

# VOLNA\_OP2 的基本原理

海啸波演变模型 VOLNA(Dutykh et al., 2011), 经过重新改写, 基于 OP2 库 (Mudalige et al., 2012), 开发了可 OpenMP, MPI, CUDA 等高性能计算的 VOLNA\_OP2 模型(Istvan et al., 2018)。

VOLNA 模型可模拟海啸波形成初期的长时间变形过程, 因此可完整地模拟海啸的形成、传播、演变的过程, 对研究海底滑坡和海底地震引起的海啸波传播, 具有很高的意义。

## 海啸模型相关研究

海啸波传播的模拟方法有:

(1)求解浅水方程(SWE), 结构网格和非结构网格(Behrens and Dias, 2015)。

有限差分: NOAA-MOST

有限单元: SELFE

有限体积: VOLNA, GeoCLAW

(2)求解 Boussinesq 方程, 求解较 SWE 要复杂!如 FUNWAVE, COULWAVE

(3) 求解 3D 的 N-S 方程, 对研究海啸波形成源附近的流体特性有意义

GPU 并行的海啸波模型有:

Celeris (Tavakkol and Lynett, 2017)求解 Boussinesq 方程, GPU 并行, 基于有限体积和结构网格, 开源代码, 仅在 1 个 GPU 上运行;

Tsunami-HySEA (Macias et al., 2017), GPU-CUDA 并行, (嵌套) 结构网格, GPU 集群并行, 代码不开源。

## 控制方程

Cartesian 坐标下的非扩散 (无粘性) 非线性浅水方程 (张量形式):

$$H_t + \nabla \cdot (Hv) = 0 \quad (2.1)$$

$$(Hv)_t + \nabla \cdot (Hv \otimes v + \frac{g}{2} H^2 I_2) = gH \nabla d \quad (2.2)$$

式中,  $d(x,t)$  为随时间变化的海底地形,  $v(x,t)$  为沿水深积分平均的水平向流速矢量,  $g$  为重力加速度,  $H(x,t)$  为总水深。  $I_2$  是 2 阶单位矩阵, 海啸波高度或自由水面高度  $\eta(x,t)$  计算如下:

$$\eta(x,t) = H(x,t) - d(x,t)$$

式中， $d_s(x)$ 为静态地形， $u_z(x,t)$ 是动态的海床抬升，组成动态地形：

$$d(x,t) = d_s(x) + u_z(x,t)$$

$d_s$  数据一般来至地形数据集，海床变形的垂向分量  $u_z(x,t)$  根据海啸生成物理机制来计算，例如有限断层滑动的同震分析或海底滑动。

VOLNA 模型采用 active generation, consequent tsunami propagation, 模拟海啸比在海岸处壅高和下落 (run-up 和 run-down) 的过程, 这 3 个功能使得 VOLNA 模型可以模拟海啸的整个生命周期。

将控制方程写为守恒形式，然后讨论对流通量的特征系统：

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\omega) = S(\omega) \quad (2.3)$$

上式中的标记：

$$\omega(x,t): \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^3, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (H, Hu, Hv)$$

$$\mathcal{F}(\omega) = \begin{pmatrix} Hu & Hv \\ Hu^2 + \frac{g}{2} H^2 & Huv \\ Huv & Hv^2 + \frac{g}{2} H^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 & \omega_3 \\ \frac{\omega_2^2}{\omega_1} + \frac{g}{2} \omega_1^2 & \frac{\omega_2 \omega_3}{\omega_1} \\ \frac{\omega_2 \omega_3}{\omega_1} & \frac{\omega_3^2}{\omega_1} + \frac{g}{2} \omega_1^2 \end{pmatrix},$$

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ gH \frac{\partial h}{\partial x} \\ gH \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}$$

将通量  $\mathcal{F}(\omega)$  投影到法方向 ( $\vec{n} = (n_x, n_y)$ ) 上, 可以计算得到 Jacobian 矩阵  $A_n$ 。

用物理变量表示其为如下形式：

$$A_n = \frac{\partial(F(\omega) \cdot \vec{n})}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y \\ -uu_n + gHn_x & u_n + un_x & un_y \\ -vu_n + gHn_y & vn_x & u_n + vn_y \end{pmatrix}$$

其中， $u_n = un_x + vn_y$  是投影到法方向( $\vec{n} = (n_x, n_y)$ )上的法向流速。

Jacobian 矩阵  $A_n$  的 3 个特征值：

$$\lambda_1 = u_n - c, \quad \lambda_2 = u_n, \quad \lambda_3 = u_n + c \quad (2.4)$$

式中， $c = \sqrt{gH}$  为浅水重力波波速。(浅水--有限波长)，该变量的作用于可压缩流体力学中的音速的作用相同。

当  $H > 0$  时，方程组（式 2.1 和 2.2）是严格的双曲型方程。理解雅克比矩阵的特征值结构是建立数值通量计算方法的基础。

## VOLNA 模型数值离散方法

有限体积法，优点：鲁棒性，容易应用于非结构化网格，具有局部守恒特点。不考虑源项和边界条件时，FV 离散的质量、动量和总能量精确地守恒。

求解守恒形式的方程组，还需要初始条件：

$$\omega(\vec{x}, 0) = \omega_0(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x, y) \in \Omega \quad (3.1)$$

与合适的边界条件(3.7 节)。

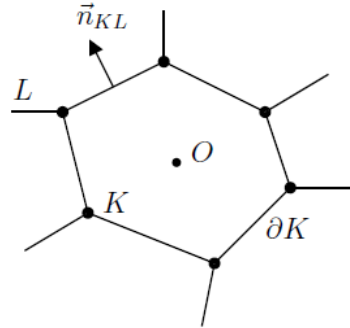


图 2 控制体  $K$ ，质心  $O$ ，单元  $K$  指向单元  $L$  的（边上的）法向  $\vec{n}_{KL}$

### 3.1 一阶通量格式

计算域  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ，三角化后，分割为一组互不重叠的控制体，覆盖整个计算区域。 $\mathcal{T}$  表示区域  $\Omega$  的离散网格，对于控制体  $K$ ，有：

$$\bigcup_{k \in \mathcal{T}} \vec{K} = \vec{\Omega}, \quad \vec{K} := K \cup \partial K$$

在  $\mathcal{T}$  中的两个控制体  $K$  和  $L$ ，相交处是带有法向量  $\vec{n}_{KL}$  或其他节点的一条边。

控制体  $K$  的相邻单元标记为：

$$\mathcal{N}(K) := \{L \in \mathcal{T} : \text{area}(K \cap L) \neq 0\}$$

FV 中控制体单元的网格布置是多样的。VOLNA 模型使用的是单元中心存储变量的方法（如图 3），这就意味着自由度与单元质心有关。

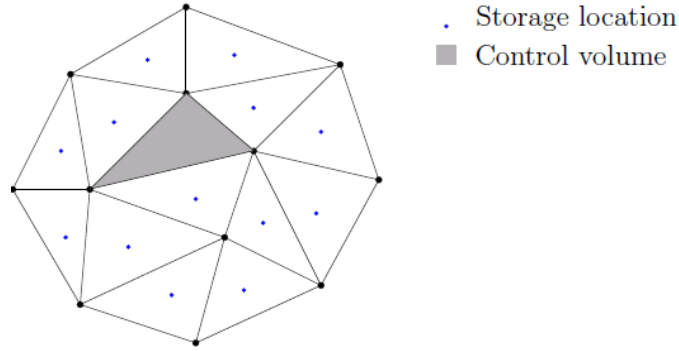


图 3 单元中心存储变量的有限体积

FV 第一步：在控制体  $K$  上对方程式(2.3)积分，对流通量应用 Gauss 定理，在每个控制体内，施加积分守恒定律，有：

$$\frac{d}{dt} \int_K \omega d\Omega + \int_{\partial K} \mathcal{F}(\omega) \cdot \vec{n}_{KL} d\sigma = \int_K \mathcal{S}(\omega) d\Omega \quad (3.2)$$

积分守恒定律的物理意义：控制体内某一变量（质量、动量、能量）的变化率， $\omega$  在控制体  $K$  内的分布由变量穿过边界  $\partial K$  的通量  $\mathcal{F}$  和该变量在控制体内的产生量  $\mathcal{S}$  来平衡。

FV 第二步：对每个控制体  $K \in \mathcal{T}$  作平均：

$$\omega_K(t) := \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K \omega(\vec{x}, t) d\Omega$$

平均计算后，FV 方法可理解为是：生成一个单元平均的演化方程组：

$$\frac{d}{dt} \int_K \omega(\vec{x}, t) d\Omega = \text{vol}(K) \frac{d\omega_K}{dt}$$

（Godunov(1959)是第一个应用以上思想离散气动力学方程的人。）

但是，上述的平均计算意味着每个控制体的分段常数数值解等于单元平均值，在控制体界面处存在多值的数值解，因此在这些界面处的通量计算值  $\int_{\partial K} (\mathcal{F}(\omega) \cdot \vec{n}_{KL})$  是有歧义的。FV 法对此的解决方法是：用数值通量函数替代界面处的真实通量值：

$$(\mathcal{F}(\omega) \cdot \vec{n})|_{\partial K \cap \partial L} \leftarrow \Phi(\omega_K, \omega_L; \vec{n}_{KL}) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$$

上式中， $\omega_k$  和  $\omega_L$  是两个界面状态变量的 Lipschitz 连续函数。

选择合适的数值通量函数  $\Phi$  是关键。一般来说，该函数是这些界面处的精确解或 Riemann 问题的近似局部解。可实施的数值通量有：HLL, HLLC（还有很多其他的数值通量格式）。最基础的 Roe 格式呢？

数值通量函数需要满足以下特性：

(1) 守恒性

$$\Phi(\omega_k, \omega_L; \vec{n}_{KL}) = -\Phi(\omega_L, \omega_k; \vec{n}_{LK})$$

(2) 一致性

$$\Phi(\omega, \omega; \vec{n}) = (\mathcal{F}(\omega) \cdot \vec{n})(\omega)$$

### 3.1.1 HLL 数值通量

Harten, Lax and van Leer 建议的近似 Riemann 解，称之为 HLL 格式。简化的 Riemann 扇区如图 4，由两组波分隔为三个恒定状态。

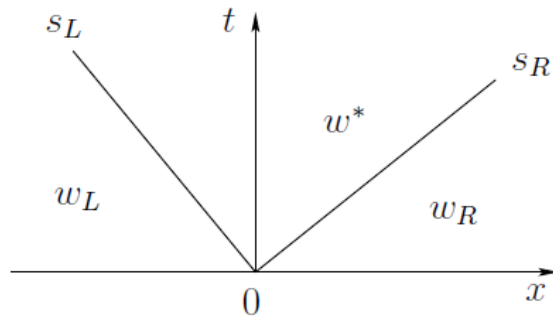


图 4 对应 HLL 格式的近似 Riemann 扇区

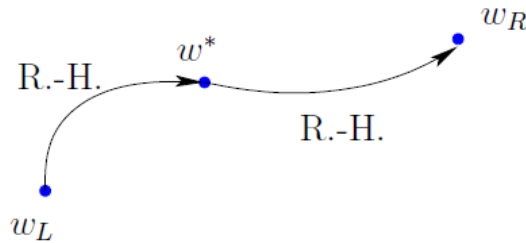


图 5 在相空间中由 Rankine-Hugoniot 曲线连接的两个状态变量  $\omega_L$  和  $\omega_R$

考虑如下 Riemann 问题：

$$\mathcal{R}(\omega_L, \omega_R) : \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial F(\omega)}{\partial x} = 0, \\ \omega(x, 0) = \begin{cases} \omega_L, & x < 0, \\ \omega_R, & x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (3.14)$$

近似 Riemann 扇区内的中间状态变量由  $\omega^*$  和两个激波  $s_L$ 、 $s_R$  表示（见图 4 和图 5）。为了计算得到未知的中间状态变量，将 Rankine-Hugoniot 条件改写为：

$$\begin{cases} S_L(\omega^* - \omega_L) = F^* - F_L, \\ S_R(\omega_R - \omega^*) = F_R - F^*, \end{cases}$$

其中， $F_{L,R} := F(\omega_{L,R})$ 。

可以直接计算出上面方程组的解为：

$$\begin{aligned} \omega^* &= \frac{s_R \omega_R - s_L \omega_L - (F_R - F_L)}{s_R - s_L}, \\ F^* &= F_L + s_L(\omega^* - \omega_L) = \frac{s_R F_L - s_L F_R + s_L s_R(\omega_R - \omega_L)}{s_R - s_L} \end{aligned} \quad (3.15)$$

现在，我们获得了定义 HLL 格式数值通量的所有变量：

$$\Phi_{HLL}(\omega_L, \omega_R) := \begin{cases} F_L, & s_L \geq 0, \\ F^*, & s_L < 0 \leq s_R, \\ F_R, & s_R < 0. \end{cases}$$

在推导 HLL 格式的过程中还缺少一部分：如何计算波速  $s_L$  和  $s_R$ ？这对 HLL 格式的计算精度影响很大，选择合适的波速  $s_L$  和  $s_R$  后，HLL 格式将具有很好的数值特性，即：满足熵不等式，精确计算孤立激波和保持水深正值 ( $h, h_u, h_v > 0$ )。基于 Jacobian 特征值解析解，VOLNA 模型选择如下波速：

$$s_L = \min(u_L - c_L, u^* - c^*), \quad s_R = \min(u^* + c^*, u_R + c_R)$$

式中， $C_{L,R} := \sqrt{gH_{L,R}}$  为左右状态区域的重力波速，其中：

$$u^* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + c_L - c_R, \quad c^* = \frac{1}{2}(c_L + c_R) - \frac{1}{4}(u_R - u_L)$$

如果数值格式能写为如下形式即可称该 FV 格式为通量格式：

$$\Phi = \frac{F(\omega_L) + F(\omega_R)}{2} - U(\omega_L, \omega_R) \frac{F(\omega_R) - F(\omega_L)}{2}$$

式中， $U(\omega_L, \omega_R)$  为某种形式的矩阵。

HLL 格式属于通量格式，且具有很好的健壮性。但 HLL 格式也有不足，即不能求解孤立的不连续接触问题，HLLC 格式可以解决这个问题。

### 3.1.2 HLLC 格式

HLLC 格式由 **Toro, Spruce and Speares**() 推荐，定义了如图 6 的 Riemann 扇区结构，在 HLL 格式中两个激波( $s_L$  和  $s_R$ )之间引入一个不连续接触波速  $s^*$ 。

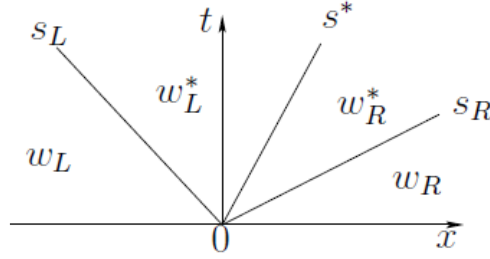


图 6 对应于 HLLC 格式定义的近似 Riemann 扇区

对于同样的 Riemann 问题(3.14)。HLLC 格式中，Riemann 问题的解由三种波速组成： $s_L$ 、 $s^*$  和  $s_R$ ，分隔为四个状态变量  $\omega_L, \omega_L^*, \omega_R^*$  和  $\omega_R$ 。波速  $s_L$  和  $s_R$  与 HLL 格式的一样，而波速  $s^*$  计算如下：

$$s^* = \frac{s_L H_R(u_R - s_R) - s_R H_L(u_L - s_L)}{H_R(u_R - s_R) - H_L(u_L - s_L)}$$

中间状态变量  $\omega_{L,R}^* = (H_{L,R}^*, (Hu)_{L,R}^*, (Hv)_{L,R}^*)$  计算如下：

$$H_{L,R}^* = \frac{s_{L,R} - u_{L,R}}{s_{L,R} - s^*} H_{L,R},$$

$$(Hu)_{L,R}^* = \frac{s_{L,R} - u_{L,R}}{s_{L,R} - s^*} (Hu)_{L,R} + \frac{g}{2} H_{L,R}^2 \frac{(2s_{L,R} - s^* - u_{L,R})(s^* - u_{L,R})}{(s_{L,R} - s^*)^3}$$

$$(Hv)_{L,R}^* = \frac{s_{L,R} - u_{L,R}}{s_{L,R} - s^*} (Hv)_{L,R} + \frac{g}{2} H_{L,R}^2 \frac{(2s_{L,R} - s^* - u_{L,R})(s^* - u_{L,R})}{(s_{L,R} - s^*)^3}$$

最终，HLLC 格式的数值通量表述为：

$$\Phi_{HCL}(\omega_L, \omega_R) := \begin{cases} F_L, & s_L \geq 0 \\ F_L^* := F_L + s_L(\omega_L^* - \omega_L), & s_L < 0 \leq s^*, \\ F_R^* := F_R + s_R(\omega_R^* - \omega_R), & s^* < 0 \leq s_R, \\ F_R, & s_R < 0 \end{cases}$$

### 3.2 半离散格式（时间离散）

引入单元平均值  $\omega_K$  和数值通量到式(3.2)，导出积分形式的守恒公式：

$$\frac{d\omega_K}{dt} = \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \frac{\text{area}(L \cap K)}{\text{vol}(K)} \Phi(\omega_K \omega_L; \vec{n}_{KL}) = \frac{1}{\text{VOL}(K)} \int_K \mathcal{S}(\omega) d\Omega$$

使用  $\mathcal{S}_K$  表示  $\frac{1}{\text{VOL}(K)} \int_K \mathcal{S}(\omega) d\Omega$  的近似值，源项离散见 3.4 节。由此，下面

生成的常微分方程称之为半离散 FV 法：

$$\frac{d\omega_K}{dt} + \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \frac{\text{area}(L \cap K)}{\text{vol}(K)} \Phi(\omega_K \omega_L; \vec{n}_{KL}) = \mathcal{S}_K, \forall K \in \mathcal{T} \quad (3.16)$$

上述 ODE 也需要离散，有很多隐式或显式时间积分方法。以  $\omega_K^n$  表示在时间  $t^n = n\Delta t$ ，控制体  $K$  内的近似单元平均解，最简单的时间积分方法是 Euler 前差格式：

$$\frac{d\omega_K}{dt} \cong \frac{\omega_K^{n+1} - \omega_K^n}{\Delta t}$$

应用 Euler 格式离散式(3.16)，产生全离散的 FV 格式：

$$\frac{\omega_K^{n+1} - \omega_K^n}{\Delta t} + \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \frac{\text{area}(L \cap K)}{\text{vol}(K)} \Phi(\omega_K^n \omega_L^n; \vec{n}_{KL}) = \mathcal{S}_K^n, \forall K \in \mathcal{T} \quad (3.17)$$

VOLNA 模型使用的时间项离散方法见 3.5 节介绍。

### 3.3 干湿地形处理

海岸以上， $H=0$ ，方程已不再是双曲型，求解淹没问题存在一定的理论困难。为此，有很有人为方法(ad-hoc artificial techniques)克服这一问题(run-up and run-down problems)，例如：slot technique，虚拟水深，坐标转换等。

岸线边界条件的简单解析形式为：

$$H(\vec{x}_s(t), t) = 0, \quad \frac{d\vec{x}_s}{dt} = \vec{u}(\vec{x}_s(t), t)$$

其中， $\vec{x}_s(t)$  是海岸线的位置。

VOLNA 模型采用 Brocchini et al.(2001)的算法，基于 Riemann 问题求解法(如图 7)：



$$\mathcal{R}_{left}(\omega_L): \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial F(\omega)}{\partial x} = 0, \\ \omega(x,0) = \begin{cases} \omega_L, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad \mathcal{R}_{right}(\omega_R): \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial F(\omega)}{\partial x} = 0, \\ \omega(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \omega_R, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

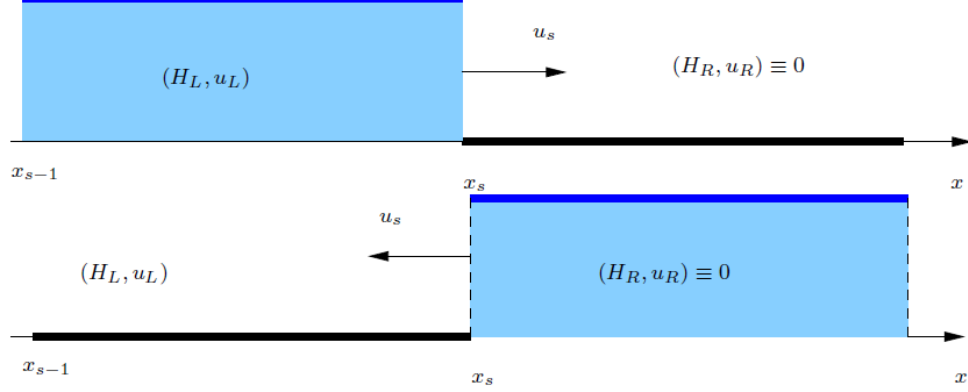


图 7 岸线左右状态变量表示的黎曼问题

其主要计算思想就是：将限制条件  $\omega_L \rightarrow 0$  或  $\omega_R \rightarrow 0$  传递到 Riemann 问题的解当中。计算方法：计算海岸线处的波速，判断干湿状态，然后将这些波速施加到近似 Riemann 解中。

还是考虑两个相邻控制体  $K$  和  $L$ ，现在必须找到穿过界面的数值通量  $\Phi(\omega_L, \omega_L, \vec{n}_{KL})$ 。考虑下面几种情况：

(1) Wet/Wet 界面：如果  $H_L > 0$ ， $H_R > 0$ ，将使用常用的近似 Riemann 解计算数值通量  $\Phi$ ；

(2) Dry/Dry 界面：如果  $H_L = H_R = 0$ ，因为两个干地形单元没有水流，因此为零通量  $\Phi = 0$ ；

(3) Wet/Dry 界面：如果  $H_L > 0$ ， $H_R = 0$ ，采用下式计算波速：

$$s_L := (\vec{u}_L \cdot \vec{n}_{KL}) - c_L, \quad s_R := (\vec{u}_L \cdot \vec{n}_{KL}) + 2c_L$$

然后，应用 HLL 和 HLLC 格式。

(4) Dry/Wet 界面：如果  $H_L = 0$ ， $H_R > 0$ ，采用下式计算波速：

$$s_L := (\vec{u}_R \cdot \vec{n}_{KL}) - 2c_R, \quad s_R := (\vec{u}_R \cdot \vec{n}_{KL}) + c_R$$

然后，应用 HLL 和 HLLC 格式。

### 3.4 源项离散

该部分讨论源项离散引起的问题，并提出解决方法。

水平动量守恒方程中的地形源项  $gH\nabla d$ ，当底部为平底时( $h=\text{const}$ )，该项为零；当地形坡度较大或地形突然变化时，该项的值很大。可见，很难构建数值格式精确地保证所有恒定解的守恒性。简化这个问题，提出"lake-at-rest"特性的简化恒定解：

$$\vec{u} = 0, \quad \eta := H - h = \text{const}. \quad (3.18)$$

以离散变量表示：

$$\vec{u}_K = \vec{u}_L = 0, \quad H_K - h_K = H_L - h_L = \text{const} \quad (3.19)$$

基于界面静水压力重构方法离散源项(Audusse et al., 2004; Audusse et al., 2005)。该平衡算法采用守恒变量矢量  $\{\omega_K\}_{K \in \tau}$ 、地形数据  $\{h_K\}_{K \in \tau}$  作为输入，计算步骤如下：

(1) 假设控制体  $K$  和  $L$  的相邻面  $k \cap L$ ，定义界面处地形为  $h_{K,L}^* := \min(h_K, h_L)$ ，该步仅在初始化阶段计算一次；

(2) 静水压力重构界面处的水深定义为：

$$H_{K,L}^* = (H_K - h_K + h_{K,L}^*)_+, \text{ 其中 } z_+ = \max(z, 0).$$

由平衡条件(3.18)的离散式(3.19)，定义一个新的界面守恒变量：

$$\omega_{K,L}^* := \begin{pmatrix} H_{K,L}^* \\ H_{K,L}^* \vec{u}_K \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

(3) 由静水压力平衡  $\nabla(\frac{g}{2}H^2) = gH\nabla h$ ，修改源项离散式为：

$$\mathcal{S}_K^*(\omega_K, \omega_{KL}^*, \vec{n}_{KL}) := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2}(H_{KL}^{*2} - H_K^2) \vec{n}_{KL} \end{pmatrix}$$

(4) 用新的界面值(3.20)代替单元中心值  $w_K$ ，得到平衡格式：

$$\frac{\omega_K^{n+1} - \omega_K^n}{\Delta t} + \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \frac{\text{area}(L \cap K)}{\text{vol}(K)} \Phi(\omega_{KL}^{*,n}, \omega_{LK}^{*,n}, \vec{n}_{KL}) = \mathcal{S}_K^*(\omega_K^n, \omega_{KL}^{*,n}, \vec{n}_{KL}), \forall K \in \mathcal{T}$$

静水压力重构可保证解的"lake-at-rest"特性，并保证解的正值特征(Audusse and Bristea, 2005)。以上是一阶算法，还可以扩展到二阶算法(Audusse et al., 2004)。

### 3.5 SSP 时间离散

采用 TVD 的时间离散格式，具有很好的稳定性 (SSP, Strong Stability-Preserving) (Shu, 1988)。

2 阶 RK(2,2)格式 (CFL=1)

$$\begin{aligned}\omega^{(1)} &= \omega^{(n)} + \Delta t \mathcal{L}(\omega^{(n)}), \\ \omega^{(n+1)} &= \frac{1}{2} \omega^{(n)} + \frac{1}{2} \omega^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t \mathcal{L}(\omega^{(1)}),\end{aligned}$$

3 阶 RK(3,3)格式 (CFL=1):

$$\begin{aligned}\omega^{(1)} &= \omega^{(n)} + \Delta t \mathcal{L}(\omega^{(n)}), \\ \omega^{(2)} &= \frac{3}{4} \omega^{(n)} + \frac{1}{4} \omega^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t \mathcal{L}(\omega^{(1)}), \\ \omega^{(n+1)} &= \frac{1}{3} \omega^{(n)} + \frac{2}{3} \omega^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t \mathcal{L}(\omega^{(2)}),\end{aligned}$$

3 阶 RK(3,4)格式 (CFL=2):

$$\begin{aligned}\omega^{(1)} &= \omega^{(n)} + \frac{1}{2} \Delta t \mathcal{L}(\omega^{(n)}), \\ \omega^{(2)} &= \omega^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t \mathcal{L}(\omega^{(1)}), \\ \omega^{(3)} &= \frac{2}{3} \omega^{(n)} + \frac{1}{3} \omega^{(2)} + \frac{1}{6} \Delta t \mathcal{L}(\omega^{(n)}), \\ \omega^{(n+1)} &= \omega^{(3)} + \frac{1}{2} \Delta t \mathcal{L}(\omega^{(3)}).\end{aligned}$$

VOLNA 模型采用 SSP-RK(3,4)，因为其精度和广泛的稳定区域，该格式是精度与鲁棒性之间的最佳权衡。

### 3.6 二阶重构

一阶格式的计算精度太低，除非加密网格，但会造成数值求解效率很低。因此，van Leer 提出二阶重构或 MUSCL (Monotone Upstream-centered Scheme for Conservation Laws)格式。“不是 van Leer (1979)第一次提出梯度重构和坡度限制

的思想，而是 Kolgan (1972)”

### 3.6.1 MUSCL 重构

在 1D 空间上重构 TVD 格式不存在问题，但 TVD 格式在 2 维空间仅有一阶精度，因此需要基于非结构网格构建二阶非线性格式。方法是：在每个网格单元上求解分段仿射函数。控制体上实施的线性重构算子要求单元平均计算值也是单元中心处线性重构计算得到的阶段数值。因此，重构计算公式如下：

$$\omega_K(\vec{x}) = \vec{\omega}_K + (\nabla \omega)_K \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0), \quad K \in \mathcal{T} \quad (3.26)$$

式中， $\vec{\omega}_K$  是 FV 法计算的单元平均值， $(\nabla \omega)_K$  是单元  $K$  上数值解的梯度估计值（待求解）； $\vec{x} \in K$  和点  $\vec{x}_0$  是网格单元中心。

由于采用点  $\vec{x}_0$  和式(3.26)的表述方法，仍然保证精确的守恒性，这是 FV 法的核心之处。

$$\frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K \omega_K(\vec{x}) d\Omega \equiv \vec{\omega}_K$$

下面介绍两种重构技术（每个单元上变量梯度计算）：Green-Gauss 积分法和最小二乘法。VOLNA 不使用隐式梯度重构法，计算量太大。

### 3.6.2 Green-Gauss 梯度重构

$$(\nabla \omega)_K \cong \sum_{e \in \partial K} \frac{\text{area}(e)}{\text{vol}(K)} \frac{(\omega_{N1} + \omega_{N2})}{2} \otimes \vec{n}_e$$

就是两点平均。

### 3.6.3 最小二乘法梯度重构

就是反距离插值。

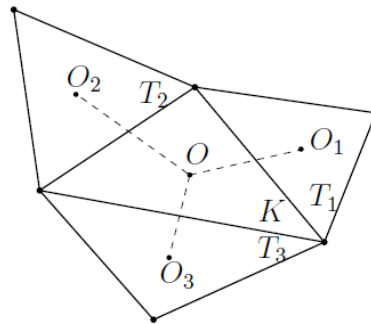


图 10 最小二乘重构法示意图

因为 VOLNA 模型使用三角形网格，三角形单元的边界  $\partial\Omega$ （如图 12），梯

度重构将简化。VOLNA 模型的二阶重构：

$$(\nabla \omega)_K = \frac{\begin{pmatrix} (y_2 - y_0)(\omega_1 - \omega_0) - (y_1 - y_0)(\omega_2 - \omega_0) \\ (x_1 - x_0)(\omega_2 - \omega_0) - (x_2 - x_0)(\omega_1 - \omega_0) \end{pmatrix}}{(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)}$$

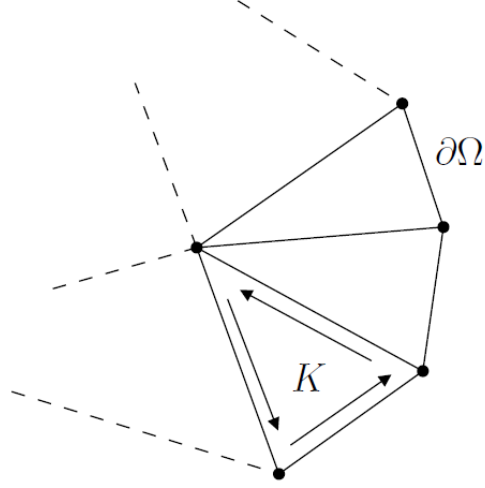


图 12 控制体单元的边界  $\partial\Omega$

### 3.6.4 坡度限制函数

思想是：使用限制函数，获得不连续处和较大梯度处的非振荡解(BB73)。当限制函数值为 1 时，为线性插值的无限制形式。1D 情况下，常见的限制函数有 15 种：CHARM, minmod, superbee, van Albada 等。无结构网格时情况不同，VOLNA 模型使用 **Barth-Jespersen 坡度限制器**：

$$\omega_K^{\min} := \min_{L \in \mathcal{N}(K)} \omega_L, \quad \omega_K^{\max} := \max_{L \in \mathcal{N}(K)} \omega_L$$

式(3.26)的限制形式采用下面的修改的重构算子：

$$\omega_K(\vec{x}) = \bar{\omega}_K + \alpha_K (\nabla \omega)_K \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0), \quad K \in \mathcal{T}$$

其中，假设  $\alpha_K \in [0,1]$ ， $\alpha_K = 0$  相当于一阶格式，而  $\alpha_K = 1$  为无限制形式。

Barth and Jespersen (1989)建议采用下面的  $\alpha_K$  值：

$$\alpha_K^{BJ} := \min_{\forall f \in \partial K} \begin{cases} \frac{\omega_K^{\max} - \bar{\omega}_K}{\omega_K(\vec{x}f) - \bar{\omega}_K} & \text{if } \omega_K(\vec{x}f) > \omega_K^{\max} \\ \frac{\omega_K^{\min} - \bar{\omega}_K}{\omega_K(\vec{x}f) - \bar{\omega}_K} & \text{if } \omega_K(\vec{x}f) < \omega_K^{\min} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

式中， $\bar{x}_f$  代表面  $f$  的重心。

尽管上面的限制函数不完全满足非结构网格上 FV 法的最大值准则(BO04)，但是可使 FV 格式具有全局极值消除特性。另外，该限制器可尽可能降低坡度减小量，这对计算精度有利。实际应用中，还需要进行微小修正以防止近似恒定解时分母除以零的情况发生。

### 3.6.5 数值解插值到网格节点上

上述的几种梯度重构过程（特别是单元上的梯度估算），需要知道网格节点上的数值解。由于 VOLNA 模型采用 FV 单元中心存储变量的形式，需要插值到节点。

### 3.7 施加边界条件

在物理边界( $\partial\Omega$ )上实施  $w$  或  $F(w) \cdot \vec{n}$  通量，造成 ill-posed problem

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{A}_n \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$$

$\underline{n}$  为外法向方向。

#### (1) 无穿透边界条件（固体边界）

$$\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{x} \in \partial\Omega$$

通量  $\Phi$  施加于物理边界上的形式：

$$\Phi = (\mathcal{F} \cdot \vec{n})|_{\partial\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} H^2 n_x \\ \frac{g}{2} H^2 n_y \end{pmatrix} \quad (1)$$

现在，需要确定边界上的  $\frac{g}{2} H^2$ ，为此，可使用数值边界条件：

$$\left. \frac{g}{2} H^2 \right|_{\partial\Omega} = \left. (c H u_n + \frac{g}{2} H^2) \right|_K$$

#### (2) 开边界条件

1) 开边界为亚临界流，即：  $|\vec{u} \cdot \vec{n}| \leq c$

$$H|_{\partial\Omega} = H_0(\vec{x}_s, t) > 0, \quad \vec{x}_s \in \partial\Omega$$

考虑这种边界信息，需要确定的边界通量  $\Phi$  有如下形式：

$$\Phi = (\mathcal{F} \cdot \vec{n})|_{\partial\Omega} = \begin{pmatrix} H_0 u_n \\ H_0 u u_n + \frac{g}{2} H_0^2 n_x \\ H_0 v u_n + \frac{g}{2} H_0^2 n_y \end{pmatrix} \quad (2)$$

为此，得获得边界上的  $u$  和  $v$ 。法向流速可由下式计算：

$$\underline{u}_n := u n_x + v n_y$$

2) 超临界流，需要考虑 3 个特征值：

$$\lambda_1 = u_n - c, \quad \lambda_3 = u_n + c, \quad \lambda_2 = u_n$$

为此，还要考虑 2 种情况：  $u_n < 0$  和  $u_n \geq 0$

第 1 种情况：需要补充一个物理边界条件--边界的切向流速；

第 2 种情况：需要补充一个数值边界条件。

两种情况都有相同的 BC 形式：  $u_\tau|_{\partial\Omega} = u_\tau|_K$ ，其中

$u_\tau := u n_y - v n_x$  是切向流速。

$$u_n|_{\partial\Omega} = \frac{H c u_n + \frac{g}{2} (H^2 - H_0^2)}{H_0 c}, \quad u|_{\partial\Omega} = u_n|_{\partial\Omega} n_x + u_\tau n_y, \quad v|_{\partial\Omega} = u_n|_{\partial\Omega} n_y - u_\tau n_x$$

将上式代入式 (2)，可计算得到边界通量  $\Phi$ 。

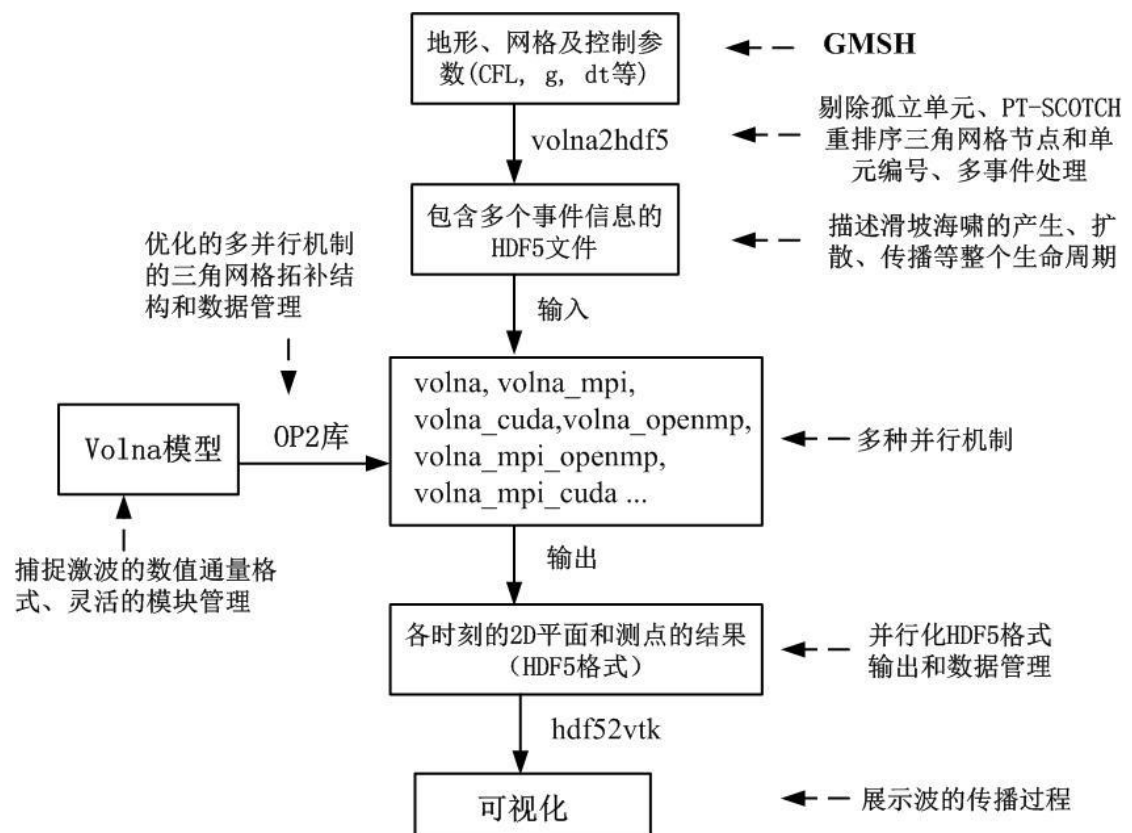
## 参考文献

E. Audusse and M.-O. Bristeau. A well-balanced positivity preserving "second-order" scheme for shallow water flows on unstructured meshes. J. Comput. Phys, 206:311–333, 2005. [16](#), [17](#)

E. Audusse, F. Bouchut, O.M. Bristeau, R. Klein, and B. Perthame. A fast and stable wellbalanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. SIAM J. of Sc.Comp., 25:2050–2065, 2004. [3](#), [16](#)

K. Anastasiou and C. T. Chan. Solution of the 2D shallow water equations using the finite volumemethod on unstructured triangular meshes. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 24:1225-1245, 1999. 3

## volna 模型的结构



## volna 模型的验证

2 个验证例子：（1）catalia (2004)海啸；（2）landslide 引起的海啸