

NOIP图论专题

acwing340 通信线路

Sol

P6961 [NEERC2017] Journey from Petersburg to Moscow

Sol

acwing344 最小环问题

Sol

牛站

Sol

P5304 [GXOI/GZOI2019] 旅行者

Sol

P4899 [IOI2018] werewolf 狼人

Sol

通信系统

Sol

P4606 [SDOI2018] 战略游戏

Sol

P7515 [省选联考 2021 A 卷] 矩阵游戏

Sol

CF888G

Sol

Tree MST

Sol

NOIP图论专题

noip图论知识点一览:

- 最短路算法 (and同余最短路) (次短路)
- 最小生成树 (以及kuXXX重构树) (次小树)
- 二分图匹配 (增广路算法) (结论题扎堆)
- 网络流 (模型与24题)
- 树上问题 (lca, 树上差分, 基环树, 树剖, 树的直径与重心 (淀粉质, 淀粉树), 虚树, 仙人掌 (圆方树))
- tarjan算法 (缩点, 割点, 仙人掌)
- 建图的优化
- 差分约束
- etc

写在前面: 应hfu的要求, 图论内容只会讲题, 知识点将一笔带过, 且不会按知识点将题目分类

ACwing上的题目活动

acwing340 通信线路

在无向图上求出一条 1 到 n 的线路, 使得第 $k+1$ ($k \leq 1000$) 大的边权尽量小, 共有 n ($n \leq 1000$) 个点, m ($m \leq 10000$) 条边。

Sol

很显然答案有单调性，可以二分答案再dfs。

分层图做法：可以将图分为 k 层，每一层都是一份原图的复制品，且若点 b 在点 a 的下一层， ab 对应原图上的点有连边，则将 ab 连一条权值为 0 的边。

相当于可以走 k 次免费的边，再跑 spfa。

P6961 [NEERC2017] Journey from Petersburg to Moscow

给定一张无向图 G ，边带非负权值，给定常数 k ，求一条 $1 \rightsquigarrow n$ 的路径，使得路径上前 k 大的边权和最小。

$n, m \leq 3000$

Sol

如果某条路径的第 k 大边权为 w ，那么我们可以将前 k 大边的边权都减去 w ，更小的边的边权都变为 0，然后求新边权的和，再加上 $k \times w$ ，就得到了按题目要求的路径权值。

使用这个思路，相当于先对图进行如下变换：将所有边权 w_e 变为 $\max(0, w_e - w)$ ，然后求最短路，再将答案加上 $k \times w$ 。

如果第 k 大边权大于 w ，求出的答案偏大；第 k 大小于 w ，相当于将某些小于 w 的边看作 w ，答案也偏大。

acwing344 最小环问题

给定一张无向图，求图中一个至少包含三个点的环，环上节点不重复，且环上的边的长度之和最小。

要求输出一个最小环的方案。

Sol

考虑 Floyd 算法的思路：每层算的是点编号小于等于最外层循环的路径。

一个环可以表示为 $f_{i,j} + w_{i,k} + w_{k,j}$ ， f 是要求的， w 是边长。

牛站

给定一张 $m(m \leq 100)$ 条边 点的编号在 $n(n \leq 1000)$ 范围内的图，求从起点 S 到终点 T 恰好经过 $N(n \leq 10^6)$ 条边的最短路长度。

Sol

建出邻接矩阵后重定义下矩阵运算跑快速幂。

P5304 [GXOI/GZOI2019] 旅行者

J 国有 n 座城市，这些城市之间通过 m 条单向道路相连，已知每条道路的长度。

一次，居住在 J 国的 Rainbow 邀请 Vani 来作客。不过，作为一名资深的旅行者，Vani 只对 J 国的 k 座历史悠久、自然风景独特的城市感兴趣。

为了提升旅行的体验，Vani 想要知道他感兴趣的²城市之间「两两最短路」的最小值（即在他感兴趣的²城市中，最近的一对的最短距离）。

也许下面的剧情你已经猜到了——Vani 这几天还要忙着去其他地方游山玩水，就请你帮他解决这个问题吧。

$$n \leq 10^5, m \leq 5 \times 10^5$$

Sol

骗分做法：将点随机分为 S_1 和 S_2 ，建超级源点向 S_1 连边， S_2 向超级汇点连边，跑最短路。多随机几次。

正解：对原点集进行二进制分组跑最短路，复杂度两只 \log 。

正正解：设 $f_{i,j}$ 为 i 到 j 的最短路。对于一条最短路径 $s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_k$ 的长度，一定是 $f_{1,i} + w(i, i+1) + f_{i+1,k}$ 。分别建正图反图和超级源点汇点，跑最短路枚举边算长度。

P4899 [IOI2018] werewolf 狼人

在日本的茨城县内共有 N 个城市和 M 条道路。这些城市是根据人口数量的升序排列的，依次编号为 0 到 $N-1$ 。每条道路连接两个不同的城市，并且可以双向通行。由这些道路，你能从任意一个城市到另外任意一个城市。

你计划了 Q 个行程，这些行程分别编号为 0 至 $Q-1$ 。第 i ($0 \leq i \leq Q-1$) 个行程是从城市 S_i 到城市 E_i 。

你是一个狼人。你有两种形态：**人形**和**狼形**。在每个行程开始的时候，你是人形。在每个行程结束的时候，你必须是狼形。在行程中，你必须变身（从人形变成狼形）恰好一次，而且只能在某个城市内（包括可能是在 S_i 或 E_i 内）变身。

狼人的生活并不容易。当你是人形时，你必须避开人少的城市，而当你为狼形时，你必须避开人多的城市。对于每一次行程 i ($0 \leq i \leq Q-1$)，都有两个阈值 L_i 和 R_i ($0 \leq L_i \leq R_i \leq N-1$)，用以表示哪些城市必须要避开。准确地说，当你是人形时，你必须避开城市 $0, 1, \dots, L_i-1$ ；而当你为狼形时，则必须避开城市 $R_i+1, R_i+2, \dots, N-1$ 。这就是说，在行程 i 中，你必须在城市 L_i, L_i+1, \dots, R_i 中的其中一个城市内变身。

你的任务是，对每一次行程，判定是否有可能在满足上述限制的前提下，由城市 S_i 走到城市 E_i 。你的路线可以有任意长度。

- $2 \leq N \leq 200,000$
- $N-1 \leq M \leq 400,000$

- $1 \leq Q \leq 200,000$

简化题面：是否存在一条 s_i 到 t_i 的路径，满足先只走编号大于 L_i 的点，再只走小于 R_i 的点。

Sol

第一颗按照边权为两个端点编号的最小值构建重构树，重构树每个点的点权 x 表示不经过边权超过 x 的边能到达的所有点；

第二颗则按照边权为两个端点最大值来构建重构树，重构树上每个点点权 x 表示不经过边权 $\leq x$ 的边能到达的所有点。

限制在两棵树上分别对应了一个子树，现既是要求子树内有没有相同点。

每点设二维坐标为 (x, y) 分别为在两棵树中的dfs序，求的是一个矩阵内是否有点。（主席树啥的都行）

通信系统

在 n 个城市建立起一套通信系统。 n 个城市两两之间有且仅有一条简单路径。

一个通信系统的选择方案是随机选择一段连续序号的点，方案的代价为从被选择的点中选择任意一个点，从该点出发遍历所有被选择点，并回到出发点的总路径。

现在，你的任务就是求出通信系统代价的期望值。（对 1000000007 取模）

对于 100% 的数据， $n \leq 100000$

Sol

树上遍历选中点这就是虚树。

对于每一种情况把虚树建出来，树上所有边权和乘2就是答案。

但是这样不太好优化，考虑每条边对答案的贡献。

对于一棵子树，将子树内节点全部标记为黑色，其余标记为白色，当选取的区间同时包含黑色和白色，答案++。

正难则反，将总选取次数减去区间只包含单色的选取次数，即为当前子树根到它的父亲这条边对答案的贡献。

可用线段树维护，启发式合并，复杂度 $n \log n^2$

P4606 [SDOI2018] 战略游戏

简化题意：给定一个 10^5 个点， 2×10^5 条边的无向图，每次询问给出点集 S 询问是否能删去一个点使得 S 中某两个点不连通。 $\sum |S| \leq 2 \times 10^5$ 。

Sol

先考虑每次只给两个点的情况，显然建出圆方树求两点在圆方树上路径上的圆点就是要删的点。

多个点用圆方树建虚树就行。

P7515 [省选联考 2021 A 卷] 矩阵游戏

Alice 有一个 $n \times m$ 的矩阵 $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$)，其每个元素为大小不超过 10^6 的非负整数。

Bob 根据该矩阵生成了一个 $(n-1) \times (m-1)$ 的矩阵 $b_{i,j}$ ($1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m-1$)，每个元素的生成公式为

$$b_{i,j} = a_{i,j} + a_{i,j+1} + a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1}$$

现在 Alice 忘记了矩阵 $a_{i,j}$ ，请你根据 Bob 给出的矩阵 $b_{i,j}$ 还原出 $a_{i,j}$ 。

对于所有测试数据： $1 \leq T \leq 10, 2 \leq n, m \leq 300, 0 \leq b_{i,j} \leq 4 \times 10^6$ 。

Sol

显然如果将第一行和第一列全部变为零，剩下的可以全部被推出来。关键是 $0 \leq x_{i,j} \leq 10^6$ 的限制。

将第一行某一列加 x ，那么对应列奇数行加 x ，偶数行减 x ，仍然满足条件。

第一行第一列每一个数加减后都要使得矩阵中数满足 $0 \leq x_{i,j} \leq 10^6$ 的限制，是差分约束的模型。

CF888G

给定 n 个结点的无向完全图。每个点有一个点权为 a_i 。连接 i 号结点和 j 号结点的边的边权为 $a_i \oplus a_j$ 。

求这个图的 MST 的权值。

$1 \leq n \leq 2 \times 10^5, 0 \leq a_i < 2^{30}$ 。

Sol

建出trie后在trie上启发式合并。

Tree MST

给定一棵 n 个节点的树，现有有一张完全图，两点 x, y 之间的边长为 $w_x + w_y + dis_{x,y}$ ，其中 dis 表示树上两点的距离。

求完全图的最小生成树。

$$n \leq 2 \times 10^5。$$

- $2 \leq N \leq 200,000$
- $1 \leq X_i \leq 10^9$
- $1 \leq A_i, B_i \leq N$
- $1 \leq C_i \leq 10^9$

Sol

不能把边全建出来，考虑如何减少边的数量。

最小生成树本质是将点集分为两半，两者间找最小的边连起来。

此题上可以点分治，当前树内令 dep_i 为点 i 到当前根节点的距离，找 $dep_i + w_i$ 最小的点向树内所有点连边是最优的。一共 $n \log n$ 条边。

二维平面上曼哈顿距离最小生成树