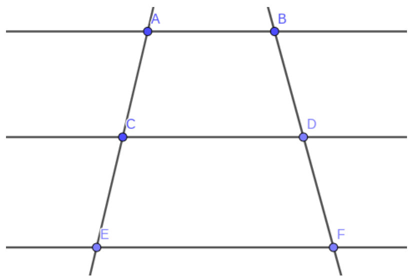
# 2018.09知识梳理

## 相似三角形

### 平行线分线段成比例定理

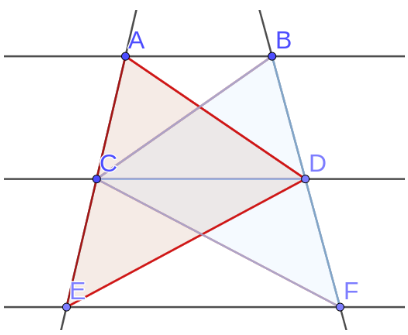



如图: $AB \parallel CD \parallel EF$ 则有结论:

- $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$
- $\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BF}$

证明如下:

连接$AD, DE, BC, CF$




$\because AB \parallel BC$

$\therefore S_{\Delta ACD} = S_{\Delta BCD}$

同理$S_{\Delta CDE} = S_{\Delta CDF}$

$\therefore \frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CED}} = \frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta CDF}}$

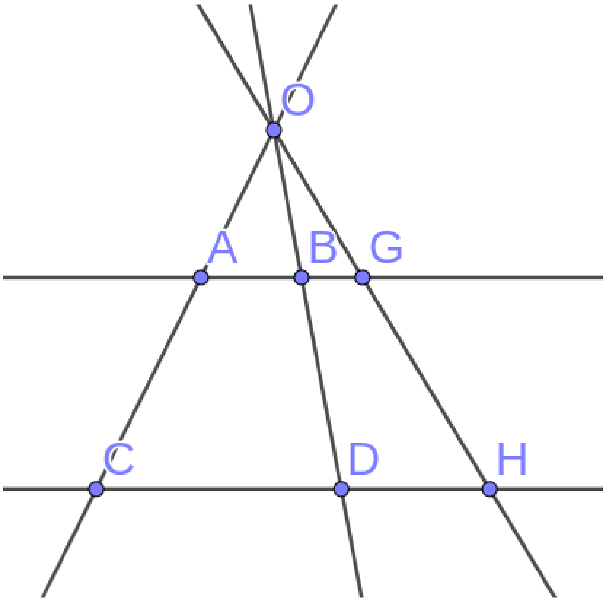
$S_{\Delta ACD}$与$S_{\Delta CED}$有着共同的高$DP(DP \perp AE)$

$\therefore \frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CED}} = \frac{AC}{CE}$

同理$\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta CFD}} = \frac{BD}{DF}$

$\therefore \frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$

### 推论: 直线束定理



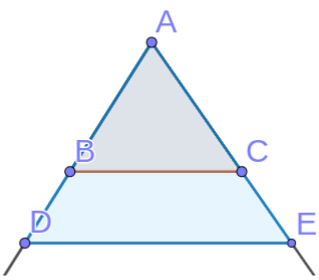

在上图中: $AB \parallel CD$

则有结论

- $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{OG}{OH}$
- $\frac{AB}{CD} = \frac{BG}{DH} = \frac{OA}{OC}$
- $\frac{AB}{CD} = \frac{BG}{DH}$

### 推论: 平行于三角形一边的直线截三角形另两边所在的直线成比例

1. 第一种形式

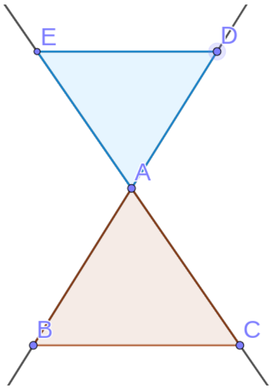



如图, $BC \parallel DE$

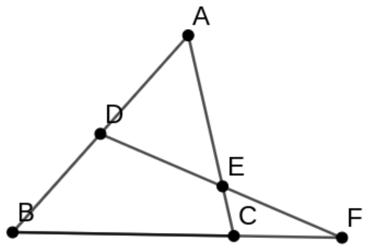
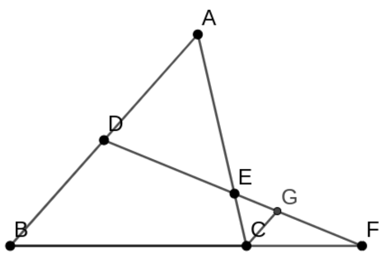
则有结论: $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$

(即 $S_{\Delta ABC}\sim S_{\Delta ADE}$)

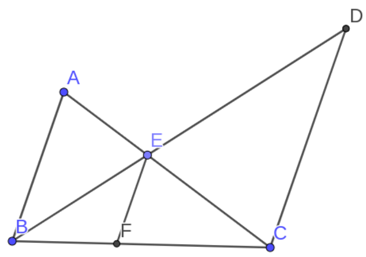
2. 第二种形式




此时仍有(1.)中的结论

> 例题:
>
> 
> 
>
> 如图, $D$为 $AB$中点, 求证 $\frac{BF}{CF}=\frac{AE}{EC}$
>
> 证明:
>
> 
> 
>
> 如图, 作$CG\parallel AB$交 $DF$ 与$G$
>
> $\because AD\parallel CG$
>
> $\therefore \frac{AE}{EC}=\frac{AD}{GC}$
>
> 又$\because BD\parallel CG$
>
> $\therefore \frac{BF}{CF}=\frac{BD}{GC}$
>
> 且$AD=BD$
>
> $\therefore \frac{BF}{CF}=\frac{AE}{EC}$

> 例题:




如图, $AB \parallel EF \parallel CD$

求证$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{EF}$

证明:

$\because EF \parallel AB$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta EFC$

$\therefore \frac{EF}{AB}=\frac{CF}{BC}$

同理$\frac{EF}{CD}=\frac{BF}{BC}$

相加, 得

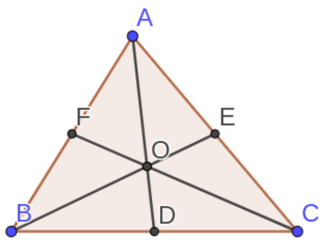
$\frac{EF}{AB}+\frac{EF}{CD}=\frac{CF+BF}{BC}$

$\frac{EF}{AB}+\frac{EF}{CD}=1$

同时除以$EF$得

$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{EF}$

## 三角形重心分中线为$1:2$两部分



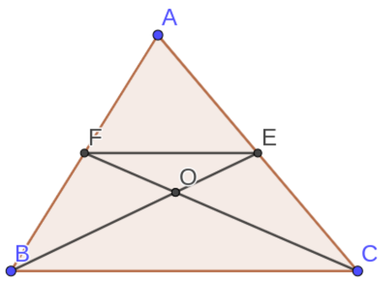

如图, $D, F, E$分别为$BC, AB, AC$的中点, 即,$O$为$\Delta ABC$的重心

则有:

$\frac{AO}{OD}=\frac{BO}{OE}=\frac{CO}{OF}=\frac{2}{1}$

证明如下:

如图, 连接$FE$.




$\because AF = BF$

且$AE = EC$

$\therefore FE$为$\Delta ABC$的中位线

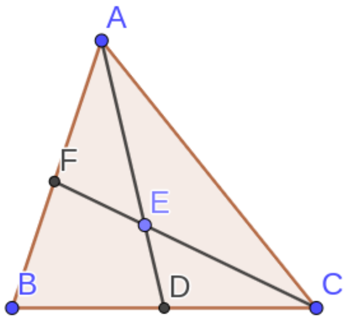
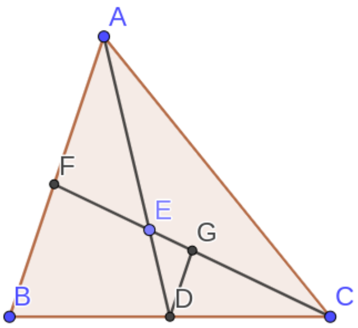
$\therefore \frac{FE}{BC} = \frac{1}{2}, FE \parallel BC$

$\therefore \Delta FEO \sim \Delta CBO$

$\therefore \frac{CO}{OF} = \frac{2}{1}$

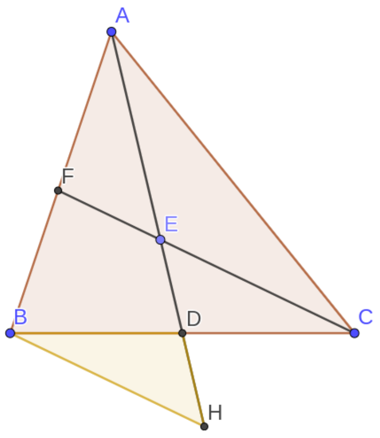
同理可证:$\frac{AO}{OD} = \frac{BO}{OE} = \frac{CO}{OF} = \frac{2}{1}$

**思想: 通过中点作平行线构造中位线.**

> 例题:
>
> 
> 
>
> 如图, $D$为$BC$的中点, $AD$是$\Delta ABC$的中线, $F$为$AB$上任意一点, $FC$与$AD$交于$E$.
>
> 求证:
>
> $AE \times BF = 2AF \times DE$
>
> > 思路: 看到常数项2想到可以凑出$2AF$或者$2DE$但是都不容易, 考虑把2移项, 转而凑出$\frac{BF}{2}$, 此时我们可以通过作$DG \parallel AB$构造中位线得到$\frac{BF}{2}$
> >
> > 证明
> >
> > 作$DG \parallel AB$交$CF$于$G$
> >
> > 
> > 

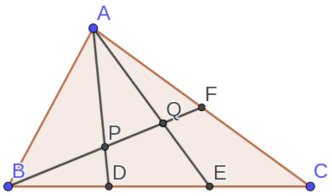
> $\because BD = DC$
>
> 且$BF \parallel DG$
>
> $\therefore DG$为$\Delta BCF$的中位线
>
> $\therefore 2DG = BF$
>
> 又$AB \parallel DG$
>
> $\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{AF}{GD}$
>
> $\therefore AE \times GD = AF \times ED$
>
> 其中$AF = BF = 2DG$
>
> $\therefore AE \times \frac{BF}{2} = AF \times DE$
>
> 即$AE \times BF = 2AF \times DE$

解法二

> 思路: 其实非要使用$2DE$也可以, 我们知道$D$是$BC$中点, 想到倍长中线, 使用倍长中线构造$2DE$
>
> 证明:
>
> 作$AD$的延长线$DH$使$DH = ED$
>
> 连接$BH$
>
> 
> 
>
> $\because ED = DH$
>
> 且$\angle EDC = \angle BDH$
>
> 且$BD = DC$
>
> $\therefore \Delta BDH \cong \Delta CDE$
>
> $\therefore \angle DBH = \angle DCE$
>
> $\therefore FE \parallel BH$
>
> $\therefore \frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EH}$
>
> $\therefore AF \times EH = AE \times FB$
>
> 其中$EH = 2ED$

$\therefore AE \times BF = 2AF \times DE$

例题: 如图:




$D, E$分别是$BC$的三等分点

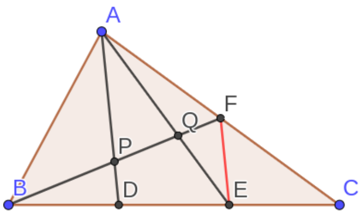
$F$是$AC$的中点

求$BP : PQ : QF$

思路, 使用相等条件证明线段的位置与数量关系

证明:

连接$FE$




$\because AF = FC$

且$DE = EC$

$\therefore FE$为$\Delta ADC$的中位线

$\therefore FE \parallel AD$

又$BD = DE$

$\therefore PD$为$\Delta BFE$的中位线

$\therefore BP = PF$

设$PD = a$

则$FE = 2a$

$\because AD \parallel EF$

即$\Delta CEF \sim \Delta CDA$

$\therefore \frac{DC}{EC} = \frac{AD}{EF}$

$\therefore AD = \frac{DC \times EF}{EC} = 2 \times EF = 4a$

$\therefore AP = 3a$

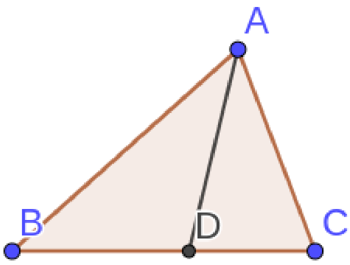
又$FE \parallel AD$

$\therefore \Delta FEQ \sim \Delta PQA$

> $\therefore \frac{PQ}{QF}=\frac{AP}{FE}=\frac{3a}{2a}=\frac{3}{2}$
>
> 同时$BP=PF$
>
> $\therefore BP:PQ:QF=5:3:2$

## 三角形角平分线定理

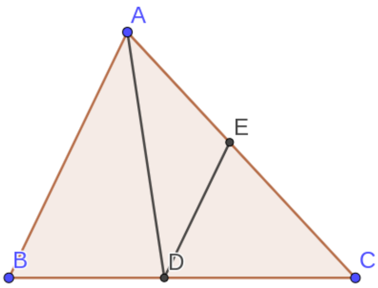
如图

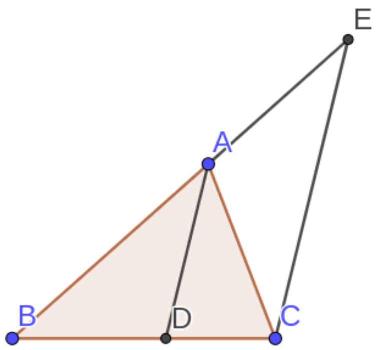
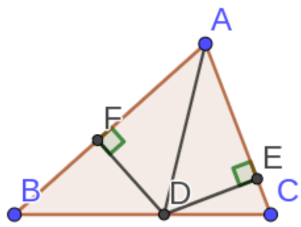



$AD$是$\Delta ABC$的角平分线, 有结论

$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

证明如下

> 例题:
>
> 已知$AD$平分$\angle BAC$
>
> 求证$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$
>
> 方法一:
>
> > 思路, 利用中点构造中位线解题
> >
> > 证明:
> >
> > 作$DE \parallel AB$交$AC$于$E$
> >
> > 如图:  $\because BD=DC$
> >
> > 
> >
> > 且$DE \parallel AB$
> >
> > $\therefore ED$为$\Delta ABC$的中位线
> >
> > 又$\because \angle BAD=\angle DAC$
> >
> > 且$AB \parallel DE$
> >
> > $\therefore \angle BAD=\angle EDA$
> >
> > $\therefore \angle ADE=\angle DAE$

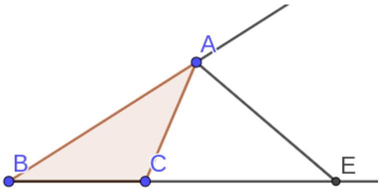
> > $\therefore AE = DE$
> >
> > 且$\Delta CDE \sim \Delta CBA$
> >
> > $\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AE}{EC} = \frac{DE}{EC} = \frac{AB}{AC}$
>
> 解法2:
>
> > 在三角形外作平行线, 证法类似1:
> >
> > 证明:
> >
> > 作$CE \parallel AD$交$BA$的延长线与点$E$
> >
> > 
> > 
> >
> > $\because CE \parallel AD$
> >
> > $\therefore \Delta BAD \sim \Delta BEC$
> >
> > $\therefore \angle BEC = \angle BAD$
> >
> > 而$\angle BAD = \angle DAC$
> >
> > 且$\angle DAC = \angle ECA$
> >
> > $\therefore \angle AEC = \angle ACE$
> >
> > $\therefore AC = AE$
> >
> > $\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} = \frac{BA}{AC}$
>
> 解法3:
>
> > 思路: 等面积法, 通过作垂直利用角平分线上的点到角两边距离相等证明
> >
> > 证明:
> >
> > 作$DF \perp AB$于$F$, 作$DE \perp AC$于$E$
> >
> > 
> > 
> >
> > 由$D$在$BC$上

> > $\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{BD}{DC}$
> >
> > 又$\because DF \perp AB\ DE \perp AC$
> >
> > 且$AD$平分$\angle BAC$
> >
> > $\therefore DF = DE$
> >
> > $\therefore \frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{AB \times FD}{AC \times DE} = \frac{AB}{AC}$
> >
> > $\therefore \frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

补充:

## 三角形外角平分线定理

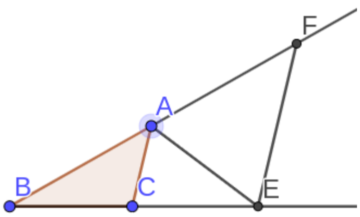
如图




若$AE$是$\Delta ABC$的外角平分线

则$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$

证明如下:

> 例题:
>
> 已知$AE$平分$\angle BAC$的补角
>
> 求证:$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$
>
> 证明:
>
> 作$EF \parallel AC$
>
> 
> 
>
> $\because AC \parallel EF$
>
> $\therefore \Delta BAC \sim \Delta BFE$
>
> 同时$AC \parallel EF$
>
> $\therefore \angle CAE = \angle AEF$
>
> 且$\angle CAE = \angle EAF$

> $\therefore \angle AEF = \angle EAF$
>
> $\therefore AF = FE$
>
> $\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{BF}{AB} = \frac{BF}{EF} = \frac{BA}{AC}$

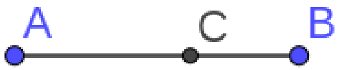
## 合分比性质

若$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

则

- $\frac{a}{b} + k = \frac{c}{d} + k$
- $\frac{ak}{b} = \frac{ck}{d}$
- $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

## 黄金分割




如图, $C$在$AB$上, 如果$C$满足:

$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$

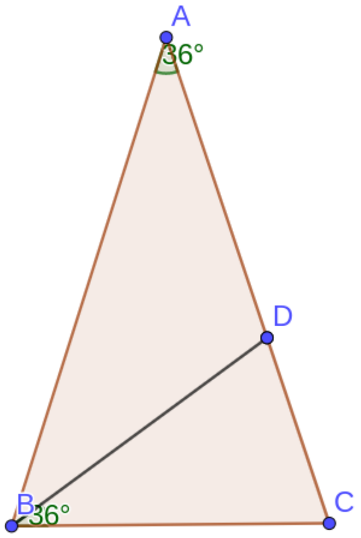
则称$C$点是$AB$的黄金分割点

> 例题:
>
> 已知在线段$AB$上有一点$C$满足:
>
> $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$
>
> 求$\frac{AC}{CB}$
>
> 解:
>
> 设$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = k$
>
> $AB = AC \times k$
>
> $AC = AB \times k$
>
> $AB = CB \times k^2$
>
> 不妨设$AB = 1$
>
> 则有$AC + BC = AB$
>
> $\therefore \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} = 1$
>
> $\therefore k = \frac{2}{-1 \pm \sqrt{1+4}}$
>
> 其中$k > 0$

$\therefore k = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2\times(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

例题:

如图, 等腰三角形$ABC$中, $AB = AC$, $\angle BAC = 36^\circ$, $D$是$AC$上一点, $\angle CAD = 36^\circ$




求证: $D$点黄金分割$AC$

证明:

$\angle ABC = \angle ACB = 72^\circ$

$\angle BDC = 72^\circ$

$BC = BD = DA$

$\because \angle A = \angle DBC = 36^\circ$

且$\angle ACB = \angle BCD$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta BCD$

设$BC = a$

则$\frac{BC}{DC} = \frac{AB}{BC}$

$\therefore AB = \frac{a^2}{DC}$

而$AB = AC = AD + DC$

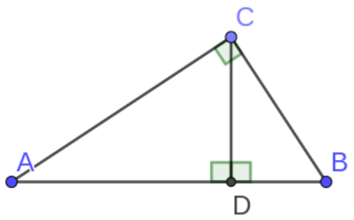
$\therefore a^2 = a \times DC + DC^2$

即$\frac{a}{DC} = \frac{a+DC}{a}$

所以$D$黄金分割$AC$

## 射影定理

*关于直角三角形的相似*




如图, $CD \perp AB$,$AC \perp CB$则

$\Delta ADC \sim \Delta CDB \sim \Delta ACB$

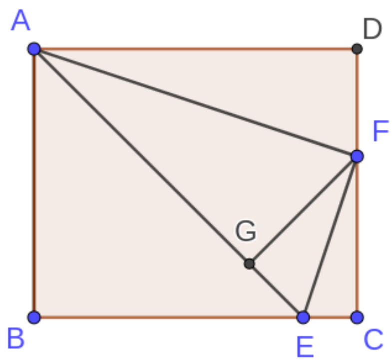
$AC^2 = AD \times AB$

$BC^2 = DB \times AB$

$CD^2 = DB \times AD$

证明:

> $\because \angle A = 90^\circ - \angle ACD = \angle DCB$
>
> 且$\angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$
>
> $\therefore \Delta CDB \sim \Delta ADC$
>
> 又$\angle CAB = \angle DAC$
>
> 且$\angle CDA = \angle BCA$
>
> $\therefore \Delta ADC \sim \Delta ACB$
>
> $\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$
>
> $\therefore AC^2 = AB \times AD$
>
> 同理可证$CB^2 = DB \times AB$
>
> 又有$\Delta CDB \sim \Delta ADC$
>
> $\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$
>
> $\therefore CD^2 = AD \times DB$

> 
> 
>
> 如图, $\frac{AB}{BC} = \frac{5}{6}$, $BC = 6EC$, $5FC = 3CD$, $FG \perp AE$于$G$,
>
> 求证: $AG = 4GE$

解法一:

证明:

设$AB=5a$

则$BC=AD=6a$

$BE=5a,EC=a$

$DF=2a,FC=3a$

$AF^2=AD^2+DF^2=36a^2+4a^2=40a^2$

$EF^2=EC^2+FC^2=a^2+9a^2=10a^2$

$AE^2=AB^2+BE^2=25a^2+25a^2=50a^2$

$\therefore AF^2+EF^2=AE^2$

$\therefore AF\perp EF$

$\therefore \Delta AGF\sim\Delta FGE$

而$\frac{AF}{EF}=\sqrt{\frac{AF^2}{EF^2}}=2$

$\therefore \frac{AG}{AF}=\frac{GF}{FE}$

$\therefore \frac{AG}{GF}=\frac{AF}{FE}=2$

同理$\frac{GF}{GE}=2$

$\therefore \frac{AG}{GF}\times\frac{GF}{GE}=\frac{AG}{GE}=2\times2=4$

$\therefore AG=4GE$

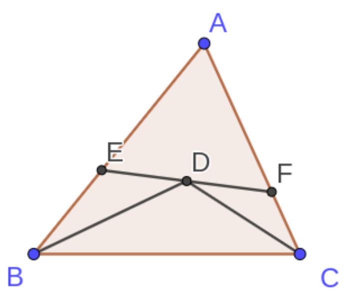
解法2:

同1得到$\angle AFE=90^\circ$

由射影定理得

$\frac{AF^2}{EF^2}=\frac{AG\times AE}{EG\times AE}=\frac{AG}{EG}=\frac{4}{1}$

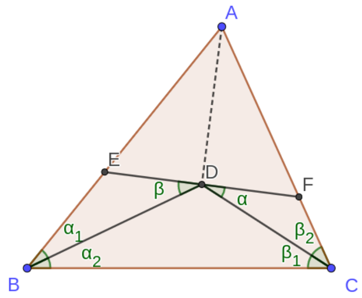
例题:




如图,$BD$平分$\angle ABC,CD$平分$\angle ACB,AE=AF$

求证$EF^2=4BE\times CF$

证明:




$\because BD, CD$交于$D$

$\therefore AD$平分$\angle BAC$

且$AE = AF$

$\because \angle AEF = 180^\circ - \angle BED$

$\because \angle EFA = 180^\circ - \angle CFD$

$\therefore 2\alpha + 2\beta + 360^\circ = 360^\circ + \angle BED + \angle CFD$

$\therefore \angle BED = \angle CFD = \alpha + \beta$

$\therefore \angle EDB = \beta,\ \angle FDC = \alpha$

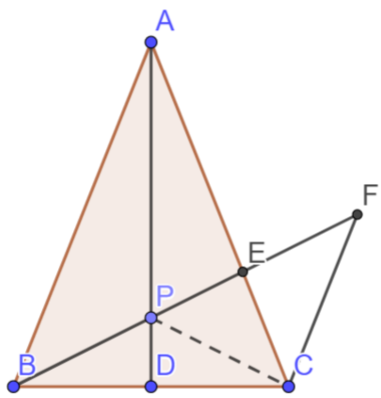
$\therefore \Delta BED \sim \Delta DFC$

$\therefore \frac{BE}{ED} = \frac{DF}{FC}$

$\therefore BE \times CF = DF \times ED = \frac{EF}{2} \times \frac{EF}{2} = \frac{EF^2}{4}$

$\therefore EF^2 = 4BE \times CF$

例题:




如图, $AB = AC, BD = DC, P$是$AD$上一动点, $CF \parallel AB$

求证$BP^2 = PE \times PF$

证明:

连接$CP,$

$\because \angle PEC = \angle BAE + \angle ABE$

且$\angle PCF = \angle PCE + \angle ECF$

而$AB \parallel CF$

$\therefore \angle ECP = \angle BAE$

$\therefore \angle PEC = \angle BAE + \angle ABE = \angle ECF + \angle ACP = \angle PCF$

$\therefore \angle PEC = \angle PCF$

且$\angle FPC = \angle CPE$

$\therefore \Delta PEC \sim \Delta PCF$

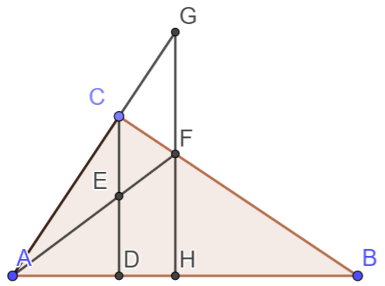
$\therefore \frac{PE}{PC} = \frac{PC}{PF}$

$\therefore PC^2 = PE \times PF$

而$PC = PB$

$\therefore BP^2 = PE \times PF$

例题:




$\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $FH \perp AB$, $AC \perp CB$,$CF = 3$, $FB = 12$

求$FH$的长

解:

延长$AC$的到G, 使$GH \parallel CD$, 连接$GF$

$\because CD \parallel GH$

且$DE = CE$

$\therefore FH = FG$

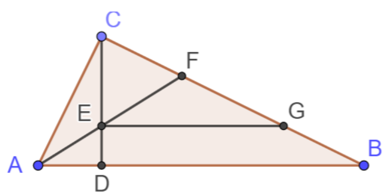
$\because \angle BFH = \angle GFC$

且$\angle GCF = \angle BHF$

$\therefore \Delta GCF \sim \Delta BHF$

$\therefore \frac{CF}{FG} = \frac{HF}{BF}$

例题:



如图, $AC \perp CB$, $AF$平分$\angle CAB$交$CD$于$E$交$CB$于$F$, $EG \parallel AB$

求证:

- $\frac{CE}{ED} = \frac{BF}{FC}$
- $BF \times BG = CG \times CF$
- $CF = BG$
- $\frac{AE}{EF} = \frac{AC}{EG}$

证明:

$\because AF$平分$\angle CAB$

$\therefore \frac{CF}{FB} = \frac{AC}{AB}$

且$\therefore \frac{CE}{ED} = \frac{AC}{AD}$

又$CD \perp AB, AC \perp CB$

且$\angle CAB = \angle DAC$

$\therefore \Delta ACD \sim \Delta ABC$

$\therefore \frac{CA}{AD} = \frac{AB}{AC}$

$\therefore \frac{CE}{ED} = \frac{BF}{CF}$

$\because EG \parallel AB$

$\therefore \Delta CEG \sim \Delta CDB$

$\therefore \frac{CE}{ED} = \frac{CG}{GB}$

而$\frac{CE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

$\therefore \frac{CG}{GB} = \frac{BF}{FC}$

即$CG \times FC = BF \times GB$

由和比性质:$\therefore \frac{CG}{BC} = \frac{BF}{BC}$

$\therefore CG = BF$

又有$\angle EAC = \angle EAD$

且$\angle EAD = \angle FEG$

$\angle FGE = \angle FBD$

$\angle ACD = 90^\circ - \angle CAD = \angle CBD$

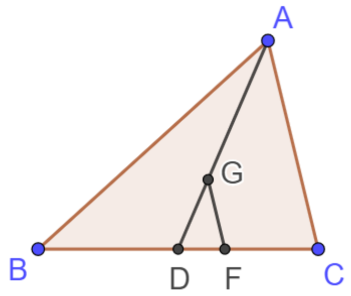
$\therefore \angle FGE = \angle ACE$

且$\angle CAE = \angle FEG$

$\therefore \Delta AEC \sim \Delta EFG$

$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{AC}{EG}$

例题:




如图, $D$为$BC$中点, G为$\Delta ABC$的重心,$GF \parallel AC$

已知$S_{\Delta ABC}=36$, 求$S_{\Delta DGF}$

解:

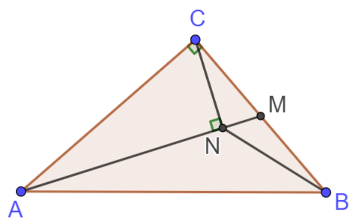
$\because G$为重心

$\therefore S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=18$

且 $\frac{AG}{GD}=\frac{2}{1}$

$\therefore S_{\Delta DFG}=\frac{1}{3^2}S_{\Delta ADC}=2$

例题:




$Rt\Delta ABC$中, $\angle ACB=90^{\circ}$, $CM=MB, CN\perp AM$于$N$

求证:

$\angle MAB=\angle MBN$

$\because AC\perp CM$

$\therefore \Delta MCN\sim\Delta MAC$

$\therefore \frac{MN}{CM}=\frac{CM}{AM}$

而$CM=MB$

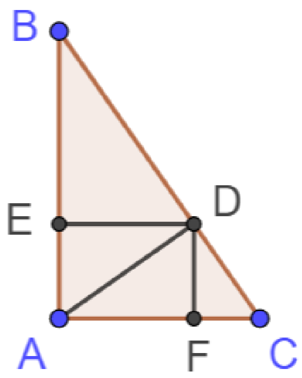
$\therefore \frac{MN}{MB}=\frac{MB}{AM}$

且$\angle NMB=\angle BMA$

$\therefore \Delta MBN\sim\Delta MAB$

$\angle MAB=\angle MBN$

例题:




在$\Delta ABC$中, $\angle BAC=90^\circ$, $AD\perp BC, DE\perp AB, DF\perp AC$

求证:

- $AE:EB=AC^2:AB^2$
- $BE:CF=AB^3:AC^3$
- $AD^3=BC\times BE\times CF$

证明:

$\because AD\perp BC, DE\perp AB, DF\perp AC$

$\therefore \Delta BED\sim\Delta BAC$

$\therefore \frac{AE}{EB}=\frac{DC}{BD}$

由射影定理得:

$\therefore AB^2=BD\times BC, AC^2=DC\times BC$

$\therefore \frac{AE}{EB}=\frac{DC}{BD}=\frac{DC\times BC}{BD\times BC}=\frac{AC^2}{AB^2}$

看到(2)中的三次方,考虑使用四次方并消去一个

$\frac{AB^4}{AC^4}=\frac{BD^2\times BC^2}{DC^2\times BC^2}=\frac{BD^2}{DC^2}=\frac{BE\times AB}{CF\times AC}$

即$\frac{AB^3}{AC^3}=\frac{BE}{CF}$

对于(3)中的结论,也可以使用先算四次方并消去的方法.

$AD^4$

$=BD^2\times DC^2$

$=BE\times AB\times CF\times AC$

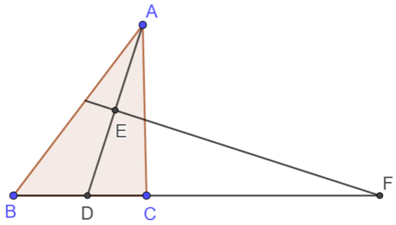
$=BE\times CF\times(AC\times AB)$

由等面积法,可得 $AC\times AB=AD\times BC$

$AD^4=BE\times CF\times AD\times BC$

即$AD^3=BE\times CF\times BC$

例题:




$AD$是$\angle A$的角平分线, $AD$的中垂线$EF$与$AD$交于$E$

求证:

- $\frac{BD}{CD}=\frac{BF}{DC}$
- $BC=4, CF=3$时, 求$DF$

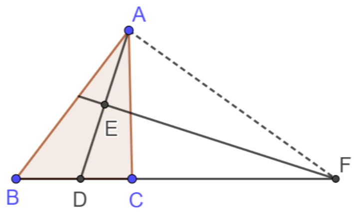
看到$\frac{BD}{CD}$想到使用角平分线定理

$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{DC}$

类似"母子相似"的结论, 考虑连接 $AF$ 证明$\Delta FBA\sim\Delta FAC$

证明:

连接$AF$, 如图所示




$\because EF$垂直平分$AD$

$\therefore FA=FD, \angle FAD=\angle FDA$

又有$AD$平分$\angle CAB$

即$\angle CAD=\angle DAB$

$\therefore \angle FAD-\angle CAD=\angle FDA-\angle BAD$

$\therefore \angle ABC=\angle CAF$

且$\angle AFC=\angle BFA$

$\therefore \Delta FAC\sim\Delta FBA$

$\frac{AC}{AB}=\frac{FA}{FB}$

同时$FA=FD$

$\frac{AC}{AB}=\frac{FD}{FB}$

$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$

从而得出结论

$\frac{BD}{CD}=\frac{FB}{FD}$

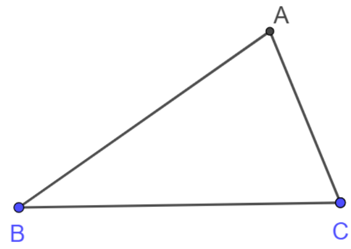
对于第二问,可以使用第一问的相似继续证明.

$\frac{AF}{BF}=\frac{CF}{AF}$

$AF^2=BF\times CF$

$\therefore DF=AF=\sqrt{BF\times CF}=\sqrt{21}$

例题:

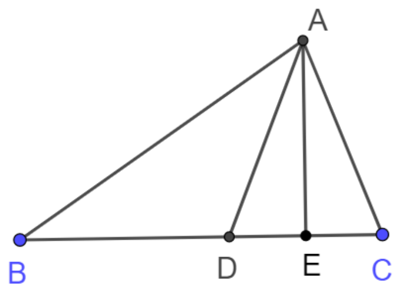



在如图所示的三角形中, 满足, $\angle ACB=2\angle B$

求证:

$AB^2=AC^2+AC\times BC$

以$A$为圆心, $AC$为半径,画弧交$BC$于D, 作$AE\perp BC$于$E$




在等腰三角形$\Delta ADC$中, $AC=AD, \angle ADC=\angle ACD$

$\therefore \angle ADC=\angle ABC+\angle DAB=2\angle B$

$\therefore \angle ABD=\angle DAB$

$\therefore BD=DA=AC$

$\therefore AB^2=AE^2+BE^2$

$=BD^2+DE^2+2BD\times DE+AE^2$

$=AD^2+BD^2+2BD\times DE$

$=AD^2+BD\times(BD+2DE)$

$=AD^2+BD\times(BD+DC)$

$=BD\times BC+AD^2$

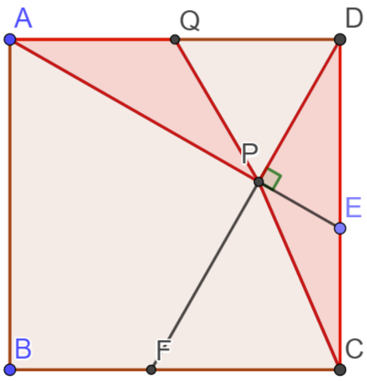
$=AC^2+AC\times BC$

例题:

在边长为$2cm$的正方形$ABCD$中, 动点$E, F$分别从$D, C$两点同时出发, 均以$1cm/s$的速度在射线$DC, CB$上运动, 连接$AE$与$DF$交于点$P$, $Q$是$AD$的中点, 若以$APQ$为顶点的三角形与$PDC$为顶点的三角形相似, 运动时间为?

分析:

如图




通过证明$\Delta DFC \cong \Delta AED$易证$PF \perp AE$

$\because PE \perp AE$

$\therefore AQ = QD = QP$

$\Delta APQ$为等腰三角形

当条件满足时$\Delta DPC$一定是等腰三角形

可以通过分类讨论哪两条边相等进而解决问题

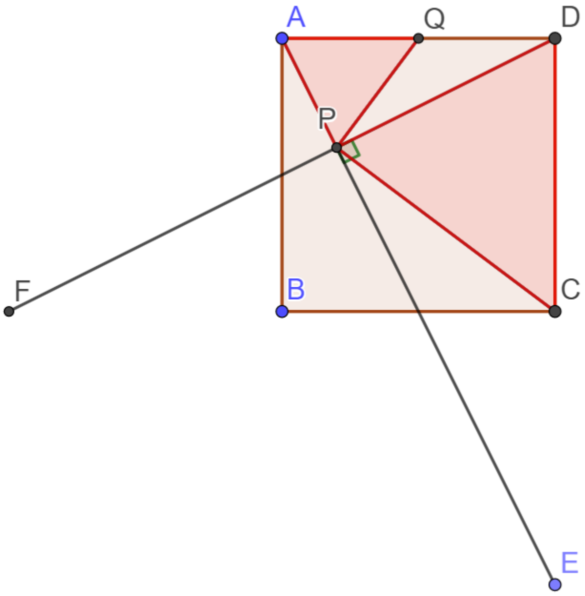
分类讨论:

- $PC = PD$

> 此时$P$在$CD$的垂直平分线上
>
> 而P是交点, 此时$t = 2$

- $PC = CD$

> 此时$E$在$C$下方
>
> 如图:



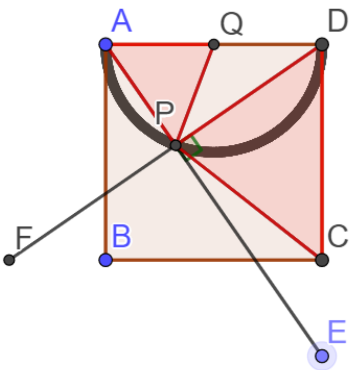

> $\because \Delta DPE$为直角三角形
>
> $\therefore CE = CD = 2cm
>
> $t=4$

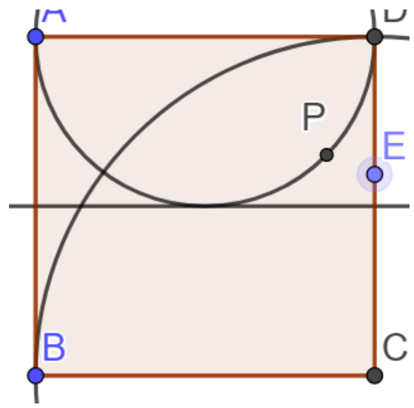
- $PD=CD$

> 不存在, 舍去

总结:

P点的轨迹如图所示




$P$所在的圆弧与满足DPC是等腰三角形的"两圆一线"有两个交点(A点不可能达到), 即两种情况

# 反比例函数

## 函数的定义

两个变量, 每个自变量的取值对应且仅对应一个因变量的取值.

*不是所有函数都有解析式!!*

## 初等函数

- $y = kx + b$
- $y = \frac{k}{x}$
- $y = ax^2 + bx + c$

等

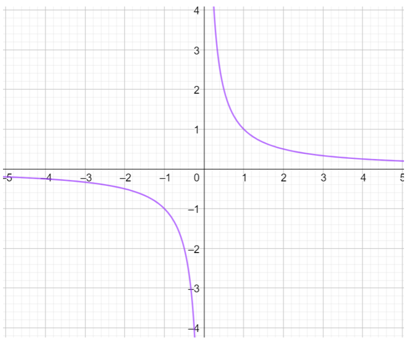
## 反比例函数的定义域

定义域: $x \neq 0$

值域: $y \neq 0$

## 反比例函数的图像

如图:



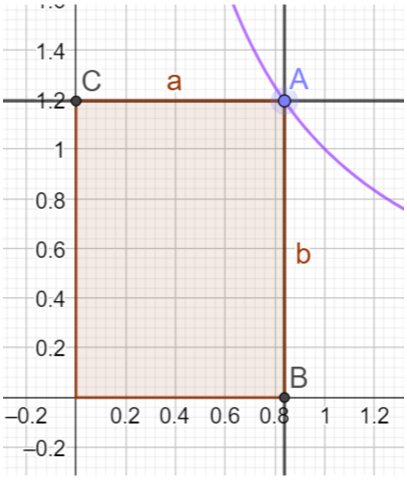

- 是双曲线 (有两支)
- 关于原点中心对称, 关于每个象限的角平分线($y = x$与$y = -x$)对称
- $k > 0$时, 函数在一三象限

  $k < 0$时, 函数在二三象限
- $k > 0$时, y随x的增大而减小

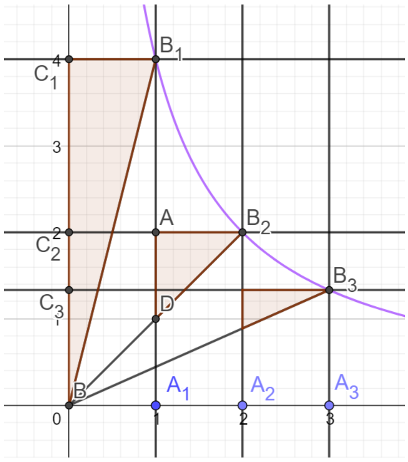
  $k < 0$时, y随x的减小而增大

  **前提条件: 在每个象限内!!!**
- $|k|$越大, 图像越远离原点
- 双曲线无限逼近坐标轴, 但并不相交

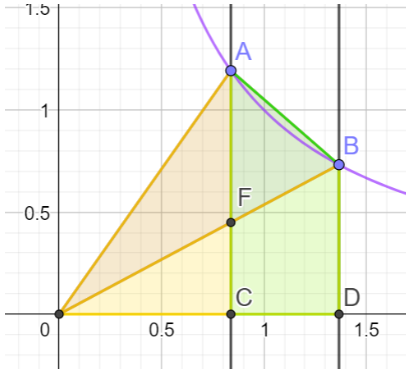
## k的几何意义




如图$S_{\square ABOC}=|ab|=|k|$

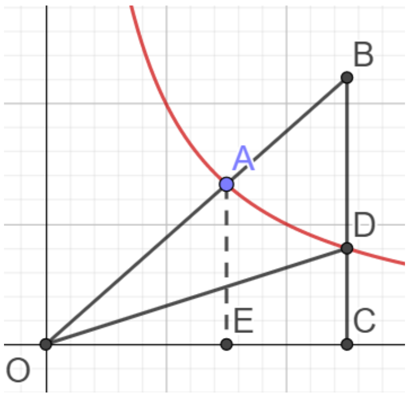
> 例题:
>
> 
> 
>
> $OA_1=A_1A_2=A_2A_3$, 分别过$A_1/A_2/A_3$作y轴的平行线, 与反比例函数$y=\frac{4}{x}$交于$B_1/B_2/B_3$, 再作关于x轴的平行线,交x轴于$C_1/C_2/C_3$, 求图中阴影面积之和
>
> $S_1=\frac{k}{2}=2$
>
> $S_2=\frac{k}{2}\times\frac{S_{\Delta B_2C_2O}}{S_{\Delta B_2AD}}=2\times(\frac{A_1A_2}{OA_2})^2=\frac{1}{2}$
>
> 同理$S_3=2\times(\frac{A_2A_3}{OA_3})^2=\frac{2}{9}$
>
> $S=S_1+S_2+S_3=2+\frac{1}{2}+\frac{2}{9}$

- $S_{\square}=|k|$
- 点$p$在双曲线上运动, 而$S_{\square}$不变
- $S_{Rt\Delta OAB}=S_{Rt\Delta OAC}=\frac{|k|}{2}=\frac{49}{18}$




- $S_{\Delta OAB} = S_{\Box ABDC}$

> 证明如下:
>
> $S_{\Delta OAC} = S_{\Delta OBD}$
>
> 同时减去$S_{\Delta OFC}$
>
> $S_{\Delta OFA} = S_{\Box FCDB}$
>
> 同时加上$S_{\Delta AFB}$
>
> $S_{\Delta OAB} = S_{\Box ABDC}$

> 例题:
>
> 
> 
>
> $\frac{AO}{AB} = \frac{2}{3}, S_{\Delta BOD} = 32$
>
> 求$y = \frac{k}{x}$
>
> 解:
>
> 作$AE \perp OC$于点$E$
>
> $\because AE \perp OC, BC \perp OC$
>
> $\therefore AE \parallel BC$
>
> $\therefore \Delta OEA \sim \Delta OCB$
>
> 又有$\frac{OA}{AB} = \frac{2}{3}$
>
> $\therefore \frac{S_{\Delta OEA}}{S_{\Delta OCB}} = \frac{4}{25}$
>
> $\therefore S_{\Delta ADB} = S_{\Delta OAD} + S_{\Delta ADB} = S_{\Box ADCE} + S_{\Delta ADB} = S_{\Box ABCE}$

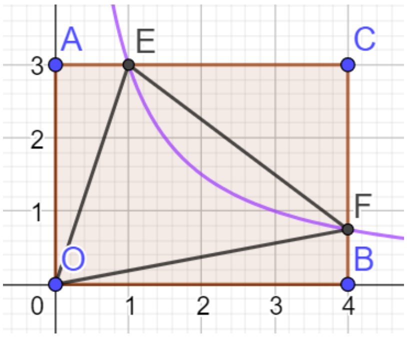
$\therefore \frac{S_{\Delta OEA}}{S_{\square ABCE}} = \frac{4}{21}$

$\therefore S_{\Delta OEA} = S_{\square ABCD} \times \frac{4}{21} = 4$

$\therefore k = 2 \times \Delta OEA = 8$

故而$y = \frac{8}{x}$

例题




$OB = 4, OA = 3$, 反比例函数$y = \frac{k}{x}$交$AC$与$E$, 交$CB$于$F$

1. 求证$S_{\Delta AOE} = S_{\Delta BOF}$
2. $S = S_{\Delta OEF} - S_{\Delta ECF}$, 求$k$为何值时, $S$取得最大值, 最大值是多少?

证明:

$S_{\Delta AOE} = \frac{k}{2}$

$S_{\Delta BOF} = \frac{k}{2}$

设 $E(\frac{k}{3}, 3)$ $F(4, \frac{k}{4})$

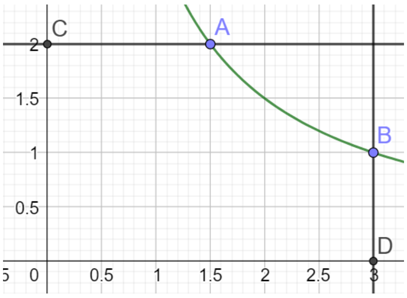
$S_{\Delta OEF} = (4 - \frac{k}{3})(3 + \frac{k}{4}) \times \frac{1}{2}$

$S_{\Delta ECF} = (4 - \frac{k}{3})(3 - \frac{k}{4}) \times \frac{1}{2}$

$S = k - \frac{k^2}{12} = -\frac{1}{12}(k^2 - 12k + 36) + 3 = -\frac{1}{12}(k-6)^2 + 3$

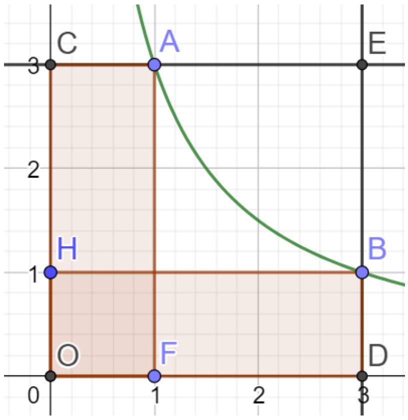
当$k = 6$时, $S$取得最小值为3

- 下图中, 如果$A$为$CE$中点, 则$B$为$CE$中点
  - 扩展: $\frac{EB}{BD} = \frac{AE}{CA}$



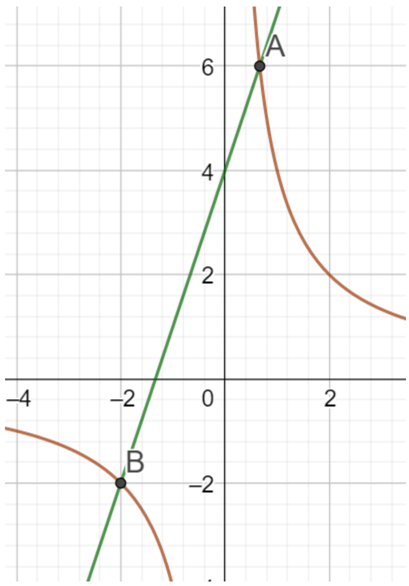

证明:

如图:

> 
> 
>
> $S_{\square OFAC} = S_{\square ODBH}$
>
> 同时使用$S_{ODEC}$减去
>
> 得到$S_{\square HBEC} = S_{\square FDEA}$
>
> $S_{\square HBEC}$与$S_{\square ODBH}$有着相同的长
>
> $\frac{S_{\square HBEC}}{S_{\square ODBH}} = \frac{BE}{DB}$
>
> 同理$\frac{S_{\square FDEA}}{S_{\square OFAC}} = \frac{AE}{CA}$
>
> $\frac{AE}{CA} = \frac{S_{\square FDEA}}{S_{\square OFAC}} = \frac{S_{\square HBEC}}{S_{\square ODBH}} = \frac{BE}{DB}$

# 与一次函数判断大小

1. 类似下图的




即 $y_1 = \frac{4}{x}$

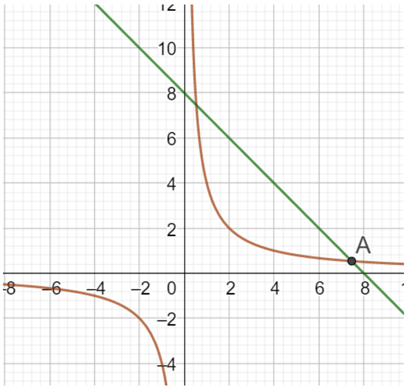
$y_2 = 3x + 4$

应当分段考虑, 将$x > 0$时$y_2$的函数值与$y_1$的上半段比较:

| 自变量 | 因变量 |
| --- | --- |
| $x > \frac{2}{3}$ | $y_1 < y_2$ |
| $x = \frac{2}{3}$ | $y_1 = y_2$ |
| $0 < x < \frac{2}{3}$ | $y_1 > y_2$ |
| $-2 < x < 0$ | $y_1 < y_2$ |
| $x = -2$ | $y_1 = y_2$ |
| $x < -1$ | $y_1 > y_2$ |

对于$x < 0$的类似处理

2. 类似下图的




$y_1 = \frac{4}{x}$

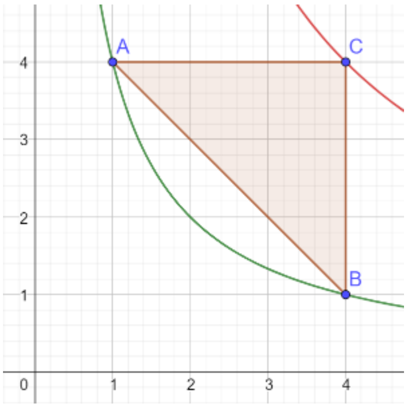
$y_2 = -x + 8$

| 自变量 | 因变量 |
| --- | --- |
| $x < 0$ | $y_2 > y_1$ |
| $x < 4 - 2\sqrt{3}$ | $y_2 < y_1$ |
| $x = 4 - 2\sqrt{3}$ | $y_2 = y_1$ |
| $4 + 2\sqrt{3} > x > 4 - 2\sqrt{3}$ | $y_2 < y_1$ |
| $x = 4 + 2\sqrt{3}$ | $y_2 = y_1$ |
| $x > 4 + 2\sqrt{3}$ | $y_2 > y_1$ |

# 反比例图像与线段或其他图形相交的问题

## 边与坐标轴平行的直角三角形

> 例题:

> 
> 
>
> 如图$A(1,4), B(4,1), C(4,4)$
>
> $y=\frac{k}{x}$ 与三角形有焦点，求$k$的取值范围
>
> 函数经过A点时, $k=4$
>
> 函数经过B点时, $k=4$
>
> 函数经过C点时, $k=16$
>
> $$\begin{cases} k \geq 4 \\ k \geq 4 \\ k \leq 16 \end{cases}$$
>
> $\therefore 4 < k < 16$

总结:

- 对于每个顶点求出反比例函数经过时$k$的取值
- 联立不等式求解

## 线段

> 例题:
>
> 已知点$A(1,2)$点$B(4,1)$, 若反比例函数$y=\frac{n}{x}$的图像与线段$AB$有公共点, 求$n$的取值范围
>
> 思路:考虑函数经过端点的情况和线段时函数的切线的情况
>
> 解答:
>
> 函数经过$A$点时, $n=2$
>
> 函数经过$B$点时, $n=4$
>
> 线段所在的直线是反比例函数的切线时
>
> $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ 与函数 $y=\frac{n}{x}$有且仅有一个交点
>
> $x^2-7x+3n=0$
>
> $\Delta=49-4\times 3n=49-12n$
>
> $\Delta=0$时, 两个函数有且仅有一个交点
>
> $n=\frac{49}{12}$

> 此时交点的横坐标$1 < \frac{7}{2} < 4$, 在线段$AB$上
>
> 有:
>
> $$\begin{cases} n \le 2 \\ n \le 4 \\ n \ge \frac{49}{12} \end{cases}$$
>
> 得到: $2 \le n \le \frac{49}{12}$

总结: 对于线段来说

- 取反比例函数经过两个端点时$k$的值
- 取该线段所在的直线是反比例函数的切线时$k$的值 (条件: 交点在线段上)
- 联立不等式, 求出$k$的取值范围

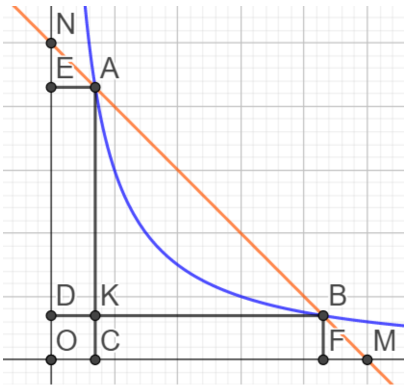
### 边与坐标轴平行的正方形

> 在平面直角坐标系的第一象限, 边长为1的正方形$ABCD$的边均平行于坐标轴, $A(a, a)$, 如图, $y = \frac{3}{x}$于正方形的边有交点, 求A的取值范围
>
> 考虑$A$在反比例函数上
>
> 此时$A(\sqrt{3}, \sqrt{3})$
>
> $\therefore a \ge \sqrt{3}$
>
> C在反比例函数上
>
> $(a+1)^2 = 3$
>
> $\therefore a \le \sqrt{3} - 1$
>
> $\therefore \sqrt{3} - 1 \le a \le \sqrt{3}$

方法:

- 考虑正方形离原点最近和最远的点即可

## 利用反比例函数的对称性

> 例题:
>
> 
> 
>
> 如图, 一次函数与反比例函数交于$A, B$, 与坐标轴交于$M, N$, $A, B$向坐标轴作垂线, 交坐标轴于$C, D, E, F$.
>
> 求证:

- $S_{\square AEDK} = S_{\square CFBK}$
- $AN = BM$

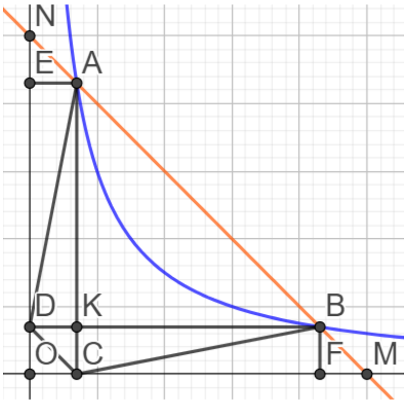
证明:

$\because S_{\square AEOC} = S_{\square BDOF} = k$

$\therefore S_{\square AEOC} - S_{\square DKCO} = S_{\square BDOF} - S_{\square DKCO}$

$\therefore S_{\square AEDK} = S_{\square BKCF}$

连接 $DC, AD, BC$




$\because S_{\Delta ADK} = S_{\Delta BKC} = \frac{S_{\square AEDK}}{2}$

$\because S_{\Delta DKC} = S_{\Delta DKC}$

$\therefore S_{\Delta DCA} = S_{\Delta DCB}$

$\therefore DC \parallel AB$

$\therefore AC \parallel y$轴

$\therefore \square ANDC$为平行四边形

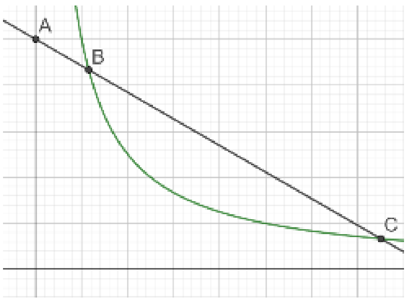
同理$\square BMCD$为平行四边形

$\therefore DC = AN$

$\therefore DC = BM$

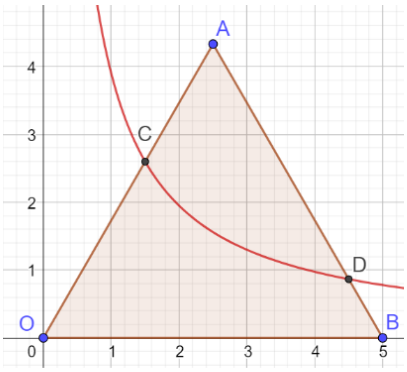
$\therefore AN = BM$

例题:




如图, 直线$y = -\frac{\sqrt{3}}{3} + b$与$y$轴交于点$A$, 与双曲线$y = \frac{k}{x}$在第一象限交于$B, C$两点, 已知$AB \times AC = 4$, 则$k$是多少

> 解法:
>
> 联立两条直线:
>
> $-\frac{\sqrt{3}}{3}+b=\frac{k}{x}$
>
> $-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2+bx-k=0$
>
> $x^2-\sqrt{3}bx+\sqrt{3}k=0$
>
> 一次函数$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}+b$与x轴成的夹角为$30^{\circ}$
>
> $\therefore x_B\times x_C=(x_B-x_A)(x_C-x_A)=4\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=3$
>
> $x_B\times x_C=\sqrt{3}k$
>
> $\therefore k=\sqrt{3}$

> 例题
>
> 
> 
>
> 等边$\Delta OAB$边长为5叫双曲线$y=\frac{k}{x}$于C,D两点, $OC=3BD$, 求$k$的值
>
> 设$C(3x,3\sqrt{3}x),D(5-x,\sqrt{3}x)$
>
> $k=9\sqrt{3}x^2$
>
> 同时 $k=5\sqrt{3}x-\sqrt{3}x^2$
>
> $5\sqrt{3}x-\sqrt{3}x^2=9\sqrt{3}x^2$
>
> $x=\frac{1}{2}$
>
> $k=9\sqrt{3}x^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}$

# 一元二次方程

## 方程

- 代数方程
  - 有理方程
    - 整式方程
      - 一元一次方程
      - 一元二次方程
      - 二元一次方程
      - ......
    - 分式方程
  - 无理方程
- 超越方程

# 一元二次方程的定义

有一个未知数, 最高次项为二次项的整式方程

其一般形式为 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

# 解一元二次方程

1. 观察(方程是否特殊)

| 特征 | 解法 | 例子 |
|---|---|---|
| $ax^2=b$ | 直接开平方解方程 | $3x^2=75$ |
| $c$很大, $b$是一个不大的偶数, $a=1$ | 配方法 | $x^2-12x=9964$ |
| $a+b+c=0$ | $x_1=1$, 使用韦达定理求出$x_2$ | $\dots\dots$ |
| $a-b+c=0$ | $x_1=-1$, 使用韦达定理求出$x_2$ | $\dots\dots$ |
| x以某种形式反复出现 | 换元 | $(x-6017)(x-6018)=12$ |

2. 判定方程是否有根

   *原则上需要, 实际在解的过程中可以发现*

   $\Delta=b^2-4ac$

3. 首选十字相乘法解方程

   保底使用求根公式

> 例题
>
> 解下列方程:
>
> - $x^2-12x=9964$
>
> > 观察发现可以使用配方法
> >
> > $x^2-12x+36=100^2$
> >
> > $(x-6)^2=100^2$
> >
> > $x-6=\pm 100$
> >
> > $x_1=106$
> >
> > $x_2=-94$
>
> - $(x-6017)(x-6018)$
>
> > 设$a=x-6017$
> >
> > $a(a-1)=12$
> >
> > $a^2-a-12=0$
> >
> > $(a-4)(a+3)=0$
> >
> > $a_1=4,a_2=-3$

> > $x_1 = 6021, x_2 = 6014$
>
> - $9406x^2 - 8289x - 1117 = 0$
>
> > $\because 9406 - 8289 - 1117 = 0$
> >
> > $x_1 = 1$
> >
> > $x_2 = -\frac{1117}{9406}$

> 例题:
>
> 设方程$x^2 + 1993x - 1994 = 0$与$(1994x)^2 - 1993 \times 1995x - 1 = 0$的较小根分别是$\alpha, \beta$, 求$\alpha \times \beta$
>
> 对于$x^2 + 1993x - 1994 = 0$,
>
> $\because 1 + 1993 - 1994 = 0$
>
> $\therefore x_1 = 1, x_2 = -1994$
>
> $\therefore \alpha = x_2 = -1994$
>
> 对于$(1994x)^2 - 1993 \times 1995x - 1 = 0$
>
> $\because 1994^2 - 1993 \times 1995 - 1 = 0$
>
> $\therefore x - 1 = 1, x_2 = -\frac{1}{1994^2}$
>
> $\beta = x_2 = -\frac{1}{1994^2}$
>
> $\alpha \times \beta = -\frac{1}{1994^2} \times (-1994) = \frac{1}{1994}$

## 性质:利用有理数的封闭性

性质: $ax^2 + bx + c = 0$中, $a, b, c$均为有理数, 若$x_1 = p + q\sqrt{m}$, 则$x_2 = p - q\sqrt{m}$

原因: $q\sqrt{m}$只可能来自$\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

> 例题:
>
> 如果$a, b$均为有理数, 关于$x$的方程$x^2 + ax + b = 0$有一个根是$2 - \sqrt{3}$, 求$a + b$的值
>
> 解答:
>
> $\because a, b$均为有理数
>
> $\therefore x_1 = 2 - \sqrt{3}, x_2 = 2 + \sqrt{3}$
>
> 有韦达定理得:
>
> $a + b = x_1x_2 - (x_1 + x_2) = -3$

## 根据方程的定义降次或证明

> 例题
>
> 已知$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$的根为$x_1, x_2$, 设$p = x_1^5 + x_2^5, q = x_1^4 + x_2^4, r = x_1^3 + x_2^3$, 求$ap + bq + cr$
>
> 解答:

> 原式$= a(x_1^5+x_2^5)+b(x_1^4+x_2^4)+c(x_1^3+x_2^3)$
>
> $= x_1^3(ax_1^2+bx_1+c)+x_2^3(ax_2^2+bx_2+c)$
>
> $ax_1^2+bx_1+c=ax_2^2+bx_2+c=0$
>
> 原式$= 0$

> 例题
>
> 已知$a$是方程$x^2-2011x+1=0$的一个根, 求$a^2-2010a+\frac{2011}{a^2+1}$的值
>
> 把$a=0$带入, 方程不成立, 得到$a\neq 0$
>
> 分母$= a^2+1=2011a$
>
> 而$a^2=2011a-1$
>
> 原式$= 2011a-1-2010a+\frac{2011}{2011a}$
>
> $= a+\frac{1}{a}-1$
>
> $\because a-2011+\frac{1}{a}=0$
>
> $\therefore$ 原 式 $=-1+2011=2010$

> 例题
>
> 已知$a$是方程$x^2-3x+1=0$的一个根, 求代数式$\frac{2a^5-5a^4+2a^3-8a^2}{a^2+1}$的值
>
> 分子$= 2a^3(a^2-3a+1)+a^4-8a^2$
>
> $= a^2(a^2-3a+1)+3a^3-9a^2$
>
> $= 3a(a^2-3a+1)-3a$
>
> $= -3a$
>
> 原式$= \frac{-3a}{3a}=-1$

> 例题:
>
> 已知$b^2-4ac$是一元一次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq)0$的一个实数根, 则$ab$的取值范围是?
>
> $\because$方程有解
>
> $\therefore \Delta\geq 0$
>
> $\therefore \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\Delta$
>
> $\therefore 2a\Delta=-b\pm\sqrt{\Delta}$
>
> $\therefore 2a\Delta\mp\sqrt{\Delta}+b=0$
>
> 将上式看作一个关于$\Delta$的一元二次方程, 此方程必须有解
>
> $\Delta'=\Delta-8ab\Delta\geq 0$
>
> $1-8ab\geq 0$
>
> $ab\leq\frac{1}{8}$

> 例题:
>
> 已知$m,n$是二次方程$x^2+1999x+7=0$的两个根, 求$(m^2+1998m+6)(n^2+2000n+8)$的值
>
> 原式$=(m^2+1999m+7-m-1)(n^2+1999n+7+n+1)$
>
> $=-(m+1)(n+1)$
>
> 由韦达定理得:
>
> $mn=7, m+n=-1999$
>
> 原式$=1999-1-7=1991$

# 方程的基本定理

一元$n$次方程有且只有$n$个解(等根是多个解)

# 因式分解

1. 十字相乘法

   **本质是尝试**

   原理$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
2. 十字相乘结果的本质

   若$ax^2+bx+c=0$有两个实根, $x_1,x_2$

   则$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

   > 证明
   >
   > $ax^2+bx+c$
   >
   > $=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$
   >
   > $=a(x^2-(x_1+x_2)+(x_1x_2)$
   >
   > $=a(x-x_1)(x-x_2)$
3. 数域的问题
   - "因式分解各式": ***在有理数范围内!!!*** 使用十字相乘
   - "在有理数范围内因式分解": ***解方程*** 写成$a(x-x_1)(x-x_2)$的形式

# 含有绝对值的方程的问题

这一类问题使用分类讨论解决, 注意根据方程有解和分类的条件及时舍去不合适的根

> 例题
>
> 解方程$x^2-|x|-2=0$
>
> 分类讨论
>
> 1. $x>0$
>
> > $x^2-x-2=0$
> >
> > 解得:

> > $x_1=2, x_2=-1$(舍去)
>
> 2. $x<0$
>
> > $x^2+x-2=0$
> >
> > 解得:
> >
> > $x_1=1$(舍去)$, x_2=-2$
>
> 综上$x_1=2x_2=-2$

### 一次项是$|ax|$的绝对值方程的性质

对于方程$ax^2 \pm b|x|+c$

它的解总是成对出现

> 如果$m$是方程$ax^2 \pm b|x|+c$的一个解
>
> 求证:$-m$也是方程的一个解
>
> $a(-m)^2 \pm b|-m|+c$
>
> $\rightarrow am^2 \pm b|m|+c$一定成立
>
> $-m$也是方程的一个解

特别的:

- $x=0$是方程的解的时候, 方程有奇数个解
- $x=0$不是方程的解的时候, 方程有偶数个解

> 例题
>
> 关于$x$的方程$x^2-2|x|+2=m$恰好有三个实数根, 求$m$的值
>
> $\because$ 原方程有三个根
>
> $\therefore x_1=0$
>
> $\therefore m=2$

## 一元二次方程的公共根问题

处理手法:

- 设出公共根
- 两个方程相减
- 解出公共根, 进行回代, 解参数

> 例题:
>
> $x^2+ax+b=0$与$x^2+bx+a=0$有且只有一个公共根, 求两个方程另一根之和
>
> 设两方程的公共根为$x_0$
>
> $$\begin{cases} x_0^2+ax_0+b=0 \\ x_0^2+bx_0+a=0 \end{cases}$$

> 两式相减, 得到:
>
> $(a-b)x_9 = a-b$
>
> $\because a \neq b$
>
> $\therefore x_0 = 1$
>
> $\because x_0x_1 = b \therefore x_1 = b$
>
> $\because x_0x_2 = a \therefore x_2 = a$
>
> $\therefore x_1 + x_2 = a+b$
>
> 而$x_0 = 0$
>
> $\therefore a+b+1=0$
>
> $\therefore x_1 + x_2 = a+b = -1$

> 例题:
>
> 已知三个关于$x$的一元二次方程$ax^2+bx+c=0, bx^2+cx+a=0, cx^2+ax+b=0$恰有一个公共实数根, 求$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$
>
> 设公共根为$m$
>
> 则有
>
> $$\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ bx^2+cx+a=0 \\ cx^2+ax+c=0 \end{cases}$$
>
> 将三式相加
>
> $(a+b+c)(x^2+x+1)=0$
>
> 而$x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$
>
> $\therefore x^2+x+1 \neq 0$
>
> $\therefore a+b+c=0$
>
> 待求式=$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$
>
> $=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}$
>
> 而$a+b+c=0$
>
> 待求式=$\frac{3abc}{abc}=3$

# 根的判别式$b^2-4ac$

## 主元法降次

> 例题
>
> 如果方程$x^4+6x^3+9x^2-3px^2-9px+2p^2=0$有且只有一个实根
>
> 求$p$的值

> 解:
>
> 以$p$为主元, 整理并因式分解
>
> $2p^2-(3x^2+9x)p+x^2(x+3)^2=0$
>
> 对于上式十字相乘
>
> $(p-x^2-3x)(2p-x^2-3x)=0$
>
> 分类讨论:
>
> 1. $p-x^2-3x=0$有两个相等实根, $2p-x^2-3x=0$没有实根
>
> > $x^2+3x-p=0$
> >
> > $\Delta_1=9+4p=0$
> >
> > $\therefore p=-\frac{9}{4}$
> >
> > 在$x^2+3x-2p=0$中
> >
> > $\Delta_2=9+8p=-9<0$
>
> 2. $2p-x^2-3x=0$有两个相等实根, $p-x^2-3x=0$没有实根
>
> > $x^2+3x-2p=0$
> >
> > $\Delta_1=9+8p=0$
> >
> > $p=-\frac{9}{8}$
> >
> > 在$x^2+3x-p$中
> >
> > $\Delta_2=9+4p=\frac{9}{2}$ 舍去
>
> 综上所述, $p=-\frac{9}{4}$

## 构造方程

> 例题:
>
> 已知: $a,b,c$, 满足$a+b+c=0$, $abc=8$, 且$c>0$, 求证$c\geq 2\sqrt[3]{4}$
>
> $$\begin{cases} a+b=-c \\ ab=\frac{8}{c} \end{cases}$$
>
> 由韦达定理构造方程:
>
> $x^2+cx+\frac{8}{c}=0$的两个根是$a,b$.
>
> 此时$\Delta=c^2-\frac{32}{c}\geq 0$
>
> $\therefore c^3\geq 32$
>
> $\therefore c\geq 2\sqrt[3]{4}$

## 注意题干

> 例题

> 关于$x$的方程$ax^2-(a+2)x+2=0$只有一个解
>
> 分析:
>
> 没有指明是不是二次方程, 若方程是一次方程, 只有一个解, 如果方程是二次方程, 且$\Delta=0$, 方程有两个相等的根(算一个)
>
> 解:
>
> 分类讨论
>
> 1. $a=0$
>
> > 此时方程只有一个解
>
> 2. $a\neq 0$
>
> > 此时二次方程$ax^2-(a+2)x+2=0$的$\Delta$为0
> >
> > $\Delta=(a+2)^2-8a=(a-2)^2=0$
> >
> > $\therefore a=2$

## 列不等式联立求解

> 例题
>
> 已知$m,n$为整数, 关于$x$的方程, $x^2+(7-m)x+3+n=0$有两个不相等的实数根,
> $x^2+(4+m)x+n+6$有两个相等的实数根, $x^2-(m-4)x+n+=0$没有实数根, 求$m,n$.
>
> $$\begin{cases}(7-m)^2-12-4n>0\\(4+m)^2-24-4n=0\\(m-4)^2-4-4n<0\end{cases}$$
>
> $$\begin{cases}m^2-14m+37-4n>0\\m^2+8m-8-4n=0\\m^2-8m+12-4n<0\end{cases}$$
>
> 用二式带换掉一三两式中的$m^2-4n$
>
> $$\{-22m+45>0-16m-20<0$$
>
> 解得$\frac{5}{4}<m<\frac{45}{22}$
>
> $\because m$是整数
>
> $\therefore m=2$
>
> $\therefore n=3$

## 判断正负

> $a,b,c,d>0$, 求证:
>
> $$\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2a+b}+\sqrt{cd}=0\\\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2b+c}+\sqrt{da}=0\\\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2c+d}+\sqrt{ab}=0\\\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2d+a}+\sqrt{bc}=0\end{cases}$$

> 中必然有两个有不相等的实数根
>
> 证明:
>
> $$\begin{cases}\Delta_1 = 2a+b-2\sqrt{cd} \\ \Delta_2 = 2b+c-2\sqrt{da} \\ \Delta_3 = 2c+d-2\sqrt{ab} \\ \Delta_4 = 2d+e-2\sqrt{bc}\end{cases}$$
>
> 其中
>
> $\Delta_1 + \Delta_2$
>
> $= 2a+b-2\sqrt{cd}+2c+d-2\sqrt{ab}$
>
> $= a+c+a+b+c+d-2\sqrt{cd}-2\sqrt{ab}$
>
> 考虑对$\sqrt{cd}$和$\sqrt{ab}$配方
>
> $= a+c+(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$
>
> 显然它大于零
>
> $\Delta_1$与$\Delta_3$中必有一个大于零, 即有一个方程有两个不相等的实数根.
>
> 对于$\Delta_2$与$\Delta_4$同理

# 韦达定理

定理内容:

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$,我们知道

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

相乘得到$x_1x_2 = \frac{c}{a}$ 相加得到$x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$

使用条件:

1. 二次方程
2. $\Delta > 0$

## 注意使用条件

> 设关于$x$的二次方程$(m^2-4)x^2+(2m-1)x+1=0$两个实数根的倒数和为$s$, 求$s$的取值范围
>
> 解:
>
> 设两根分别是$x_1$, $x_2$
>
> $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$
>
> 其中$x_1x_2 = \frac{1}{m^2-4}$
>
> $x_1+x_2 = \frac{1-2m}{m^2-4}$
>
> $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = 1-2m$
>
> $\because$ 原方程有两个不相等的实数根

> $\therefore \Delta = 17 - 4m > 0$
>
> $\therefore m \leq \frac{17}{4}$
>
> $\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1 - 2m \geq -\frac{15}{2}$
>
> **并且方程是二次方程**
>
> $m^2 - 4 \neq 0$
>
> $\therefore m \neq \pm 2$
>
> $s \neq -3, s \neq 5$

## 用于求值

### 齐次式

> 例题:
>
> 已知$\alpha, \beta$分别是方程$x^2 - 3x + 1 = 0$的两个根, 求下列各式的值
>
> 1. $\alpha^2 + \beta^2$
> 2. $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$
> 3. $(\alpha + 1)(\beta + 1)$
> 4. $\alpha^3 + \beta^3$
> 5. $\alpha^4 + \beta^4$
> 6. $\alpha^5 + \beta^5$
> 7. $\alpha - \beta$
>
> 解答:
>
> $\alpha\beta = 1$
>
> $\alpha + \beta = 3$
>
> $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 2 = 7$
>
> $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = 3$
>
> $(\alpha + 1)(\beta + 1) = (\alpha\beta + \alpha + \beta + 1) = 1 + 3 + 1 = 5$
>
> $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = 3(7 - 1) = 18$
>
> $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 49 - 2 = 47$
>
> $\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^3 + \beta^3) - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) = 7 \times 18 - 3 = 123$
>
> **$\alpha\beta$谁大谁小不确定, 需要分类**
>
> $|\alpha - \beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta} = \sqrt{5}$
>
> $\therefore \alpha\beta = \pm\sqrt{5}$

### 系数或次数不相等

> 例题
>
> 已知$\alpha\beta$是方程$x^2 - x - 1 = 0$的两个实数根, 求$\alpha^4 + 3\beta$的值

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=-1\end{cases}$$

法一: **降次**

$\alpha^2=\alpha+1$

原式$=(\alpha+1)^2+3\beta=\alpha^2+2\alpha+1+3\beta$

$=\alpha+1+2\alpha+1+3\beta$

$=3(\alpha+\beta)+2$

$=5$

法二: **凑**

设$A=\alpha^4+3\beta, B=\beta^4+3\alpha$

$A+B$

$=\alpha^4+\beta^4+3(\alpha+\beta)$

$\alpha^2+\beta^2=1^2-2\times(-1)=3$

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=3^2-2=7$

$A+B=7+3=10$

$A-B$

$=\alpha^4-\beta^4-3(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)-3(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)(1\times3\times-3)$

$=0$

$$\begin{cases}A+B=10\\ A-B=0\end{cases}$$

$A=5, B=5$

### 构造方程

若

$$\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1x_2=-5\end{cases}$$

则$x_1,x_2$分别是方程$x^2-2x-5=0$的两个根

## 系数顺序相反的两个方程

例题:

若

$$\begin{cases} 19s^2+99s+1=0 \\ t^2+99t+19=0 \end{cases}$$

并且$st \neq 1$

求$\frac{st+4t+1}{t}$的值

看到两个方程的系数顺序正好相反, 考虑给一个方程除以未知数的平方, 待求式中有$t$作为分母, 所以对第二个式子进行处理

$$\begin{cases} \frac{19}{t^2}+\frac{99}{t}+1=0 \\ 19s^2+99s+1=0 \end{cases}$$

看到两个式子有相同的参数, 构造方程

$s, \frac{1}{t}$分别是方程$19x^2+99x+1=0$的两个根,

原式

$=s+4\frac{s}{t}+\frac{1}{t}$

$=\frac{-99+4}{19}$

$=-5$