# 作业 7

李邹

人工智能一班 (2020 级)

最优化方法 课程作业

LANZHOU UNIVERSITY

2022 年 5 月 18 日

**作业题 1**

**拟凸性的一阶条件。**证明 §3.4.3 中给出的判断拟凸性的一阶条件：可微函数 $f:\mathrm{R}^n \longrightarrow \mathrm{R}$，其定义域 $\mathbf{dom}f$ 是凸集，则函数 $f$ 是拟凸函数的充要条件是，对任意 $x,y\in\mathbf{dom}f$ 有

$$f(y)\le f(x) \Longrightarrow \nabla f(x)^T(y-x)\le 0$$

**证明**

**首先证明：**$f$ 是拟凸函数能推出：若 $f(y)\le f(x) \Rightarrow \nabla f^T(x)(y-x)\le 0$

因为 $f(x)$ 为拟凸函数，所以对于 $\forall x,y\in \mathrm{dom}f, 0\le\theta\le 1$，都有

$$\max\{f(x),f(y)\}\ge f(\theta x+(1-\theta)y)$$

设 $f(y)\le f(x)$，从而有

$$\begin{aligned}
&f(x)\ge f(\theta x+(1-\theta)y)\\
\Leftrightarrow &f(\theta x+(1-\theta)y)-f(x)\le 0\\
\Leftrightarrow &f(\theta x+(1-\theta)y)-f(\theta x+(1-\theta)x)\le 0\\
\Leftrightarrow &\frac{f(\theta x+(1-\theta)y)-f(\theta x+(1-\theta)x)}{(1-\theta)(y-x)}(1-\theta)(y-x)\le 0
\end{aligned}\tag{1}$$

当 $\theta\to 0$ 时，(1) 式则化为

$$f'(x)(y-x)\le 0$$

**其次证明：**若 $\forall x,y\in\mathrm{dom}f, f(y)\le f(x)\Rightarrow \nabla f^T(x)(y-x)\le 0$ 能推出 $f$ 是拟凸函数

不妨设 $z=\theta x+(1-\theta)y$, $0<\theta<1$，则等价于证明 $f(x)\ge f(z)$ 成立。

$f(x)$ 与 $f(z)$ 的大小关系有以下两种情况：

1) $f(x)>f(z)$

   显然符合 $f(x)\ge f(z)$.

2) $f(x)\le f(z)$

   又因为有 $f(y)\le f(x)$，从而有

$$\begin{aligned}
&f'(z)(x-z)\le 0, f'(z)(y-z)\le 0\\
\Rightarrow &f'(z)(1-\theta)(x-y)\le 0, f'(z)\theta(y-x)\le 0\\
\Rightarrow &f'(z)=0
\end{aligned}$$

可在 $[z,x]$ 的区间上不断利用上述结论，因为 $f$ 为连续函数, 最终必然有 $f(z)=f(x)$.

因此，$f(x)\le f(x)$ 恒成立，故其等价命题也成立。

**综上，原命题得证。** □

**作业题 2**

设函数 $f : \mathrm{R}^n \longrightarrow \mathrm{R}$ 可微，定义域 $\mathbf{dom} f$ 是凸集，对任意 $x \in \mathbf{dom} f$，$f(x) > 0$。证明函数 $f$ 是对数-凹函数的充要条件是，对于任意 $x, y \in \mathbf{dom} f$，下式成立

$$\frac{f(y)}{f(x)} \le \exp\left(\frac{\nabla f(x)^T (y-x)}{f(x)}\right)$$

**证明**

**先证必要性**：令 $g(x) = \ln f(x)$，不等式两边同取自然对数，则有：

$$\begin{aligned}
&\frac{f(y)}{f(x)} \le \exp\left(\frac{\nabla f(x)^T (y-x)}{f(x)}\right) \\
\Longrightarrow &\ln f(y) - \ln f(x) \le \frac{\nabla f(x)^T (y-x)}{f(x)} \\
\Longrightarrow &g(y) - g(x) \le \nabla g(x)^T (y-x)
\end{aligned}$$

由一阶条件可推知 $g$ 是凹函数，因此 $f$ 是对数-凹函数。

**再证充分性**：因为 $f$ 是对数-凹函数，所以 $g$ 是凹函数，则有：

$$\begin{aligned}
&g(y) - g(x) \le \nabla g(x)^T (y-x) \\
\Longrightarrow &\ln f(y) - \ln f(x) \le \frac{\nabla f(x)^T (y-x)}{f(x)} \\
\Longrightarrow &\frac{f(y)}{f(x)} \le \exp\left(\frac{\nabla f(x)^T (y-x)}{f(x)}\right)
\end{aligned}$$

**综上，原命题得证。** □

**作业题 3**

证明如果函数 $f : \mathrm{R}^n \longrightarrow \mathrm{R}$ 是对数-凹函数且 $a \ge 0$，那么函数 $g = f - a$ 是对数-凹函数，其定义域为 $\mathbf{dom}\, g = \{x \in \mathbf{dom} f \mid f(x) > a\}$。

**证明**

由题有，$f$ 是对数-凹函数，则有：

$$f(\theta x + (1-\theta) y) \ge f(x)^\theta f(y)^{1-\theta} \tag{2}$$

将 (2) 式代入 $g = f - a$ 中，利用霍尔德不等式，则有：

$$\begin{aligned}
f(\theta x + (1-\theta) y) - a &\ge f(x)^\theta f(y)^{1-\theta} - a = f(x)^\theta f(y)^{1-\theta} - a^\theta a^{1-\theta} \\
&\ge (f(x) - a)^\theta (f(y) - a)^{1-\theta}
\end{aligned}$$

所以函数 $g$ 是对数-凹函数，定义域为 $\mathbf{dom}g = \{x \in \mathbf{dom}f \mid f(x) > a\}$. □

**作业题 4**

证明下列函数是对数-凹函数

**调和平均函数**

$$f(x) = \frac{1}{1/x_1 + \cdots + 1/x_n}, \quad \mathbf{dom}f = \mathbf{R}^n_{++}$$

**证明**

对函数 $f$ 求偏导，结果如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{1}{(ax_i+1)^2} > 0, \quad a = \sum_{n\neq i}\frac{1}{x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= -\frac{2a}{(ax_i+1)^3} < 0, \quad a = \sum_{n\neq i}\frac{1}{x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{2x_ix_j}{\left(bx_ix_j + x_i + x_j\right)^3} > 0, \quad b = \sum_{n\neq i,j}\frac{1}{x_n} \end{aligned}$$

显然有 $\nabla^2 f(x) \preceq 0, \nabla f(x) \succeq 0$，从而可以得到

$$\begin{aligned} & f(x)\nabla^2 f(x) \preceq 0, \quad f(x)\nabla f(x)^T \succeq 0 \\ \Longrightarrow & f(x)\nabla^2 f(x) \preceq \nabla f(x)\nabla f(x)^T \end{aligned}$$

所以，函数 $f$ 是对数-凹函数。 □