数论函数求和问题（下）

2022 年 1 月 20 日　成都

1. 杜教筛
2. Powerful Number
3. 扩展埃氏筛

基本概念

基本和组

对数论函数 f ，记 $S_f(n)=\sum_{i=1}^{n} f(i)$ ，即前缀和。

f 在 n 下的“基本和组”定义为 $x\in\{\lfloor n/x\rfloor\}$ 的一系列 $S_f(x)$ 的值，即我们对 n 整除分块时所需的值。

有个别称“块筛”，是我当年叫出来的（

整除定理

- $\lfloor\lfloor n/a\rfloor/b\rfloor=\lfloor n/ab\rfloor$
  推论：n 无论经历多少次整除，其结果仍然在 $\{\lfloor n/k\rfloor\}$ 内。处理了 (f,kn) 的基本和组，就能得到 (f,n) 的基本和组。
- $\{r:\lfloor n/r\rfloor\neq\lfloor n/(r+1)\rfloor\}=\{\lfloor n/k\rfloor\}$
  即是说，整除分块中段的边界位置，恰好是集合 $\{\lfloor n/k\rfloor\}$ 。注意到 $r=\lfloor n/\lfloor n/r\rfloor\rfloor$ 即可证明。

杜教筛利用迪利克雷卷积的性质，求数论函数的基本和组。

杜教筛：乘积式

给出数论函数 A, B，以及两者在 n 下的基本和组。对于 $C = A * B$，求 C 在 n 下的基本和组。

$$\begin{aligned} S_C(n) = \sum_{i=1}^{n} C(i) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} B(d)A(i/d) \\ &= \sum_{d=1}^{n} B(d) \sum_{i=1}^{\lfloor n/d \rfloor} A(i) \\ &= \sum_{d=1}^{n} B(d)S_A(\lfloor n/d \rfloor) \end{aligned}$$

得到了可整除分块的形式，可以发现，狄利克雷卷积和整除有着自然的关系。

只需 A, B 的基本和组即可完成整除分块的计算。

杜教筛：复杂度分析

若使用整除分块对各个 $\{\lfloor n/i\rfloor\}$ 计算，考虑 n/i 中最大的 $\sqrt{n}$ 个，也就是让 $i=1\sim\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ 。可得复杂度为 $O(\sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\sqrt{n/i})=O(n^{3/4})$ 。

若 A,B 都是积性函数，则 C 也是积性函数，可以线性筛。预处理 T 以内的前缀和，这样就只需要计算 $n/i\le T$ 即 $i\le n/T$ 的了。总复杂度为 $O(T+\sum_{i=1}^{n/T}\sqrt{n/i})=O(T+nT^{-1/2})$ ，取 $T=n^{2/3}$ 可得最优复杂度为 $O(n^{2/3})$ 。

杜教筛：除式

对于 n ，给出数论函数 A, B ，以及两者在 n 下的基本和组。对于 $C = A/B$ （此处是狄利克雷除法）即 $A = B * C$ ，求 C 在 n 下的基本和组。

根据之前的推导，快进到

$$S_A(n) = \sum_{d=1}^{n} B(d) S_C(\lfloor n/d \rfloor)$$

$$= S_C(n) + \sum_{d=2}^{n} B(d) S_C(\lfloor n/d \rfloor)$$

$$S_C(n) = S_A(n) - \sum_{d=2}^{n} B(d) S_C(\lfloor n/d \rfloor)$$

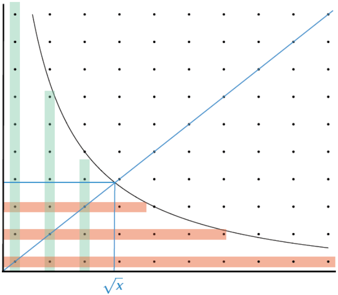
也得到了可整除分块的形式，略有不同的是需要递归计算。复杂度仍是 $O(n^{2/3})$ 。

狄利克雷双曲线法

可以认为是杜教筛的另一种形态。
给出 f,g 求 $S_{f*g}(n)$ 时：

$$S_{f*g}(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{xy=i}f(x)g(y)=\sum_{xy\le n}f(x)g(y)$$

即是双曲线 $xy=n$ 下方（含线上）整点对应的函数值的和。



狄利克雷双曲线法

我们对 $x \le \sqrt{n}$ 的部分、$y \le \sqrt{n}$ 的部分分别求和，再减去公共部分，可得

$$S_{f*g}(n) = \sum_{x=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} f(x) S_g(\lfloor n/x \rfloor) + \sum_{y=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} g(y) S_f(\lfloor n/y \rfloor) - S_f(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) S_g(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)$$

这容易 $O(\sqrt{n})$ 计算。可能在常数或者实现上要优于经典的杜教筛，对称性体现地更加明显，从中也能直接看到基本和组的形式。

上面推导的是乘积式，除式的计算大同小异，略去。

一些具体函数的基本和组

对于 id_k 一类，可以用自然数幂和求出其基本和组。

$$\mu = e / I$$
$$\varphi = id / I$$
$$\sigma_k = I * id_k$$

以上三类常见函数都能被完全积性函数简单表出，也就能杜教筛。

一些具体函数的基本和组

还有 $f=\mu^2\cdot id_k$ 的基本和组，与杜教筛关系不大，这里也顺便讲了吧。

回忆：$\mu^2(n)=\sum_{d^2|n}\mu(d)$。

$$
\begin{aligned}
S_f(n)=\sum_{i=1}^{n}\mu^2(i)i^k&=\sum_{i=1}^{n}i^k\sum_{d^2|n}\mu(d)\\
&=\sum_{d=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\mu(d)\sum_{d^2|i}^{n}i^k\\
&=\sum_{d=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\mu(d)d^{2k}S_{id_k}(\lfloor n/d^2\rfloor)
\end{aligned}
$$

根据 $\lfloor n/d^2\rfloor$ 进行整除分块（单次复杂度 $O(n^{1/3})$），并取适当阈值线性筛，复杂度可做到 $O(n^{3/5})$。

一些具体函数的基本和组

点乘

定义“点乘”运算，对于两函数 A, B ，其点乘 $A \cdot B$ 为一个新的函数，满足 $(A \cdot B)(n) = A(n)B(n)$ 。

当 C 是完全积性函数时，有 $(A \cdot C) * (B \cdot C) = (A * B) \cdot C$ 。

- $\mu \cdot id_k, \varphi \cdot id_k$

$$(\mu \cdot id_k) * id_k = (\mu \cdot id_k) * (I \cdot id_k) = (\mu * I) \cdot id_k = e$$
$$(\varphi \cdot id_k) * id_k = (\varphi \cdot id_k) * (I \cdot id_k) = (\varphi * I) \cdot id_k = id_{k+1}$$

- $\mu^2 * (\mu \cdot id)$

$$\mu^2 * (\mu \cdot id) * id = \mu^2 * (\mu \cdot id) * (I \cdot id) = \mu^2 * (e \cdot id) = \mu^2$$

51Nod2026 Gcd and Lcm

题意：定义数论函数 $f=(\mu\cdot id)*I$ ，给出 n，求下列式子的值：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\gcd(i,j))f(\operatorname{lcm}(i,j))$$

$n\le 10^9$

题解：对于所有积性函数，均有 $f(\gcd(i,j))f(\operatorname{lcm}(i,j))=f(i)f(j)$ 。

证明：对于 $i=p^a,j=p^b$ 的情况，有

$f(\gcd(i,j))f(\operatorname{lcm}(i,j))=f(p^{\min(a,b)})f(p^{\max(a,b)})$

由 $\{\min(a,b),\max(a,b)\}=\{a,b\}$ ，故上式 $=f(i)f(j)$。

不难使用积性分解将结论扩展到全体正整数。

至此问题变为求 $\left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right)^2$ 。注意到只需求一次前缀和，可以先得到 $\mu\cdot id$ 的基本和组（方法前文已有），然后整除分块一次。

P3172 [CQOI2015] 选数

题意：给定 n, L, R, K ，对于所有 $(R-L+1)^n$ 个值域为 $L \sim R$ 的长度为 n 的序列，求 $\gcd = K$ 的序列数。
$n, L, R, K \le 10^9$

题解：令 $L \leftarrow \lceil L/K \rceil, R \leftarrow \lfloor R/K \rfloor$ ，问题转化为 $K = 1$ 的情况。

记 $F(d)$ 为 gcd 为 d 的倍数的序列数目，限制显然等价于每个元素都是 d 的倍数，方案数为 $\left(\lfloor R/d \rfloor - \lfloor (L-1)/d \rfloor\right)^n$ 。

根据倍数差分可得

$$\mathrm{Ans} = \sum_{k=1} \mu(k) F(k) = \sum_{k=1} \mu(k) \left(\lfloor R/d \rfloor - \lfloor (L-1)/d \rfloor\right)^n$$

整除分块求解，需要用杜教筛求 μ 的基本和组。

BZOJ3512: DZY Loves Math IV

题意：给定 n, m ，求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi(ij)$$

$n \le 10^5, m \le 10^9$

题解：根据前文 Luogu P4240 快进到

$$\sum_{p=1}^{n} S(n/p, p)S(m/p, p)f(p)$$

其中 $f(p) = \sum_{d|p} \frac{d}{\varphi(d)}\mu(\frac{p}{d}),\ S(n, k) = \sum_{i=1}^{n}\varphi(ik)$ 。

注意到对于 $S(n/p, p)$ ，两个参数的乘积小于 n ，可以 $O(nlogn)$ 预处理。剩下的问题就是 $S(m/p, p)$ 了。

BZOJ3512: DZY Loves Math IV

$$S(n,k)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(ik)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\varphi(ik)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\varphi(ik)$$

$$=\sum_{p=1}^{n}S(\lfloor n/p\rfloor,p)S(\lfloor k/p\rfloor,p)f(p)-\sum_{p=1}^{n}S(\lfloor n/p\rfloor,p)S(\lfloor (k-1)/p\rfloor,p)f(p)$$

$$=\varphi(k)\sum_{p|k}f(p)S(\lfloor n/p\rfloor,p)$$

S 的求解是递推进行的，且 n 只会受到整除。当 $k=1$ 时就是 φ 的前缀和，需用杜教筛处理基本和组。

当递推进行到 $nk\le 10^5$ 时，可以直接返回预处理结果。

BZOJ3512: DZY Loves Math IV

这个递推的复杂度很玄学，不记忆化直接跑也能过。

若要进一步减小常数，根据 $\varphi(n)=n\prod_{p|n}\dfrac{p-1}{p}$ ，令 $m=\prod_{p|n}p$ ，即每个素因子只保留一次，可得 $\varphi(n)=\dfrac{n}{m}\varphi(m)$。

于是有 $S(n,k)=\frac{k}{m}S(n,m)$ ，于是只需要对 k 是无平方因子数的情况求解。

习题

- Luogu P6055 [RC-02] GCD
- 51nod1227 平均最小公倍数
- Luogu P1587 [NOI2016] 循环之美
- Loj6207. 米缇

贝尔级数

可以发现，杜教筛的使用依赖于卷积关系，如何系统地发现积性函数之间的卷积关系呢？

对于**积性函数** f，定义其在质数 p 意义下的贝尔级数为:

$$F_p(x)=\sum_{i=0}^{\infty} f(p^i)x^i$$

即在质数 p 及其幂次处观察这个积性函数。相当于利用积性把狄利克雷卷积转化为幂级数卷积。

定理：两个数论函数相狄利克雷卷积，其贝尔级数相乘。

这样，我们只需要研究贝尔级数之间的乘积关系。

常见函数的贝尔级数

- $e \xrightarrow{\text{B.S.}} 1$
- $I \xrightarrow{\text{B.S.}} \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$
- $id_k \xrightarrow{\text{B.S.}} \sum_{i=0}^{\infty} p^{ik} x^i = \frac{1}{1-p^k x}$
- $\mu = I^{-1} \xrightarrow{\text{B.S.}} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-1} = 1 - x$
  再翻译回数论函数，可以自然地得出 μ 的定义式。
- $\mu^2 \xrightarrow{\text{B.S.}} 1 + x$
- $d \xrightarrow{\text{B.S.}} \sum_{i=0}^{\infty} i x^i = \frac{1}{(1-x)^2}$
  等价于 $d = I * I$ 。
- $\sigma_k \xrightarrow{\text{B.S.}} \sum_{i=0}^{\infty} x^i \sum_{j=0}^{i} p^{jk} = \frac{1}{(1-x)(1-p^k x)}$
  等价于 $\sigma_k = I * id_k$ 。

常见函数的贝尔级数

- $$\varphi \xrightarrow{\text{B.S.}} 1+\sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1}(p-1)x^i$$
  $$=1+\frac{p-1}{p}(\sum_{i=0}^{\infty} p^i x^i-1)$$
  $$=1+\frac{p-1}{p}(\frac{1}{1-px}-1)=\frac{1-x}{1-px}$$
  等价于 $\varphi * I = id$ 。
- $w(n)=2^{\text{n 的不同质因子数}}$，显然有 $w(p^k)=2$
  $$w \xrightarrow{\text{B.S.}} 1+\sum_{i=1}^{\infty} 2x^i=\frac{1+x}{1-x}$$
  等价于 $w=\mu^2 * I$ 。

常见函数的贝尔级数

点积 id_k 对函数贝尔级数的影响相当于把 x 代换成 $p^k x$ 。

证明：$F \cdot id_k \text{B.S.} \sum_{i=1}^{\infty} F(p^i)p^{ki}x^i = \sum_{i=1}^{\infty} F(p^i)(p^k x)^i$

即刻得到

- $\mu \cdot id_k \xrightarrow{\text{B.S.}} 1 - p^k x$
- $\varphi \cdot id_k \xrightarrow{\text{B.S.}} \frac{1-p^k x}{1-p^{k+1}x}$

对于完全积性函数 f，有 $f(p^k) = f(p)^k$ ，其贝尔级数为 $\frac{1}{1-f(p)x}$

如刘维尔函数 $\lambda(n) = (-1)^{n\text{的质因子次数和}}$ ，是个完全积性函数，其贝尔级数为 $\frac{1}{1+x}$ ，可得 $\lambda * \mu^2 = e$ 。

例题

题意：定义积性函数 f 满足 $f(p^k)=p^k+[k>0](-1)^k$ ，求 f 的基本和组。

题解：先写出 f 的贝尔级数：

$F_p(x)=1+\sum\limits_{k=1}\left((-1)^k+p^k\right)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-px}-1$

接下来构造卷积，令 $G_p(x)=(1+x)(1-px)$ 可得

$(G*F)_p(x)=(1+x)+(1-px)-(1+x)(1-px)=1+px^2$。

$(i+x)$ 对应 μ，而 $(1-px)$ 对应 $\mu^2\cdot id$ ，$G=\mu*(\mu^2\cdot id)$ ，这个函数前文讨论过。

记 $1+px^2$ 对应的函为数 h ，对于 $h(n)$ 非 0 的 n 满足所有素因子次数均恰为 2。

也即 $n=d^2$ 且 $\mu^2(d)$。

可得 $S_h(n)=\sum\limits_{d=1}^{\sqrt{n}} i\mu^2(i)$ ，和整除分块复杂度相同。

基本概念

定义：powerful number 是没有 1 次质因子的数。为了方便，下文简称为 PN。

定理：n 以内 PN 的个数为 $O(\sqrt{n})$。

证明：PN 必然可以表示成 a^2b^3 的形式，其中偶数次的素因子塞到 a 里面，奇数次的素因子塞一次 b。(这构成一个单射)

枚举 a 考虑满足条件的 b 的个数，得 $O\left(\sum_{a=1}^{\sqrt{n}}(n/a^2)^{1/3}\right)$，积分得到 $O(\sqrt{n})$。

拟合法

有积性函数 f,g 满足 $f(p)=g(p)$ （称为素数拟合），且已知 g 的基本和组，求 f 的基本和组。

构造函数 $h(n)$ 满足 $h=f/g$ (狄利克雷除法)。

观察到 $f(p)=g(1)h(p)+g(p)h(1)=h(p)+g(p)$ ，由于 $f(p)=g(p)$，可以得到 $h(p)=0$ 。又因为积性，所以 $h(n)$ 有值的地方都是 PN 。

根据杜教筛结论，由 $f=h*g$ 快进到

$$S_f(n)=\sum_{d=1}^{n}h(d)S_g(\lfloor n/d\rfloor)$$

由于有值的 h 只有 $O(\sqrt{n})$ 个，可以直接搜索 PN 进行求和。

至此，类似杜教筛，求 f 的基本和组可以做到 $O(n^{2/3})$ 。

拟合法

定理：h 在 n 下的的基本和组只有 $O(n^{1/3})$ 个本质不同的值。

证明：在 $S_G(\lfloor n/i \rfloor)$ 中，若 $i > n^{1/3}$，则 $\lfloor n/i \rfloor \le n^{2/3}$，这部分只有 $O(\sqrt{n^{2/3}}) = O(n^{1/3})$ 个有值的 h，前缀和也就只会变化 $O(n^{1/3})$ 次。若 $i \le n^{1/3}$，显然只有 $O(n^{1/3})$ 个。

这样，我们求 $S_f(n)$ 的复杂度可以降为 $O(n^{1/3})$，经过合理的前缀预处理，总复杂度降为 $O(n^{3/5})$。

Luogu P5325 【模板】Min_25 筛

题意：给出积性函数 $f(p^k) = p^k(p^k - 1)$，求 $S_f(n)$。$n \le 10^{10}$。

题解：

注意到 $f(p) = p(p-1)$，构造 $g = \varphi \cdot id$，则 $g(p) = f(p)$，且 g 的基本和组容易杜教筛求出。

然后用 PN 计算一个 $S_f(n)$ 即可。总复杂度 $O(n^{2/3})$。

单走一个

题意：给定常数 c_1, c_2 ，有积性函数 $f(p^k) = p^{kc_1} + p^{kc_2}$ ，求 $S_f(n)$ 。$n \le 10^{12}, k_1, k_2 \le 16$。

题解：

构造函数 $g = id_{k_1} * id_{k_2}$ ，显然有 $g(p) = p^{k_1} + p^{k_2} = f(p)$。容易通过插值 $O((k_1 + k_2)\sqrt{n})$ 求出 id_{k_1}, id_{k_2} 的块筛。

单个 $S_g(n)$ 可以整除分块 $O(\sqrt{n})$ 计算。而对于单个 $S_f(n)$ ：

$$S_F(n) = \sum_{d=1}^{n} [d \in \mathrm{PN}] H(d) S_G(\lfloor n/d \rfloor)$$

对于每个 PN 整除分块计算对应的 $S_G(n)$ ，复杂度为 $O\left(\sum_{a,b} \sqrt{n/a^2b^3}\right) = O\left(\sum_{a} \sqrt{n}/a\right) = O(\sqrt{n}\log n)$。

习题

- DIVCNT3 - Counting Divisors (cube)
- Loj6682. 梦中的数论

Uoj578. 【ULR 1】校验码

题意：给出常数 c ，定义积性函数 $q(p^k)=p^{c\lfloor k/2\rfloor}$ 。
给出 n,m ，求下列式子的值。

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}q(ij)$$

$n\le 5\times 10^5, m\le 1.2\times 10^{11}$ 。

题解：
记积性函数 $f(p^k)=p^{k \bmod 2}$ ，则有
$q(ij)=q(i)q(j)\gcd(f(i),f(j))^c$ 。
记 $g=\mu*id_c$ ，可以用 g 迫害 $\gcd(a,b)^c$ 。

Uoj578. 【ULR 1】校验码

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q(ij) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q(i)q(j)\gcd(f(i),f(j))^c \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q(i)q(j)\sum_{d|f(i),d|f(j)} g(d) \\
&= \sum_{d=1}^{n} g(d)\sum_{d|f(i),1\le i\le n} q(i)\sum_{d|f(j),1\le j\le m} q(j) \\
&= \sum_{d=1}^{n} g(d)S(n,d)S(m,d)
\end{aligned}
$$

其中 $S(n,d)=\sum_{d|f(i),1\le i\le n} q(i)$ 。只需求 $S(n,1\sim n),S(m,1\sim n)$ 。

Uoj578. 【ULR 1】校验码

由 $f(i)|i$ ，则 $d|f(i) \Rightarrow d|i$ 。记 $q_d(n)=[d|f(nd)]q(nd)=[d|f(nd)]q(n)$ （由于 d 代表因子次数为奇的部分，可以去除），有

$$S(n,d)=\sum_{1\le i\le\lfloor n/d\rfloor}[d|f(id)]q(id)=\sum_{1\le i\le\lfloor n/d\rfloor}q_d(i)$$

注意到 q_d 是积性函数，观察质数幂处的取值：

$$q_d(p^k)=[p|d][k \bmod 2=0]p^{ck/2}+[p\nmid d]p^{c\lfloor k/2\rfloor}$$

注意到 q_d 和 q 只有 d 倍数处的位置取值值不同，观察 $w_d=q_d/q$ 。

可归纳证明 $w_d(p^k)=[p|d](-1)^k$ 。

Uoj578. 【ULR 1】校验码

$$
\begin{aligned}
S(n,d) &= \sum_{1\le i\le \lfloor n/d\rfloor} q_d(i) \\
&= \sum_{1\le i\le \lfloor n/d\rfloor} \sum_{j\mid i} w(j)q(i/j) \\
&= \sum_{j=1}^{\lfloor n/d\rfloor} w_d(j) \sum_{j\mid i}^{\lfloor n/d\rfloor} q(i/j) \\
&= \sum_{j=1}^{\lfloor n/d\rfloor} w_d(j) S_q(\lfloor n/dj\rfloor)
\end{aligned}
$$

搜索可以发现，总共需用的有值的 w_d 数目仅为 3×10^7 。问题只剩求 q 的基本和组。

Uoj578. 【ULR 1】校验码

显然有 $q(p)=1$ ，根据 PN 相关理论，可以 $O(m^{3/5})$ 求块筛。

具体地，构造 $h=q/I$ ，则 h 只在 PN 处有值。不仅如此，可以证明 $h(p^k)=[k \bmod 2=0]\left(p^{ck/2}-p^{c(k/2-1)}\right)$ ，h 只在平方数处有值。

记 $h_2(n)=h(n^2)$ ，根据杜教筛结论可快进

$$S_q(n)=\sum_{j=1}^{n} h(j)\lfloor n/j\rfloor$$
$$=\sum_{j=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} h_2(j)\lfloor n/j^2\rfloor$$

整除分块求一个 $O(n^{1/3})$ ，配合线性筛，求基本和组的复杂度为 $O(m^{3/5})$ 。

Uoj578. 【ULR 1】校验码

原官方题解玩了不少杂技，感兴趣的同学可以前往 UOJ 查看。

1. 杜教筛
2. Powerful Number
3. 扩展埃氏筛

问题引入

质数 c 次方和

求 n 以内质数的 c 次方和。

标准积性函数求和

给出积性函数 f，满足 $f(p)$ 是关于 p 的多项式，$f(p^k)$ 可以快速求出，求 f 的标准和组。

质数 c 次方和

借鉴埃式筛的思想，从小到大逐个考虑质数，并将其倍数筛去。

约定 p_k 指从小到大第 k 个质数（编号从 1 开始），P_k 指前 k 个质数的集合。$p_{\min}(n)$ 为 n 的最小质因子，特殊地，$p_{\min}(1)=+\infty$。

记 $S_{n,k}$ 为筛除 $p_1 \sim p_k$ 的倍数之后 n 以内剩余的数的集合。即 $S_{n,k}=\left\{x \in N^+ \middle| \ x \le n且p_{\min}(x)>k\right\}$。

注意，$S_{n,k}$ 不包括 $p_1 \sim p_k$ ，但包括 1 。

对于合数 q ，其必然有一个 $\lfloor\sqrt{q}\rfloor$ 以内的素因子。因此埃式筛只需用 $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ 以内的质数来筛除，就能正确地得到 n 以内所有的质数。

将 $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ 内质数线性筛出来，记个数为 m。则 $S_{n,m}$ 就是 $(\lfloor\sqrt{n}\rfloor,n]$ 以内质数的集合。

记 $h_c(n,k)=\sum\limits_{x\in S_{n,k}} x^c$ ，即筛除前 k 轮之后 n 以内剩余的数的 c 次方和。$h_c(N,m)-1+\sum\limits_{p\in P_m} p^c$ 即为答案。

质数 c 次方和

记 $D_{n,k} = \left\{ x \in N^+ \middle| x \le n \text{且} p_{\min}(x) = k \right\}$，即埃式筛法 k 轮中筛除的数。按照定义有 $S_{n,k} = S_{n,k-1} - D_{n,k}$。

$D_{n,k}$ 可以理解为“不含 $\le p_{k-1}$ 的质因数”且“至少含一个 p_k”，于是有

$$D_{n,k} = p_k S_{\lfloor n/p_k \rfloor, k-1}$$

$S_{\lfloor n/p_k \rfloor, k-1}$ 中的数均“不含 $\le p_{k-1}$ 的质因数”，乘一个 p_k 保证“质因数必含 p_k”。

由此得到 h_c 的递推式:

$$h_c(n,k) = h_c(n,k-1) - p_k^c h(\lfloor n/p_k \rfloor, k-1)$$

边界：$h_c(n,0) = \sum_{i=1}^{n} i^c$，可以插值求出。

质数 c 次方和

注意到递推中需要利用 $\lfloor n/p_k \rfloor$ 处的取值，于是我们需要维护整个基本和组，即对每个 k 维护 $h(\lfloor n/1 \rfloor, k), h(\lfloor n/2 \rfloor, k), h(\lfloor n/3 \rfloor, k), \ldots$ 共 $O(\sqrt{n})$ 个。

接下来我们讨论实现方法。

(1) $O(n/\log n)$

质数个数 $O(\frac{\sqrt{n}}{\log n})$，基本和组位置数 $O(\sqrt{n})$，总状态数为 $O(\frac{n}{\log n})$。直接暴力用递推式计算。

质数 c 次方和

(2) $O(n^{3/4}/\log n)$

注意到当 $p_k > \sqrt{n}$ 时，有 $D_{n,k} = p_k$ ，也就是恰只筛掉 p_k 一个数。对应到 h 上则 $h(n,k) = h(n,k-1) - p_k^c$ 。

可以用懒标记对这种变化进行维护，对于 $p_k \leq \sqrt{n}$ 的则用递推式计算。

只有 $\pi(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)$ 个质数会影响到 $h(n,\_)$ 。总复杂度 $O\left(\sum_{d=1}^{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n/d}}{\log(n/d)}\right) = O(\frac{n^{3/4}}{\log n})$。

此做法性价比较高，实战中最为常用。

质数 c 次方和

还能加上的优化有：

- 模仿杜教筛的策略，用朴素方法（树状数组）处理一部分 h 的前缀。适时应用懒标记。
- k 较小时暴力递推。

能进一步优化到 $O(n^{2/3}/logn)$，感兴趣的同学可以自行查阅资料。

标准积性函数求和: Min_{25} 筛

我们以 k **从大到小**的方式，考虑**最小素因子**为 p_k 的数的贡献。

记欲求和的积性函数为 f ，$S_{n,k}$ 为最小素因子 $\geq p_k$ 的集合，$h(n,k)=\sum\limits_{i\in S_{n,k}}^{n} f(i)$。答案为 $h(n,1)$ ，边界值是 0。

对于 $x\in S_{n,k}$ ，枚举 $p_t=p_{\min}(x)$ ，再枚举 x 中 p_t 的次数 c 。可得

$$r(n,k)=\sum_{t=k}^{p_t\leq n}\sum_{c=1} f(p_t^c)r\left(\lfloor x/p_t^c\rfloor,t+1\right)$$

若要用 n 以内所有质数筛除，显然不优。只需用 $\sqrt{n}$ 内的质数筛除，未计入的只可能是 $>\sqrt{n}$ 的质数，其贡献用前文“质数 c 次方和”计算。

标准积性函数求和: Min_{25} 筛

若只需单点求值，直接不记忆化暴力搜索。在 10^{13} 内，复杂度可以视为 $O\left(\frac{n^{3/4}}{\log n}\right)$，证明见 2018 年候选队论文。

若要求整个基本和组，按部就班记忆化并逐层递推。注意到对于 $h(n,k)$ 当 $k>\sqrt{n}$ 时有 $h(n,k)=h(n,k+1)+f(p_k)$，可以用懒标记处理。类似地，总复杂度（严格地）为 $O\left(\frac{n^{3/4}}{\log n}\right)$。

板子题

- Loj6235. 区间素数个数
- Loj6053. 简单的函数
- SP34096 DIVCNTK - Counting Divisors (general)

Uoj188. 【UR 13】Sanrd

题意：求 n 以内合数的次大质因子之和。

此处次大值因子是非严格的，对于 $18 = 2 * 3 * 3$ ，次大值因子为 3 而不是 2 。

$n \leq 10^{10}$。

Uoj188. 【UR 13】Sanrd

题解：本题和标准积性函数求和模型没有直接关系，但可以用类似的思想解决。

记 $f(n)$ 为 n 的次大质因子，$S_{n,k}$ 为最小素因子 $\geq p_k$ 的集合，$h(n,k)=\sum_{i\in S_{n,k}} f(i)$ ，$c[l,r]$ 为 $[l,r]$ 区间内的质数个数。

仍然考虑对于 $x\in S_{n,k}$ ，枚举 $p_t=p_{\min}(x)$ ，再枚举 x 中 p_t 的次数 c 。分两类讨论：

- 若 $x=p_t^c$ ，则 $f(x)=[c>1]p_t$ 。
- 若 $x=p_t^c p_l$ $(t\leq l)$ ，则 $f(x)=p_t$ 。
- 若 $x=p_t^c y$，且 y 的质因子次数 ≥ 2 那么 $f(x)=f(y)$。

综上可得

$$r(n,k)=\sum_{t=k}^{p_t\leq n}\sum_{c=1} r\left(\lfloor x/p_t^c\rfloor,t+1\right)+p_t\left(c\left[p_t,\lfloor n/p_t^c\rfloor\right]+[c>1]\right)$$

Luogu P7571 「MCOI-05」幂积

题意：记 n 的分解为 $\prod_i p_i^{c_i}$，定义函数 $w(n) = \sum p_i c_i$。特别地，$w(1) = 0$。

对于 $c \in \{0, 1\}$，定义函数 g 为：

$$g(n, c, r) = \sum_{i=1}^{n} i^c [w(i) \equiv r \pmod 4]$$

给定 m 和 c，对所有 $1 \le i \le \lfloor \sqrt{m} \rfloor$，计算所有 $0 \le r < 4$ 的 $g(\lfloor \frac{m}{i} \rfloor, c, r)$ 值。

$n \le 10^{10}$。

Luogu P7571 「MCOI-05」幂积

题解：令 x 为幂级数单位，定义函数 $f(n)=n^c x^{w(n)} \pmod{x^4-1}$（长度为 4 的循环卷积），可以发现，由于对 $a\perp b$ 有 $w(ab)=w(a)+w(b)$，f 是积性函数。

只需求出 f 的基本和组，提取各项系数即可完成本题。

注意到 $f(p)=px^p$，函数 f 并不符合 "标准积性函数求和" 的形式，不能直接套板子。

观察 Min_{25} 的整个过程何处用到了 "$f(p)$ 为多项式" 的性质，发现只有求边界值（即质数的函数值之和）时需要。

也就是说，记 $P(n)=[n\in\text{Prime}]$，如果我们求出了 $f\cdot P$ 的基本和组，就能 $O(n^{3/4}/\log n)$ 求出 f 的基本和组。

Luogu P7571 「MCOI-05」幂积

令 $f_*(n) = x^c x^n$ ，这是个完全积性函数，且有 $f(p) = f_*(p)$ ，问题转化为求 $f_* \cdot P$ 的基本和组。

进一步观察“质数 c 次方和”用到了“c 次方”的哪些性质，其实只有边界值（id_c 的基本和组）用了一次，转移时用了完全积性（只要积性就够）。

对于边界值，$[x^e]h(n,0) = \sum_{i=2}^{n}[i \bmod 4 = e]i^c$ ，是等差数列的 c 次方和，易求。

转移如法炮制，注意 $[x^0],[x^2]$ 项代表的都是 2 的倍数，无贡献，可以减小常数。

习题

- 51nod1575 Gcd and Lcm
- 51Nod1847 奇怪的数学题
- Loj6625. 时间复杂度

Thanks!