# Вега, Выпуклый анализ и выпуклая оптимизация.

Преподаватели: В.Ю. Протасов и Т.И. Зайцева

## Домашние задачи 3

**1**. Куб $I_4$ пересекли гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$, где $4 > a > 0$. Сколько вершин получится у многогранника в пересечении в зависимости от $a$?

**2**. Матрица называется дважды стохастической, если её элементы неотрицательны и сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце равна 1. Докажите, что множество всех дважды стохастических матриц размера $d \times d$ – многогранник. Найдите его размерность.

**3**. Пусть в модели Марковица $a = (1, 1, 2, 3)$, а ожидаемая прибыль $S = 5/3$.
а) Найдите вершины многогранника.
б) Пусть матрица ковариаций

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти наиболее рискованную стратегию (то есть $\max (Vx, x)$ на многограннике).

**4**. Известно, что на плоскости любая триангуляция фиксированного выпуклого многоугольника содержит одно и то же число треугольников. Постройте пример, показывающий, что в $\mathbb{R}^3$ разбиение выпуклого многогранника на симплексы (т.е. тетраэдры) уже необязательно состоит из одного и того же их числа. Рассматриваются триангуляции, не использующие дополнительных вершин.

**5**. Найдите такое число $a$, что гиперплоскость вида $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_8 = a$ пересекает все фасады 8-мерного куба $I_8$, но не пересекает его вписанный шар.

## Бонусные задачи

**6**. Какое максимальное число вершин может получиться в многограннике из модели Марковица, если его точки лежат в $\mathbb{R}^4$ (т.е. $x_1 + \ldots + x_4 = 1, a_1x_1 + \ldots + a_4x_4 = S, x_1, \ldots, x_4 \geq 0$)?

**7**. (Теорема Биркгофа). Докажите, что вершины многогранника дважды стохастических $d \times d$ матриц (см. задачу 2) – матрицы перестановки, то есть матрицы с одной единицей в строке и одной единицей в столбце.
а) для $d = 2$;
б) для произвольного $d$.