

组合数学 1

二项式系数

God_Max_Me

2025 年 1 月 23 日

插板法

插板法 1

有 n 个完全相同的元素, 将其分为 k 组, 每组至少有一个元素, 一共有多少种分法?

插板法

插板法 1

有 n 个完全相同的元素，将其分为 k 组，每组至少有一个元素，一共有多少种分法？

Solution

$k - 1$ 块板插入 $n - 1$ 个空隙，答案为

$$\binom{n-1}{k-1}$$

插板法 3

从 $1, 2, \dots, n$ 中选出 k 个数, 要求任何两个数都不相邻, 一共有多少种选法?

Solution

这 k 个元素把 $1 \sim n$ 划分成了 $k+1$ 段, 设每段的值为 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$, 则它们满足

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = n - k \wedge a_1, a_2, \dots, a_{n-1} > 0, a_0, a_n \geq 0$$

给 a_0, a_n 都加上 1, 让 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ 都 > 0 , 此时

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = n - k + 2$$

即将 $n - k + 2$ 个数划分成至少为 1 的 $k+1$ 段, 方案数为

$$\binom{n-k+1}{k}$$

定义的拓展

上述定义的定义域为 $n, m \in \mathbb{N}$, 使用下面的定义, 将定义域扩展到 $n \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} \frac{n^{\underline{m}}}{m!} & m \geq 0 \\ 0 & m < 0 \end{cases}$$

规定 $0^0 = 0! = x^0 = 1$ 。

组合恒等式

下面的恒等式如果没有特殊标注则表示对 $n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ 成立

加法公式

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

组合恒等式

下面的恒等式如果没有特殊标注则表示对 $n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ 成立

加法公式

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

对称公式

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad n, k \in \mathbb{N}$$

注意对称公式对负的 n 是不成立的

吸收公式

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}, \quad (n-k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k}$$

上指标反转

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k}$$

吸收公式

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}, \quad (n-k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k}$$

上指标反转

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k}$$

以上柿子均可以由定义推出，这里不再赘述。

组合求和式

广义二项式定理

对 $n \in \mathbb{R}$, $|\frac{x}{y}| < 1$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

特别地, 当 $n \in \mathbb{N}$ 时就是常用的二项式定理

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

证明的话对 $f(x) = (x + y)^n$ 在 $x = 0$ 处做泰勒展开即可。

组合求和式

广义二项式定理

对 $n \in \mathbb{R}$, $|\frac{x}{y}| < 1$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

特别地, 当 $n \in \mathbb{N}$ 时就是常用的二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

证明的话对 $f(x) = (x+y)^n$ 在 $x=0$ 处做泰勒展开即可。

组合数一行之和

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

二项式定理取 $x=y=1$ 即可。

平行求和

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}, \quad m \in \mathbb{N}$$

证明

将 $\binom{n+m+1}{m}$ 用加法公式一步步展开即可

$$\begin{aligned} \binom{n+m+1}{m} &= \binom{n+m}{m} + \binom{n+m}{m-1} \\ &= \binom{n+m}{m} + \binom{n+m-1}{m-1} + \binom{n+m-1}{m-2} \\ &= \cdots \\ &= \binom{n+m}{m} + \binom{n+m-1}{m-1} + \cdots + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{0} \end{aligned}$$

上指标求和

$$\binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \sum_{k=0}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

上指标求和

$$\binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \sum_{k=0}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

证明

将 $\binom{n+1}{m+1}$ 用加法公式一步步展开即可

交错和

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

交错和

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

证明

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^m \binom{k-n-1}{k} \quad \text{上指标反转}$$

范德蒙德卷积

$$\sum_k \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

组合意义

从 $r+s$ 个物品中一共要选 n 个，总方案数是 $\binom{r+s}{n}$ 。枚举 k 表示从前 r 个物品中选了 k 个，那么从后面 s 个物品中就选了 $n-k$ 个，方案数是 $\binom{r}{k} \binom{s}{n-k}$ 。

多项式系数

三项式版恒等式

$$\binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}, \quad m, k \in \mathbb{Z}$$

两边都是用定义展开即可得证。

总结一下，常用恒等式如下表所示：

上指标求和和平方求和都有封闭形式，但是遗憾的是，下指标求和没有封闭形式。

$$\sum_{k \leq m} \binom{n}{k}, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

开始推式子吧

求出下式的封闭形式

$$\sum_k \binom{n}{k}^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

对称公式之后范德蒙德卷积即可。

$$\sum_k \binom{n}{k}^2 = \sum_k \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

求出下式的封闭形式

$$\sum_k k \binom{n}{k}^2$$

求出下式的封闭形式

$$\sum_k k \binom{n}{k}^2$$

吸收律之后对称公式之后范德蒙德卷积即可。

$$\begin{aligned} \sum_k k \binom{n}{k}^2 &= n \sum_k \binom{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \sum_k \binom{n}{k} \binom{n-1}{n-k} = n \binom{2n-1}{n} \end{aligned}$$

《具体数学》的例题

$$\sum_{k=0}^m \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad n \geq m$$

求出下式的封闭形式

$$\sum_{k=m}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad n \geq m$$

还有一种做法，可以考虑生成函数：

还有一种做法，可以考虑生成函数：

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^n \sum_{k=m}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^m \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} x^m \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (1+x)^k \\
 &= (-1-x+1)^n = (-x)^n
 \end{aligned}$$

组合数学 1

例题

《具体数学》的例题

$$\sum_k \binom{n+k}{2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

例题

《具体数学》的例题

$$\sum_k \binom{n+k}{2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} & \sum_k \binom{n+k}{2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_k \binom{n+k}{k} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \sum_k \binom{n+k}{k} \binom{n+1}{k+1} \frac{(-1)^k}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_k \binom{-n-1}{k} \binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{0}{n} = [n=0] \end{aligned}$$

《具体数学》的例题

$$\sum_k \binom{n+k}{m+2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

《具体数学》的例题

$$\sum_k \binom{n+k}{m+2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

利用式 (5.26) 尝试反向使用范德蒙德卷积：

$$\begin{aligned} &= \sum_k \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{0 \leq j \leq n+k-1} \binom{n+k-1-j}{2k} \binom{j}{m-1} \\ &= \sum_{j \geq 0} \binom{j}{m-1} \sum_{k \geq j-n+1} \binom{n+k-1-j}{2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \sum_{j \geq 0 < n} \binom{j}{m-1} \sum_{k \geq 0} \binom{n+k-1-j}{2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \sum_{0 \leq j < n} \binom{j}{m-1} [n-1-j=0] = \binom{n-1}{m-1} \end{aligned}$$

组合数学 1

例题

终于到 OI 题了

[SDOI2016] 排列计数

求有多少种 $1 \sim n$ 的排列 a , 满足恰有 m 个位置 i 使得 $a_i = i$ 。答案对 $10^9 + 7$ 取模。
 $1 \leq T \leq 5 \times 10^5$, $1 \leq n \leq 10^6$, $0 \leq m \leq 10^6$ 。

记 n 个元素的错排为 d_n , 那么原式就等于 $\binom{n}{m} d_{n-m}$, 考虑快速计算 d 。

一种做法是直接容斥：

$$d_n = n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

一种做法是直接容斥：

$$d_n = n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

另一种做法是考虑递推，考虑 n 所在的环的大小：

- 大小为 2，那么剩下的所有是一个 $n-2$ 的错排，方案数为 $(n-1)d_{n-2}$
- 大小 > 2 ，那么插入 n 之前就已经是一个错排了，枚举插入位置，方案数为 $(n-1)d_{n-1}$

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$$

例题

[六省联考 2017] 组合数问题

求

$$\sum_{i \bmod k=r} \binom{nk}{i} \bmod p$$

$$1 \leq n \leq 10^9, 0 \leq r < k \leq 1000, 2 \leq p \leq 2^{30} - 1$$

例题

[六省联考 2017] 组合数问题

求

$$\sum_{i \bmod k=r} \binom{nk}{i} \bmod p$$

$$1 \leq n \leq 10^9, 0 \leq r < k \leq 1000, 2 \leq p \leq 2^{30} - 1$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i \bmod k=r} [x^i] (1+x)^{nk} \\ &= [x^r] \left((1+x)^{nk} \bmod (x^k - 1) \right) \end{aligned}$$

循环卷积快速幂即可，复杂度 $O(k^2 \log nk)$

例题

[HAOI2018] 苹果树

一棵二叉树，初始只有一个根节点。每次随机在可能的位置接上一个节点来产生一个 n 个节点的二叉树，设树上节点两两距离之和的期望为 E ，求 $n! \cdot E$ 在 $\text{mod } P$ 意义下的值。

$$n \leq 2000, P \leq 10^9 + 7$$

组合数学 1

例题

[ZJOI2015] 地震后的幻想乡

给定一张 n 个点 m 条边的图，边的边权是 $[0, 1]$ 之间均匀分布的随机实数，且相互独立。求最小生成树的最大边权的期望值。

结果保留 6 为小数。

$$n \leq 10, m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

提示（原题给的提示）：对于 n 个 $[0, 1]$ 之间的随机变量 x_1, \dots, x_n ，第 k 小值的期望值是 $\frac{k}{n+1}$ 。

于是我们统计这样的 (S, e) 的数量。恰好联通这个条件并不好统计，我们转换一下，可以变成加之前不连通的边集数 - 加之后不连通的边集数。

令 $f_{S,i}, g_{S,i}$ 分别表示点集为 S ，边集大小为 i ，且点集不连通/连通的边集数量，令 d_S 表示点集 S 的导出子图的边数，则

$$g_{S,i} + f_{S,i} = \binom{d_S}{i}$$

考虑 f 的转移，对于一个 S ，任取 S 中的一个点 k ，枚举 k 所在的连通块 T

$$f_{S,i} = \sum_{k \in T \subsetneq S} \sum_j g_{T,j} \binom{d_{S \setminus T}}{i-j}$$

最后考虑如何统计答案，令点集的全集为 U ，考虑加入第 k 条边时恰好连通的二元组 (S, e) ， $|S| + 1 = k$ ，这样的二元组数量是

$$(m - k + 1)f_{U, k-1} - kf_{U, k}$$

于是最终答案为

$$\sum_{k=1}^m \frac{k}{m+1} \cdot \frac{1}{\binom{m}{k} \cdot k} ((m - k + 1)f_{U, k-1} - kf_{U, k})$$

化简可得一个更简单的表达式为

$$\frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m \frac{f_{U, k}}{\binom{m}{k}}$$

某联考題

给定序列 a , 每次询问给出 $[l, r]$ 和 k 。

回答：在序列 a 中值在 $[l, r]$ 内的数所有数中随机选择 k 个，最大值的期望 mod 998244353，不足 k 个输出 -1 。

$$n, \sum k \leq 10^5, a_i \leq 10^8$$

根据范德蒙德卷积

$$\begin{aligned} ans &= \sum_{i=l+k-1}^r a_i \sum_{j=0}^{k-1} \binom{i}{j} \binom{-l}{k-j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{-l}{k-j-1} \sum_{i=l+k-1}^r a_i \binom{i}{j} \end{aligned}$$

前面的组合数使用上指标反转即可。

Lucas 定理

Lucas 定理可以用来求大组合数对小模数取模的结果

Lucas 定理

对于质数 p ,

$$\binom{n}{m} \bmod p = \binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor m/p \rfloor} \cdot \binom{n \bmod p}{m \bmod p} \bmod p$$

Lucas 定理的证明

引理 1

$$\binom{p}{n} \bmod p = [n = 0 \vee n = p]$$

证明. $\binom{p}{n} = \frac{p!}{n!(p-n)!}$, 分子中 p 的次数为 1, 若 $\binom{p}{n} \not\equiv 0 \pmod{p}$, 则 $n = p$ 或 $p - n = p$, 此时 $n = 0$ 或 p , $\binom{p}{n} \bmod p = 1$ 。

Lucas 定理的证明

引理 1

$$\binom{p}{n} \bmod p = [n = 0 \vee n = p]$$

证明. $\binom{p}{n} = \frac{p!}{n!(p-n)!}$, 分子中 p 的次数为 1, 若 $\binom{p}{n} \not\equiv 0 \pmod{p}$, 则 $n = p$ 或 $p - n = p$, 此时 $n = 0$ 或 p , $\binom{p}{n} \bmod p = 1$ 。

引理 2

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

证明.

$$\begin{aligned} (a + b)^p &\equiv \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} a^n b^{p-n} \pmod{p} \\ &\equiv a^p + b^p \pmod{p} \end{aligned}$$

A set of small navigation icons typically found in Beamer presentations, including symbols for back, forward, search, and other slide controls.

扩展 Lucas 定理

Lucas 定理要求模数必须是质数，如果模数不是质数怎么办。

问题

求

$$\binom{n}{m} \bmod M$$

其中 $M \leq 10^6$ 有质因数分解

$$M = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

问题在于分母中可能含有 p 这个因子，无法直接求逆，考虑把分子分母中的 p 因子全部提出来。

设 $n!, m!, (n-m)!$ 中 p 因子的次数分别为 x, y, z (这是好求的)，我们只要求

$$\frac{\frac{n!}{p^x}}{\frac{m!}{p^y} \frac{(n-m)!}{p^z}} p^{x-y-z} \bmod p^\alpha$$

现在分母可以 `exgcd` 求逆了，我们只要求形如下面这样的式子

$$\frac{n!}{p^x} \bmod p^\alpha$$

即 $n!$ 中去除 p 因子后 $\bmod p^\alpha$ 的结果。

将 $n!$ 中的元素分成两个部分：

- p 的倍数，这一部分的积为 $p^{\lfloor n/p \rfloor} (\lfloor n/p \rfloor)!$
- 非 p 的倍数，这一部分又可以按照 $\bmod p^\alpha$ 的循环节和余项两部分

所以有：

$$n! = q^{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor} \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right)! \cdot \left(\prod_{i, (i, q)=1}^{q^\alpha} i \right)^{\lfloor \frac{n}{q^\alpha} \rfloor} \cdot \left(\prod_{i, (i, q)=1}^{n \bmod q^\alpha} i \right)$$

于是：

$$\frac{n!}{q^{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor}} = \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right)! \cdot \left(\prod_{i, (i, q)=1}^{q^\alpha} i \right)^{\lfloor \frac{n}{q^\alpha} \rfloor} \cdot \left(\prod_{i, (i, q)=1}^{n \bmod q^\alpha} i \right)$$

循环节内的乘积需要暴力求； $\left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \right)!$ 可以递归求解。

例题

[SHOI2015] 超能粒子炮·改

给定 n, m , 求

$$\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \bmod 2333$$

$$m \leq n \leq 10^9$$

例题

[AHOI2017/HNOI2017] 抛硬币

给定 a, b, k , 求满足下列条件的 01 串二元组 (s, t) 的数量

- $|s| = a, |t| = b$
- s 中 1 的数量严格大于 t 中 1 的数量

答案对 10^k 取模。

$$1 \leq a, b \leq 10^{15}, b \leq a \leq b + 10^4, 1 \leq k \leq 9$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=0}^{a-i} \binom{a}{i+j} \binom{b}{j} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=0}^b \binom{a}{i+j} \binom{b}{b-j} \\ &= \sum_{i=1}^a \binom{a+b}{b+i} = \sum_{i=b+1}^{a+b} \binom{a+b}{i} \end{aligned}$$

范德蒙德卷积

卡特兰数

Catalan 数列 H_n 是以下问题的方案数：

- 1 有一个大小为 $n \times n$ 的方格图，左下角为 $(0, 0)$ 右上角为 (n, n) ，从左下角开始每次都只能向右或者向上走一单位，不走到对角线 $y = x$ 上方（但可以触碰）的情况下到达右上角有多少可能的路径？
- 2 在圆上选择 $2n$ 个点，将这些点成对连接起来使得所得到的 n 条线段不相交的方法数？
- 3 一个栈的进栈序列为 $1, 2, 3, \dots, n$ 有多少个不同的出栈序列？
- 4 n 个结点可构造多少个不同的二叉树？
- 5 n 对括号能组成的括号序列数？
- 6

卡特兰数

Catalan 数列 H_n 是以下问题的方案数：

- 1 有一个大小为 $n \times n$ 的方格图，左下角为 $(0, 0)$ 右上角为 (n, n) ，从左下角开始每次都只能向右或者向上走一单位，不走到对角线 $y = x$ 上方（但可以触碰）的情况下到达右上角有多少可能的路径？
- 2 在圆上选择 $2n$ 个点，将这些点成对连接起来使得所得到的 n 条线段不相交的方法数？
- 3 一个栈的进栈序列为 $1, 2, 3, \dots, n$ 有多少个不同的出栈序列？
- 4 n 个结点可构造多少个不同的二叉树？
- 5 n 对括号能组成的括号序列数？
- 6

众所周知，卡特兰数有以下两个表达式

$$\begin{aligned} H_n &= \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} H_i H_{n-i-1} & (n \geq 2) \\ 1 & (n = 0, 1) \end{cases} \\ &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \end{aligned}$$

卡特兰数的通项公式

卡特兰数的通项公式

$$H_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

由此还可以得到一个递推式

$$H_n = \frac{H_{n-1}(4n-2)}{n+1}$$

卡特兰数通项公式的证明

$$H_n = \sum_{i=0}^{n-1} H_i H_{n-i-1} \quad (n \geq 2)$$

其中 $H_0 = 1, H_1 = 1$ 。设它的普通生成函数为 $H(x)$ ，利用卷积，得到它的一个方程。

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{n \geq 0} H_n x^n \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} H_i x^i H_{n-i-1} x^{n-i-1} x \\ &= 1 + x \sum_{i \geq 0} H_i x^i \sum_{n \geq 0} H_n x^n \\ &= 1 + x H^2(x) \end{aligned}$$

解得

$$H(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

那么这就产生了一个问题：我们应该取哪一个根呢？我们将其分子有理化：

$$H(x) = \frac{2}{1 \mp \sqrt{1-4x}}$$

代入 $x=0$ ，我们得到的是 $H(x)$ 的常数项，也就是 H_0 。当

$H(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{1-4x}}$ 的时候有 $H(0) = 1$ ，满足要求。而另一个解会出现分母为 0 的情况（不收敛），舍弃。

因此我们得到了卡特兰数生成函数的封闭形式：

$$H(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

接下来我们要将其展开。使用牛顿二项式定理。

$$\begin{aligned}(1-4x)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} (-4x)^n\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \frac{-3}{2} \cdots \frac{-(2n-3)}{2} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{2^n} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{2^n (2n-2)!!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{2^{2n-1} (n-1)!} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}(1-4x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!} (-4x)^n \\ &= 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} 2x^n = 1 - \sum_{n \geq 1} \binom{2n-1}{n} \frac{1}{(2n-1)} 2x^n\end{aligned}$$

带回原式得到

$$\begin{aligned}H(x) &= \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x} \sum_{n \geq 1} \binom{2n-1}{n} \frac{1}{(2n-1)} 2x^n \\ &= \sum_{n \geq 1} \binom{2n-1}{n} \frac{1}{(2n-1)} x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n+1}{n+1} \frac{1}{(2n+1)} x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} x^n\end{aligned}$$

这样我们就得到了卡特兰数的通项公式。

$\binom{2n}{n}$ 的生成函数

- 利用 $H_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}$ 的生成函数是 $H(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$, 求 $\binom{2n}{n}$ 的生成函数。

$\binom{2n}{n}$ 的生成函数

- 利用 $H_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}$ 的生成函数是 $H(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$, 求 $\binom{2n}{n}$ 的生成函数。

$$Q(x) = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n = (x \cdot H)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

例题

[THUSC2021] 种树

这是一道**通信题**

给你一棵 n 个点的树，你需要完成一个编码器和解码器。

编码器需要返回一个 128 位二进制数，用于表示这棵树。解码器需要根据编码器返回的 128 位二进制数还原这棵树（还原出一棵同构的树即可）。两棵树同构当且仅当它们在节点无标号、考虑孩子顺序的意义下相同。

$$n \leq 70, T \leq 10^5$$

例题

某联考题

给定一个长度为 n 的括号序列 c (不一定合法, 但左括号和右括号数量相同)

定义一个 $1, 2, \dots, n$ 的排列 p 是好的, 当且仅当括号序列 $d(\forall i \in [1, n], d_i = c_{p_i})$ 是合法的括号序列, 定义 c 的价值为所有好的排列的逆序数总和。

c 并不稳定, 会发生 q 次改变, 具体来说, c 中的某两个元素会发生交换。(改变是永久的)

你需要对一开始的 c 和每次改变后的 c 分别求出它的价值对输入的质数 P 取模的结果。

$$n \leq 10^7, q \leq 10^5$$

记 $m = \frac{n}{2}$, 一个排列将原序列 c 映射为一个合法括号序列 d 。
 以下四种映射的其中之一会造成 1 的贡献 (颜色用于表示相对顺序)

- 子序列 $((\rightarrow (($
- 子序列 $) \rightarrow))$
- 子序列 $() \rightarrow)($
- 子序列 $) (\rightarrow ()$

记原序列中 $((,))$, $()$, $) ($ 子序列的个数分别为 a_0, a_1, a_2, a_3 , 对于每个 $((,))$, $()$, $) ($ 子序列, 分别有 b_0, b_1, b_2, b_3 个排列的映射 (对于不同位置的子序列, 这个排列的数量应当是相同的) 会造成 1 的贡献, 那么最终答案为

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

记 $m = \frac{n}{2}$, 一个排列将原序列 c 映射为一个合法括号序列 d 。
 以下四种映射的其中之一会造成 1 的贡献 (颜色用于表示相对顺序)

- 子序列 $((\rightarrow (($
- 子序列 $) \rightarrow))$
- 子序列 $(\rightarrow)($
- 子序列 $) (\rightarrow ()$

记原序列中 $((,))$, $(,)$, $) ($ 子序列的个数分别为 a_0, a_1, a_2, a_3 , 对于每个 $((,))$, $(,)$, $) ($ 子序列, 分别有 b_0, b_1, b_2, b_3 个排列的映射 (对于不同位置的子序列, 这个排列的数量应当是相同的) 会造成 1 的贡献, 那么最终答案为

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

其中 a_0, a_1, a_2, a_3 是好维护的:

现在考虑交换两个位置

- 如果这两个位置的字符一样, 显然对答案没有变化
- 否则 a_2, a_3 的变化量为 $\pm(r-l)$

b_0, b_1, b_2, b_3 应该是只与 n 有关的常数, 我们下面考虑求出 b_0, b_1, b_2, b_3 。

直接做不好做，容斥一下，转为求两对括号相包含的贡献为 1。枚举这一对括号包含了 i 对括号，包含的括号内部可以随意排列 ($Catalan(i)$)，剩下的也可以随便排列 ($Catalan(m-i-1)$)，然后将自己和自己包含的括号随便插入另外 $m-i-1$ 个括号构成的括号序列中，共 $2(m-i-1)+1$ 个空。于是，相互包含的括号对数为

$$\sum_{i=1}^{m-1} (2(m-i-1) + 1) i \text{Catalan}(i) \text{Catalan}(m-i-1)$$

而在所有括号序列中任选两对匹配括号的方案是 $Catalan(m) \times \frac{m(m-1)}{2}$, 所以 $)()$ 子序列出现的次数是

$$Catalan(m) \times \frac{m(m-1)}{2} - \sum_{i=1}^{m-1} (2(m-i-1)+1) i Catalan(i) Catalan(m-i-1)$$

这个数再乘上 $((m-1)!)^2$ 就是 b_2 。用 $Catalan(m)(m!)^2 - b_2$ 就是 b_3 。

总复杂度 $O(n + q)$ 。

容斥

记 f_n 表示恰好使用 n 个不同元素形成特定结构的方案数, g_n 表示从 n 个不同元素中选出若干个元素形成特定结构的总方案数。

若已知 f_n 求 g_n , 那么显然有:

$$g_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f_i$$

若已知 g_n 求 f_n , 使用容斥, 我们得到:

$$f_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} g_i$$

二项式反演的证明

我们只证明 $g_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f_i \implies f_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} g_i$, 另一边是同样的。

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} g_i &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} f_j \\ &= \sum_{j=0}^n f_j \sum_{i=j}^n \binom{n}{i} \binom{i}{j} (-1)^{n-i} \end{aligned}$$

二项式反演的证明

我们只证明 $g_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f_i \implies f_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} g_i$, 另一边是同样的。

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} g_i &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} f_j \\ &= \sum_{j=0}^n f_j \sum_{i=j}^n \binom{n}{i} \binom{i}{j} (-1)^{n-i} \\ &= \sum_{j=0}^n f_j \sum_{i=j}^n \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{n-i} \quad \text{三项式版恒等式} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f_j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^{n-j-k} \quad \text{令 } k = i - j \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f_j [n-j=0] = f_n \quad \text{二项式定理} \end{aligned}$$

□

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \iff$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n \binom{n}{0} & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

例题

洛谷 P10596 BZOJ2839 集合计数

一个有 n 个元素的集合有 2^n 个不同子集 (包含空集), 现在要在这 2^n 个集合中取出若干集合 (至少一个), 使得它们的交集的元素个数恰好为 k , 求取法的方案数, 答案模 $10^9 + 7$ 。

$1 \leq n \leq 10^6, 0 \leq k \leq n$ 。

例题

洛谷 P10596 BZOJ2839 集合计数

一个有 n 个元素的集合有 2^n 个不同子集 (包含空集), 现在要在这 2^n 个集合中取出若干集合 (至少一个), 使得它们的交集的元素个数恰好为 k , 求取法的方案数, 答案模 $10^9 + 7$ 。

$1 \leq n \leq 10^6, 0 \leq k \leq n$ 。

令 f_k 表示交集个数 “至少” 是 k 的方案数。那么我们先在 n 个元素中选 k 个作为交集的部分。包含这 k 的元素的集合有 2^{n-k} 个, 在这些集合中任选至少一个, 方案数为 $2^{2^{n-k}} - 1$, 则

$$f_k = \binom{n}{k} (2^{2^{n-k}} - 1)$$

注意, 这里 “至少 k 个” 的含义是, 钦定了满足性质的 k 个元素, 剩下的性质不作限制。也就是说, 一个实际上交集大小为 m 的方案, 它在 f_k 中被计数了 $\binom{m}{k}$ 次。

设 g_k 表示交集个数**恰好**是 k 的方案数。枚举实际的交集大小 i ，在这 i 个元素里面任选 k 个作为满足 f_k 限制的那 k 个元素，我们有关系式

$$f_k = \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} g_i$$

组合数学 1

例题

洛谷 P6295 有标号 DAG 计数

求 n 个点的有标号弱连通 DAG 数量 $\bmod 998244353$ 。 $n, T \leq 10^5$

设 g_i 表示 i 个点的有标号 DAG 数量, 即 $G(x)$ 是 g_i 的生成函数。

令 $h_{i,j}$ 表示 i 个点的图, 钦定其中 j 个点并让这 j 个点入度为 0 的方案数 (类似于之前的 “至少 j 个”); 令 $c_{i,j}$ 表示 i 个点的图恰好有 j 个点入度为 0 的方案数, 则有二项式反演:

$$h_{i,j} = \sum_{k=j}^i \binom{k}{j} c_{i,k} \iff c_{i,j} = \sum_{k=j}^i \binom{k}{j} (-1)^{k-j} h_{i,k}$$

设 g_i 表示 i 个点的有标号 DAG 数量, 即 $G(x)$ 是 g_i 的生成函数。

令 $h_{i,j}$ 表示 i 个点的图, 钦定其中 j 个点并让这 j 个点入度为 0 的方案数 (类似于之前的 “至少 j 个”); 令 $c_{i,j}$ 表示 i 个点的图恰好有 j 个点入度为 0 的方案数, 则有二项式反演:

$$h_{i,j} = \sum_{k=j}^i \binom{k}{j} c_{i,k} \iff c_{i,j} = \sum_{k=j}^i \binom{k}{j} (-1)^{k-j} h_{i,k}$$

同时我们还有

$$h_{i,j} = \binom{i}{j} 2^{j(i-j)} g_{i-j}$$

$$g_i = \sum_{j=1}^i c_{i,j}$$

代入, 得

$$\begin{aligned} g_n &= \sum_{i=1}^n c_{n,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} (-1)^{j-i} h_{n,j} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} (-1)^{j-i} \binom{n}{j} 2^{j(n-j)} g_{n-j} \\ &= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} 2^{j(n-j)} g_{n-j} \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \binom{n}{j} 2^{j(n-j)} g_{n-j} \end{aligned}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

$$\begin{aligned} g_n &= \sum_{i=1}^n c_{n,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} (-1)^{j-i} h_{n,j} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} (-1)^{j-i} \binom{n}{j} 2^{j(n-j)} g_{n-j} \\ &= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} 2^{j(n-j)} g_{n-j} \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \binom{n}{j} 2^{j(n-j)} g_{n-j} \end{aligned}$$

将 $j(n-j)$ 拆成 $\binom{n}{2} - \binom{j}{2} - \binom{n-j}{2}$, 把上式写成卷积的形式
(或者把 $2^{j(n-j)}$ 写成 $\sqrt{2}^{n^2-j^2-(n-j)^2}$, 这就需求出 $\sqrt{2}$ 的二次剩余)

设 f_i 表示恰好有 i 种元素出现了奇数次的方案数，那么：

$$ans = \sum_{i=0}^{\min(D, n-2m)} f_i$$

因为序列中需要考虑顺序，所以考虑 EGF，每个颜色贡献的 EGF 之积的 $[x^n]$ 会贡献给 g_k 。

■ 被钦定的那 k 个颜色，只在选择奇数次时作出贡献，因此其 OGF 为 $x + x^3 + x^5 + \cdots$ ，EGF 为 $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

■ 剩下的 $n - k$ 个颜色，贡献都是 1，EGF 就是 e^x

于是

$$\begin{aligned} g_k &= \binom{D}{k} n! [x^n] \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^k (e^x)^{D-k} \\ &= \binom{D}{k} \frac{n!}{2^k} [x^n] (e^x - e^{-x})^k (e^x)^{D-k} \\ &= \binom{D}{k} \frac{n!}{2^k} [x^n] \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (e^x)^j (-e^{-x})^{k-j} (e^x)^{D-k} \\ &= \binom{D}{k} \frac{n!}{2^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} [x^n] (e^x)^{D-2(k-j)} \end{aligned}$$

其中 $[x^n] (e^x)^{D-2(k-j)} = \frac{(D-2(k-j))^n}{n!}$

高阶差分

定义差分算子：

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

以及它的复合

$$\Delta^{m+1}f(n) = \Delta^m f(n+1) - \Delta^m f(n)$$

高阶差分

定义差分算子：

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

以及它的复合

$$\Delta^{m+1} f(n) = \Delta^m f(n+1) - \Delta^m f(n)$$

它对于加法、数乘和乘法有如下运算律：

$$\Delta(f(n) + g(n)) = \Delta f(n) + \Delta g(n)$$

$$\Delta(c(f(n))) = c \cdot \Delta f(n)$$

$$\Delta(f(n)g(n)) = f(n)\Delta g(n) + g(n+1)\Delta f(n)$$

n 阶差分的性质

n 阶差分的性质

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

n 阶差分的性质

n 阶差分的性质

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

证明： 定义平移算子 $E f(x) = f(x+1)$ ，从而 $\Delta = E - 1$ ，于是根据二项式定理

$$\Delta^n = (E - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k) \quad \square$$

n 阶差分的性质

n 阶差分的性质

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

证明： 定义平移算子 $E f(x) = f(x+1)$ ，从而 $\Delta = E - 1$ ，于是根据二项式定理

$$\Delta^n = (E - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k) \quad \square$$

组合数的差分

计算

$$\Delta^m \left(\binom{x}{k} \right)$$

n 阶差分的性质

n 阶差分的性质

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

证明： 定义平移算子 $E f(x) = f(x+1)$ ，从而 $\Delta = E - 1$ ，于是根据二项式定理

$$\Delta^n = (E - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k) \quad \square$$

组合数的差分

计算

$$\Delta^m \left(\binom{x}{k} \right)$$

加法公式给出， $\Delta \left(\binom{x}{k} \right) = \binom{x}{k-1}$ ，于是 $\Delta^m \left(\binom{x}{k} \right) = \binom{x}{k-m}$ 。

牛顿级数

因为 $\binom{x}{n}$ (或者说 x^n) 是一个 n 次多项式, 所以一个多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 一定可以写为如下形式

$$f(x) = c_0 \binom{x}{0} + c_1 \binom{x}{1} + c_2 \binom{x}{2} + \cdots + c_n \binom{x}{n}$$

这样一个展开式称为 $f(x)$ 的**牛顿级数**。

例子

求下列高阶差分

$$\Delta^n x^n, \Delta^m x^n (m > n)$$

将 x^n 写成牛顿级数

$$f(x) = c_0 \binom{x}{0} + c_1 \binom{x}{1} + c_2 \binom{x}{2} + \cdots + c_n \binom{x}{n}$$

$$\Delta^n f(x) = c_n \binom{x}{0} = c_n$$

$$\Delta^m f(x) = 0$$

而 $c_n \binom{x}{n} = \frac{c_n}{n!} x^n$ 中的最高次项就是 x^n , 于是

$$c_n = n!, \quad \Delta^n f(x) = n!$$

设 n 为多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 的次数, 对 $x = 0$ 利用

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

和

$$\Delta^n f(0) = c_n = n!a_n$$

我们可以得到下面这个恒等式

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (a_0 + a_1k + a_2k^2 + \cdots + a_nk^n) = (-1)^n n!a_n$$

应用

作为应用

求下列式子的封闭形式

1
$$\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n$$

2
$$\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} \binom{kn}{n}$$

应用

作为应用

求下列式子的封闭形式

$$1 \quad \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n$$

$$2 \quad \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} \binom{kn}{n}$$

答案

$$1 \quad n!$$

$$2 \quad (-1)^n n^n$$

例题

拉格朗日插值

但是请使用牛顿级数。

具体地，已知 n 阶多项式 $P(x)$ 在前 $n+1$ 个点处的值 $P(0), P(1), \dots, P(n)$ ，求 $P(x)$ 的值，要求 $O(n)$ 。

例题

拉格朗日插值

但是请使用牛顿级数。

具体地，已知 n 阶多项式 $P(x)$ 在前 $n+1$ 个点处的值 $P(0), P(1), \dots, P(n)$ ，求 $P(x)$ 的值，要求 $O(n)$ 。

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k \leq n} c_k \binom{x}{k} = \sum_{k \leq n} \binom{x}{k} \sum_t (-1)^{k-t} \binom{k}{t} P(t) \\ &= \sum_{t \leq n} P(t) \sum_{t \leq k \leq n} \binom{x}{k} (-1)^{k-t} \binom{k}{t} \\ &= \sum_{t \leq n} P(t) \binom{x}{t} \sum_{t \leq k \leq n} \binom{x-t}{k-t} (-1)^{k-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t \leq n} P(t) \binom{x}{t} \sum_{k \leq n-t} \binom{x-t}{k} (-1)^k \\
&= \sum_{t \leq n} P(t) \binom{x}{t} \binom{x-t-1}{n-t} (-1)^{n-t} \quad \text{交错和} \\
&= \sum_{t \leq n} (-1)^{n-t} P(t) \frac{x^{n+1}}{t!(n-t)!(x-t)}
\end{aligned}$$

预处理前缀积和后缀积即可做到 $O(n)$ 。

例题

洛谷 P7438 更简单的排列计数

设 cyc_π 将长为 n 的排列 π 当成置换时所能分解成的循环个数。给定两个整数 n, k 和一个 $k-1$ 次多项式, 对 $1 \leq m \leq n$ 求:

$$\sum_{\pi} F(\text{cyc}_\pi) \bmod 998244353$$

其中 π 是长度为 m 且不存在位置 i 使得 $\pi_i = i$ 的排列。
 $1 \leq n \leq 6 \times 10^5, 1 \leq k \leq 100, 0 \leq [x^k]F(x) \leq 998244352$ 。

例题

洛谷 P7438 更简单的排列计数

设 cyc_π 将长为 n 的排列 π 当成置换时所能分解成的循环个数。给定两个整数 n, k 和一个 $k-1$ 次多项式, 对 $1 \leq m \leq n$ 求:

$$\sum_{\pi} F(\text{cyc}_\pi) \bmod 998244353$$

其中 π 是长度为 m 且不存在位置 i 使得 $\pi_i = i$ 的排列。
 $1 \leq n \leq 6 \times 10^5, 1 \leq k \leq 100, 0 \leq [x^k]F(x) \leq 998244352$ 。

把多项式 $F(x)$ $O(k^2)$ 转成牛顿级数,

$$F(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \binom{x}{i}$$

现在问题变为求出答案的每一项, 即对每一个 $1 \leq m \leq n$ 和 $0 \leq i < k$ 求出 $\sum_{\pi, |\pi|=m} \binom{\text{cyc}_\pi}{i}$ 。

错排数的 EGF 为许多长度大于 1 的环构成的大于 1 的排列的 exp。其中环的 EGF 为

$$\sum_{i=2} \frac{(i-1)!}{i!} x^i = -\ln(1-x) - x$$

所以错排数的 EGF 为

$$G(x) = e^{-\ln(1-x)-x}$$

错排数的 EGF 为许多长度大于 1 的环构成的大于 1 的排列的 \exp 。其中环的 EGF 为

$$\sum_{i=2} \frac{(i-1)!}{i!} x^i = -\ln(1-x) - x$$

所以错排数的 EGF 为

$$G(x) = e^{-\ln(1-x)-x}$$

这题除了要求错排的个数，还要求出这些错排中选 i 个环的方案数。为此，引入一个新变量 y ，给每个环的 EGF 都带上 $(1+y)$ 的因子，变为

$$(-\ln(1-x) - x)(1+y)$$

含这个 y 因子表示选这个环，不含这个 y 因子表示不选这个环

$$G(x, y) = e^{(-\ln(1-x)-x)(1+y)}$$

我们所求的 $\sum_{\pi, |\pi|=m} \binom{\text{cyc } \pi}{i}$ 就是 $[x^m y^i] G$ 。

记 $g_{a,b} = [x^a y^b] G$ 。将 G 对 x 求导

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \frac{x(1+y)}{1-x} G$$

那么

$$(n+1)g_{n+1,k} = \sum_{i=0}^{n-1} (g_{i,k} + g_{i,k-1})$$

$$ng_{n,k} = \sum_{i=0}^{n-2} (g_{i,k} + g_{i,k-1})$$

于是我们得到了递推式

$$(n+1)g_{n+1,k} = ng_{n,k} + (g_{n-1,k} + g_{n-1,k-1})$$

$O(nk)$ 递推即可求出 g 。总复杂度 $O(nk + k^2)$ 。

完 结 撒 花