons travaillé dans un corps commutatif quelconque, et plus nécessairement dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Voici un petit exemple de synthèse montrant comment on peu utiliser les notions vues ici dans un corps fini.
Cet exercice a été posé à un oral de concours dans les années 70...

Exemple 5.14

Soit $(a, b, u_0, u_1) \in \mathbb{Z}^2$, on construit successivement les suites récurrentes :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n \text{ et } v_n = u_n \mod 10$$

Nous allons démontrer que

1. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.
2. Et sa période est dans l'ensemble des diviseurs stricts de 120.

Démonstration de la périodicité

La suite $\big((v_n, v_{n+1})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[\![0, 9]\!]^2$ qui est fini. Il existe donc deux entiers distincts $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $p < q$ tels que

$$(v_p, v_{p+1}) = (v_q, v_{q+1})$$

Il est alors facile de démontrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \ \Rightarrow\ v_{n+q-p} = v_n$$

la suite est donc périodique à partir du rang p, et sa période est un diviseur de $q - p$.

Démonstration des valeurs possibles de la période

On peut considérer qu'on travaille en fait dans l'anneau $\mathbb{Z}/10\,\mathbb{Z}$ qui, par théorème chinois, est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\,\mathbb{Z}$. Nous pouvons donc travailler dans des corps.

1. *Dans* $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$ La vectorialisation de la suite (en notant $\overline{a}$ la classe de a dans $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$) donne

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{bmatrix} \overline{u_{n+2}} \\ \overline{u_{n+1}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{bmatrix}}_{=A} \bullet \begin{bmatrix} \overline{u_{n+1}} \\ \overline{u_n} \end{bmatrix}$$

On obtient alors que A est semblable à une matrice parmi ($\lambda \in \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$)

$$\underbrace{\lambda.I_2}_{\text{impossible}}\ ,\quad \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & \overline{1} \\ \overline{0} & \lambda \end{bmatrix}}_{\text{de période 1 ou 2}}\ ,\quad \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{bmatrix}}_{\text{de période 1}}$$

si son polynôme caractéristique est scindé.

Lorsque son polynôme caractéristique n'est pas scindé, de degré 2, il est alors irréductible (c'est $X^2 + X + \overline{1}$) donc, en posant $\omega = C(\chi_A)$, et en se plaçant dans $M_2(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}[\omega])$, les racines de χ_A sont alors ω et $I_2 + \omega$, distinctes. Donc A est semblable à $\mathrm{Diag}(\omega, I_2 + \omega)$. Or

$$\omega^2 = I_2 + \omega,\ \omega^3 = I_2,\ \omega^4 = \omega$$

la période est de 3.

Dans $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$ les périodes de la suite $(\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont, à partir d'un certain rang 1, 2 ou 3.

2. *Dans* $\mathbb{Z}/5\,\mathbb{Z}$ (Nous noterons toujours les classes sous la forme $\overline{a}$) Le même raisonnement nous conduit, lorsque le polynôme caractéristique est scindé aux matrices ($(\lambda, \beta) \in \mathbb{Z}/5\,\mathbb{Z}^2$)

$$\underbrace{\lambda.I_2}_{\text{impossible}}\ ,\quad \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & \overline{1} \\ \overline{0} & \lambda \end{bmatrix}}_{\text{de période 1, 5 ou 20}}\ ,\quad \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{\lambda} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{\beta} \end{bmatrix}}_{\text{de période 1, 2 ou 4}}$$

En effet, on sait d'après le petit théorème de Fermat que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ n^5 \equiv n \mod 5$$

ce qui justifie la période 1, 2 ou 4 pour la troisième forme de matrice. De plus, si $n \in \mathbb{N}$, à l'aide de la formule du binôme de Newton, on a

$$\begin{bmatrix} \lambda & \overline{1} \\ \overline{0} & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\,\lambda^{n-1} \\ \overline{0} & \lambda^n \end{bmatrix}$$

si $\lambda \neq \overline{0}$ (cas évident où la période est 1, à partir du second rang) et $\lambda \neq \overline{1}$ (cas simple ou la périodicité est 5, la première condition ci-dessous étant inutile), la matrice est égale à I_2 si

$$\underbrace{n \equiv 2 \text{ ou } 4 \mod 5}_{\lambda^n = \overline{1}} \text{ et } \underbrace{n \equiv 0 \mod 5}_{n\,\lambda^{n-1} = \overline{0}}$$

ce qui nous donne une période de 10 ou 20.

Lorsque le polynôme caractéristique de A n'est plus scindé, il est irréductible (car de degré 2), en posant $\omega = C(\chi_A)$, et en travaillant dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\,\mathbb{Z}[\omega]$ qui est de cardinal 25, on a (même démonstration que Fermat)

$$\forall\lambda \in \mathbb{K}^*,\ \lambda^{24} = I_2$$

on a donc λ de période 3, 6, 8, 12 ou 24. En enlevant celle qu'on connaît (1, 2 et 4 correspondant aux matrices précédemment vues)

Dans $\mathbb{Z}/5\,\mathbb{Z}$ les périodes de la suite $(\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont, à partir d'un certain rang dans

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20, 24\}$$

Finalement les périodes possibles sont, d'après le théorème chinois (on fait le PPCM des périodes dans $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/5\,\mathbb{Z}$)

$$\Delta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 60\}$$

Remarque 5.27

Juste pour le plaisir, construisons une situation où la période est 60. Le polynôme caractéristique dans $\mathbb{Z}/\,\mathbb{Z}$ doit être X^2+X+1 (pour obtenir le 3), et être de la forme $(X-\lambda)^2$ dans $\mathbb{Z}/5\,\mathbb{Z}$, ($\lambda \notin \{\overline{0}, \overline{1}\}$), la matrice étant non-diagonalisable (pour obtenir le 20). Prenons, par exemple $\lambda = \overline{2}$. On trouve donc que

$$a \equiv 1 \mod 2,\ a \equiv 4 \mod 5 \text{ et } b \equiv 1 \mod 2,\ b \equiv 1 \mod 5$$

donc, par exemple, $a = 9$ et $b = 1$.
La vérification par le calcul donne, pour les 63 premiers termes (avec $u_0 = u_1 = 1$)

1, 1, 0, 1, 9, 2, 7, 5, 2, 3, 9, 4, 5, 9, 6, 3, 3, 0, 3, 7, 6, 1, 5, 6, 9, 7, 2, 5, 7, 8, 9, 9, 0, 9, 1, 8, 3, 5, 8, 7, 1, 6, 5, 1, 4, 7, 7, 0, 7, 3, 4, 9, 5, 4, 1, 3, 8, 5, 3, 2, 1, 1, 0

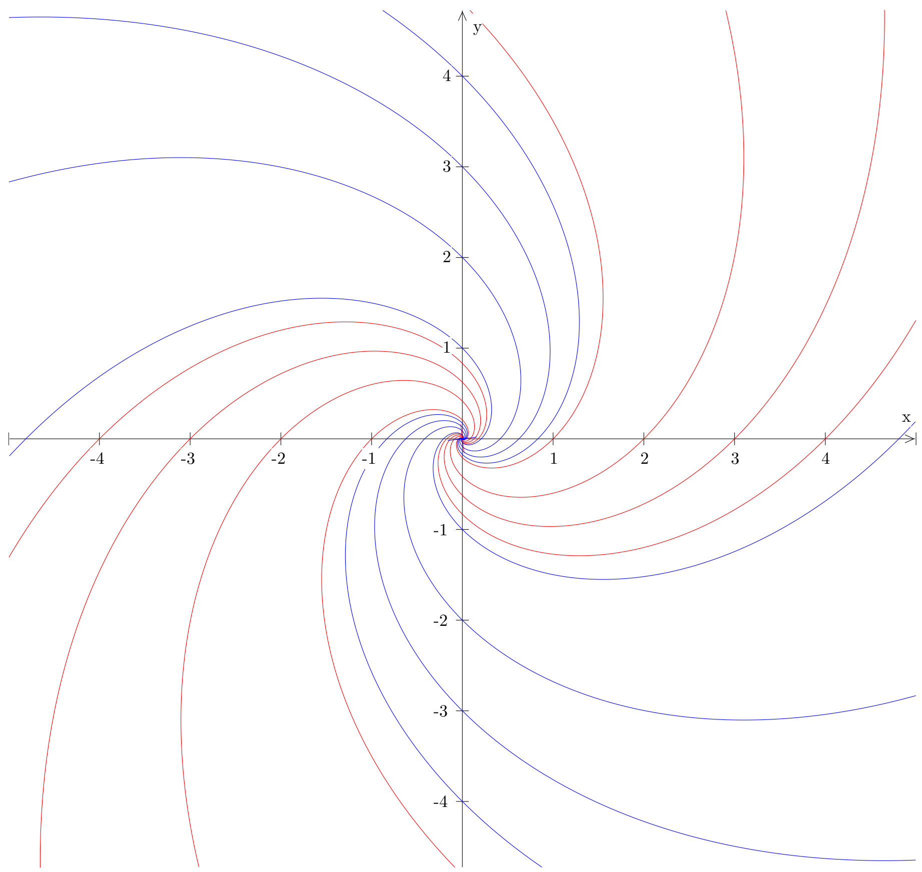
Définitions

Théorèmes

Commandes Wxmaxima

Commandes `Python`

Figure 5.1 – Similitude



Trajectoires du système : $\quad X' = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \bullet X$