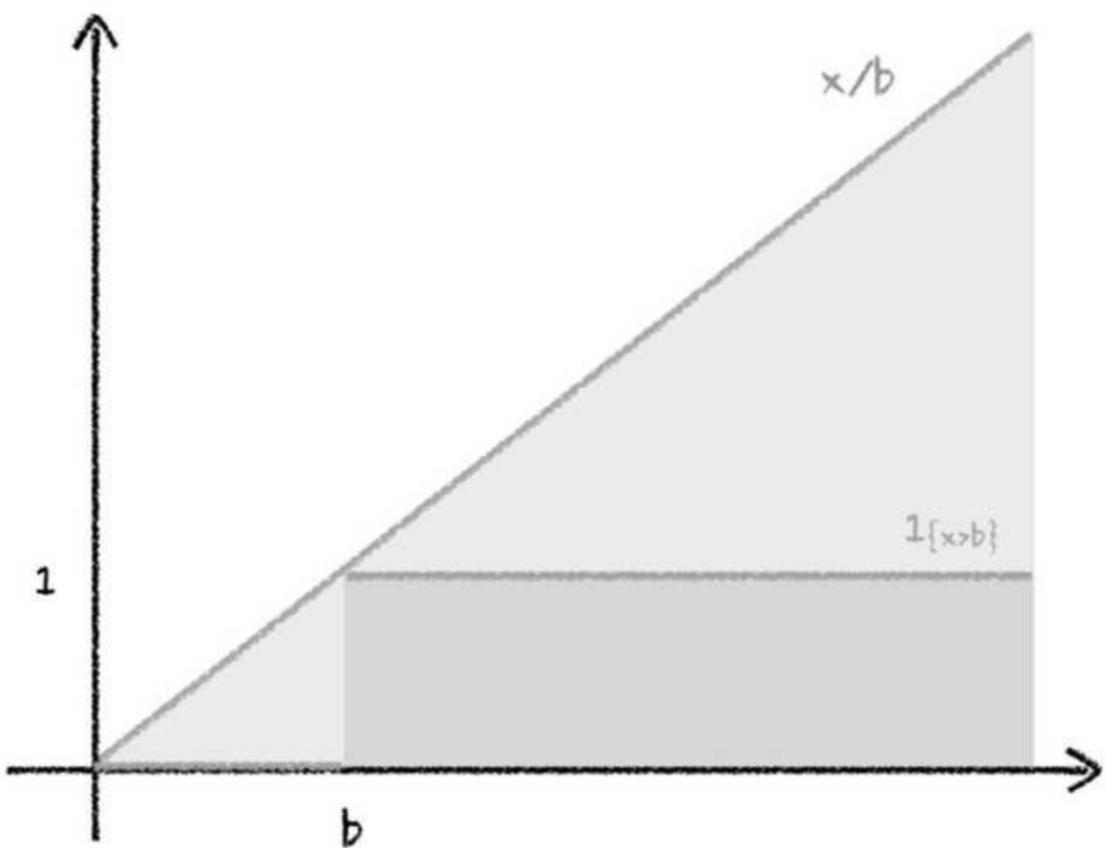
Monday, November 20, 2017

切比雪夫不等式 Chebyshev's Inequality

几何直观证明：

再给出直观证明之前，我们需要引入示性函数(indicator function) $I_{\{A\}}$，示性函数只有在事件A成立时才返回1，否则为0. 我们需要使用的一个引理是，当事件是以下形式，如 $A=\{X>a\}$ 时，示性函数的期望可以表示事件发生的概率，即 $\mathbb{E}\left(I_{\{A\}}\right)=\mathbb{P}(A)$. 当然，A的形式不仅限于 $A=\{X>a\}$，$A=\{X<a\}$ 或 $A=\{|X|>a\}$ 时都是成立的。

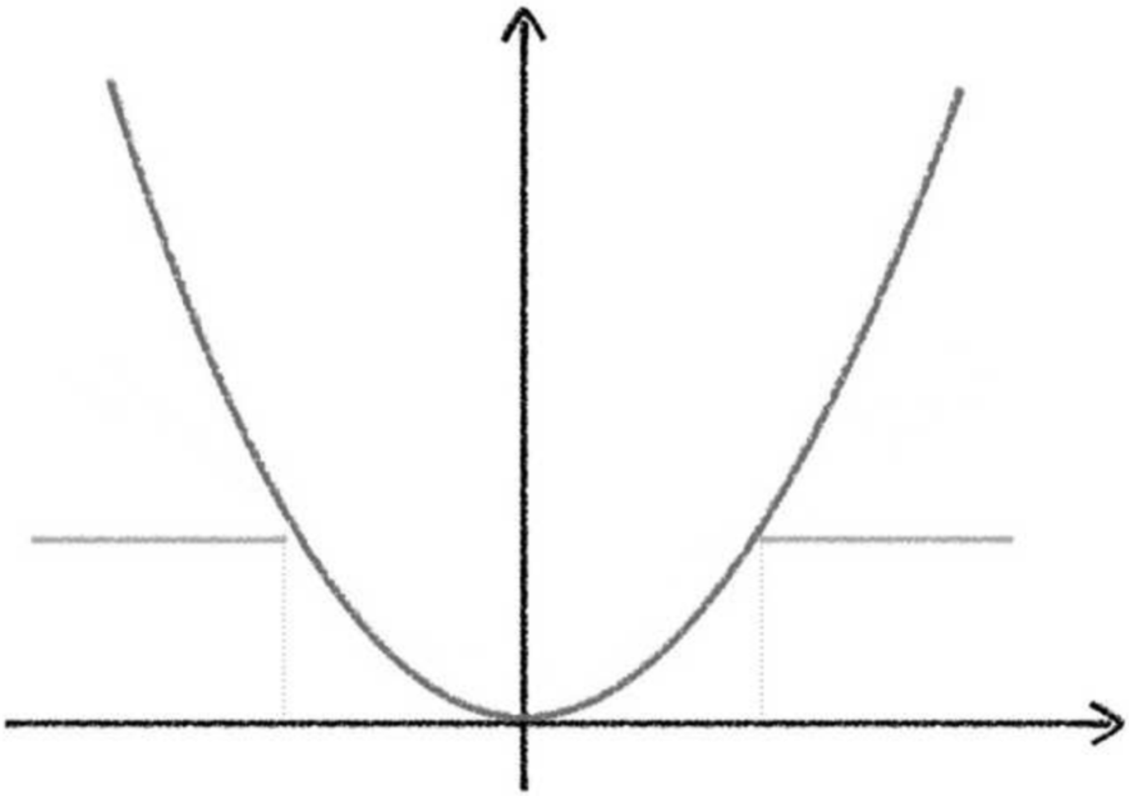
引入示性函数后，我们就可以把概率问题转移到更直观的空间上。举例而言，我们知道，对于任意的非负x和b，$I_{\{x\geq b\}}\leq\frac{x}{b}$. 从几何的角度而言，即 $\frac{x}{b}$ 在第一象限永远不低于 $I_{\{x\geq b\}}$. 如图所示



因此，将自变量x变为**随机变量X**，以上不等式也成立，再对不等式两边取均值，我们可以得到**Markov**不等式:

$$\mathbb{P}(X\geq b)\leq\frac{\mathbb{E}(X)}{b}$$

对于Chebyshev不等式，我们也可以用类似的示性函数来几何直观证明。对于任意的x, a和b, $I_{\{|x-a|\geq b\}} \leq \frac{(x-a)^2}{b^2}$.右半部分是一个二次函数，而左边是两端取1的示性函数，这个不等式可能难以直接想象出来，不过我们可以画出它的几何形状，从而得到更直观的感觉。



如图所示，二次函数的值在任意点都不会低于示性函数。其中，两坐标轴的交点其实为(a,0)，而两条虚线对应的x轴的值分别为a-b与a+b. 重复上述讨论，将自变量x变为随机变量X，以上不等式也成立，再对不等式两边取均值，同时将a选择为随机变量X的均值 $\mathbb{E}(X)$,我们可以得到**Chebyshev不等式**: $\boxed{\mathbb{P}(|X-\mu|\geq b) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{b^2}}$.

马尔科夫不等式是这样的:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

我们把 $|X-\mu|$ 代入:

$$P(|X-\mu| > a) \leq \frac{E(|X-\mu|)}{a}$$

很显然等价于:

$$P((X-\mu)^2 \geq a^2) \leq \frac{E((X-\mu)^2)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}$$

令 $k = \frac{a}{\sigma}$ ，容易得到 $k > 0$ ：

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$