作业 11

李邹

人工智能一班 (2020 级)

最优化方法 课程作业

兰州大学
LANZHOU UNIVERSITY

2022 年 6 月 22 日

作业题 1

一个简单的例子。 考虑优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x^2+1 \\ \text{subject to} & (x-2)(x-4) \le 0 \end{array}$$

其中变量 $x \in \mathbf{R}$

(a) **分析原问题。** 求解可行集，最优值以及最优解。

(b) **Lagrange 函数以及对偶函数。** 绘制目标函数根据 x 变化的图像。在同一幅图中，标出可行集，最优点及最优值，选择一些正的 Lagrange 乘子 λ, 绘出 Lagrange 函数 $L(x,\lambda)$ 关于 x 的变化曲线。利用图像，证明下界性质 (对任意 $\lambda \ge 0, p^* \ge inf_x L(x,\lambda)$)。推导 Lagrange 对偶函数 g 并大致描绘其图像。

(c) **Lagrange 对偶问题。** 描述对偶问题，证明它是一个凹极大化问题。求解对偶最优值以及对偶最优解 λ^*。此时强对偶性是否成立？

解答

(a) 由不等式约束可知，可行集为 $x \in [2,4]$，令 $f(x) = x^2+1$，问题可转化为求解

$$f_{min}(x) = x^2+1, x \in [2,4]$$

对 $f(x)$ 求导，可得 $f_0{}'(x) = 2x$，其在定义域上单调递增。所以有 $f_{min}(2) = 5$.

因此原优化问题在最优解 $x = 2$ 处取得最优值 $p^* = 5$.

(b) 目标函数根据 x 变化的图像如图 1 所示，其中可行集为两色块重合的区域，最优解与最优值已标出。

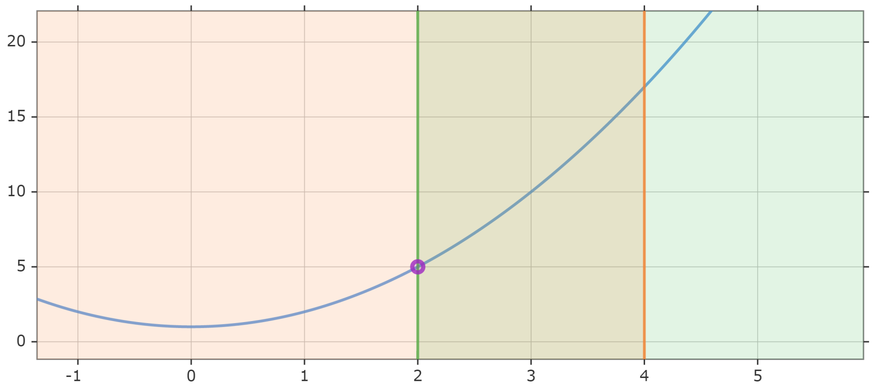

图 1: 目标函数图像

令 $f_0(x) = x^2+1, f_1(x) = (x-2)(x-4)$，设 $L_i(x) = f_0(x) + if_1(x)$.

从而有 $L(x,\lambda) = (1+\lambda)x^2 - 6\lambda x + (1+8\lambda)$.

下图 2 是 λ 取 $0,1,2,3$ 情况下的函数图像。

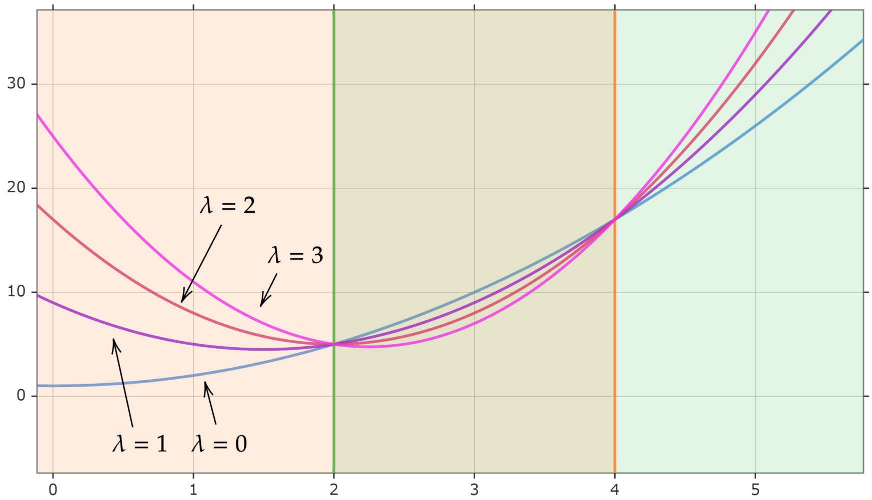

图 2: λ 不同取值下的函数图像

由图像可知，当 $\lambda \geq 0$ 时，$inf_x L(x,\lambda) \leq 5$ 恒成立。

因此我们可以证得，对于任意的 $\lambda \geq 0, p^* \geq inf_x L(x,\lambda)$ 恒成立。

将 $L(x,\lambda)$ 做数学变换，可以得到

$$L_\lambda(x) = (1+\lambda)(x - \frac{3\lambda}{1+\lambda})^2 - \frac{9\lambda^2}{1+\lambda} + 8\lambda + 1$$

所以，当 $\lambda > -1$ 时，$L_\lambda(x)$ 在 $x = \frac{3\lambda}{1+\lambda}$ 处取得下确界，否则下确界不存在。

因此我们得到其对偶函数

$$g(\lambda) = \begin{cases} -\frac{9\lambda^2}{1+\lambda} + 8\lambda + 1 & x > -1 \\ -\infty & x \leq -1 \end{cases} \tag{1}$$

其图像如图 3 所示。

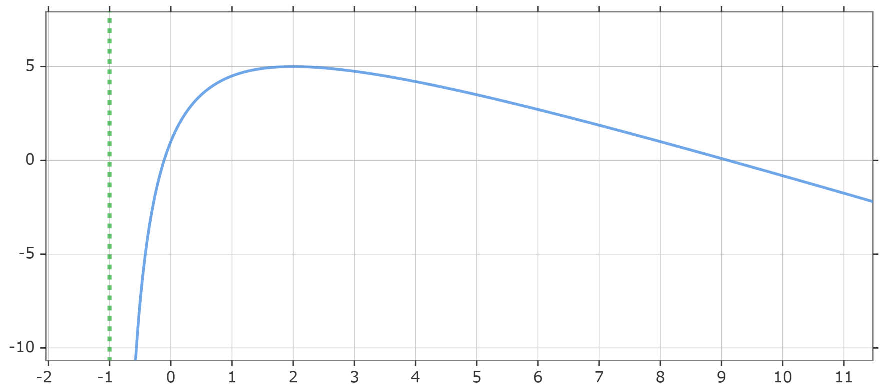

图 3: 对偶函数图像

(c) 将该问题描述成对偶问题为

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & -\frac{9\lambda^2}{1+\lambda} + 8\lambda + 1 \\ \text{subject to} & \lambda > 0 \end{array}$$

由对偶函数定义可知，目标函数为凹函数，而不等式条件为 $\lambda > 0$，因此可得该问题转换为一个凹极大化问题。

通过导数工具容易求解，当 $\lambda = 5$ 时取得最优值 5，此时最优解 $\lambda^* = 2$，强对偶性成立。

□