



INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS

UFR SCIENCES

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023/2024

TP1 Compte Rendu

Fusion par Filtrage de Kalman

Module Fusion de données

Enseignants :
Emanuel Aldea

Étudiants :
Ziyu LI

Table des matières

1	Annotation du Code Matlab du Filtre de Kalman	2
2	La Matrice de Covariance du Bruit de Mesure (R_k) et de processus systématique (Q_k) dans le Filtre de Kalman	6
3	Conclusion	9
4	Annexe	9

Introduction

Le but du TP consiste à appliquer le Filtre de Kalman au positionnement GPS. en partie 1, on utilise les données de position fournies par le GPS comme données d'observation pour filtrer la trajectoire du récepteur, puis en partie 2, les données brutes (position des satellites et pseudo-distances) seront employées dans le processus d'estimation afin d'améliorer la localisation.

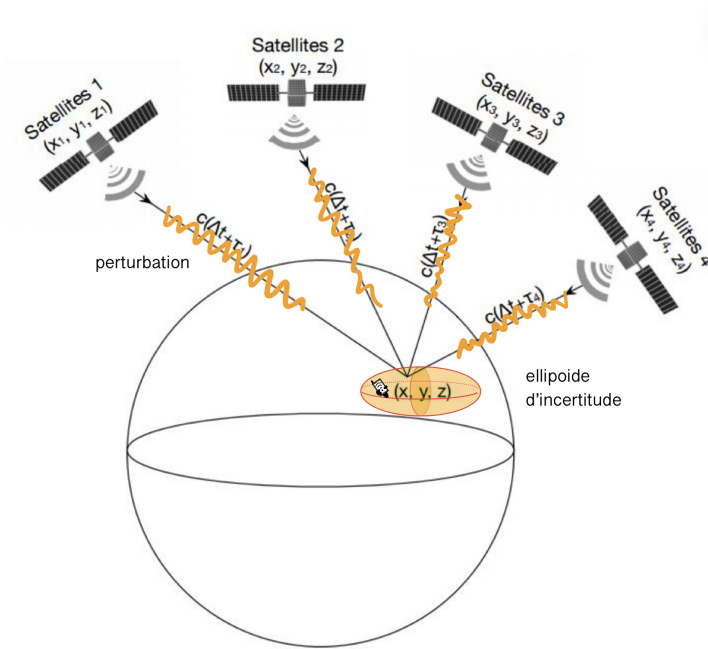


FIGURE 1 – Principe de fonctionnement d'un système de localisation GPS.

1 Annotation du Code Matlab du Filtre de Kalman

L'état du système est défini par quatre paramètres fondamentaux, comprenant les coordonnées sur l'axe x , la vitesse sur l'axe x , les coordonnées sur l'axe y , et la vitesse sur l'axe y . Au stade de l'initialisation, nous choisissons d'utiliser les données de position GPS du premier instant comme données initiales pour la partie position du système. En même temps, pour initialiser la vitesse, nous utilisons le rapport du déplacement entre le premier et le deuxième instant par rapport au temps de déplacement, respectivement comme vitesse sur les axes x et y . Ainsi, nous établissons une estimation initiale de l'état du système, comprenant des informations sur la position et la vitesse.

Pour la définition de la matrice de covariance du bruit de mesure et de la matrice de bruit du Filtre de Kalman, nous nous fondons sur l'hypothèse suivante : l'indépendance entre les paramètres du système. Par exemple, l'erreur de mesure sur l'axe x est statistiquement indépendante de celle sur l'axe y . De plus, généralement, les variances des erreurs de mesure dans différentes directions sont égales. Par conséquent, nous pouvons utiliser une matrice diagonale pour une définition préliminaire.

Plus précisément, nous définissons la matrice de covariance du bruit de mesure R_k comme une matrice diagonale, où les éléments sur la diagonale représentent les variances des erreurs de mesure dans différentes directions. Cela reflète notre hypothèse fondamentale sur l'indépendance et l'égalité des variances des erreurs de mesure dans différentes directions.

De même, la matrice de covariance $P_k(\text{old})$ utilisée pour représenter l'incertitude actuelle de l'estimation de l'état peut également être formulée sous la forme d'une matrice diagonale.

Les éléments diagonaux de cette matrice représentent les variances du bruit pour chacun des paramètres d'état. Cette définition repose sur l'hypothèse d'indépendance des bruits entre les différents paramètres d'état.

Initialiser positions, matrices de covariance ...

```

1 N_begin = 1;
2 N = length(pos_GT);
3 % State : (X V_x Y V_y)
4 dt = time_GPS(2) - time_GPS(1)
5
6 State_old_p = [
7     pos_receiver_ENU(1, 1);
8     (pos_receiver_ENU(2, 1) - pos_receiver_ENU(1, 1))/dt;
9     pos_receiver_ENU(1, 2);
10    (pos_receiver_ENU(2, 2) - pos_receiver_ENU(1, 2))/dt;
11 ];
12
13 N_state = length(State_old_p);
14
15 R = 20;
16 Rk = eye(2)*R;
17 Pk_old = eye(N_state)*R;

```

Définissons le vecteur d'état \mathbf{x}_k comme suit :

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} X_k \\ V_{x,k} \\ Y_k \\ V_{y,k} \end{bmatrix}$$

Considérons la matrice de transition d'état A_k définie comme suit :

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par le produit matriciel, nous obtenons le vecteur d'état au prochain instant \mathbf{x}_{k+1} :

$$\mathbf{x}_{k+1} = A_k \cdot \mathbf{x}_k$$

En développant cette multiplication, on obtient le vecteur d'état au prochain instant :

$$\begin{bmatrix} X_{k+1} \\ V_{x,k+1} \\ Y_{k+1} \\ V_{y,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_k + \Delta t \cdot V_{x,k} \\ V_{x,k} \\ Y_k + \Delta t \cdot V_{y,k} \\ V_{y,k} \end{bmatrix}$$

Dans l'intervalle de temps Δt , la position et la vitesse du système ont subi des changements correspondants. Cette matrice de transition d'état nous permet de prédire l'état du système au prochain instant en fonction de son état actuel.

Matrice de transition d'etat.

```

1 Ak = eye(N_state) ; % A completer
2 Ak(1,2) = dt
3 Ak(3,4) = dt

```

$$\mathbf{x}_{k+1} = A_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k$$

où,

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ \Delta t & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & \Delta t \end{bmatrix}$$

Les vecteurs d'état et d'entrée de contrôle sont respectivement représentés comme suit :

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} X_k \\ V_{x,k} \\ Y_k \\ V_{y,k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} a_{x,k} \\ a_{y,k} \end{bmatrix}$$

Par multiplication matricielle, nous obtenons la forme de l'équation de mouvement de base.

$$\begin{bmatrix} X_{k+1} \\ V_{x,k+1} \\ Y_{k+1} \\ V_{y,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ V_{x,k} \\ Y_k \\ V_{y,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ \Delta t & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{x,k} \\ a_{y,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_k + \Delta t \cdot V_{x,k} + \frac{\Delta t^2}{2} a_{x,k} \\ V_{x,k} + a_{x,k} \Delta t \\ Y_k + \Delta t \cdot V_{y,k} + \frac{\Delta t^2}{2} a_{y,k} \\ a_{y,k} V_{y,k} \end{bmatrix}$$

— **Accélération isotrope et constante :**

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \Sigma_{Acceleration}^2 & 0 \\ 0 & \Sigma_{Acceleration}^2 \end{bmatrix}$$

$$Q_k = B \cdot Q_1 \cdot B^T$$

Nous définissons une matrice pour convertir les informations relatives à la vitesse et à l'angle dans l'état en informations correspondantes relatives à l'accélération :

$$B1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -V \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & V \cdot \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

— **Accélération anisotrope en θ et constante en V :**

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \Sigma_{Acceleration}^2 & 0 \\ 0 & \Sigma_{\theta}^2 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = B1 \cdot Q_2 \cdot B1^T$$

$$Q_k = B \cdot Q_1 \cdot B^T$$

— Accélération anisotrope en θ et variable en $1/V$:

Condition : Si $V > V_{seuil}$, $\Sigma_\theta = \Sigma_\theta \cdot V_{seuil}/V$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \Sigma_{Acceleration}^2 & 0 \\ 0 & \Sigma_\theta^2 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = B_1 \cdot Q_2 \cdot B_1^T$$

$$Q_k = B \cdot Q_1 \cdot B^T$$

Ces choix permettent de modéliser le bruit du système en fonction d'hypothèses physiques différentes, afin de mieux s'adapter à différentes situations de mouvement.

Matrice de covariance du processus d'innovation.

```

1 Sigma_Acceleration = 5.0; % in m/s
2 Sigma_theta = 10.0*pi/180; % in rad/s
3 % Innovation process from acceleration [ax ay]--> State
4 B = [dt^2/2 0 ; dt 0 ; 0 dt^2/2 ; 0 dt] ;
5 % Innovation process from [v theta] --> acceleration [ax ay]
6 B1 = [cos(theta) -V*sin(theta); sin(theta) V*cos(theta)];
7 switch model
8     case 1 % Acceleration isotrope et constante
9         Q1 = [Sigma_Acceleration^2 0; 0 Sigma_Acceleration^2];
10        Qk = B*Q1*B';
11     case 2 % Acceleration anisotrope en theta et constante en V
12        Q2 = [Sigma_Acceleration^2 0; 0 Sigma_theta^2];
13        Q1 = B1*Q2*B1';
14        Qk = B*Q1*B';
15     case 3 % Acceleration anisotrope en theta et variable en 1/V
16        Vseuil=3; % En m/s
17        if V>Vseuil % in rad/s en 1 sur V a partir de Vseuil
18            Sigma_theta=Sigma_theta*Vseuil/V;
19        end
20        Q2 = [Sigma_Acceleration^2 0; 0 Sigma_theta^2];
21        Q1 = B1*Q2*B1';
22        Qk = B*Q1*B';
23 end

```

Programmer l'étape de prediction du filtre de Kalman.

```

1 State_Predict = Ak * State_old_p ;
2 Pk_predict = Ak * PK_old * Ak' + Qk ;

```

Matrice d'observation :

La matrice H_k est utilisée pour projeter l'état prédit dans l'espace de mesure. Ce qui est définie comme suit peut nous permettre d'extraire les composantes de position de l'état :

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vecteur de mesure :

Le vecteur Z_k représente la mesure réelle provenant des capteurs GPS.

Matrice de covariance de mesure S_k :

La matrice de covariance de mesure S_k représente l'incertitude de la mesure et est calculée en utilisant la formule du Filtre de Kalman :

$$S_k = \underbrace{H_k \cdot P_k^{\text{predict}} \cdot H_k^T}_{\text{Projections de l'espace d'état à l'espace de mesure}} + R_k$$

où P_k^{predict} est la matrice de covariance prédite de l'état et R_k est la matrice de covariance du bruit de mesure.

Definir la matrice d'observation.

```
1 Hk = [1 0 0 0 ; 0 0 1 0] ;  
2  
3 Zk = pos_receiver_ENU(k,1:2)' ;  
4  
5 Sk = Hk * Pk_predict * Hk' + Rk;
```

Vecteur résiduel :

$$\nu_k = Z_k - H_k \cdot \mathbf{x}_{k+1}$$

où Z_k est la valeur de mesure réelle, H_k est la matrice d'observation, et \mathbf{x}_{k+1} est la valeur prédite de l'état.

Gain de Kalman :

$$K_k = P_k^{\text{predict}} \cdot H_k^T \cdot (S_k)^{-1}$$

où K_k est le gain de Kalman, P_k^{predict} est la matrice de covariance d'erreur a priori, H_k est la matrice d'observation, et S_k est la matrice de covariance de prédiction de mesure.

Valeur estimée de l'état :

$$\mathbf{x}_{k+1}^{\text{estimate}} = \mathbf{x}_{k+1}^{\text{predict}} + K_k \cdot \nu_k$$

Cette étape met à jour la valeur estimée de l'état en combinant la valeur prédite de l'état avec le gain de Kalman et le résidu. Un gain de Kalman plus important indique que les résidus des observations par rapport aux valeurs prédites sont plus influents, ce qui suggère que les prédictions seront un peu plus biaisées en faveur des observations.

Matrice de covariance d'erreur :

$$P_k^{\text{new}} = (I - K_k \cdot H_k) \cdot P_{\text{predict}}$$

où P_k^{new} est la matrice de covariance d'erreur mise à jour, I est la matrice identité.

Programmer l'étape d'estimation.

```
1 nuk= Zk - Hk*State_Predict ;  
2 Kk = Pk_predict * Hk' * inv(Sk) ;  
3 State_Estim = State_Predict + Kk*nuk;  
4 Pk_new = (eye(N_state) - Kk * Hk) * Pk_predict ;
```

Update Matrix and state for next iteration.

```
1 Pk_old = Pk_new;  
2 State_old_p = State_Estim ;
```

2 La Matrice de Covariance du Bruit de Mesure (R_k) et de processus systématique (Q_k) dans le Filtre de Kalman

La matrice de covariance du bruit de mesure R_k joue un rôle crucial dans le processus qui pour estimer l'état d'un système en présence de bruit, influençant la manière dont le filtre intègre les mesures dans l'estimation de l'état.

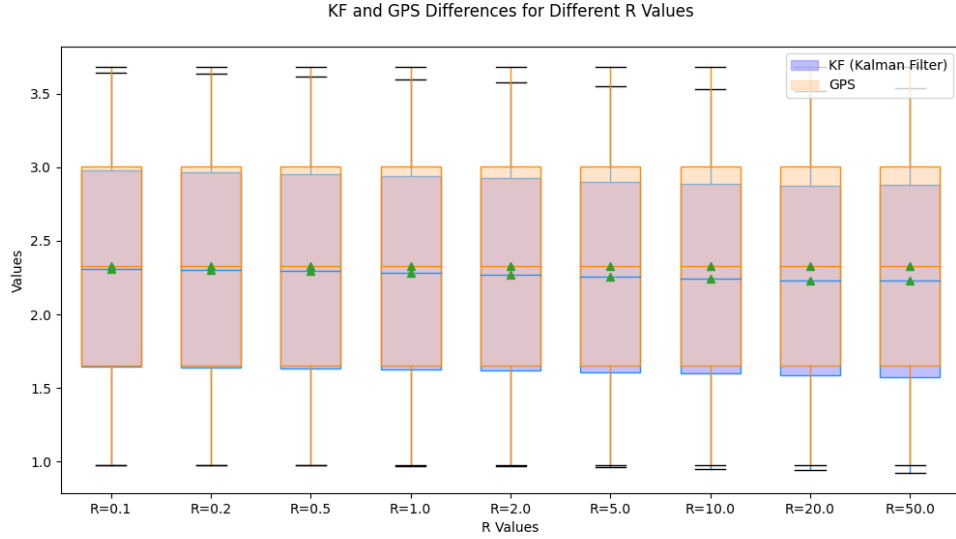


FIGURE 2 – MODE 1 : Accélération isotrope et constante.

Le gain de Kalman (K_k) est essentiel pour déterminer la pondération des mesures par rapport à l'estimation de l'état actuel. Son calcul est donné par l'équation suivante :

$$K_k = P_k^{predict} H_k^T (H_k P_k^{predict} H_k^T + R_k)^{-1}$$

En augmentant la valeur de R_k , le dénominateur de l'expression augmente, diminuant ainsi le gain K_k . Cela signifie que le filtre accorde moins de poids aux mesures lors de la mise à jour de l'estimation de l'état. À l'inverse, une diminution de R_k augmente l'influence des mesures.

La matrice de covariance prédite est mise à jour selon l'équation :

$$P_k^{predict} = A_k P_k^{old} A_k^T + Q_k$$

La matrice R_k intervient dans le calcul de la matrice de covariance du bruit de mesure S_k :

$$S_k = H_k P_k^{predict} H_k^T + R_k$$

En augmentant R_k , la confiance accordée aux mesures diminue, car la matrice de covariance du bruit de mesure a une influence plus importante.

La Fig. 2 montre le résultat que nous avons obtenu en faisant varier différentes valeurs de R dans le mode "accélération isotrope constante".

Dans cette mode, en ajustant la valeur de la matrice de covariance du bruit de mesure R , nous effectuons un équilibrage entre la confiance accordée aux mesures GPS et la confiance accordée aux prediction. Réduire R , nous réduisons en réalité la confiance accordée aux mesures GPS, privilégiant davantage les prédictions de l'état du système.

Étant donné que dans ce mode le système suppose une accélération isotrope et constante. Concrètement, les observations issues d'expériences de R , la trajectoire estimée par le filtre de Kalman tend à devenir plus précise. Les divergences entre les valeurs estimées et les valeurs réelles au sol diminuent progressivement, suggérant que le système a davantage confiance en ses propres prédictions pour corriger et optimiser l'estimation de la trajectoire.

Toutefois, cela ne signifie pas que R peut être infiniment grand, nous pouvons seulement dire que la valeur de R au point critique sera plus grande par rapport à des systèmes plus complexes (nous supposons que le point critique est où l'utilisation du Filtrage de Kalman (juste) donne de moins bons résultats par rapport à une trajectoire GPS pure).

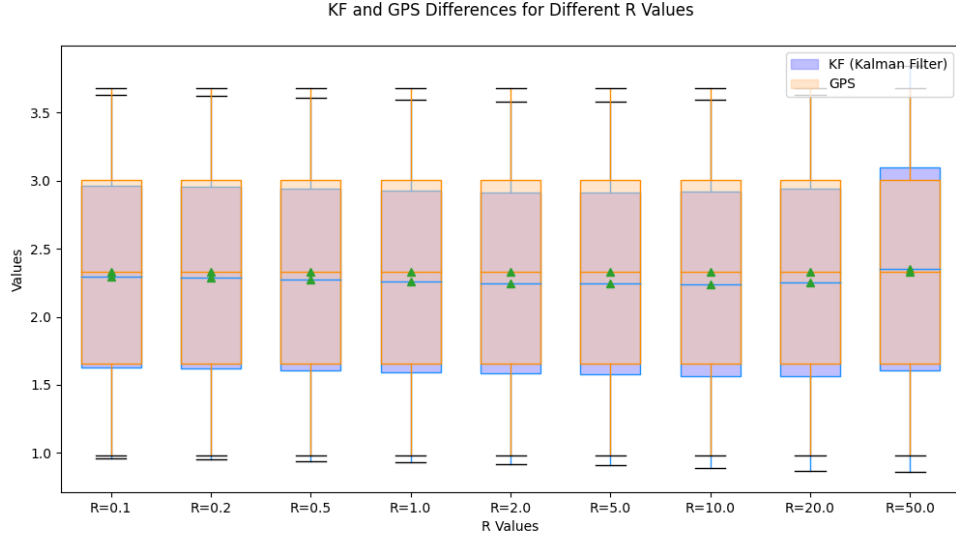


FIGURE 3 – MODE 2 : Accélération anisotrope en theta et constante en V .

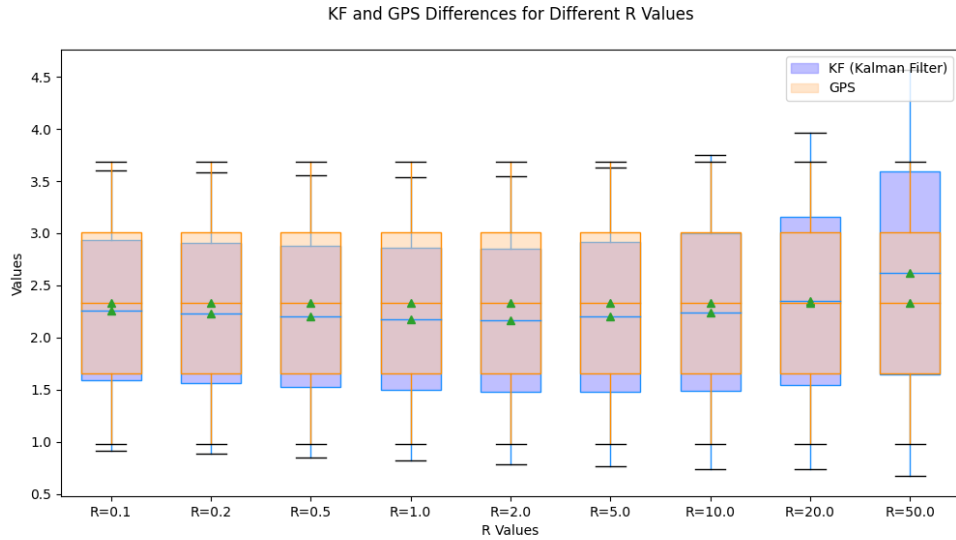


FIGURE 4 – MODE 3 : Accélération anisotrope en theta et variable en $1/V$.

Les résultats des deux autres modes sont présentés dans les Fig. 3 et Fig. 4.

En ajustant la matrice de covariance du bruit de mesure R dans le Filtre de Kalman, nous avons effectivement ajusté la confiance du système dans la prédiction de l'état propre par rapport à la mesure externe. Au cours de cet ajustement, nous avons noté que les variations de R entraînaient des performances différentes dans la trajectoire estimée.

En particulier, nous avons constaté qu'il existait un point critique (Comme indiqué précédemment) évident, jouant un rôle clé dans la détermination du moment où les estimations du Filtre de Kalman surpassent celles de la mesure GPS. Cette découverte souligne la nécessité, lors du traitement de systèmes dynamiques complexes, d'ajuster dynamiquement la dépendance relative du filtre de Kalman vis-à-vis de la prédiction et de la mesure.

Pour des systèmes fortement changeants, une dynamique accrue peut rendre le modèle de prédiction incapable de capturer avec précision l'évolution du système, entraînant de grandes erreurs dans la prédiction de l'état. Dans ce cas, en réduisant la valeur de R , nous augmentons effectivement la confiance du filtre de Kalman dans la mesure GPS, favorisant ainsi la estimation de l'état. Cette stratégie permet au filtre de Kalman de s'adapter plus flexiblement aux changements dynamiques du système.

3 Conclusion

Dans ce TP, nous avons implémenté le code de filtrage de Kalman dans Matlab, corrigé avec succès les informations de position GPS et mené des expériences avec certains paramètres :

L'initialisation du filtre avec des positions GPS et la définition judicieuse des matrices de covariance ont joué un rôle essentiel dans la qualité des estimations obtenues. La gestion appropriée des bruits de mesure et de processus a montré l'impact significatif de ces paramètres sur la robustesse du filtre et la précision des résultats.

L'influence de la matrice de covariance du bruit de mesure R a été étudiée en détail, soulignant le compromis entre la confiance accordée à la prédiction de l'état et celle accordée à la mesure externe. Cette observation a mis en évidence un seuil critique, indiquant le point où les estimations du filtre surpassent celles de la mesure GPS, soulignant l'importance de l'adaptabilité du filtre dans des environnements dynamiques.

De plus, l'analyse des différents modes du modèle, en particulier l'accélération isotrope, l'accélération anisotrope en fonction de θ , et l'accélération anisotrope variable en $1/V$, a permis de mieux comprendre les nuances liées à la modélisation des bruits et à l'adaptation du filtre à différents types de mouvements.

Une autre chose à garder à l'esprit lors de l'écriture du code Matlab : les vecteurs de lignes et les vecteurs de colonnes peuvent être ajoutés et soustraits sans que des erreurs ne soient signalées, ce que j'ai passé de nombreuses heures à faire avant de m'en rendre compte. Une autre chose à garder à l'esprit lors de l'écriture du code Matlab : les vecteurs de lignes et les vecteurs de colonnes peuvent être ajoutés et soustraits sans que des erreurs ne soient signalées, ce que j'ai passé de nombreuses heures à faire avant de m'en rendre compte.

4 Annexe

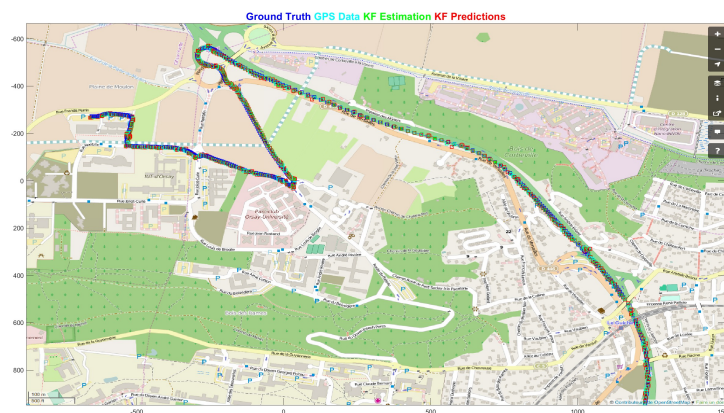
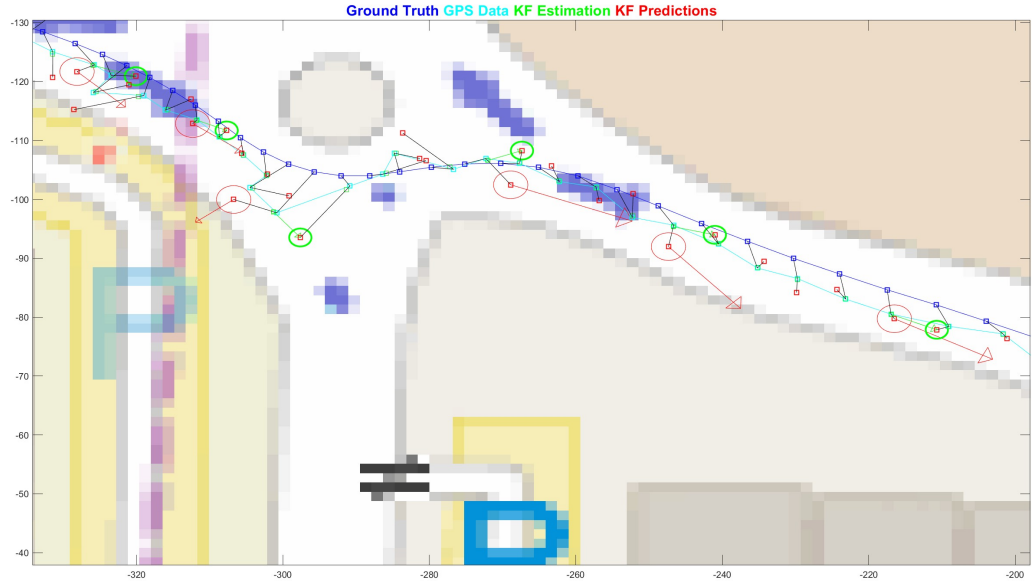
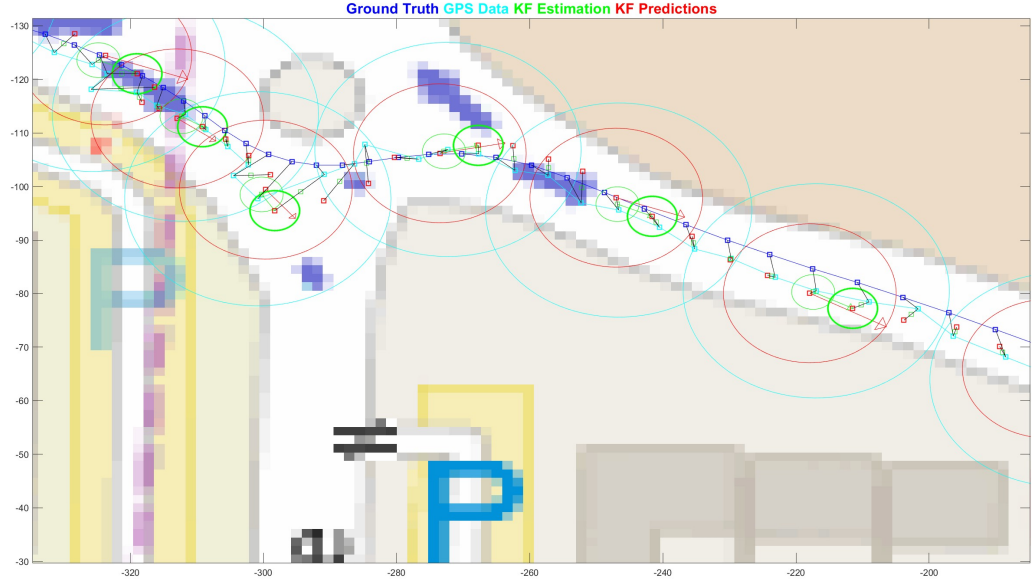


FIGURE 5 – Aperçu de l'effet du Filtre de Kalman



(a) $R=0.1$.



(b) $R=20$

FIGURE 6 – Visualisation de l'effet de différentes valeurs R sur les estimations par paire par rapport au Filtre de Kalman au model1.