Министерство образования и науки Российской Федерации ФГАОУ ВО
«УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»
Кафедра «школы бакалавриата (школа)»

Оценка работы____________________________
Руководитель от УрФУ Башкирцева И.А.

Тема задания на практику
Исследование модели ФитцХью-Нагумо

ОТЧЕТ
Вид практики Учебная практика
Тип практики Учебная практика, научно-исследовательская работа
(получение первичных навыков научно-исследовательской работы)

Руководитель практики от предприятия (организации)

ФИО руководителя Подпись

Студент Антонова Е.С.

Специальность (направление подготовки) 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Группа МЕН-210201

Екатеринбург 2023

Содержание

Введение

Модель ФитцХью-Нагумо является одной из базовых математических моделей, описывающих возбудимые системы. [1]

В физиологии используется в качестве концептуальной математической модели поведение возбудимой ткани (например, нейрона), которая довольно детально объясняет динамику активации и деактивации пульсирующего нейрона. [3]

Постановка задачи

Основные цели и задачи работы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Аналитическое исследование модели: найти точки покоя, исследовать их, составить бифуркационную диаграмму

2. Компьютерное моделирование: построить типичные фазовые потреты методом Рунге-Кутта 4го порядка, найти предельные циклы и их периоды

Аналитическое исследование

Модель представлена системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\delta}(x - \frac{x^3}{3}) - \frac{y}{\delta}, \delta = 10^{-1} \\ \dot{y} = x + a, a > 0 \end{cases}$$

Точка покоя, найденная при $\dot{x} = \dot{y} = 0$ [2], имеет координаты

$$x_0 = -a, y_0 = -a + \frac{a^3}{3}$$

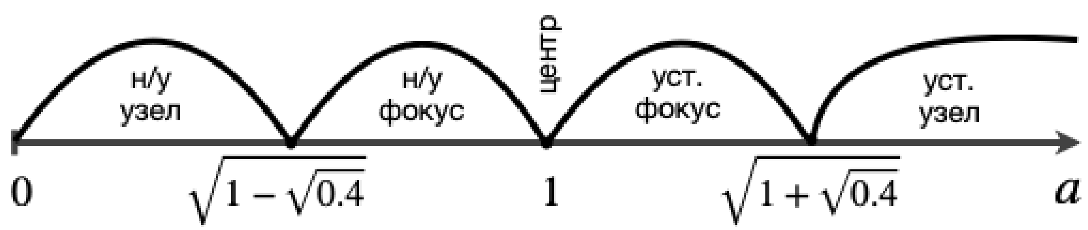
Матрица первого приближения в точке M имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1-a^2}{\delta} & -\frac{1}{\delta} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Собтвенные числа матрицы A находятся через уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{1-a^2}{\delta} - \lambda & -\frac{1}{\delta} \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{\lambda(1-a^2)}{\delta} + \frac{1}{\delta} = 0$$

В зависимости от выбора параметра a меняются собственные числа, а значит, и тип фазового портрета.
Бифуркационная диаграмма для этой модели имеет вид:



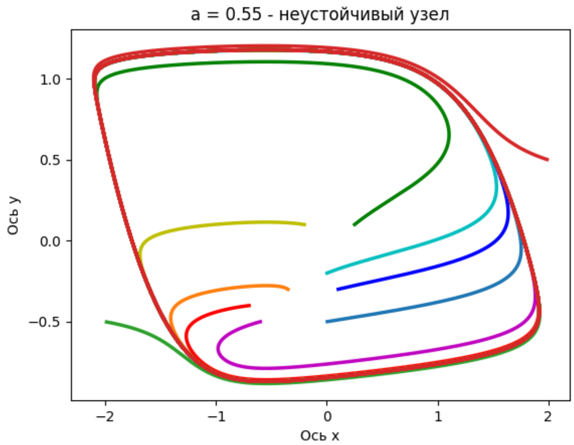
Компьютерное моделирование

Фазовые портреты

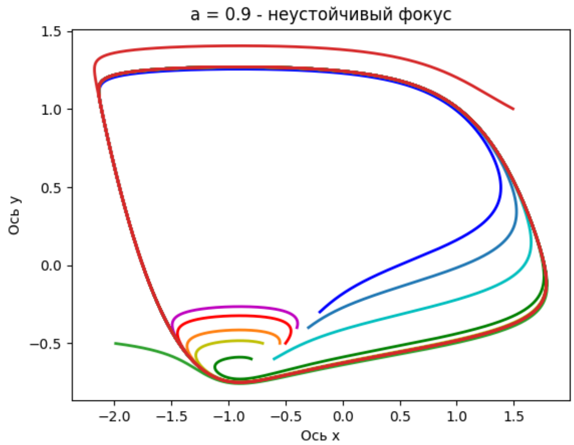
Построить фазовые портреты этой системы можно с помощью программирования метода Рунге-Кутта 4 порядка с шагом метода h=0.001 [4].

```
def f(x, y):
    return 10 * (x - x ** 3 / 3) - 10 * y


def g(x, param):
    return x + param


def use_method(coordinates, param):
    x0, y0 = coordinates
    res_x = []
    res_y = []
    h = 0.001
    k = 10000
    while k >= 0:
        k1 = h * f(x0, y0)
        l1 = h * g(x0, param)
        k2 = h * f(x0 + k1 / 2, y0 + l1 / 2)
        l2 = h * g(x0 + k1 / 2, param)
        k3 = h * f(x0 + k2 / 2, y0 + l2 / 2)
        l3 = h * g(x0 + k2 / 2, param)
        k4 = h * f(x0 + k3, y0 + l3)
        l4 = h * g(x0 + k3, param)

        x = x0 + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
        y = y0 + (l1 + 2 * l2 + 2 * l3 + l4) / 6
        res_x.append(x)
        res_y.append(y)
        y0 = y
        x0 = x
        k -= 1
    return res_x, res_y
```

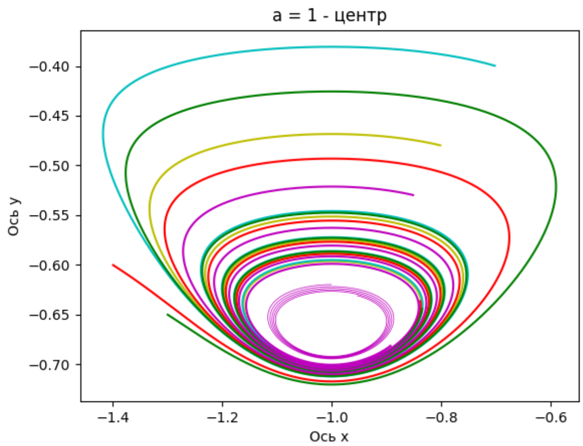
Листинг 1: Запрограммированный метод Рунге-Кутта для данной модели



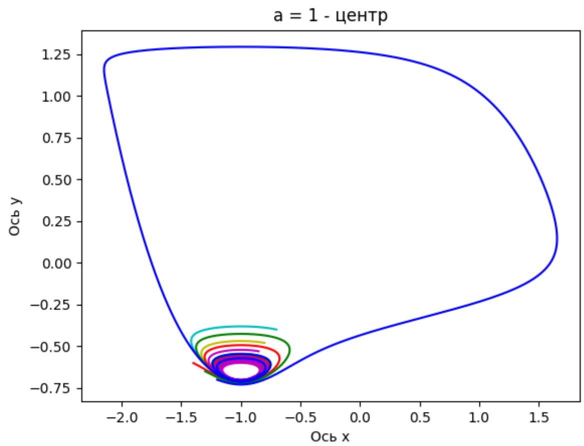
a)



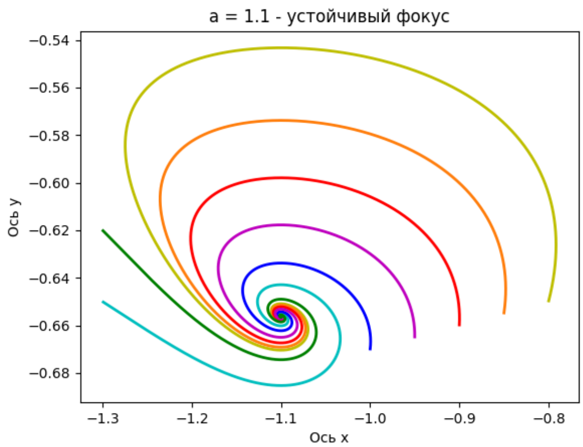
b)



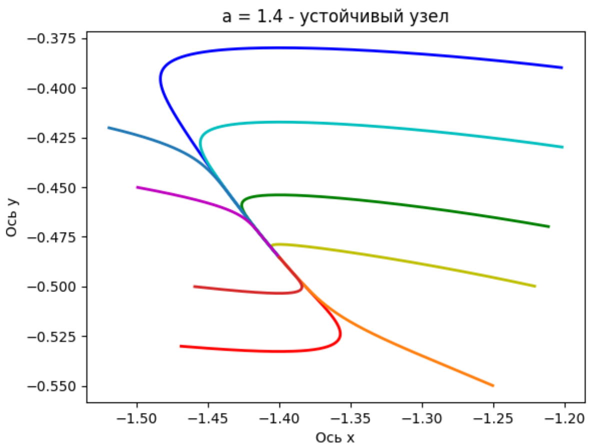
c)



d)



e)



f)

На графиках выше изображены фазовые портреты при значениях параметра: **a)** $a < \sqrt{1-\sqrt{0.4}}$; **b)** $a < 1$; **c, d)** $a = 1$ траектории с точками, взятыми вблизи и вдали относительно точки покоя, соответственно; **e)** $a > 1$; **f)** $a > \sqrt{1+\sqrt{0.4}}$.

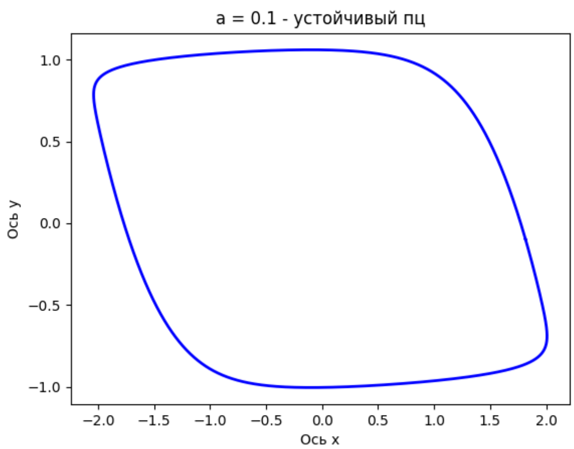
Предельные циклы

Чтобы найти точку, из которой стартует траектория предельного цикла, нужно запустить метод Рунге-Кутта с условием отбора:

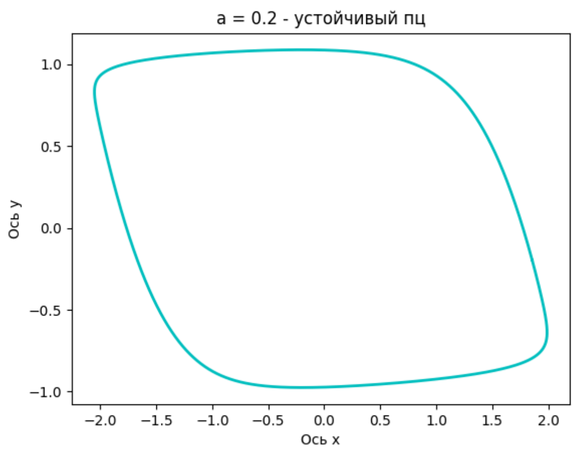
```
def use_method(coordinates0, coordinates, param):
    x_a, y_a = coordinates0
    x0, y0 = coordinates
    h = 0.001
    while True:
        k1 = h * f(x0, y0)
        l1 = h * g(x0, param)
        k2 = h * f(x0 + k1 / 2, y0 + l1 / 2)
        l2 = h * g(x0 + k1 / 2, param)
        k3 = h * f(x0 + k2 / 2, y0 + l2 / 2)
        l3 = h * g(x0 + k2 / 2, param)
        k4 = h * f(x0 + k3, y0 + l3)
        l4 = h * g(x0 + k3, param)

        x = x0 + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
        y = y0 + (l1 + 2 * l2 + 2 * l3 + l4) / 6
        if x > x_a and x0 > x_a and (y - y_a)*(y0 - y_a) < 0:
            k = (y - y0) / (x - x0)
            b = y - k * x
            return (y_a - b) / k
        y0 = y
        x0 = x
```

Построить предельные циклы и найти их периоды можно с помощью кода 1 с добавлением условия выхода из функции:

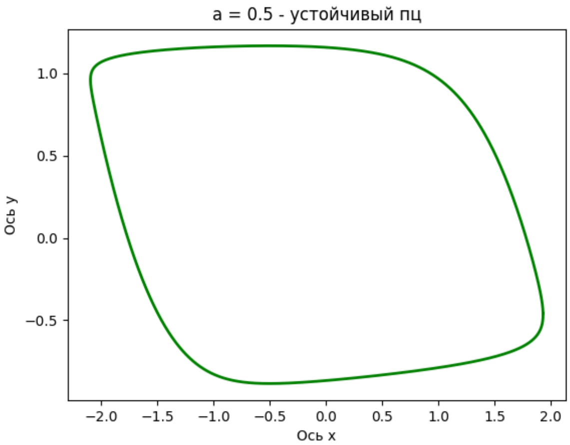
```
if x > x_a and x0 > x_a and (y - y_a)*(y0 - y_a) < 0:
    return res_x, res_y
```



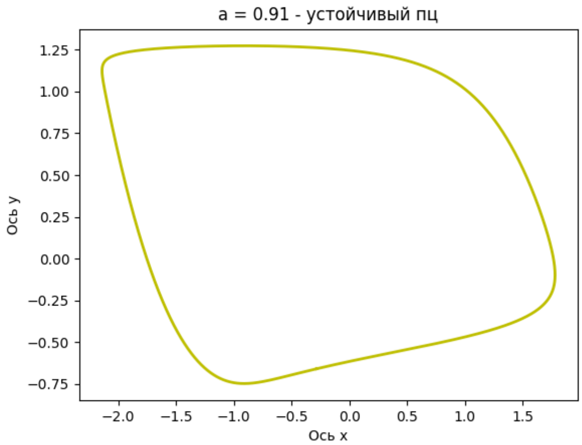
a)



b)



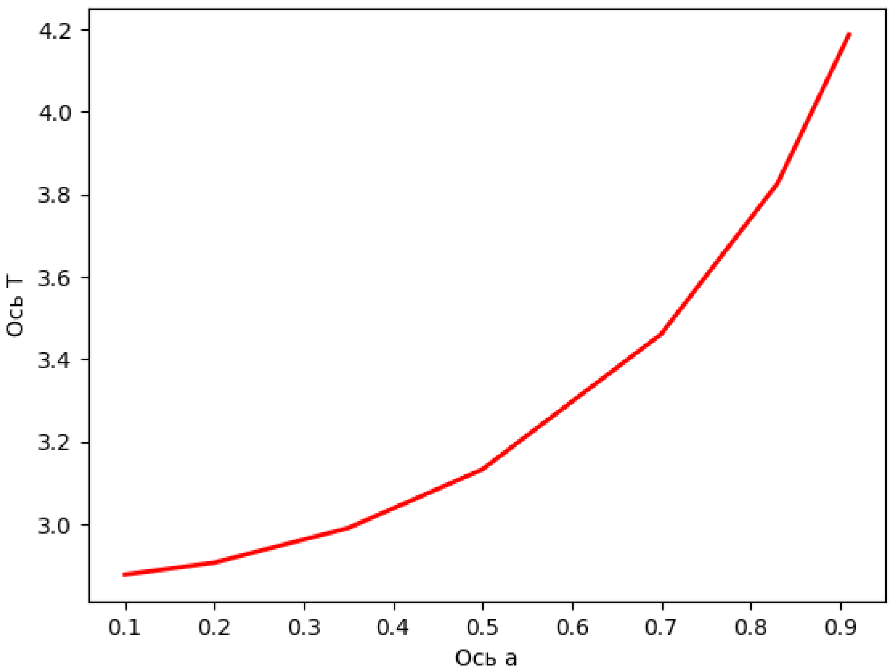
c)



d)

На графиках выше изображены предельные циклы при значениях параметра: **a)** $a = 0.1, T = 2.878$, **b)** $a = 0.2, T = 2.907$, **c)** $a = 0.5, T = 3.133$, **d)** $a = 0.91, T = 4.187$.

На основе полученных данных можно построить график зависимости периода T от параметра a. Получившийся график имеет вид:



Заключение

В результате выполнения практики по исследованию модели ФитцХью-Нагумо задание выполнено полностью. В процессе работы возникли сложности с нахождением точек, из которых стартует траектория предельного цикла.
В дальнейшем можно продолжить исследование дифференицальных уравнений с помощью других методов.

Перечень использованных источников

1. Исследование дифференциальной модели ФитцХью — Нагумо. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-differentsialnoy-modeli-fittshyu-nagumo/viewer.
2. Компьютерное моделирование нелинейной динамики. — URL: https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/48962/1/978-5-7996-2046-2_2017.pdf.
3. Модель ФитцХью — Нагумо. — URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8C_%D0%A4%D0%B8%D1%82%D1%86%D0%A5%D1%8C%D1%8E_%E2%80%94_%D0%9D%D0%B0%D0%B3%D1%83%D0%BC%D0%BE.
4. Численные методы. — URL: https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/31219/1/978-5-7996-1342-6_2014.pdf.