概率积分变换

- X有连续严格递增的CDF F_X ，定义随机变量Y为 $Y = F_X(X)$，则Y为[0,1]上的均匀分布，即
  $Y \sim Uniform(0,1) \quad \mathbb{P}(Y \le y) = y, \quad 0 \le y \le 1$

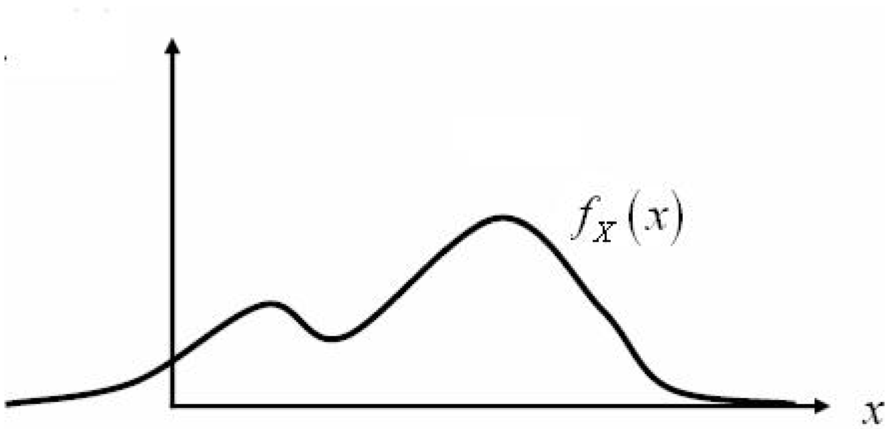
- 令 $X \sim F_X^{-1}(Y),\ Y \sim Uniform(0,1)$
- 则

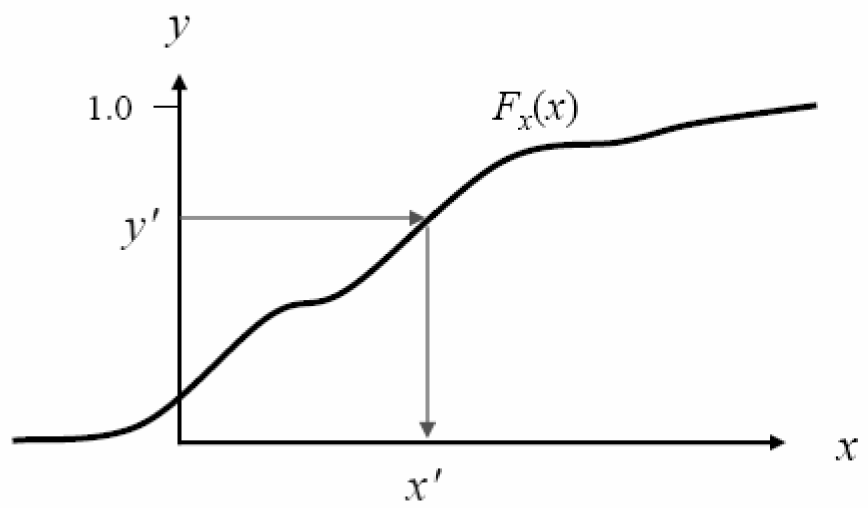
$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \le x) &= \mathbb{P}\left(F_X^{-1}(Y) \le x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Y \le F_X(x)\right) \\
&= F_X(x) \qquad \left(\quad \mathbb{P}(Y \le c) = c \quad \right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\therefore \quad X \sim F_X}$$

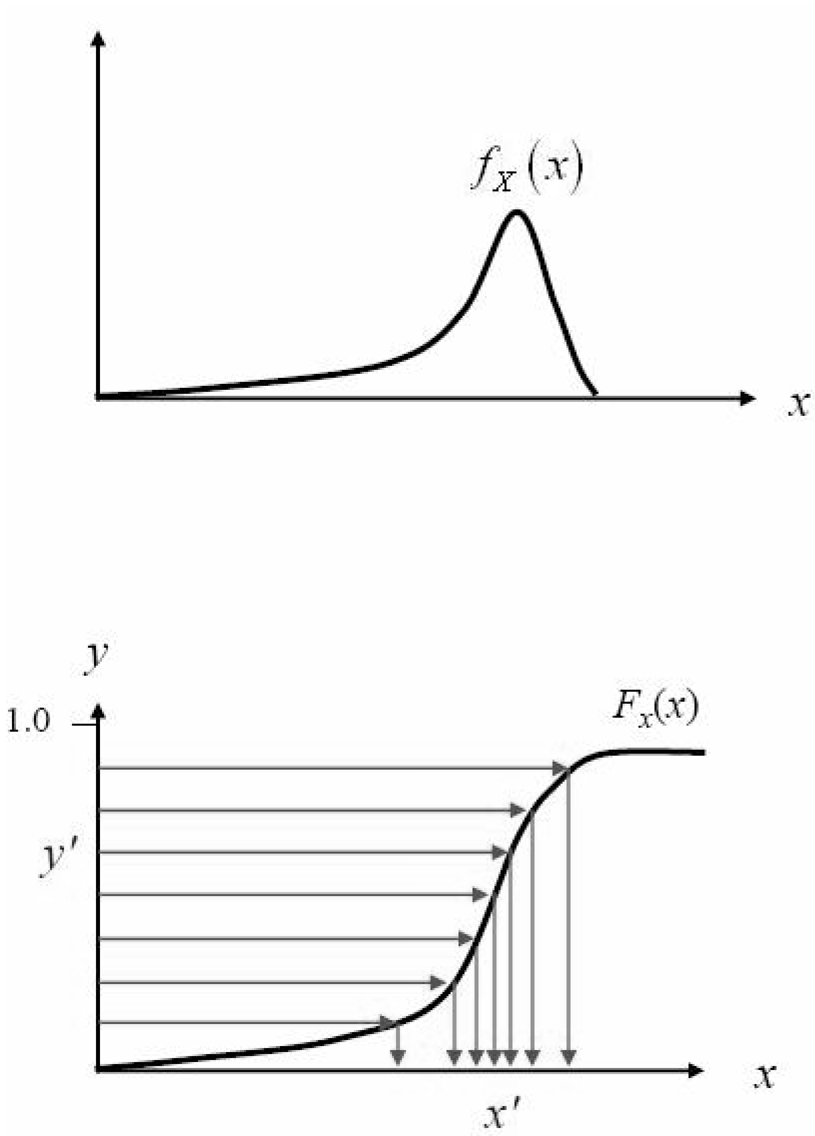
对任意分布采样

- 通过对均匀分布采样，实现对任意分布的采样
  - 从 $Uniform(0,1)$ 随机产生一个样本y
  - 令 $y = F_X(x)$ ，其中 $F_X(x)$ 为X的CDF
  - 计算 $x = F_X^{-1}(y)$
  - 结果 x为对 $f_X(x)$ 的采样





对任意分布采样



对任意分布采样

- 例：对指数分布采样

$$X \sim Exponential(\beta) \qquad f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 1 - \int_{x}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= 1 - \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} dx = 1 - e^{-x/\beta}$$

$$Y \sim Uniform(0,1)$$

$$y = F_X(x) = 1 - e^{-x/\beta}$$

$$x = F_X^{-1}(y) = -\beta \ln(1 - y)$$

变形

- 若X为离散型随机变量，其取值为 $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$，
- 则可以通过以下方式产生随机样本 $X \sim F_X\left(x\right)$
  - 从$Uniform(0,1)$随机产生一个样本y
  - 若$F_X\left(x_i\right) < y < F_X\left(x_{i+1}\right)$，令 $x = x_{i+1}$
- 定义 $x_0 = -\infty, F_X\left(x_0\right) = 0$

- 例：为了从 $X \sim Bernoulli\left(p\right)$产生一个随机样本，从 $Y \sim Uniform(0,1)$产生一个随机样本y，则

$$X = \begin{cases} 0 & if \;\; 0 < y \le 1 - p \\ 1 & if \;\; 1 - p < y \le 1 \end{cases}$$

但采样问题还没有解决

- 因为
  - 通常不能确定$F_X\left(x\right)$
  - 通常不能对$F_X\left(x\right)$ 求逆
- 所以：有时需要间接方法
  - Monte Carlo

Matlab中有常见分布的随机数产生函数