等价：有

$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

证明：构造真值表.

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

等价演算.

① 双重否定 $A \Leftrightarrow \neg\neg A$

② 交换 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$.

③ 结合 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

④ 分配 $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

⑤ 德摩根 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.

⑥ 幂等. $A \wedge A \Leftrightarrow A$ $A \vee A \Leftrightarrow A$

⑦ 吸收. $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$.

⑧ 零律: $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$　$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

⑨ 同一律 $A \vee 0 \Leftrightarrow A$, $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$.

⑩ 排中、$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

⑪ 矛盾　$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

⑫ 条件等价　$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

⑬ 双——　$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

⑭ 假言　$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

⑮ 双条件否定: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

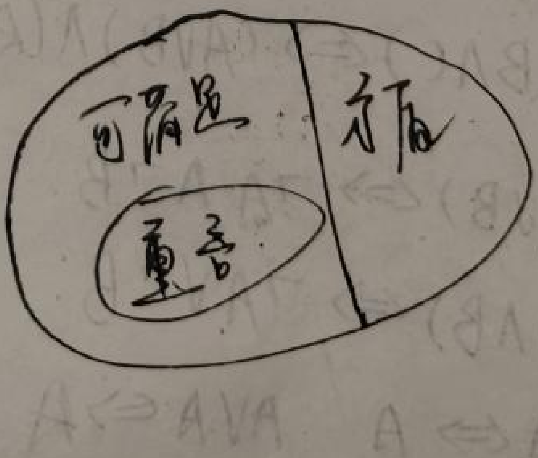
等价置换: $(P \rightarrow \underline{(Q \wedge R)}) \wedge (Q \wedge R)$.

$(P \rightarrow A) \wedge A$

永真/重言

永假/矛盾.

可满足



证：$\neg p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$.

①.等价置换

②.设 $\neg p \wedge (p \vee q) = F$ 推 p、q 则值.

③ 设 q 为 F. 分情况 P=T/F 反推

假言推理：$((A \rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$.

拒取式：$((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$

假言三段论：$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \Rightarrow A \rightarrow C$

析取三段论 $((A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$.

$A \Leftrightarrow B$ 的充要条件 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$.

$A \Rightarrow B$ 且 A 是重言式. 则 B 一定是重言式

$A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow C$ 则 $A \Rightarrow C$ 传递.

$A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow C$ 则 $A \Rightarrow (B \wedge C)$

$A \Rightarrow B$ 且 $C \Rightarrow B$ 则 $A \vee C \Rightarrow B$

$A \Rightarrow B$. C 为任意公式 则 $A \wedge C \Rightarrow B \wedge C$

范式：
- 析取范式
- 合取范式.

$(p \vee q) \leftrightarrow p$ 求合取范式：$(\neg q \vee p)$

主析取范式：

$m_{000} = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

$m_{011} = \neg P \wedge Q \wedge R$ 小项

$m_{111} = P \wedge Q \wedge R$

一共8种即2^3.

①只有1种情况下为T，剩下7种为F

②. m_{000} 只有P为F，Q为F，R为F 为真.

m_{110} T T F 为真

主合取范式.

$M_{000} = P \vee Q \vee R$

$M_{011} = R \vee \neg Q \vee \neg R$ 大项.与小项相反

$M_{111} = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$

等价推算： $\wedge$ 合 $\vee$ 析

$(P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

~~却回的是~~ 用∧：有

~~$P \vee R = (P \vee R) \vee 0$~~

~~$= (P \vee R) \vee (Q \wedge \neg Q$~~

少什么补什么

$P \vee R \Leftrightarrow (P \vee R \vee Q) \wedge (P \vee R \vee \neg Q)$.

$\neg Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$.

∨：有真为真. ∧有假为假

推理：

$(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to S) \Rightarrow S \vee R$

① $P \vee Q$　　P规则

② $\neg Q \to P$　　T(1)

③ $P - R$　　P规则

④ $\neg Q \to R$　　T(2)(3) 假言三段论

⑤ $Q \to S$　　P规则

⑥ $\neg S \to \neg Q$　　T(5)

⑦ $\neg S \to R$　　T(4)(6) 假言三段论

⑧ $S \vee R$　　T(7)

直接推理

归谬(反证)

CP规则　$H_1 \wedge H_2 \wedge H_N \Rightarrow (A \to B)$

即 $H_1 \wedge H_2 \wedge H_N \wedge A \Rightarrow B$

$p \to (q \to r),\ \neg t \vee p,\ q \Rightarrow t \to r.$

证 从已知得

CP规则

① t P规则

② $\neg t \vee p$ P规则

③ p T(1)(2) 析取

④ $p \to (q \to r)$ P规则

⑤ $q \to r$ T(3)(4) 假言推理

⑥ q P规则

⑦ r T(5)(6)

谓词命题符号化.

命题真假既与主体有关,也和谓词相关,

还有主体的取值范围.(个体域或值域?)

全称量词:所有的.每个等、$\forall$.

存在量词　$\exists$.

所有大学生都热爱祖国:

令 $P(x)$, x是大学生

$Q(x)$　x是热爱祖国

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

条件式

通常来说

一些大学生有远大理想

令 $P(x)$ x是大学生

$Q(x)$ x有远大理想

合取式.

$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$

项.

对任意整数x. $x^2-1=(x+1)(x-1)$是恒等式.

令 $I(x)$: x是整数. $f(x)=x^2-1$, $g(x)=(x+1)(x-1)$

$(\forall x)(I(x)\rightarrow G(f(x),g(x)))$

主体.. 谓词.

没有最大的自然数。

令 $N(x)$：x是自然数。

$G(x,y)$：$x>y$.

$(\forall x)(N(x) \rightarrow (\exists y)(N(y) \wedge G(y,x)))$

对所有的自然数x，如果是，则一定存在y，y也是自然数

且 $y>x$

调词公式赋值

$\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)$

$\exists x A(x) \Leftrightarrow A a_1 \vee A a_2$ —— $\vee A a_n$

论域 $D=\{2,3\}$ $L(x,y)$定义如下．求 $\forall x \exists y L(x,y)$.

$L(2,2)$	$L(2,3)$	$L(3,2)$	$L(3,3)$
T	T	F	F

$\forall \Rightarrow \wedge$

$\exists \Rightarrow \vee$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y L(x,y))$

$\Leftrightarrow$ 消除$\forall x$ $\exists y L(2,y) \wedge \exists y L(3,y)$

消 $\exists y$．$[L(2,2) \vee L(2,3)] \wedge [L(3,2) \vee L(3,3)]$

$\Leftrightarrow T \wedge F = F$.

等价式：

$\neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A$.

$\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A$

$(\forall x)(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow [(\forall x)(A(x)]\wedge B$. B与X无关，

$\quad = \vee B \qquad\qquad \vee B$.

$=$ 同理.

$(\exists x)(Ax\wedge B) \Leftrightarrow (\exists x Ax)\wedge B$.

$\quad \vee B \qquad\qquad \vee B$.

$\forall x(Ax\to B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)\to B$

B与X有关直接合面记即可

$(\forall x)(A(x)\wedge Bx) \Leftrightarrow \forall xAx\wedge\forall xBx$.

$(\exists x)(Ax\vee Bx) \Leftrightarrow \exists xAx\vee\exists xBx$.

前束范式：一个合式公式.

$(\forall x)(P\to Q)$. ✓

$\forall xP\to Q$ ×

$\forall x((P\to Q)\vee\underline{\underline{\exists x}}P)$ ×

△不能出现.

谓词演算的推理理论.

全称量词消去规则 $\forall-$

存在 —— $\exists-$

存在 —— 产生 —— $\exists+$

全称 —— $\forall+$ ：尽量避免使用.

①：所有人都是要死的. ②苏格拉底是人 ③苏要死.

①符号化：$P(x)$：x是人. $D(x)$：x要死.

c：苏

②前提. $(\forall x)(P(x)\to D(x))$ ， $P(c)$

结论：$D(c)$.

③证明：① $(\forall x)(P(x)\to D(x))$ P规则

② $P(c)\to D(c)$ $\forall-$

③ $P(c)$ P规则

④ $D(c)$. T②③ 假言推理

$(\forall x)(P(x)\vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee \exists(x)Q(x)$

用CP规则反证:

① $\neg(\forall x)P(x)$ CP规则

② $\exists x \neg P(x)$ T① 等价转换

③ $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$ P

④ $P(c)\vee Q(c)$ $\forall-$

⑤ $\neg P(c)$ $\exists-$ ← 不正确、其中④用C消掉

⑥ $Q(c)$ T(4)(5). 全称量词后再消$\exists-$是不对的

⑦ $\exists(x)Q(x)$ $\exists+$ 全部和特定关系

$\neg(\forall x)P(x) \to \exists(x)Q(x)$

$\Downarrow$

$\exists x \neg P(x) \to \exists(x)Q(x)$

修改. ③ $\neg P(c)$ T② $\exists-$ 先消$\exists$

④ $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$ P规则

⑤ $P(c)\vee Q(c)$ $\forall-$

⑥ $Q(c)$ T(3)(5)

⑦ $\exists(x)Q(x)$ $\exists+$

先消$\exists$

再消$\forall$.

集合. Set.

集合中元素不能重复出现.

$\subseteq$ 包含: $\forall x\,(x\in A\to x\in B)\Leftrightarrow A\subseteq B$

$A=B$: $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$. 互为子集

空集 ϕ: 空集是任何集合的子集. 唯一的

全集 E:

$P(A)=\{x\mid x\subseteq A\}$: A的幂集.

$A=\{a,b,c\}$: A的子集: 个数为 $2^n=2^3=8$

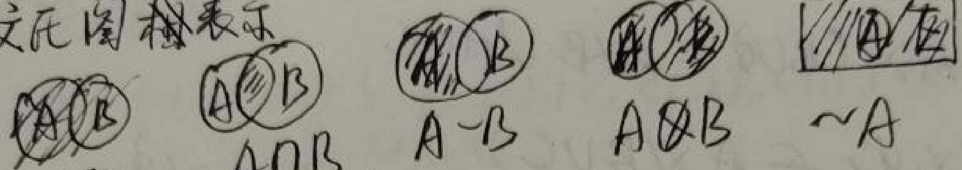
ϕ
a, b, c
ab, bc, ac
A

8个子集构成的新集合即 $P(A)$. 幂集

集合运算:

- 并 $\cup$
- 交 $\cap$
- 差 $-$ $A-B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$
- 对称差 $\oplus$ $(A-B)\cup(B-A)$
- 绝对补 $\sim$ $E-A$.

文氏图~~概~~表示



$A\cup B$ $A\cap B$ $A-B$ $A\oplus B$ $\sim A$

算律

$A\cup B = B\cup A$.

$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

$A\cup A = A$

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(B\cup C)$. 注意

$A\cup(A\cap B) = A$. $A\cap(A\cup B) = A$

DM律: $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$

$\sim(B\cup C) = \sim B\cap\sim C$

有序对: $\langle x,y\rangle \neq \langle y,x\rangle$

笛卡尔积(直积)

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$ $\Rightarrow$ $A\times B = \{\langle 1,a\rangle, \langle 1,b\rangle, \langle 1,c\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 2,c\rangle, \langle 3,a\rangle, \langle 3,b\rangle, \langle 3,c\rangle\}$

个数为 $m\times n = 3\times 3 = 9$.

证：$A\times(B\cup C)=A\times B\cup A\times C$.

$\forall\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)$

$x\in A$ 且 $y\in(B\cup C)$

$\begin{cases}x\in A, y\in B & 或\\ x\in A, y\in C\end{cases}$

$\langle x,y\rangle\in A\times B$ 或 $\langle x,y\rangle\in A\times C$

即 $\langle x,y\rangle=A\times B\cup A\times C$

逆否

第五章：关系与函数.

整除关系：$A=\{1,3,6,12\}$

$\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,6\rangle\ \langle 1,12\rangle$

$\langle 3,6\rangle,\langle 3,12\rangle,\underline{\langle 3,3\rangle}$

$\langle 6,6\rangle,\langle 6,12\rangle$

$\langle 12,12\rangle\}$

定义域 $\operatorname{dom}R=\{x\mid\exists y(\langle x,y\rangle\in R)\}$

值域 $\operatorname{ran}R=\{y\mid\exists x(\langle x,y\rangle\in R)\}$

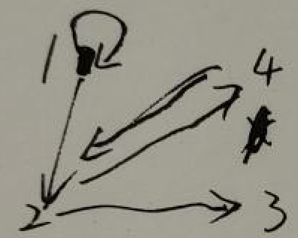
域 $\operatorname{fld}R=\operatorname{dom}R\cup\operatorname{ran}R$.

关系矩阵.

$A=\{1,2,3,4\}$. $R=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle \langle 2,4\rangle \langle 4,2\rangle$

$$
\text{求 } M_R = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & & & & \\ x_2 & & & & \\ x_3 & & & & \\ x_4 & & & & \end{array}
\quad
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

关系图 ~~$A=\{1,2,3,4\}$ $R=$~~



自反 = $A=\{1,2,3\}$

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$. 不是自反也不是反自反.

$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle \langle 3,3\rangle \langle 1,2\rangle\}$ 是自反. 不是反自反.

$R_3=\{\langle 1,3\rangle\}$. 不是自反 是反自反

对称: 若 $\forall\langle x,y\rangle(\langle x,y\rangle\in R \rightarrow \langle y,x\rangle \in R)$.

反对称 $\forall\langle x,y\rangle(\langle x,y\rangle\in R \land \langle y,x\rangle \in R \rightarrow x=y)$