I. Ур. с разделяющимися переменными

$$f(y)\cdot dy = g(x)\cdot dx \;\to\; \int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

- $y' = f(ax+by+c) \Rightarrow$ замена $y(x) = \dfrac{z(x)-ax-c}{b}$,
  $y'(x) = \dfrac{z'(x)-a}{b}$, $z(x) = ax + by(x) + c$

II. Однородные уравнения

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

M и N – однор. одной и той же степени, т.е.
$M(kx,ky) = k^n\cdot M(x,y)$, то же для N

Замена $y(x) = t(x)\cdot x, \quad y' = t'x + t, \quad t(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

- $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)\begin{matrix}\leftarrow l_1\\ \leftarrow l_2\end{matrix} \;\Rightarrow\; (x_0,y_0) = l_1\cap l_2$,
  Замена $x = u + x_0, \;\; y = v + y_0$
- $y(x) = z^m(x), \; z = y^{-m}$

III. Линейные ур. I порядка

$$y' + a(x)y = b(x)$$

I Однородное $y' + a(x)y = 0 \to$ *(реш.)* $y_1 = y = c\cdot\ldots \quad \forall c$

II Метод вариации постоянной.
Реш. в виде $y = c(x)y_1(x)$

$$y' + a(x)y = c'y_1 + cy_1' + acy_1 = b \;\to$$
$$c'y_1 = b \;\to\; c = \int b(x)dx/y_1(x)$$

- Ур. Бернулли $y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha} \;\to$
  $y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$
  $z(x) = y^{1-\alpha}, \;\; z'(x) = y^{-\alpha}y'(1-\alpha)$ *(не забудь $y = 0$)*
- Интегрируемые комбинации
  $ydy = \dfrac{1}{2}dy^2 \qquad \dfrac{1}{y}dy = d\ln|y| \qquad xdy + ydx = d(xy)$
- Ур. Рикатти $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$
  Если $y_1(x)$ – частное реш., замена $y(x) = y_1(x) + z(x)$
  Частное решение можно искать в виде
  $y_1 = cx^{\alpha}, \;\; ce^{\alpha x}, \;\; ax^2 + bx + c, \;\; ax + b$

IV. Ур. в полных дифференциалах

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ – УПД, если $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$

$$\exists F: \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \;\to\; F(x,y) = \displaystyle\int M(x,y)dx + c(y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \to \left(\displaystyle\int M(x,y)dx + c(y)\right)'_y = N(x,y) \end{cases}$$

Отсюда найдём $c(y) = \int c_y' dy = \ldots + c_1 \quad \forall c_1$
$dF = 0 \Leftrightarrow$ *(ответ)* $F = C \quad \forall C$
(константа c_1 входит в C)

- Интегрирующий множитель (!!! не рекомендуется !!!)
  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. Ищем $m(x,y): M\,mdx + N\,mdy = 0$ – УПД.
  $m = m(x), \; m(y), \; x^a y^b$
- Выделение полного дифференциала
  $d(xy), \; d(\frac{x}{y}), \; d(\ln|x|)$

FLEX 1 Ур. I порядка, не разреш. отн. производной

$$F(x,y,y') = 0$$

1. Разрешить отн. производной. Возможен метод решения относительно $x(y)$, а не $y(x)$:)

2. $F(x,y,y')$ разрешено отн. $y: \;\; y = f(x,y')$
   Пусть $p = y' = \dfrac{dy}{dx} \to pdx = dy = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial p}dp \;\to$
   $M(x,p)dx + N(x,p)dp = 0$, обычное уравнение. Можно найти явное $p = p(x)$, а можно $x = x(p)$ – тогда ответ
   $\begin{cases} x = x(p) \\ y = f(x(p), p) \end{cases}$

3. $F(x,y,y'): \;\; x = f(y,y')$
   Анал.: $p = y'$, $\dfrac{dy}{p} = dx = d\,f(y,p) = \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial p}dp \;\to\; \ldots$

4. Нахождение особых решений

   0. Решить исходное уравнение
   1. p-дискриминантные кривые: $\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ \partial F\,/\,\partial p = 0 \end{cases}$

      $(p = y')$

      Избавляемся от p в системе, ее решения – $y = y_1(x,c)$
   2. y_1 является решением исх. ур.?
   3. y_1 – особое? $\quad \forall x_0\;\exists$ реш. $y_2(x): \begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0) \end{cases}$
      То есть в любой своей точке особое решение должно касаться другого решения системы.

FLEX 2 Ур. допускающие пониж. порядка производной

- $y^{(n)} = f(x) \;\to\; y^{(n-1)} = \int f(x)dx \;\to\; \ldots$
- $\cancel{y}: F(x, y^{(k)}, \ldots y^{(n)}) = 0 \;\Rightarrow\;$ замена $y^{(k)}_{(x)} = z(x)$
- $\cancel{x}: F(y, y^{(1)}, \ldots y^{(n)}) = 0$
  Замена $y' = p(y(x)), \quad y'' = p_y'\cdot y_x' = p'p$
  (не забудь $p_y' = \frac{dp}{dy}$ – $dy = 0$)
- Однородное по $y, y', \ldots y^{(n)} \;\Rightarrow\;$ замена $y' = yz(x)$
- Выделение интегрируемых комбинаций
  $\dfrac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}} = \left(\ln\left|\,y^{(n-1)}\right|\right)'$

Семинарист – Елена Александровна Павельева
$\to$ обозначает переходы между формулами

I'. Линейные однор. n-ого порядка с const coeff

$$\text{I} \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} \dots a_0 y^{(0)} = 0$$
$$\text{II} \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} \dots a_0 y^{(0)} = f(x)$$

I Характеристич. уравнение: $\exists\, y = e^{\lambda x}$, находим λ

корень λ	функции ФСР
$\mathbb{R}$ кратности k	$y_1(x) = e^{\lambda x}, \dots y_k(x) = x^{k-1}e^{\lambda x}$
$\mathbb{C}$ кратности k $(\lambda = a \pm ib)$	$y_1(x) = e^{ax}\cos bx\ \dots$ $y_k(x) = x^{k-1}e^{ax}\cos bx,$ $y_{k+1}(x) = e^{ax}\sin bx\ \dots$ $y_{2k}(x) = x^{k-1}e^{ax}\sin bx$

$y_{\text{одн}}(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad \forall c_1, \dots, c_n$

II Неодн. уравнение. $y_{\text{общ}}(x) = y_{\text{однор}} + y_{\text{частное}}(x)$

1. Спец. вид $f(x) = P_k(x)e^{\gamma x} \;\Rightarrow\; y_1(x) = x^s R_k(x)e^{\gamma x}$
   $s =$ кратность γ в решениях хар. уравнения
   R_k – *неизвестный* многочлен k-ой степени
2. Спец. вид $f(x) = (P_k(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x)\cdot e^{\alpha x}$
   $y_1(x) = x^s(Q_n(x)\cos\beta x + T_n(x)\sin\beta x)\cdot e^{\alpha x}$,
   $n = max(k, m)$, $s =$ кратность $\gamma = \alpha \pm i\beta$
3. $f(x)$ – сумма 1 и 2 спец. видов $\;\Rightarrow\; y_1(x) = \sum y_{\text{спец}}$
4. Общий вид пр. части. **Метод вар. постоянных**
   Возможно $a_0, \dots, a_{n-1}$ – функции от x!
   I $\quad y_{\text{одн}}(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad \forall c_1, \dots c_n$
   II $\quad \exists\, y(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x) \;\to$
   (находим функции $c_1, c_2, \dots c_n$ – интегрируем)

$$\begin{cases} c_1'y_1 \; + & \dots + c_n'y_n = 0 \\ c_1'y_1' \; + & \dots + c_n'y_n' = 0 \\ & \dots \\ c_1'y_1^{(n-2)} + & \dots + c_n'y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1'y_1^{(n-1)} + & \dots + c_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

- Ур. Эйлера
  $x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$
  Замена:

$$x = \begin{cases} e^t, & x > 0 \\ -e^t, & x < 0 \end{cases}, \quad t = \ln(x),$$
$$y(x) = Y(t(x)).$$
$$\text{Тогда } y' = Y_t' \cdot \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; \underline{xy' = Y'}$$
$$y'' = \left(Y' \cdot \frac{1}{x}\right)' = Y''\frac{1}{x^2} - Y'\frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; \underline{x^2 y'' = Y'' - Y'}$$

Получилась правая часть спец. вида $\Rightarrow$ рассматриваем $x > 0$ и $x < 0$, решаем отн. t. Иначе вар. постоянных.

II'. Линейные однор. ур. с переменными коeff

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

$y_1(x)$ – решение, возможно, вида $e^{\alpha x}$ или многочлен (его степень надо найти). Другое решение $y(x)$ найти по формуле **Остроградского-Лиувилля**

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = ce^{-\int \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}dx} \quad \forall c$$

III'. Линейные системы

$$\text{I} \quad \overline{Y}' = A\overline{Y}$$

$\exists\, \overline{Y} = \overline{\alpha}e^{\lambda t} \;\to\; \overline{Y}' = \overline{\alpha}\lambda e^{\lambda t} \;\Rightarrow$
$(A - \lambda E)\overline{\alpha} = 0 \;\Rightarrow\; |A - \lambda E| = 0$

Находим собств. значения λ и с. векторы $\overline{\alpha}$.
Нельзя оставлять $\mathbb{C}$ собств. значения! Делать так:
$\lambda_i = \alpha \pm i\beta \Rightarrow \overline{Y}_i = \overline{\alpha}_i \cdot (\cos\beta t + i\sin\beta t)e^{\alpha t} = \overline{\alpha}_1 + i\overline{\alpha}_2 \Rightarrow$
$\overline{Y}_{\text{одн}} = c_1\overline{\alpha}_1 + c_2\overline{\alpha}_2 \quad \forall c_1, c_2$
Итого $\overline{Y}_{\text{одн}} = c_1\overline{\alpha}_1 e^{\lambda_1} + \dots + c_n\overline{\alpha}_n e^{\lambda_n} \quad \forall c_1, \dots c_n$

$$\text{II} \quad \overline{Y}' = A\overline{Y} + \overline{F}$$

1. Первый спец. вид. Если $\overline{F} = \overline{P_m}(t)\cdot e^{\gamma t} = \begin{pmatrix} P_{m1}(t) \\ \dots \\ P_{mn}(t) \end{pmatrix} e^{\gamma t}$,
   $m = max(m_1, \dots, m_n) \Rightarrow \overline{Y_1} = \overline{Q}_{m+s}(t)e^{\gamma t}$
   ($s =$ кратность γ)
2. Второй спец. вид. $\overline{F} = (\overline{P_m}(t)\cos\beta t + \overline{Q_l}(t)\sin\beta t)\cdot e^{\alpha t}$
   $\Rightarrow \overline{Y_1} = (\overline{R}_{k+s}(t)\cos\beta t + \overline{T}_{k+S}(t)\sin\beta t)\cdot e^{\alpha t}$
   $k = max(m, l)$
   ($s =$ кратность γ)
3. $\overline{F}$ – сумма специальных видов $\;\Rightarrow\; \overline{Y_1} = \sum y_{\text{спец}}$

Вопросы
Лин одн с пост коэфф – кратность какого корня? $\lambda = a \pm ib$?!
Метод вар. постоянных – и для непостоянных тоже?
Зачем 3 упоминания метода запихивания выражения под дифференциал?
В методе Эйлера. Получилась правая часть или УЖЕ была такой?