树分治及扫描线

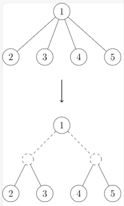
程渝峰

SCU

August 20, 2024

树分治

树分治一般用于处理大量树上路径问题。
我们计算答案时，随便找一个点计算经过这个点的所有路径，对这些统计答案。对于不经过这个点的路径，下放到子树里查询。显然这样做是 $\mathcal{O}(n^2)$ 的，如果把上述随机的点替换为当前子树的重心，由于中心不会有大于一半大小的子树，所以每次递归到子树当前子树大小至少减半，复杂的就为 $\mathcal{O}(n\log n)$，被称为点分治。
边分治类似点分治，只是改成找到一条边进行上述的过程。但容易发现会被菊花图卡成 $\mathcal{O}(n^2)$，所以需要先把树二度化在进行边分治。
例如



树分治

点分树是通过更改原树形态使树的层数变为稳定 $\log n$ 的一种重构树。
常用于解决与树原形态无关的带修改问题。

扫描线

扫描线一般是确定一维从小到大，用数据结构维护另一维的状态。

CF1923E

给定一颗有 n 个节点的树，每一个点都有一个颜色 c_i。
请求出满足以下要求的树上路径 (u, v) 的数量：

- 该路径至少有两个节点。
- 该路径上所有的节点（除 u, v 之外）的颜色都与 u, v 的颜色不同。
- u, v 颜色相同。

$1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$

对于这种路径统计问题，考虑点分治，转化成统计经过根的方案数。找到所有与到根路径上颜色不同的点，加到桶中，与其他子树相同颜色的点匹配。同时加上与根颜色相同的点的方案数。

P4178

给定一棵 n 个节点的树，每条边有边权，求出树上两点距离小于等于 k 的点对数量。
$1 \leq n \leq 4 \times 10^4, 0 \leq k \leq 2 \times 10^4$。

点分治，树状数组统计即可。

给你一颗 n 个顶点的树（连通无环图）。顶点从 1 到 n 编号，并且每个顶点对应一个在 'a' 到 't' 的字母。
树上的一条路径是回文是指至少有一个对应字母的排列为回文。
对于每个顶点，输出通过它的回文路径的数量。
注意：从 u 到 v 的路径与从 v 到 u 的路径视为相同，只计数一次。
$1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$

CF914E

考虑点分治，二进制状态压缩维护回文串，桶统计即可。

CF293E

n 个点的树，第 i 条长度为 1，边权为 w_i, 连接 $i+1$，p_i 两个节点
两个参数 l, w ，求有多少对点，满足 $i \to j$ 的长度不超过 l，边权不超过 w
$1 \le n \le 10^5, 1 \le w \le 10^9$

CF293E

考虑点分治。每次分治计算每个点到根的路径长度和边权。把所有点排序按边权排队，从小到大枚举所有点，同时加入此时边权相加小于 w 的点，因为要求查询长度小于 l，树状数组维护即可。

CF150E

给定一颗带边权的树，求一条边数在 $[L, R]$ 之间的路径，并使得路径上边权的中位数最大。输出一条可行路径的两个端点。
注：此处 $1, 2, 3, 4$ 的中位数为 3 ，而非 2 或者 2.5 。
$1 \le n \le 10^5$

CF150E

对于这种中位数的题，考虑二分，将所有小于的 mid 的边的边权看成-1, 将所有大于等于 mid 的边的边权看成 1，此时如果有一条路径的边权和大于等于 0，那么这条路径的中位数就大于等于 mid。
现在的问题转化成了在树上找一个边数在 (L,R) 这个区间里并且权值和大于等于 0 的路径，点分治即可。

有一天冈崎朋也和送给古河渚一棵树作为渚的生日礼物。(因为渚的生日是 12.24 啊)。这是一棵奇奇怪怪的树，每一个节点都有一个权值 v_i。现在渚和朋也想在这棵树上玩一个游戏。

设 (s, e) 为从节点 s 到节点 e 的路径，我们可以写下路径 (s, e) 上的节点值序列，并将此序列表示为 $S(s, e)$。

可爱的渚这样定义了一个序列的权值：$G(S(s, e))$。假设这个序列是 $z_0, z_1 \dots z_{l-1}$，此处 l 是序列长度，定义

$G(S(s, e)) = z_0 \times k^0 + z_1 \times k^1 + \cdots + z_{l-1} \times k^{l-1}$。

如果这条序列满足 $G(S(s, e)) \equiv x \pmod y$，那么这条路径 (s, e) 属于古河渚，反之属于冈崎朋也。

渚觉得计算谁拥有更多的路径实在是太简单了，所以她想要尝试一些难一点的。渚认为如果路径 (p_1, p_2) 和 (p_2, p_3) 属于她，那么 (p_1, p_3) 的路径也会属于她。同理，如果路径 (p_1, p_2) 和 (p_2, p_3) 属于朋也，那么路径 (p_1, p_3) 也属于朋也。但是实际上，渚的这一结论并不是一直都是正确的。渚现在想知道有多少三元组 (p_1, p_2, p_3) 满足她的结论，这就是你的任务啦!

$1 \le n \le 10^5, 1 \le y \le 10^9$ 保证 y 是质数

CF434E

考虑到直接统计三元组比较困难，考虑统计不合法的方案数。对于一个三元组，所有好坏边的状态数有 8 种，在所有不合法的方案中一定存在两个点所相邻的边好坏状态不同，合法方案不会有，考虑统计这种点的方案数。
要计算这个，需要知道从这个点连出去/到达，状态是好/坏的 4 类方案数。点分治统计即可。

CF1916G

给定 n 个结点的树，边有正整数边权 w_i。定义 $len(u, v)$ 表示 u 到 v 的路径的边数，$\gcd(u, v)$ 表示 u 到 v 的路径上所有边权的 $\gcd$，特别地 $\gcd(u, u) = 0$。对于所有 $u, v \in [n]$，求 $\max(len(u, v) \times \gcd(u, v))$。
$1 \le n \le 10^5, 1 \le w \le 10^{12}$

CF1916G

考虑点分治，计算出每个点到根的 gcd 和长度。统计出对于每一个 gcd 的最长链和次长链（要求所属子树不同），每一个 gcd 会对他的所有因数做贡献，从大到小统计即可。

[CTSC2018] 暴力写挂

temporaryDO 是一个很菜的 OIer。在 4 月，他在省队选拔赛的考场上见到了《林克卡特树》一题，其中 $k=0$ 的部分分是求树 T 上的最长链。可怜的 temporaryDO 并不会做这道题，他在考场上抓猫耳挠猫腮都想不出一点思路。

他决定：写一个枚举点对求 LCA 算距离的 $k=0$ 的 $O(n^2\log n)$ 的部分分程序！于是，temporaryDO 选择以 1 为根，建立了求 LCA 的树链剖分结构，然后写了二重 for 循环枚举点对。

然而，菜菜的 temporaryDO 不小心开小了数组，于是数组越界到了一片神秘的内存区域。但恰好的是，那片内存区域存储的区域恰好是另一棵树 T' 。这样一来，程序并没有 RE ，但他求 x 和 y 的距离的时候，计算的是

$$\mathrm{depth}(x)+\mathrm{depth}(y)-(\mathrm{depth}(\mathrm{LCA}(x,y))+\mathrm{depth}'(\mathrm{LCA}'(x,y)))$$

最后程序会输出每一对点对 i,j （$i\le j$）的如上定义的“距离”的最大值。temporaryDO 的程序在评测时光荣地爆零了。但他并不服气，他决定花好几天把自己的程序跑出来。请你根据 T 和 T' 帮帮可怜的 temporaryDO 求出他程序的输出。

[CTSC2018] 暴力写挂

考虑把 $depth(x) + depth(y) - depth(lca(x, y))$ 转化成 $\frac{1}{2}(depth(x) + depth(y) + dis(x, y))$，在边分治时每个点的权值就变成 $depth(x) +$ ，分治边两边的点分别为黑点、白点。
把该次分治的点建一棵虚树，枚举 lca，找到子树内最大的黑白点，统计即可。

[BJOI2017] 树的难题

给你一棵 n 个点的无根树。
树上的每条边具有颜色。一共有 m 种颜色，编号为 1 到 m，第 i 种颜色的权值为 c_i。
对于一条树上的简单路径，路径上经过的所有边按顺序组成一个颜色序列，序列可以划分成若干个相同颜色段。定义路径权值为颜色序列上每个同颜色段的颜色权值之和。
请你计算，经过边数在 l 到 r 之间的所有简单路径中，路径权值的最大值。
对于 100% 的数据，$1 \le n, m \le 2 \times 10^5$，$1 \le l \le r \le n$，$| c_i | \le 10^4$。
保证树上至少存在一条经过边数在 l 到 r 之间的路径。

[BJOI2017] 树的难题

考虑边分治，每个点的权值就是当前点到分治边另一边的路径的权值记作 $w(a)$ ，记分治边颜色权值为 C，则合并权值为 $w(a) + w(b) - C$，C 是常数，线段树维护区间最大值即可。

P6326

马上就是小苗的生日了，为了给小苗准备礼物，小葱兴冲冲地来到了商店街。商店街有 n 个商店，并且它们之间的道路构成了一棵树的形状。
第 i 个商店只卖第 i 种物品，小苗对于这种物品的喜爱度是 w_i，物品的价格为 c_i，物品的库存是 d_i。但是商店街有一项奇怪的规定：如果在商店 u, v 买了东西，并且有一个商店 p 在 u 到 v 的路径上，那么必须要在商店 p 买东西。小葱身上有 m 元钱，他想要尽量让小苗开心，所以他希望最大化小苗对买到物品的喜爱度之和。
对于全部的测试点，保证 $1 \le n \le 500$，$1 \le m \le 4000$，$1 \le T \le 5$，$0 \le w_i \le 4000$，$1 \le c_i \le m$，$1 \le d_i \le 100$。

P6326

考虑点分治，使选取的连通块必须经过根。对于这种情况，就是一个树上依赖型背包，按 dfn 倒序 dp，做多重背包即可。

P2634

聪聪和可可是兄弟俩，他们俩经常为了一些琐事打起来，例如家中只剩下最后一根冰棍而两人都想吃、两个人都想玩儿电脑（可是他们家只有一台电脑）……遇到这种问题，一般情况下石头剪刀布就好了，可是他们已经玩儿腻了这种低智商的游戏。

他们的爸爸快被他们的争吵烦死了，所以他发明了一个新游戏：由爸爸在纸上画 n 个“点”，并用 $n-1$ 条“边”把这 n 个“点”恰好连通（其实这就是一棵树）。并且每条“边”上都有一个数。接下来由聪聪和可可分别随机选一个点（当然他们选点时是看不到这棵树的），如果两个点之间所有边上数的和加起来恰好是 3 的倍数，则判聪聪赢，否则可可赢。

聪聪非常爱思考问题，在每次游戏后都会仔细研究这棵树，希望知道对于这张图自己的获胜概率是多少。现请你帮忙求出这个值以验证聪聪的答案是否正确。

对于 100% 的数据，$n \leq 2 \times 10^4$。

P2634

点分治，开一个桶统计。

P2664

lrb 有一棵树，树的每个节点有个颜色。给一个长度为 n 的颜色序列，定义 $s(i,j)$ 为 i 到 j 的颜色数量。以及

$$sum_i = \sum_{j=1}^{n} s(i,j)$$

现在他想让你求出所有的 sum_i。
对于 100% 的数据，$1 \le n, c_i \le 10^5$。

P2664

考虑点分治，只需要统计经过根的路径即可。对于一条路径，统计某种颜色靠左的，离根最近的点，可以不重的统计。

P6329

在一片土地上有 n 个城市，通过 $n-1$ 条无向边互相连接，形成一棵树的结构，相邻两个城市的距离为 1，其中第 i 个城市的价值为 $value_i$。

不幸的是，这片土地常常发生地震，并且随着时代的发展，城市的价值也往往会发生变动。

接下来你需要在线处理 m 次操作：

`0 x k` 表示发生了一次地震，震中城市为 x，影响范围为 k，所有与 x 距离不超过 k 的城市都将受到影响，该次地震造成的经济损失为所有受影响城市的价值和。

`1 x y` 表示第 x 个城市的价值变成了 y 。

为了体现程序的在线性，操作中的 x、y、k 都需要异或你程序上一次的输出来解密，如果之前没有输出，则默认上一次的输出为 0 。

对于 100% 的数据，有 $1 \le n, m \le 10^5, 1 \le u, v, x \le n, 1 \le value_i, y \le 10^4, 0 \le k \le n-1$ 。

P6329

考虑没有修改操作和允许离线，可以简单的用点分治 $+$ 容斥完成。
考虑修改操作，需要将之前的点分治过程建成点分树，由于之前是单点加，求前缀和，用树状数组维护即可。

这样的想法当然非常好啦，但是她们也发现她们面临着一个问题，那就是店开在哪里，面向什么样的人群。很神奇的是，幻想乡的地图是一个树形结构，幻想乡一共有 n 个地方，编号为 1 到 n，被 $n-1$ 条带权的边连接起来。每个地方都住着一个妖怪，其中第 i 个地方的妖怪年龄是 x_i。

妖怪都是些比较喜欢安静的家伙，所以它们并不希望和很多妖怪相邻。所以这个树所有顶点的度数都小于或等于 3。妖怪和人一样，兴趣点随着年龄的变化自然就会变化，比如我们的 18 岁少女幽香和八云紫就比较喜欢可爱的东西。幽香通过研究发现，基本上妖怪的兴趣只跟年龄有关，所以幽香打算选择一个地方 u（u 为编号），然后在 u 开一家面向年龄在 L 到 R 之间（即年龄大于等于 L 小于等于 R）的妖怪的店。

也有可能 u 这个地方离这些妖怪比较远，于是幽香就想要知道所有年龄在 L 到 R 之间的妖怪，到点 u 的距离的和是多少（妖怪到 u 的距离是该妖怪所在地方到 u 的路径上的边的权之和），幽香把这个称为这个开店方案的方便值。

幽香她们还没有决定要把店开在哪里，八云紫倒是准备了很多方案，于是幽香想要知道，对于每个方案，方便值是多少呢。强制在线

同样考虑点分树 $+$ 容斥，求区间和即可。

P3920

强强和萌萌是一对好朋友。有一天他们在外面闲逛，突然看到前方有一棵紫荆树。这已经是紫荆花飞舞的季节了，无数的花瓣以肉眼可见的速度从紫荆树上长了出来。

仔细看看的话，这个大树实际上是一个带权树。每个时刻它会长出一个新的叶子节点，每个节点上有一个可爱的小精灵，新长出的节点上也会同时出现一个新的小精灵。小精灵是很萌但是也很脆弱的生物，每个小精灵 i 都有一个感受能力值 r_i，小精灵 i, j 成为朋友当且仅当在树上 i 和 j 的距离 $dist(i, j) \leq r_i + r_j$，其中 $dist(i, j)$ 表示在这个树上从 i 到 j 的唯一路径上所有边的边权和。

强强和萌萌很好奇每次新长出一个叶子节点之后，这个树上总共有几对朋友。

我们假定这个树一开始为空，节点按照加入的顺序从 1 开始编号。

强制在线。

所有数据均满足 $1 \leq c_i \leq 10^4$，$a_i \leq 2 \times 10^9$，$r_i \leq 10^9$。

P3920

还是先考虑没有强制在线的做法，这就是一个简单的点分治，考虑统计 $dis(i,u) - r_i \leq r_j - dis(u,j)$ 即可。
考虑强制在线，每次暴力递归点分树加入点，应用替罪羊树的思想，发现不平衡后暴力重构当前子树的点分树。然后同点分治的做法查询。

P5311

给你一棵 n 个节点的树，每个节点有一种颜色，有 m 次查询操作。
查询操作给定参数 $l\ r\ x$，需输出：
将树中编号在 $[l, r]$ 内的所有节点保留，x 所在连通块中颜色种类数。
每次查询操作独立。
对于 100% 的数据，所有出现过的数在 $[1, 10^5]$ 之间，保证每次输入的 $l \leq x \leq r$。

P5311

可以证明，树上的任意一个联通块中，存在一个在点分树上深度最小的节点，并且整个联通块都在这个节点的子树中，枚举这个点即可，在一棵树中，从根节点出发，只经过 [l,r] 范围内的点，可以到达的颜色数。

记录一下每一个节点到（点分树上的）每个祖先的路径上的编号最大的点和编号最小的点，分别设成 L 和 R，只有对于 x 节点拥有的一个询问 (l,r)，只有 L>=l 且 R<=r 的节点才能对答案有贡献，这就是一个二维偏序问题。将询问离线，第一维排序第二维树状数组维护即可解决。

P5490

求 n 个四边平行于坐标轴的矩形的面积并。对于 100% 的数据，$1 \le n \le 10^5$，$0 \le x_1 < x_2 \le 10^9$，$0 \le y_1 < y_2 \le 10^9$。

P5490

这是扫描线的模板，考虑对 x 轴从小到大扫描，每一段只需要统计是否被覆盖。
具体的说，扫到一个矩形时，在 y 轴对应的区间加 1，扫出一个矩形时，在 y 轴对应的区间减 1。
被覆盖的区间就是非 0 的区间，考虑维护最小值和最小值区间大小即可。

P4088

Farmer John 的农场沿着一条长直道路而建，所以他农场上的每个地点都可以简单地用该地点在道路上的位置来表示（相当于数轴上的一个点）。FJ 建造了 N 个弹弓（$1 \le N \le 10^5$），其中第 i 个弹弓可以用三个整数 x_i，y_i 以及 t_i 描述，表示这个弹弓可以在 t_i 单位时间内将牛粪从位置 x_i 发射到位置 y_i。
FJ 有 M 堆牛粪需要运输（$1 \le M \le 10^5$）。第 j 堆牛粪需要从位置 a_j 移动到位置 b_j。使用拖拉机运输牛粪，经过路程 d 需要消耗 d 单位时间。FJ 希望通过对每一堆牛粪使用至多一次弹弓来减少运输时间。FJ 驾驶没有装载牛粪的拖拉机的时间不计。
对这 M 堆牛粪的每一堆，在 FJ 可以在运输过程中使用至多一次弹弓的条件下，帮助 FJ 求出其最小运输时间。

P4088

运输时间的式子形如 $|a-x|+|b-y|+t$ 考虑拆开绝对值，也就是只计算某一个象限，拆开后符号确定，扫描线统计即可。

P1856

求 n 个四边平行于坐标轴的矩形的周长并。对于 100% 的数据，$1 \le n \le 10^5$，$0 \le x_1 < x_2 \le 10^9$，$0 \le y_1 < y_2 \le 10^9$。

P1856

考虑扫描线，发现平行于扫描线的边不好统计，所以对 x，y 轴都要做一次扫描线。
考虑统计垂直于扫描线的边，这些边在线段树上可以通过计算连续的 0 的段数计算。
永久化标记线段树，若一个节点的 tag 大于 0，则这个区间内一定全部非 0，若 tag 等于 0，从儿子转移，因为是先加再减，所以不会出现 tag 小于 0 的情况。

P1502

天真的小卡总是希望能够在晚上能看到最多最亮的星星，但是窗子的大小是固定的，边也必须和地面平行。
这时小卡使用了超能力（透视术）知道了墙后面每个星星的位置和亮度，但是小卡发动超能力后就很疲劳，只好拜托你告诉他最多能够有总和多亮的星星能出现在窗口上。
对于 100% 的数据：$1 \le T \le 10$，$1 \le n \le 10^4$，$1 \le W, H \le 10^6$，$0 \le x_i, y_i < 2^{31}$。

P1502

考虑扫描线，按 x 轴扫描，依次加入 x 轴合法的点，删掉不合法的点。对于 y 轴，能看到某一个点的窗户坐标一定是一个区间，所以做一个区间加，全局最大值即可。

HDU1255

给定平面上若干矩形，求出被这些矩形覆盖过至少两次的区域的面积.
$1 \leq n \leq 10^5$

HDU1255

类似面积并，考虑扫描线。多维护一个次大值和次大值出现次数即可。

P3997

给定 n 个同心的扇形，求有多少面积，被至少 k 个扇形所覆盖。
对于 100% 的数据，$1 \leq n \leq 10^5$, $1 \leq m \leq 10^6$, $1 \leq k \leq 5000$,
$1 \leq r_i \leq 10^5$,$-m \leq a_1, a_2 \leq m$。

P3997

考虑按弧度扫描整个圆。对于一段扇形区间，有一些覆盖了这一区间的扇形，求出这些半径中的第 k 大即可，用平衡树维护。