图论

harryzhr

2024 年 12 月 21 日

图论

图论，是组合数学分支，和其他数学分支，如群论、矩阵论、拓扑学有着密切关系。图是图论的主要研究对象。图是由若干给定的顶点及连接两顶点的边所构成的图形，这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系。顶点用于代表事物，连接两顶点的边则用于表示两个事物间具有这种关系。图论起源于著名的柯尼斯堡七桥问题。

一些图论名词

- 有向图、无向图：就是边有、无方向的图
- 路径：一些边的集合，满足上一条边的终点是下一条边的起点，根据是否经过相同顶点可进一步分为简单路径
- 环：如果存在一条 $u \to u$ 的路径，称其为环，可进一步分为简单环
- DAG：不存在环的有向图
- 强连通分量：对于任意两个点 u, v 满足同时存在 $u \to v$ 和 $v \to u$ 的路径的有向图
- 树：就是 n 个顶点 $n-1$ 条边的连通无向图
- 仙人掌：称一个无向图为（点、边）仙人掌，当且仅当不存在一个（顶点、边）出现在两个环里。
- 割（点、边）：无向图中删除后使得整张图从连通变成不连通的（顶点、边）
- (点、边）双连通图：不存在割（点、边）的无向图

DFS 树

DFS 是一种常见的图遍历方法。
考虑**无向图**的遍历过程：我们访问一个节点，遍历它的所有相邻节点，如果没有访问则去访问。记 $dfn[u]$ 为节点 u 被访问的次序。不难发现每个节点只会被访问一次，也即这些节点和所有访问到的边可以构成一棵树，我们称这棵树为 DFS 树。访问过的边称为**树边**，没有访问的称为**非树边**。

仔细观察非树边，我们可以发现一些性质：

- 每条非树边只会连接祖先和子孙，不会有兄弟相连。因此也将非树边称为**返祖边**。
- 每条非树边对应一个环。

DFS 树

DFS 是一种常见的图遍历方法。
考虑**无向图**的遍历过程：我们访问一个节点，遍历它的所有相邻节点，如果没有访问则去访问。记 $dfn[u]$ 为节点 u 被访问的次序。不难发现每个节点只会被访问一次，也即这些节点和所有访问到的边可以构成一棵树，我们称这棵树为 DFS 树。访问过的边称为**树边**，没有访问的称为**非树边**。

仔细观察非树边，我们可以发现一些性质：

- 每条非树边只会连接祖先和子孙，不会有兄弟相连。因此也将非树边称为**返祖边**。
- 每条非树边对应一个环。

一个有用的结论是 DFS 树上的返祖边构成的环是原图的环空间的基。

DFS 树基础练习题

CF19E Fairy

给出一张无向图，输出所有满足「删掉它之后整张图变成二分图」的边。$n, m \leq 10^4$。

例题

CF412D

给出一张有向图，要求构造一个它的补图的哈密顿路径。$n, m \leq 2 \times 10^5$。保证不存在两个点到对方都有边的情况。

DFS 树和环

「WC2011」最大 xor 路径

给出一张无向图，边有边权。询问一条 1 号节点到 n 号节点的路径（不要求简单）使得其上所有边的边权异或和最大。
$n \leq 5 \times 10^4, m \leq 10^5, w_i \leq 10^{18}$

DFS 树和环

「NOI2008」假面舞会

定义一种特殊的有向 $k(k \geq 3)$ 分图如下：

- 每个点属于 $1 \to k$ 中的一种
- 所有第 i 类点向所有第 $i+1$ 类点连边，第 k 类点向第 1 类点连边

现在给出一张 n 个点的 k 分图的一个边集的子集构成的子图，询问 k 的最小值和最大值。$n \leq 10^5, m \leq 10^6$

割点

DFS 树最经典的应用是 Tarjan 的使用 low 数组寻找割点的算法。

我们考虑什么情况下**非根**节点 u 是割点：
当且仅当存在一个儿子，使得儿子节点的子树中不存在任何一条非树边连接 u 的祖先，或者说没有一条非树边跨过（passes over）u。
于是记录一个 $low[u]$ 数组表示在 u 的子树中能够回溯到的最早的已经在栈中的结点。如果节点 u 存在一个儿子 v，$low[v] \geq dfn[u]$，则 u 是割点。

割点

DFS 树最经典的应用是 Tarjan 的使用 low 数组寻找割点的算法。

我们考虑什么情况下**非根**节点 u 是割点：
当且仅当存在一个儿子，使得儿子节点的子树中不存在任何一条非树边连接 u 的祖先，或者说没有一条非树边跨过（passes over）u。
于是记录一个 $low[u]$ 数组表示在 u 的子树中能够回溯到的最早的已经在栈中的结点。如果节点 u 存在一个儿子 v，$low[v] \geq dfn[u]$，则 u 是割点。
割边是类似的，把上面的条件改为 $low[v] > dfn[u]$ 即可。

强连通分量

有向图的情况会复杂一点，这时候我们还有横叉边（cross edge），即一个子树连向另一个子树的边。

考虑一个强连通分量的构成：如果 u 子树（不包含 u）能到达的最早的点为 u 自己，即 $dfn[u] = low[u]$。那么它的子树中尚在栈中的节点就构成一个强连通分量。

例题

gym101612G [NWRRC2017] Grand Test

给出一张无向图，要求找到两个点，使得其间存在三条不相交路径（两条路径不相交指的是两条路径除了起点和终点外没有公共的点）。要求输出方案。
$n, m \leq 10^5$。

例题

洛谷 P4819 [中山市选] 杀人游戏

n 个人里有一个杀手，警察能够对每一个人进行查证，假如查证的对象是平民，他会告诉警察，他认识的人，谁是杀手，谁是平民。假如查证的对象是杀手，杀手将会把警察干掉。现在警察掌握了每一个人认识谁。每一个人是杀手的概率是相同的。问在最优策略下，保证警察自身安全并知道谁是杀手的概率最大是多少？

$n \le 10^5, m \le 3 \times 10^5$

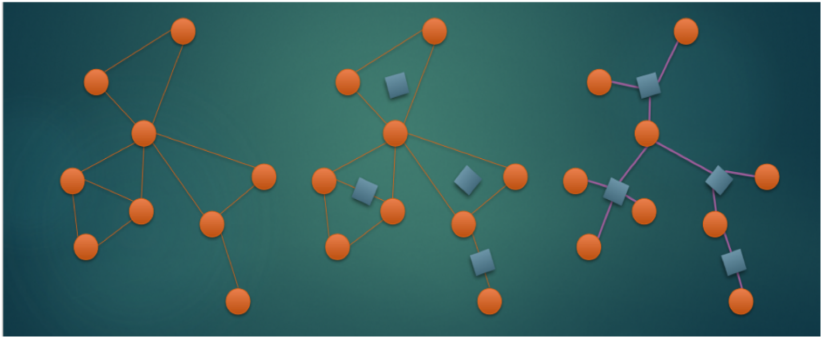
圆方树

众所周知树有着一系列良好的性质，许多图论中的困难问题在树上都有较好的算法。

而在三种连通分量（强连通分量、边双、点双）中，前两者缩点之后都直接变成了树，只有第三者很难确定割点的归属，我们考虑用圆方树解决这个问题。

我们称原来树上的点为圆点，然后对于每个点双都断开圆点之间的边，新建一个方点向所有圆点连边，可以证明这样可以形成一个树型结构。

圆方树



例题

「BJOI2013」压力

给出一张无向图，q 组询问，每次给出两个点，询问有多少个点在这两个点的必经之路上。
$n \le 10^5, m, q \le 2 \times 10^5$

例题

「APIO2018」铁人两项

一个 n 个点 m 条边的无向图，求满足如下条件的三元组 (s,c,f) 的数量：

- s,c,f 互不相同
- 存在两条简单路径 $s\to c$ 和 $c\to f$，他们除了 c 意外没有交点

$n\le 10^5, m\le 2\times 10^5$

最短路

单源最短路：

- 无负权：Dijkstra
- 有负权：SPFA

~~「关于 SPFA：它死了。」~~如果图无负权请不要使用 SPFA，而是使用 Dijkstra。

最短路

单源最短路：

- 无负权：Dijkstra
- 有负权：SPFA

~~「关于 SPFA：它死了。」~~如果图无负权请不要使用 SPFA，而是使用 Dijkstra。

特别地，如果边权只有 0 和 1，可以把 Dijkstra 中的堆换成 deque，复杂度降低一个 $\log$，做到 $O(n+m)$。

最短路

单源最短路：

- 无负权：Dijkstra
- 有负权：SPFA

~~「关于 SPFA：它死了。」~~如果图无负权请不要使用 SPFA，而是使用 Dijkstra。
特别地，如果边权只有 0 和 1，可以把 Dijkstra 中的堆换成 deque，复杂度降低一个 $\log$，做到 $O(n+m)$。
全源最短路：

- Johnson 全源最短路算法

用的很少这里就不展开讲了。

例题

「LibreOJ β Round #7」网格图

一个 $n \times m$ 的网格，有 k 个障碍点，q 组询问，每次询问从一个位置走到另一个位置最少需要转多少次向。$n, m \leq 10^9, k \leq 5 \times 10^4, q \leq 10^5$。

例题

「SDOI2017」天才黑客

一张无向图，每条边有边权，同时还有一个字符串。一条路径的长度定义为边权和加上相邻两条边的字符串的最长公共前缀长度和。给出一个大小为 k 的字典树，保证每个字符串都可以通过字典树表出。T 组数据。
$n, m \leq 5 \times 10^4, k \leq 2 \times 10^4, T \leq 10$。

同余最短路

洛谷 P3403 跳楼机

高为 h 的楼层，每次可以向上走 x, y, z 层或回到第一层。问从 1 楼出发有多少楼层是能到达的。
$h < 2^{63}, x, y, z \leq 10^5$。

差分约束

n 个变量，m 个条件，形如 $x_i \le x_j + c_k$，有解输出解，无解输出无解。

注意到这个的形式很像最短路更新距离时的 $dis_v \le dis_u + w_i$，于是建图。存在负权环就无解，否则建超级源点像所有点连边，跑 SPFA，dis_u 就是 x_u 的一组合法解。

例题

「SCOI2011」糖果

给 n 个小朋友分糖果，m 个条件，形如「第 i 个小朋友分到的糖果（小于、等于、大于）第 j 个」，求最少需要多少个糖果。$n, m \le 10^5$。

例题

「联合省选 2021 A」矩阵游戏

给定一个 $(n-1)\times(m-1)$ 的矩阵 $b_{i,j}$，要求构造一个 $n\times m$ 的矩阵 $a_{i,j}$，满足 $0\le a_{i,j}\le 10^6$，且

$$b_{i,j}=a_{i,j}+a_{i+1,j}+a_{i,j+1}+a_{i+1,j+1}$$

T 组数据，$n,m\le 300, T\le 10, b_{i,j}\le 4\times 10^6$

2-SAT

解决如下类型的问题：有 n 个布尔型变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有 m 个条件形如 $x_i \vee x_j$ 或者 $x_i \vee \neg x_j$。判定这些条件是否可以同时取真。

考虑建图，每个变量拆成两个点，分别表示为 0 或者为 1。然后把条件作为有向边，$x_{i,u} \to x_{j,v}$，表示如果 x_i 取 u，则 x_j 必须取 v。然后求强连通分量，如果 p 和 $\neg p$ 在同一个连通分量里则不合法。输出方案可以按照拓扑序倒序遍历。

k-SAT

k-SAT 问题中布尔型变量不变，但是每个条件变为了至多 k 个变量做 $\vee$。

对于一个规模为 n 的 k-SAT 问题，我们总能将其转化为一个规模不超过 $n+n(k-3)$ 的 3-SAT 问题。

3-SAT 问题是 NP-hard 的。3-SAT 问题可以规约为求图中是否存在大小为 m 的独立集。

例题

「雅礼集训 2017 Day4」编码

一些 01 串，每个串都有一个位置是 ?。要求还原出一种可能的把 ? 换成 0 或 1 的方案使得没有一个是另一个的前缀。
$n, \sum |s_i| \le 5 \times 10^5$。

例题

LOJ3101 「JSOI2019」精准预测

火星小镇上有 n 个居民，机器学习算法预测出这些居民在接下来 T 个时刻的生死情况，m 条预测都是如下两种形式之一：

- 难兄难弟 $0\ t\ x\ y$：在 t 时刻，如果 x 是死亡状态，那么在 $t+1$ 时刻，y 是死亡状态（y 在 $t+1$ 时刻前死了）
- 死神来了 $1\ t\ x\ y$：在 t 时刻，如果 x 是生存状态，那么在 t 时刻，y 是死亡状态（y 在 t 时刻前死了）

对每个人 x 求：在 $T+1$ 时刻 $x, y(x \neq y)$ 同时生存的可能的 y 的个数

数据范围：$n \leq 5 \times 10^4, m \leq 10^5, T \leq 10^6$，**2s,1024MB**

最小生成树

一般是「最小权值生成树（MST）」的简称。

有两种常见的算法：Prim 和 Kruskal。Prim 的思想是「每次迭代选择代价最小的边对应的点，加入到最小生成树中」，复杂度为 $\mathcal{O}(m+n\log n)$；而 Kruskal 的思想为「每迭代一次就选择一条满足条件的最小代价边，加入到最小生成树的边集合里」，复杂度为 $\mathcal{O}(m\log n)$。二者本质是一致的。

Boruvka 算法

初始时，每个点都是一个「连通块」。
每次迭代，我们希望对每个连通块求出它到其他连通块的边权最小的边。遍历所有边 (u,v)，如果 u 和 v 不在同一个连通块，就用这条边的边权分别更新 u 和 v 所在连通块的最小边。
把我们找到的这些「最小边」加入 MST，然后重复这个过程。
可以参考 OI-wiki 的动图。

Boruvka 算法

初始时，每个点都是一个「连通块」。
每次迭代，我们希望对每个连通块求出它到其他连通块的边权最小的边。遍历所有边 (u, v)，如果 u 和 v 不在同一个连通块，就用这条边的边权分别更新 u 和 v 所在连通块的最小边。
把我们找到的这些「最小边」加入 MST，然后重复这个过程。
可以参考 OI-wiki 的动图。
如果一次迭代之前有 n 个连通块，那么迭代一轮之后连通块数量至多为 $\frac{n}{2}$。所以复杂度是 $O(m \log n)$。

你从未见过的全新生成树

最小 mex 生成树

每条边带一个权 w_e，定义整棵树的权值为边权集合的 mex。需要求出最小生成树的权值。$n \le 10^6, m \le 2 \times 10^6, w_e \le 10^5$

你从未见过的全新生成树

最小度限制生成树

给定一个点 s，每条边带一个权 w_e，定义整棵树的权值为权值之和。需要求出满足 s 的度数为 k 的条件下的最小生成树的权值。$n \leq 5 \times 10^4, m \leq 5 \times 10^5$

例题

CF888G Xor-MST

给定 n 个节点的无向完全图，每个点有点权 a_i，边 (u, v) 的边权是 $a_u \oplus a_v$，其中 $\oplus$ 表示按位异或。
求最小生成树。$1 \leq n \leq 2 \times 10^5, 0 \leq a_i < 2^{30}$

例题

CF141E Clearing Up

有一个 n 个点 m 条边的无向图，每条边的颜色是黑白两种颜色之一。
请你构造一棵生成树，使得它包含的黑边和白边数量相同。
$1 \leq n \leq 10^3, 1 \leq m \leq 10^5$

Kruskal 重构树

在跑 Kruskal 的过程中我们会从小到大加入若干条边。我们把这个合并的过程建出一棵树来，把边权转化为点权。
首先新建 n 个集合，每个集合恰有一个节点，点权为 0。
每一次加边会合并两个集合，我们可以新建一个点，点权为加入边的边权，同时将两个集合的根节点分别设为新建点的左儿子和右儿子。
在进行 $n-1$ 轮之后我们得到了一棵恰有 n 个叶子的二叉树。这棵树就叫 Kruskal 重构树。

Kruskal 重构树

在跑 Kruskal 的过程中我们会从小到大加入若干条边。我们把这个合并的过程建出一棵树来，把边权转化为点权。
首先新建 n 个集合，每个集合恰有一个节点，点权为 0。
每一次加边会合并两个集合，我们可以新建一个点，点权为加入边的边权，同时将两个集合的根节点分别设为新建点的左儿子和右儿子。
在进行 $n-1$ 轮之后我们得到了一棵恰有 n 个叶子的二叉树。这棵树就叫 Kruskal 重构树。
原图中两个点之间的所有简单路径上最大边权的最小值 $=$ 最小生成树上两个点之间的简单路径上的最大值 $=$ Kruskal 重构树上两点之间的 LCA 的权值。

例题

「NOI2018」归程

一张 n 个点 m 条边的无向图，边有长度 l_i 和高度 a_i。
q 次询问，每次给定一个出发点 u 和一个高度 p。你在出发点有一辆车，可以开过所有高度 $a_i > p$ 的所有边。但是如果你要经过一条 $a_i \leq p$ 的边，你就必须弃车步行，车留在原地。你要回到 1 号节点，最小化你**步行通过的所有边**的总长度。
$n \leq 2 \times 10^5, m, q \leq 4 \times 10^5$，强制在线。

欧拉路径

一些概念：

- **欧拉路径**：图中所有边恰好被经过一次的路径
- **欧拉回路**：构成回路的欧拉路径
- **欧拉图**：有欧拉回路的图

欧拉路径

一些概念:

- **欧拉路径**：图中所有边恰好被经过一次的路径
- **欧拉回路**：构成回路的欧拉路径
- **欧拉图**：有欧拉回路的图

有欧拉路径/回路的充要条件（对于连通图）:

- **有向图**有欧拉回路 $\iff$ 所有点的入度 $=$ 出度
- **有向图**有欧拉路径 $\iff$ 至多一个点入度 $=$ 出度 $+1$，一个点出度 $=$ 入度 $+1$，其余点入度 $=$ 出度
- **无向图**有欧拉回路 $\iff$ 所有点的度数为偶数
- **无向图**有欧拉路径 $\iff$ 至多两个点度数为奇数，其余点度数为偶数

欧拉路径的求法

从起点开始 dfs，对于当前搜到的点，随意选择一条以前未选过的与其相连的边继续搜索，退出搜索时压入栈中，最后将栈中所有元素输出即可。

核心思想其实是 Hierholzer 算法：从一条回路开始，每次任取一条目前回路中的点，将其替换为一条简单回路，以此寻找到一条欧拉回路。如果从路开始的话，就可以寻找到一条欧拉路。

例题

POJ1386 Play on Words

有 n 个单词，问能否将这些单词按某种顺序排列后使得前一个单词的末字母等于下一个单词的首字母。

$n \leq 10^5 \sum |s| \leq 10^6$

例题

洛谷 P6628 [省选联考 2020 B 卷] 丁香之路

一个 n 个点的完全图，边 (u,v) 的边权为 $|u-v|$。其中有 m 条关键边。
给定一个起点 s，对每个 $t=1,2,\cdots,n$，求出一条 s 到 t 的路径（可以重复经过边），要求这个路径经过所有关键边，且边权之和最小。输出这个最小边权。
$n \leq 2\times 10^3, m \leq \frac{n(n-1)}{2}$

定义

- 度数矩阵：
  - 对于**无向图** G： $D_{ii}(G)=\deg(i)$
  - 对于**有向图** G： 出度矩阵 $D_{ii}^{out}=\deg^{out}(i)$； 入度矩阵 $D_{ii}^{in}=\deg^{in}(i)$
- 邻接矩阵 $A_{ij}(G)=i\to j$ 的边数。
- Laplace 矩阵：
  - 对于**无向图** G： $L(G)=D(G)-A(G)$
  - 对于**有向图** G：出度 Laplace 矩阵 $L^{out}(G)=D^{out}(G)-A(G)$；入度 Laplace 矩阵 $L^{in}(G)=D^{in}(G)-A(G)$
- 记无向图 G 的生成树个数为 $t(G)$。
- 记有向图 G 的以 k 为根的所有根向树形图（指向根的树）个数为 $t^{\text{root}}(G,k)$，以 k 为根的所有叶向树形图（指向叶子的树）个数为 $t^{\text{leaf}}(G,k)$。

矩阵树定理

无向图形式

对于任意一个 k，记 $L(G)$ 删去第 k 行第 k 后的矩阵为 $L(G)_{[n]\backslash\{k\}}$，则

$$t(G) = \det L(G)_{[n]\backslash\{k\}}$$

根向树（内向树）形式

$$t^{\text{root}}(G,k) = \det L^{\text{out}}(G)_{[n]\backslash\{k\}}$$

叶向树（外向树）形式

$$t^{\text{leaf}}(G,k) = \det L^{\text{in}}(G)_{[n]\backslash\{k\}}$$

矩阵树定理

上面的式子除了理解为有重边的图中的生成树数量之和以外，也可以理解为边有边权的图中所有生成树的边权积之和。

例题

「联合省选 2020 A」作业题

给定一个 n 个顶点 m 条边（点和边都从 1 开始编号）的无向图 G，保证图中无重边和无自环。每一条边有一个正整数边权 w_i，对于一棵 G 的生成树 T，定义 T 的价值为：T 所包含的边的边权的最大公约数乘以边权之和，即：

$$val(T) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} w_{e_i}\right) \times \gcd(w_{e_1}, w_{e_2}, \ldots, w_{e_{n-1}})$$

其中 $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ 为 T 包含的边的编号。
求出 G 的所有生成树 T 的价值之和，答案对 998244353 取模。
$1 \le n \le 30, 1 \le m \le \frac{n(n-1)}{2}, 1 \le w_i \le 152501$。

BEST 定理

关于欧拉图有著名计数定理:

BEST 定理

设 G 是有向欧拉图，那么 G 的不同欧拉回路总数 $ec(G)$ 是:

$$ec(G) = t^{root}(G)\prod_{v\in V}(\deg v - 1)!$$

其中 $t^{root}(G)$ 是任意一个点的内向树个数。

这一定理将有向欧拉图中欧拉回路的数目和该图的根向树形图的数目联系起来，从而解决了有向图中的欧拉回路的计数问题。注意，任意无向图中的欧拉回路的计数问题是 NPC 的。

例题

「AGC051D」C4

一个无向四元环，给定 (v_1, v_2, v_3, v_4)，要求 $\forall i = 1, 2, 3, 4$，第 i 条边恰好经过 v_i 次，求这样的从 1 出发的回路数量。答案 $\bmod 998244353$。$v_i \le 5 \times 10^5$

LGV 引理

对于一张带权 DAG，定义一条路径的权值为所有边的权值的乘积，记为 $\omega(p)$。选定一个出发集合 S 和一个终点集合 T，满足 $|S| = |T|$。考虑如下矩阵

$$M = \begin{vmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \cdots & e_{1,n} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \cdots & e_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n,1} & e_{n,2} & \cdots & e_{n,n} \end{vmatrix}$$

其中 $e_{i,j}$ 表示 s_i 到 t_j 的所有路径的权值的和。我们断言：

$$|M| = \sum_{P:S\to T} (-1)^{\sigma(\pi(P))} \prod_{i=1}^{n} \omega(P_i)$$

其中 P 是一个 $S \to T$ 的不相交路径集合，$\pi(P)$ 为 P 对应的排列，$\sigma(\pi)$ 为排列 π 的逆序对个数。

例题

洛谷 P6657 【模板】LGV 引理

有一个 $n \times n$ 的棋盘，左下角为 $(1, 1)$，右上角为 (n, n)，若一个棋子在点 (x, y)，那么走一步只能走到 $(x + 1, y)$ 或 $(x, y + 1)$。
现在有 m 个棋子，第 i 个棋子一开始放在 $(a_i, 1)$，最终要走到 (b_i, n)。问有多少种方案，使得每个棋子都能从起点走到终点，且对于所有棋子，走过路径上的点互不相交。输出方案数 $\bmod 998244353$ 的值。
$2 \leq n \leq 10^6$，$1 \leq m \leq 100$。

例题

洛谷 P6657 【模板】LGV 引理

有一个 $n \times n$ 的棋盘，左下角为 $(1,1)$，右上角为 (n,n)，若一个棋子在点 (x,y)，那么走一步只能走到 $(x+1,y)$ 或 $(x,y+1)$。
现在有 m 个棋子，第 i 个棋子一开始放在 $(a_i,1)$，最终要走到 (b_i,n)。问有多少种方案，使得每个棋子都能从起点走到终点，且对于所有棋子，走过路径上的点互不相交。输出方案数 $\bmod 998244353$ 的值。
$2 \le n \le 10^6$，$1 \le m \le 100$。

设 $(a_i,1) \to (b_j,n)$ 的路径数量为 $c_{i,j}$，先不管路径在中间不相交的限制，只要求路径两端不交换相对顺序的话，那么方案数就是

$$\prod_{i=1}^{n} c_{i,i}$$

例题

「NOI2021」路径交点

给定一个分层有向图，图中的顶点可以分为 k 层，第 i 层有 n_i 个顶点，第 1 层与第 k 层**顶点数相同**，第 i 层的节点只能连第 $i+1$ 层的节点。
现在小 L 要从这个图中选出 n_1 条路径无交的路径，每条路径以第 1 层顶点为起点，第 k 层顶点为终点。
对于两条路径 P, Q，分别设它们在第 j 层与第 $j+1$ 层之间的连边为 (P_j, P_{j+1}) 与 (Q_j, Q_{j+1})，若

$$(P_j - Q_j) \times (P_{j+1} - Q_{j+1}) < 0$$

则称它们在第 j 层后产生了一个交点。两条路径的交点数为它们在第 $1, 2, \ldots, k-1$ 层后产生的交点总数。对于整个路径方案，它的交点数为两两不同路径间交点数之和。
求有偶数个交点的路径方案数比有奇数个交点的路径方案数多多少个。答案对 998244353 取模。$2 \le k \le 100$，$2 \le n_1 \le 100$。

杂题

「THUPC2017」母亲节的礼物/Gift

给出一张无向图，满足每个点的度数不超过 7，要求找出一种染四色的方案，满足一个点相邻的点中只有不超过 1 个点与其同色。
$n \leq 2 \times 10^5, m \leq 8 \times 10^5$

杂题

「SHOI2015」零件组装机

定义如下方法构造的图是合法的:

- 只有一个点，标号为 0 的图是合法的
- 如果 G_1, G_2 都是合法的，且 $m = |G_1| \geq |G_2| = n$，那么把 G_1 重新标号为 $n, n+1, n+2, \cdots, n+m-1$，并把 $[0, n)$ 向 $[n, 2n), [2n, 3n), \cdots$ 分别连边，得到的图也是合法的，记做 $G = G_1 \otimes G_2$。

现在给出一张图，询问它是否是合法的。$T \leq 10$ 组询问，$n, m \leq 10^5$

杂题

「NOI2016」网格

给出一张 $n \times m$ 的网格图，其上有 c 个障碍。现在要求添加最少的障碍，使得剩余非障碍点不连通。不存在方案输出 -1。$n, m \leq 10^9, c \leq 10^5$

杂题

「ZJOI2017」仙人掌

给出一张无向图，询问有多少种加边的方法使得最后是一个连通边仙人掌。
$n \le 5 \times 10^5, m \le 10^6$。

题单

「HAOI2016」地图
「国家集训队」墨墨的等式
CF1450E Capitalism
CF1416D Graph and Queries
「ZJOI2016」旅行者
「LibreOJ Round #11」Misaka Network 与 Accelerator
[BJWC2010] 严格次小生成树
「FJOI2007」轮状病毒
洛谷 P5163 WD 与地图

完 结 撒 花