作业 9

李邹

人工智能一班 (2020 级)

最优化方法 课程作业

兰州大学
LANZHOU UNIVERSITY

2022 年 6 月 7 日

作业题 1

证明 $x^{\star} = (1, 1/2, -1)$ 是优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (1/2)x^T P x + q^T x + r \\ \text{subject to} & -1 \le x_i \le 1, \quad i = 1, 2, 3, \end{array}$$

的最优解，其中

$$P = \begin{bmatrix} 13 & 12 & -2 \\ 12 & 17 & 6 \\ -2 & 6 & 12 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} -22.0 \\ -14.5 \\ 13.0 \end{bmatrix}, \quad r = 1$$

证明

依题意有

$$\nabla f_0(x)^T = Px + q, \quad \nabla f_0\left(x^*\right)^T = (-1, 0, 2)$$

所以有

$$\nabla f_0\left(x^*\right)^T\left(y - x^*\right) = -\left(y_1 - 1\right) + 0 \times \left(y_2 - \frac{1}{2}\right) + 2 \times \left(y_3 + 1\right)$$

又因为 $-1 \le y_i \le 1$，所以对于全体 y_i

$$\begin{aligned} \nabla f_0\left(x^*\right)^T\left(y - x^*\right) &= -\left(y_1 - 1\right) + 2\left(y_3 + 1\right) \\ &= 2y_3 - y_1 + 3 \ge 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(1) 式大于等于 0 恒成立

所以 $x^{\star} = (1, 1/2, -1)$ 是该优化问题的最优解。 □

作业题 2

凸-凹分式问题。 考虑具有下面形式的问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) / \left(c^T x + d\right) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

其中 $f_0, f_1, \ldots, f_m$ 为凸，而目标函数的定义域为 $\left\{x \in \operatorname{dom} f_0 \mid c^T x + d > 0\right\}$。

(a) 证明这是一个拟凸优化问题。

(b) 证明这个问题等价于

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & g_0(y,t) \\
\text{subject to} & g_i(y,t) \le 0, \quad i=1,\dots,m \\
& Ay = bt \\
& c^T y + dt = 1
\end{array}
$$

其中 g_i 是 f_i 的透视。其变量是 $y \in \mathbf{R}^n$ 和 $t \in \mathbf{R}$。说明这个问题是凸的。

证明

(a) 显然，该优化问题的不等式约束是凸的，等式约束是仿射的。因此问题转换为证明其目标函数是拟凸的。

即证明 $f_0(x)/\left(c^T x + d\right)$ 是拟凸函数。

该函数的下水平集为

$$S_\alpha = \{x_i \in \operatorname{dom} g \mid g(x) \le \alpha\}, \alpha \in R$$

对于 $\forall x, y \in \left\{x \in \operatorname{dom} f_0 \mid c^T x + d > 0\right\}, \theta \in [0,1]$，有

$$
\begin{aligned}
& c^T(\theta x + (1-\theta)y) + d \\
=& c^T(\theta x + (1-\theta y)) + \theta d + (1-\theta)d > 0
\end{aligned}
$$

因此目标函数的定义域是凸集。

不妨设

$$
\begin{aligned}
g(x) &= f_0(x)/\left(c^T x + d\right) \le \alpha \\
g(y) &= f_0(y)/\left(c^T y + d\right) \le \alpha
\end{aligned}
$$

那么有

$$g(\theta x + (1-\theta)y) = \frac{f_0(\theta x + (1-\theta)y)}{(c^T(\theta x + (1-\theta)y) + d)}$$

因为已知 f_0 是凸函数，所以

$$g(\theta x + (1-\theta)y) \le \frac{\theta f_0(x) + (1-\theta) f_0(y)}{(c^T(\theta x + (1-\theta)y) + d)} \le \alpha$$

可知 $g(x)$ 的任意下水平集均为凸集，所以 $g(x)$ 为拟凸函数。

综上所述，该问题为拟凸优化问题。

(b) 因为 $g_i(y,t)$ 是 $f_i(i)$ 的透视函数，所以有

$$g_i(y,t) = t f_i(y/t), \quad y/t \in \left\{x \in dom f_0 \mid c^T x + d > 0\right\}, t > 0$$

原问题的目标函数可转换为

$$\frac{f_i(y/t)}{(c^Ty/t+d)} \Leftrightarrow \frac{tf_i(y/t)}{(c^Ty+td)}$$

由于存在约束 $c^Ty+dt=1$，因此两问题的目标函数等价。

而由于

$$g_i(y,t)=tf_i(y/t)\le 0 \Rightarrow f_i(y/t)\le 0$$

因此两问题的不等式约束等价。

又因为

$$Ay=bt \Leftrightarrow A\frac{y}{t}=b$$

因此等式约束亦是等价的，由等价性，结合 (a) 可知，该优化问题是凸的。

综上所述，两问题等价。

$\square$