Bipartite graph

whx1003

2024 年 8 月 12 日

写在前面

尽管不是临时赶工，但总体内容还是会比较杂。

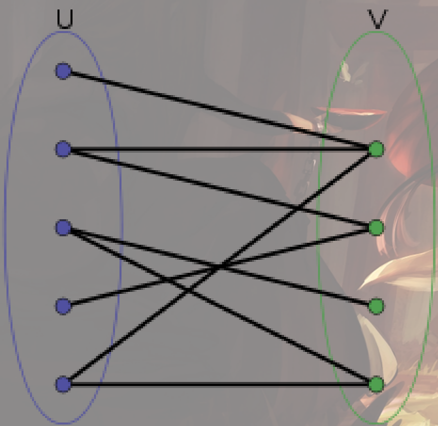
题都比较简单，欢迎来切。

二分图

二分图，又称二部图，英文名叫 Bipartite graph。

二分图是什么？节点由两个集合组成，且两个集合内部没有边的图。

换言之，存在一种方案，将节点划分成满足以上性质的两个集合。



一个最常用的性质是不存在奇环，可以用来 $\mathcal{O}(n+m)$ 地检验一张图是否是二分图。

二分图匹配

二分图的一个匹配指的是一个边集的子集 $E' \subseteq E$，满足每个顶点最多出现一次。

求二分图最大匹配的常用算法是匈牙利算法和网络流，前者复杂度为 $\mathcal{O}(nm)$，后者的复杂度为 $\mathcal{O}(m\sqrt{n})$。

匈牙利算法的本质是模拟最大流的过程。即每次选一条非匹配边-匹配边-非匹配边-……-非匹配边的路径，然后切换所有边的匹配状态，以此增加匹配数。
实际实现为枚举起始点，从起始点出发 dfs 找增广路，复杂度 $\mathcal{O}(nm)$。

二分图带权匹配

在一张带权二分图上，我们需要找到一个匹配，满足它是最大匹配的同时边权和最大。

常用算法是费用流和 KM 算法，前者复杂度是非多项式的（使用 CS 算法之后是弱多项式的），后者复杂度是 $\mathcal{O}(n^3)$ 的。

下面我们会展开讲解 KM 算法。

KM 算法

KM 算法，又称 Kuhn-Munkres Algorithm，~~Karl-Max Algorithm~~，可以在 $\mathcal{O}(n^3)$ 时间内求出二分图的**最大权完美匹配**。

考虑到二分图中两个集合中的点并不总是相同，为了能应用 KM 算法解决二分图的最大权匹配，需要先作如下处理：将两个集合中点数比较少的补点，使得两边点数相同，再将不存在的边权重设为 0，这种情况下，问题就转换成求最大权完美匹配问题，从而能应用 KM 算法求解。

我们先给出两个定义：

- 「可行顶标」：是一个 $V \to \mathbb{R}$ 的映射 l，满足对于 $\forall (u,v) \in E$，$w(u,v) \le l(u) + l(v)$。
- 「相等子图」：原图的一个生成子图，包含原图的所有点，包含且仅包含了所有满足 $w(u,v) = l(u) + l(v)$ 的边 $(u,v) \in E$。

KM 算法

那么我们有定理：

定理 1. 对于某组可行顶标，如果其相等子图存在完美匹配，那么，该匹配就是原二分图的最大权完美匹配。

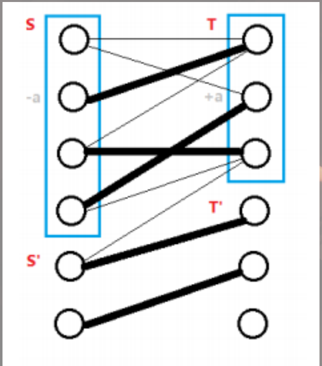
证明：考虑任意一组完美匹配 M，其边权和为 $\sum_{e\in M} w_e \leq \sum_{e\in M} l(u)+l(v) = \sum_{u\in V} l(u)$。

而这个相等子图的完美匹配的边权和为 $\sum_{u\in V} l(u)$，因此一定是最大权完美匹配。

于是现在问题变成了调整可行顶标，使得相等子图存在完美匹配。

KM 算法

初始时我们随便给所有顶点一个可行的可行顶标。然后每次选出左部点中第一个没有匹配的点，遍历所有从它出发的在相等子图中的交错路，如果存在增广路就增广。否则记左部点中在交错路中的集合为 S_1，没在的为 S_2，右部点的为 T_1 和 T_2。



那么在相等子图中的边有如下的事实：

- 不存在 $S_1 \to T_2$ 的边
- 如果存在 $S_2 \to T_1$ 的边，那么一定不是匹配边

KM 算法

现在的问题是要协调已经有匹配的左部点的顶标，我们考虑给 S_1 的所有点的顶标减去一个数 a，给 T_1 的所有点的顶标加上 a。那么有：

- $S_1 \to T_1$ 的边不会改变
- $S_2 \to T_2$ 的边不会改变
- $S_1 \to T_2$ 的边可能加入相等子图
- $S_2 \to T_1$ 的边不会加入相等子图

所以我们一定是让 $S_1 \to T_2$ 中的最大的边恰好加入相等子图，亦即

$$a = \min\{l(u) + l(v) - w(u, v) | u \in S_1, v \in T_2\}$$

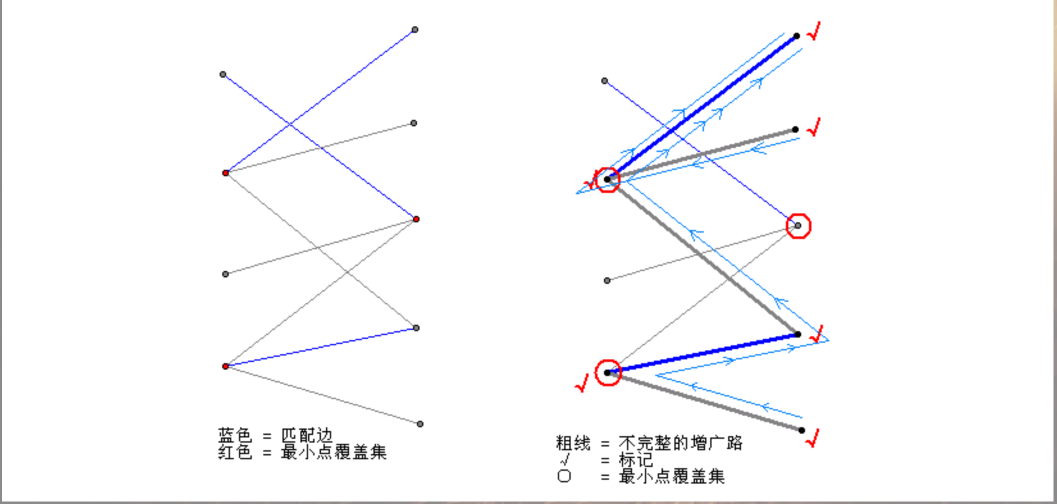
这个协调的过程最多进行 n 次就可以找到一条增广路。于是朴素维护的复杂度为 $\mathcal{O}(n^4)$。

每次修改顶标时，交错树中的边不会离开相等子图，因此我们直接维护这棵树。对 T 中的每个点 v 维护 $slack(v) = \min(l(u) + l(v) - w(u, v) | u \in S)$，那么每次修改顶标后可以 $\mathcal{O}(n)$ 修改 $slack$，S_1 每新增一个点节点需要 $\mathcal{O}(n)$ 修改 $slack$。
改为 BFS 找增广路，每次至多增加一条边，直接延伸交错树，总复杂度变成了 $\mathcal{O}(n^3)$。

二分图匹配的一些性质

定理 2（Konig）．对于一张二分图，其最大匹配数等于其最小点覆盖数。

考虑如果存在完美匹配则显然。否则设已经有了一个匹配且右部点没有全部匹配，然后从右边的每个非匹配点出发找增广路，把经过的所有节点标注出来。



二分图匹配的一些性质

这时候我们把右部点中没有被标记的点拿出来，左部点被标记的点拿出来，下证这是一个合法点覆盖，而且是最小点覆盖。

引理 1. 所有拿出来的点都是匹配点。

证明：分别考虑左部点和右部点。对于左部点：如果它不是匹配点，那么找到了一条增广路，匹配可以增大；对于右部点：如果它不是匹配点，那么一定会从它出发寻找非匹配边。

引理 2. 拿出来的点构成一个点覆盖。

证明：仍然是分别考虑左部点和右部点。考虑右边的标记点连出来的边，假设它左边的点没有标记（那么该右部点一定是匹配点），那么有两种情况：

- 该点不是匹配点：那么这条边一定不是匹配边，于是可以加入交替路，左部点不可能不标记
- 该点是匹配点：那么这条边一定是匹配边，但是这样右部点就不可能被标记

左部点的情况同理。

二分图匹配的一些性质

引理 3. 这个构成的点覆盖是一个最小点覆盖。

证明：覆盖所有匹配边就至少需要这么多点。

至此，我们证明了最大匹配等于最小覆盖，并给出了一种可行的构造方案。

定理 3. 对于一张二分图，其最大点独立集数 U 等于其总点数减去最大匹配数 M 。

证明：考虑把最小点覆盖的点全部去掉一定构成一个独立集，也即 $U \geq n - M$。另一方面，所有匹配里面最多选择一个点，也即 $U \leq n - M$，于是有 $U = n - M$。

还有一个性质是 DAG 的不相交最小路径覆盖数等于总点数减去拆入点和出点构成的二分图的最大匹配数。本质就是路径覆盖中每个点的度数最多为 2。

二分图基础性质练习题

HDOJ1507 Uncle Tom’ s Inherited Land

$n \times m$ 的一个网格，上面有一些障碍，你需要在上面放最多的 1×2 的方块。

$n, m \leq 100$

二分图基础性质练习题

HDOJ1507 Uncle Tom’ s Inherited Land

$n \times m$ 的一个网格，上面有一些障碍，你需要在上面放最多的 1×2 的方块。

$n, m \leq 100$

国际象棋黑白染色，然后黑格向白格连边，然后跑最大匹配即可。

二分图基础性质练习题

HDOJ1151 Air Raid

一张 DAG，问至少空投几个士兵到不同的路口上，使得这些士兵可以走过所有的节点，且不走过相同的节点。
$n \leq 120$

二分图基础性质练习题

HDOJ1151 Air Raid

一张 DAG，问至少空投几个士兵到不同的路口上，使得这些士兵可以走过所有的节点，且不走过相同的节点。
$n \leq 120$

就是求最小路径覆盖。

二分图基础性质练习题

POJ2594 Treasure Exploration

一张 DAG，可以降落任意个小机器人到任意点，然后机器人可以沿着路径走。问经过所有点的最少机器人数。
$n \leq 500$。

二分图基础性质练习题

POJ2594 Treasure Exploration

一张 DAG，可以降落任意个小机器人到任意点，然后机器人可以沿着路径走。问经过所有点的最少机器人数。
$n \leq 500$。

考虑路径允许相交，于是求一手传递闭包再跑即可。

二分图基础性质练习题

魔术球问题

有 n 个柱子，试确定一个最大的 m，使得存在某种方案将 $1 \to m$ 的所有数放到这些柱子上，使得相邻两个数的和为平方数。

$n \le 55$。

二分图基础性质练习题

魔术球问题

有 n 个柱子，试确定一个最大的 m，使得存在某种方案将 $1 \to m$ 的所有数放到这些柱子上，使得相邻两个数的和为平方数。
$n \leq 55$。

考虑从小到大枚举 m，每次建图从小的点连向大的点。于是问题转化为了不相交路径覆盖问题，可以每次枚举所有未匹配点并找增广路，复杂度 $\mathcal{O}(m^2\sqrt{m})$，实测出来 $\max m = 1567$。

二分图基础性质练习题

「LibreOJ β Round #4」子集

n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。要求选出一个最大的子集满足任意两个元素 x, y 都满足 $\gcd(x, y)\gcd(x+1, y+1) \neq 1$。

$n \leq 500$

二分图基础性质练习题

「LibreOJ β Round #4」子集

n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。要求选出一个最大的子集满足任意两个元素 x, y 都满足 $\gcd(x, y)\gcd(x+1, y+1) \neq 1$。

$n \leq 500$

就是要求最大团，也即补图的最大独立集。考虑两个点没有边的必要条件是奇偶性不同，于是是二分图，直接做即可。

二分图基础性质练习题

「LibreOJ Round #10」Snakes 的 Naïve Graph

定义二分图 $G(m)$ 为左边 $m-1$ 个点，右边 $m-1$ 个点的二分图。且满足 i 和 j 有边当且仅当 $i=j$ 或 $ij \equiv 1 \pmod m$。记 $f(m)$ 为 $G(m)$ 的本质不同最大匹配数个数，q 组询问，求 $\sum_{i=l}^{r} f(i)$。

$q \le 10^5, l, r \le 10^7$。

二分图基础性质练习题

「LibreOJ Round #10」Snakes 的 Naïve Graph

定义二分图 $G(m)$ 为左边 $m-1$ 个点，右边 $m-1$ 个点的二分图。且满足 i 和 j 有边当且仅当 $i=j$ 或 $ij \equiv 1 \pmod m$。记 $f(m)$ 为 $G(m)$ 的本质不同最大匹配数个数，q 组询问，求 $\sum_{i=l}^{r} f(i)$。
$q \le 10^5, l, r \le 10^7$。

首先整张图一定有完美匹配。考虑每一对互为逆元的 i, j 会贡献两种方案，即这部分答案为 $2^{\varphi(m)}$，那么问题就在于那些满足 $i^2 \equiv 1 \pmod m$ 的 i。

假设 $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots$，于是问题变成了在每个 $p_i^{r_i}$ 意义下算逆元为自己的数的个数，最后乘起来减掉就行了。那么问题转化为了 $(x+1)(x-1) \equiv 0 \pmod{p^r}$ 的解的个数

- $p > 2$ 时，二者只能有一个为 0，答案为 $x=1$ 和 $x=-1$ 两种
- $p = 2$ 时，$r=1$ 为 1，$r=2$ 为 2，其余为 4

这部分内容全部都是积性的，可以线性筛预处理。

二分图基础性质练习题

「LibreOJ Round $\#11$」Misaka Network 与测试

给出一个 $n \times m$ 的矩阵，每个位置是 $1, 2$ 或者 3，有的位置为空。询问最多能选出多少个不相交矩形使得矩形内平均数为 2 且没有空位置。

$n \times m \le 10^5$。

二分图基础性质练习题

「LibreOJ Round #11」Misaka Network 与测试

给出一个 $n \times m$ 的矩阵，每个位置是 $1, 2$ 或者 3，有的位置为空。询问最多能选出多少个不相交矩形使得矩形内平均数为 2 且没有空位置。
$n \times m \le 10^5$。

考虑一个矩形中如果有 2，那么把 2 独立出来一定不劣。在一个只有 1 和 3 的矩阵中，一定有两个相邻位置是 $1, 3$，独立出来也不会变劣。

于是就转变为了「Uncle Tom’s Inherited Land」，二分图匹配即可。

二分图基础性质练习题

「SCOI2015」小凸玩矩阵

一个 $n \times m(n \leq m)$ 的矩阵，选出 n 个数，每行每列最多只能选一个，询问第 k 大的数字的最小值为多少。

$n, m, k \leq 250$

二分图基础性质练习题

「SCOI2015」小凸玩矩阵

一个 $n \times m(n \le m)$ 的矩阵，选出 n 个数，每行每列最多只能选一个，询问第 k 大的数字的最小值为多少。

$n, m, k \le 250$

二分一手答案，转化为是否能选出 $n - k + 1$ 个数小于等于当前值且满足条件。判断可以每次跑二分图匹配。

二分图基础性质练习题

「TJOI / HEOI2016」游戏

经典的网格上放车问题，不过这次两个车不能跨过障碍物攻击到对方。$n, m \le 50$。

二分图基础性质练习题

「TJOI / HEOI2016」游戏

经典的网格上放车问题，不过这次两个车不能跨过障碍物攻击到对方。$n, m \le 50$。

每行拆成障碍物个数加一个点，跑匹配即可。

二分图基础性质练习题

「JSOI2016」反质数序列

给出一个长为 n 的序列，选一个最大的子集，条件是任意两个数的和都不是质数。
$n \leq 3000$。

二分图基础性质练习题

「JSOI2016」反质数序列

给出一个长为 n 的序列，选一个最大的子集，条件是任意两个数的和都不是质数。$n \le 3000$。

先转化为补图上的最大独立集。考虑大于 2 的素数都是奇数，于是不考虑 2 的情况下这是一张二分图。如果有多个 1 就删成一个就行了。

Hall 定理

终于到了比较有意思的部分了

定理 4（Hall）． 任意满足左部点个数小于等于右部点个数的二分图 G 存在左部点完美匹配的充分必要条件为：对左部点 V_L 的每个子集 $S \subseteq V_L$，与它相邻的右部点集合 $N(S) \subseteq V_R$ 都满足 $|S| \leq |N(S)|$。

证明：必要性显然，下证充分性。考虑一张满足 Hall 定理但是没有完美匹配的二分图，假设 $x \in V_L$ 不在最大匹配中，那么存在 $y \in V_R$ 与它相邻。

- 如果 y 未曾匹配，那么直接匹配即可
- 如果 y 已经匹配，那么考虑存在 z 和 y 匹配，于是点集 $S = \{x, z\} \subseteq V_L$ 一定存在一个邻集 $N(S)$ 满足 $|N(S)| \geq 2$，于是问题转化为了 y 和新点的匹配问题，规模扩大了 1。

由于左部点个数小于等于右部点，于是当 $S = V_L$ 时一定有 $|N(S)| \geq |S|$，此时无法再找出一个不在左部点中的顶点和当前考虑的右部点的顶点匹配。

Hall 定理是判断二分图是否有完美匹配的最高准则，遇到~~不会想 Hall~~。

Hall 定理基础练习题

「2017 山东一轮集训 Day2」Pair

二分图，左部点 n 个点，右部点 m 个点，点有点权。两个点可以匹配当且仅当它们的点权和大于等于 h。求左部点有多少个长为 m 的连续点列使得它和右部点有完美匹配。

$m \le n \le 1.5 \times 10^5, h \le 10^9$。

Hall 定理基础练习题

「2017 山东一轮集训 Day2」Pair

二分图，左部点 n 个点，右部点 m 个点，点有点权。两个点可以匹配当且仅当它们的点权和大于等于 h。求左部点有多少个长为 m 的连续点列使得它和右部点有完美匹配。

$m \le n \le 1.5 \times 10^5, h \le 10^9$。

考虑把右部点按照点权从小到大排序。考虑右部点的一个子集 S，设最大元素为 v_i，那么 $N(S) = N(\{v_i\})$，也就是说我们需要满足对每个 i 都有 $N(\{v_i\}) \ge i$。注意到左部点的每个元素连向一个后缀，于是可以线段树维护。

Hall 定理基础练习题

BZOJ3693 圆桌会议

有一个长为 m 的圆桌，现在有 n 组人，第 i 组有 a_i 个，且必须坐在 $[l_i, r_i]$ 的区间内，询问是否有一种合法的座位分配方案

$n \leq 10^5, m \leq 10^9$

Hall 定理基础练习题

BZOJ3693 圆桌会议

有一个长为 m 的圆桌，现在有 n 组人，第 i 组有 a_i 个，且必须坐在 $[l_i, r_i]$ 的区间内，询问是否有一种合法的座位分配方案
$n \leq 10^5, m \leq 10^9$

先离散化一手，然后断环成两条链。考虑有完美匹配的条件：对于任意一个区间 $[L, R]$，所有完全被包含的询问的和要小于等于区间长度。考虑把 $l_i \leq r_i$ 的询问拆成两个，可以证明这不会影响结果。然后把所有询问按照右端点排序，于是就是区间加，全局最大值，线段树维护即可。

Hall 定理基础练习题

[POI2009] LYZ-Ice Skates

初始时滑冰俱乐部有 1 到 n 号的溜冰鞋各 k 双。已知 x 号脚的人可以穿 x 到 $x+d$ 的溜冰鞋。有 m 次操作，每次包含两个数 a_i, x_i，表示来了 a_i 个 x_i 号脚的人。a_i 可能为负。对每个操作你需要输出是否有合法溜冰鞋分配方案

$n \le 2 \times 10^5, m \le 5 \times 10^5, 1 \le x_i \le n - d$

Hall 定理基础练习题

[POI2009] LYZ-Ice Skates

初始时滑冰俱乐部有 1 到 n 号的溜冰鞋各 k 双。已知 x 号脚的人可以穿 x 到 $x+d$ 的溜冰鞋。有 m 次操作，每次包含两个数 a_i, x_i，表示来了 a_i 个 x_i 号脚的人。a_i 可能为负。对每个操作你需要输出是否有合法溜冰鞋分配方案

$n \le 2 \times 10^5, m \le 5 \times 10^5, 1 \le x_i \le n - d$

沿用上一题的做法，即要求对于每个 l, r 都有 $\sum_{i=l}^{r} a_i \le (r + d - l + 1)k$，即 $\sum_{i=l}^{r}(a_i - k) \le dk$。

于是就是单点加，查询全局最大子段和，线段树维护即可。

Hall 定理基础练习题

BZOJ5404 party

给出一棵内向树，每个点有特产。q 组询问，每次给出 c_i 个点，询问：

- 选择一个点，使得所有询问点能到达这个点且总距离最小。
- 经过一个点可以选择是否携带经过其上的特产，寻找一个方案使得每个询问点携带的特产数量相同且种类完全不相同。最终让特产总数最大。

$n \le 3 \times 10^5, q \le 5 \times 10^4, c_i \le 5$，特产种类 $m \le 10^3$。

Hall 定理基础练习题

BZOJ5404 party

给出一棵内向树，每个点有特产。q 组询问，每次给出 c_i 个点，询问：

- 选择一个点，使得所有询问点能到达这个点且总距离最小。
- 经过一个点可以选择是否携带经过其上的特产，寻找一个方案使得每个询问点携带的特产数量相同且种类完全不相同。最终让特产总数最大。

$n \le 3 \times 10^5, q \le 5 \times 10^4, c_i \le 5$，特产种类 $m \le 10^3$。

第一问的答案显然是 LCA。用树链剖分和 `bitset` 维护经过的特产。考虑每个人带 x 个特产，就转化为了左边 cx 个点，右边 m 个点的完美匹配问题。然后最后用 Hall 定理暴力枚举所有子集统计答案即可。因为左侧每个点复制了 x 次，所以只需算 $\min(\lfloor \frac{|N(S)|}{|S|} \rfloor)$。

Hall 定理基础练习题

NOI.AC tree

给出一棵树，每条边有边权，定义 $g(x,y)$ 为路径 (x,y) 上最大的边的边权。定义长为 n 的序列 $P=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 的权值为 $f(P)=\min_{i=1}^{n} g(i,p_i)$，且要求 i 在 P 出现的次数小于等于 x_i。询问 $f(P)$ 的最大值。

$n \le 10^5$

Hall 定理基础练习题

NOI.AC tree

给出一棵树，每条边有边权，定义 $g(x, y)$ 为路径 (x, y) 上最大的边的边权。定义长为 n 的序列 $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 的权值为 $f(P) = \min_{i=1}^{n} g(i, p_i)$，且要求 i 在 P 出现的次数小于等于 x_i。询问 $f(P)$ 的最大值。

$n \le 10^5$

二分答案，然后去掉大于等于当前值的所有边，剩下的不在同一个联通块内的点可以相互连边。然后问题转化为左边 $1 \to n$，右边 x_1 个 1，x_2 个 2，……的二分图上是否存在完美匹配。

Hall 定理基础练习题

NOI.AC tree

给出一棵树，每条边有边权，定义 $g(x,y)$ 为路径 (x,y) 上最大的边的边权。定义长为 n 的序列 $P=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 的权值为 $f(P)=\min_{i=1}^{n} g(i,p_i)$，且要求 i 在 P 出现的次数小于等于 x_i。询问 $f(P)$ 的最大值。
$n \le 10^5$

二分答案，然后去掉大于等于当前值的所有边，剩下的不在同一个联通块内的点可以相互连边。然后问题转化为左边 $1 \to n$，右边 x_1 个 1，x_2 个 2，……的二分图上是否存在完美匹配。

发现此时同一个连通块内部的点连出去的点是相同的，于是一起考虑。只需每个连通块的大小小于等于其他点的 x 之和即可。

Hall 定理基础练习题

于是剩余的问题就比较简单了，直接按照上述建图方法建图跑完美匹配，然后用匈牙利调整成字典序最小的即可

Hall 定理基础练习题

CF1009G Allowed Letters

给一个长为 n 的字符串，字符集为 $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$。每个位置的放的字符都只能是某个题目给出的字符集的子集，不同位置不一定相同。现在要求重新排列它，使得字典序最小。$n \leq 10^5$。

Hall 定理基础练习题

CF1009G Allowed Letters

给一个长为 n 的字符串，字符集为 $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$。每个位置的放的字符都只能是某个题目给出的字符集的子集，不同位置不一定相同。现在要求重新排列它，使得字典序最小。$n \leq 10^5$。

从前向后贪心选择，判断是否可行可以枚举字符集的每个子集，判断是否满足即可。

完结撒花

没了……如果时间没到我再吹会儿水……