# 组合数学 2

## 斯特林数 & 容斥

harryzhr

2025 年 1 月 23 日

# 第二类斯特林数

由于第二类斯特林数更常见也更常用，且《具体数学》先介绍的是第二类斯特林数，所以这里我们也先介绍第二类斯特林数。

$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ 表示将 $n$ 个元素划分成 $k$ 个**非空子集**的方案数。

# 第二类斯特林数

由于第二类斯特林数更常见也更常用，且《具体数学》先介绍的是第二类斯特林数，所以这里我们也先介绍第二类斯特林数。

$\left\{ n \atop k \right\}$ 表示将 $n$ 个元素划分成 $k$ 个**非空子集**的方案数。

$n$ 较小时第二类斯特林数的值如下：

| $n$ | $\left\{ n \atop 0 \right\}$ | $\left\{ n \atop 1 \right\}$ | $\left\{ n \atop 2 \right\}$ | $\left\{ n \atop 3 \right\}$ | $\left\{ n \atop 4 \right\}$ | $\left\{ n \atop 5 \right\}$ | $\left\{ n \atop 6 \right\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | | |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | | | |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | | |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | |
| 6 | 0 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 |

# 第二类斯特林数的特殊值与递推式

第二类斯特林数的一些特殊值如下：

$$\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = [n = 0], \quad \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = 1(n > 0)$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} = 2^{n-1} - 1(n > 0), \quad \begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = \binom{n}{2}$$

# 第二类斯特林数的特殊值与递推式

第二类斯特林数的一些特殊值如下：

$$\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = [n=0], \quad \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = 1(n>0)$$
$$\begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} = 2^{n-1} - 1(n>0), \quad \begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = \binom{n}{2}$$

## 第二类斯特林数的递推式

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}$$

即考虑第 $n$ 个元素放在哪个集合。要么在已经有的 $k$ 个非空集合里选一个放进去，要么自己单开一个新的集合。

# 第二类斯特林数的生成函数

# 第二类斯特林数的生成函数

一个盒子装 $n$ 个物品且盒子非空的方案数是 $[n>0]$。我们可以写出它的 EGF 为

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x-1$$

由 EGF 卷积的组合意义，$F^k(x)$ 就是 $n$ 个有标号物品放到 $k$ 个**有**标号盒子里的 EGF。而第二类斯特林数是 $n$ 个有标号物品放到 $k$ 个**无**标号盒子里的方案数，所以要再除以一个 $k!$

$$\frac{1}{n!}\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}=[x^n]\frac{(e^x-1)^k}{k!}$$

# 第二类斯特林数的通项公式

## 第二类斯特林数的通项公式

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{k-i} i^n}{i!(k-i)!}$$

# 第二类斯特林数的通项公式

## 第二类斯特林数的通项公式

$$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n = \sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^{k-i}i^n}{i!(k-i)!}$$

**证明**：设将 $n$ 个有标号物品放到 $k$ 个有标号盒子（允许空盒子）的方案数为 $G_i$；将 $n$ 个有标号物品放到 $k$ 个有标号盒子（不允许空盒子）的方案数为 $F_i$

$$G_i = k^n,\ \ G_i = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}F_j$$

# 第二类斯特林数的通项公式

## 第二类斯特林数的通项公式

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n = \sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^{k-i}i^n}{i!(k-i)!}$$

**证明**：设将 $n$ 个有标号物品放到 $k$ 个有标号盒子（允许空盒子）的方案数为 $G_i$；将 $n$ 个有标号物品放到 $k$ 个有标号盒子（不允许空盒子）的方案数为 $F_i$

$$G_i = k^n,\ \ G_i = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}F_j$$

由二项式反演

$$F_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}G_i = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n = \sum_{i=0}^{k}\frac{k!(-1)^{k-i}i^n}{i!(k-i)!}$$

$F_k$ 是有标号的盒子，第二类斯特林数是无标号盒子再除以一个 $k!$

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^{k-i}i^n}{i!(k-i)!}$$

### Remark

高阶差分与第二类斯特林数有奇妙的性质

$$\Delta^m x^n|_{x=0} = m!\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$$

**Remark**

高阶差分与第二类斯特林数有奇妙的性质

$$\Delta^m x^n|_{x=0} = m!\left\{ n \atop m \right\}$$

**证明**：

$$\Delta^m x^n|_{x=0} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^n$$

$$m!\left\{ n \atop m \right\} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$$

令 $k \leftarrow m-k$ 可知两式相等。

# 第一类斯特林数

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 表示将 $n$ 个元素排成 $k$ 个**轮换**的方案数。也即所有 $n!$ 个排列中，构成的置换有 $k$ 个环的排列数。

# 第一类斯特林数

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 表示将 $n$ 个元素排成 $k$ 个**轮换**的方案数。也即所有 $n!$ 个排列中，构成的置换有 $k$ 个环的排列数。

$n$ 较小时第一类斯特林数的值如下：

| $n$ | $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | | |
| 3 | 0 | 2 | 3 | 1 | | | |
| 4 | 0 | 6 | 11 | 6 | 1 | | |
| 5 | 0 | 24 | 50 | 35 | 10 | 1 | |
| 6 | 0 | 120 | 270 | 225 | 85 | 15 | 1 |

# 第一类斯特林数的特殊值

第一类斯特林数的一些特殊值如下：

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = [n = 0], \quad \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1(n > 0)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!(n > 0), \quad \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$$

# 第一类斯特林数的特殊值

第一类斯特林数的一些特殊值如下：

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = [n = 0], \quad \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1(n > 0)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!(n > 0), \quad \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$$

由定义易知

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \geq \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

当每个轮换都至多有 $2$ 个元素时等号成立，此时 $k = n$ 或 $n-1$，

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = \binom{n}{2}$$

# 第一类斯特林数的递推式

## 第一类斯特林数的递推式

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

即考虑第 $n$ 个元素放在哪个轮换里。要么在已经有的 $k$ 个轮换里选一个位置插进去，方案数是 $n-1$；要么自己单开一个新的轮换。

# 第一类斯特林数的生成函数

# 第一类斯特林数的生成函数

类似第二类斯特林数地，我们先考虑 $1$ 个盒子，即 $k=1$ 时 $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$ 的 EGF：

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

那么 $n$ 个元素组成 $k$ 个**无**标号轮换的 EGF 为

$$\frac{F^k(x)}{k!} = \frac{(-1)^k \ln^k(1-x)}{k!}$$

即

$$\frac{1}{n!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = [x^n] \frac{(-1)^k \ln^k(1-x)}{k!}$$

# 第一类斯特林数的生成函数

类似第二类斯特林数地，我们先考虑 1 个盒子，即 $k=1$ 时 $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$ 的 EGF：

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

那么 $n$ 个元素组成 $k$ 个**无**标号轮换的 EGF 为

$$\frac{F^k(x)}{k!} = \frac{(-1)^k \ln^k(1-x)}{k!}$$

即

$$\frac{1}{n!} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = [x^n] \frac{(-1)^k \ln^k(1-x)}{k!}$$

**Remark**

第一类斯特林数没有实用的通项公式

# 第一类斯特林数的一行之和

我们知道一个有 $n$ 个元素的排列和一个 $n$ 个元素的置换一一对应，于是对所有置换中的轮换个数求和，我们有

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$$

# 下降幂

我们在组合数中已经定义了下降幂

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1}(x-i)$$

这是一个关于 $x$ 的 $n$ 次多项式，所以 $x^n$ 一定可以由若干下降幂来表示，计算发现

$$\begin{aligned}
x^0 &= x^{\underline{0}} \\
x^1 &= x^{\underline{1}} \\
x^2 &= x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} \\
x^3 &= x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} \\
x^4 &= x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}
\end{aligned}$$

# 下降幂

我们在组合数中已经定义了下降幂

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1}(x-i)$$

这是一个关于 $x$ 的 $n$ 次多项式，所以 $x^n$ 一定可以由若干下降幂来表示，计算发现

$$\begin{aligned}
x^0 &= x^{\underline{0}} \\
x^1 &= x^{\underline{1}} \\
x^2 &= x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} \\
x^3 &= x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} \\
x^4 &= x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}
\end{aligned}$$

这与第二类斯特林数的值对上了，于是我们得到恒等式

**通常幂转下降幂**

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \binom{x}{k} k!$$

**证明**：使用数学归纳法，一个重要的观察是

$$x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k) \implies x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$$

**证明**：使用数学归纳法，一个重要的观察是

$$x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k) \implies x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$$

那么

$$\begin{aligned}
x \cdot x^{n-1} &= x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} kx^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} kx^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \right) x^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}
\end{aligned}$$

# 上升幂

定义上升幂

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdots(x+n-1) = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i)$$

展开上升幂，得到

$$\begin{aligned}
x^{\overline{0}} &= x^0 \\
x^{\overline{1}} &= x^1 \\
x^{\overline{2}} &= x^2 + x^1 \\
x^{\overline{3}} &= x^3 + 3x^2 + 2x \\
x^{\overline{4}} &= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x
\end{aligned}$$

# 上升幂

定义上升幂

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdots(x+n-1) = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i)$$

展开上升幂，得到

$$\begin{aligned} x^{\overline{0}} &= x^0 \\ x^{\overline{1}} &= x^1 \\ x^{\overline{2}} &= x^2 + x^1 \\ x^{\overline{3}} &= x^3 + 3x^2 + 2x \\ x^{\overline{4}} &= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x \end{aligned}$$

这与第一类斯特林数的值对上了，于是我们得到恒等式

**上升幂转通常幂**

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

**证明**：还是一样地使用数学归纳法，这次的观察是

$$(x+n-1)\cdot x^{k}=x^{k+1}+(n-1)x^{k}$$

那么

$$\begin{aligned}(x+n-1)x^{\overline{n-1}}&=(x+n-1)\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}x^{k}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(n-1)\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}x^{k}+\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}x^{k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^{k}\end{aligned}$$

# 上升幂、下降幂与通常幂的转化

注意到上升幂和下降幂有交错的符号，比如

$$x^{\underline{4}} = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$
$$x^{\overline{4}} = x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

由

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

我们得到

## 下降幂转通常幂

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

对 $x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}$ 两边带入 $-x$

$$(-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} (-x)^{\underline{k}}$$

同时我们还有

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\overline{n}}$$

于是得到

**通常幂转上升幂**

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}$$

# 反转公式

通常幂转上升幂，再上升幂转通常幂，得到

$$x^n = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}} = \sum_{k,m} \left\{ n \atop k \right\} \left[ k \atop m \right] (-1)^{n-k} x^m$$

对比两侧多项式的系数，我们得到

## 反转公式

$$\sum_k \left\{ n \atop k \right\} \left[ k \atop m \right] (-1)^{n-k} = [m = n]$$

类似地，下降幂转通常幂，再通常幂转下降幂，可以得到

$$\sum_k \left[ n \atop k \right] \left\{ k \atop m \right\} (-1)^{n-k} = [m = n]$$

总结一下，基本的斯特林数恒等式有

# 附加的斯特林数恒等式

《具体数学》还给出了附加的斯特林数恒等式，由于大部分用的比较少，下面就挑几个来讲

1

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\}$$

1

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\}$$

组合意义：枚举 $k$ 表示 $n+1$ 号节点所在的集合之外剩下了 $k$ 个节点，这 $k$ 个节点要构成 $m$ 个集合。

1

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\}$$

组合意义：枚举 $k$ 表示 $n+1$ 号节点所在的集合之外剩下了 $k$ 个节点，这 $k$ 个节点要构成 $m$ 个集合。

2

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m}$$

1.
$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\}$$

组合意义：枚举 $k$ 表示 $n+1$ 号节点所在的集合之外剩下了 $k$ 个节点，这 $k$ 个节点要构成 $m$ 个集合。

2.
$$\left[ {n+1 \atop m+1} \right] = \sum_k \left[ {n \atop k} \right] \binom{k}{m}$$

组合意义：还是枚举 $n+1$ 号点所在环的大小，设为 $t+1$，那么方案数应该是 $t!\left[ {n-t \atop m} \right]$，这 $t!\left[ {n-t \atop m} \right]$ 个方案对应 $\left[ {n \atop 0} \right], \left[ {n \atop 1} \right], \cdots, \left[ {n \atop n} \right]$ 的所有置换中不连接这 $t$ 个和剩下 $n-t$ 个点的所有置换，所以有上式。

或者使用 EGF 也可证明。

3

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n-k}$$

4

$$\left[ {n \atop m} \right] = \sum_k \left[ {n+1 \atop k+1} \right] \binom{k}{m} (-1)^{m-k}$$

3

$$\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n-k}$$

4

$$\left[ {n \atop m} \right] = \sum_k \left[ {n+1 \atop k+1} \right] \binom{k}{m} (-1)^{m-k}$$

这是前两个式子的二项式反演

5

$$\left\{ {m+n+1 \atop m} \right\} = \sum_{k=0}^{m} k \left\{ {n+k \atop k} \right\}$$

6

$$\left[ {m+n+1 \atop m} \right] = \sum_{k=0}^{m} (n+k) \left[ {n+k \atop k} \right]$$

5

$$\left\{ m+n+1 \atop m \right\} = \sum_{k=0}^{m} k \left\{ n+k \atop k \right\}$$

6

$$\left[ m+n+1 \atop m \right] = \sum_{k=0}^{m} (n+k) \left[ n+k \atop k \right]$$

**证明**：对于 5.:

$$原式 = \sum_{k=0}^{m} \left\{ n+k+1 \atop k \right\} - \left\{ n+k \atop k-1 \right\} = \left\{ m+n+1 \atop m \right\}$$

6. 同理

# 例题

## CF932E Team Work

给定 $n, k$，求：

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \times i^k \bmod 10^9 + 7$$

$1 \le k \le 5000,\ 1 \le n \le 10^9$

## 通常幂转下降幂

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=1}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} i^{\underline{j}} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} j! \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{j}
\end{aligned}
$$

## 通常幂转下降幂

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=1}^{k}\left\{{k \atop j}\right\} i^{\underline{j}} \\
&= \sum_{j=1}^{k}\left\{{k \atop j}\right\} j!\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j} \\
&= \sum_{j=1}^{k}\left\{{k \atop j}\right\} j!\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} \\
&= \sum_{j=1}^{k}\left\{{k \atop j}\right\} j!\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n-j}{i} \\
&= \sum_{j=1}^{k}\left\{{k \atop j}\right\} j!\binom{n}{j}2^{n-j}
\end{aligned}
$$

复杂度 $O(k^2)$。

## 通常幂转下降幂

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=1}^{k}\left\{ {k \atop j} \right\} i^{\underline{j}} \\
&= \sum_{j=1}^{k}\left\{ {k \atop j} \right\} j! \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j} \\
&= \sum_{j=1}^{k}\left\{ {k \atop j} \right\} j! \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} \\
&= \sum_{j=1}^{k}\left\{ {k \atop j} \right\} j! \binom{n}{j}\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n-j}{i} \\
&= \sum_{j=1}^{k}\left\{ {k \atop j} \right\} j! \binom{n}{j} 2^{n-j}
\end{aligned}
$$

复杂度 $O(k^2)$。
洛谷题解有 $O(k)$ 做法，有兴趣可以去看看。

# 例题

## [省选联考 2020 A 卷] 组合数问题

给定一个 $m$ 次多项式 $f(k)=a_0+a_1k+a_2k^2+\cdots+a_mk^m$ 以及 $n,x,p$，求

$$\left(\sum_{k=0}^{n} f(k)\times x^k\times\binom{n}{k}\right)\bmod p$$

$1\le n,x,p\le 10^9, 0\le m\le \min(n,1000)$

# 例题

**[省选联考 2020 A 卷] 组合数问题**

给定一个 $m$ 次多项式 $f(k)=a_0+a_1k+a_2k^2+\cdots+a_mk^m$ 以及 $n,x,p$，求

$$\left(\sum_{k=0}^{n} f(k)\times x^k\times\binom{n}{k}\right) \bmod p$$

$1\le n,x,p\le 10^9, 0\le m\le \min(n,1000)$

首先把 $f(k)$ 转成 $m$ 次的下降幂多项式 $f(k)=b_0+b_1k^{\underline{1}}+b_2k^{\underline{2}}+\cdots+b_mk^{\underline{m}}$，

$$\sum_{i=0}^{m} a_ik^i=\sum_{i=0}^{m} a_i\sum_{j=0}^{i}\left\{ {i \atop j} \right\}k^{\underline{j}}=\sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=i}^{m}\left\{ {j \atop i} \right\}a_j\right)k^{\underline{i}}$$

取 $b_i=\sum_{j=i}^{m}\left\{ {j \atop i} \right\}a_j$ 即可。

问题变为求

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} b_i k^{\underline{i}} \times x^k \times \binom{n}{k}$$

问题变为求

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} b_i k^{\underline{i}} \times x^k \times \binom{n}{k}$$

注意到

$$\binom{n}{k} \times k^{\underline{i}} = \binom{n-i}{k-i} \times n^{\underline{i}}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} b_i k^{\underline{i}} \times x^k \times \binom{n}{k} &= \sum_{i=0}^{m} b_i n^{\underline{i}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-i}{k-i} x^k \\ &= \sum_{i=0}^{m} b_i n^{\underline{i}} x^i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} x^k \\ &= \sum_{i=0}^{m} b_i n^{\underline{i}} x^i (x+1)^{n-i}\end{aligned}$$

复杂度 $O(m^2)$。

# 例题

## [FJOI2016] 建筑师

给定 $n, A, B$，求满足下列条件的 $1 \sim n$ 的排列数 $\bmod 10^9 + 7$。

- 恰好有 $A$ 个数是前缀最大值
- 恰好有 $B$ 个数是后缀最大值

$n \leq 5 \times 10^4, 1 \leq A, B \leq 100, T \leq 2 \times 10^5$

# 例题

## [FJOI2016] 建筑师

给定 $n, A, B$，求满足下列条件的 $1 \sim n$ 的排列数 $\bmod 10^9+7$。

- 恰好有 $A$ 个数是前缀最大值
- 恰好有 $B$ 个数是后缀最大值

$n \le 5 \times 10^4, 1 \le A, B \le 100, T \le 2 \times 10^5$

对于一个排列，把中间最大值拿掉，最大值左边按照
[前缀最大值, 下一个前缀最大值) 分组，最大值右边按照
(下一个后缀最大值, 后缀最大值] 分组。
这样我们把 $n-1$ 个数分成了 $A+B-2$ 组，每一组内，除了最大值的位置必须固定以外，其他位置都是任意选的。于是分组的方案数为 $\begin{bmatrix} n-1 \\ A+B-2 \end{bmatrix}$。
最后再组合数选出哪些分组在最大值左边，剩下的在右边，答案为

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ A+B-2 \end{bmatrix} \times \binom{A+B-2}{A-1}$$

# 例题

## [国家集训队] Crash 的文明世界

给定一棵 $n$ 个点的树，以及一个常数 $k$，对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$，求

$$S(i) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{dist}(i, j)^k$$

其中 $\operatorname{dist}(i, j)$ 表示 $i, j$ 两点在树上的距离。
$1 \le n \le 5 \times 10^4, 1 \le k \le 150$

# 例题

**[国家集训队] Crash 的文明世界**

给定一棵 $n$ 个点的树，以及一个常数 $k$，对每个 $i=1,2,\cdots,n$，求

$$S(i)=\sum_{j=1}^{n}\operatorname{dist}(i,j)^k$$

其中 $\operatorname{dist}(i,j)$ 表示 $i,j$ 两点在树上的距离。
$1\le n\le 5\times 10^4, 1\le k\le 150$

利用通常幂转下降幂 $m^n=\sum_i \left\{ {n \atop i} \right\} \binom{m}{i} i!$，我们要求的是

$$S(u)=\sum_{v=1}^{n}\sum_{i=0}^{k}\left\{ {k \atop i} \right\}\binom{\operatorname{dist}(u,v)}{i}i!=\sum_{i=0}^{k}\left\{ {n \atop i} \right\}i!\sum_{v=1}^{n}\binom{\operatorname{dist}(u,v)}{i}$$

设 $f_{u,i}=\sum\limits_{v\in \text{subtree}(u)}\binom{\text{dist}(u,v)}{i}$，有转移

$$
\begin{aligned}
f_{u,i} &= \sum_{v\in \text{subtree}(u)}\binom{\text{dist}(u,v)}{i} \\
&= \sum_{v\in \text{subtree}(u)}\binom{\text{dist}(u,v)-1}{i}+\binom{\text{dist}(u,v)-1}{i-1} \\
&= \sum_{v\in \text{son}(u)} f_{v,i}+f_{v,i-1}
\end{aligned}
$$

换根 DP 即可，复杂度 $O(nk)$。

# 例题

## 某联考题

给定 $n, m, b, c$，求满足下列条件的 $m$ 元组 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m)$ 的个数模 $998244353$。

- $x_i \in [0, b^i - c] \cap \mathbb{Z}$.
- $\sum x_i \leq n$

$-10^8 \leq c < b, 2 \leq b < 10^8, 1 \leq m \leq 80, 1 \leq n \leq b^{m+1}$，$n$ 用高精度表示。

# 例题

## 某联考题

给定 $n, m, b, c$，求满足下列条件的 $m$ 元组 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m)$ 的个数模 998244353。

- $x_i \in [0, b^i - c] \cap \mathbb{Z}$.
- $\sum x_i \leq n$

$-10^8 \leq c < b, 2 \leq b < 10^8, 1 \leq m \leq 80, 1 \leq n \leq b^{m+1}$，$n$ 用高精度表示。

容斥，枚举哪些数超过了 $b^i - c$，钦定这些数必须选至少 $b^i - c + 1$，然后就是插板法：

$$\begin{aligned} ans &= \sum_S (-1)^{|S|} \binom{n + m - 1 - \sum_{i \in S}(b^i - c + 1)}{m} \\ &= \sum_S (-1)^{|S|} \binom{n + m - 1 + (c-1)|S| - \sum_{i \in S} b^i}{m} \end{aligned}$$

注意到除了 $\sum_{i\in S} b^i$ 的部分，其他部分都可以枚举 $|S|$ 直接算出。枚举 $|S|$，那么组合数就是一个关于 $\sum_{i\in S} b^i$ 的多项式（下降幂转通常幂）

$$\begin{aligned}\binom{n-x}{m} &= \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\begin{bmatrix}m\\i\end{bmatrix}(n-x)^i\\ &= \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\begin{bmatrix}m\\i\end{bmatrix}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}x^j n^{i-j}\end{aligned}$$

对所有 $\sum_{i\in S} b^i \le n+m-1+(c-1)|S|$, $|S|=p$ 的 $S$ 维护 $\sum_{i\in S} b^i$ 的 $k$ 次方之和。

令 $A=n+m-1+(c-1)|S|$，用 $b$ 进制表示。
数位 DP，从高位到低位枚举 $\sum_{i\in S} b^i$ 与 $A$ 的 LCP，即枚举第一个没有顶上界的位置。$\sum_{i\in S} b^i$ 在 $b$ 进制下数位只有 $0$ 和 $1$。如果 $A$ 在这一位 $>1$，那么这一位之后一定会不顶上界；若 $A$ 在这一位 $=1$，如果 $\sum_{i\in S} b^i$ 这一位等于 $0$，剩下的位可以随便选，否则 $b^i$ 必须出现在 $S$ 内。
剩下的可以随便填的位可以预处理 DP：设 $f_{i,j,k}$ 表示考虑 $b^1\sim b^i$，这 $i$ 个数里选了 $j$ 个的所有 $S$ 中 $\sum_{i\in S} b^i$ 的 $k$ 次方之和。状态数 $O(m^3)$，转移用二项式定理展开，转移是 $O(m)$ 的。预处理复杂度 $O(m^4)$。
总复杂度 $O(m^4)$。

# 第一类斯特林数求行

## 洛谷 P5408 第一类斯特林数·行

给定 $n$，对于所有的整数 $i \in [0, n]$，求出 $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$。答案对某 NTT 模数取模。

$1 \le n < 262144$。

# 第一类斯特林数求行

**洛谷 P5408 第一类斯特林数·行**

给定 $n$，对于所有的整数 $i \in [0, n]$，求出 $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$。答案对某 NTT 模数取模。

$1 \le n < 262144$。

第一类斯特林数第 $n$ 行的 OGF 为

$$x^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} x^i$$

问题转化成求 $x^{\overline{n}}$。

考虑快速幂，我们需要在已知 $x^{\overline{n}}$ 的情况下快速求出 $x^{\overline{2n}}$ 和 $x^{\overline{n+1}}$。

- 由 $x^{\overline{n}}$ 求 $x^{\overline{n+1}}$ 可以直接 $O(n)$ 乘上 $(x+n)$ 得到
- 考虑怎么已知 $x^{\overline{n}}$，求 $x^{\overline{2n}}$，设 $x^{\overline{n}}=f(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i x^i$

$$\begin{aligned} f(x+n) &= \sum_{i=0}^{n} f_i (x+n)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^j n^{i-j} \\ &= \sum_{i=0}^{n} x^i \sum_{j=i}^{n} f_j \binom{j}{i} n^{j-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} x^i \frac{1}{i!} \sum_{j=i}^{n} j! f_j \frac{n^{i-j}}{(i-j)!} \end{aligned}$$

后面是一个卷积的形式。复杂度为 $T(n)=T(\frac{n}{2})+\Theta(n\log n)=\Theta(n\log n)$。

# 第一类斯特林数求列

## 洛谷 P5409 第一类斯特林数·列

给定 $n, k$，对于所有的整数 $i \in [0, n]$，求出 $\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$。答案对某 NTT 模数取模。

$1 \leqslant k, n < 131072$。

# 第一类斯特林数求列

**洛谷 P5409 第一类斯特林数·列**

给定 $n, k$，对于所有的整数 $i \in [0, n]$，求出 $\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$。答案对某 NTT 模数取模。
$1 \leqslant k, n < 131072$。

第一类斯特林数第 $k$ 列的 EGF 为

$$\frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = [x^n]\frac{(-1)^k \ln^k(1-x)}{k!} = [x^n]\frac{S(x)^k}{k!}$$

其中 $S(x) = \sum_{i=0}^{n}(i-1)!\frac{x^i}{i!}$。
多项式快速幂即可。

# 第二类斯特林数求行

## 洛谷 P5395 第二类斯特林数·行

给定 $n$，对于所有的整数 $i \in [0, n]$，求出 $\left\{ {n \atop i} \right\}$。答案对某 NTT 模数取模。

$1 \leq n < 2 \times 10^5$

# 第二类斯特林数求行

**洛谷 P5395 第二类斯特林数·行**

给定 $n$，对于所有的整数 $i \in [0, n]$，求出 $\left\{ n \atop i \right\}$。答案对某 NTT 模数取模。

$1 \le n < 2 \times 10^5$

根据通项公式，我们有

$$\begin{aligned}\left\{ n \atop k \right\} &= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n \\ &= \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} \times \frac{(k-i)^n}{(k-i)!}\end{aligned}$$

卷积即可。

# 第二类斯特林数求列

**洛谷 P5396 第二类斯特林数·列**

给定 $n, k$，对于所有的整数 $i \in [0, n]$，求出 $\left\{ {i \atop k} \right\}$。答案对某 NTT 模数取模。

$1 \leqslant k, n < 131072$。

# 第二类斯特林数求列

## 洛谷 P5396 第二类斯特林数·列

给定 $n, k$，对于所有的整数 $i \in [0, n]$，求出 $\left\{ {i \atop k} \right\}$。答案对某 NTT 模数取模。

$1 \leqslant k, n < 131072$。

第二类斯特林数第 $k$ 列的 EGF 为

$$\frac{1}{n!}\left\{ {n \atop k} \right\} = [x^n]\frac{(e^x - 1)^k}{k!}$$

多项式快速幂即可。

# 例题

## 洛谷 P2791 幼儿园篮球题

一共 $n$ 个篮球，其中 $m$ 个是没气的，剩下的 $n-m$ 个是有气的。鉴于蔡 ** 的高超技术，他投**没气的球一定能进**，而投**有气的球一定不能**。蔡 ** 在这 $n$ 个球中**随机**选出 $k$ 个投篮。如果投进了 $x$ 个，则这次表演的**失败度**为 $x^L$。求这场表演的**期望失败度**对 $998244353$ 取模的结果。

$S$ 组数据，$L$ 是一个输入的常数，对每组数据都相同。

$1 \leq S \leq 200$，$1 \leq L \leq 2 \times 10^5$，$1 \leq m \leq n \leq 2 \times 10^7$。

# 例题

## 洛谷 P2791 幼儿园篮球题

一共 $n$ 个篮球，其中 $m$ 个是没气的，剩下的 $n-m$ 个是有气的。鉴于蔡 ** 的高超技术，他投**没气的球一定能进**，而投**有气的球一定不能**。蔡 ** 在这 $n$ 个球中**随机**选出 $k$ 个投篮。如果投进了 $x$ 个，则这次表演的**失败度**为 $x^L$。求这场表演的**期望失败度**对 $998244353$ 取模的结果。
$S$ 组数据，$L$ 是一个输入的常数，对每组数据都相同。
$1 \le S \le 200$，$1 \le L \le 2\times 10^5$，$1 \le m \le n \le 2\times 10^7$。

问题为求

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i}i^L$$

## 通常幂转下降幂

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i}i^L &= \sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i}\sum_{t}\left\{ {L \atop t} \right\}t!\binom{i}{t} \\
&= \sum_{t}\left\{ {L \atop t} \right\}t!\sum_{i}\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i}\binom{i}{t} \\
&= \sum_{t}\left\{ {L \atop t} \right\}t!\binom{m}{t}\sum_{i}\binom{m-t}{i-t}\binom{n-m}{k-i} \\
&= \sum_{t}\left\{ {L \atop t} \right\}t!\binom{m}{t}\binom{n-t}{k-t}
\end{aligned}
$$

$O(L\log L)$ 求出第二类斯特林数的第 $L$ 行，然后每组询问 $O(L)$ 计算即可。

# 斯特林反演

## 斯特林反演

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\left\{ n \atop k \right\} g(k) \iff g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left[ n \atop k \right] f(k)$$

# 斯特林反演

## 斯特林反演

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\} g(k) \iff g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left[ {n \atop k} \right] f(k)$$

**证明**：我们有反转公式

$$\sum_{k}\left\{ {n \atop k} \right\}\left[ {k \atop m} \right](-1)^{n-k}=[m=n]$$

$$\sum_{k}\left[ {n \atop k} \right]\left\{ {k \atop m} \right\}(-1)^{n-k}=[m=n]$$

直接带入易证

# 另一个形式

和二项式反演类似地，斯特林反演也有另一种形式

**斯特林反演的另一个形式**

$$f(m)=\sum_{k=m}^{n}\left\{{k \atop m}\right\}g(k) \iff g(m)=\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\left[{k \atop m}\right]f(k)$$

# 例题

**TopCoder13444 CountTables**

给出一个 $n \times m$ 大小的矩形，每个位置可以填上 $[1, c]$ 中的任意一个整数，要求填好后任意两行互不相同且任意两列互不相同，两行或两列相同当且仅当对应位置完全相同，求方案数 $\bmod 10^9 + 7$。

$n, m \leq 5000$

# 例题

**TopCoder13444 CountTables**

给出一个 $n \times m$ 大小的矩形，每个位置可以填上 $[1, c]$ 中的任意一个整数，要求填好后任意两行互不相同且任意两列互不相同，两行或两列相同当且仅当对应位置完全相同，求方案数 $\bmod 10^9 + 7$。
$n, m \leq 5000$

先只考虑让行之间互不相同，一个 $n$ 行 $m$ 列且行互不相同的矩形的方案数为 $(c^m)^{\underline{n}}$。

设 $g(m)$ 表示行互不相同的情况下，$m$ 列的矩形的方案数。$g(m) = (C^m)^{\underline{n}}$。
设 $f(m)$ 表示行和列都分别互不相同的情况下，$m$ 列的矩形的方案数，也就是我们要的答案。
枚举 $m$ 列分成了 $i$ 个不同的列，我们得到

$$g(m) = \sum_{i=0}^{m} \begin{Bmatrix} m \\ i \end{Bmatrix} f(i)$$

由斯特林反演得到：

$$f(m) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} g(i)$$

于是可以 $O(n^2)$ 计算了。

# 例题

## 洛谷 P10591 BZOJ4671 异或图

定义两个结点数相同的图 $G_1$ 与图 $G_2$ 的异或为一个新的图 $G$，其中如果 $(u, v)$ 在 $G_1$ 与 $G_2$ 中的出现之和为 $1$，那么边 $(u, v)$ 在 $G$ 中，否则这条边不在 $G$ 中。
现在给定 $s$ 个结点数相同的图 $G_{1\sim s}$，$S = \{G_1, G_2, \ldots, G_s\}$，请问 $S$ 有多少个子集的异或为一个连通图?
$2 \le n \le 10$，$1 \le s \le 60$。

# 例题

## 洛谷 P10591 BZOJ4671 异或图

定义两个结点数相同的图 $G_1$ 与图 $G_2$ 的异或为一个新的图 $G$，其中如果 $(u,v)$ 在 $G_1$ 与 $G_2$ 中的出现之和为 $1$，那么边 $(u,v)$ 在 $G$ 中，否则这条边不在 $G$ 中。
现在给定 $s$ 个结点数相同的图 $G_{1\sim s}$，$S=\{G_1,G_2,\dots,G_s\}$，请问 $S$ 有多少个子集的异或为一个连通图?
$2\le n\le 10$，$1\le s\le 60$。

设 $f_i$ 表示钦定了 $i$ 个点集，这 $i$ 个点集两两之间必须没有边相连，点集内部随便连的方案数；$g_i$ 表示恰好有 $i$ 个连通块的方案数，那么

$$f_x=\sum_{i=x}^{n}\begin{Bmatrix} i\\ x\end{Bmatrix}g_i$$

由斯特林反演

$$g_x=\sum_{i=x}^{n}(-1)^{i-x}\begin{bmatrix} i\\ x\end{bmatrix}f_i$$

我们要求的是

$$g_1 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} f_i = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (i-1)! f_i$$

于是问题转化为求所有的 $f_i$。

我们要求的是

$$g_1=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}f_i=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(i-1)!f_i$$

于是问题转化为求所有的 $f_i$。
$n$ 很小，考虑直接枚举哪些点被分到了一个集合（这里的枚举量是贝尔数 $B_n=\sum_{k=0}^{n}\left\{ n \atop k \right\}$ 级别的，当 $n=10$ 时，$B_n\approx 10^5$）
对于某一条连接了两个不同集合的边 $i$，设编号为 $b_{i,1},b_{i,2},\cdots,b_{i,k}$ 的图包含这条边，设布尔变量 $x_j$ 表示编号为 $j$ 的图选/不选，则我们得到了异或方程组

$$a_{b_{i,1}}\oplus a_{b_{i,2}}\oplus\cdots\oplus a_{b_{i,k}}=0$$

线性基求出这个方程组的秩为 $r$，那么这个方程的解空间的秩（也就是自由元的数量）为 $c=s-r$，方案数为 $2^{s-r}=2^c$。
复杂度大约是 $O(B_n\times s\times n^2)$。

# 基本容斥

## 容斥原理

设 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 为 $n$ 个集合，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{x=1}^{n}(-1)^{x-1}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_x}\left|\bigcap_{j=1}^{x} S_{i_j}\right|$$

就是小学奥数的那个容斥原理。证明考虑若某个元素的被 $m$ 个集合包含，那么它的容斥系数之和为

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n}{i} = \binom{n}{0} - \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i} = 1$$

# 基本容斥

## 容斥原理

设 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 为 $n$ 个集合，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{x=1}^{n}(-1)^{x-1}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_x}\left|\bigcap_{j=1}^{x} S_{i_j}\right|$$

就是小学奥数的那个容斥原理。证明考虑若某个元素的被 $m$ 个集合包含，那么它的容斥系数之和为

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n}{i} = \binom{n}{0} - \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i} = 1$$

当然朴素容斥原理用的并不多，重要的是正难则反和容斥的思想。

# 例题

**[HNOI2011] 卡农**

在集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 中，选出 $m$ 个无序的互不相同的非空子集，使得每个元素的出现次数均为偶数。求选择方案数 $\bmod 10^8+7$。
$n,m\le 10^6$

# 例题

**[HNOI2011] 卡农**

在集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 中，选出 $m$ 个无序的互不相同的非空子集，使得每个元素的出现次数均为偶数。求选择方案数 $\bmod 10^8+7$。
$n,m\leq 10^6$

首先无序这一条件可以通过计算出有序的答案再除以 $m!$ 完成。考虑设 $f_i$ 表示选出 $i$ 个子集满足所有限制的方案数，所有的三个限制为：

1. 每个元素都被选择了偶数次
2. 每个集合都非空
3. 任何两个集合互不相同

先忽略后面两个限制，只考虑第一个限制，即所有元素出现次数均为偶数：前 $i-1$ 个集合任选，为了保证出现次数为偶数，最后一个集合就被确定了，方案数为

$$(2^n-1)^{i-1}$$

先忽略后面两个限制，只考虑第一个限制，即所有元素出现次数均为偶数：前 $i-1$ 个集合任选，为了保证出现次数为偶数，最后一个集合就被确定了，方案数为

$$(2^n-1)^{\underline{i-1}}$$

此时再减去不满足剩下两个限制的方案数：

- 第 $i$ 个集合为空集，这当且仅当前 $i-1$ 个元素构成一个合法的选择方案，答案减去 $f_{i-1}$
- 第 $i$ 个集合与第 $j$ 个集合相同，这当且仅当剩下的 $i-2$ 个集合构成了一个合法方案，$i$ 和 $j$ 的集合与这 $i-2$ 个集合都不同，答案减去 $f_{i-2}\times(i-1)\times(2^n-1-(i-2))$

于是我们得到了递推式

$$f_i=(2^n-1)^{\underline{i-1}}-f_{i-1}-f_{i-2}\times(i-1)\times(2^n-1-(i-2))$$

直接递推即可，复杂度 $O(n+m)$。

# 例题

## [JLOI2016] 成绩比较

有 $n$ 个人，$m$ 门课，每位同学在第 $i$ 门课上的分数是 $[1, U_i]$ 之间的一个整数。已知小 B 每门课的排名，第 $i$ 门课的排名为 $R_i$。其中排名的定义为有且仅有 $R_i - 1$ 位同学这门课的分数大于小 B 的分数，有且仅有 $n - R_i$ 位同学这门课的分数小于等于小 B（不包括他自己）。
此外，还知道恰好有 $k$ 位同学每门课成绩都小于等于小 B 的成绩（称这 $k$ 同学被小 B 碾压），求合法的得分情况的方案数 $\bmod 10^9 + 7$。
$n, m \leq 100, U_i \leq 10^9$

# 例题

**[JLOI2016] 成绩比较**

有 $n$ 个人，$m$ 门课，每位同学在第 $i$ 门课上的分数是 $[1,U_i]$ 之间的一个整数。已知小 B 每门课的排名，第 $i$ 门课的排名为 $R_i$。其中排名的定义为有且仅有 $R_i-1$ 位同学这门课的分数大于小 B 的分数，有且仅有 $n-R_i$ 位同学这门课的分数小于等于小 B（不包括他自己）。
此外，还知道恰好有 $k$ 位同学每门课成绩都小于等于小 B 的成绩（称这 $k$ 同学被小 B 碾压），求合法的得分情况的方案数 $\bmod 10^9+7$。
$n,m\le 100, U_i\le 10^9$

问题可以分为三部分，即先选出 $k$ 个同学被碾压，然后再钦定同学们各科分数与小 B 的相对大小，最后直接得到每位同学的分数，三部分的方案数可以直接乘起来。
第一部分的方案数显然是 $\binom{n-1}{k}$。

对于第二部分，每一门中得分比 B 高的 $R_i - 1$ 个人一定会分配给那 $n-k-1$ 为未被碾压的同学，直接分配，方案数为

$$\prod_{i=1}^{m}\binom{n-k-1}{R_i-1}$$

但是直接这样分配，可能导致那 $n-k-1$ 位同学中有人每一门都没被选到。容斥，枚举至少有 $i$ 个人每次都没选上，那么第二部分的方案数为

$$\sum_{i=k}^{n-1}\binom{n-k-1}{i-k}(-1)^{i-k}\prod_{j=1}^{m}\binom{n-i-1}{R_j-1}$$

对于第二部分，每一门中得分比 B 高的 $R_i-1$ 个人一定会分配给那 $n-k-1$ 为未被碾压的同学，直接分配，方案数为

$$\prod_{i=1}^{m}\binom{n-k-1}{R_i-1}$$

但是直接这样分配，可能导致那 $n-k-1$ 位同学中有人每一门都没被选到。容斥，枚举至少有 $i$ 个人每次都没选上，那么第二部分的方案数为

$$\sum_{i=k}^{n-1}\binom{n-k-1}{i-k}(-1)^{i-k}\prod_{j=1}^{m}\binom{n-i-1}{R_j-1}$$

对于第三部分，每一门分别考虑，枚举 $B$ 的分数，那么第三部分的方案数为

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{U_i}j^{n-R_i}(U_i-j)^{R_i-1}&=\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{U_i}j^{n-R_i}\sum_{k=0}^{R_i-1}\binom{R_i-1}{k}U_i^k(-1)^{R_i-1-k}j^{R_i-1-k}\\&=\prod_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{R_i-1}\binom{R_i-1}{k}U_i^k(-1)^{R_i-1-k}\sum_{j=1}^{U_i}j^{n-k-1}\end{aligned}$$

拉格朗日插值求自然数幂前缀和即可，复杂度 $O(n^2m)$。

# Min-Max 容斥

## Min-Max 容斥

$$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$$

$$\min(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \max(T)$$

其中 $\max(S)$ 表示集合 $S$ 中所有元素的最大值，$\min(S)$ 同理。

# Min-Max 容斥

## Min-Max 容斥

$$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$$

$$\min(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \max(T)$$

其中 $\max(S)$ 表示集合 $S$ 中所有元素的最大值，$\min(S)$ 同理。

**证明**：只证明第一个式子，第二个同理。设 $|S| = n$，那么对于一个第 $k+1$ 大的元素，大小为 $i$ 的，以它为最小值的集合有 $\binom{k}{i-1}$ 个，它在右侧被计数的次数为

$$\sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} (-1)^{i-1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i = [k=0]$$

# 期望的 Min-Max 容斥

上面那个式子看着很憨，~~都能算最小值了还算不了最大值吗~~，但是 Min-Max 容斥更好用的一点是它在期望意义下也是成立的。

## 期望的 Min-Max 容斥

$$E(\max(S)) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}E(\min(T))$$
$$E(\min(S)) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}E(\max(T))$$

其中 $E(\max(S))$ 表示集合 $S$ 中所有元素最大值的期望，$E(\min(S))$ 同理。

# 期望的 Min-Max 容斥

上面那个式子看着很憨，~~都能算最小值了还算不了最大值吗~~，但是 Min-Max 容斥更好用的一点是它在期望意义下也是成立的。

## 期望的 Min-Max 容斥

$$E(\max(S)) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}E(\min(T))$$
$$E(\min(S)) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}E(\max(T))$$

其中 $E(\max(S))$ 表示集合 $S$ 中所有元素最大值的期望，$E(\min(S))$ 同理。

**证明**：还是只证第一个式子，我们考虑计算期望的一种方法：

$$E\left(\max_{i\in S} x_i\right) = \sum_{y} P(y=x)\max_{j\in S} y_j$$

其中 $y$ 是一个长度为 $n$ 的序列。

我们对后面的 max 使用之前 Min-Max 容斥的式子：

$$
\begin{aligned}
E\left(\max_{i\in S} x_i\right) &= \sum_y P(y=x)\max_{j\in S} y_j \\
&= \sum_y P(y=x)\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min_{j\in T} y_j
\end{aligned}
$$

调换求和顺序：

$$
\begin{aligned}
E\left(\max_{i\in S} x_i\right) &= \sum_y P(y=x)\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min_{j\in T} y_j \\
&= \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\sum_y P(y=x)\min_{j\in T} y_j \\
&= \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}E\left(\min_{j\in T} y_j\right)
\end{aligned}
$$

# $k$th Min-Max 容斥

## 第 $k$ 大/小的 Min-Max 容斥

$$k\text{thmax}(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}\min(T)$$

$$k\text{thmin}(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}\max(T)$$

其中 $k\text{thmax}(S)$ 表示集合 $S$ 中所有元素的第 $k$ 大值，$k\text{thmin}(S)$ 同理。

# $k$th Min-Max 容斥

## 第 $k$ 大/小的 Min-Max 容斥

$$k\text{thmax}(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}\min(T)$$

$$k\text{thmin}(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}\max(T)$$

其中 $k\text{thmax}(S)$ 表示集合 $S$ 中所有元素的第 $k$ 大值，$k\text{thmin}(S)$ 同理。

**证明**：和前面同理，对于一个第 $i+1$ 大的元素，大小为 $j$ 的，以它为最小值的集合有 $\binom{i}{j-1}$ 个，它在右侧被计数的次数为

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{i+1}\binom{i}{j-1}(-1)^{j-k}\binom{j-1}{k-1}&=\binom{i}{k-1}\sum_{j=k}^{i+1}(-1)^{j-k}\binom{i-k+1}{j-k}\\&=\binom{i}{k-1}[i-k+1=0]=[i=k-1]\end{aligned}$$

# 期望的 $k$th Min-Max 容斥

$k$th Min-Max 容斥在期望意义下也成立。

**期望的第 $k$ 大/小的 Min-Max 容斥**

$$E(k\text{thmax}(S)) = \sum_{T\subseteq S} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} E(\min(T))$$

$$E(k\text{thmin}(S)) = \sum_{T\subseteq S} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} E(\max(T))$$

证明和期望的 Min-Max 容斥同理。

# 例题

## [HAOI2015] 按位或

刚开始你有一个数字 $0$，每一秒钟你会随机选择一个 $[0, 2^n - 1]$ 的数字，与你手上的数字进行按位或操作。选择数字 $i$ 的概率是 $p_i$。保证 $0 \le p_i \le 1$，$\sum p_i = 1$ 。问期望多少秒后，你手上的数字变成 $2^n - 1$。相对或绝对误差不超过 $10^{-6}$。
$n \le 20$。

# 例题

## [HAOI2015] 按位或

刚开始你有一个数字 $0$，每一秒钟你会随机选择一个 $[0,2^n-1]$ 的数字，与你手上的数字进行按位或操作。选择数字 $i$ 的概率是 $p_i$。保证 $0 \le p_i \le 1$，$\sum p_i = 1$ 。问期望多少秒后，你手上的数字变成 $2^n-1$。相对或绝对误差不超过 $10^{-6}$。
$n \le 20$。

定义 $k_i$ 表示二进制下第 $i$ 的 $1$ 第一次出现的时间，于是我们要求的是 $E(\max\{k_1,\cdots,k_n\})$，Min-Max 容斥转换为求 $E(\min\{k_1,\cdots,k_n\})$。$E(\min(T))$ 为 $T$ 中至少有 $1$ 个位置变成 $1$ 所需要的的时间。

$$E(\min(T)) = \frac{1}{\sum_{X\cap T\neq\varnothing} p(X)} = \frac{1}{1-\sum_{X\cap T=\varnothing} p(X)}$$

使用 FWT 求子集的概率之和即可，复杂度 $O(n2^n)$。

# 例题

## 洛谷 P4707 重返现世

有 $n$ 种物品，每一秒会随机获得某种某一种物品，第 $i$ 种物品出现的概率为 $\frac{p_i}{m}$，其中 $m=\sum p_i$，求收集到至少 $x$ 种不同物品的期望时间，答案 $\bmod 998244353$。

$n \le 1000, m \le 10^4, |n-x| \le 10$

# 例题

## 洛谷 P4707 重返现世

有 $n$ 种物品，每一秒会随机获得某种某一种物品，第 $i$ 种物品出现的概率为 $\frac{p_i}{m}$，其中 $m=\sum p_i$，求收集到至少 $x$ 种不同物品的期望时间，答案 $\bmod 998244353$。
$n \le 1000, m \le 10^4, |n-x| \le 10$

令 $k=n+1-x$，再令 $S$ 为每个物品第一次出现的期望时间，要求的就是 $E(k\text{thmax}(S))$。于是 Min-Max 容斥得到，答案为

$$\sum_{T \subseteq S}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}E(\min(T))$$

其中

$$E(\min(T))=\frac{m}{\sum_{i \in T} p_i}$$

现在考虑对某一个 $E(\min(T))$ 的值（这样的值一共 $O(m)$ 个），求所有这样的 $T$ 的容斥系数之和。

考虑 DP，设 $f_{i,j}$ 表示考虑了前 $i$ 种物品，$\sum p = j$ 的所有 $T$ 的容斥系数之和。新加入物品 $i$ 时，如果不选 $i$ 则直接有 $f_{i-1,j}$ 转移过来，否则，$f_{i,j}$ 应当由 $f_{i,j-p_i}$ 转移过来，新增的容斥系数为

$$\sum_{T\subseteq S, i\in T}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1} = \sum_{T\subseteq S\setminus\{i\}}\binom{|T|}{k-1}(-1)^{|T|-k+1}$$

$$= \sum_{T\subseteq S\setminus\{i\}}\binom{|T|-2}{k-2}(-1)^{|T|-k+1} - \sum_{T\subseteq S\setminus\{i\}}\binom{|T|-1}{k-1}(-1)^{|T|-k}$$

后者就是 $f_{i-1,j-p_i}$，而前者是 $k \leftarrow k-1$ 时的 $f_{i-1,j-p_i}$，于是我们再额外维护一维 $k$，转移有

$$f_{i,j,k} = f_{i-1,j,k} + f_{i-1,j-p_i,k-1} - f_{i-1,j-p_i,k}$$

复杂度 $O(nmk)$，需要滚一下空间。

# 例题

## [PKUWC2018] 随机游走

给定一棵 $n$ 个点的树，你从 $x$ 出发，每次等概率随机选择一条与所在点相邻的边走过去。
有 $Q$ 次询问。每次询问给出一个集合 $S$，求如果从 $x$ 出发一直随机游走，直到点集 $S$ 中的点都至少经过一次的话，期望游走几步。答案对 $998244353$ 取模。
特别地，点 $x$（即起点）视为一开始就被经过了一次。
$1 \leq n \leq 18, 1 \leq Q \leq 5000, 1 \leq |S| \leq n$。

期望游走的步数也就是游走的时间。那么设随机变量 $x_i$ 表示第一次走到结点 $i$ 的时间。那么我们要求的就是 $E(\max_{i\in S} x_i)$，使用 Min-Max 容斥可以得到

$$E\left(\max_{i\in S} x_i\right) = \sum_{T\subseteq S} (-1)^{|T|-1} E\left(\min_{i\in T} x_i\right)$$

对于一个集合 $T \subseteq S$，考虑求出 $F(T) = E(\min_{i\in T} x_i)$。

考虑 $E(\min_{i\in T} x_i)$ 的含义，是第一次走到 $T$ 中某一个点的期望时间。不妨设 $f(i)$ 表示从结点 $i$ 出发，第一次走到 $T$ 中某个结点的期望时间。

- 对于 $i \in T$，有 $f(i) = 0$。
- 对于 $i \notin T$，有 $f(i) = 1 + \frac{1}{\deg(i)} \sum_{(i,j)\in E} f(j)$

如果直接高斯消元，复杂度 $O(n^3)$。那么我们对每个 $T$ 都计算 $F(T)$ 的总复杂度就是 $O(2^n n^3)$，不能接受。

考虑 $E(\min_{i\in T} x_i)$ 的含义，是第一次走到 $T$ 中某一个点的期望时间。不妨设 $f(i)$ 表示从结点 $i$ 出发，第一次走到 $T$ 中某个结点的期望时间。

- 对于 $i \in T$，有 $f(i) = 0$。
- 对于 $i \notin T$，有 $f(i) = 1 + \frac{1}{\deg(i)} \sum_{(i,j)\in E} f(j)$

如果直接高斯消元，复杂度 $O(n^3)$。那么我们对每个 $T$ 都计算 $F(T)$ 的总复杂度就是 $O(2^n n^3)$，不能接受。

我们使用树上消元的技巧。
不妨设根结点是 $1$，结点 $u$ 的父亲是 $p_u$。对于叶子结点 $i$，$f(i)$ 只会和 $i$ 的父亲有关。因此我们可以把 $f(i)$ 表示成 $f(i) = A_i + B_i f(p_i)$ 的形式。
对于非叶结点 $i$，我们希望 $f(i)$ 也能表示成 $A_i + B_i f(p_i)$ 的形式。考虑它的儿子序列 $j_1, \cdots, j_k$。由于 $f(j_e) = A_{j_e} + B_{j_e} f(i)$。因此可以得到

$$f(i) = 1 + \frac{1}{\deg(i)} \sum_{e=1}^{k} (A_{j_e} + B_{j_e} f(i)) + \frac{f(p_i)}{\deg(i)}$$

那么变换一下可以得到

$$f(i)=\frac{\deg(i)+\sum_{e=1}^{k}A_{j_e}}{\deg(i)-\sum_{e=1}^{k}B_{j_e}}+\frac{f(p_i)}{\deg(i)-\sum_{e=1}^{k}B_{j_e}}$$

这样可以一直倒推到根结点。而根结点没有父亲。也就是说

$$f(1)=\frac{\deg(1)+\sum_{e=1}^{k}A_{j_e}}{\deg(1)-\sum_{e=1}^{k}B_{j_e}}$$

解一下这个方程我们就得到了 $f(1)$，再从上往下推一次就得到了每个点的 $f(i)$。这样，我们可以对于每一个 $T$ 计算出 $F(T)$，时间复杂度 $O(2^n n)$。

那么变换一下可以得到

$$f(i)=\frac{\deg(i)+\sum_{e=1}^{k}A_{j_e}}{\deg(i)-\sum_{e=1}^{k}B_{j_e}}+\frac{f(p_i)}{\deg(i)-\sum_{e=1}^{k}B_{j_e}}$$

这样可以一直倒推到根结点。而根结点没有父亲。也就是说

$$f(1)=\frac{\deg(1)+\sum_{e=1}^{k}A_{j_e}}{\deg(1)-\sum_{e=1}^{k}B_{j_e}}$$

解一下这个方程我们就得到了 $f(1)$，再从上往下推一次就得到了每个点的 $f(i)$。这样，我们可以对于每一个 $T$ 计算出 $F(T)$，时间复杂度 $O(2^n n)$。
每次回答询问是一个子集求和的形式，使用 FWT 做到 $O(2^n n)$ 预处理 $O(1)$ 询问。

# 子集反演

## 子集反演

$$f(S)=\sum_{T\subseteq S} g(T) \iff g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$$

$$f(S)=\sum_{S\subseteq T} g(T) \iff g(S)=\sum_{S\subseteq T}(-1)^{|T|-|S|}f(T)$$

# 子集反演

## 子集反演

$$f(S)=\sum_{T\subseteq S}g(T)\iff g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$$
$$f(S)=\sum_{S\subseteq T}g(T)\iff g(S)=\sum_{S\subseteq T}(-1)^{|T|-|S|}f(T)$$

**证明**：第二个式子可以由第一个式子取补集后得到，下面只证明第一个式子的 $\Longrightarrow$ 部分。

直接将 $f(S)=\sum_{T\subseteq S} g(T)$ 代入 $\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$ 中，得到

$$\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}\sum_{X\subseteq T} g(X)=\sum_{X\subseteq S} g(X)\sum_{X\subseteq T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}$$

枚举 $|T|$

$$\begin{aligned}\text{上式}&=\sum_{X\subseteq S} g(X)\sum_{i=|X|}^{|S|}\binom{|S|-|X|}{i-|X|}(-1)^{|S|-i}\\&=\sum_{X\subseteq S} g(X)\sum_{i=0}^{|S|-|X|}\binom{|S|-|X|}{i}(-1)^{|S|-|X|-i}\\&=\sum_{X\subseteq S} g(X)[|X|=|S|]=g(S)\end{aligned}$$

# 例题

**[ZJOI2016] 小星星**

给一张 $n$ 个点的简单无向图，再给一棵 $n$ 个点的树，现在要给这棵树重标号，问有多少种重标号的方案使得这棵树是原图的一棵生成树。
$n \leq 17$

# 例题

**[ZJOI2016] 小星星**

给一张 $n$ 个点的简单无向图，再给一棵 $n$ 个点的树，现在要给这棵树重标号，问有多少种重标号的方案使得这棵树是原图的一棵生成树。
$n \leq 17$

先考虑一个暴力状压 DP，设 $f_{u,i,S}$ 表示把树上的节点 $u$ 映射为图上的节点 $i$，$u$ 子树内的所有点的映射到集合为 $S$ 的方案数。
转移需要枚举 $S$ 的子集，复杂度 $O(n^3 3^n)$，用 FWT 优化也只能做到 $O(n^4 2^n)$，过不了。

本题的关键限制在于：任意两点的映射不能相同。当存在这一限制时无论怎么设都不好搞，所以设状态时需要把这个限制去掉，即两个树上的点现在可以映射到图上的同一个点。令

- $f(S)$ 表示将 $n$ 个树上的点映射到 $S$ 的映射数量，答案就是 $f(\{1, \cdots, n\})$
- $g(S)$ 表示将 $n$ 个树上的点映射到 $S$ 的子集映射数量

那么显然有

$$g(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)$$

利用子集反演，我们只需求出所有 $g(T)$。

本题的关键限制在于：任意两点的映射不能相同。当存在这一限制时无论怎么设都不好搞，所以设状态时需要把这个限制去掉，即两个树上的点现在可以映射到图上的同一个点。令

- $f(S)$ 表示将 $n$ 个树上的点映射到 $S$ 的映射数量，答案就是 $f(\{1, \cdots, n\})$
- $g(S)$ 表示将 $n$ 个树上的点映射到 $S$ 的子集映射数量

那么显然有

$$g(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)$$

利用子集反演，我们只需求出所有 $g(T)$。
修改一下之前的 DP，对于某个 $T$，设 $f_{u,i,T}$ 表示把树上的节点 $u$ 映射为图上的节点 $i$，每个节点映射到的点都 $\in T$ 的方案数，那么转移有

$$f_{u,i,T} = \prod_{v \in \mathrm{son}(u)} \left( \sum_{k \in T, (i,k) \in E} f_{v,k,T} \right)$$

最终 $g(T) = \sum_{j \in T} f_{root,j,T}$，复杂度为 $O(n^3 2^n)$。

# 例题

## UOJ#37. 【清华集训 2014】主旋律

给定一张 $n$ 个点 $m$ 条边的有向图，求有多少个边的子集满足删去这些边后整个图仍然强连通。答案 $\bmod 10^9+7$。
$n \le 15, 0 \le m \le n(n-1)$

# 例题

**UOJ#37. 【清华集训 2014】主旋律**

给定一张 $n$ 个点 $m$ 条边的有向图，求有多少个边的子集满足删去这些边后整个图仍然强连通。答案 $\bmod 10^9+7$。
$n \le 15, 0 \le m \le n(n-1)$

正难则反，考虑求出有多少个删边的方案使得删边后的图不强连通。此时，对删边后的图缩点，缩点后得到的是一个非孤立点的 DAG。换句话说，它缩点后一定有至少一个 $0$ 度点，且缩点后的图不是孤立点。
我们先考虑怎么求缩点前至少有 $1$ 个零度点的子图数量。定义

- $h(S)$ 表示点集 $S$ 的导出子图的至少有 $1$ 个零度点的子图数量
- $f(T,S)$ 表示在点集 $S$ 的导出子图中，$T$ 恰好是所有入度为 $0$ 的点的子图数量；
- $g(T,S)$ 表示在点集 $S$ 的导出子图中，$T$ 集合中的点一定入度为 $0$ ，$S-T$ 中的点无所谓的子图数量。

我们考虑如何求 $h(S)$。

令 $c(S,T)$ 表示 $\sum_{u\in S,v\in T}[(u,v)\in E]$ 是由 $S$ 指向 $T$ 的边的数量

- $g(T,S)=2^{c(S,S-T)}$
- $g(T,S)=\sum\limits_{T\subseteq R\subseteq S} f(R,S)$，子集反演得到 $f(T,S)=\sum\limits_{T\subseteq R\subseteq S}(-1)^{|R|-|T|}g(R,S)$

那么

$$\begin{aligned}
h(S)=\sum_{T\subseteq S,T\neq\varnothing} f(T,S) &= \sum_{T\subseteq S,T\neq\varnothing}\ \sum_{T\subseteq R\subseteq S}(-1)^{|R|-|T|}g(R,S)\\
&=\sum_{R\subseteq S,R\neq\varnothing}(-1)^{|R|}g(R,S)\sum_{T\subseteq R\subseteq S,T\neq\varnothing}(-1)^{|T|}\\
&=\sum_{R\subseteq S,R\neq\varnothing}(-1)^{|R|}g(R,S)([R=\varnothing]-1)\\
&=\sum_{R\subseteq S,R\neq\varnothing}(-1)^{|R|+1}g(R,S)=\sum_{R\subseteq S,R\neq\varnothing}(-1)^{|R|+1}2^{c(S,S-R)}
\end{aligned}$$

回到原问题，令

- $f(S)$ 表示点集 $S$ 的导出子图的强连通子图数量，$f(\{1,\cdots,n\})$ 即为答案；
- $g(S)$ 表示点集 $S$ 的导出子图的非强连通子图数量，$f(S)+g(S)=2^{c(S,S)}$。

注意到我们求至少有 $1$ 个零度点的子图数量时，容斥系数只与 $0$ 度点的数量的奇偶性有关，于是定义

- $P(S)$ 表示将点集 $S$ 的导出子图划分为奇数个强连通分量的方案数
- $Q(S)$ 表示将点集 $S$ 的导出子图划分为偶数个强连通分量的方案数

回到原问题，令

- $f(S)$ 表示点集 $S$ 的导出子图的强连通子图数量，$f(\{1,\cdots,n\})$ 即为答案；
- $g(S)$ 表示点集 $S$ 的导出子图的非强连通子图数量，$f(S)+g(S)=2^{c(S,S)}$。

注意到我们求至少有 $1$ 个零度点的子图数量时，容斥系数只与 $0$ 度点的数量的奇偶性有关，于是定义

- $P(S)$ 表示将点集 $S$ 的导出子图划分为奇数个强连通分量的方案数
- $Q(S)$ 表示将点集 $S$ 的导出子图划分为偶数个强连通分量的方案数

那么枚举 $T$ 表示缩点后的所有 $0$ 度点是原图中 $T$ 中的所有点，

$$g(S)=\sum_{T\subset S}(P(T)-Q(T))\times 2^{c(S,S-T)}$$

$P$ 和 $Q$ 的转移为

$$P(S)=\sum_{T\subset S}f(T)\times Q(S-T),\quad Q(S)=\sum_{T\subset S}f(T)\times P(S-T)$$

求 $c$ 可以用 bitset，复杂度是 $O(3^n\cdot\frac{m}{\omega})$

完 结 撒 花