作业 5

李邹

人工智能一班 (2020 级)

最优化方法 课程作业

兰州大學

LANZHOU UNIVERSITY

2022 年 5 月 4 日

作业题 1

证明：反透视函数是保凸的。

test

证明

题目即要求证明，如果 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 为凸集，那么

$$P^{-1}(C) = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \frac{x}{t} \in C \ , \ t > 0\right\}$$

也是凸集。

在 $P^{-1}(C)$ 中任取两点 (x,t) 和 (y,s)，且有 $\theta \in [0,1]$，即证明：

$$(\theta x + (1-\theta)y \ , \ \theta t + (1-\theta)s) \in P^{-1}(C)$$

即证明：

$$\frac{\theta x + (1-\theta)y}{\theta t + (1-\theta)s} \in C$$

可以得到，

$$\begin{aligned} & \frac{\theta x + (1-\theta)y}{\theta t + (1-\theta)s} \\ \iff & \frac{\theta t}{\theta t + (1-\theta)s} \cdot \frac{x}{t} + \frac{(1-\theta)s}{\theta t + (1-\theta)s} \cdot \frac{y}{s} \\ \iff & \mu \frac{x}{t} + (1-\mu)\frac{y}{s} \in C \end{aligned}$$

故原命题得证。

□

作业题 2

证明零阶条件：$x \in \mathbf{dom}\, f$，$v \in \mathbb{R}^n$，$t \in \mathbb{R}$，$x + tv \in \mathbf{dom}\, f$, 函数 f 是凸的，当且仅当对于任意 $x \in \mathbf{dom}\, f$ 和任意向量 v，函数 $g(t) = f(x+tv)$ 是凸的。

证明

先证： f 是凸的 $\Longrightarrow$ g 是凸的
取 $\forall t_1, t_2 \in \mathbf{dom}\, f$，并且 $\alpha \in [0,1]$.
则有，

$$\begin{aligned} g\left(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2\right) &= f\left(x + \left(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2\right)v\right) \\ &= f\left(\alpha x + \alpha t_1 v + (1-\alpha)x + (1-\alpha)t_2 v\right) \\ &= f\left(\alpha\left(x + t_1 v\right) + (1-\alpha)\left(x + t_2 v\right)\right) \end{aligned}$$

由于 f 是凸的，则有，

$$
\begin{aligned}
g\left(\alpha t_1+(1-\alpha) t_2\right) & \leq \alpha f\left(x+t_1 v\right)+(1-\alpha) f\left(x+t_2 v\right) \\
& =\alpha g\left(t_1\right)+(1-\alpha) g\left(t_2\right)
\end{aligned}
$$

因此，g 是凸的。

再证：g 是凸的 $\Longrightarrow f$ 是凸的
取 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{dom}\, f$，并且 $\alpha \in[0,1]$.
我们要证，

$$
f\left(\alpha x_1+(1-\alpha) x_2\right) \leq \alpha f\left(x_1\right)+(1-\alpha) f\left(x_2\right)
$$

令 $\lambda=x_2-x_1$，考虑 $g(t)=f\left(x_1+t \lambda\right)=f\left(x_1+t\left(x_2-x_1\right)\right)$.
容易验证，$g(0)=f\left(x_1\right)$，$g(1)=f\left(x_2\right)$，$g(1-\alpha)=f\left(\alpha x_1+(1-\alpha) x_2\right)$.
则有，

$$
\begin{aligned}
f(\alpha x_1+(1-\alpha) x_2) & =g(1-\alpha) \\
& =g(\alpha \cdot 0+(1-\alpha) \cdot 1) \\
& \leq \alpha g(0)+(1-\alpha) g(1) \\
& =\alpha f(x_1)+(1-\alpha) f(x_2)
\end{aligned}
$$

因此，f 是凸的。

原命题得证。

□