I. Ур. с разделяющимися переменными

$$f(y)\cdot dy = g(x)\cdot dx \;\to\; \int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

- $y' = f(ax+by+c) \Rightarrow$ замена $y(x) = \dfrac{z(x)-ax-c}{b}$,
  $y'(x) = \dfrac{z'(x)-a}{b}$, $z(x) = ax+by(x)+c$

II. Однородные уравнения

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

M и N – однор. одной и той же степени, т.е.
$M(kx,ky) = k^n\cdot M(x,y)$, то же для N

Замена $y(x) = t(x)\cdot x, \quad y' = t'x+t, \quad t(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

- $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \begin{matrix}\leftarrow l_1\\ \leftarrow l_2\end{matrix} \;\Rightarrow\; (x_0,y_0) = l_1\cap l_2$,
  Замена $x = u+x_0, \quad y = v+y_0$
- $y(x) = z^m(x), \; z = y^{-m}$

III. Линейные ур. I порядка

$$y' + a(x)y = b(x)$$

I Однородное $y'+a(x)y = 0 \to$ *(реш.)* $y_1 = y = c\cdot\ldots \quad \forall c$

II Метод вариации постоянной.
Реш. в виде $y = c(x)y_1(x)$

$$y'+a(x)y = c'y_1 + cy_1' + acy_1 = b \;\to$$
$$c'y_1 = b \;\to\; c = \int b(x)dx/y_1(x)$$

- Ур. Бернулли $y'+a(x)y = b(x)y^\alpha \;\to$
  $y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$
  $z(x) = y^{1-\alpha}, \;\; z'(x) = y^{-\alpha}y'(1-\alpha)$ *(не забудь $y=0$)*
- Интегрируемые комбинации
  $ydy = \dfrac{1}{2}dy^2 \qquad \dfrac{1}{y}dy = d\ln|y| \qquad xdy+ydx = d(xy)$
- Ур. Рикатти $y'+a(x)y+b(x)y^2 = c(x)$
  Если $y_1(x)$ – частное реш., замена $y(x) = y_1(x)+z(x)$
  Частное решение можно искать в виде
  $y_1 = cx^\alpha, \;\; ce^{\alpha x}, \;\; ax^2+bx+c, \;\; ax+b$

IV. Ур. в полных дифференциалах

$M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0$ – УПД, если $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$

$$\exists F: \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \;\to\; F(x,y) = \displaystyle\int M(x,y)dx + c(y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \to \left(\displaystyle\int M(x,y)dx + c(y)\right)'_y = N(x,y) \end{cases}$$

Отсюда найдём $c(y) = \int c'_y dy = \ldots + c_1 \quad \forall c_1$
$dF = 0 \Leftrightarrow$ *(ответ)* $F = C \quad \forall C$
(константа c_1 входит в C)

- Интегрирующий множитель (!!! не рекомендуется !!!)
  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. Ищем $m(x,y): M\,mdx + N\,mdy = 0$ – УПД.
  $m = m(x), \;\; m(y), \;\; x^a y^b$
- Выделение полного дифференциала
  $d(xy), \;\; d(\frac{x}{y}), \;\; d(\ln|x|)$

FLEX 1 Ур. I порядка, не разреш. отн. производной

$$F(x,y,y') = 0$$

1. Разрешить отн. производной. Возможен метод решения относительно $x(y)$, а не $y(x)$:)
2. $F(x,y,y')$ разрешено отн. $y: \quad y = f(x,y')$
   Пусть $p = y' = \dfrac{dy}{dx} \to pdx = dy = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial p}dp \;\to$
   $M(x,p)dx + N(x,p)dp = 0$, обычное уравнение. Можно найти явное $p = p(x)$, а можно $x = x(p)$ – тогда ответ
   $\begin{cases} x = x(p) \\ y = f(x(p),p) \end{cases}$
3. $F(x,y,y'): \quad x = f(y,y')$
   Анал.: $p = y'$, $\dfrac{dy}{p} = dx = d\,f(y,p) = \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial p}dp \;\to\; \ldots$
4. Нахождение особых решений

   0. Решить исходное уравнение
   1. p-дискриминантные кривые: $\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ \partial F\,/\,\partial p = 0 \end{cases}$
      $(p = y')$
      Избавляемся от p в системе, ее решения –
      $y = y_1(x,c)$
   2. y_1 является решением исх. ур.?
   3. y_1 – особое? $\quad \forall x_0 \; \exists$ реш. $y_2(x): \begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0) \end{cases}$
      То есть в любой своей точке особое решение должно касаться другого решения системы.

FLEX 2 Ур. допускающие пониж. порядка производной

- $y^{(n)} = f(x) \;\to\; y^{(n-1)} = \int f(x)dx \;\to\; \ldots$
- $\cancel{y}: F(x,y^{(k)},\ldots y^{(n)}) = 0 \;\Rightarrow\;$ замена $y^{(k)}_{(x)} = z(x)$
- $\cancel{x}: F(y,y^{(1)},\ldots y^{(n)}) = 0$
  Замена $y' = p(y(x)), \quad y'' = p'_y\cdot y'_x = p'p$
  (не забудь $p'_y = \frac{dp}{dy}$ – $dy = 0$)
- Однородное по $y, y', \ldots y^{(n)} \;\Rightarrow\;$ замена $y' = yz(x)$
  y сократятся если ур. однородное
- Выделение интегрируемых комбинаций
  $\dfrac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}} = \left(\ln\left|\,y^{(n-1)}\right|\right)'$

Это – шпаргалка, не учебник. Учебник – Филиппов
Семинарист – Елена Александровна Павельева ♡
https://github.com/lizzardhub/difurry
$\to$ обозначает переходы между формулами

I′. Линейные однор. n-ого порядка с const coeff

I $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} \dots a_0 y^{(0)} = 0$

II $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} \dots a_0 y^{(0)} = f(x)$

I Характеристич. уравнение: $\exists\, y = e^{\lambda x}$, находим λ

корень λ	функции ФСР
$\mathbb{R}$ кратности k	$y_1(x) = e^{\lambda x}, \dots y_k(x) = x^{k-1}e^{\lambda x}$
$\mathbb{C}$ кратности k (k пар $\lambda = a \pm ib$)	$y_1(x) = e^{ax}\cos bx \ \dots$ $y_k(x) = x^{k-1}e^{ax}\cos bx,$ $y_{k+1}(x) = e^{ax}\sin bx \ \dots$ $y_{2k}(x) = x^{k-1}e^{ax}\sin bx$

$y_{\text{одн}}(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad \forall c_1, \dots, c_n$

II Неодн. уравнение. $y_{\text{общ}}(x) = y_{\text{однор}} + y_{\text{частное}}(x)$

1. Первый специальный вид: $f(x) = P_k(x)e^{\gamma x} \Rightarrow$
   $\Rightarrow\ y_{\text{ч}}(x) = x^s R_k(x) e^{\gamma x}$
   $s =$ кратность γ в решениях хар. уравнения
   R_k – *неизвестный* многочлен k-ой степени
2. Второй: $f(x) = (P_k(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x)\cdot e^{\alpha x} \Rightarrow$
   $\Rightarrow\ y_{\text{ч}}(x) = x^s(Q_n(x)\cos\beta x + T_n(x)\sin\beta x)\cdot e^{\alpha x}$
   $n = max(k, m)$, $s =$ кратность $\gamma = \alpha + i\beta$
   (либо $\alpha - i\beta$, их кратности равны)

$f(x)$ – сумма 1 и 2 спец. видов $\Rightarrow\ y_{\text{ч}}(x) = \sum y_{\text{спец}}$

Общий вид пр. части. **Метод вар. постоянных**
Возможно $a_0, \dots, a_{n-1}$ – функции от x, т.е. не const!
I $y_{\text{одн}}(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad \forall c_1, \dots c_n$
II $\exists\, y(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x) \ \rightarrow$
(находим функции $c_1, c_2, \dots c_n$ – интегрируем)

$$\begin{cases} c_1' y_1 \ + & \dots + c_n' y_n = 0 \\ c_1' y_1' \ + & \dots + c_n' y_n' = 0 \\ & \dots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + & \dots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1' y_1^{(n-1)} + & \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

- Ур. Эйлера
  $x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$

Замена: $x = \begin{cases} e^t, & x > 0 \\ -e^t, & x < 0 \end{cases}$, $\ t = \ln(x),\ \ y(x) = Y(t(x))$.

$$\text{Тогда } y' = Y_t' \cdot \frac{1}{x} \ \Rightarrow\ \underline{xy' = Y'}$$

$$y'' = \left(Y' \cdot \frac{1}{x}\right)' = Y''\frac{1}{x^2} - Y'\frac{1}{x^2} \ \Rightarrow\ \underline{x^2 y'' = Y'' - Y'}$$

Получили новое уравнение $Y(t)$. Правая часть спец. вида $\Rightarrow$ рассматриваем $x > 0$ и $x < 0$, решаем отн. t. Иначе вар. постоянных.

II′. Линейные однор. ур. с переменными coeff

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

$y_1(x)$ – решение, возможно, вида $e^{\alpha x}$ или многочлен (его степень надо найти). Другое решение $y(x)$ найти по формуле **Остроградского-Лиувилля**

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = c e^{-\int \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}dx} \quad \forall c$$

III′. Линейные системы

I $\overline{Y}' = A\overline{Y}$ – однородные

$\exists\, \overline{Y} = \overline{\alpha}e^{\lambda t} \ \rightarrow\ \overline{Y}' = \overline{\alpha}\lambda e^{\lambda t} \ \Rightarrow$
$(A - \lambda E)\overline{\alpha} = 0 \ \Rightarrow\ |A - \lambda E| = 0$
Находим собств. значения λ и с. векторы $\overline{\alpha}$.

1) Нельзя оставлять $\mathbb{C}$ собств. значения! Делать так:
(Аналогично обычным однородным линейным ур., только кратные с.з. имеют разные с.в.)
$\lambda = \alpha \pm i\beta \Rightarrow \overline{Y} = \overline{\alpha}\cdot(\cos\beta t + i\sin\beta t)e^{\alpha t} = \overline{\alpha}_1 + i\overline{\alpha}_2 \Rightarrow$
$\overline{Y}_{\text{одн}} = c_1\overline{\alpha}_1 + c_2\overline{\alpha}_2 \quad \forall c_1, c_2$

2) Если кол-во с. векторов меньше кратности с. значения:
Допустим кратность λ равна 3
$\overline{Y} = (\overline{\alpha}t^2 + \overline{\beta}t + \overline{\gamma})e^{\lambda t} \ \rightarrow\ \overline{Y}' = (\overline{\alpha}2t + \overline{\beta})e^{\lambda t} + (\overline{\alpha}t^2 + \overline{\beta}t + \gamma)\lambda e^{\lambda t} = (\lambda\overline{\alpha}t^2 + (2\overline{\alpha} + \lambda\overline{\beta})t + (\overline{\beta} + \lambda\overline{\gamma}))e^{\lambda t}$, $A\overline{Y} = A\overline{\alpha}t^2 + A\overline{\beta}t + A\overline{\gamma}$

$$\exists\, B = A - \lambda E.\ \overline{Y}' = A\overline{Y} \Rightarrow \begin{cases} B\overline{\alpha} = \overline{0} \\ B\overline{\beta} = 2\overline{\alpha} \ \rightarrow\ B^3\overline{\gamma} = \overline{0} \ \rightarrow\ \dots \\ B\overline{\gamma} = \overline{\beta} \end{cases}$$

Так находим все решения – наборы $\{\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}\}$.

Общее решение однородного уравнения
$\overline{Y}_{\text{одн}} = c_1\overline{\alpha}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n\overline{\alpha}_n e^{\lambda_n t} \quad \forall c_1, \dots c_n$

II $\overline{Y}' = A\overline{Y} + \overline{F}$ – неоднородные

1. Первый спец. вид. Если $\overline{F} = \overline{P_m}(t)\cdot e^{\gamma t} = \begin{pmatrix} P_{m1}(t) \\ \dots \\ P_{mn}(t) \end{pmatrix} e^{\gamma t}$,
   $m = max(m_1, \dots, m_n) \Rightarrow \overline{Y_{\text{ч}}} = \overline{Q}_{m+s}(t)e^{\gamma t}$
   ($s =$ кратность γ)
2. Второй спец. вид. $\overline{F} = (\overline{P_m}(t)\cos\beta t + \overline{Q_l}(t)\sin\beta t)\cdot e^{\alpha t}$
   $\Rightarrow \overline{Y_{\text{ч}}} = (\overline{R}_{k+s}(t)\cos\beta t + \overline{T}_{k+S}(t)\sin\beta t)\cdot e^{\alpha t}$
   $k = max(m, l)$
   ($s =$ кратность γ)

$\overline{F}$ – сумма специальных видов $\Rightarrow\ \overline{Y_{\text{ч}}} = \sum y_{\text{спец}}$