作业 10

李邹

人工智能一班 (2020 级)

最优化方法 课程作业

蘭州大學
LANZHOU UNIVERSITY

2022 年 6 月 15 日

作业题 1

加热到 T（高于环境温度）的流体在长度固定、截面半径为 r 的圆形管道种流动。管道外有一层厚度 $w \ll r$ 的绝热涂层以减少透过管壁的热损失。这个问题的设计变量为 T, r 和 w。

热量损失（近似）正比于 Tr/w，所以在固定的使用期限内，由热量损失带来的能量损失由 $\alpha_1 Tr/w$ 给出。具有固定管壁厚度的管道的成本近似正比于总材料，由 $\alpha_2 r$ 给出。涂层的成本也近似正比于总的涂料，即 $\alpha_3 rw$（利用 $w \ll r$）。总成本是这三种成本之和。管道中流过的热量完全取决于流体的流量（流体具有固定的速度），由 $\alpha_4 Tr^2$ 给出。如同变量 T, r 和 w 一样，常数 α_i 为正。

现在的问题是：在总成本限制 C_{max} 和约束

$$T_{\min} \le T \le T_{\max}, \quad r_{\min} \le r \le r_{\max}, \quad w_{\min} \le w \le w_{\max}, \quad w \le 0.1r$$

下，极大化管道运输的总热量。将这个问题表示为一个几何规划（GP）。

解答

根据题意，我们可以先写出该优化问题的一般形式。

题意要求极大化管道运输的总热量，因此有

$$\text{maximize} \;\; \alpha_4 Tr^2$$

除直接给定的约束外，题中还给出了总成本限制 C_{max}，因此有

$$\alpha_1 Tw^{-1} + \alpha_2 r + \alpha_3 rw \le C_{\max}$$

从而，可以得到一般形式

$$\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \alpha_4 Tr^2 \\
\text{subject to} & \alpha_1 Tw^{-1} + \alpha_2 r + \alpha_3 rw \le C_{\max} \\
& T_{\min} \le T \le T_{\max} \\
& r_{\min} \le r \le r_{\max} \\
& w_{\min} \le w \le w_{\max} \\
& w \le 0.1r
\end{array}$$

将其转换为等价的几何规划（GP）

$$\begin{array}{ll}
\text{minimize} & (1/\alpha_4)\, T^{-1} r^{-2} \\
\text{subject to} & (\alpha_1/C_{\max})\, Tw^{-1} + (\alpha_2/C_{\max})\, r + (\alpha_3/C_{\max})\, rw \le 1 \\
& (1/T_{\max})\, T \le 1, \quad T_{\min} T^{-1} \le 1 \\
& (1/r_{\max})\, r \le 1, \quad r_{\min} r^{-1} \le 1 \\
& (1/w_{\max})\, w \le 1, \quad w_{\min} w^{-1} \le 1 \\
& 10wr^{-1} \le 1.
\end{array}$$

□

作业题 2

最佳梁设计问题的递归形式。 证明 GP(4.46) 等价于 GP

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{i=1}^{N} w_i h_i \\ \text{subject to} & w_i/w_{\max} \leq 1, \quad w_{\min}/w_i \leq 1, \quad i=1,\ldots,N \\ & h_i/h_{\max} \leq 1, \quad h_{\min}/h_i \leq 1, \quad i=1,\ldots,N \\ & h_i/\left(w_i S_{\max}\right) \leq 1 \quad i=1,\ldots,N \\ & 6iF/\left(\sigma_{\max} w_i h_i^2\right) \leq 1, \quad i=1,\ldots,N \\ & (2i-1)d_i/v_i + v_{i+1}/v_i \leq 1, \quad i=1,\ldots,N \\ & (i-1/3)d_i/y_i + v_{i+1}/y_i + y_{i+1}/y_i \leq 1, \quad i=1,\ldots,N \\ & y_1/y_{\max} \leq 1 \\ & E w_i h_i^3 d_i/(6F) = 1, \quad i=1,\ldots,N. \end{array}$$

其变量为 w_i, h_i, v_i, d_i, y_i for $i=1,\ldots,N$。

证明

GP(4.46) 中给出了如下的优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{i=1}^{N} w_i h_i \\ \text{subject to} & w_{\min} \leq w_i \leq w_{\max}, i=1,\ldots,N \\ & h_{\min} \leq h_i \leq h_{\max}, i=1,\ldots,N \\ & S_{\min} \leq h_i/w_i \leq S_{\max}, i=1,\ldots,N \\ & 6iF/w_i h_i^2 \leq \sigma_{\max}, i=1,\ldots,N \\ & 12(2i-1)F/E w_i h_i^3 + v_{i+1} = v_i, i=1,\ldots,N \\ & 6(i-1/3)F/E w_i h_i^3 + v_{i+1} + y_{i+1} = y_i, i=1,\ldots,N \\ & y_1 \leq y_{\max} \end{array}$$

对于其中的两个等式

$$v_i = 12(i-1/2)\frac{F}{E w_i h_i^3} + v_{i+1}, \quad y_i = 6(i-1/3)\frac{F}{E w_i h_i^3} + v_{i+1} + y_{i+1}$$

结合该问题的实际物理意义，即让悬臂梁保持平衡状态，因此可以得到

$$v_i \geq 12(i-1/2)\frac{F}{E w_i h_i^3} + v_{i+1}, \quad y_i \geq 6(i-1/3)\frac{F}{E w_i h_i^3} + v_{i+1} + y_{i+1}$$

再将 GP(4.46) 中的其他约束化为几何规划的形式，并令

$$d_i = 6F/\left(E w_i h_i^3\right), \quad i=1,\ldots,N$$

显然和题目中的优化问题是等价的。

□

作业题 3

将下面的问题表示为凸优化问题。

(a) 极小化 $\max\{p(x), q(x)\}$，其中 p 和 q 为正项式。

(b) 极小化 $\exp(p(x)) + \exp(q(x))$，其中 p 和 q 为正项式。

(c) 在 $r(x) > q(x)$ 的约束下极小化 $p(x)/(r(x) - q(x))$，其中 p 和 q 为正项式，r 为单项式。

解答

以下三问的核心思路，都是通过对数函数，将包含正项式的目标函数与约束函数进行转化，以得到凸形式的几何规划。

(a) 因为 $p(x), q(x)$ 是正项式，因此有

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{k=1}^{N} c_k x_1^{a_{1k}} x_2^{a_{2k}} \cdots x_n^{a_{nk}} \\
q(x) &= \sum_{k=1}^{M} f_k x_1^{d_{1k}} x_2^{d_{2k}} \cdots x_n^{d_{nk}}
\end{aligned}
$$

令 $y_i = \log x_i$，则有

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{k=1}^{N} e^{a_k^T y + b_k} \\
q(x) &= \sum_{k=1}^{M} e^{d_k^T y + e_k}
\end{aligned}
$$

那么可以得到相应的几何规划

$$
\begin{aligned}
&\min t \\
&\text{s.t. } \sum_{k=1}^{N} e^{a_k^T y + b_k} t^{-1} \le 1 \\
&\qquad \sum_{k=1}^{M} e^{d_k^T y + e_k} t^{-1} \le 1
\end{aligned}
$$

使用对数函数进行转换，代回原变元，可以到到最终形式

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & t \\
\text{subject to} & p(x)/t \le 1, \quad q(x)/t \le 1
\end{array}
$$

(b) 和 (a) 中的步骤类似，我们可以转换为如下的几何规划

$$
\begin{aligned}
\min\ & \exp(t_1) + \exp(t_2) \\
\text{s.t.}\ & \sum_{k=1}^{N} e^{a_k^T y + b_k} t_1^{-1} \le 1 \\
& \sum_{k=1}^{M} e^{d_k^T y + e_k} t_2^{-1} \le 1
\end{aligned}
$$

使用对数函数进行转换，可以得到

$$
\begin{array}{ll}
\min & \log(\exp(t_1) + \exp(t_2)) \\
\text{s.t.} & \log\left(\sum_{k=1}^{N} e^{a_k^T y + b_k}\right) + \log\left(t_1^{-1}\right) \le 0 \\
& \log\left(\sum_{k=1}^{M} e^{d_k^T y + e_k}\right) + \log\left(t_2^{-1}\right) \le 0
\end{array}
$$

代回原变元，可以到到最终形式

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \exp(t_1) + \exp(t_2) \\
\text{subject to} & p(x) \le t_1, \quad q(x) \le t_2
\end{array}
$$

(c) 同 (a)(b) 过程一致，只需注意 $r(x)$ 是单项式即可。

可以得到使用对数函数进行转换后的几何规划为

$$
\begin{array}{ll}
\min & \log(t) \\
\text{s.t.} & \log\left(\sum_{k=1}^{N} e^{a_k^T y + b_k} t^{-1} / \left(e^{h^T y + i} - \sum_{k=1}^{M} e^{d_k^T y + e_k}\right)\right) \le 0 \\
& \log\left(\sum_{k=1}^{M} e^{d_k^T y + e_k} / e^{h^T y + i}\right) \le 0
\end{array}
$$

代回原变元，可以到到最终形式

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & t \\
\text{subject to} & p(x) \le t(r(x) - q(x))
\end{array}
$$