组合数学

God_Max_Me

Chengdu No.7 High School.

2025 年

一些必要 trick

- 推式子，先提 $\sum$ 和 Π 到最前面，然后从后往前合并，必要时考虑更改 $\sum$ 的取值
- 看到次方变为斯特林数，$x^n = \sum_{i=0}^{n} {n \brack i} \binom{x}{i} i! = \sum_{i=0}^{n} \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} \frac{i^n}{(m-i)!} \binom{x}{i}$
- 注意莫反、欧反的形式

推式子基本原理

- 先把 $\sum$ 移到最前面。
- 将多个 $\sum$ 排序，范围更小的放在前面。
- 将只与当前 $\sum$ 有关的式子尽量往前提。
- 将能简化式子的特殊边界提出来。
- 从后往前处理。

递推式

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

递推式

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

证明
从组合意义上推导，在 n 个人中选 m 个相当于单独考虑最后一人，若他要选，则为 $\binom{n-1}{m-1}$ 他不选则为 $\binom{n-1}{m}$。

吸引/相伴等式

$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n-1}{m-1}} = \frac{n}{m}$$

$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n-1}{m}} = \frac{n}{n-m}$$

$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n}{m-1}} = \frac{n-m+1}{m}$$

吸引/相伴等式

$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n-1}{m-1}}=\frac{n}{m}$$
$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n-1}{m}}=\frac{n}{n-m}$$
$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n}{m-1}}=\frac{n-m+1}{m}$$

另外的形式:

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$
$$(n-k)\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k}$$

上指标反转

$$\binom{n}{m} = (-1)^m \binom{m-n-1}{m}$$

上指标反转

$$\binom{n}{m} = (-1)^m \binom{m-n-1}{m}$$

证明

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!} &= \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-m+1)}{m!} \\
&= \frac{(-1)^m \times (-n) \times (1-n) \times \ldots \times (m-n-1)}{m!} \\
&= \frac{(-1)^m \times (m-n-1)^{\underline{m}}}{m!} \\
&= (-1)^m \binom{m-n-1}{m}
\end{aligned}$$

三项式系数恒等式

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

等式两边拆开约分即可得证。

三项式系数恒等式

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

等式两边拆开约分即可得证。

平行求和

$$\begin{aligned}&\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\ldots+\binom{n+m}{m}\\&=\sum_{i=0}^{m}\binom{n+i}{i}=\binom{n+m+1}{m}\end{aligned}$$

$$m\in\mathbb{N}$$

三项式系数恒等式

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

等式两边拆开约分即可得证。

平行求和

$$\begin{aligned}&\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\ldots+\binom{n+m}{m}\\&=\sum_{i=0}^{m}\binom{n+i}{i}=\binom{n+m+1}{m}\\&m\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

证明

将 $\binom{n+m+1}{m}$ 用加法公式展开即可。

上指标求和

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

上指标求和

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

证明

从组合意义入手，相当于我从 $n+1$ 个数中选 $m+1$ 个数，先假设选 i，那么 i 前面还需要选 m 个数，枚举这个 i，即为答案。也可通过微积分求导知识进行证明，这里不再详述。

练习一：

求 $\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{i}$

练习一：

求 $\sum\limits_{i=0}^{m}\binom{n+i}{i}$

解

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{n+i}{i}=\sum_{i=0}^{m}\binom{n+i}{n+i-i}=\sum_{i=0}^{m}\binom{n+i}{n}=\binom{n+m+1}{n+1}$$

下指标求和（整行）

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$$

下指标求和（整行）

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$$

证明

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}1^{i}\\&=(1+1)^n=2^n\end{aligned}$$

下指标求和（整行）

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$$

证明

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}1^{i}\\&=(1+1)^n=2^n\end{aligned}$$

交错求和

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^m\binom{n-1}{m},m\in\mathbb{Z}$$

证明

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{m}\binom{k-n-1}{k}\text{上指标反转}\\ &= \binom{m-n}{m}\text{平行求和}\\ &= (-1)^m\binom{n-1}{m}\text{上指标反转}\end{aligned}$$

证明

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{m}\binom{k-n-1}{k}\text{上指标反转}\\
&= \binom{m-n}{m}\text{平行求和}\\
&= (-1)^m\binom{n-1}{m}\text{上指标反转}
\end{aligned}
$$

下指标卷积（范德蒙德卷积）

$$
\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}
$$

证明

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{k-n-1}{k}\text{上指标反转}$$
$$=\binom{m-n}{m}\text{平行求和}$$
$$=(-1)^m\binom{n-1}{m}\text{上指标反转}$$

下指标卷积（范德蒙德卷积）

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

证明

从 n 个数中选 i 个数，再从 m 个数中选 $k-i$ 个数，相当于从 $n+m$ 个数中选 k 个数。

练习二：

求 $\sum\limits_{i=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{i}$

练习二：

求 $\sum\limits_{i=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{i}$

解

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{i}&=\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{m-i}\\&=\binom{n+m}{m}\end{aligned}$$

上指标卷积

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{a}\binom{n-i}{b}=\binom{n+1}{a+b+1}$$

上指标卷积

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{a}\binom{n-i}{b}=\binom{n+1}{a+b+1}$$

证明相当于从左边 i 个中选 a 个，右边 $n-i$ 个中选 b 个。等于从 n 个中选 $a+b$ 个，枚举分割点 i。

练习三:

求 $\sum\limits_{i=m}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{i}{m}$

练习三:

求 $\sum\limits_{i=m}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{i}{m}$

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{i}{m} &= \sum_{i=m}^{n}(-1)^i\binom{n}{m}\binom{n-m}{i-m}\\ &= \binom{n}{m}\sum_{i=m}^{n}(-1)^i\binom{n-m}{i-m}\\ &= \binom{n}{m}\sum_{i=0}^{n-m}(-1)^{i+m}\binom{n-m}{i}\\ &= \binom{n}{m}(-1)^m\sum_{i=0}^{n-m}(-1)^i\binom{n-m}{i}\times 1^{n-m-i}\\ &= \binom{n}{m}(-1)^m0^{n-m} = (-1)^m[n=m]\end{aligned}$$

例题：P2791 幼儿园篮球题
至此，组合数学的基本内容已结束。
总结如下图：

组合恒等式

1. $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$
2. $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$。二项式定理当 $x = y = 1$ 时的情况。
3. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = [n = 0]$。二项式定理当 $x = 1, y = -1$ 时的情况。
4. $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$。从组合意义上即可证明。
5. $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$。范德蒙德卷积，组合意义上证明即可。
6. $\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$。
7. $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$。

图: 组合恒等式

二项式定理

二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

二项式定理

二项式定理

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

拓展——下降（上升）幂二项式定理

$$(x+y)^{\underline{n}}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{\underline{n-i}}y^{\underline{i}}$$

$$(x+y)^{\overline{n}}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{\overline{n-i}}y^{\overline{i}}$$

证明（这里不用数学归纳法进行证明）

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{\overline{n-i}}y^{\overline{i}} &= \sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!i!}x^{\overline{n-i}}y^{\overline{i}} \\
&= \sum_{i=0}^{n} n!\frac{x^{\overline{n-i}}y^{\overline{i}}}{(n-i)!i!} \\
&= n!\sum_{i=0}^{n}\binom{x}{i}\binom{y}{n-i} \\
\text{根据范德蒙德卷积} &= n!\binom{x+y}{n} \\
&= (x+y)^{\overline{n}}
\end{aligned}
$$

上升幂方法相同。

错排

定义：一个满足 $a_i \neq i$ 的序列。**推导式**：

$$f_n = (n-1)(f_{n-1} + f_{n-2})$$

错排

定义：一个满足 $a_i \neq i$ 的序列。**推导式**：

$$f_n = (n-1)(f_{n-1} + f_{n-2})$$

证明

若当前将 1 放到位置 $k(k \neq 1)$，那么 k 的放置位置可以分类讨论：

1. k 放在位置 1 上，那么还会剩下 $n-2$ 个数错排，方案数为 f_{n-2}。
2. k 放到某个位置 $t(t \neq 1)$，那么假设 1 号位置填上了 P，则 $p \neq 1 \wedge p \neq k$，此时可以考虑一个新序列，把 1 去掉，此时方案数为 f_{n-1}

例题：P7438 更简单的排列计数

设 cyc_π 将长为 n 的排列 π 当成置换时所能分解成的循环个数。给定两个整数 n,k 和一个 $k-1$ 次多项式，对 $1 \le m \le n$ 求：

$$\sum_{\pi} F(\text{cyc}_\pi)$$

其中 π 是长度为 m 且不存在位置 i 使得 $\pi_i = i$ 的排列。

二项式系数

$$\sum_{\pi} F(cyc_\pi) = \sum_{\pi} \sum_{i=0}^{k-1} f_i \times cyc_\pi^i$$

$$= \sum_{\pi} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i-1} f_i \left\{ {i \atop j} \right\} \binom{cyc_\pi}{j} j!$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} j! \sum_{i=j}^{k-1} f_i \left\{ {i \atop j} \right\} \sum_{\pi} \binom{cyc_\pi}{j}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{\pi} F(cyc_\pi) &= \sum_{\pi}\sum_{i=0}^{k-1} f_i \times cyc_\pi^i \\
&= \sum_{\pi}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i-1} f_i \left\{ {i \atop j} \right\} \binom{cyc_\pi}{j} j! \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} j! \sum_{i=j}^{k-1} f_i \left\{ {i \atop j} \right\} \sum_{\pi} \binom{cyc_\pi}{j}
\end{aligned}
$$

我们发现，$\sum\limits_{i=j}^{k-1} f_i \left\{ {i \atop j} \right\}$ 与 $\sum\limits_{\pi} \binom{cyc_\pi}{j}$ 无关，所以可以将其预处理。

$j!\ f_i \left\{ {i \atop j} \right\}$ 都是能够优先处理的。现在考虑 $\binom{cyc_\pi}{j}$ 的处理。

定义函数 $C_{t,j}$ 为长度为 t ，环数为 j 的排列数，$P_{t,j}=\sum\limits_{|\pi|=t}\binom{cyc_\pi}{j}$ ，通过推导，能够得出：

$$C_{t,j}=(n-1)(C_{t-1,j}+C_{t-2,j-1})$$
$$P_{t,j}=(n-1)(P_{t-1,j}+P_{t-2,j-1}+P_{t-1,j-1})$$

定义函数 $C_{t,j}$ 为长度为 t，环数为 j 的排列数，$P_{t,j}=\sum_{|\pi|=t}\binom{cyc_\pi}{j}$，通过推导，能够得出：

$$C_{t,j}=(n-1)(C_{t-1,j}+C_{t-2,j-1})$$
$$P_{t,j}=(n-1)(P_{t-1,j}+P_{t-2,j-1}+P_{t-1,j-1})$$

那么答案即为：

$$\sum_{j=0}^{k-1} j! \sum_{i=j}^{k-1} f_i \left\{ {i \atop j} \right\} \sum_{k=1}^{n} P_{i,j}$$

其中 i 的复杂度为 $O(n)$，j 的复杂度为 $O(k)$，总复杂度为 $O(nk)$，不会超时。

容斥原理

对于一个集合 S 的一部分子集构成的簇 P 有:

$$|\bigcup_{T\in P} T| = \sum_{Q\subseteq P}(-1)^{|Q|-1}|\bigcap_{T\in Q} T|$$

基本容斥原理为高中必学内容，这里对此不过多阐述。

鸽巢定理

原理：将 $(\sum_{i=1}^{n} p_i) - n + 1$ 个东西放入 n 个盒子中，一定存在一个盒子 i，使得第 i 个盒子至少装了 p_i 个物品。
证明（反证法）

$$\forall x \in \mathbb{N}^* \wedge 1 \le x \le n, a\_i$$

鸽巢定理

原理：将 $(\sum_{i=1}^{n} p_i) - n + 1$ 个东西放入 n 个盒子中，一定存在一个盒子 i，使得第 i 个盒子至少装了 p_i 个物品。
证明（反证法）

$$\forall x \in \mathbb{N}^* \wedge 1 \leq x \leq n, a\_i$$

练习四

有十个数 $a_1, a_2 \ldots a_1 0$ 满足 $\forall_{1 \leq i \leq 10} 1 \leq a_i \leq 60$，证明能够从 a_i 中挑出两个交为空的子集，使得它们的和相等。

鸽巢定理

原理：将 $(\sum_{i=1}^{n} p_i) - n + 1$ 个东西放入 n 个盒子中，一定存在一个盒子 i，使得第 i 个盒子至少装了 p_i 个物品。
证明（反证法）

$$\forall x \in \mathbb{N}^* \wedge 1 \leq x \leq n, a\_i$$

练习四

有十个数 $a_1, a_2 ... a_1 0$ 满足 $\forall_{1\leq i\leq 10} 1 \leq a_i \leq 60$，证明能够从 a_i 中挑出两个交为空的子集，使得它们的和相等。

证明
两个交为空的子集和相等，所以加上交集后和仍不变，总共有 $2^{10} = 1024$，但值域仅为 $[0, 600]$，故能够选出。

鸽巢定理

练习五

证明一张有超过 1 个点的简单无向图必定有两点度数相等。

鸽巢定理

练习五

证明一张有超过 1 个点的简单无向图必定有两点度数相等。

证明

考虑分类讨论:

1. 有 2 个度数为 0 的点，符合条件。
2. 有 1 个度数为 0 的点，则第 n 个点需要连 $n-1$ 条边，故至少有一个点符合。
3. 没有度数为 0 的点，那么边数的范围为 $[1, n-1]$，所以符合。

练习六

证明能从任意 11 个实数中挑选出 4 个数 a, b, c, d 满足：
$(ac + bd)^2 \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

练习六

证明能从任意 11 个实数中挑选出 4 个数 a, b, c, d 满足:
$(ac + bd)^2 \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

证明
我们令 $\vec{x} = (a, b), \vec{y} = (c, d)$。原式变为: $\vec{x}\vec{y} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{|\vec{x}||\vec{y}|}$。那么就有:
$\cos < \vec{x}, \vec{y} >= \frac{\vec{x}\vec{y}}{\sqrt{|\vec{x}||\vec{y}|}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} >$ 故 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的夹角为 45 度。然后我们发现，11 个实数中必定有至少 6 个正数或负数，故我们只需选择正负性相同的 4 个数字，这样两条向量一定在同一象限。因为我们有在同一象限的 3 条向量，每两条之间最大夹角小于 45 度。故得证。

二项式反演

结论：

$$F(n)=\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}G(i)$$

$$G(n)=\sum_{i=m}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}F(i)$$

$$F(n)=\sum_{i=m}^{n}\binom{i}{m}G(i)$$

$$G(n)=\sum_{i=m}^{n}(-1)^{i-m}\binom{i}{m}F(i)$$

$$
\begin{aligned}
F(n) = \sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=m}^{i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}F(j) &= \sum_{j=m}^{n}F(j)\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{i-j} \\
&= \sum_{j=m}^{n}F(j)\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j} \\
&= \sum_{j=m}^{n}\binom{n}{j}F(j)\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j} \\
&= \sum_{j=m}^{n}\binom{n}{j}F(j)\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n-j}{i}(-1)^{i} \\
&= \sum_{j=m}^{n}\binom{n}{j}F(j)[n=j] = F(n)
\end{aligned}
$$

第二种形式证明类似。

练习七 BZOJ2839 集合计数（P10596）

有 n 个元素，问有多少种选择若干个子集的方案，使得选出的子集的交集恰好为 k。
$0 < k \le n \le 10^6$

练习七 BZOJ2839 集合计数（P10596）

有 n 个元素，问有多少种选择若干个子集的方案，使得选出的子集的交集恰好为 k。
$0 < k \le n \le 10^6$

我们先考虑子集的交集大小至少为 i 的方案，记为 $F(i)$，那么相当于先挑出 i 个，再从 $n-i$ 个中计算出剩余元素的子集的数量即为 2^{n-i}，然后我们需要在这些剩余子集中的挑选子集方案，即为 $2^{2^{n-i}}$，考虑到当剩余子集为空时，方案就为 i，舍去，所以可得 $F(i)=\binom{n}{i}(2^{2^{n-i}}-1)$。

然后我们考虑答案函数 $G(k)$，因为 $F(i)$ 在求解时会对所有交集大小大于等于 i 的情况计数，理想情况下应该计数 1 次，但是经过画图可以发现，当我们处理类似 $G(i+1)$ 的情况时，其也会对 $F(i)$ 产生贡献，贡献为 $\binom{i+1}{i}$，所以可以得出结论：

$$F(i) = \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} G(j)$$

进行二项式反演可得：

$$\begin{aligned} G(k) &= \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} F(i) \\ &= \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \binom{n}{i} (2^{2^{n-i}} - 1) \end{aligned}$$

现在就可以解决了。

练习八 BZOJ3622 已经没有什么好害怕的了（P4859)

有两个序列 a_i, b_i 保证所有元素互不相同。你需要重排 b 序列，使得恰好有 k 个 i 满足 $a_i > b_i$。，求方案数。
$0 < k \le n \le 2000$。

练习八 BZOJ3622 已经没有什么好害怕的了（P4859）

有两个序列 a_i, b_i 保证所有元素互不相同。你需要重排 b 序列，使得恰好有 k 个 i 满足 $a_i > b_i$。，求方案数。
$0 < k \le n \le 2000$。

先将 a 序列排序，使其单调上升。
考虑 $dp_{i,j}$ 表示考虑前 i 对数，恰有 j 对 $a_i > b_i$ ，这样无法转移。
还是先考虑前 i 个中至少 j 对 $a_i > b_i$，设为 $dp_{i,j}$，那么就有

$$dp_{i,j} = dp_{i-1,j} + dp_{i-1,j-1} * (cnt(a_i) - j + 1)$$

$cnt(a_i)$ 表示在当前 i 位置，有多少个 b 满足 $a_i > b$。

二项式反演

然后设 $F(i)$ 表示钦定 i 对符合条件的方案数，$G(i)$ 表示恰好 i 对的方案数。在当前位置，由于钦定 i 对符合，所以剩下的数随便排序，就为 $A_{n-i}^{n-i}=(n-1)!$，就有：

$$(n-i)!dp_{n,i}=F(i)=\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}G(j)$$

然后设 $F(i)$ 表示钦定 i 对符合条件的方案数，$G(i)$ 表示恰好 i 对的方案数。在当前位置，由于钦定 i 对符合，所以剩下的数随便排序，就为 $A_{n-i}^{n-i}=(n-1)!$，就有：

$$(n-i)!dp_{n,i}=F(i)=\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}G(j)$$

反演可得：

$$\begin{aligned}G(k)&=\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}F(i)\\&=\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}(n-i)!dp_{n,i}\end{aligned}$$

然后就能够解决啦。

练习九 CF997C Sky Full of Stars

有一个 $n \times n$ 的矩阵，将其三染色，使得至少有一行或者一列同色，问方案数。
$n \leq 10^6$

练习九 CF997C Sky Full of Stars

有一个 $n \times n$ 的矩阵，将其三染色，使得至少有一行或者一列同色，问方案数。
$n \leq 10^6$

我们先钦定有 i 行 j 列同色，记为 $F(i,j)$

$$F(i,j) = \begin{cases} 3^{(n-i)n+i}\binom{n}{i} & j = 0 \\ 3^{(n-j)n+j}\binom{n}{j} & i = 0 \\ 3^{(n-i)(n-j)+1}\binom{n}{i}\binom{n}{j} & i \neq 0, j \neq 0 \end{cases}$$

考虑恰好有 i 行 j 列同色，记为 $G(i,j)$ 我们需要求至少一行一列，所以可以用 $-G(0,0)$。

二项式反演

$$F(x,y)=\sum_{i=x}^{n}\sum_{j=y}^{n}\binom{i}{x}\binom{j}{y}G(i,j)$$

$$G(x,y)=\sum_{i=x}^{n}\sum_{j=y}^{n}(-1)^{i+j-x-y}\binom{i}{x}\binom{j}{y}F(i,j)$$

$$G(0,0)=3^{n^2}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}(F(0,i)+F(i,0))+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{2n-i-j}\binom{n}{i}\binom{n}{j}F(i,j)$$

$$G(0,0)=3^{n^2}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}(F(0,i)+F(i,0))+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\binom{n}{i}\binom{n}{j}F(i,j)$$

二项式反演

$$F(x,y)=\sum_{i=x}^{n}\sum_{j=y}^{n}\binom{i}{x}\binom{j}{y}G(i,j)$$

$$G(x,y)=\sum_{i=x}^{n}\sum_{j=y}^{n}(-1)^{i+j-x-y}\binom{i}{x}\binom{j}{y}F(i,j)$$

$$G(0,0)=3^{n^2}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}(F(0,i)+F(i,0))+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{2n-i-j}\binom{n}{i}\binom{n}{j}F(i,j)$$

$$G(0,0)=3^{n^2}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}(F(0,i)+F(i,0))+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\binom{n}{i}\binom{n}{j}F(i,j)$$

将 $F(i,j)$ 代入原式子。后面那坨东西即为：

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\binom{n}{i}\binom{n}{j}3\times 3^{(n-i)(n-j)}$$

$$= 3^{n^2+1}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i 3^{-in}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j 3^{-jn}3^{ij}$$

现在发现 3^{ij} 是最不好处理的，因为它使得不能使用二项式定理，先考虑这个的处理方法。

$$= 3^{n^2+1}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i 3^{-in}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j 3^{j(i-n)}$$

$$= 3^{n^2+1}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}((-1)^i 3^{-in}(1-3^{(i-n)})^n-1)$$

$$G(0,0) = 3^{n^2} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}(F(0,i)+F(i,0)) + (-1)^i 3^{-in}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j 3^{-jn}3^{ij}$$

现在就可以处理了。

练习十（第二类斯特林数通项求法）

记 $\left\{{n \atop m}\right\}$ 表示把 n 个不同的物品划分为 m 个集合构成簇的方案数（不允许空集）。

练习十（第二类斯特林数通项求法）

记 $\left\{ n \atop m \right\}$ 表示把 n 个不同的物品划分为 m 个集合构成簇的方案数（不允许空集）。我们先设 $F(n,m) = \left\{ n \atop m \right\}$，$G(n,m)$ 表示允许存在空集时的方案数。

练习十（第二类斯特林数通项求法）

记 $\left\{ {n \atop m} \right\}$ 表示把 n 个不同的物品划分为 m 个集合构成簇的方案数（不允许空集）。
我们先设 $F(n, m) = \left\{ {n \atop m} \right\}$， $G(n, m)$ 表示允许存在空集时的方案数。
易得 $G(n, m) = \frac{m^n}{m!}$。

练习十（第二类斯特林数通项求法）

记 $\left\{ {n \atop m} \right\}$ 表示把 n 个不同的物品划分为 m 个集合构成簇的方案数（不允许空集）。
我们先设 $F(n, m) = \left\{ {n \atop m} \right\}$，$G(n, m)$ 表示允许存在空集时的方案数。
易得 $G(n, m) = \frac{m^n}{m!}$。
钦定非空集合数，可以有：$G(n, m) = \sum\limits_{i=1}^{m} \binom{m}{i} F(n, i)$

练习十（第二类斯特林数通项求法）

记 $\left\{ {n \atop m} \right\}$ 表示把 n 个不同的物品划分为 m 个集合构成簇的方案数（不允许空集）。
我们先设 $F(n,m) = \left\{ {n \atop m} \right\}$，$G(n,m)$ 表示允许存在空集时的方案数。
易得 $G(n,m) = \frac{m^n}{m!}$。

钦定非空集合数，可以有：$G(n,m) = \sum\limits_{i=1}^{m} \binom{m}{i} F(n,i)$

进行反演可得：$F(n,m) = \sum\limits_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{m-i} G(n,i)$

练习十（第二类斯特林数通项求法）

记 $\left\{ n \atop m \right\}$ 表示把 n 个不同的物品划分为 m 个集合构成簇的方案数（不允许空集）。
我们先设 $F(n,m)=\left\{ n \atop m \right\}$，$G(n,m)$ 表示允许存在空集时的方案数。
易得 $G(n,m)=\frac{m^n}{m!}$。
钦定非空集合数，可以有：$G(n,m)=\sum\limits_{i=1}^{m}\binom{m}{i}F(n,i)$
进行反演可得：$F(n,m)=\sum\limits_{i=1}^{m}\binom{m}{i}(-1)^{m-i}G(n,i)$
代入可得：$\left\{ n \atop m \right\}=f_{n,m}=\sum\limits_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}\frac{i^n}{i!}=\sum\limits_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\frac{i^n}{i!(m-i)!}$。
这也是第二类斯特林数的通项公式。

Lucas 定理

Lucas 定理可以用来求大组合数对小模数取模的结果

Lucas 定理

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{\lfloor \frac{m}{p} \rfloor} \binom{n \bmod p}{m \bmod p} \pmod p$$

其中 p 为质数。

Lucas 定理的证明

证明注意到 $\binom{p}{n} \equiv [n = p \vee n = 0] \pmod p$，因此 $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$。对于 $f(x) = (1-x)^n, f(x)[x^m] = \binom{n}{m}$。我们现在对 $f(x)$ 做一点变换，

Lucas 定理的证明

证明注意到 $\binom{p}{n} \equiv [n = p \vee n = 0] \pmod p$，因此 $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$。对于 $f(x) = (1-x)^n, f(x)[x^m] = \binom{n}{m}$。我们现在对 $f(x)$ 做一点变换，

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^n \\ &= (1+x)^{p \times \lfloor \frac{n}{p} \rfloor} (1+x)^{n \bmod p} \\ &= ((1+x)^p)^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} (1+x)^{n \bmod p} \end{aligned}$$

$$f(x) \equiv (1+x^p)^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} (1+x)^{n \bmod p} \pmod p$$

Lucas 定理的证明

证明注意到 $\binom{p}{n} \equiv [n = p \vee n = 0] \pmod p$，因此 $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$。对于 $f(x) = (1-x)^n, f(x)[x^m] = \binom{n}{m}$。我们现在对 $f(x)$ 做一点变换，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^n \\
&= (1+x)^{p \times \lfloor \frac{n}{p} \rfloor}(1+x)^{n \bmod p} \\
&= ((1+x)^p)^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}(1+x)^{n \bmod p}
\end{aligned}
$$

$$
f(x) \equiv (1+x^p)^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}(1+x)^{n \bmod p} \pmod p
$$

所以对于 $f(x)$，前半部分 $((1+x)^p)^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}$ 一定为 p 的倍数，后半部分 $(1+x)^{n \bmod p}$ 一定小于 p ，设 $h(x) = (1+x^p)^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}$ ，$g(x) = (1+x)^{n \bmod p}$。

Lucas 定理的证明

$f(x)[x^m] = h(x)[x^{kp}] \times g(x)[x^r] \pmod p$
所以就有 $m = kp + r \to k = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor, r = m \bmod p$。
就可以得出

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{\lfloor \frac{m}{p} \rfloor} \binom{n \bmod p}{m \bmod p} \pmod p$$