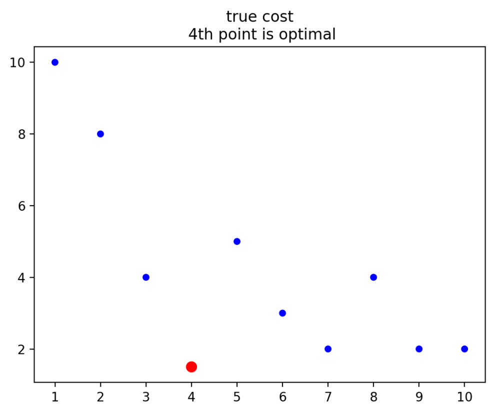
A^*最优性分析

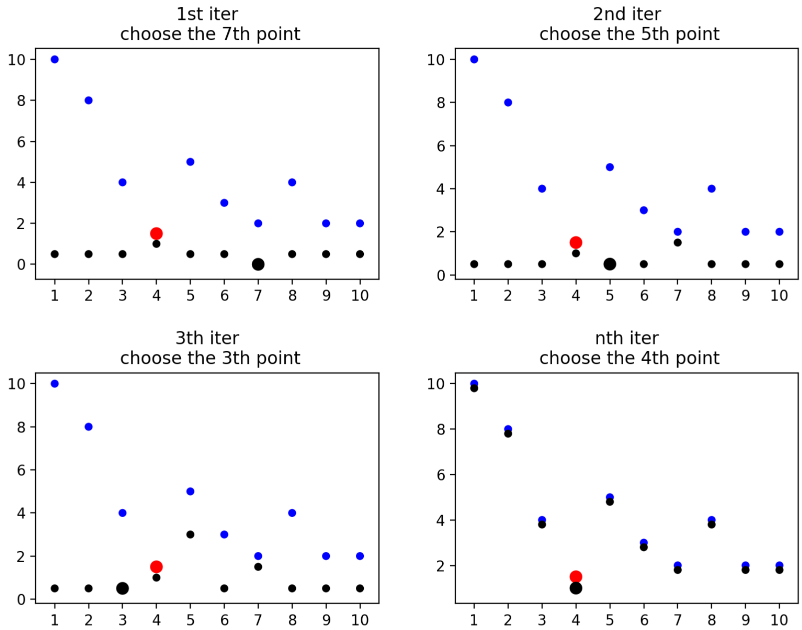
1. 文字表述

A^*通过寻找$f(n)$的下界$\hat{f}(n)$来寻找$f_{min}(n)$。具体做法是每次寻找$\hat{f}_{min}(n)$，然后进行 expand，由于 expand 操作保证了$\hat{f}(n)$单调递增，且$\hat{f}(n)$不会 overestimate，保证了$\hat{f}(n)$会趋向于$f(n)$。那么最终$\hat{f}(n)$的最小值就是$f_{min}(n)$。

下面以 10 个点为例，可以简单的理解为每个点代表了 1 条路径的 cost.



迭代过程如下：



2. 公式理解

对于任何路径，其代价都不小于最优路径：

$$f(n) \geq f^*(n)$$

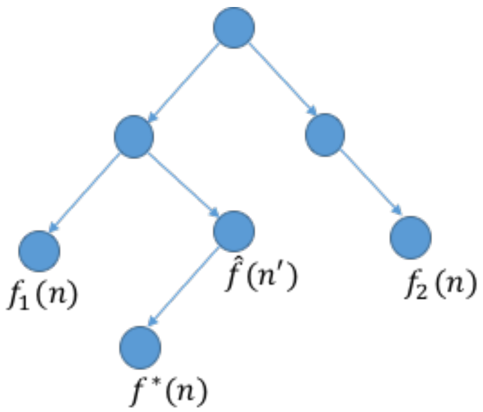
而最优路径的代价，有下界：

$$f^*(n) \geq \hat{f}^*(n)$$

所以，通过A^*寻找到的一定是最优路径：

$$f(n) \geq f^*(n) \geq \hat{f}^*(n)$$

以下图为例，假设总共找到了 3 个 solution，分别为$f_1(n)$、$f_2(n)$、$f^*(n)$。进一步假设，先找到$f_1(n)$，然后是$f_2(n)$，最后是$f^*(n)$。如何知道$f_1(n)$不是最优的呢？因为$f_1(n)$、$f_2(n)$一定不是 frontier 中的最小值！！！



显然，由于 sulotion1、solution2 不是最优的，有：

$$f_1(n) \geq f^*(n)、f_2(n) \geq f^*(n)$$

由于$\hat{f}(n)$是递增的，所以

$$f^*(n) \geq \hat{f}(n')$$

所以

$$f_1(n) \geq \hat{f}(n')、f_2(n) \geq \hat{f}(n')$$

也就是说，在找到$f_1(n)$、$f_2(n)$后 frontier 中存在比$f_1(n)$、$f_2(n)$还要小的$\hat{f}(n')$，树还会继续搜索，直至$f^*(n)$。而$f^*(n)$是全局最小值，frontier 中不会有比$f^*(n)$更小的值，树将停止搜索。