Вега, Выпуклый анализ и выпуклая оптимизация.

Преподаватели: В.Ю. Протасов и Т.И. Зайцева

Домашние задачи 2

1. а) Постройте функционал, отделяющий четырёхугольник с вершинами $(1,1)$, $(-1,0)$, $(-2,1)$, $(0,4)$ от треугольника, заданного неравенствами $x-4y \geq 2, x \leq 2, y \geq -1$. Строгая ли это отделимость?
б) Отделите "дольку" пятимерного шара $\{x_1, \dots, x_5 \geq 0, x_1^2 + \dots + x_5^2 \leq 4\}$ от точек $(1,1,1,1,1)$, $(0,0,1,1,1)$. Является ли точка $(0,0,1,1,1)$ крайней? Укажите все крайние точки.

2. Множество задано системой

$$\begin{cases} x^2 + y \leq 6 \\ x - y \leq 0 \\ x^2 + 4y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Постройте функционал, отделяющий его от точки $(-2,-2)$ и функционал, отделяющий его от точки $(0,3)$.

3. Решить задачу

$$\begin{cases} a^4 + b^4 \to \max \\ \max_{t\in[0,1]} |at+b| \leq 1 \end{cases}$$

Указание. Найдите крайние точки множества допустимых пар (a,b).

4. Докажите теорему, что максимум непрерывной выпуклой функции на выпуклом компактном множестве достигается в крайней точке (может достигаться и в других точках).

5. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ выпуклый компакт, $\operatorname{int} A \neq \varnothing$. Докажите, что A имеет не менее $n+1$ крайней точки.

Бонусные задачи

6. Докажите, что на плоскости $\mathbb{R}^2$ у любого выпуклого компакта множество крайних точек компактно.

7. Круг разбит на несколько равных между собой выпуклых фигур. Доказать, что это "дольки".