I. Ур. с разделяющимися переменными

$$f(y)\cdot dy = g(x)\cdot dx \ \to\ \int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

- $y' = f(ax+by+c) \Rightarrow$ замена $y(x) = \dfrac{z(x)-ax-c}{b}$,
  $y'(x) = \dfrac{z'(x)-a}{b}$, $z(x) = ax + by(x) + c$

II. Однородные уравнения

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

M и N – однор. одной и той же степени, т.е.
$M(kx,ky) = k^n\cdot M(x,y)$, то же для N

Замена $y(x) = t(x)\cdot x, \quad y' = t'x + t, \quad t(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

- $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)\begin{matrix}\leftarrow l_1\\ \leftarrow l_2\end{matrix} \ \Rightarrow\ (x_0,y_0) = l_1\cap l_2$,
  Замена $x = u + x_0, \quad y = v + y_0$

- $y(x) = z^m(x), \ z = y^{-m}$

III. Линейные ур. I порядка

$$y' + a(x)y = b(x)$$

(I) Однородное $y' + a(x)y = 0 \ \to$ *(реш.)* $y_1 = y = c\cdot\ldots \quad \forall c$

(II) Метод вариации постоянной.
Реш. в виде $y = c(x)y_1(x)$

$$y' + a(x)y = c'y_1 + cy_1' + acy_1 = b \ \to$$
$$c'y_1 = b \ \to\ c = \int b(x)dx/y_1(x)$$

- Ур. Бернулли $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha \ \to$
  $y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$
  $z(x) = y^{1-\alpha}, \ z'(x) = y^{-\alpha}y'(1-\alpha)$ *(не забудь $y = 0$)*

- Интегрируемые комбинации
  $ydy = \dfrac{1}{2}\,dy^2 \qquad \dfrac{1}{y}\,dy = d\ln|y| \qquad xdy + ydx = d(xy)$

- Ур. Рикатти $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$
  Если $y_1(x)$ – частное реш., замена $y(x) = y_1(x) + z(x)$
  Частное решение можно искать в виде
  $y_1 = cx^\alpha, \ \ ce^{\alpha x}, \ \ ax^2 + bx + c, \ \ ax + b$

IV. Ур. в полных дифференциалах

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \text{ – УПД, если } \frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\exists F: \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \ \to\ F(x,y) = \displaystyle\int M(x,y)dx + c(y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \to \left(\displaystyle\int M(x,y)dx + c(y)\right)'_y = N(x,y) \end{cases}$$

Отсюда найдём $c(y) = \int c'_y dy = \ldots + c_1 \quad \forall c_1$
$dF = 0 \Leftrightarrow$ *(ответ)* $F = C \quad \forall C$
(константа c_1 входит в C)

- Интегрирующий множитель (!!! не рекомендуется !!!)
  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. Ищем $m(x,y) : M\,mdx + N\,mdy = 0$ – УПД.
  $m = m(x), \ m(y), \ x^a y^b$

- Выделение полного дифференциала
  $d(xy), \ d(\frac{x}{y}), \ d(\ln|x|)$

FLEX$_1$ Ур. I порядка, не разреш. отн. производной

$$F(x,y,y') = 0$$

(1) Разрешить отн. производной. Возможен метод решения относительно $x(y)$, а не $y(x)$:)

(2) $F(x,y,y')$ разрешено отн. y : $\ y = f(x,y')$
Пусть $p = y' = \dfrac{dy}{dx} \to pdx = dy = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial p}dp \ \to$
$M(x,p)dx + N(x,p)dp = 0$, обычное уравнение. Можно найти явное $p = p(x)$, а можно $x = x(p)$ – тогда ответ
$\begin{cases} x = x(p) \\ y = f(x(p),p) \end{cases}$

(3) $F(x,y,y')$: $\ x = f(y,y')$
Анал.: $p = y'$, $\dfrac{dy}{p} = dx = d\,f(y,p) = \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial p}dp \ \to\ \ldots$

(4) Нахождение особых решений

0. Решить исходное уравнение
1. p-дискриминантные кривые: $\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ \partial F\,/\,\partial p = 0 \end{cases}$
   $(p = y')$
   Избавляемся от p в системе, ее решения – $y = y_1(x,c)$
2. y_1 является решением исх. ур.?
3. y_1 – особое? $\quad \forall x_0\ \exists$ реш. $y_2(x)$: $\begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0) \end{cases}$
   То есть в любой своей точке особое решение должно касаться другого решения системы.

FLEX$_2$ Ур. допускающие пониж. порядка производной

- $y^{(n)} = f(x) \ \to\ y^{(n-1)} = \int f(x)dx \ \to\ \ldots$
- $\cancel{y}$: $F(x, y^{(k)}, \ldots y^{(n)}) = 0 \ \Rightarrow$ замена $y^{(k)}_{(x)} = z(x)$
- $\cancel{x}$: $F(y, y^{(1)}, \ldots y^{(n)}) = 0$
  Замена $y' = p(y(x)), \quad y'' = p'_y \cdot y'_x = p'p$
  (не забудь $p'_y = \frac{dp}{dy}$ – $dy = 0$)
- Однородное по $y, y', \ldots y^{(n)} \ \Rightarrow$ замена $y' = yz(x)$
  y сократятся если ур. однородное
- Выделение интегрируемых комбинаций
  $\dfrac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}} = \left(\ln\left|\,y^{(n-1)}\right|\right)'$

Использовался задачник Филиппова
Семинарист – Елена Александровна Павельева ♡
https://github.com/lizzardhub/difurry
$\to$ обозначает переходы между формулами

I'. Линейные однор. n-ого порядка с const coeff

$$\text{I}\quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} \dots a_0 y^{(0)} = 0$$
$$\text{II}\quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} \dots a_0 y^{(0)} = f(x)$$

I Характеристич. уравнение: $\exists\, y = e^{\lambda x}$, находим λ

корень λ	функции ФСР
$\mathbb{R}$ кратности k	$y_1(x) = e^{\lambda x}, \dots y_k(x) = x^{k-1}e^{\lambda x}$
$\mathbb{C}$ кратности k (k пар $\lambda = a \pm ib$)	$y_1(x) = e^{ax}\cos bx\ \dots$ $y_k(x) = x^{k-1}e^{ax}\cos bx,$ $y_{k+1}(x) = e^{ax}\sin bx\ \dots$ $y_{2k}(x) = x^{k-1}e^{ax}\sin bx$

$y_{\text{одн}}(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad \forall c_1, \dots, c_n$

II Неодн. уравнение. $y_{\text{общ}}(x) = y_{\text{однор}} + y_{\text{частное}}(x)$

1. Первый специальный вид: $f(x) = P_k(x)e^{\gamma x} \Rightarrow$
   $\Rightarrow\ y_{\text{ч}}(x) = x^s R_k(x) e^{\gamma x}$
   $s =$ кратность γ в решениях хар. уравнения
   R_k – *неизвестный* многочлен k-ой степени
2. Второй: $f(x) = (P_k(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x)\cdot e^{\alpha x} \Rightarrow$
   $\Rightarrow\ y_{\text{ч}}(x) = x^s(Q_n(x)\cos\beta x + T_n(x)\sin\beta x)\cdot e^{\alpha x}$
   $n = max(k, m)$, $s =$ кратность $\gamma = \alpha + i\beta$
   (либо $\alpha - i\beta$, их кратности равны)

$f(x)$ – сумма 1 и 2 спец. видов $\Rightarrow\ y_{\text{ч}}(x) = \sum y_{\text{спец}}$

Общий вид пр. части. **Метод вар. постоянных**
Возможно $a_0, \dots, a_{n-1}$ – функции от x, т.е. не const!
I $\quad y_{\text{одн}}(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad \forall c_1, \dots c_n$
II $\quad \exists\, y(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x) \ \to$
(находим функции $c_1, c_2, \dots c_n$ – интегрируем)

$$\begin{cases} c_1' y_1 \quad + & \dots + c_n' y_n = 0 \\ c_1' y_1' \quad + & \dots + c_n' y_n' = 0 \\ & \dots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + & \dots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1' y_1^{(n-1)} + & \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

- Ур. Эйлера
  $x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$

  Замена: $x = \begin{cases} e^t, & x > 0 \\ -e^t, & x < 0 \end{cases}$, $\ t = \ln(x),\ \ y(x) = Y(t(x))$.

$$\text{Тогда } y' = Y_t' \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \underline{xy' = Y'}$$

$$y'' = \left(Y' \cdot \frac{1}{x}\right)' = Y''\frac{1}{x^2} - Y'\frac{1}{x^2} \Rightarrow \underline{x^2 y'' = Y'' - Y'}$$

Получили новое уравнение $Y(t)$. Правая часть спец. вида $\Rightarrow$ рассматриваем $x > 0$ и $x < 0$, решаем отн. t. Иначе вар. постоянных.

II'. Линейные однор. ур. с переменными coeff

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

$y_1(x)$ – решение, возможно, вида $e^{\alpha x}$ или многочлен (его степень надо найти). Другое решение $y(x)$ найти по формуле **Остроградского-Лиувилля**

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = ce^{-\int \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}dx} \quad \forall c$$

III'. Линейные системы

I $\ \overline{Y}' = A\overline{Y}$ – однородные

$\exists\, \overline{Y} = \overline{\alpha}e^{\lambda t} \ \to\ \overline{Y}' = \overline{\alpha}\lambda e^{\lambda t} \ \Rightarrow$
$(A - \lambda E)\overline{\alpha} = 0 \ \Rightarrow\ |A - \lambda E| = 0$
Находим собств. значения λ и с. векторы $\overline{\alpha}$.

1) Нельзя оставлять $\mathbb{C}$ собств. значения! Делать так:
(Аналогично обычным однородным линейным ур., только кратные с.з. имеют разные с.в.)
$\lambda = \alpha \pm i\beta \Rightarrow \overline{Y} = \overline{\alpha}\cdot(\cos\beta t + i\sin\beta t)e^{\alpha t} = \overline{\alpha}_1 + i\overline{\alpha}_2 \Rightarrow$
$\overline{Y}_{\text{одн}} = c_1\overline{\alpha}_1 + c_2\overline{\alpha}_2 \quad \forall c_1, c_2$

2) Если кол-во с. векторов меньше кратности с. значения:
Допустим кратность λ равна 3
$\overline{Y} = (\overline{\alpha}t^2 + \overline{\beta}t + \overline{\gamma})e^{\lambda t} \ \to\ \overline{Y}' = (\overline{\alpha}2t + \overline{\beta})e^{\lambda t} + (\overline{\alpha}t^2 + \overline{\beta}t + \gamma)\lambda e^{\lambda t} =$
$(\lambda\overline{\alpha}t^2 + (2\overline{\alpha} + \lambda\overline{\beta})t + (\overline{\beta} + \lambda\overline{\gamma}))e^{\lambda t}$, $A\overline{Y} = A\overline{\alpha}t^2 + A\overline{\beta}t + A\overline{\gamma}$

$$\exists\, B = A - \lambda E.\ \overline{Y}' = A\overline{Y} \Rightarrow \begin{cases} B\overline{\alpha} = \overline{0} \\ B\overline{\beta} = 2\overline{\alpha} \ \to\ B^3\overline{\gamma} = \overline{0} \ \to\ \dots \\ B\overline{\gamma} = \overline{\beta} \end{cases}$$

Так находим все решения – наборы $\{\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}\}$.

Общее решение однородного уравнения
$\overline{Y}_{\text{одн}} = c_1\overline{\alpha}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n\overline{\alpha}_n e^{\lambda_n t} \quad \forall c_1, \dots c_n$

II $\ \overline{Y}' = A\overline{Y} + \overline{F}$ – неоднородные

1. Первый спец. вид. Если $\overline{F} = \overline{P_m}(t)\cdot e^{\gamma t} = \begin{pmatrix} P_{m1}(t) \\ \dots \\ P_{mn}(t) \end{pmatrix} e^{\gamma t}$,
   $m = max(m_1, \dots, m_n) \Rightarrow \overline{Y_{\text{ч}}} = \overline{Q}_{m+s}(t)e^{\gamma t}$
   ($s =$ кратность γ)
2. Второй спец. вид. $\overline{F} = (\overline{P_m}(t)\cos\beta t + \overline{Q_l}(t)\sin\beta t)\cdot e^{\alpha t}$
   $\Rightarrow \overline{Y_{\text{ч}}} = (\overline{R}_{k+s}(t)\cos\beta t + \overline{T}_{k+S}(t)\sin\beta t)\cdot e^{\alpha t}$
   $k = max(m, l)$
   ($s =$ кратность γ)

$\overline{F}$ – сумма специальных видов $\Rightarrow\ \overline{Y_{\text{ч}}} = \sum y_{\text{спец}}$