

树套树，kdtree，stl

程渝峰

SCU

August 22, 2024

常规数据结构例如线段树，树状数组用于维护一维信息。
对于多维信息，一般使用树套树或 kd tree 维护
树套树即将外层数据结构的结点变为一个数据结构，每一层数据结构维护一维信息。

kD Tree 是一种可以高效处理 k 维空间信息的数据结构。在结点数 n 远大于 2^k 时，应用 k-D Tree 的时间效率很好。在算法竞赛的题目中，一般有 $k=2$ 。在本页面分析时间复杂度时，将认为 k 是常数。k-D Tree 具有二叉搜索树的形态，二叉搜索树上的每个结点都对应 k 维空间内的一个点。其每个子树中的点都在一个 k 维的超长方体内，这个超长方体内的所有点也都在这个子树中。

建立一颗 KD Tree, 步骤如下

- 若当前超长方体中只有一个点, 返回这个点。
- 选择一个维度, 将当前超长方体按照这个维度分成两个超长方体。
- 选择切割点: 在选择的维度上选择一个点, 这一维度上的值小于这个点的归入一个超长方体 (左子树), 其余的归入另一个超长方体 (右子树)。
- 将选择的点作为这棵子树的根节点, 递归对分出的两个超长方体构建左右子树, 维护子树的信息。

为保证复杂度，作两个优化

- 轮流选择 k 个维度，以保证在任意连续 k 层里每个维度都被切割到。
- 每次在维度上选择切割点时选择该维度上的中位数，这样可以保证每次分成的左右子树大小尽量相等。

其中第二个优化使用 `nth_element` 可以达到 $O(n)$ 的复杂度，整个建树的复杂度为 $O(n \log n)$

在查询高维矩形区域内的所有点的一些信息时，记录每个结点子树内每一维度上的坐标的最大值和最小值。如果当前子树对应的矩形与所求矩形没有交点，则不继续搜索其子树；如果当前子树对应的矩形完全包含在所求矩形内，返回当前子树内所有点的权值和；否则，判断当前点是否在所求矩形内，更新答案并递归在左右子树中查找答案。

先考虑二维的，在查询矩形 R 时，我们将 k -D Tree 上的结点分为三类：与 R 无交；完全被 R 包含；部分被 R 包含。

发现这三类点在查询中被访问的总数取决于第三类点，考虑统计。发现第 3 类点所对应的矩形，一定有 R 的一条边穿过之。所以我们只需要计算 R 的每条边穿过的矩形个数，即任意一条线段最多经过多少个点对应的矩形。对于某一个结点 u ，它有四个孙子，且它到每一个孙子都在两个维度上各进行了一次划分。经过观察可以发现，按照这种方法将一个矩形划分成四个子矩形，一条与坐标轴平行的线段最多经过两个区域

所以得到递归式 $T(n) = 2T(n/4) + O(1)$ 即 $T(n) = \sqrt{n}$

同理拓展到 k 维时 $T(n) = O(n^{1-\frac{1}{k}})$

由于 KD Tree 的特殊结构，使得 KD Tree 不支持旋转或 split/merge 操作。

为了保持 KD Tree 有的平衡树的结构，用替罪羊树维护

您需要写一种数据结构（可参考题目标题），来维护一个有序数列，其中需要提供以下操作：

1. 查询 k 在区间内的排名
2. 查询区间内排名为 k 的值
3. 修改某一位置上的数值
4. 查询 k 在区间内的前驱（前驱定义为严格小于 x ，且最大的数，若不存在输出 -2147483647）
5. 查询 k 在区间内的后继（后继定义为严格大于 x ，且最小的数，若不存在输出 2147483647）

$1 \leq n, m \leq 5 \times 10^4$ ，序列中的值在任何时刻 $\in [0, 10^8]$ 。

这是树套树的模板题。首先考虑没有区间的操作，可以用值域线段树完成。

如果没有修改，可以用可持久化值域线段树。

因为有前缀和的原因，不好维护可持久化值域线段树，考虑前缀和问题用树状数组维护，把可持久化值域线段树的前缀和变为树状数组维护。树状数组的每一个元素维护一个值域线段树即可。

给定一个含有 n 个数的序列 $a_1, a_2 \dots a_n$, 需要支持两种操作:

Q $l\ r\ k$ 表示查询下标在区间 $[l, r]$ 中的第 k 小的数

C $x\ y$ 表示将 a_x 改为 y

$1 \leq n, m \leq 10^5$, $1 \leq l \leq r \leq n$, $1 \leq k \leq r - l + 1$, $1 \leq x \leq n$,
 $0 \leq a_i, y \leq 10^9$ 。

没有修改的问题就是经典的主席树题，前缀和改树状数组即可。

你需要维护 n 个可重整数集，集合的编号从 1 到 n 。

这些集合初始都是空集，有 m 个操作：

1 $l\ r\ c$ ：表示将 c 加入到编号在 $[l, r]$ 内的集合中

2 $l\ r\ c$ ：表示查询编号在 $[l, r]$ 内的集合的并集中，第 c 大的数是多少。

注意可重集的并不去除重复元素的，如

$\{1, 1, 4\} \cup \{5, 1, 4\} = \{1, 1, 4, 5, 1, 4\}$ 。

$1 \leq n, m \leq 5 \times 10^4, 1 \leq l, r \leq n$

1 操作中 $|c| \leq n$

2 操作中 $1 \leq c < 2^{63}$

线段树套线段树，外层线段树永久化标记，每次把区间有交的全部查即可。

红星幼儿园的小朋友们排起了长长地队伍，准备吃果果。不过因为小朋友的身高有所区别，排成的队伍高低错乱，极不美观。设第 i 个小朋友的身高为 h_i 。

幼儿园阿姨每次会选出两个小朋友，交换他们的位置，请你帮忙计算出每次交换后，序列的逆序对数。为方便幼儿园阿姨统计，在未进行任何交换操作时，你也应该输出该序列的逆序对数。

$1 \leq m \leq 2 \times 10^3$, $1 \leq n \leq 2 \times 10^4$, $1 \leq h_i \leq 10^9$, $a_i \neq b_i$,
 $1 \leq a_i, b_i \leq n$ 。

考虑维护每次操作的改变量。先计算出初始逆序对数，考虑求改变量。发现是查询一个区间中值域在一定范围的数的个数，树状数组套值域线段树即可。

加里敦大学有个帝国图书馆，小豆是图书馆阅览室的一个书籍管理员。

他的任务是把书排成有序的，所以无序的书让他产生厌烦。

两本乱序的书会让小豆产生这两本书页数的和的厌烦度。

现在有 n 本被打乱顺序的书，在接下来 m 天中每天都会因为读者的阅览导致书籍顺序改变位置。

因为小豆被要求在接下来的 m 天中至少要整理一次图书。

小豆想知道，如果他前 i 天不去整理，第 i 天他的厌烦度是多少，这样他好选择厌烦度最小的那天去整理。

$1 \leq a_i, x_j, y_j \leq n \leq 5 \times 10^4$, $1 \leq m \leq 5 \times 10^4$, $1 \leq v_i \leq 10^5$ 。

同上一道的区间逆序对，一对逆序对的贡献由 1 变为权值之和，多维护一个区间值的和即可。

佳媛姐姐过生日的时候，她的小伙伴从某宝上买了一个有趣的玩具送给他。

玩具上有一个数列，数列中某些项的值可能会变化，但同一个时刻最多只有一个值发生变化。现在佳媛姐姐已经研究出了所有变化的可能性，她想请教你，能否选出一个子序列，使得在任意一种变化和原序列中，这个子序列都是不降的？请你告诉她这个子序列的最长长度即可。

所有数字均为正整数，且小于等于 10^5 。 $1 \leq x \leq n$ 。

考虑 dp, 设 $dp[i]$ 为以第 i 项结尾的子序列的最长长度。

有转移 $dp_i = \max_{j < i \wedge \maxval_j \leq a_i \wedge a_j \leq \minval_i} (dp_j) + 1$

发现这个转移关系是一个三维偏序, 在 dp 中树套树维护即可。

给 N 盏灯，没盏灯能照到的角度范围是相同的，第 i 盏灯在第 i 秒或者被 k_i 盏灯照到后都会亮起，问所有灯都在什么时刻亮起

$1 \leq n \leq 200000$

对于每盏灯计算出所有能照到这个灯亮起的时间中第 k 小。由于这个坐标不好计算考虑转换坐标系，把给定的向量看成方向向量建立坐标系。解方程 $a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) = (x_i, y_i)$ 即可。
扫描线转化一下就是一个单点插入，区间第 k 小

这个简易输入法原先有一个词典 U ，用户输入时，输入法从用户处读入一个字符串 s ，以及一个整数 x 对于这个字符串有以下几种情形：

设 $s_i \in U$ 且 s 为 s_i 的前缀的个数为 a 。

当 $a \geq x$ 时，请输出按照以输出次数从大到小为第一关键字，以字典序为第二关键字排序后的第 x 个 s_i ，并将其输出次数加 1。

当 $x > a > 0$ 时，请输出按照以输出次数从大到小为第一关键字，以字典序为第二关键字排序后的最后一个 s_i ，并将其输出次数加 1。

当 $a = 0$ 时，输出 404Error。

对于 100% 的数据， $|s|, |str| \leq 10, 1 \leq x \leq 10^4$ ，所有字母都是小写字母。

考虑建一棵 trie，算出 dfn，每次的查询在 dfn 上就是一个区间。问题转化为单点加，区间第 k 大。树套树即可。

给定一个初始值全为 0 的 n^2 矩阵，有 m 次操作，有以下类型：

1 x_1 y_1 x_2 y_2 : 查询 (x_1, y_1) 到 (x_2, y_2) 的区间异或和。

2 x_1 y_1 x_2 y_2 w : 将 (x_1, y_1) 到 (x_2, y_2) 的区间异或上 w 。

$1 \leq n \leq 1000$, $1 \leq m \leq 10^5$, $0 \leq w \leq 2^{62}$, $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq n$,

$1 \leq y_1 \leq y_2 \leq n$ 。

考虑差分，做两次前缀和每个点的贡献形如 $(x - i + 1)(y - j + 1)$ ，讨论 x, y 的奇偶性，建 4 棵二位树状数组即可。

William 想在之后的 n 天内出租他的公寓。有 m 个请求待 William 依次处理，对于第 i 个请求 $[l_i, r_i]$ 表示一人想在 $[l_i, r_i]$ 天内租借公寓，而这个请求会被接受当且仅当 $r_i - l_i + 1 \geq x$ 且 $[l_i, r_i]$ 这些天内公寓都是空闲的。请对每个 $x = 1 \cdots n$ 输出公寓出租的总天数。
 $n \leq 5 \times 10^4, m \leq 10^5, 1 \leq l_i \leq r_i \leq n$ 。

考虑固定 x 的计算方式，最开始是区间 $[l, r]$ 找到区间中长度大于等于 x 且 $l \leq x \leq y \leq r$ 的编号最小的区间 $[x, y]$ ，用树套树维护每次找一次的复杂度为 $O(\log^2 n)$ ，然后在 $[l, x-1]$ 和 $[y+1, r]$ 中继续查找。

考虑已知 x ，最多有 $\frac{n}{x}$ 个区间，总共加起来 $O(n \ln n)$ 个区间，从大到小枚举 x 即可。

此时已是凌晨两点，刚刚做了 Codeforces 的小 A 掏出了英语试卷。英语作业其实不算多，一个小时刚好可以做完。然后是一个小时可以做完的数学作业，接下来是分别都是一个小时可以做完的化学，物理，语文……小 A 压力巨大。

这时小 A 碰见了一道非常恶心的数学题，给定了一个长度为 n 的数列和若干个询问，每个询问是关于数列的区间表示数列的第 l 个数到第 r 个数)，首先你要统计该区间内大于等于 a ，小于等于 b 的数的个数，其次是所有大于等于 a ，小于等于 b 的，且在该区间中出现过的数值的个数。

小 A 望着那数万的数据规模几乎绝望，只能向大神您求救，请您帮帮他吧。

$N \leq 100000$, $M \leq 100000$ ，读入的数字均为 $[1, 10^5]$ 内的正整数。

对于出现的数的个数，主席树维护即可。

考虑如何求出现的数值的个数，为每一个数记一个数 pre_i 为权值与自己相同的上一个点的下标，没有记为 0。对于区间统计 $pre_i < l \wedge a \leq a_i \leq b$ 即可，树套树维护。

给定长度为 n 的数组，定义数字 X 在 $[l, r]$ 内的值为数字 X 在 $[l, r]$ 内最后一次出现位置的下标减去第一次出现位置的下标。

给定 m 次询问，每次询问有三个整数 a, b, c ，询问规则如下：

当 $a = 1$ 时，将数组内第 b 个元素更改为 c 。

当 $a = 2$ 时，求区间 $[b, c]$ 所有数字的值的和。

考虑每一个数维护一个值为自己的下标减去前一个与自己值相同的下标，记 val_i 。

问题就变成了查询 $\sum_{l \leq i \leq r, pre_i \geq l, b \leq a_i \leq c} val_i$
树套树即可。

<https://www.luogu.com.cn/problem/P3688>

可以发现图中的代码写成了后缀和, 所以题目的询问即为 $\text{val}[r] == \text{val}[l - 1]$ 的概率。

考虑离线维护每次修改对询问的影响即可, 用树套树维护。

维护一个长为 n 的序列 a_i , 有 m 次操作。

1. 将区间 $[l, r]$ 的值修改为 x 。
2. 询问区间 $[l, r]$ 出现了多少种不同的数, 也就是说同一个数出现多次只算一个。

$1 \leq n, m \leq 10^5, 1 \leq a_i \leq 10^9$ 。

对于这种题，考虑维护 pre_i ，发现大部分点修改前后都是 $pre_i = i - 1$ ，可证明均摊复杂度 $O(n)$ ，树套树维护即可。

从前有 n 只跳蚤排成一行做早操，每只跳蚤都有自己的一个弹跳力 a_i 。跳蚤国王看着这些跳蚤国欣欣向荣的情景，感到非常高兴。这时跳蚤国王决定理性愉悦一下，查询区间 k 小值。他每次向它的随从伏特提出这样的问题：从左往右第 x 个到第 y 个跳蚤中， a_i 第 k 小的值是多少。

这可难不倒伏特，他在脑袋里使用函数式线段树前缀和的方法水掉了跳蚤国王的询问。

这时伏特发现有些跳蚤跳久了弹跳力会有变化，有的会增大，有的会减少。

这可难不倒伏特，他在脑袋里使用树状数组套线段树的方法水掉了跳蚤国王的询问。（orz 主席树）

这时伏特发现有些迟到的跳蚤会插入到这一行的某个位置上，他感到非常生气，因为……他不会做了。

$n \leq 35000$ ；插入个数 ≤ 35000 ，修改个数 ≤ 70000 ，查询个数 ≤ 70000 ， $0 \leq$ 每时每刻的权值 ≤ 70000 。

考虑外层值域线段树用于二分，内层平衡树即可。

平面上有 n 个点。现在有 m 次询问，每次给定一个点 (px, py) 和一个整数 k ，输出 n 个点中离 (px, py) 的距离第 k 大的点的标号。如果有两个 (或多个) 点距离 (px, py) 相同，那么认为标号较小的点距离较大。

$1 \leq n \leq 10^5$, $1 \leq m \leq 10^4$, $1 \leq k \leq 20$,
 $-10^9 \leq x_i, y_i, px_i, py_i \leq 10^9$, n 个点中任意两点坐标不同, m 个询问的点的坐标在某范围内随机分布。

KDTree 求邻域是经典做法。用堆维护前 k 大，暴力搜索即可。

具体说来, Bob 会在一个宽敞的广场上放置一些崂山白花蛇草水 (可视为二维平面上的一些整点), 然后询问 Aleph 在矩形区域 $x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2$ 中, 崂山白花蛇草水瓶数第 k 多的是多少。为了避免麻烦, Bob 不会在同一个位置放置两次或两次以上的崂山白花蛇草水, 但 Bob 想为难一下 Aleph, 希望他能在每次询问时立刻回答出答案。

Aleph 不屑于做这种问题, 所以把这个问题交给了你。
初始时平面上不存在崂山白花蛇草水。

$$n \leq 500000, \quad q \leq 100000, \quad 1 \leq x, y \leq n, \quad 1 \leq v \leq 10^9, \\ 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq n, \quad 1 \leq y_1 \leq y_2 \leq n, \quad 1 \leq k \leq q.$$

值域线段树套 KDTree 即可。外层值域线段树用于二分，内层 KDTree 查询。

定义 `bitset<length>item`
就是一个长为 `length` 的 01 串

定义 `bitset<length>item`
就是一个长为 `length` 的 01 串

: 访问任意一位

- `&,|,!^,«,»`: 位运算
- `count()` 返回 `bitset` 中 1 的个数
- `any()` 是否存在 1
- `none()` 是否没有 1
- `all()` 是否全是 1
- `set(),reset(),flip()`: 全设 1; 全设 0; 全翻转

Description

有一条豪华游轮（其实就是条小木船），这种船可以执行 4 种指令：
right X ：其中 X 是一个 1 到 719 的整数，这个命令使得船顺时针转动 X 度。

left X ：其中 X 是一个 1 到 719 的整数，这个命令使得船逆时针转动 X 度。

forward X ：其中 X 是一个整数（1 到 1000），使得船向正前方前进 X 的距离。

backward X ：其中 X 是一个整数（1 到 1000），使得船向正后方前进 X 的距离。

随意的写出了 n 个命令，找出一个种排列命令的方法，使得船最终到达的位置距离起点尽可能的远。

$1 \leq n \leq 50$

考虑到这是一个类背包问题，bitset 优化转移即可。

Description

给你一个长度为 n 的字符串 S 。有 m 个操作，保证 $m \leq n$ 。你还有一个字符串 T ，刚开始为空。共有两种操作。

第一种操作：在字符串 T 的末尾加上一个字符。

第二种操作：在字符串 T 的开头加上一个字符。

每次操作完成后要求输出有几个 $l \in [1, T.size]$ 满足以下条件：对于 $\forall i \in [1, l]$ 有 $T_{T.size-l+i} \neq S_i$ $n \leq 10^6, m \leq 4 \times 10^4, |\sum| \leq 10^3$

每个位子和每种字符都是独立的，对每种字符都记录一下位子。
bitset 转移。