Chapter2: An introduction to Discontinuous Galerkin for convection-dominated problems (Cockburn, 1998)

5 对流-扩散问题：LDG 法

5.1 引言

介绍求解对流扩散问题的半离散形式的 LDG 方法，施加周期边界，目的是尽可能简洁清楚地介绍 LDG 方法的特性。将 LDG 法拓展至完全离散形式也是直接的了。5.2 节将介绍 1D 情况下(d=1)的 LDG 法：

$$\mathbf{F}(u, Du) = f(u) - a(u)\partial_x u$$

其中，u 为标量，$a(u) \geq 0$。

多维情况下：

$$\mathbf{F}_i(u, Du) = f_i(u) - \sum_{1 \leq j \leq d} a_{ij}(u)\partial_{x_j} u$$

其中，a_{ij} 定义正定的半离散矩阵。

本文还证明了 LDG 法的 L^2 稳定性，分析了对于 $k \geq 0$ 多项式下的 $L^\infty\left(0, T; L^2\right)$ 范数意义上的 $(\Delta x)^k$ 的收敛速率。

5.2 1D 情况下的 LDG 法

应用 LDG 求解如下的简单问题并施加周期性边界：

$$\partial_t u + \partial_x\left(f(u) - a(u)\partial_x u\right) = 0 \quad 在(0,T)\times(0,1) \qquad （5.1）$$

$$u(t=0) = u_0, \quad 在(0,1) \qquad （5.2）$$

计算公式与主要特性：为定义 LDG 法，引入新变量 $q = \sqrt{a(u)}\partial_x u$，重写问题（5.1）和（5.2），有：

$$\partial_t u + \partial_x(f(u) - \sqrt{a(u)}q) = 0 \quad \text{in}(0,T)\times(0,1) \qquad （5.3）$$

$$q - \partial_x g(u) = 0 \quad \text{in}(0,T)\times(0,1) \qquad （5.4）$$

$$u(t=0) = u_0, \quad on(0,1) \qquad （5.5）$$

式中，$g(u)=\int^{u}\sqrt{a(s)}ds$。

现在可通过使用 DG 法简单地离散上述方程组，得到（5.1）和（5.2）的 LDG 法。为此，定义通量$\mathbf{h}=\left(h_u,h_q\right)^t$如下：

$$\mathbf{h}(u,q)=(f(u)-\sqrt{a(u)}q,-g(u))^t \qquad (5.6)$$

对每个离散区间(0,1)，$\left\{x_{j+1/2}\right\}_{j=0}^{N}$，令$I_j=\left(x_{j-1/2},x_{j+1/2}\right)$和$\Delta x_j=x_{j+1/2}-x_{j-1/2}$，$j$=1,…, N。用Δx表示量$\max_{1\le j\le N}\Delta x_j$。试图在每个时间$t\in[0,T]$，找到$\mathbf{w}=(u,q)^t$的近似$\mathbf{w}_h=\left(u_h,q_h\right)^t$，$u_h(t)$和$q_h(t)$属于有限维空间：

$$V_h=V_h^k=\left\{v\in L^1(0,1):v\big|_{I_j}\in P^k\left(I_j\right),j=1,\ldots,N\right\} \qquad (5.7)$$

其中，$P^k(I)$表示在I上的k阶多项式空间。

为确定近似解$\left(u_h,q_h\right)$，首先注意到，通过用任意光滑函数v_u,v_q,v_i分别乘以式（5.3）、式（5.4）和式（5.5），在 I_j 上积分，经过在式（5.3）和式（5.4）的定义域中做分部积分，得到：

$$\begin{aligned}&\int_{I_j}\partial_t u(x,t)v_u(x)dx-\int_{I_j}h_u(\mathbf{w}(x,t))\partial_x v_u(x)dx\\&+h_u\left(\mathbf{w}\left(x_{j+1/2},t\right)\right)v_u\left(x_{j+1/2}^-\right)-h_u\left(\mathbf{w}\left(x_{j-1/2},t\right)\right)v_u\left(x_{j-1/2}^+\right)=0\end{aligned} \qquad (5.8)$$

$$\begin{aligned}&\int_{I_j}q(x,t)v_q(x)dx-\int_{I_j}h_q(\mathbf{w}(x,t))\partial_x v_q(x)dx\\&+h_q\left(\mathbf{w}\left(x_{j+1/2},t\right)\right)v_q\left(x_{j+1/2}^-\right)-h_q\left(\mathbf{w}\left(x_{j-1/2},t\right)\right)v_q\left(x_{j-1/2}^+\right)=0\end{aligned} \qquad (5.9)$$

$$\int_{I_j}u(x,0)v_i(x)dx=\int_{I_j}u_0(x)v_i(x)dx \qquad (5.10)$$

接下来，在有限单元空间 V_h 中，用试函数$v_{h,u}$，$v_{h,q},v_{h,i}$分别代替光滑函数v_u,v_q,v_i，用近似解$\mathbf{w}_h=\left(u_h,q_h\right)^t$代替精确解$\mathbf{w}=(u,q)^t$。因此该函数在各分量上是不连续的，还必须用数值通量$\mathbf{h}(\mathbf{w})_{j+1/2}(t)=\left(\hat{h}_u\left(\mathbf{w}_h\right)_{j+1/2}(t),\hat{h}_q\left(\mathbf{w}_h\right)_{j+1/2}(t)\right)$代替非线性通量$\mathbf{h}\left(\mathbf{w}\left(x_{j+1/2},t\right)\right)$，需要恰当地选择数值通量格式。因此，由 LDG 法给出的近似解可定义为如下弱形式解：

$$\begin{aligned}&\forall v_{h,u}\in P^k\left(I_j\right):\\&\int_{I_j}\partial_t u_h(x,t)v_{h,u}(x)dx-\int_{I_j}h_u\left(\mathbf{w}_h(x,t)\right)\partial_x v_{h,u}(x)dx\\&+\hat{h}_u\left(\mathbf{w}_h\right)_{j+1/2}(t)v_{h,u}\left(x_{j+1/2}^-\right)-\hat{h}_u\left(\mathbf{w}_h\right)_{j-1/2}(t)v_{h,u}\left(x_{j-1/2}^+\right)=0\end{aligned}\quad（5.11）$$

$$\begin{aligned}&\forall v_{h,q}\in P^k\left(I_j\right)\\&\int_{I_j}q_h(x,t)v_{h,q}(x)dx-\int_{I_j}h_q\left(\mathbf{w}_h(x,t)\right)\partial_x v_{h,q}(x)dx\\&+\hat{h}_q\left(\mathbf{w}_h\right)_{j+1/2}(t)v_{h,q}\left(x_{j+1/2}\right)-\hat{h}_q\left(\mathbf{w}_h\right)_{j-1/2}(t)v_{h,q}\left(x_{j-1/2}^+\right)=0\end{aligned}\quad（5.12）$$

$$\begin{aligned}&\forall v_{h,i}\in P^k\left(I_j\right):\\&\int_{I_j}u_h(x,0)v_{h,i}(x)dx=\int_{I_j}u_0(x)v_{h,i}(x)dx\end{aligned}\quad（5.13）$$

剩下的工作就是选择数值通量$\mathbf{h}\left(\mathbf{w}_h\right)_{j+1/2}(t)$，使用标记：

$$[p]=p^+-p^-,\overline{p}=\frac{1}{2}\left(p^++p^-\right),p_{j+1/2}^{\pm}=p\left(x_{j+1/2}^{\pm}\right)$$

为与 RKDG 法中使用的数值通量类型相一致，考虑如下形式的数值通量：

$$\mathbf{h}\left(\mathbf{w}_h\right)_{j+1/2}(t)\equiv\mathbf{h}\left(\mathbf{w}_h\left(x_{j+1/2}^-,t\right),\mathbf{w}_h\left(x_{j+1/2}^+,t\right)\right)$$

上式具有如下性质：（1）局部 Lipschitz 连续，与通量 $\mathbf{h}$ 一致；（2）允许以u_h表示 q_h 的局部解；（3）当$a(\cdot)\equiv 0$时退化为 E-通量；（4）强迫该方法的 L^2 稳定性。

为反映问题的对流扩散特性，将数值通量写成对流通量和扩散通量之和：

$$\mathbf{h}\left(\mathbf{w}^-,\mathbf{w}^+\right)=\mathbf{h}_{\mathrm{conv}}\left(\mathbf{w}^-,\mathbf{w}^+\right)+\mathbf{h}_{diff}\left(\mathbf{w}^-,\mathbf{w}^+\right)\quad（5.14）$$

对流通量计算如下：

$$\hat{\mathbf{h}}_{conv}\left(\mathbf{w}^-,\mathbf{w}^+\right)=\left(\hat{f}\left(u^-,u^+\right),0\right)^t\quad（5.15）$$

式中，$\hat{f}\left(u^-,u^+\right)$是任意局部 Lipschitz 连续的 E-通量，与非线性通量 f 相一致。

扩散通量计算如下：

$$\mathbf{h}_{diff}\left(\mathbf{w}^-,\mathbf{w}^+\right)=\left(-\frac{[g(u)]}{[u]}\overline{q},-\overline{g(u)}\right)^t-\mathbb{C}_{diff}[\mathbf{w}]\quad（5.16）$$

式中，

$$\mathbb{C}_{diff}=\begin{pmatrix}0&c_{12}\\-c_{12}&0\end{pmatrix}\quad（5.17）$$

$$c_{12} = c_{12}\left(\mathbf{w}^{-}, \mathbf{w}^{+}\right) \text{是局部 Lipschitz 连续的} \qquad (5.18)$$

$$c_{12} \equiv 0 \quad \text{当} a(\cdot) \equiv 0 \qquad (5.19)$$

可以证明以上通量满足特性（1）~（4）。

5.3 数值试验

5.4 多维情况下的 LDG 法

下面考虑用于求解对流扩散问题的 LDG 法，施加周期性边界条件：

$$\partial_t u + \sum_{1\le i\le d} \partial_{x_i}\left(f_i(u) - \sum_{1\le j\le d} a_{ij}(u)\partial_{x_j} u \right) = 0 \quad in(0,T)\times(0,1)^d \qquad (5.23)$$

$$u(t=0) = u_0, \quad on(0,1)^d \qquad (5.24)$$

本质上，多维情况和 1D 情况是完全相同的。但是，有 2 个重要区别需要指出。第一个区别是矩阵元素 $a_{ij}(u)$ 的处理，假设矩阵是对称、半正定的，引入变量 q_ℓ；第二个区别是任意网格的处理。为定义 LDG 法，首先注意到，因为假设矩阵 $a_{ij}(u)$ 为对称、半正定的，因此就存在一个对称矩阵 $b_{ij}(u)$ 使得：

$$a_{ij}(u) = \sum_{1\le \ell\le d} b_{i\ell}(u) b_{\ell j}(u) \qquad (5.25)$$

则定义新的标量变量 $q_\ell = \sum_{1\le j\le d} b_{\ell j}(u)\partial_{x_j} u$，重写问题（5.23）和（5.24）如下：

$$\partial_t u + \sum_{1\le i\le d} \partial_{x_i}\left(f_i(u) - \sum_{1\le \ell\le d} b_{i\ell}(u) q_\ell \right) = 0 \quad in(0,T)\times(0,1)^d \qquad (5.26)$$

$$q_\ell - \sum_{1\le j\le d} \partial_{x_j} g_{\ell j}(u) = 0, \quad \ell = 1,\dots d, \quad in(0,T)\times(0,1)^d \qquad (5.27)$$

$$u(t=0) = u_0, \quad on(0,1)^d \qquad (5.28)$$

式中，$g_{\ell j}(u) = \int^u b_{\ell j}(s)ds$。

现在可通过使用 DG 法离散上述方程组可得到 LDG 法。与 1D 情况的推导一样，令 $\mathbf{w} = (u, \mathbf{q})^t = \left(u, q_1, \cdots, q_d\right)^t$，对每个 $i = 1,\cdots,d$ 引入通量：

$$\mathbf{h}_i(\mathbf{w}) = \left(f_i(u) - \sum_{1\le \ell\le d} b_{i\ell}(u) q_\ell, -g_{1i}(u), \cdots, -g_{di}(u) \right)^t \qquad (5.29)$$

考虑$(0,1)^d$的三角形网格$\mathbb{T}_{\Delta x}=\{K\}$，是由非重叠的多边形组成。要求对任意2个单元$K$和$K'$，$\bar{K}\cap\bar{K}'$或者是具有非零($d$-1)-Lebesgue测量$|e|$的$K$和$K'$的边$e$，或者是低于$d$-1的Hausdorff维度。用$\mathbb{E}_{\Delta x}$表示所有$K\in\mathbb{T}_{\Delta x}$的单元$K$的边界的所有边$e$的集合，$K$的直径表示为$\Delta x_K$，$K\in\mathbb{T}_{\Delta x}$的最大直径$\Delta x_K$表示为$\Delta x$。为了简便，要求三角网格$\mathbb{T}_{\Delta x}$是规则的，即存在常数值的$\Delta x$满足：

$$\frac{\Delta x_K}{\rho_K}\le\sigma\quad\forall K\in\mathbb{T}_{\Delta x}$$

式中，ρ_K表示包含在K内的最大球形的直径。

试图找到对每个时间$t\in[0,T]$，对$\mathbf{w}$的近似$\mathbf{w}_h=(u_h,\mathbf{q}_h)^t=(u_h,q_{h1},\cdots,q_{hd})^t$，$\mathbf{w_h}$的各分量属于有限单元空间：

$$V_h=V_h^k=\left\{v\in L^1\left((0,1)^d\right):v\big|_K\in P^k(K)\forall K\in\mathbb{T}_{\Delta x}\right\}\qquad(5.30)$$

式中，$P^k(K)$表示达k阶的多项式空间。

为了确定近似解$\mathbf{w_h}$，与1D情况完全一样。但此时是在三角网格$\mathbb{T}_{\Delta x}$的各单元K上做积分。获得三角网格$\mathbb{T}_{\Delta x}$各单元K上的弱形式解：

$$\begin{aligned}&\int_K\partial_t u_h(x,t)v_{h,u}(x)dx-\sum_{1\le i\le d}\int_K h_{iu}\left(\mathbf{w}_h(x,t)\right)\partial_{x_i}v_{h,u}(x)dx\\&+\int_{\partial K}\hat{h}_u\left(\mathbf{w}_h,\mathbf{n}_{\partial K}\right)(x,t)v_{h,u}(x)d\Gamma(x)=0,\quad\forall v_{h,u}\in P^k(K)\end{aligned}\qquad(5.31)$$

对于$\ell=1,\cdots,d$：

$$\begin{aligned}&\int_K q_{h\ell}(x,t)v_{h,q_\ell}(x)dx-\sum_{1\le j\le d}\int_K h_{jq_\ell}\left(\mathbf{w}_h(x,t)\right)\partial_{x_j}v_{h,q_\ell}(x)dx\\&+\int_{\partial K}\hat{h}_{q_\ell}\left(\mathbf{w}_h,\mathbf{n}_{\partial K}\right)(x,t)v_{h,q_\ell}(x)d\Gamma(x)=0,\quad\forall v_{h,q_\ell}\in P^k(K)\end{aligned}\qquad(5.32)$$

$$\int_K u_h(x,0)v_{h,i}(x)dx=\int_K u_0(x)v_{h,i}(x)dx,\quad\forall v_{h,i}\in P^k(K)\qquad(5.33)$$

式中，$n_{\partial K}$代表单元K在$x\in\partial K$处的外法向单元向量。

仍然选择数值通量$\left(\hat{h}_u,\hat{h}_{q_1},\cdots,\hat{h}_{q_d}\right)^t\equiv\mathbf{h}\equiv\mathbf{h}\left(\mathbf{w}_h,\mathbf{n}_{\partial K}\right)(x,t)$。

与1D情况类似，要求通量$\mathbf{h}$有如下形式：

$$\mathbf{h}(\mathbf{w}_h,\mathbf{n}_{\partial K})(x)\equiv\mathbf{h}\left(\mathbf{w}_h\left(x^{int_K},t\right),\mathbf{w}_h\left(x^{ext_K},t\right);\mathbf{n}_{\partial K}\right)$$

式中，$\mathbf{w}_h\left(x^{int_K}\right)$是在 x 处来自 K 的内部的限制；$\mathbf{w}_h\left(x^{ext_K}\right)$是在 x 处来自 K 的外部的限制。

（1）通量是局部 Lipschitz 连续和守恒的，即：

$$\mathbf{h}\left(\mathbf{w}_h\left(x^{int_K}\right),\mathbf{w}_h\left(x^{ext_K}\right);\mathbf{n}_{\partial K}\right)+\mathbf{h}\left(\mathbf{w}_h\left(x^{ext_K}\right),\mathbf{w}_h\left(x^{int_K}\right);-\mathbf{n}_{\partial K}\right)=0$$

且与下列通量一致：

$$\sum_{1\le i\le d}h_i n_{\partial K,i}$$

（2）仅允许局部求解以 u_h 形式表示的 $\mathbf{q_h}$ 的各分量；

（3）当$a(\cdot)\equiv 0$时退化为 E-通量；

（4）强迫该方法的 L^2 稳定性。

同样，将数值通量写成对流通量和扩散通量之和：

$$\mathbf{h}=\mathbf{h}_{conv}+\mathbf{h}_{diff}$$

其中，**对流通量**计算如下：

$$\mathbf{h}_{\mathrm{conv}}\left(\mathbf{w}^-,\mathbf{w}^+;\mathbf{n}\right)=\left(\hat{f}\left(u^-,u^+;\mathbf{n}\right),0\right)^t$$

式中，$\hat{f}\left(u^-,u^+;\mathbf{n}\right)$是任意局部 Lipschitz 连续的 E-通量，是守恒的，与下列非线性通量是一致的：

$$\sum_{1\le i\le d}f_i(u)n_i$$

扩散通量$\mathbf{h}_{diff}\left(\mathbf{w}^-,\mathbf{w}^+;\mathbf{n}\right)$计算如下：

$$\left(-\sum_{1\le i,\ell\le d}\frac{[g_{i\ell}(u)]}{[u]}\overline{q_\ell}n_i,-\sum_{1\le i\le d}\overline{g_{i1}(u)}n_i,\cdots,-\sum_{1\le i\le d}\overline{g_{id}(u)}n_i\right)^t-\mathbb{C}_{diff}[\mathbf{w}]$$

式中，

$$\mathbb{C}_{diff}=\begin{pmatrix}0 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1d}\\ -c_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -c_{13} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -c_{1d} & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$c_{1j}=c_{1j}\left(\mathbf{w}^-,\mathbf{w}^+\right)$对 j=1,…, d 是局部 Lipschitz 连续的；

当 $a(\cdot)\equiv 0$ 时，对 j=1,…, d， $c_{1j}\equiv 0$

5.5 拓展至多维情况

标量的 LDG 法可应用于矢量的各分量。尽管各单元上使用了大量的自由度，但其算法的高度并行化可弥补计算量增大的问题。LDG 法的高阶特性，特别适合于求解对流占优的对流扩散问题。

5.6 数值试验