Вега, Выпуклый анализ и выпуклая оптимизация.

Преподаватели: В.Ю. Протасов и Т.И. Зайцева

Домашние задачи 1

1. Найти сумму по Минковскому

а) единичного круга с центром в нуле и квадрата с центром в нуле

$$\{(x, y) \mid \max(|x|, |y|) \leq 1\}.$$

б) трёх точек $(1, 2)$, $(-3, 4)$ и $(0, 3)$.

в) одномерных множеств $\{0, 1, \ldots, a-1\}$ и $\{a \cdot k\}_{k=0,1,\ldots,n}$, a, n – натуральные числа (заданные константы).

г) Придумать два множества на прямой, каждое из трёх точек, чтобы в их сумме по Минковскому было как можно меньше точек (только пример, без доказательства).

2. а) Доказать выпуклость функции $|x - 2y + 1| - \log(2xy) + e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x, y > 0$.

б) Придумать разрывную выпуклую функцию.

3. Привести пример множества X, для которого $X + X \neq 2X$. Доказать, что для выпуклых множеств это равенство верно.

4. Пусть $M = (x, y)$ – точка внутри некоторого треугольника, a, b, c – расстояния от M до сторон этого треугольника. Доказать, что функция $f(M) = f(x, y) = \frac{1}{abc}$ выпукла.

5. Доказать, что перспективное отображение $P : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ с $\mathbf{dom}\, P = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$

$$P(x_1, \ldots, x_n, t) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{t} \\ \ldots \\ \frac{x_n}{t} \end{pmatrix}$$

переводит выпуклое множество в выпуклое.

Бонусные задачи

6. Доказать, что функция $-\log(\det A)$ выпукла на множестве положительно определённых симметрических матриц.

7. Зонотопом называется сумма по Минковскому конечного числа отрезков. Постройте пример центрально-симметричного выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$, который не является зонотопом.

Замечание. Любой центрально-симметричный плоский многоугольник является зонотопом.

8. Рассмотрим сумму по Минковскому фиксированного выпуклого многоугольника на плоскости и круга радиуса x. Докажите, что объём получившегося множества – многочлен от переменной x. Найдите его коэффициенты (в зависимости от многоугольника).