

## Вега, Выпуклый анализ и выпуклая оптимизация.

Преподаватели: В.Ю. Протасов и Т.И. Зайцева

### Домашние задачи 4

1. Найти субдифференциал функции (не используя теоремы Дубовицкого-Милютина / Моро-Рокафеллара)
  - а)  $f(x) = |x + 2|$  в точке  $x = 3$ ;
  - б)  $f(x, y) = |x| + |y|$  в точке  $(0, 0)$ .
2. Вычислите субдифференциал функции трёх переменных  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 
  - а) в точке  $(1, 0, 0)$ ;
  - б) в точке  $(0, 0, 1)$ .
3. а) Докажите, что субдифференциал функции  $f(x)$  в точке 0 совпадает с субдифференциалом функции  $g(x) = f(x - x_0)$  в точке  $x_0$ .  
б) Найдите субдифференциал функции  $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + 3y^2}$  в точке  $(0, 0)$ .
4. Найдите вершины многогранника  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leq x_1 \leq 2x_2 \leq \dots \leq dx_d \leq 1\}$ .
  - а) для  $d = 2$ ;
  - б) в общем случае.Обоснуйте, почему это вершины.
5. Пусть  $K \subset \mathbb{R}^2$  – замкнутое множество на плоскости. Обязательно ли функция  $f(x) = \rho(x, K) = \min_{k \in K} \rho(x, k)$  выпукла?

### Бонусные задачи

6. Пусть  $K \subset \mathbb{R}^2$  – замкнутое выпуклое множество на плоскости. Обязательно ли функция  $f(x) = \rho(x, K) = \min_{k \in K} \rho(x, k)$  выпукла?
7. На любом языке программирования реализуйте программу, которая принимает на вход параметры из модели Марковица (вектор  $a$  и число  $S$  – ожидаемую прибыль) и возвращает множество вершин многогранника. Можно считать, что элементы  $a$  неубывают. Отдельно выведите количество вершин в ответе и сами вершины списком.  
Прикрепите скрин с кодом и результаты работы для
  - а)  $a = (1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$ ,  $S = 5/3$ ;
  - б)  $a = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ ,  $S = 5/3$ ;
  - в)  $a = (1, 2, 2, 4, 7, 7)$ ,  $S = 7/4$ .