线性代数

harryzhr

2025 年 2 月 6 日

矩阵

定义

设 m, n 是两个正整数，由数域 $\mathbb{F}$ 中 $m \times n$ 个数 $a_{i,j}(i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n)$ 排成的一个 m 行 n 列的矩形图表

$$(a_{ij}) = (a_{ij})_{m\times n} = \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $\mathbb{F}$ 上的一个 m 行 n 列的矩阵或 $m \times n$ 矩阵。特别地，当 $m = n$ 时，称 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵。

矩阵

定义

设 m, n 是两个正整数，由数域 $\mathbb{F}$ 中 $m \times n$ 个数 $a_{i,j}(i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n)$ 排成的一个 m 行 n 列的矩形图表

$$(a_{ij}) = (a_{ij})_{m\times n} = \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $\mathbb{F}$ 上的一个 m 行 n 列的矩阵或 $m \times n$ 矩阵。特别地，当 $m = n$ 时，称 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵。

记 $M_{m,n}(\mathbb{F}) = \{\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} | \mid a_{ij} \in \mathbb{F}\}$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 $m \times n$ 矩阵全体，$M_n(\mathbb{F}) = M_{n,n}(\mathbb{F})$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 阶方阵全体。

矩阵乘法

定义

$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times s}$，定义 A 与 B 的乘积为矩阵

$$AB=C=(c_{ij})\in M_{m,s}(\mathbb{F})$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

C 矩阵的第 i 行第 j 列的数，就是由矩阵 A 第 i 行 n 个数与矩阵 B 第 j 列 n 个数对应位置相乘再相加得到的。

矩阵乘法

定义

$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times s}$，定义 A 与 B 的乘积为矩阵

$$AB=C=(c_{ij})\in M_{m,s}(\mathbb{F})$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

C 矩阵的第 i 行第 j 列的数，就是由矩阵 A 第 i 行 n 个数与矩阵 B 第 j 列 n 个数对应位置相乘再相加得到的。

卡常技巧

一般来说，矩阵乘法的元素要求对某个数取模，我们可以用 `long long`（或者 `int128`）把一行之和求出来再取模，以减少取模次数。

矩阵乘法

定义

$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times s}$，定义 A 与 B 的乘积为矩阵

$$AB=C=(c_{ij})\in M_{m,s}(\mathbb{F})$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

C 矩阵的第 i 行第 j 列的数，就是由矩阵 A 第 i 行 n 个数与矩阵 B 第 j 列 n 个数对应位置相乘再相加得到的。

卡常技巧

一般来说，矩阵乘法的元素要求对某个数取模，我们可以用 `long long`（或者 `int128`）把一行之和求出来再取模，以减少取模次数。有时还可以加上循环展开。

矩阵乘法的性质

结合律

$$(AB)C = A(BC)$$

矩阵乘法的性质

结合律

$$(AB)C = A(BC)$$

证明：记 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times s}, C=(c_{ij})_{s\times t}$，对于 $1\le i\le m, 1\le j\le t$，比较 $(AB)C$ 与 $A(BC)$ 的 (i,j) 元素。
一方面，AB 的第 i 行元素为 $(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{k1} \ \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{k2} \ \cdots \ \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ks})$，$(AB)C$ 的 (i,j) 元素为

$$\sum_{l=1}^s \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl}\right) c_{lj} = \sum_{l=1}^s\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl}c_{lj}$$

另一方面，(BC) 的第 j 列元素为 $(\sum_{l=1}^s b_{1l}c_{lj} \ \sum_{l=1}^s b_{2l}c_{lj} \ \cdots \ \sum_{l=1}^s b_{sl}c_{lj})^T$，$A(BC)$ 的 (i,j) 元素为

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}\left(\sum_{l=1}^s b_{kl}c_{lj}\right) = \sum_{l=1}^s\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl}c_{lj}$$

二者是相等的。 $\square$

分配律

$$A(B+C)=AB+AC,(B+C)D=BD+CD$$

单位元

对于 $n\geq 1$，记

$$I_n=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F})$$

称为 n 阶**单位矩阵**（identity matrix），任取 $A\in M_{m,n}(\mathbb{F})$，有 $I_mA=A=AI_n$

Remark

矩阵的乘积定义了 $M_n(\mathbb{F})$ 的一个二元运算：

$$M_n(\mathbb{F}) \times M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F}), (A, B) \mapsto AB$$

事实上，$M_n(\mathbb{F})$ 对于矩阵的加法和乘法构成一个**环**（ring）。

Remark

矩阵的乘积定义了 $M_n(\mathbb{F})$ 的一个二元运算：

$$M_n(\mathbb{F}) \times M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F}), (A, B) \mapsto AB$$

事实上，$M_n(\mathbb{F})$ 对于矩阵的加法和乘法构成一个**环**（ring）。
但是 $M_n(\mathbb{F})$ 不是一个交换环，也就是说矩阵乘法**不满足交换律**。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remark

矩阵的乘积定义了 $M_n(\mathbb{F})$ 的一个二元运算：

$$M_n(\mathbb{F}) \times M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F}), (A, B) \mapsto AB$$

事实上，$M_n(\mathbb{F})$ 对于矩阵的加法和乘法构成一个**环**（ring）。
但是 $M_n(\mathbb{F})$ 不是一个交换环，也就是说矩阵乘法**不满足交换律**。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同时，消去律也不一定成立，也就是 $AB = AC, A \neq \boldsymbol{O} \nRightarrow B = C$。例如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵快速幂与常系数齐次线性递推

利用矩阵乘法的结合律，我们可以使用快速幂的方法求一个矩阵 A 的 m 次幂 A^m。进而可以用于优化常系数齐次线性递推

P1939 矩阵加速（数列）

已知一个数列 a，它满足 $a_n = \begin{cases} 1 & n \in \{1,2,3\} \\ a_{n-1} + a_{n-3} & n \geq 4 \end{cases}$，求 a 数列的第 n 项对 10^9+7 取余的值。

$1 \leq T \leq 100$，$1 \leq n \leq 2 \times 10^9$。

矩阵快速幂与常系数齐次线性递推

利用矩阵乘法的结合律，我们可以使用快速幂的方法求一个矩阵 A 的 m 次幂 A^m。进而可以用于优化常系数齐次线性递推

P1939 矩阵加速（数列）

已知一个数列 a，它满足 $a_n = \begin{cases} 1 & n \in \{1,2,3\} \\ a_{n-1} + a_{n-3} & n \geq 4 \end{cases}$，求 a 数列的第 n 项对 10^9+7 取余的值。
$1 \leq T \leq 100$，$1 \leq n \leq 2 \times 10^9$。

转移如下

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}$$

求 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的 $n-3$ 次幂即可，复杂度 $O(T\log n)$。

邻接矩阵的乘法

对一个有向图 G，记其邻接矩阵为 A，则 A^k 的 (i,j) 元素为从 i 出发，走 k 步走到 j 的路径数。

邻接矩阵的乘法

对一个有向图 G，记其邻接矩阵为 A，则 A^k 的 (i,j) 元素为从 i 出发，走 k 步走到 j 的路径数。

如果只考虑可达性，此时矩阵中只有 0 和 1，乘法变成与操作，加法变成或操作。使用 `bitset` 可以将矩阵乘法优化到 $O(\frac{n^3}{\omega})$。

例题

「SCOI2009」迷路

有向图有 n 个节点，节点从 1 至 n 编号，边有边权。windy 从节点 1 出发，他必须恰好在 t 时刻到达节点 n。
现在给出该有向图，你能告诉 windy 总共有多少种不同的路径吗？答案对 2009 取模。
注意：windy 不能在某个节点逗留，通过某有向边的时间为这条边的边权。
$2 \le n \le 10$，$1 \le t \le 10^9$，$1 \le$ 边权 ≤ 9。

例题

「SCOI2009」迷路

有向图有 n 个节点，节点从 1 至 n 编号，边有边权。windy 从节点 1 出发，他必须恰好在 t 时刻到达节点 n。
现在给出该有向图，你能告诉 windy 总共有多少种不同的路径吗？答案对 2009 取模。
注意：windy 不能在某个节点逗留，通过某有向边的时间为这条边的边权。
$2 \le n \le 10$，$1 \le t \le 10^9$，$1 \le$ 边权 ≤ 9。

拆边，若一条边 $u \to v$ 的权值为 w，那么新建点 $(x_1, x_2, \cdots, x_{w-1})$，连边 $u \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{w-1} \to v$，边权均为 1。
对新图的邻接矩阵求 t 次幂即可。
矩阵的大小是新图的点数 $N = m \cdot 8 = 8n^2$ 级别的，复杂度 $O(N^3 \log t)$。
~~应该是能过的~~，但是复杂度还可以更优。

例题

「SCOI2009」迷路

有向图有 n 个节点，节点从 1 至 n 编号，边有边权。windy 从节点 1 出发，他必须恰好在 t 时刻到达节点 n。
现在给出该有向图，你能告诉 windy 总共有多少种不同的路径吗？答案对 2009 取模。
注意：windy 不能在某个节点逗留，通过某有向边的时间为这条边的边权。
$2 \le n \le 10$，$1 \le t \le 10^9$，$1 \le$ 边权 ≤ 9。

拆边，若一条边 $u \to v$ 的权值为 w，那么新建点 $(x_1, x_2, \cdots, x_{w-1})$，连边 $u \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{w-1} \to v$，边权均为 1。
对新图的邻接矩阵求 t 次幂即可。
矩阵的大小是新图的点数 $N = m \cdot 8 = 8n^2$ 级别的，复杂度 $O(N^3 \log t)$。
~~应该是能过的~~，但是复杂度还可以更优。
对每个点拆点，$(u, 0) \to (u, 1) \to (u, 2) \to \cdots \to (u, 8)$。
对于一条 $u \to v$，边权为 w 的边，连边 $(u, w-1) \to (v, 0)$。
矩阵的大小是新图的点数 $N = 9n$ 级别的，复杂度 $O(N^3 \log t)$。

例题

CF576D Flights for Regular Customers *2700

给定一张 n 个点 m 条边的有向图，边有边权 d_i。一开始你在 1 号节点，你要走到 n 号节点去。只有当你已经走过了至少 d_i 条边时，你才能走第 i 条边。问最少要走多少条边，或判断无法到达。

$n, m \le 150$，$d_i \le 10^9$。

例题

CF576D Flights for Regular Customers *2700

给定一张 n 个点 m 条边的有向图，边有边权 d_i。一开始你在 1 号节点，你要走到 n 号节点去。只有当你已经走过了至少 d_i 条边时，你才能走第 i 条边。问最少要走多少条边，或判断无法到达。
$n, m \le 150$，$d_i \le 10^9$。

对于第 i 步，设所有 $d_j \le i$ 的边 j 构成的图的邻接矩阵为 A_i，我们要找到一个最小的 k，使得 $A_0A_1 \cdots A_k$ 的 $(1, n)$ 元素为 1。
把边按照 d_i 排序，然后依次插入。这样每段的邻接矩阵都是相同的了，求这些邻接矩阵的幂再拼起来即可。
然后可以在段内倍增找到对应的 k，复杂度 $O(\frac{n^3}{\omega} \cdot m \log d)$

例题

很多 DP 也可以用类似于常系数齐次线性递推的方式优化。

「SHOI2013」超级跳马

现有一个 n 行 m 列的棋盘，一只马欲从棋盘的左上角跳到右下角。每一步它向右跳奇数列，且跳到本行或相邻行。跳越期间，马不能离开棋盘。
试求跳法种数对 30011 取模的结果。
数据范围：$1 \le n \le 50$，$2 \le m \le 10^9$。

例题

很多 DP 也可以用类似于常系数齐次线性递推的方式优化。

「SHOI2013」超级跳马

现有一个 n 行 m 列的棋盘，一只马欲从棋盘的左上角跳到右下角。每一步它向右跳奇数列，且跳到本行或相邻行。跳越期间，马不能离开棋盘。
试求跳法种数对 30011 取模的结果。
数据范围：$1 \le n \le 50$，$2 \le m \le 10^9$。

设 $f_{i,j}$ 表示马跳到第 i 行第 j 列的方案数，那么转移就是：

$$f_{i,j} = \sum_{k=1} f_{i-1,j-(2k-1)} + f_{i,j-(2k-1)} + f_{i+1,j-(2k-1)}$$

例题

很多 DP 也可以用类似于常系数齐次线性递推的方式优化。

「SHOI2013」超级跳马

现有一个 n 行 m 列的棋盘，一只马欲从棋盘的左上角跳到右下角。每一步它向右跳奇数列，且跳到本行或相邻行。跳越期间，马不能离开棋盘。
试求跳法种数对 30011 取模的结果。
数据范围：$1 \le n \le 50$，$2 \le m \le 10^9$。

设 $f_{i,j}$ 表示马跳到第 i 行第 j 列的方案数，那么转移就是：

$$f_{i,j} = \sum_{k=1} f_{i-1,j-(2k-1)} + f_{i,j-(2k-1)} + f_{i+1,j-(2k-1)}$$

发现 $f_{i,j-2} = \sum_{k=2} f_{i-1,j-(2k-1)} + f_{i,j-(2k-1)} + f_{i+1,j-(2k-1)}$，那么我们有

$$f_{i,j} = f_{i-1,j-1} + f_{i,j-1} + f_{i+1,j-1} + f_{i,j-2}$$

把这个转移写成矩阵，以 $n=3$ 为例

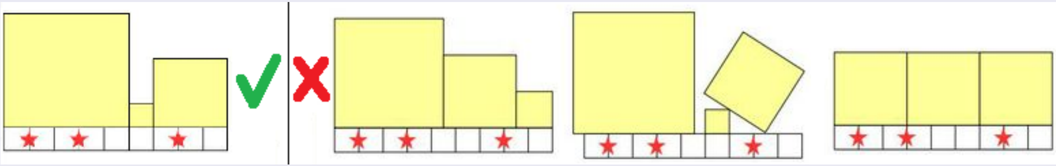
$$\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{1,j-1}\\f_{2,j-1}\\f_{3,j-1}\\f_{1,j}\\f_{2,j}\\f_{3,j}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{1,j}\\f_{2,j}\\f_{3,j}\\f_{1,j+1}\\f_{2,j+1}\\f_{3,j+1}\end{bmatrix}$$

做矩阵快速幂即可，复杂度 $O(n^3\log m)$。

例题

AGC13E Placing Squares

给定一个长度为 n 的木板，木板上（不含边缘）$n-1$ 个整数位置上有 m 个被标记。
现在你需要在木板上放置一些不相交正方形，正方形需要满足：边长为整数、底面需要紧贴木板、正方形不能超出木板、正方形要将所有的木板覆盖、标记点的位置不能是两个正方形的交界处。
一种合法的正方形放置方案的贡献为所有正方形面积之积，求出所有合法方案的贡献之和 $\bmod 10^9+7$。
数据范围：$n \le 10^9, m \le 10^5$。
下图是一些合法的和不合法的例子：



先不考虑有标记的情况。那么这个问题有另一个组合意义：

- 一排 n 个格子，需要用板子把他们分成若干段
- 每段的格子里放有恰好两个不同颜色小球（a^2）。

这个东西的方案数就是所有正方形面积之积的和。

先不考虑有标记的情况。那么这个问题有另一个组合意义：

- 一排 n 个格子，需要用板子把他们分成若干段
- 每段的格子里放有恰好两个不同颜色小球（a^2）。

这个东西的方案数就是所有正方形面积之积的和。
这个东西是很好 DP 的，设 $f_{i,j}$ 表示前 i 个格子里，最后一段没有被封口的格子里有 j 个小球（$j \in [0,2]$）的方案数。转移有：

$$
\begin{aligned}
f_{i+1,0} &\leftarrow f_{i,0} + f_{i,2} \\
f_{i+1,1} &\leftarrow 2f_{i,0} + f_{i,1} + 2f_{i,2} \\
f_{i+1,2} &\leftarrow f_{i,0} + f_{i,1} + 2f_{i,2}
\end{aligned}
$$

矩阵快速幂优化即可。

先不考虑有标记的情况。那么这个问题有另一个组合意义：

- 一排 n 个格子，需要用板子把他们分成若干段
- 每段的格子里放有恰好两个不同颜色小球（a^2）。

这个东西的方案数就是所有正方形面积之积的和。
这个东西是很好 DP 的，设 $f_{i,j}$ 表示前 i 个格子里，最后一段没有被封口的格子里有 j 个小球（$j \in [0,2]$）的方案数。转移有：

$$
\begin{aligned}
f_{i+1,0} &\leftarrow f_{i,0} + f_{i,2} \\
f_{i+1,1} &\leftarrow 2f_{i,0} + f_{i,1} + 2f_{i,2} \\
f_{i+1,2} &\leftarrow f_{i,0} + f_{i,1} + 2f_{i,2}
\end{aligned}
$$

矩阵快速幂优化即可。
然后就是有标记的情况，分段，每段中间矩阵快速幂，然后遇到标记特判一下转移即可。
复杂度 $O(m \log n)$。

动态 DP

动态 DP，就是把状态转移方程改写为矩阵后用数据结构维护的算法。
这里的矩阵可以是常见的 $(+,\times)$ 矩阵，也可能是 $(\min/\max,+)$ 矩阵。
这里的 $(\max,+)$ 矩阵的矩阵乘法定义为：
矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}, B=(b_{ij})_{m\times s}$

$$AB=(c_{ij})_{n\times s}, c_{ij}=\max_{1\le k\le m}\{a_{ik}+b_{kj}\}$$

这里的 $(\max,+)$ 矩阵乘法和 $(+,\times)$ 矩阵乘法一样，都具有结合律（因为 $+$ 对 $\max$ 有分配律），即 $(AB)C=A(BC)$。

例题

CF750E New Year and Old Subsequence *2600

定义一个数字串是好的当且仅当：该串包含子序列 2017，且不包含子序列 2016。给定长为 n 的数字串 t，q 次询问，每次询问给出 l, r，求把 $t[l, r]$ 这个子串变成好的，最少要删除几个字符。
数据范围：$n, q \leq 2 \times 10^5$

例题

CF750E New Year and Old Subsequence *2600

定义一个数字串是好的当且仅当：该串包含子序列 2017，且不包含子序列 2016。给定长为 n 的数字串 t，q 次询问，每次询问给出 l, r，求把 $t[l, r]$ 这个子串变成好的，最少要删除几个字符。
数据范围：$n, q \le 2 \times 10^5$

先考虑一个串怎么做
$f_{i,0/1/2/3/4}$ 表示 i 个数字的子序列中出现 $\varnothing/2/20/201/2017$ 且不出现 2016 最少需要删去多少个字符。

有转移

$$\begin{cases} f_{i,0} = f_{i-1,0} + [s_i = 2] \\ f_{i,1} = \min(f_{i-1,1} + [s_i = 0], f_{i-1,0}[s_i = 2]) \\ f_{i,2} = \min(f_{i-1,2} + [s_i = 1], f_{i-1,1}[s_i = 0]) \\ f_{i,3} = \min(f_{i-1,3} + [s_i = 7 \vee s_i = 6], f_{i-1,2}[s_i = 1]) \\ f_{i,4} = \min(f_{i-1,4} + [s_i = 6], f_{i-1,3}[s_i = 7]) \end{cases}$$

注意这里 $f_{i-1,0}[s_i = 2]$ 等类似的写法应该理解为：$\begin{cases} f_{i-1,0} & (s_i = 2) \\ +\infty & (s_i \neq 2) \end{cases}$

有转移

$$\begin{cases} f_{i,0} = f_{i-1,0} + [s_i = 2] \\ f_{i,1} = \min(f_{i-1,1} + [s_i = 0], f_{i-1,0}[s_i = 2]) \\ f_{i,2} = \min(f_{i-1,2} + [s_i = 1], f_{i-1,1}[s_i = 0]) \\ f_{i,3} = \min(f_{i-1,3} + [s_i = 7 \lor s_i = 6], f_{i-1,2}[s_i = 1]) \\ f_{i,4} = \min(f_{i-1,4} + [s_i = 6], f_{i-1,3}[s_i = 7]) \end{cases}$$

注意这里 $f_{i-1,0}[s_i = 2]$ 等类似的写法应该理解为：$\begin{cases} f_{i-1,0} & (s_i = 2) \\ +\infty & (s_i \neq 2) \end{cases}$

把它写成 $(\min, +)$ 矩阵，用线段树维护区间矩阵之积即可。复杂度 $O(q \log n)$。

动态 DP

在树形 DP 中，结合使用轻重链剖分等数据结构技巧，可以用动态 DP 的 $(\max, +)$ 矩阵快速维护树形 DP。

但是这部分内容和线性代数几乎没有关系，所以这里不展开讲了。

高斯消元法

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

在消元过程中，对线性方程组做如下的三种变换（线性方程组的初等变换）：

1. 交换两个方程的位置
2. 用一个非零的数乘以某个方程的两边
3. 将一个方程的倍数加到另一个方程

命题

线性方程组的初等变换将一个线性方程组化为与之同解的线性方程组

命题

方程组（$*$）可通过初等变换化为如下阶梯形的线性方程组

$$(**)\begin{cases} a'_{1i_1}x_{i_1}+\cdots+a'_{1i_2}x_{i_2}+\cdots+a'_{1i_r}x_{i_r}+a'_{1i_{r+1}}x_{i_{r+1}}+\cdots+a'_{1n}x_n=b'_1 \\ a'_{2i_2}x_{i_2}+\cdots+a'_{2i_r}x_{i_r}+a'_{2i_{r+1}}x_{i_{r+1}}+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2 \\ \vdots \\ a'_{mi_r}x_{i_r}+a'_{mi_{r+1}}x_{i_{r+1}}+\cdots+a'_{mn}x_n=b'_m \end{cases}$$

具体来说，对于某一个变量 x_i，选择一个 x_i 系数非零的行，用这一行和第三种初等变换即可把其他方程的 x_i 系数都消掉，剩下的方程可以递归处理。复杂度 $O(n^3)$ (假设是 n 个变量 n 个方程)。
如果是实数计算，为了保证精度，选择方程时，要选择 x_i 系数的绝对值最大的那个方程。

进一步，通过交换未知量的位置以及作第 2，3 种初等变换，方程组 $(**)$ 可化为如下形式：

$$(***)\begin{cases} x_{i_1}+c_{1,r+1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c_{1n}x_{i_n}=d_1 \\ x_{i_2}+c_{2,r+1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c_{2n}x_{i_n}=d_2 \\ \qquad\vdots \\ x_{i_r}+c_{r,r+1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c_{rn}x_{i_n}=d_r \\ 0=d_{r+1} \\ \qquad\vdots \\ 0=d_m \end{cases}$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，r 称为这个方程组的**秩**（rank）。

- 若 $r<m$ 且 $d_{r+1},\cdots,d_m$ 不全为零，则 $(***)$ 无解（即 $(*)$ 无解）
- 若 $r=m$ 或 $r<m$ 且 $d_{r+1},\cdots,d_m$ 全为零, 则 $(***)$ 有解
  - 当 $r=n$ 时，有唯一解 $x_{i_k}=d_k$
  - 当 $r<n$ 时，$(***)$ 有无穷多解，$x_{i_r+1},\cdots,x_{i_n}$ 可以在数域中任选，剩下的 $x_{i_1},\cdots,x_{i_r}$ 的值由 $x_{i_r+1},\cdots,x_{i_n}$ 的值确定

向量

定义

数域 $\mathbb{F}$ 中的 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的一个有序组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \alpha$ 称为 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 维（行）**向量**（vector）

加法与数乘运算

- 对于 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n), \alpha, \beta \in \mathbb{F}^n$，定义 $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$
- 对于 $k \in \mathbb{F}, \alpha \in \mathbb{F}^n$，定义 $k\alpha = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$

线性相关性

- 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in \mathbb{F}^n$，给定 $k_1, \cdots, k_s \in \mathbb{F}$，称 $k_1\alpha_1 + \cdots, k_s\alpha_s$ 是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的一个**线性组合**（linear combination）
- 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta \in \mathbb{F}^n$，若 β 可写为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的一个线性组合，则称 β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ **线性表示**（或线性表出）
- 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{F}^n$，若存在一组不全为零的数 $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{F}$ 使得 $a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m = 0$，则称 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$ **线性相关**，否则称 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$ **线性无关**，即对任意一组不全为零的的数 $a_1, \cdots, a_m$，总有 $a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m \neq 0$。
  等价地，$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_m = 0$ 当且仅当 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关。

极大无关组

对于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{F}^n$，如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 中的部分向量 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 满足：

1. $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关
2. 每个 $\alpha_i (1 \le i \le m)$ 均可由 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示

那么称 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 的一个**极大线性无关组**（简称**极大无关组**，maximal linearly independent subset）

命题

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是 $\mathbb{F}^n$ 中含有非零向量的向量组，则它必有极大无关组

极大无关组

对于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{F}^n$，如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 中的部分向量 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 满足：

1. $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关
2. 每个 $\alpha_i (1 \le i \le m)$ 均可由 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示

那么称 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 的一个**极大线性无关组**（简称**极大无关组**，maximal linearly independent subset）

命题

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是 $\mathbb{F}^n$ 中含有非零向量的向量组，则它必有极大无关组

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是 $\mathbb{F}^n$ 中的一个向量组，称它的极大无关组所含向量个数为它的**秩**(rank)，记作 $\mathrm{r}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 或 $\mathrm{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$

向量空间

- 设 W 是 $\mathbb{F}^n$ 的一个非空子集，若对任意 $\alpha, \beta \in W$ 与任意 $k \in \mathbb{F}$，总有 $\alpha + \beta, k\alpha \in W$，则称 W 是 $\mathbb{F}^n$ 的一个**子空间**（subspace）
- 记 $\mathscr{L}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m \mid k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{F}\}$，称为由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ **张成的子空间**
  进一步，称两组向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 是**等价**的，若它们张成的子空间是相同的，即 $\mathscr{L}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \mathscr{L}(\beta_1, \cdots, \beta_m)$

向量空间

- 设 W 是 $\mathbb{F}^n$ 的一个非空子集，若对任意 $\alpha, \beta \in W$ 与任意 $k \in \mathbb{F}$，总有 $\alpha + \beta, k\alpha \in W$，则称 W 是 $\mathbb{F}^n$ 的一个**子空间**（subspace）
- 记 $\mathscr{L}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m \mid k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{F}\}$，称为由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ **张成的子空间**
  进一步，称两组向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 是**等价**的，若它们张成的子空间是相同的，即 $\mathscr{L}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \mathscr{L}(\beta_1, \cdots, \beta_m)$

定理

若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 是等价的线性无关的向量组，则 $s = t$

它是**替换定理**（Steinitz Exchange Lemma）的直接推论。

向量空间

- 设 W 是 $\mathbb{F}^n$ 的一个非空子集，若对任意 $\alpha, \beta \in W$ 与任意 $k \in \mathbb{F}$，总有 $\alpha + \beta, k\alpha \in W$，则称 W 是 $\mathbb{F}^n$ 的一个**子空间**（subspace）
- 记 $\mathscr{L}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m \mid k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{F}\}$，称为由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ **张成的子空间**
  进一步，称两组向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 是**等价**的，若它们张成的子空间是相同的，即 $\mathscr{L}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \mathscr{L}(\beta_1, \cdots, \beta_m)$

定理

若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 是等价的线性无关的向量组，则 $s = t$

它是**替换定理**（Steinitz Exchange Lemma）的直接推论。

- 设 W 是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间，若存在线性无关的向量组 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_s \in W$，使得 W 中的每个向量都能由 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_s$ 线性表示，则称 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_s$ 是 W 的一个**基**（basis），称 s 是 W 的**维数**（dimension），记作 $\dim W = s$
  W 的任意两组基都是等价的，且所含向量的数量是相同的，于是 $\dim$ 不依赖于基的选取。

线性方程组与矩阵

线性方程组

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以写成矩阵

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\beta}$$

由这个方程得到两个矩阵

- 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
- 增广矩阵 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

对 $(*)$ 作初等变换，相当于对其系数矩阵和增广矩阵作如下的变换（**矩阵的初等行变换**）：

1. 交换两行的位置
2. 用一个非零的数乘以某一行
3. 将某一行的倍数加到另一行

类似地，可定义矩阵的初等列变换

行空间、列空间

- 由矩阵 A 的 m 个行向量生成的 $\mathbb{F}^n$ 的子空间称为 A 的**行空间**（row space），其维数称为矩阵 A 的**行秩**（row rank），记作 $\mathrm{r}_r(A)$
- 由矩阵 A 的 n 个列向量生成的 $\mathbb{F}^m$ 的子空间称为 A 的**列空间**（column space），其维数称为矩阵 A 的**列秩**（column rank），记作 $\mathrm{r}_c(A)$

行空间、列空间

- 由矩阵 A 的 m 个行向量生成的 $\mathbb{F}^n$ 的子空间称为 A 的**行空间**（row space），其维数称为矩阵 A 的**行秩**（row rank），记作 $\mathrm{r}_r(A)$
- 由矩阵 A 的 n 个列向量生成的 $\mathbb{F}^m$ 的子空间称为 A 的**列空间**（column space），其维数称为矩阵 A 的**列秩**（column rank），记作 $\mathrm{r}_c(A)$

定理

矩阵的初等行、列变换不改变矩阵的行秩和列秩

矩阵的秩

定理

$$\mathrm{r}_r(A) = \mathrm{r}_c(A)$$

于是可以定义 A 的行秩与列秩为矩阵 A 的**秩**（rank），记作 $\mathrm{r}(A)$ 或 $\mathrm{rank}(A)$

矩阵的秩

定理

$$\mathrm{r}_r(A) = \mathrm{r}_c(A)$$

于是可以定义 A 的行秩与列秩为矩阵 A 的**秩**（rank），记作 $\mathrm{r}(A)$ 或 $\mathrm{rank}(A)$

定理

$$\mathrm{r}(AB) \le \min(\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B))$$

线性方程组的解

定理（Kronecker-Catelli）

方程组 $(*)$ 有解的充要条件是

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\tilde{A})$$

进一步，若 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\tilde{A}) = r$，即 $(*)$ 有解时，则

- 当 $r = n$ 时，方程组 $(*)$ 有唯一解
- 当 $r < n$ 时，$(*)$ 有无穷多解。

齐次线性方程组解的结构

考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

其系数矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$。

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathbf{0}$$

当 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 是该方程组的解，即 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n = \mathbf{0}$，将这个解写成列向量的形式 $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}^T \in \mathbb{F}^n$

令 $W = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \mid \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i = 0 \right\}$，即 W 是该方程组的所有解构成的集合

直接验证，W 是 $\mathbb{F}^n$ 的一个子空间，称其为方程组的**解空间** (spcae of solutions)。方程组的解空间 W 的一个基 $\{\eta_1, \cdots, \eta_s\}$，称为方程组的一个**基础解系** (fundamental system of solutions)，此时方程组的每一个解都可表示为 $\lambda_1\eta_1 + \cdots + \lambda_s\eta_s$，其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in \mathbb{F}$。

定理

设 $r = r(A)$，则 $\dim W = n - r$，即方程组的基础解系恰好含有 $n - r$ 个向量。

一般线性方程组解的结构

现在考虑一个一般的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$，增广矩阵 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & \beta \end{pmatrix}$，

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

其导出组（或相伴的齐次线性方程组）

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathbf{0}$$

令 W 是该方程组的导出组的解空间

定理

设 $r(A)=r(\tilde{A})=r$，即方程组有解，并且设 γ 是方程组的一个特解，则 $\gamma+W=\{\gamma+\eta \mid \eta\in W\}$ 是方程组的所有解的集合。
换句话说，如果 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 是方程组的导出组的一个基础解系，则方程组的所有解为

$$\gamma+\lambda_1\eta_1+\cdots+\lambda_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-r}\in\mathbb{F}$

例题

「HNOI2013」游走

给定一个 n 个点 m 条边的无向连通图，顶点从 1 编号到 n，边从 1 编号到 m。一开始边编号还没有确定。
在该图上进行随机游走，初始时在 1 号顶点，每一步以相等的概率随机选择当前顶点的某条边，沿着这条边走到下一个顶点，获得等于这条边的编号的分数。到达 n 号顶点时游走结束，总分为所有获得的分数之和。请你对这 m 条边进行编号，使得获得的总分的期望值最小。输出实数。
$2 \le n \le 500$，$1 \le m \le 125000$，图无重边和自环。

设 f_i 表示第 i 个点的期望经过次数，列出方程

$$\begin{cases} f_1 = 1 + \sum_{(1,u)\in E, u\neq n} \frac{f_u}{\deg_u} \\ f_i = \sum_{(i,u)\in E, u\neq n} \frac{f_u}{\deg_u} & 2 \leq i \leq n-1 \\ f_n = 1 \end{cases}$$

高斯消元解出这个方程。

设 f_i 表示第 i 个点的期望经过次数，列出方程

$$\begin{cases} f_1 = 1 + \sum_{(1,u)\in E, u\neq n} \frac{f_u}{\deg_u} & \\ f_i = \sum_{(i,u)\in E, u\neq n} \frac{f_u}{\deg_u} & 2 \leq i \leq n-1 \\ f_n = 1 & \end{cases}$$

高斯消元解出这个方程。
对于一条边 (u, v)，经过它的期望次数为

$$\frac{f_u}{\deg_u} + \frac{f_v}{\deg_v}$$

然后贪心即可。

例题

「SDOI2017」硬币游戏

有 n 个玩家，每个玩家给一个长度为 m 的串 T_i。任何两个玩家的串不同。现在有一个字符串 S，初始为 $\varnothing$，每一次以一定概率随机一个字符接上去。如果某个时刻某个玩家发现自己的字符串在 S 中作为子串出现了，那么我们称这个玩家获胜，游戏结束。

对每个玩家，求它获胜的概率。

$n, m \leq 300$

例题

「SDOI2017」硬币游戏

有 n 个玩家，每个玩家给一个长度为 m 的串 T_i。任何两个玩家的串不同。现在有一个字符串 S，初始为 $\varnothing$，每一次以一定概率随机一个字符接上去。如果某个时刻某个玩家发现自己的字符串在 S 中作为子串出现了，那么我们称这个玩家获胜，游戏结束。
对每个玩家，求它获胜的概率。
$n, m \leq 300$

把“不包含任意一个同学猜的串的字符串”称为“合法串”。
令 f_i 表示第 i 个同学获胜的概率，f_0 表示任意一个长度的串是合法串的概率，我们有第一个方程

$$f_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i = 1$$

我们知道，在任意的合法串后面加上 T_i，i 就获胜了。这种情况出现的概率是 $\frac{f_0}{2^m}$。但是此时可能有一个 T_i 的前缀和原来的合法串的后缀拼出来一个 T_j，为了计算 f_i，我们需要把出现这种情况的概率减去。于是方程为

$$f_i = \frac{f_0}{2^m} - \sum_{j=1}^{n} f_j \sum_{k=1}^{m} [\mathrm{pre}(T_i, k) = \mathrm{suf}(T_j, k)] \frac{1}{2^{m-k}}$$

这样是 $n+1$ 个变量 $n+1$ 个方程，高斯消元，复杂度 $O(n^3)$。

线性基

线性基一般指的是异或线性基。它满足如下这些性质

- 原序列中的任何一个数都可以线性基中的一些数异或得到
- 线性基没有异或和为 0 的子集
- 线性基是保证前两个性质的基础上数的个数最少的一个

其实就是在数域 $\mathbb{F}_2$ 下用位运算维护 $\mathbb{F}_2^n$ 的子空间的基。

线性基

线性基一般指的是异或线性基。它满足如下这些性质

- 原序列中的任何一个数都可以线性基中的一些数异或得到
- 线性基没有异或和为 0 的子集
- 线性基是保证前两个性质的基础上数的个数最少的一个

其实就是在数域 $\mathbb{F}_2$ 下用位运算维护 $\mathbb{F}_2^n$ 的子空间的基。

基础的线性基需要支持

- 加入一个元素，维护一组基，这组基要满足任意两个元素的最高位都不相同
  从高位到低位消元即可
- 询问一个数与已经加入的元素的异或最大值
  从高位到低位贪心，如果当前数的第 i 位为 0，且极大无关组中有一个元素最高位为 i，那么把当前数异或上这个元素即可

线性基求并/交

设两个线性基为 A, B

- 线性基求并

把一个线性基的基里的所有元素依次插入另一个基即可。

- 线性基求交

保留所有 B 的基中能被 A 中元素表示的元素即可。

带删除线性基

- 离线算法

对基中的每个元素维护其删除时间，由多个元素异或组合而成的元素的删除时间为这些元素删除时间的最小值。
插入时，贪心地，让基中的高位元素的删除时间尽量晚。还是从高位到低位枚举，枚举到第 i 位时，如果当前插入元素的删除时间晚于基中第 i 位元素的删除时间，那么二者交换。其余部分与普通线性基相同。
查询时只考虑那些删除时间晚于当前时间的基元素即可。

带删除线性基

- 离线算法

对基中的每个元素维护其删除时间，由多个元素异或组合而成的元素的删除时间为这些元素删除时间的最小值。
插入时，贪心地，让基中的高位元素的删除时间尽量晚。还是从高位到低位枚举，枚举到第 i 位时，如果当前插入元素的删除时间晚于基中第 i 位元素的删除时间，那么二者交换。其余部分与普通线性基相同。
查询时只考虑那些删除时间晚于当前时间的基元素即可。

- 在线算法

重点是删除

- 如果被删除元素不是基中元素，直接删除即可，没有影响
- 如果被删除元素是基中元素，那么需要消除它的影响
  对每个基中元素 x 维护需要用 x 来表示的非基元素集合 S_x，用 S_x 中的任意一个元素来代替 x 即可

例题

「SCOI2016」幸运数字

给出一棵 n 个点的树，点有点权 G_i。q 次询问，每次给出 x, y，在树上 x 到 y 路径中选出一些节点，最大化这些节点点权异或和的最大值。
$n \le 2 \times 10^4, q \le 2 \times 10^5, G_i \le 2^{60}$

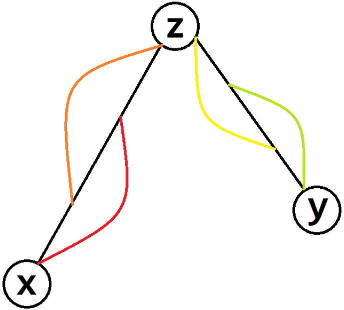
例题

「SCOI2016」幸运数字

给出一棵 n 个点的树，点有点权 G_i。q 次询问，每次给出 x, y，在树上 x 到 y 路径中选出一些节点，最大化这些节点点权异或和的最大值。
$n \le 2 \times 10^4, q \le 2 \times 10^5, G_i \le 2^{60}$

令 $B_{u,i}$ 表示节点 u 的 2^i 级祖先到自己的所有节点的点权构成的线性基。合并线性基的复杂度是 $O(\log^2 G)$ 的，于是预处理复杂度 $O(n \log n \log^2 G)$。
用倍增 LCA 的方式，每次询问需要进行 $O(\log n)$ 次线性基合并，总复杂度 $O((n+q) \log n \log^2 G)$，无法通过。

线性基求并具有可重复贡献性，于是实际上我们单次询问只需要下面这 4 个线性基求并



总复杂度 $O(n\log n\log^2 G+q\log^2 G)$

例题

CF1163E Magical Permutation *2400

Kuro 选择了 n 个不同的数作为集合 S。定义一种排列，满足以下条件：

1. 排列是一个 $0 \sim 2^x - 1$ 的排列；
2. 排列中任意两个相邻的元素的异或值为集合 S 的一个数。

现在 Kuro 告诉你集合 S 中的数，想请你构造一个满足条件的排列，使得 x 最大。
$n \leq 2 \times 10^5, S_i \leq 2 \times 10^5$

例题

CF1163E Magical Permutation *2400

Kuro 选择了 n 个不同的数作为集合 S。定义一种排列，满足以下条件：

1. 排列是一个 $0 \sim 2^x - 1$ 的排列；
2. 排列中任意两个相邻的元素的异或值为集合 S 的一个数。

现在 Kuro 告诉你集合 S 中的数，想请你构造一个满足条件的排列，使得 x 最大。
$n \le 2 \times 10^5, S_i \le 2 \times 10^5$

设 S 中最大的数为 M。如果排列的二进制下最高位，超过了 S 里最大的数（即 $2^{x-1} > M$），则这个排列一定不合法，因为一定存在相邻两个数的异或值 $\ge 2^{x-1}$。所以最大的 x 不超过 $\lceil \log_2 M \rceil$。

结论

一个 x 可行，当且仅当 $0, 1, \cdots, 2^x - 1$ 都能被表示为 S 中 $< 2^x$ 的所有元素一个子集的异或和。

必要性：根据 0 所在位置把排列分成两段，于是不妨假设 $p_0 = 0$，由 $\forall i$，$p_{i-1} \oplus p_i \in S$ 可知

$$p_i = (p_0 \oplus p_1) \oplus (p_1 \oplus p_2) \oplus \cdots \oplus (p_{i-1}, p_i)$$

于是是 S 中的一个子集的异或和。 $\square$

结论

一个 x 可行，当且仅当 $0, 1, \cdots, 2^x - 1$ 都能被表示为 S 中 $< 2^x$ 的所有元素一个子集的异或和。

必要性：根据 0 所在位置把排列分成两段，于是不妨假设 $p_0 = 0$，由 $\forall i$，$p_{i-1} \oplus p_i \in S$ 可知

$$p_i = (p_0 \oplus p_1) \oplus (p_1 \oplus p_2) \oplus \cdots \oplus (p_{i-1}, p_i)$$

于是是 S 中的一个子集的异或和。 $\square$

于是，我们对 S 中所有 $< 2^x$ 的元素建线性基，看线性基低 x 位是否填满，来检查 x 是否满足这个必要条件。

必要性我们通过构造来证明。
我们取出 S 中所有 $< 2^x$ 的元素建线性基，从而得到 S 的一个极大无关组 $s_1, \cdots, s_x$。
这个极大无关组恰好有 x 个元素，我们构造的排列 p 中相邻两个元素刚好差这 x 中的 1 个。
问题转化为我们需要求一个 $0 \sim 2^x - 1$ 的排列 a_i，满足相邻两项只有一个二进制位不同，这可以用「CSP-S 2019」格雷码中介绍的方法完成。我们构造的 p 就是

$$p_i = \bigoplus_{j \in a_i} s_j$$

行列式的定义

设 $A=(a_{ij})$ 是一个 n 阶方阵，A 的**行列式**（determinant）记为 $|A|$ 或 $\det A$ 或
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$
我们递归地定义行列式：

- 当 $n=1$ 时，$A=(a_{11})$，定义 $|A|=a_{11}$
- 设 $n\geq 2$ 并且假设 $n-1$ 阶矩阵的行列式已定义

余子式

对于 $1 \le i, j \le n$，记 M_{ij} 为在 A 中划去第 i 行与第 j 列元素所得的 $n-1$ 阶方阵的行列式，即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

M_{ij} 称为 A 的元素 a_{ij} 的**余子式**，$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的**代数余子式**。

进而，定义 $|A| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11} & n = 1 \\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} & n \geq 2 \end{cases}$$

特别地，当 $n = 2$ 时

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

当 $n = 3$ 时

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

行列式的等价定义

令 $\mathfrak{S}_n$ 表示所有大小为 n 的排列（置换），$\tau(i_1, \cdots, i_n)$ 表示排列 $(i_1, \cdots, i_n)$ 的逆序对个数，则

$$
\begin{aligned}
|A| &= \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n} (-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_n)} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \\
&= \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n} (-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_n)} a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n}
\end{aligned}
$$

初等变换对行列式的影响

命题

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+b_{s1} & \cdots & a_{sn}+b_{sn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. $A=(a_{ij})$ 是一个 n 阶方阵且 B 是通过交换 A 的第 s 行与第 t 行得到的矩阵，则 $|B|=-|A|$
2. 设 A 是一个 n 阶方阵，且 $1\le i\le n$，假设 B 是将 A 的第 s 行乘以数 $c\in\mathbb{F}$ 得到的矩阵，则 $|B|=c|A|$
3. 设 A 是一个 n 阶方阵，B 是由 A 的某一行乘以 k 加到另一行所得矩阵，则 $|A|=|B|$。

行列式的求法

利用上述三种初等变换的对行列式的性质，我们使用高斯消元消成上三角矩阵。而上三角矩阵的行列式就是对角线元素之积。
复杂度 $O(n^3)$。

行列式的求法

利用上述三种初等变换的对行列式的性质，我们使用高斯消元消成上三角矩阵。而上三角矩阵的行列式就是对角线元素之积。
复杂度 $O(n^3)$。

提醒

交换两行记得乘以 -1!
交换两行记得乘以 -1!
交换两行记得乘以 -1!

行列式的性质

定理（Cauchy）

设 A, B 是两个 n 阶方阵，则

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

定理

设 A 是一个 n 阶方阵，则

$$|A^T| = |A|$$

子式

记 A 的一个 s 阶**子式**

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_s j_1} & \cdots & a_{i_s j_s} \end{vmatrix}$$

在 A 中划去第 $i_1, \cdots, i_s$ 行于第 $j_1, \cdots, j_s$ 列的元素得到一个 $n-s$ 阶矩阵，其行列式称为该 s 阶**子式的余子式**，记作 $M\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix}$。

进一步，$\hat{A}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix} = (-1)^{i_1+\cdots+i_s+j_1+\cdots+j_s} M\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix}$ 称为上述 s 阶**子式的代数余子式**。

Laplace 定理

Laplace 定理

设 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F}), 1\le s<n$，且去定 $1\le i_1<\cdots<i_s\le n$，则

$$|A|=\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_s\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix}\hat{A}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix}$$

类似地，取定 $1\le k_1<k_2<\cdots<k_s\le n$，则

$$|A|=\sum_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_s\le n} A\begin{pmatrix} l_1 & \cdots & l_s \\ k_1 & \cdots & k_s \end{pmatrix}\hat{A}\begin{pmatrix} l_1 & \cdots & l_s \\ k_1 & \cdots & k_s \end{pmatrix}$$

Cauchy-Binet 公式

Cauchy-Binet 公式

设 $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{F}), B=(b_{ij})\in M_{n,m}(\mathbb{F})$

- 若 $m>n$，则 $|AB|=0$
- 若 $m\le n$，则

$$|AB|=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le n} A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & m\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_m\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix}$$

范德蒙德行列式

计算**范德蒙德（Vandermonde）行列式**

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

范德蒙德行列式

计算范德蒙德（Vandermonde）行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$V_n = \prod_{i<j}(a_j - a_i)$$

将第 $n-1$ 行乘以 $-a_n$ 加到第 n 行，将第 $n-2$ 行乘以 $-a_n$ 加到第 $n-1$ 行，$\cdots$，将第 1 行乘以 $-a_n$ 加到第 2 行，得到

$$
\begin{aligned}
V_n &= \begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
a_1 - a_n & a_2 - a_n & \cdots & a_{n-1} - a_n & 0 \\
a_1^2 - a_1 a_n & a_2^2 - a_2 a_n & \cdots & a_{n-1}^2 - a_{n-1} a_n & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_1^{n-2} - a_1^{n-3} a_n & a_2^{n-2} - a_2^{n-3} a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-2} - a_{n-1}^{n-3} a_n & 0 \\
a_1^{n-1} - a_1^{n-2} a_n & a_2^{n-1} - a_2^{n-2} a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-1} - a_{n-1}^{n-2} a_n & 0
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1}(a_1 - a_n)(a_2 - a_n)\cdots(a_{n-1} - a_n)
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\
a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2}
\end{vmatrix} \\
&= (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1})\, V_{n-1} \\
&= \prod_{i<j} (a_j - a_i)
\end{aligned}
$$

行列式的应用

行列式常见的应用有

- Matrix-Tree 定理
- LGV 引理

这两部分的例题可以参考我的 Graph Thm.pdf

可逆矩阵

设 $A \in M_n(\mathbb{F})$，若存在 $B \in M_n(\mathbb{F})$，满足 $AB = I_n = BA$，则称 A **一个可逆矩阵**，此时称 B 是 A 的**逆矩阵**，记作 $B = A^{-1}$。
可以证明，如果有 $AB = I_n$，则一定有 $BA = I_n$，于是上述定义中的条件可以改为 $AB = I_n$（或 $BA = I_n$）

可逆矩阵

设 $A \in M_n(\mathbb{F})$，若存在 $B \in M_n(\mathbb{F})$，满足 $AB = I_n = BA$，则称 A **一个可逆矩阵**，此时称 B 是 A 的**逆矩阵**，记作 $B = A^{-1}$。
可以证明，如果有 $AB = I_n$，则一定有 $BA = I_n$，于是上述定义中的条件可以改为 $AB = I_n$（或 $BA = I_n$）

性质

1. 若 A 可逆，则 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
2. 若 A, B 都是 n 阶可逆矩阵，则 AB 可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$。一般地，$A_1, \cdots, A_s$ 是 n 阶可逆矩阵，则 $A_1A_2\cdots A_s$ 可逆，且 $(A_1A_2\cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1}\cdots A_1^{-1}$
3. 若 A 是 n 阶可逆矩阵，则 A^T 可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$。
4. n 阶方阵 A 可逆 $\iff |A| \neq 0 \iff \mathrm{rank}(A) = n$

伴随矩阵

定理

设 $1 \le s, t \le n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_{is}A_{it} = [s = t]|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{si}A_{ti}$$

伴随矩阵

定理

设 $1 \le s, t \le n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_{is} A_{it} = [s = t]|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{si} A_{ti}$$

令 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$，称为 A 的**伴随矩阵**（adjoint matrix）。

$$A^*A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A|&0&\cdots&0\\0&|A|&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0\cdots&|A|\end{pmatrix}$$

$$=|A|I_n=AA^*$$

推论

设 A 是一个 n 阶可逆矩阵，则

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

初等变换的矩阵表示

1. 交换 I_n 的第 i 行与第 j 行（等同于交换第 i 列与第 j 列）。记作 $P_{i,j}$。

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\ &&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\ &&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

2 用非零数 c 乘以 I_n 的第 i 行（等同于用 c 乘以 I_n 的第 i 列）。记作 $D_i(c)$。

$$D_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

3 I_n 的第 i 行乘以数 k 加到第 j 行，$i \neq j$ (等同于第 j 列乘以 k 加到第 i 列)。记作 $T_{i,j}(k)$。

$$T_{i,j}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & k & & & \\ & & & & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & & & 1 & \vdots & & & \\ & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

3. I_n 的第 i 行乘以数 k 加到第 j 行，$i \neq j$ (等同于第 j 列乘以 k 加到第 i 列)。记作 $T_{i,j}(k)$。

$$T_{i,j}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & k & & & \\ & & & & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & & & 1 & \vdots & & & \\ & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

称上述三个矩阵为**初等矩阵**。

设 $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$，以及 m 阶初等矩阵 $P_{i,j}, D_i(C), T_{i,j}(k)$：

- $P_{ij}A =$ 交换 A 的第 i 行与第 j 行所的矩阵。
- $D_i(c)A =$ 将 A 的第 i 行乘以 c 所得的矩阵。
- $T_{ij}(k)A =$ 将 A 的第 i 行乘以数 k 加到第 j 行所得的矩阵。

对 n 阶初等矩阵 $P_{i,j}, D_i(C), T_{i,j}(k)$：

- $AP_{ij} =$ 交换 A 的第 i 列与第 j 列所的矩阵。
- $AD_i(c) =$ 将 A 的第 i 列乘以 c 所得的矩阵。
- $AT_{ij}(k) =$ 将 A 的第 j 列乘以数 k 加到第 i 列所得的矩阵。

设 $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$，以及 m 阶初等矩阵 $P_{i,j}, D_i(C), T_{i,j}(k)$：

- $P_{ij}A =$ 交换 A 的第 i 行与第 j 行所的矩阵。
- $D_i(c)A =$ 将 A 的第 i 行乘以 c 所得的矩阵。
- $T_{ij}(k)A =$ 将 A 的第 i 行乘以数 k 加到第 j 行所得的矩阵。

对 n 阶初等矩阵 $P_{i,j}, D_i(C), T_{i,j}(k)$：

- $AP_{ij} =$ 交换 A 的第 i 列与第 j 列所的矩阵。
- $AD_i(c) =$ 将 A 的第 i 列乘以 c 所得的矩阵。
- $AT_{ij}(k) =$ 将 A 的第 j 列乘以数 k 加到第 i 列所得的矩阵。

根据定义 $P_{i,j}, D_i(C), T_{i,j}(k)$ 都是可逆矩阵

$$P_{i,j}^{-1} = P_{i,j},\ \ D_i(c) - 1 = D_i(c^{-1}),\ \ T_{ij}(k)^{-1} = T_{ij}(-k)$$

例题

某不知道来源题

给定 $a_1, \cdots, a_n, b$，在 $\bmod 1811939329$ 意义下求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \\ \vdots \\ b^{n-1} \end{pmatrix}$$

保证 $a_1, \cdots, a_n, b$ 互不相同，$n \leq 5000$

Cramer 法则

定理（Cramer's rule）

若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵 $A = (a_{ij})$ 是可逆的，则该方程组有唯一解：$x_i = \dfrac{D_i}{|A|}$，其中

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：因为 A 可逆，所以方程组有唯一解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\implies x_i = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} b_j A_{ji} = \frac{1}{|A|} D_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

□

证明：因为 A 可逆，所以方程组有唯一解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow x_i = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} b_j A_{ji} = \frac{1}{|A|} D_i, i = 1, 2, \cdots, n \qquad \square$$

然后用 Vandermonde 行列式即可。

特征值与特征向量

在矩阵 A 对应的线性变换作用下，一些向量的方向不改变，只是伸缩了。
若**非零向量** ξ 和数 λ 满足

$$A\xi = \lambda\xi$$

则称 λ 为 A 的一个**特征值**，而 ξ 为 A 的属于特征值 λ 的一个**特征向量**。

特征值与特征向量

在矩阵 A 对应的线性变换作用下，一些向量的方向不改变，只是伸缩了。
若**非零向量** ξ 和数 λ 满足

$$A\xi = \lambda\xi$$

则称 λ 为 A 的**一个特征值**，而 ξ 为 A 的属于特征值 λ 的**一个特征向量**。

此时有

$$(\lambda I_n - A)\xi = \boldsymbol{O}$$

这个方程有非零解的充要条件是 $\det(\lambda I_n - A) = 0$。

特征多项式

设 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$，行列式

$$\det(xI_n-A)=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个关于 x 的多项式，称这个多项式是 A 的**特征多项式**（characteristic polynomial），记作 $c_A(x)$ 或 $c(x)$。

特征多项式

设 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$，行列式

$$\det(xI_n-A)=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个关于 x 的多项式，称这个多项式是 A 的**特征多项式**（characteristic polynomial），记作 $c_A(x)$ 或 $c(x)$。
$\lambda\in\mathbb{F}$ 是 A 的特征值 $\iff$ λ 是 $c_A(x)$ 的一个根

特征多项式

设 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$，行列式

$$\det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个关于 x 的多项式，称这个多项式是 A 的**特征多项式**（characteristic polynomial），记作 $c_A(x)$ 或 $c(x)$。
$\lambda \in \mathbb{F}$ 是 A 的特征值 $\iff$ λ 是 $c_A(x)$ 的一个根

将 $x = 0, 1, 2, \cdots, n$ 依次带入，得到这个特征多项式的 $n + 1$ 个点值，然后拉格朗日插值即可求出特征多项式，复杂度 $O(n^4)$。

特征多项式

设 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$，行列式

$$\det(xI_n-A)=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个关于 x 的多项式，称这个多项式是 A 的**特征多项式**（characteristic polynomial），记作 $c_A(x)$ 或 $c(x)$。
$\lambda\in\mathbb{F}$ 是 A 的特征值 $\iff$ λ 是 $c_A(x)$ 的一个根

将 $x=0,1,2,\cdots,n$ 依次带入，得到这个特征多项式的 $n+1$ 个点值，然后拉格朗日插值即可求出特征多项式，复杂度 $O(n^4)$。
但是我们还有算法能把复杂度降低到 $O(n^3)$。

相似变换

对于 $n \times n$ 的矩阵 A 和 B，当存在 $n \times n$ 的可逆矩阵 P 满足

$$B = P^{-1}AP$$

则称矩阵 A 和 B **相似**，记变换 $A \mapsto P^{-1}AP$ 为**相似变换**。

相似变换

对于 $n \times n$ 的矩阵 A 和 B，当存在 $n \times n$ 的可逆矩阵 P 满足

$$B = P^{-1}AP$$

则称矩阵 A 和 B **相似**，记变换 $A \mapsto P^{-1}AP$ 为**相似变换。**

命题

相似变换不改变矩阵的行列式和特征多项式，即 A 和 $P^{-1}AP$ 有相同的行列式和特征多项式。

证明.

$$\begin{aligned}\det(xI_n - P^{-1}AP) &= \det(xP^{-1}I_nP - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}xI_nP - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}) \cdot \det(P) \cdot \det(xI_n - A) \\ &= \det(xI_n - A)\end{aligned}$$

把 P 写成初等矩阵之积，$P = T_1 T_2 \cdots T_n$，那么

$$P^{-1}AP = T_n^{-1} \cdots T_1^{-1} A T_1 \cdots T_n$$

于是相似变换相当于每次对 A 作一个初等行变换，再用这个初等矩阵的逆矩阵对 A 做一个初等列变换。

上三角矩阵的特征多项式是好求的，如果我们能通过相似变换把一个矩阵化成上三角矩阵，那么特征多项式就求完了。

Schur 引理

定理（Schur's Lemma）

设 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ 且 $c_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{F}$，则存在 n 阶可逆矩阵 $P \in M_n(\mathbb{F})$ 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Schur 引理

定理（Schur's Lemma）

设 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$ 且 $c_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{F}$，则存在 n 阶可逆矩阵 $P\in M_n(\mathbb{F})$ 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

但是很遗憾，使用简单的高斯消元并不能通过相似变换把矩阵化为上三角矩阵。若对主对角线上的元素应用变换 $A\mapsto T_{ij}(k)AT_{ij}(-k)$，会导致原本通过 $A\mapsto T_{ij}(k)A$ 将第 i 行第 j 列的元素消为零，再右乘 $T_{ij}(-k)$ 即将 A 的第 i 列的 $-k$ 倍加到第 j 列，这一操作使得之前消为零的元素现在可能不为零，可能不能将其变为上三角或下三角形式。

上 Hessenberg 矩阵

对于 $n > 2$ 的形如

$$H = \begin{bmatrix} \alpha_1 & h_{12} & \dots & \dots & h_{1n} \\ \beta_2 & \alpha_2 & h_{23} & \dots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & h_{(n-1)n} \\ & & & \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix}$$

的矩阵我们称为**上 Hessenberg 矩阵**，其中 β 为次对角线。
虽然我们不能用相似变换将矩阵消成上三角矩阵，但是我们可以使用相似变换将次对角线以下的元素消为零，于是得到上 Hessenberg 矩阵，而求出一个 $n \times n$ 上 Hessenberg 矩阵的特征多项式则可在 $O(n^3)$ 时间完成。

Hessenberg 算法

记 H_i 为只保留 H 的前 i 行和前 i 列的矩阵，记 $p_i(x)=\det(xI_i-H_i)$ 那么

$$H_0=[\ ],\quad p_0(x)=1$$

$$H_1=\begin{bmatrix}\alpha_1\end{bmatrix},\quad p_1(x)=\det(xI_1-H_1)=x-\alpha_1$$

$$H_2=\begin{bmatrix}\alpha_1 & h_{12}\\ \beta_2 & \alpha_2\end{bmatrix},\quad p_2(x)=\det(xI_2-H_2)=(x-\alpha_2)p_1(x)-\beta_2h_{12}p_0(x)$$

把行列式按最后一行进行展开，有

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= \det(xI_3 - H_3) \\
&= \begin{vmatrix} x-\alpha_1 & -h_{12} & -h_{13} \\ -\beta_2 & x-\alpha_2 & -h_{23} \\ & -\beta_3 & x-\alpha_3 \end{vmatrix} \\
&= (x-\alpha_3)\cdot(-1)^{3+3}p_2(x) - \beta_3\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} x-\alpha_1 & -h_{13} \\ -\beta_2 & -h_{23} \end{vmatrix} \\
&= (x-\alpha_3)p_2(x) - \beta_3(h_{23}p_1(x) + \beta_2 h_{13} p_0(x))
\end{aligned}
$$

观察并归纳，对 $2 \le i \le n$ 有

$$
p_i(x) = (x-\alpha_i)p_{i-1}(x) - \sum_{m=1}^{i-1} h_{i-m,i}\left(\prod_{j=i-m+1}^{i} \beta_j\right) p_{i-m-1}(x)
$$

至此完成了整个算法，该算法一般被称为 Hessenberg 算法。复杂度 $O(n^3)$。

极小多项式

$\dim M_n(\mathbb{F}) = n^2$，对于 $A \in M_n(\mathbb{F})$，$A^0 = I_n, A^1, A^2, \cdots, A^{n^2}$ 是线性相关的。于是存在不全为零的 $a_0, \cdots, a_{n^2}$ 使得

$$a_0 A^0 + \cdots + a_{n^2} A^{n^2} = 0$$

记 $f(x) = \sum_{i=0}^{n^2} a_i x^i$。于是 $f(x) \neq 0$，且 $f(A) = 0$。

极小多项式

$\dim M_n(\mathbb{F})=n^2$，对于 $A\in M_n(\mathbb{F})$，$A^0=I_n,A^1,A^2,\cdots,A^{n^2}$ 是线性相关的。于是存在不全为零的 $a_0,\cdots,a_{n^2}$ 使得

$$a_0A^0+\cdots+a_{n^2}A^{n^2}=0$$

记 $f(x)=\sum_{i=0}^{n^2}a_ix^i$。于是 $f(x)\neq 0$，且 $f(A)=0$。

称满足 $f(A)=\boldsymbol{O}$ 的多项式 $f(x)$ 为 A 的**零化多项式**（annihilating polynomial）。上面的讨论说明了零化多项式一定存在。
设 $A\in M_n(\mathbb{F})$，如果首项系数为 1 的多项式 $m_A(x)$ 是 A 的零化多项式，且它是 A 的零化多项式中次数最小的，称 $m_A(x)$ 是 A 的**极小多项式**（minimal polynomial）。

极小多项式

$\dim M_n(\mathbb{F})=n^2$，对于 $A\in M_n(\mathbb{F})$，$A^0=I_n,A^1,A^2,\cdots,A^{n^2}$ 是线性相关的。
于是存在不全为零的 $a_0,\cdots,a_{n^2}$ 使得

$$a_0A^0+\cdots+a_{n^2}A^{n^2}=0$$

记 $f(x)=\sum_{i=0}^{n^2}a_ix^i$。于是 $f(x)\neq 0$，且 $f(A)=0$。

称满足 $f(A)=\boldsymbol{O}$ 的多项式 $f(x)$ 为 A 的**零化多项式**（annihilating polynomial）。上面的讨论说明了零化多项式一定存在。
设 $A\in M_n(\mathbb{F})$，如果首项系数为 1 的多项式 $m_A(x)$ 是 A 的零化多项式，且它是 A 的零化多项式中次数最小的，称 $m_A(x)$ 是 A 的**极小多项式**（minimal polynomial）。

性质

A 的极小多项式是 A 的任意一个零化多项式的因式，即

$$m_A(x)\mid f(x)$$

Cayley-Hamilton 定理

Cayley-Hamilton 定理

$A \in M_n(\mathbb{F})$，$c_A(x) = \det(xI_n - A)$ 是 A 的特征多项式，则

$$c_A(A) = \boldsymbol{O}$$

即 A 的特征多项式是 A 的零化多项式

Cayley-Hamilton 定理

Cayley-Hamilton 定理

$A \in M_n(\mathbb{F})$，$c_A(x) = \det(xI_n - A)$ 是 A 的特征多项式，则

$$c_A(A) = \boldsymbol{O}$$

即 A 的特征多项式是 A 的零化多项式

证明.

引理

若 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$，则 $c_A(A) = 0$

将 A 看成 $\mathbb{C}$ 上的矩阵，此时在 $\mathbb{C}$ 上，任何一个多项式都可以被分解为单项式的乘积，由 Schur's Lemma，存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = T \in M_n(\mathbb{C})$$

由相似变换不改变特征多项式，$c_A(x) = c_T(x)$，结合 $c_T(T) = 0$，

$$c_A(A) = c_T(A) = c_T(PTP^{-1}) = P \cdot c_T(T) \cdot P^{-1} = 0$$

例题

洛谷 P7776 【模板】特征多项式

给出 n 和一个 $n \times n$ 的矩阵 A，在模 998244353 意义下求其特征多项式。
$1 \leq n \leq 500$，$A_{i,j} \in [0, 998244352]$。

例题

洛谷 P7776 【模板】特征多项式

给出 n 和一个 $n \times n$ 的矩阵 A，在模 998244353 意义下求其特征多项式。
$1 \le n \le 500$，$A_{i,j} \in [0, 998244352]$。

使用上面介绍的 Hessenberg 算法即可，复杂度 $O(n^3)$。

例题

P10775 BZOJ4162 shlw loves matrix II

给定 k 阶方阵 M，计算 M^n，并将其中每一个元素对 10^9+7 取模输出。
$1 \le n \le 2^{10^4}$，$1 \le k \le 50$，$0 \le M_{i,j} < 10^9+7$，n 用二进制表示

例题

P10775 BZOJ4162 shlw loves matrix II

给定 k 阶方阵 M，计算 M^n，并将其中每一个元素对 10^9+7 取模输出。
$1 \le n \le 2^{10^4}$，$1 \le k \le 50$，$0 \le M_{i,j} < 10^9+7$，n 用二进制表示

由 Cayley-Hamilton 定理，$c_M(x)$ 满足 $c_M(M)=0$。
于是我们只需要求出多项式

$$f(x) = x^n \bmod c_M(x)$$

这是一个至多 $k-1$ 次的多项式，把 M 带入即可。
求 $f(x)$ 直接快速幂，每次对 $c_M(x)$ $O(k^2)$ 地暴力取模，总复杂度 $O(k^4+k^2\log n)$。

例题

某联考题

给定 $n \times n$ 的矩阵 G，以及常数 s， q 次询问，每次给定 m，求

$$\sum_{i=1}^{m} G^i i^s$$

矩阵中所有元素 $\bmod 998244353$
$n, s \leq 10, q \leq 3 \times 10^4, 1 \leq m \leq 10^9$

首先求出 G 的特征多项式 $c_G(x)$。记 $F_{k,m}(x)=\sum_{i=1}^{m} x^i i^k \bmod c_G(x)$（后面的多项式都是默认在 $\bmod c_G(x)$ 意义下）。每次询问需要求的是 $F_{s,m}(G)$。
假设对于 p,q，我们现在已经对于所有 $k\in[0,s]$，求出了 $F_{k,p}(x)$ 和 $F_{k,q}(x)$，我们想要求 $F_{k,p+q}(x)$。

$$\begin{aligned}
F_{k,p+q}(x) &= \sum_{i=1}^{p+q} x^i i^k \\
&= F_{k,q}(x) + \sum_{i=1}^{p} x^{i+q}(i+q)^k \\
&= F_{k,q}(x) + x^q \sum_{i=1}^{p} x^i (i+q)^k \\
&= F_{k,q}(x) + x^q \sum_{j=0}^{k} q^{k-j}\binom{k}{j} \sum_{i=1}^{p} x^i i^j \\
&= F_{k,q}(x) + x^q \sum_{j=0}^{k} q^{k-j}\binom{k}{j} F_{j,p}(x)
\end{aligned}$$

先预处理出所有 $m=2^i, k\in[0,s]$ 时 $F_{k,m}(x) \bmod c_G(x)$ 的结果:
在上式中令 $p=q=2^{i-1}$，求出 $F_{k,2^{i-1}}(x)$ 以及 $x^{2^{i-1}} \bmod c_G(x)$ 即可转移。
这样预处理的复杂度是 $O(n^3\log m)$（假设 n,s 同阶）。

然后询问的时候从低到高扫 m 的二进制位。假设当前第 i 位是 1，前 $i-1$ 位构成的数是 a，那么我们要求出 $F_{s,2^i+a}(x)$。
假设现在已知了 $F_{s,a}(x)$，在上式中取 $p=2^i, q=a$，我们预处理过所有的 $F_{k,2^i}$，同时维护 $x^a \bmod c_G(x)$，这样可以 $O(n^2)$ 地转移出 $F_s(2^i+x)$。
一共做 $O(\log m)$ 次转移，这样我们在 $O(n^2\log m)$ 的时间复杂度内求出了 $F_{s,m}(x)$。
再预处理 G 的 $0,1,2,\cdots,n-1$ 次幂，这样询问 $F_{s,m}(G)$ 时只用做 $O(n)$ 次矩阵加法。
这样单次询问 $O((ns+n^2)\log m+n^3)$，总复杂度 $O(q\left(n^2\log m+n^3\right)+n^3\log m)$。

完 结 撒 花