组合数学 1

二项式系数

God_Max_Me

2025 年 1 月 23 日

定义

- **组合数**，也叫二项式系数，定义为

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

表示从 n 个不同元素中选出 m 个（不计顺序）的方案数。

- **下降幂**：n 的 m 阶下降幂定义为

$$n^{\underline{m}} = n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

这样二项式系数可以写为

$$\binom{n}{m} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!}$$

插板法

插板法 1

有 n 个完全相同的元素，将其分为 k 组，每组至少有一个元素，一共有多少种分法?

插板法

插板法 1

有 n 个完全相同的元素，将其分为 k 组，每组至少有一个元素，一共有多少种分法?

Solution

$k-1$ 块板插入 $n-1$ 个空隙，答案为

$$\binom{n-1}{k-1}$$

插板法

插板法 1

有 n 个完全相同的元素，将其分为 k 组，每组至少有一个元素，一共有多少种分法?

Solution

$k-1$ 块板插入 $n-1$ 个空隙，答案为

$$\binom{n-1}{k-1}$$

插板法 2

有 n 个完全相同的元素，将其分为 k 组，每组可以为空，一共有多少种分法?

插板法

插板法 1

有 n 个完全相同的元素，将其分为 k 组，每组至少有一个元素，一共有多少种分法?

Solution

$k-1$ 块板插入 $n-1$ 个空隙，答案为

$$\binom{n-1}{k-1}$$

插板法 2

有 n 个完全相同的元素，将其分为 k 组，每组可以为空，一共有多少种分法?

Solution

先加 k 个元素，让每组都非空，最后从每组中拿走一个元素，答案为

$$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{n+k-1}{n}$$

插板法 3

从 $1, 2, \cdots, n$ 中选出 k 个数，要求任何两个数都不相邻，一共有多少种选法?

插板法 3

从 $1, 2, \cdots, n$ 中选出 k 个数，要求任何两个数都不相邻，一共有多少种选法?

Solution

这 k 个元素把 $1 \sim n$ 划分成了 $k+1$ 段，设每段的值为 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$，则它们满足

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = n - k \wedge a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} > 0, a_0, a_n \geq 0$$

给 a_0, a_n 都加上 1，让 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 都 > 0，此时

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = n - k + 2$$

即将 $n - k + 2$ 个数划分成至少为 1 的 $k+1$ 段，方案数为

$$\binom{n-k+1}{k}$$

定义的拓展

上述定义的定义域为 $n, m \in \mathbb{N}$，使用下面的定义，将定义域扩展到 $n \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} \frac{n^{\underline{m}}}{m!} & m \geq 0 \\ 0 & m < 0 \end{cases}$$

规定 $0^0 = 0! = x^{\underline{0}} = 1$。

组合恒等式

下面的恒等式如果没有特殊标注则表示对 $n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ 成立

加法公式

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

组合恒等式

下面的恒等式如果没有特殊标注则表示对 $n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ 成立

加法公式

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

对称公式

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad n, k \in \mathbb{N}$$

注意对称公式对负的 n 是不成立的

吸收公式

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \quad (n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$$

上指标反转

$$\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{k-n-1}{k}$$

吸收公式

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \quad (n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$$

上指标反转

$$\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{k-n-1}{k}$$

以上柿子均可以由定义推出，这里不再赘述。

组合求和式

广义二项式定理

对 $n \in \mathbb{R}$，$|\frac{x}{y}| < 1$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

特别地，当 $n \in \mathbb{N}$ 时就是常用的二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

证明的话对 $f(x) = (x+y)^n$ 在 $x = 0$ 处做泰勒展开即可。

组合求和式

广义二项式定理

对 $n \in \mathbb{R}$，$|\frac{x}{y}| < 1$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

特别地，当 $n \in \mathbb{N}$ 时就是常用的二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

证明的话对 $f(x) = (x+y)^n$ 在 $x = 0$ 处做泰勒展开即可。

组合数一行之和

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

二项式定理取 $x = y = 1$ 即可。

平行求和

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+m}{m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}=\binom{n+m+1}{m},\qquad m\in\mathbb{N}$$

平行求和

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+m}{m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}=\binom{n+m+1}{m},\quad m\in\mathbb{N}$$

证明

将 $\binom{n+m+1}{m}$ 用加法公式一步步展开即可

$$\begin{aligned}\binom{n+m+1}{m}&=\binom{n+m}{m}+\binom{n+m}{m-1}\\&=\binom{n+m}{m}+\binom{n+m-1}{m-1}+\binom{n+m-1}{m-2}\\&=\cdots\\&=\binom{n+m}{m}+\binom{n+m-1}{m-1}+\cdots+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{0}\end{aligned}$$

上指标求和

$$\binom{0}{m}+\binom{1}{m}+\cdots+\binom{n}{m}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1},\quad n,m\in\mathbb{N}$$

上指标求和

$$\binom{0}{m}+\binom{1}{m}+\cdots+\binom{n}{m}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1},\quad n,m\in\mathbb{N}$$

证明

将 $\binom{n+1}{m+1}$ 用加法公式一步步展开即可

交错和

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^m\binom{n-1}{m}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

交错和

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^m\binom{n-1}{m},\quad m\in\mathbb{Z}$$

证明

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{k-n-1}{k}\quad \text{上指标反转}$$

交错和

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^m\binom{n-1}{m},\quad m\in\mathbb{Z}$$

证明

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}&=\sum_{k=0}^{m}\binom{k-n-1}{k} && \text{上指标反转}\\&=\binom{m-n}{m} && \text{平行求和}\\&=(-1)^m\binom{n-1}{m} && \text{上指标反转}\end{aligned}$$

范德蒙德卷积

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

范德蒙德卷积

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

组合意义

从 $r+s$ 个物品中一共要选 n 个，总方案数是 $\binom{r+s}{n}$。枚举 k 表示从前 r 个物品中选了 k 个，那么从后面 s 个物品中就选了 $n-k$ 个，方案数是 $\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$。

范德蒙德卷积

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

组合意义

从 $r+s$ 个物品中一共要选 n 个，总方案数是 $\binom{r+s}{n}$。枚举 k 表示从前 r 个物品中选了 k 个，那么从后面 s 个物品中就选了 $n-k$ 个，方案数是 $\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$。

进一步结合其他恒等式可以得到下面这些式子

多项式系数

三项式版恒等式

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}, \quad m, k \in \mathbb{Z}$$

两边都是用定义展开即可得证。

多项式系数

三项式版恒等式

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k},\quad m,k\in\mathbb{Z}$$

两边都是用定义展开即可得证。
n 个两两不同的物品，分成 m 组，第 i 组有 a_i 个物品，则总的方案数为：

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{m}a_i!}$$

多项式系数

三项式版恒等式

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}, \quad m, k \in \mathbb{Z}$$

两边都是用定义展开即可得证。
n 个两两不同的物品，分成 m 组，第 i 组有 a_i 个物品，则总的方案数为：

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} a_i!}$$

这个被叫做多项式系数，记做 $\binom{n}{a_1,a_2,\cdots,a_m} = \binom{a_1+a_2+\cdots+a_m}{a_1,a_2,\cdots,a_m}$

多项式系数

三项式版恒等式

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k},\quad m,k\in\mathbb{Z}$$

两边都是用定义展开即可得证。
n 个两两不同的物品，分成 m 组，第 i 组有 a_i 个物品，则总的方案数为：

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{m}a_i!}$$

这个被叫做多项式系数，记做 $\binom{n}{a_1,a_2,\cdots,a_m}=\binom{a_1+a_2+\cdots+a_m}{a_1,a_2,\cdots,a_m}$
它等于如下的二项式系数乘积：

$$\binom{a_1+a_2+\cdots+a_m}{a_1,a_2,\cdots,a_m}=\binom{a_1+\cdots+a_m}{a_2+\cdots+a_m}\binom{a_2+\cdots+a_m}{a_3+\cdots+a_m}\cdots\binom{a_{m-1}+a_m}{a_m}\binom{a_m}{0}$$

总结一下，常用恒等式如下表所示：

上指标求和和平行求和都有封闭形式，但是遗憾的是，下指标求和没有封闭形式。

$$\sum_{k \le m} \binom{n}{k}, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

~~开始推式子吧~~

求出下式的封闭形式

$$\sum_k \binom{n}{k}^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

~~开始推式子吧~~

求出下式的封闭形式

$$\sum_k \binom{n}{k}^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

对称公式之后范德蒙德卷积即可。

$$\sum_k \binom{n}{k}^2 = \sum_k \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

求出下式的封闭形式

$$\sum_k k\binom{n}{k}^2$$

求出下式的封闭形式

$$\sum_k k\binom{n}{k}^2$$

吸收律之后对称公式之后范德蒙德卷积即可。

$$\sum_k k\binom{n}{k}^2 = n\sum_k \binom{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$=n\sum_k \binom{n}{k}\binom{n-1}{n-k} = n\binom{2n-1}{n}$$

《具体数学》的例题

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}, \ \ n, m \in \mathbb{N}, \ \ n \geq m$$

《具体数学》的例题

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}},\ \ n,m\in\mathbb{N},\ \ n\geq m$$

注意到

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}\iff\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}=\frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

提出 $\frac{1}{\binom{n}{m}}$，

$$\text{原式}=\frac{1}{\binom{n}{m}}\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}=\frac{1}{\binom{n}{m}}\sum_{k=0}^{m}\binom{n-m+k}{k}=\frac{\binom{n+1}{m}}{\binom{n}{m}}=\frac{n+1}{n+1-m}$$

求出下式的封闭形式

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{m},\ \ n,m\in\mathbb{N},\ \ n\geq m$$

求出下式的封闭形式

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{m},\ \ n,m\in\mathbb{N},\ \ n\geq m$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{m} &= \sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} \\
&= \binom{n}{m}\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n-m}{k-m} = \binom{n}{m}(-1)^m\sum_{k=m}^{n}\binom{k-n-1}{k-m} \\
&= \binom{n}{m}(-1)^m\sum_{k=0}^{n-m}\binom{k+m-n-1}{k} = \binom{n}{m}(-1)^m\binom{0}{n-m} \\
&= (-1)^m[n=m]
\end{aligned}$$

还有一种做法，可以考虑生成函数：

还有一种做法，可以考虑生成函数：

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{m}x^m\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^m\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(1+x)^k\\
&=(-1-x+1)^n=(-x)^n
\end{aligned}$$

还有一种做法，可以考虑生成函数：

$$\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{m}x^m$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^m$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(1+x)^k$$
$$=(-1-x+1)^n=(-x)^n$$

于是上式的 x^m 项系数为

$$[x^m](-x)^n=[m=n](-1)^n$$

例题

《具体数学》的例题

$$\sum_{k}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1},\quad n\in\mathbb{N}$$

例题

《具体数学》的例题

$$\sum_k \binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_k \binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_k \binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$= \sum_k \binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}\frac{(-1)^k}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_k \binom{-n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\binom{0}{n} = [n=0]$$

《具体数学》的例题

$$\sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

《具体数学》的例题

$$\sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

利用式 (5.26) 尝试反向使用范德蒙德卷积:

$$\begin{aligned}
&=\sum_k \binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}\sum_{0\le j\le n+k-1}\binom{n+k-1-j}{2k}\binom{j}{m-1}\\
&=\sum_{j\ge 0}\binom{j}{m-1}\sum_{k\ge j-n+1}\binom{n+k-1-j}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}\\
&=\sum_{j\ge 0<n}\binom{j}{m-1}\sum_{k\ge 0}\binom{n+k-1-j}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}\\
&=\sum_{0\le j<n}\binom{j}{m-1}[n-1-j=0]=\binom{n-1}{m-1}
\end{aligned}$$

例题

~~终于到 OI 题了~~

[SDOI2016] 排列计数

求有多少种 $1 \sim n$ 的排列 a，满足恰有 m 个位置 i 使得 $a_i = i$。答案对 $10^9 + 7$ 取模。
$1 \leq T \leq 5 \times 10^5$，$1 \leq n \leq 10^6$，$0 \leq m \leq 10^6$。

例题

~~终于到 OI 题了~~

[SDOI2016] 排列计数

求有多少种 $1 \sim n$ 的排列 a，满足恰有 m 个位置 i 使得 $a_i = i$。答案对 $10^9 + 7$ 取模。
$1 \leq T \leq 5 \times 10^5$，$1 \leq n \leq 10^6$，$0 \leq m \leq 10^6$。

记 n 个元素的错排为 d_n，那么原式就等于 $\binom{n}{m} d_{n-m}$，考虑快速计算 d。

一种做法是直接容斥：

$$d_n = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{0 \le k \le n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

一种做法是直接容斥：

$$d_n = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{0 \le k \le n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

另一种做法是考虑递推，考虑 n 所在的环的大小：

- 大小为 2，那么剩下的所有是一个 $n-2$ 的错排，方案数为 $(n-1)d_{n-2}$
- 大小 >2，那么插入 n 之前就已经是一个错排了，枚举插入位置，方案数为 $(n-1)d_{n-1}$

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$$

例题

[六省联考 2017] 组合数问题

求

$$\sum_{i \bmod k = r} \binom{nk}{i} \bmod p$$

$1 \le n \le 10^9, 0 \le r < k \le 1000, 2 \le p \le 2^{30} - 1$

例题

[六省联考 2017] 组合数问题

求

$$\sum_{i \bmod k = r} \binom{nk}{i} \bmod p$$

$1 \le n \le 10^9, 0 \le r < k \le 1000, 2 \le p \le 2^{30} - 1$

$$= \sum_{i \bmod k = r} [x^i](1+x)^{nk}$$

$$= [x^r]\left((1+x)^{nk} \bmod (x^k - 1)\right)$$

循环卷积快速幂即可，复杂度 $O(k^2 \log nk)$

例题

[HAOI2018] 苹果树

一棵二叉树，初始只有一个根节点。每次随机在可能的位置接上一个节点来产生一个 n 个节点的二叉树，设树上节点两两距离之和的期望为 E，求 $n!\cdot E$ 在 $\bmod P$ 意义下的值。

$n\le 2000, P\le 10^9+7$

例题

[HAOI2018] 苹果树

一棵二叉树，初始只有一个根节点。每次随机在可能的位置接上一个节点来产生一个 n 个节点的二叉树，设树上节点两两距离之和的期望为 E，求 $n! \cdot E$ 在 $\bmod P$ 意义下的值。
$n \le 2000, P \le 10^9 + 7$

做法很多，这里随便讲一种。
每次操作之后会减少一个剩余位置，增加两个剩余位置，这样能生成的树的总数为 $2 \times 3 \times \cdots \times n = n!$，于是答案为所有树的节点两两距离之和。

对于一个节点 i （$i \geq 2$），(i, father_i) 这条边的贡献是 $size_i(n - size_i)$。那么枚举 $size_i$，我们要求 i 的子树大小为 $size_i$ 的树的数量。

- $1 \sim i$ 这些点随便连，方案数是 $i!$
- 从剩下的 $n - i$ 个节点里选出 $size_i - 1$ 个放进 i 的子树，选点方案 $\binom{n-i}{size_i - 1}$，子树内方案数 $(size_i)!$
- 剩下的点要放到 i 子树外面，方案数是 $(i-1)i(i+1)\cdots(n - size_i - 1) = \frac{(n-size_i-1)!}{(i-2)!}$

最终答案为

$$
\sum_{i=2}^{n} \sum_{size_i=1}^{n-i+1} size_i(n - size_i) \cdot i! \cdot \binom{n-i}{size_i - 1} (size_i)! \frac{(n - size_i - 1)!}{(i-2)!}
$$

$$
= \sum_{i=2}^{n} \sum_{size_i=1}^{n-i+1} size_i(n - size_i) \cdot \binom{n-i}{size_i - 1} (size_i)!(n - size_i - 1)!i(i-1)
$$

例题

[ZJOI2015] 地震后的幻想乡

给定一张 n 个点 m 条边的图，边的边权是 $[0,1]$ 之间均匀分布的随机实数，且相互独立。求最小生成树的最大边权的期望值。
结果保留 6 为小数。
$n \le 10, m \le \frac{n(n-1)}{2}$
提示（原题给的提示）：对于 n 个 $[0,1]$ 之间的随机变量 $x_1,\cdots,x_n$，第 k 小值的期望值是 $\frac{k}{n+1}$。

例题

[ZJOI2015] 地震后的幻想乡

给定一张 n 个点 m 条边的图，边的边权是 $[0,1]$ 之间均匀分布的随机实数，且相互独立。求最小生成树的最大边权的期望值。
结果保留 6 为小数。
$n \le 10, m \le \frac{n(n-1)}{2}$
提示（原题给的提示）：对于 n 个 $[0,1]$ 之间的随机变量 $x_1, \cdots, x_n$，第 k 小值的期望值是 $\frac{k}{n+1}$。

首先有一个暴力做法，枚举边权的相对大小，然后做最小生成树，kruskal 算出最小生成树最大边权的排名，然后根据提示得出此时的最大边权的期望。
这个想法启发我们钦定一个边集 S 和一条边 e，S 为前 $|S|$ 小的所有边，e 为第 $|S|+1$ 小的边。如果加入 S 后图未连通，加入 e 后**恰好**使图联通，那么此时最小生成树的期望就是 $\frac{|S|+1}{m+1}$。S 恰好是前 $|S|$ 小且 e 恰好是第 $|S|+1$ 小的概率是 $\frac{1}{\binom{m}{|S|+1}\cdot(|S|+1)}$

于是我们统计这样的 (S, e) 的数量。恰好联通这个条件并不好统计，我们转换一下，可以变成加之前不连通的边集数 $-$ 加之后不连通的边集数。
令 $f_{S,i}, g_{S,i}$ 分别表示点集为 S，边集大小为 i，且点集不连通/连通的边集数量，令 d_S 表示点集 S 的导出子图的边数，则

$$g_{S,i} + f_{S,i} = \binom{d_S}{i}$$

考虑 f 的转移，对于一个 S，任取 S 中的一个点 k，枚举 k 所在的连通块 T

$$f_{S,i} = \sum_{k \in T \subsetneq S} \sum_{j} g_{T,j} \binom{d_{S \setminus T}}{i-j}$$

最后考虑如何统计答案，令点集的全集为 U，考虑加入第 k 条边时恰好连通的二元组 (S, e)，$|S| + 1 = k$，这样的二元组数量是

$$(m - k + 1)f_{U,k-1} - kf_{U,k}$$

于是最终答案为

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m+1} \cdot \frac{1}{\binom{m}{k} \cdot k}((m - k + 1)f_{U,k-1} - kf_{U,k})$$

化简可得一个更简单的表达式为

$$\frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m} \frac{f_{U,k}}{\binom{m}{k}}$$

例题

某联考题

给定序列 a，每次询问给出 $[l, r]$ 和 k。
回答：在序列 a 中值在 $[l, r]$ 内的数所有数中随机选择 k 个，最大值的期望 $\bmod 998244353$，不足 k 个输出 -1。
$n, \sum k \le 10^5, a_i \le 10^8$

例题

某联考题

给定序列 a，每次询问给出 $[l, r]$ 和 k。
回答：在序列 a 中值在 $[l, r]$ 内的数所有数中随机选择 k 个，最大值的期望 $\bmod 998244353$，不足 k 个输出 -1。
$n, \sum k \le 10^5, a_i \le 10^8$

排序后把值域 $[l, r]$ 换成序列上的区间 $[l, r]$，答案为

$$\sum_{i=l+k-1}^{r} \binom{i-l}{k-1} a_i$$

根据范德蒙德卷积

$$
\begin{aligned}
ans &= \sum_{i=l+k-1}^{r} a_i \sum_{j=0}^{k-1} \binom{i}{j} \binom{-l}{k-j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{-l}{k-j-1} \sum_{i=l+k-1}^{r} a_i \binom{i}{j}
\end{aligned}
$$

前面的组合数使用上指标反转即可。

根据范德蒙德卷积

$$\begin{aligned} ans &= \sum_{i=l+k-1}^{r} a_i \sum_{j=0}^{k-1} \binom{i}{j} \binom{-l}{k-j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{-l}{k-j-1} \sum_{i=l+k-1}^{r} a_i \binom{i}{j} \end{aligned}$$

前面的组合数使用上指标反转即可。
因为限制了 $\sum k$，考虑根号分治

- $< B$ 的部分，对 $\sqrt{B}$ 个 j，预处理出 $a_i\binom{i}{j}$ 的前缀和，询问的时候枚举 j 即可，复杂度 $O(Bn + \sum k)$
- $\geq B$ 的部分，$O(n)$ 暴力即可

$B = \sqrt{n}$ 有最优复杂度，总复杂度 $O(n\sqrt{n})$。

Lucas 定理

Lucas 定理可以用来求大组合数对小模数取模的结果

Lucas 定理

对于质数 p，

$$\binom{n}{m} \bmod p = \binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor m/p \rfloor} \cdot \binom{n \bmod p}{m \bmod p} \bmod p$$

Lucas 定理的证明

引理 1

$$\binom{p}{n} \bmod p = [n = 0 \lor n = p]$$

证明. $\binom{p}{n} = \frac{p!}{n!(p-n)!}$，分子中 p 的次数为 1，若 $\binom{p}{n} \not\equiv 0 \pmod p$，则 $n = p$ 或 $p - n = p$，此时 $n = 0$ 或 p，$\binom{p}{n} \bmod p = 1$。

Lucas 定理的证明

引理 1

$$\binom{p}{n} \bmod p = [n = 0 \lor n = p]$$

证明. $\binom{p}{n} = \frac{p!}{n!(p-n)!}$，分子中 p 的次数为 1，若 $\binom{p}{n} \not\equiv 0 \pmod p$，则 $n = p$ 或 $p - n = p$，此时 $n = 0$ 或 p，$\binom{p}{n} \bmod p = 1$。

引理 2

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$$

证明.

$$\begin{aligned}(a+b)^p &\equiv \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} a^n b^{p-n} \pmod p \\ &\equiv a^p + b^p \pmod p\end{aligned}$$

Lucas 定理的证明

$\binom{n}{m} \bmod p$ 为 $(1+x)^n \bmod p$ 的 x^m 项系数，

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n \bmod p &= (1+x)^{p\lfloor n/p \rfloor}(1+x)^{n \bmod p} \bmod p \\
&= (1+x^p)^{\lfloor n/p \rfloor}(1+x)^{n \bmod p} \bmod p
\end{aligned}
$$

$(1+x^p)^{\lfloor n/p \rfloor}$ 中的项的次数都是 p 的整倍数，$(1+x)^{n \bmod p}$ 中的项的次数都 $< p$。把 m 拆成 $p\lfloor m/p \rfloor + m \bmod p$，那么 $p\lfloor m/p \rfloor$ 项系数由 $(1+x^p)^{\lfloor n/p \rfloor}$ 贡献，为 $\binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor m/p \rfloor}$；$m \bmod p$ 项系数由 $(1+x)^{n \bmod p}$ 贡献，为 $\binom{n \bmod p}{m \bmod p}$。

于是就得到 Lucas 定理

$$
\binom{n}{m} \bmod p = \binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor m/p \rfloor} \cdot \binom{n \bmod p}{m \bmod p} \bmod p
$$

□

扩展 Lucas 定理

Lucas 定理要求模数必须是质数，如果模数不是质数怎么办。

问题

求

$$\binom{n}{m} \bmod M$$

其中 $M \leq 10^6$ 有质因数分解

$$M = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

扩展 Lucas 定理

Lucas 定理要求模数必须是质数，如果模数不是质数怎么办。

问题

求

$$\binom{n}{m} \bmod M$$

其中 $M \leq 10^6$ 有质因数分解

$$M = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

首先按照 M 的因式分解转化成求 $\binom{n}{m} \bmod p^{\alpha}$，最后 CRT 合并即可。于是现在问题转化成求

$$\binom{n}{m} \bmod p^{\alpha} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \bmod p^{\alpha}$$

其中 p 是质数。

问题在于分母中可能含有 p 这个因子，无法直接求逆，考虑把分子分母中的 p 因子全部提出来。
设 $n!, m!, (n-m)!$ 中 p 因子的次数分别为 x, y, z（这是好求的），我们只需要求

$$\frac{\frac{n!}{p^x}}{\frac{m!}{p^y}\frac{(n-m)!}{p^z}}p^{x-y-z} \bmod p^\alpha$$

现在分母可以 exgcd 求逆了，我们只需要求形如下面这样的式子

$$\frac{n!}{p^x} \bmod p^\alpha$$

即 $n!$ 中去除 p 因子后 $\bmod p^\alpha$ 的结果。

将 $n!$ 中的元素分成两个部分：

- p 的倍数，这一部分的积为 $p^{\lfloor n/p \rfloor}(\lfloor n/p \rfloor)!$
- 非 p 的倍数，这一部分又可以按照 $\bmod p^{\alpha}$ 的循环节和余项两部分

所以有：

$$n! = q^{\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor} \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right)! \cdot \left(\prod_{i,(i,q)=1}^{q^{\alpha}} i \right)^{\left\lfloor \frac{n}{q^{\alpha}} \right\rfloor} \cdot \left(\prod_{i,(i,q)=1}^{n \bmod q^{\alpha}} i \right)$$

于是：

$$\frac{n!}{q^{\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor}} = \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right)! \cdot \left(\prod_{i,(i,q)=1}^{q^{\alpha}} i \right)^{\left\lfloor \frac{n}{q^{\alpha}} \right\rfloor} \cdot \left(\prod_{i,(i,q)=1}^{n \bmod q^{\alpha}} i \right)$$

循环节内的乘积需要暴力求；$\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right)!$ 可以递归求解。

将 $n!$ 中的元素分成两个部分：

- p 的倍数，这一部分的积为 $p^{\lfloor n/p \rfloor}(\lfloor n/p \rfloor)!$
- 非 p 的倍数，这一部分又可以按照 $\bmod p^{\alpha}$ 的循环节和余项两部分

所以有：

$$n! = q^{\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor} \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right)! \cdot \left(\prod_{i,(i,q)=1}^{q^{\alpha}} i \right)^{\left\lfloor \frac{n}{q^{\alpha}} \right\rfloor} \cdot \left(\prod_{i,(i,q)=1}^{n \bmod q^{\alpha}} i \right)$$

于是：

$$\frac{n!}{q^{\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor}} = \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right)! \cdot \left(\prod_{i,(i,q)=1}^{q^{\alpha}} i \right)^{\left\lfloor \frac{n}{q^{\alpha}} \right\rfloor} \cdot \left(\prod_{i,(i,q)=1}^{n \bmod q^{\alpha}} i \right)$$

循环节内的乘积需要暴力求；$\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right)!$ 可以递归求解。

思考题

如果我要求的是一个 $\binom{n}{m} \bmod 10^{18}$ 怎么办。

经典题

[SDOI2010] 古代猪文

给定 n, g，求

$$g^{\sum_{d|n}\binom{n}{d}} \bmod 999911659$$

$1 \le n, g \le 10^9$

经典题

[SDOI2010] 古代猪文

给定 n, g，求

$$g^{\sum_{d|n}\binom{n}{d}} \bmod 999911659$$

$1 \le n, g \le 10^9$

999911659 是质数，由费马小定理，我们只需求

$$\sum_{d|n}\binom{n}{d} \bmod 999911658$$

将 999911658 分解质因数为 $2 \times 3 \times 4679 \times 35617$，做 exLucas 即可。

例题

[SHOI2015] 超能粒子炮·改

给定 n, m，求

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k} \bmod 2333$$

$m \leq n \leq 10^9$

将 k 按照 $\lfloor \frac{k}{p} \rfloor$ 分类

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \sum_{i=0}^{\lfloor m/p\rfloor-1}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{n}{ip+j} + \sum_{k=p\lfloor m/p\rfloor}^{m}\binom{n}{k} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor m/p\rfloor-1}\binom{\lfloor n/p\rfloor}{i}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{n \bmod p}{j} + \sum_{k=p\lfloor m/p\rfloor}^{m}\binom{n}{k} \\
&= 2^{n \bmod p}\sum_{i=0}^{\lfloor m/p\rfloor-1}\binom{\lfloor n/p\rfloor}{i} + \sum_{k=p\lfloor m/p\rfloor}^{m}\binom{n}{k}
\end{aligned}
$$

前面一项可以递归求，后面的余项可以 $O(p)$ 暴力。复杂度 $O(p\log m)$。

例题

[AHOI2017/HNOI2017] 抛硬币

给定 a, b, k，求满足下列条件的 01 串二元组 (s, t) 的数量

- $|s| = a, |t| = b$
- s 中 1 的数量严格大于 t 中 1 的数量

答案对 10^k 取模。

$1 \le a, b \le 10^{15}, b \le a \le b + 10^4, 1 \le k \le 9$

例题

[AHOI2017/HNOI2017] 抛硬币

给定 a, b, k，求满足下列条件的 01 串二元组 (s, t) 的数量

- $|s| = a, |t| = b$
- s 中 1 的数量严格大于 t 中 1 的数量

答案对 10^k 取模。
$1 \le a, b \le 10^{15}, b \le a \le b + 10^4, 1 \le k \le 9$

即求

$$\sum_{i=0}^{a} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{a}{i} \binom{b}{j}$$

例题

$$\text{原式} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=0}^{a-i}\binom{a}{i+j}\binom{b}{j} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=0}^{b}\binom{a}{i+j}\binom{b}{b-j}$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\binom{a+b}{b+i} = \sum_{i=b+1}^{a+b}\binom{a+b}{i}$$

范德蒙德卷积

$$\text{原式} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=0}^{a-i}\binom{a}{i+j}\binom{b}{j} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=0}^{b}\binom{a}{i+j}\binom{b}{b-j}$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\binom{a+b}{b+i} = \sum_{i=b+1}^{a+b}\binom{a+b}{i} \qquad \text{范德蒙德卷积}$$

$$= \sum_{i=b+1}^{\lceil\frac{a+b}{2}\rceil-1}\binom{a+b}{i} + \sum_{\lceil\frac{a+b}{2}\rceil}^{a+b}\binom{a+b}{i}$$

前者只有 $\frac{a-b}{2}$ 项，可以每一项都 exLucas 求。后者是 $\sum_{i=0}^{a+b}\binom{a+b}{i} = 2^{a+b}$ 的一半 (如果 $a+b$ 是偶数的话还要减去一个 $\binom{a+b}{(a+b)/2}$)。

卡特兰数

Catalan 数列 H_n 是以下问题的方案数：

1. 有一个大小为 $n \times n$ 的方格图，左下角为 $(0,0)$ 右上角为 (n,n)，从左下角开始每次都只能向右或者向上走一单位，不走到对角线 $y=x$ 上方（但可以触碰）的情况下到达右上角有多少可能的路径?
2. 在圆上选择 $2n$ 个点，将这些点成对连接起来使得所得到的 n 条线段不相交的方法数?
3. 一个栈的进栈序列为 $1,2,3,\cdots,n$ 有多少个不同的出栈序列?
4. n 个结点可构造多少个不同的二叉树?
5. n 对括号能组成的括号序列数?
6. ......

卡特兰数

Catalan 数列 H_n 是以下问题的方案数：

1. 有一个大小为 $n \times n$ 的方格图，左下角为 $(0,0)$ 右上角为 (n,n)，从左下角开始每次都只能向右或者向上走一单位，不走到对角线 $y=x$ 上方（但可以触碰）的情况下到达右上角有多少可能的路径？
2. 在圆上选择 $2n$ 个点，将这些点成对连接起来使得所得到的 n 条线段不相交的方法数？
3. 一个栈的进栈序列为 $1,2,3,\cdots,n$ 有多少个不同的出栈序列？
4. n 个结点可构造多少个不同的二叉树？
5. n 对括号能组成的括号序列数？
6. ......

众所周知，卡特兰数有以下两个表达式

$$
\begin{aligned}
H_n &= \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} H_i H_{n-i-1} & (n \geq 2) \\ 1 & (n=0,1) \end{cases} \\
&= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}
\end{aligned}
$$

卡特兰数的通项公式

卡特兰数的通项公式

$$H_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

由此还可以得到一个递推式

$$H_n = \frac{H_{n-1}(4n-2)}{n+1}$$

卡特兰数通项公式的证明

$$H_n=\sum_{i=0}^{n-1}H_iH_{n-i-1}\quad(n\geq 2)$$

其中 $H_0=1,H_1=1$。设它的普通生成函数为 $H(x)$，利用卷积，得到它的一个方程。

$$\begin{aligned}H(x)&=\sum_{n\geq 0}H_nx^n\\&=1+\sum_{n\geq 1}\sum_{i=0}^{n-1}H_ix^iH_{n-i-1}x^{n-i-1}x\\&=1+x\sum_{i\geq 0}H_ix^i\sum_{n\geq 0}H_nx^n\\&=1+xH^2(x)\end{aligned}$$

解得

$$H(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$$

那么这就产生了一个问题：我们应该取哪一个根呢？我们将其分子有理化：

$$H(x) = \frac{2}{1 \mp \sqrt{1-4x}}$$

代入 $x = 0$，我们得到的是 $H(x)$ 的常数项，也就是 H_0。当 $H(x) = \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}}$ 的时候有 $H(0) = 1$，满足要求。而另一个解会出现分母为 0 的情况（不收敛），舍弃。
因此我们得到了卡特兰数生成函数的封闭形式：

$$H(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

接下来我们要将其展开。使用牛顿二项式定理。

$$
\begin{aligned}
(1-4x)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n \\
&= 1+\sum_{n\geq 1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\underline{n}}}{n!}(-4x)^n
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^{\underline{n}} &= \frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\,\frac{-3}{2}\cdots\frac{-(2n-3)}{2} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^n(2n-2)!!} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}
\end{aligned}
$$

于是

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}(-4x)^n$$
$$= 1 - \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} 2x^n = 1 - \sum_{n\geq 1} \binom{2n-1}{n} \frac{1}{(2n-1)} 2x^n$$

带回原式得到

$$H(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x} \sum_{n\geq 1} \binom{2n-1}{n} \frac{1}{(2n-1)} 2x^n$$
$$= \sum_{n\geq 1} \binom{2n-1}{n} \frac{1}{(2n-1)} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \binom{2n+1}{n+1} \frac{1}{(2n+1)} x^n$$
$$= \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} x^n$$

这样我们就得到了卡特兰数的通项公式。

$\binom{2n}{n}$ 的生成函数

- 利用 $H_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}$ 的生成函数是 $H(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$，求 $\binom{2n}{n}$ 的生成函数。

$\binom{2n}{n}$ 的生成函数

- 利用 $H_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}$ 的生成函数是 $H(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$，求 $\binom{2n}{n}$ 的生成函数。

$$Q(x) = \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}x^n = (x\cdot H)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

例题

[THUSC2021] 种树

这是一道**通信题**

给你一棵 n 个点的树，你需要完成一个编码器和解码器。

编码器需要返回一个 128 位二进制数，用于表示这棵树。解码器需要根据编码器返回的 128 位二进制数还原这棵树（还原出一棵同构的树即可）。两棵树同构当且仅当它们在节点无标号、考虑孩子顺序的意义下相同。

$n \leq 70, T \leq 10^5$

例题

[THUSC2021] 种树

这是一道**通信题**
给你一棵 n 个点的树，你需要完成一个编码器和解码器。
编码器需要返回一个 128 位二进制数，用于表示这棵树。解码器需要根据编码器返回的 128 位二进制数还原这棵树（还原出一棵同构的树即可）。两棵树同构当且仅当它们在节点无标号、考虑孩子顺序的意义下相同。
$n \leq 70, T \leq 10^5$

可以先考虑 $n \leq 65$。

例题

[THUSC2021] 种树

这是一道**通信题**
给你一棵 n 个点的树，你需要完成一个编码器和解码器。
编码器需要返回一个 128 位二进制数，用于表示这棵树。解码器需要根据编码器返回的 128 位二进制数还原这棵树（还原出一棵同构的树即可）。两棵树同构当且仅当它们在节点无标号、考虑孩子顺序的意义下相同。
$n \leq 70, T \leq 10^5$

可以先考虑 $n \leq 65$。
递归地表示这棵树：如果往儿子走，则当前位填 1，往父亲走填 0。还原时也递归地还原这棵树即可。然后因为 1 一定往儿子走，不会往父亲走，前后两位可以去掉，可以将长度控制在 $2n-2$ 以内。

上述过程是一个括号匹配的过程，填 1 则为左括号，填 0 为右括号。
而我们有可以省去最靠前的一个 (和最靠后的一个)，这样的合法括号序列个数为 $Catalan(n-1)$ 个。
而 $Catalan(69)$ 刚好比 $2^{128}-1$ 小，也就是我们现在要将一个括号序列与一个数字一一对应。

上述过程是一个括号匹配的过程，填 1 则为左括号，填 0 为右括号。
而我们有可以省去最靠前的一个 (和最靠后的一个)，这样的合法括号序列个数为 $Catalan(n-1)$ 个。
而 $Catalan(69)$ 刚好比 $2^{128}-1$ 小，也就是我们现在要将一个括号序列与一个数字一一对应。
我们计算这个括号序列的字典序是所有合法括号序列的第几项，也就是对于每一个填 1 的位，求出这一位填 0，前面所有位都一样的合法括号序列数，可以用组合数计算。这样我们就完成了编码。
解码时就是上述过程的逆过程。如果当前位填 0 之后，合法括号序列的个数小于我们所需的，那么这一位必须填 1，否则必须填 0。这样我们完成了解码。

例题

某联考题

给定一个长度为 n 的括号序列 c（不一定合法，但左括号和右括号数量相同）
定义一个 $1, 2, \cdots, n$ 的排列 p 是好的，当且仅当括号序列 $d(\forall i \in [1, n], d_i = c_{p_i})$ 是合法的括号序列，定义 c 的价值为所有好的排列的逆序数总和。
c 并不稳定，会发生 q 次改变，具体来说，c 中的某两个元素会发生交换。（改变是永久的）
你需要对一开始的 c 和每次改变后的 c 分别求出它的价值对输入的质数 P 取模的结果。
$n \leq 10^7, q \leq 10^5$

记 $m=\frac{n}{2}$，一个排列将原序列 c 映射为一个合法括号序列 d。
以下四种映射的其中之一会造成 1 的贡献（颜色用于表示相对顺序）

- 子序列 $((\rightarrow (($
- 子序列 $)) \rightarrow))$
- 子序列 $() \rightarrow)($
- 子序列 $)(\rightarrow ()$

记原序列中（(，))，()，)(子序列的个数分别为 a_0, a_1, a_2, a_3，对于每个（(，))，()，)(子序列，分别有 b_0, b_1, b_2, b_3 个排列的映射（对于不同位置的子序列，这个排列的数量应当是相同的）会造成 1 的贡献，那么最终答案为

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

记 $m=\frac{n}{2}$，一个排列将原序列 c 映射为一个合法括号序列 d。
以下四种映射的其中之一会造成 1 的贡献（颜色用于表示相对顺序）

- 子序列 $((\to (($
- 子序列 $)) \to))$
- 子序列 $() \to)($
- 子序列 $)(\to ()$

记原序列中 ((，))，()，)(子序列的个数分别为 a_0,a_1,a_2,a_3，对于每个 ((，))，()，)(子序列，分别有 b_0,b_1,b_2,b_3 个排列的映射（对于不同位置的子序列，这个排列的数量应当是相同的）会造成 1 的贡献，那么最终答案为

$$a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

其中 a_0,a_1,a_2,a_3 是好维护的：
现在考虑交换两个位置

- 如果这两个位置的字符一样，显然对答案没有变化
- 否则 a_2,a_3 的变化量为 $\pm(r-l)$

b_0,b_1,b_2,b_3 应该是只与 n 有关的常数，我们下面考虑求出 b_0,b_1,b_2,b_3。

- 求 b_0, b_1

二者的值是相同的，所以就求 b_0 即可。
对于所有 $Catalan(m)$ 个括号序列，这些序列里都有 $\frac{m(m-1)}{2}$ 个 ((子序列。在这 $\frac{m(m-1)}{2}$ 个 ((子序列中任选一个与原序列的 ((匹配。因为我们要求产生贡献必须交换相对位置，所以这两个位置的映射方式就固定了。
剩下 $m-2$ 个（和 m 个）的映射方式是任意的，方案数为 $(m-2)! \cdot m!$。
总方案数为

$$b_0 = b_1 = Catalan(m) \cdot \frac{m(m-1)}{2} \cdot (m-2)! \cdot m! = \frac{1}{2} Catalan(m)(m!)^2$$

- 求 b_2, b_3

对于所有 $Catalan(m)$ 个括号序列，只要这个序列中有一个)(子序列，这个子序列和原序列的 () 对应上就会产生 1 的贡献，此时剩下的位置的映射方式是任意的，方案数为 $((m-1)!)^2$，即

$$b_2 = \left(\sum_{\text{无标号括号序列}d} d\text{ 中)(子序列数量} \right) ((m-1)!)^2$$

同理，

$$b_3 = \left(\sum_{\text{无标号括号序列}d} d\text{ 中 () 子序列数量} \right) ((m-1)!)^2$$

一个括号序列中 () 和)(子序列的数量之和是 m^2 个，于是两式相加得

$$b_2 + b_3 = Catalan(m)m^2((m-1)!)^2 = Catalen(m)(m!)^2$$

于是只需求出 b_2 即可求出 b_3。

考虑求所有合法无标号括号序列中)(子序列的数量。如果两对括号相离，则贡献为 1，否则没有贡献。
直接做不好做，容斥一下，转为求两对括号相包含的贡献为 1。枚举这一对括号包含了 i 对括号，包含的括号内部可以随意排列（$Catalan(i)$），剩下的也可以随便排列（$Catalan(m-i-1)$），然后将自己和自己包含的括号随便插入另外 $m-i-1$ 个括号构成的括号序列中，共 $2(m-i-1)+1$ 个空。于是，相互包含的括号对数为

$$\sum_{i=1}^{m-1}(2(m-i-1)+1)iCatalan(i)Catalan(m-i-1)$$

而在所有括号序列中任选两对匹配括号的方案是 $Catalan(m)\times\frac{m(m-1)}{2}$，所以)(子序列出现的次数是

$$Catalan(m)\times\frac{m(m-1)}{2}-\sum_{i=1}^{m-1}(2(m-i-1)+1)iCatalan(i)Catalan(m-i-1)$$

这个数再乘上 $((m-1)!)^2$ 就是 b_2。用 $Catalen(m)(m!)^2-b_2$ 就是 b_3。
总复杂度 $O(n+q)$。

容斥

记 f_n 表示恰好使用 n 个不同元素形成特定结构的方案数，g_n 表示从 n 个不同元素中选出若干个元素形成特定结构的总方案数。
若已知 f_n 求 g_n，那么显然有：

$$g_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i$$

若已知 g_n 求 f_n，使用容斥，我们得到：

$$f_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} g_i$$

二项式反演

上面容斥的式子本质上就是二项式反演

二项式反演

$$g_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i \iff f_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} g_i$$

它还有一个等价形式

二项式反演的一个等价形式

$$g_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f_i \iff f_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i g_i$$

二项式反演的证明

我们只证明 $g_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i \implies f_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} g_i$，另一边是同样的。

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} g_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} f_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{j} (-1)^{n-i}$$

二项式反演的证明

我们只证明 $g_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f_i \implies f_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}g_i$，另一边是同样的。

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}g_i &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}f_j \\
&= \sum_{j=0}^{n}f_j\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i} \\
&= \sum_{j=0}^{n}f_j\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{n-i} && \text{三项式版恒等式} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f_j\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^{n-j-k} && \text{令}k=i-j \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f_j[n-j=0]=f_n && \text{二项式定理}
\end{aligned}$$

□

矩阵形式

如果把 $f_0, f_1, \cdots, f_n$ 和 $g_0,, g_1, \cdots, g_n$ 写成列向量，则二项式反演可以写为

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \iff$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n\binom{n}{0} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

刚才给出的证明等价于证明 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$。

将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 转置之后得到的矩阵仍然是互逆的，所以，我们还可以得到二项式反演的另一个形式

二项式反演的另一个形式

$$g_m=\sum_{i=m}^{n}\binom{i}{m}f_i \Longleftrightarrow f_m=\sum_{i=m}^{n}(-1)^{i-m}\binom{i}{m}g_i$$

从组合意义来说，前面的形式中，g_m 表示“至多” m 个的方案数，而在这种形式中，g_m 表示“至少” m 个的方案数。
二项式反演最常见的转化，就是将“恰好”转化为“至多”或者“至少”，再二项式反演回来。

例题

洛谷 P10596 BZOJ2839 集合计数

一个有 n 个元素的集合有 2^n 个不同子集（包含空集），现在要在这 2^n 个集合中取出若干集合（至少一个），使得它们的交集的元素个数恰好为 k，求取法的方案数，答案模 10^9+7。

$1 \le n \le 10^6$，$0 \le k \le n$。

例题

洛谷 P10596 BZOJ2839 集合计数

一个有 n 个元素的集合有 2^n 个不同子集（包含空集），现在要在这 2^n 个集合中取出若干集合（至少一个），使得它们的交集的元素个数恰好为 k，求取法的方案数，答案模 10^9+7。
$1 \le n \le 10^6$，$0 \le k \le n$。

令 f_k 表示交集个数"**至少**"是 k 的方案数。那么我们先在 n 个元素中选 k 个作为交集的部分。包含这 k 的元素的集合有 2^{n-k} 个，在这些集合中任选至少一个，方案数为 $2^{2^{n-k}}-1$，则

$$f_k = \binom{n}{k}(2^{2^{n-k}}-1)$$

注意，这里"至少 k 个"的含义是，钦定了满足性质的 k 个元素，剩下的性质不作限制。也就是说，一个实际上交集大小为 m 的方案，它在 f_k 中被计数了 $\binom{m}{k}$ 次。

设 g_k 表示交集个数**恰好**是 k 的方案数。枚举实际的交集大小 i，在这 i 个元素里面任选 k 个作为满足 f_k 限制的那 k 个元素，我们有关系式

$$f_k = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} g_i$$

设 g_k 表示交集个数**恰好**是 k 的方案数。枚举实际的交集大小 i，在这 i 个元素里面任选 k 个作为满足 f_k 限制的那 k 个元素，我们有关系式

$$f_k = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} g_i$$

由二项式反演

$$g_k = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} f_i = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \binom{n}{i} (2^{2^{n-i}} - 1)$$

复杂度 $O(n)$。

例题

洛谷 P4859 已经没有什么好害怕的了

给定 n 个 A 类物品与 n 个 B 类物品，每个物品具有一个权值，将 A 类物品与 B 类物品两两配对，使得 A 物品权值 $>$ B 物品的组恰好有 k 个。求配对方案数 $\bmod 10^9+9$。
所有权值互不相同。$n \leq 2000$

例题

洛谷 P4859 已经没有什么好害怕的了

给定 n 个 A 类物品与 n 个 B 类物品，每个物品具有一个权值，将 A 类物品与 B 类物品两两配对，使得 A 物品权值 $>B$ 物品的组恰好有 k 个。求配对方案数 $\bmod 10^9+9$。
所有权值互不相同。$n \le 2000$

题目的要求是恰好 k 个，比较难求，但我们可以先钦定 k 组，让这 k 组满足 $A>B$，其余组随便选择，求出答案后二项式反演回来。
考虑 $f_{i,j}$ 表示已经配对了前 i 个 A，钦定了 j 组满足 $A>B$，剩下的不管，将 A 从小到大排序, 那么得到转移方程：

$$f_{i,j}=f_{i-1,j}+f_{i-1,j-1}(d_i-(j-1))$$

其中 d_i 表示 $<a_i$ 的 b 的数量。那么此时我们得到 $g_i=(n-i)!f_{n,i}$，表示钦定了 i 组 $A>B$ 的方案数
于是直接用上面的柿子反演回来即可。复杂度 $O(n^2)$。

例题

洛谷 P6295 有标号 DAG 计数

求 n 个点的有标号弱连通 DAG 数量 $\bmod 998244353$。
$n, T \leq 10^5$

例题

洛谷 P6295 有标号 DAG 计数

求 n 个点的有标号弱连通 DAG 数量 $\bmod 998244353$。
$n, T \le 10^5$

$\exp$ 组合意义为：有标号对象组成的集合个数。设 n 个点的有标号 DAG（不一定弱连通）数量的生成函数为 $G(x)$，n 个点的有标号弱连通 DAG 数量的生成函数为 $F(x)$，则

$$G(x) = \exp(F(x)) \implies F(x) = \ln G(x)$$

我们要求的是 $F(x)$，所以只需求出 $G(x)$ 再取 $\ln$ 即可。

例题

设 g_i 表示 i 个点的有标号 DAG 数量，即 $G(x)$ 是 g_i 的生成函数。
令 $h_{i,j}$ 表示 i 个点的图，钦定其中 j 个点并让这 j 个点入度为 0 的方案数（类似于之前的"至少 j 个"）；令 $c_{i,j}$ 表示 i 个点的图恰好有 j 个点入度为 0 的方案数，则有二项式反演：

$$h_{i,j} = \sum_{k=j}^{i} \binom{k}{j} c_{i,k} \iff c_{i,j} = \sum_{k=j}^{i} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} h_{i,k}$$

设 g_i 表示 i 个点的有标号 DAG 数量，即 $G(x)$ 是 g_i 的生成函数。
令 $h_{i,j}$ 表示 i 个点的图，钦定其中 j 个点并让这 j 个点入度为 0 的方案数（类似于之前的 "至少 j 个"）；令 $c_{i,j}$ 表示 i 个点的图恰好有 j 个点入度为 0 的方案数，则有二项式反演：

$$h_{i,j} = \sum_{k=j}^{i} \binom{k}{j} c_{i,k} \iff c_{i,j} = \sum_{k=j}^{i} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} h_{i,k}$$

同时我们还有

$$h_{i,j} = \binom{i}{j} 2^{j(i-j)} g_{i-j}$$

$$g_i = \sum_{j=1}^{i} c_{i,j}$$

代入，得

$$
\begin{aligned}
g_n = \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} h_{n,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} \binom{n}{j} 2^{j(n-j)} g_{n-j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} 2^{j(n-j)} g_{n-j} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} 2^{j(n-j)} g_{n-j}
\end{aligned}
$$

代入，得

$$g_n = \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} h_{n,j}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} \binom{n}{j} 2^{j(n-j)} g_{n-j}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} 2^{j(n-j)} g_{n-j} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} 2^{j(n-j)} g_{n-j}$$

将 $j(n-j)$ 拆成 $\binom{n}{2} - \binom{j}{2} - \binom{n-j}{2}$，把上式写成卷积的形式

(或者把 $2^{j(n-j)}$ 写成 $\sqrt{2}^{n^2-j^2-(n-j)^2}$，这就需要求出 $\sqrt{2}$ 的二次剩余)

$$g_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} 2^{j(n-j)} g_{n-j}$$

$$\frac{g_n}{n!2^{\binom{n}{2}}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{2^{\binom{j}{2}} j!} \frac{g_{n-j}}{2^{\binom{n-j}{2}} (n-j)!}$$

令

$$P(x) = \sum_{i=0} \frac{g_i}{2^{\binom{i}{2}} i!} x^i$$

$$Q(x) = \sum_{i=1} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{\binom{i}{2}} i!} x^i$$

那么 $P(x) = P(x)Q(x) + 1$，解得

$$P(x) = \frac{1}{1 - Q(x)}$$

于是做一遍多项式求逆求出 P，然后就得到了 g_n，即 $G(x)$，再取 $\ln$ 得到 F。复杂度 $O(n \log n)$。

例题

[CTS2019] 珍珠

称一个长度为 n，元素取值 $[1, D]$ 的整数序列是合法的，当且仅当其中能够选出至少 m 对相同元素（不能重复选出元素）。
问合法序列个数 $\bmod 998244353$。
$1 \leq m \leq 10^9, 1 \leq n \leq 10^9, 1 \leq D \leq 10^5$

例题

[CTS2019] 珍珠

称一个长度为 n，元素取值 $[1, D]$ 的整数序列是合法的，当且仅当其中能够选出至少 m 对相同元素（不能重复选出元素）。
问合法序列个数 $\mathrm{mod} 998244353$。
$1 \le m \le 10^9, 1 \le n \le 10^9, 1 \le D \le 10^5$

对于一个序列，设其中 i 的出现次数为 c_i，则题目的限制可以写为

$$\sum_{i=1}^{D} \left\lfloor \frac{c_i}{2} \right\rfloor \ge m \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i - (c_i \bmod 2)}{2} \ge m$$

其中 $\sum_{i=1}^{D} c_i = n$，则

$$\sum_{i=1}^{D} c_i \bmod 2 \le n - 2m$$

其中 $\sum_{i=1}^{D} c_i \bmod 2$ 可以理解为出现次数为奇数的元素数量。

设 f_i 表示恰好有 i 种元素出现了奇数次的方案数，那么：

$$ans = \sum_{i=0}^{\min(D, n-2m)} f_i$$

设 f_i 表示恰好有 i 种元素出现了奇数次的方案数，那么：

$$ans = \sum_{i=0}^{\min(D,n-2m)} f_i$$

先求出 g_i 表示钦定其中 i 种元素出现了奇数次，其他元素随便取（“至少”）的方案数。那么：

$$g_i = \sum_{j=i}^{D} f_i \binom{i}{j} \Rightarrow f_i = \sum_{j=i}^{D} g_j \binom{i}{j} (-1)^{i-j}$$

因此如果求得 g，可以直接 $\mathcal{O}(D \log D)$ 卷积得到 f。

因为序列中需要考虑顺序，所以考虑 EGF，每个颜色贡献的 EGF 之积的 $[x^n]$ 会贡献给 g_k。

- 被钦定的那 k 个颜色，只在选择奇数次时作出贡献，因此其 OGF 为 $x+x^3+x^5+\cdots$，EGF 为 $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
- 剩下的 $n-k$ 个颜色，贡献都是 1，EGF 就是 e^x

于是

$$
\begin{aligned}
g_k &= \binom{D}{k} n![x^n](\frac{e^x-e^{-x}}{2})^k(e^x)^{D-k} \\
&= \binom{D}{k} \frac{n!}{2^k}[x^n](e^x-e^{-x})^k(e^x)^{D-k} \\
&= \binom{D}{k} \frac{n!}{2^k}[x^n]\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(e^x)^j(-e^{-x})^{k-j}(e^x)^{D-k} \\
&= \binom{D}{k} \frac{n!}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}[x^n](e^x)^{D-2(k-j)}
\end{aligned}
$$

其中 $[x^n](e^x)^{D-2(k-j)} = \frac{(D-2(k-j))^n}{n!}$

代入，得

$$
\begin{aligned}
g_k &= \binom{D}{k}\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}[D-2(k-j)]^n \\
&= \binom{D}{k}\frac{k!}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k-j}[D-2(k-j)]^n}{j!(k-j)!}
\end{aligned}
$$

上式也是一个卷积的形式，具体地

$$
a_i = \frac{1}{i!}, b_i = \frac{(-1)^i(D-i)^n}{i!}
$$

两者卷积得到 g，再用二项式反演的式子卷积得到 f，复杂度 $O(D\log D)$。

高阶差分

定义差分算子：

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

以及它的复合

$$\Delta^{m+1} f(n) = \Delta^m f(n+1) - \Delta^m f(n)$$

高阶差分

定义差分算子:

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

以及它的复合

$$\Delta^{m+1} f(n) = \Delta^m f(n+1) - \Delta^m f(n)$$

它对于加法、数乘和乘法有如下运算律:

$$\Delta(f(n) + g(n)) = \Delta f(n) + \Delta g(n)$$
$$\Delta(c(f(n))) = c \cdot \Delta f(n)$$
$$\Delta(f(n)g(n)) = f(n)\Delta g(n) + g(n+1)\Delta f(n)$$

n 阶差分的性质

n 阶差分的性质

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

n 阶差分的性质

n 阶差分的性质

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

证明：定义平移算子 $\mathrm{E}\, f(x) = f(x+1)$，从而 $\Delta = \mathrm{E} - 1$，于是根据二项式定理

$$\Delta^n = (\mathrm{E} - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k) \qquad \square$$

n 阶差分的性质

n 阶差分的性质

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

证明：定义平移算子 $\mathrm{E}\, f(x) = f(x+1)$，从而 $\Delta = \mathrm{E} - 1$，于是根据二项式定理

$$\Delta^n = (\mathrm{E}-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k) \qquad \square$$

组合数的差分

计算

$$\Delta^m \left(\binom{x}{k} \right)$$

n 阶差分的性质

n 阶差分的性质

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

证明：定义平移算子 $\mathrm{E}\, f(x) = f(x+1)$，从而 $\Delta = \mathrm{E} - 1$，于是根据二项式定理

$$\Delta^n = (\mathrm{E}-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k) \qquad \square$$

组合数的差分

计算

$$\Delta^m \left(\binom{x}{k} \right)$$

加法公式给出，$\Delta \left(\binom{x}{k} \right) = \binom{x}{k-1}$，于是 $\Delta^m \left(\binom{x}{k} \right) = \binom{x}{k-m}$.

牛顿级数

因为 $\binom{x}{n}$（或者说 $x^{\underline{n}}$）是一个 n 次多项式，所以一个多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 一定可以写为如下形式

$$f(x) = c_0\binom{x}{0} + c_1\binom{x}{1} + c_2\binom{x}{2} + \cdots + c_n\binom{x}{n}$$

这样一个展开式称为 $f(x)$ 的**牛顿级数**。

牛顿级数

因为 $\binom{x}{n}$ (或者说 $x^{\underline{n}}$) 是一个 n 次多项式，所以一个多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 一定可以写为如下形式

$$f(x) = c_0\binom{x}{0} + c_1\binom{x}{1} + c_2\binom{x}{2} + \cdots + c_n\binom{x}{n}$$

这样一个展开式称为 $f(x)$ 的**牛顿级数**。
取 $\Delta^k f(0)$,

$$\Delta^k f(0) = \sum_{i=0}^{n} c_i \binom{0}{i-k} = c_k$$

所以一个多项式可以很容易地写成牛顿级数的形式

$$f(x) = f(0)\binom{x}{0} + \Delta f(0)\binom{x}{1} + \Delta^2 f(0)\binom{x}{2} + \cdots + \Delta^n f(0)\binom{x}{n}$$

例子

求下列高阶差分

$$\Delta^n x^n,\ \Delta^m x^n (m > n)$$

将 x^n 写成牛顿级数

$$f(x) = c_0\binom{x}{0} + c_1\binom{x}{1} + c_2\binom{x}{2} + \cdots + c_n\binom{x}{n}$$

$$\Delta^n f(x) = c_n\binom{x}{0} = c_n$$

$$\Delta^m f(x) = 0$$

而 $c_n\binom{x}{n} = \frac{c_n}{n!}x^n$ 中的最高次项就是 x^n，于是

$$c_n = n!, \quad \Delta^n f(x) = n!$$

设 n 为多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 的次数，对 $x = 0$ 利用

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

和

$$\Delta^n f(0) = c_n = n! a_n$$

我们可以得到下面这个恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \cdots + a_n k^n) = (-1)^n n! a_n$$

应用

作为应用

求下列式子的封闭形式

1. $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n$
2. $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} \binom{kn}{n}$

应用

作为应用

求下列式子的封闭形式

1. $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n$
2. $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} \binom{kn}{n}$

答案

1. $n!$
2. $(-1)^n n^n$

例题

拉格朗日插值

但是请使用牛顿级数。
具体地，已知 n 阶多项式 $P(x)$ 在前 $n+1$ 个点处的值 $P(0), P(1), \cdots, P(n)$，求 $P(x)$ 的值，要求 $O(n)$。

例题

拉格朗日插值

但是请使用牛顿级数。
具体地，已知 n 阶多项式 $P(x)$ 在前 $n+1$ 个点处的值 $P(0), P(1), \cdots, P(n)$，求 $P(x)$ 的值，要求 $O(n)$。

$$
\begin{aligned}
P(x) = \sum_{k\le n} c_k \binom{x}{k} &= \sum_{k\le n} \binom{x}{k} \sum_t (-1)^{k-t} \binom{k}{t} P(t) \\
&= \sum_{t\le n} P(t) \sum_{t\le k\le n} \binom{x}{k} (-1)^{k-t} \binom{k}{t} \\
&= \sum_{t\le n} P(t) \binom{x}{t} \sum_{t\le k\le n} \binom{x-t}{k-t} (-1)^{k-t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{t \le n} P(t) \binom{x}{t} \sum_{k \le n-t} \binom{x-t}{k} (-1)^k \\
&= \sum_{t \le n} P(t) \binom{x}{t} \binom{x-t-1}{n-t} (-1)^{n-t} \quad \text{交错和} \\
&= \sum_{t \le n} (-1)^{n-t} P(t) \frac{\underline{x^{n+1}}}{t!(n-t)!(x-t)}
\end{aligned}
$$

预处理前缀积和后缀积即可做到 $O(n)$。

例题

洛谷 P7438 更简单的排列计数

设 cyc_π 将长为 n 的排列 π 当成置换时所能分解成的循环个数。给定两个整数 n, k 和一个 $k-1$ 次多项式，对 $1 \le m \le n$ 求：

$$\sum_{\pi} F(\text{cyc}_\pi) \bmod 998244353$$

其中 π 是长度为 m 且不存在位置 i 使得 $\pi_i = i$ 的排列。
$1 \le n \le 6 \times 10^5$，$1 \le k \le 100$，$0 \le [x^k]F(x) \le 998244352$。

例题

洛谷 P7438 更简单的排列计数

设 cyc_π 将长为 n 的排列 π 当成置换时所能分解成的循环个数。给定两个整数 n,k 和一个 $k-1$ 次多项式，对 $1\le m\le n$ 求：

$$\sum_\pi F(\mathrm{cyc}_\pi) \bmod 998244353$$

其中 π 是长度为 m 且不存在位置 i 使得 $\pi_i=i$ 的排列。
$1\le n\le 6\times 10^5$，$1\le k\le 100$，$0\le [x^k]F(x)\le 998244352$。

把多项式 $F(x)$ $O(k^2)$ 转成牛顿级数，

$$F(x)=\sum_{i=0}^{k-1} a_i\binom{x}{i}$$

现在问题变为求出答案的每一项，即对每一个 $1\le m\le n$ 和 $0\le i<k$ 求出 $\sum_{\pi,|\pi|=m}\binom{\mathrm{cyc}_\pi}{i}$。

例题

错排数的 EGF 为许多长度大于 1 的环构成的大于 1 的排列的 $\exp$。其中环的 EGF 为

$$\sum_{i=2}\frac{(i-1)!}{i!}x^i=-\ln(1-x)-x$$

所以错排数的 EGF 为

$$G(x)=e^{-\ln(1-x)-x}$$

错排数的 EGF 为许多长度大于 1 的环构成的大于 1 的排列的 $\exp$。其中环的 EGF 为

$$\sum_{i=2} \frac{(i-1)!}{i!} x^i = -\ln(1-x) - x$$

所以错排数的 EGF 为

$$G(x) = e^{-\ln(1-x)-x}$$

这题除了要求错排的个数，还要求出这些错排中选 i 个环的方案数。为此，引入一个新变量 y，给每个环的 EGF 都带上 $(1+y)$ 的因子，变为

$$(-\ln(1-x)-x)(1+y)$$

含这个 y 因子表示选这个环，不含这个 y 因子表示不选这个环

$$G(x,y) = e^{(-\ln(1-x)-x)(1+y)}$$

我们所求的 $\sum_{\pi,|\pi|=m} \binom{\mathrm{cyc}_\pi}{i}$ 就是 $[x^m y^i]G$。

记 $g_{a,b} = [x^a y^b]G$。将 G 对 x 求导

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \frac{x(1+y)}{1-x} G$$

那么

$$(n+1)g_{n+1,k} = \sum_{i=0}^{n-1} (g_{i,k} + g_{i,k-1})$$

$$ng_{n,k} = \sum_{i=0}^{n-2} (g_{i,k} + g_{i,k-1})$$

于是我们得到了递推式

$$(n+1)g_{n+1,k} = ng_{n,k} + (g_{n-1,k} + g_{n-1,k-1})$$

$O(nk)$ 递推即可求出 g。总复杂度 $O(nk + k^2)$。

完 结 撒 花