简单数学 2

OwenOwl

2019.2

前言

题目都很简单，欢迎来切。

powerful number 的定义是每个质因子次数都 ≥ 2 的数。

$\leq n$ 的 powerful number 个数是 $O(\sqrt{n})$ 的。

PE 639

有一个积性函数 F 满足对于所有质数 p，$F(p^q) = p^k$，求 $\sum_{i=1}^{n} F(i)$。

$n \leq 10^{13}, k \leq 20$

PE 639

有一个积性函数 $G(x) = x^k$ 在所有质数处取值和 F 相同，并且很容易求前缀和。

设 $H = F/G$（狄利克雷除法），显然 H 也是个积性函数，$H(1) = 1$。

因为有 $F(p) = G(p)H(1) + G(1)H(p) = p^k$，可以得到 $H(p) = 0$。

显然 H 所有不为零的位置都是 powerful number。

PE 639

答案是

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = \sum_{ij<n} H(i)G(j) = \sum_{i=1}^{n} H(i) \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} G(j)$$

显然只需要爆搜出所有 powerful number 处的 H 即可。

*: $H(p^q) = ?(q \geq 2)$

LOJ 6053

有一个积性函数 F 满足对于所有质数 p，$F(p^c) = p \oplus c$，求 $\sum_{i=1}^{n} F(i)$。

$n \leq 10^{10}$

LOJ 6053

因为 $F(p)=p-1(p\neq 2)$，构造 $G=\varphi$ 即可。

$p=2$ 处可以特判。

杜教筛

有没有人不会的？

题

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\gcd(i,j,k)$$

$n \le 10^9$

求和

设 $n=\prod p_i^{q_i}$，定义 $f_d(n)=\prod(-1)^{q_i}[q_i\le d]$。特别地，$f_1=\mu$。

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{k} f_d(\gcd(i,j))$$

$n\le 10^{10}, k\le 40$。

先简单处理一下把 gcd 化掉

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{k} f_d(\gcd(i,j)) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{k} f_d(i)(2\Phi(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)-1)
\end{aligned}
$$

显然后面的 Φ 可以杜教筛。

求和

设 $\lambda = f_\infty$。

考虑容斥，有

$$f_d(n) = \lambda(n) \sum_{i^d \mid n} \mu(i)$$

求和

$$
\begin{aligned}
& F_d(n) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} \lambda(i) \sum_{j^d \mid n} \mu(j) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} \mu(i) \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{n}{i^{d+1}} \right\rfloor} \lambda(i^{d+1} j) \\
= \; & \sum_{i=1}^{\sqrt[d+1]{n}} \lambda^{d+1}(i) \mu(i) \Lambda(\left\lfloor \frac{n}{i^{d+1}} \right\rfloor)
\end{aligned}
$$

因为有 $\sum_{j|i} \lambda(j) = [i\text{是完全平方数}]$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} \Lambda(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor) \\
= & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j|i} \lambda(j) \\
= & \sqrt{n}
\end{aligned}
$$

那么 Λ 也可以杜教筛。

Div

定义复数 $a + bi$ 是 n 的约数当且仅当存在 c, d 使得 $(a + bi)(c + di) = n$。

定义 $h(n)$ 为所有实部大于 0 的 n 的约数的实部之和。

求 $H(n)$。

$n \leq 10^{10}$。

先考虑虚部 > 0 的情况。当 $n = (a + bi)(c + di)$，有 $ac - bd = n$ 且 $ad + bc = 0$。

设

$$\begin{aligned} a &= px \\ b &= qx \\ c &= py \\ d &= -qy \\ \gcd(p, q) &= 1 \end{aligned}$$

那么一组 $x, y, p, q(\gcd(p, q) = 1)$ 唯一确定一组 a, b, c, d。

Div

记

$$
\begin{aligned}
g(n) &= \sum_{p^2+q^2=n} [\gcd(p,q)=1]p \\
f(n) &= \sum_{p^2+q^2=n} p \\
S(n) &= \sum_{i=1}^{n} \sigma_1(n)
\end{aligned}
$$

问题转化为

$$
\begin{aligned}
& \sum_{x,y,p,q>0} [\gcd(p,q)=1][xy(p^2+q^2)\le n]px \\
= & \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{p^2+q^2=i}[\gcd(p,q)=1]p\right)\left(\sum_{xy\le\lfloor\frac{n}{i}\rfloor} x\right) \\
= & \sum_{i=1}^{n} g(i) S\left(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor\right)
\end{aligned}
$$

Div

$$
\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{i=1}^{n} i \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \\
G(n) &= \sum_{p^2+q^2 \leq n} p \\
&= \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} i \left\lfloor \sqrt{n-i^2} \right\rfloor \\
F(n) &= \sum_{p^2+q^2 \leq n} [\gcd(p,q)=1] p \\
&= \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} i\mu(i) G\left(\left\lfloor \frac{n}{i^2} \right\rfloor \right)
\end{aligned}
$$

51NOD 1847

记 $\mathrm{sgcd}(i,j)$ 表示 i 和 j 的次大公约数。

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{sgcd}(i,j)^k$$

$n \le 10^9, k \le 50$。

51NOD 1847

记 $f(i)$ 表示 i 的次大约数。显然有 $\mathrm{sgcd}(i,j) = f(\gcd(i,j))$。

原式反演可以转化为求

$$\sum_{i=1}^{n} f(i)^k \left(2\Phi(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor) - 1\right)$$

后面部分显然可以杜教筛。

51NOD 1847

观察 $f(i)^k$，考虑 min_25 筛求 $f_{n,j} = \sum_{i=2}^{n} i^k[i\text{是质数或}i\text{的质因子都} > p_j]$ 的时候，减掉的东西，刚好就是最小质因子 $= p_j$ 的数的 f 的 k 次方和。

加上质数的答案，是区间质数个数。