作业 8

李邹

人工智能一班 (2020 级)

最优化方法 课程作业

LANZHOU UNIVERSITY

2022 年 5 月 25 日

作业题 1

考虑优化问题

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x_1, x_2) \\
\text{subject to} & 2x_1 + x_2 \geq 1 \\
& x_1 + 3x_2 \geq 1 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

对其可行集进行概述。对下面的每个目标函数，给出最优集和最优值。

(a) $f_0(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

(b) $f_0(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$.

(c) $f_0(x_1, x_2) = x_1$.

(d) $f_0(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$.

(e) $f_0(x_1, x_2) = x_1^2 + 9x_2^2$.

解答

由约束条件，可作出可行集如图 1 所示的多面体。

其中各顶点为 $(0, +\infty), (0, 1), (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}), (1, 0), (+\infty, 0)$.

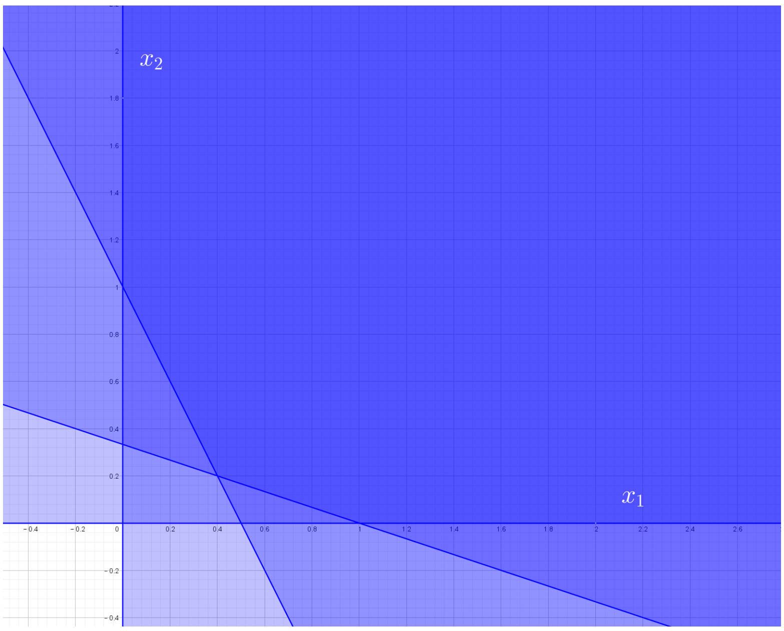

图 1: 约束范围图

(a) 利用数形结合的思路解答本问：令 $x_2 = -x_1 + z$，其中 z 为变量。

在二维空间中移动该直线，如图 2 所示

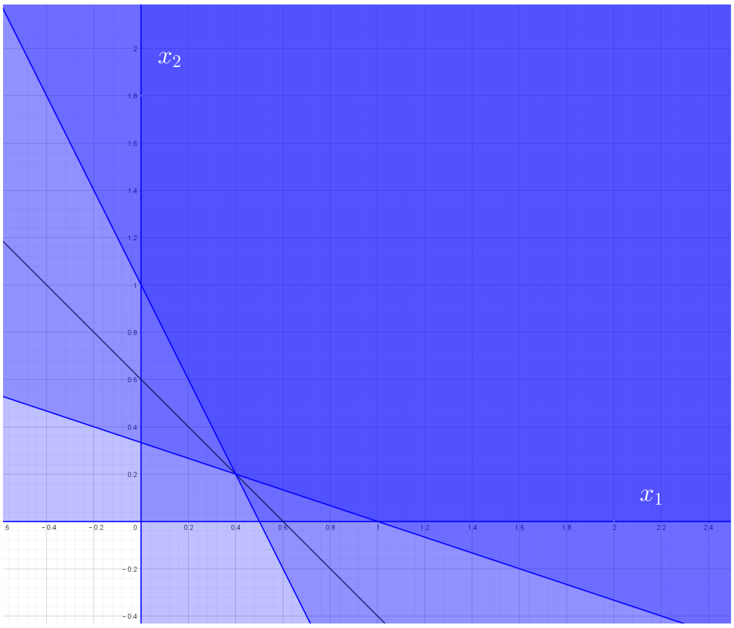

图 2: $x_2 = -x_1 + z$ 移动图

显然，当经过点 $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ 时，取得最优值。

所以，$x^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$，最优值为 $\frac{3}{5}$.

(b) 同 (a) 理，构造直线在二维空间中移动，如图 3 所示

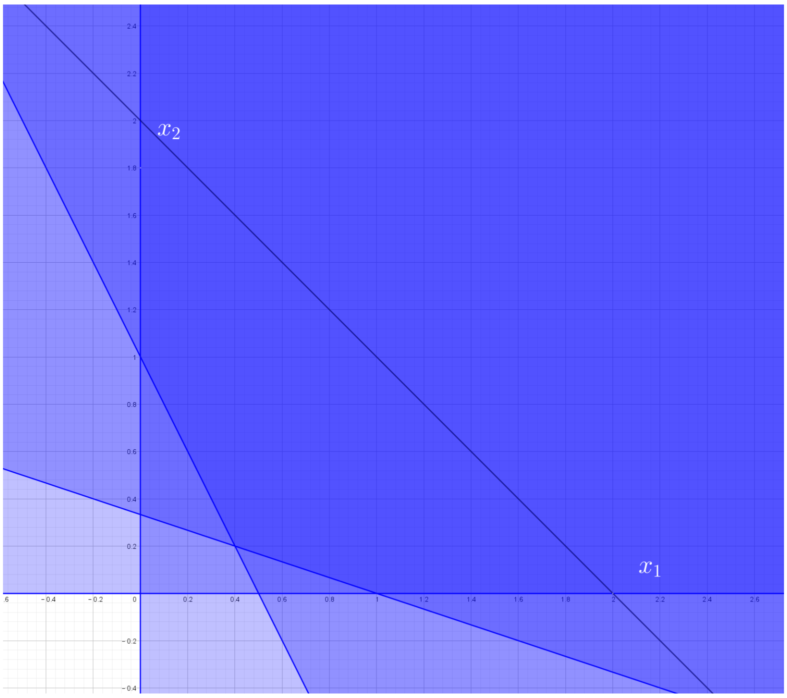

图 3: $x_2 = -x_1 - z$ 移动图

持续向上移动，$f_0(x_1, x_2)$ 均在可行集内，而 $f_0(x_1, x_2)$ 的值逐渐减小。

显然，$f_0(x_1, x_2)$ 无下界，因此最优值不存在。

(c) 最优值应满足 $x_1 = 0$ 且 $(0, x_2)$ 在可行集内

因此 $x^* = \{(0, x_2) \mid x_2 \geq 1\}$，最优值为 0.

(d) 不妨设 $x_1 \geq x_2$，则问题可转化为如下形式：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & x_1 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq x_2 \\ & x \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

做出该情况下的可行集如图 4 所示。

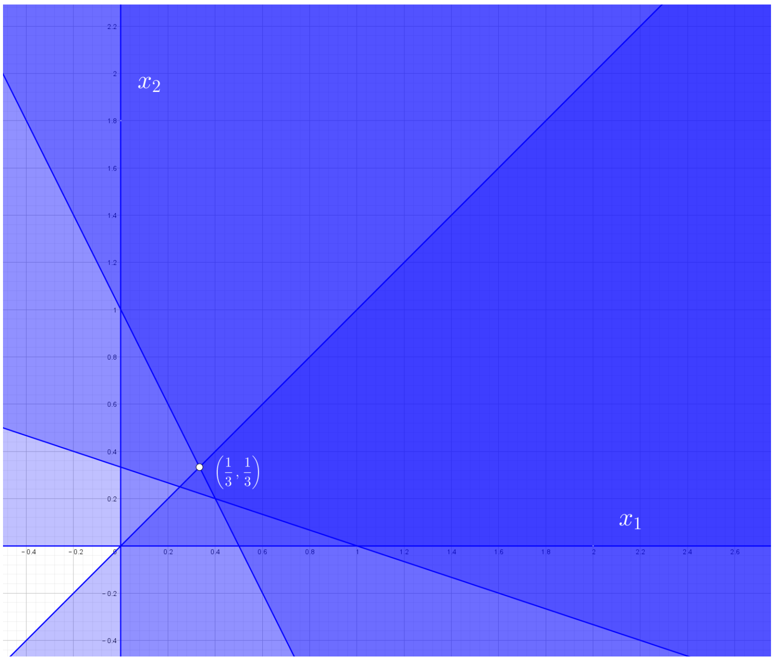

图 4: (1) 式对应的可行集图

显然，$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$，最优值为 $\frac{1}{3}$.

讨论另一种情况，即 $x_1 \leq x_2$ 时，问题可转化为如下形式：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & x_1 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 1 \\ & x_1 \leq x_2 \\ & x \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

做出该情况下的可行集如图 5 所示。

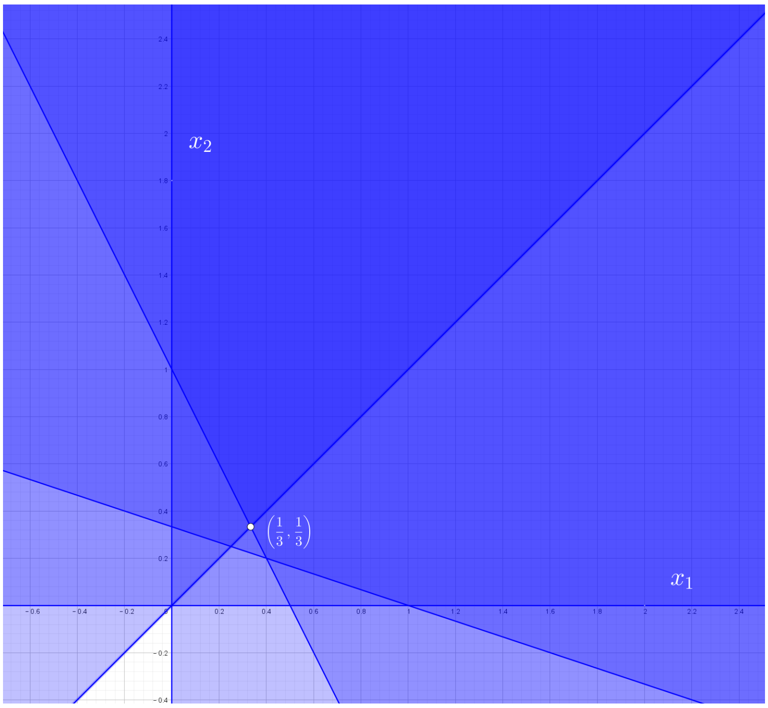

图 5: (2) 式对应的可行集图

最优集与最优值与前一致。综上，$x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$，最优值为 $\frac{1}{3}$.

(e) 考虑 KKT 条件，

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \mathbf{0} \Longrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 18x_2 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

假设 $\lambda_1 = 0$，且 $\nabla_x L(x, \lambda) = \mathbf{0}$，$\lambda^\top g(x) = \mathbf{0}$

不难求得一组满足 KTT 条件的值为 $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$，而 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

因此，$x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$，最优值为 $\frac{1}{2}$.