

# DGSWE 模型原理(Clint Dawson et al., 2010)

## 1 前言

用于风暴潮模拟。DGSWE 模型采用 DG 法，基于 Runge-Kutta Local DG (RK\_LDG)法(Cockburn and Shu, 1998; Cockburn and Dawson, 2000)。此类方法用于在非结构有限单元网格上，模拟对流占优的对流扩散方程。该方法中，使用“局部” DG 格式近似扩散项，联合标准的 DG 离散对流项和源项。RKLDG 法可以使用网格自适应技术，包括  $h$  自适应（调整网格密度）和  $p$  自适应（调整多项式阶数），捕捉多尺度空间时间。在 RK-LDG 法中开发质量守恒的干湿变化算法。

下面首先介绍球坐标系统中的 DG 公式，再介绍模型精度模拟复杂近海岸环境中的风暴潮过程的算法，包括稳定性后处理算法的改进以及模拟计算域内部“围堰”类型障碍物用于捕捉河堤或其他建筑物的水流漫顶。计算结果与连续 Galerkin (CG)法的 Advanced Circulation (ADCIRC)模型的风暴潮模拟结果作对比。

## 2 球坐标下的 DG 公式

在球坐标上求解浅水方程。假设地球半径远大于海洋水深，采用静水压力假设和 Boussinesq 假设，在水深  $H$  上平均，得到球坐标  $(\lambda, \phi)$  下的 2D 控制方程：

连续方程：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \phi} \left( \frac{\partial(UH)}{\partial \lambda} + \frac{\partial(VH \cos \phi)}{\partial \phi} \right) = 0 \quad (1)$$

水平动量方程：

$$\frac{dU}{dt} = fV - \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial [g(\zeta - \alpha \eta) + p_s / \rho_0]}{\partial \lambda} + \frac{\tau_{s\lambda}}{\rho_0 H} - \tau_{bf} U + m_\lambda \quad (2)$$

$$\frac{dV}{dt} = -fU - \frac{1}{R} \frac{\partial [g(\zeta - \alpha \eta) + p_s / \rho_0]}{\partial \phi} + \frac{\tau_{s\phi}}{\rho_0 H} - \tau_{bf} V + m_\phi \quad (3)$$

式中， $t$  为时间； $\lambda, \phi$  分别为经度和纬度； $\zeta$  为相对大地水准面的河床高程； $U, V$  分别为水深平均后的水平流速分量； $R$  为地球的平均半径（ $6.3782064 \times 10^6 \text{ m}$ ）； $H = \zeta + h$  为水深； $h$  为相对大地水准面的水下地形深度； $g$  为重力加速度； $f$  为 Coriolis 系数； $p_s$  为水面处的大气压强； $\eta$  为牛顿平衡的潮汐势； $\alpha$  为有效地球

弹性系数； $\rho_0$  为水的参考密度； $\tau_{s\lambda}, \tau_{s\phi}$  为水面切应力； $\tau_{bf} = C_f \left[ (U^2 + V^2)^{1/2} / H \right]$

为河床阻力； $C_f$  为非线性的底部阻力系数； $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{U}{R \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{V}{R} \frac{\partial}{\partial \phi}$ ；

$m_\lambda, m_\phi = \frac{v_T}{H} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial UH}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial UH}{\partial \phi} \right) \right], \frac{v_T}{H} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial VH}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial VH}{\partial \phi} \right) \right]$ ； $v_T$  为水深平均的水平涡粘性系数。

在用户定义的中心 $(\lambda_0, \phi_0)$ ，使用标准的正交圆柱投影，定义：

$$x = R(\lambda - \lambda_0) \cos \phi_0 \quad (4)$$

$$y = R\phi \quad (5)$$

使用链式法则，有：

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = R \cos \phi_0 \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = R \frac{\partial}{\partial y}$$

用笛卡尔坐标 $(x, y)$ 的导数代替球坐标中的导数，得到转换的球坐标方程组：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + S_p \frac{\partial(UH)}{\partial x} + \frac{\partial(VH)}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{dU}{dt} = fV - S_p \frac{\partial[g(\zeta - \alpha\eta) + p_s / \rho_0]}{\partial x} + \frac{\tau_{s\lambda}}{\rho_0 H} - \tau_{bf} U + m_x \quad (7)$$

$$\frac{dV}{dt} = -fU - \frac{\partial[g(\zeta - \alpha\eta) + p_s / \rho_0]}{\partial y} + \frac{\tau_{s\phi}}{\rho_0 H} - \tau_{bf} V + m_y \quad (8)$$

其中， $S_p = \frac{\cos \phi_0}{\cos \phi}$  为球坐标修正系数，全导数变为：

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + S_p \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

$$m_x, m_y = \frac{v_T}{H} \left[ S_p \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial UH}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial UH}{\partial y} \right) \right], \frac{v_T}{H} \left[ S_p \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial VH}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial VH}{\partial y} \right) \right]$$

最终，注意到用 $H$ 乘以式(7)和式(8)，使用连续性方程式(6)，整理重力项，整个方程组可写为散度形式：

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{A} - D \nabla \mathbf{c}) = \mathbf{h}(\mathbf{c}) \quad (9)$$

式中,

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \zeta \\ UH \\ VH \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} S_p UH & VH \\ S_p [U^2 H + g(\zeta^2/2 + \zeta h)] & UVH \\ S_p UVH & V^2 H + g(\zeta^2/2 + \zeta h) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nu_T I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nu_T I \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau_{bf} UH + fVH + gS_p \zeta \frac{\partial h}{\partial x} + H \frac{\partial [g\alpha\eta - p_s / \rho_0]}{\partial x} + \frac{\tau_{s\lambda}}{\rho_0} \\ -\tau_{bf} VH - fUH + g\zeta \frac{\partial h}{\partial y} + H \frac{\partial [g\alpha\eta - p_s / \rho_0]}{\partial y} + \frac{\tau_{sb}}{\rho_0} \end{pmatrix}$$

矩阵  $D$  有块状结构, 其中  $\mathbf{0}$  为  $2 \times 2$  的零矩阵,  $I$  为  $2 \times 2$  的单位矩阵。

注意到式 (9) 的最终形式是标准笛卡尔坐标系下的浅水方程, 仅有因子  $S_p$  出现在  $x$  方向导数的前面。该因子与纬度  $\phi$  有关, 因此是  $y$  坐标的函数, 不是常数值, 后文讨论对 DG 法的影响。现在在  $(x, y)$  空间域  $\Omega$  上在适当的边界和初始条件下, 求解这些方程组。目前仅需要 2 种边界条件: **开边界和陆地边界**。

(1) 开边界

$$\zeta = \zeta_{\text{tidal}}$$

$$\nu_T \nabla(UH) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\nu_T \nabla(VH) \cdot \mathbf{n} = 0$$

(2) 陆地边界

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$$

其中,  $\zeta_{tidal}$  是定义的 (潮汐) 水位,  $\mathbf{n}$  为  $\Omega$  的边界上的外法向单位向量。

方程组 (9) 的 RKLDG 法简要介绍如下 (Aizinger and Dawson, 2002; Kubatko et al., 2006):

在描述方程组 (9) 的空间离散之前, 定义一些标记。在任意空间域  $R$  上, 令  $(\cdot, \cdot)_R$  表示  $L^2(R)$  内积。为区分在域  $R \in \mathbb{R}^{d-1}$  (如面或线) 上的积分, 将使用标记  $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ 。令  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  表示  $\Omega$  的一族有限单元, 没有单元  $\Omega_e$  穿过  $\Omega$  的边界, 其中  $h$  是最大单元的直径。令:

$$W_{h,e} = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \text{ 的各分量是 } \leq k_e \text{ 阶的多项式 在 } \Omega_e \in \mathcal{T}_h\}$$

这里不定义在  $\mathbf{v}$  上的分量的数目, 下面分量数目可能会根据近似的变量而变化。注意阶  $k_e$  会在单元间变化。令  $\mathbf{n}_e$  代表向  $\partial\Omega_e$  的外法向单位向量。则对于  $\mathbf{x} \in \partial\Omega_e$ , 定义:

$$\mathbf{v}^{int}(\mathbf{x}) = \lim_{s \rightarrow 0^-} \mathbf{v}(\mathbf{x} + s\mathbf{n}_e)$$

$$\mathbf{v}^{ext}(\mathbf{x}) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \mathbf{v}(\mathbf{x} + s\mathbf{n}_e)$$

此处,  $\mathbf{v}^{int}$  是从  $\Omega_e$  的内部得到的值;  $\mathbf{v}^{ext}$  是从  $\Omega_e$  的外部得到的值。

还定义:

$$\bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}^{int} + \mathbf{v}^{ext}) / 2 \quad (14)$$

LDG 法是基于如下的式 (9) 的混合形式。定义:

$$\tilde{\mathbf{z}} = -\nabla \mathbf{c} \quad (15)$$

$$\mathbf{z} = D\tilde{\mathbf{z}} \quad (16)$$

那么, 将  $\mathbf{z}$  代入式 (9), 乘以一个足够光滑的试函数  $\mathbf{w}$ , 并在单元  $\Omega_e$  上做积分, 得到:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t}, \mathbf{w} \right)_{\Omega_e} - (\mathbf{A} + \mathbf{z}, \nabla \cdot \mathbf{w})_{\Omega_e} + \left\langle (\mathbf{A} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{n}_e, \mathbf{w}^{int} \right\rangle_{\partial\Omega_e} = (\mathbf{h}(\mathbf{c}), \mathbf{w})_{\Omega_e} \quad (17)$$

用一个适当的试函数  $\tilde{\mathbf{v}}$  乘以式 (15), 做积分, 得到:

$$(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{v})_{\Omega_e} - (\mathbf{c}, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega_e} + \left\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}^{int} \cdot \mathbf{n}_e \right\rangle_{\partial\Omega_e} = 0 \quad (18)$$

用一个试函数  $\mathbf{v}$  乘以式 (16)，做积分，得到：

$$(\mathbf{z}, \mathbf{v})_{\Omega_e} - (D\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{v})_{\Omega_e} = 0 \quad (19)$$

在  $W_{h,e}$  上用函数  $\mathbf{C}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}$  近似  $\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}$ 。在  $\partial\Omega_e$  上用数值通量  $\mathbf{A}(\mathbf{C}^{int}, \mathbf{C}^{ext}; \mathbf{n}_e)$  近似  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_e$ 。所以其他的边界项都用平均计算近似。因此，DG 法计算如下：

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t}, \mathbf{w} \right)_{\Omega_e} - (\mathbf{A}(\mathbf{C}) + \mathbf{Z}, \nabla \cdot \mathbf{w})_{\Omega_e} \\ & + \left\langle \mathbf{A}(\mathbf{C}^{int}, \mathbf{C}^{ext}; \mathbf{n}_e) + \bar{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{n}_e, \mathbf{w}^{int} \right\rangle_{\partial\Omega_e} \\ & = (\mathbf{h}(\mathbf{C}), \mathbf{w})_{\Omega_e}, \quad \mathbf{w} \in W_{h,e} \end{aligned} \quad (20)$$

$$(\mathbf{Z}, \mathbf{v})_{\Omega_e} - (\mathbf{C}, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega_e} + \left\langle \bar{\mathbf{C}}, \mathbf{v}^{int} \cdot \mathbf{n}_e \right\rangle_{\partial\Omega_e} = 0, \quad \mathbf{v} \in W_{h,e} \quad (21)$$

$$(\mathbf{Z}, \mathbf{v})_{\Omega_e} - (D\mathbf{Z}, \mathbf{v})_{\Omega_e} = 0, \quad \mathbf{v} \in W_{h,e} \quad (22)$$

注：

(1) 数值通量  $\mathbf{A}$  可以是任意一致性的，局部 Lipschitz 连续的、守恒性的熵通量。这里使用 Local Lax-Friedrichs(LLF)通量，计算如下：

$$\mathbf{A}(C^-, C^+; \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{A}(C^-) \mathbf{n} + \mathbf{A}(C^+) \mathbf{n} + |\Lambda| (C^- - C^+) \right] \quad (23)$$

式中， $\Lambda$  为在  $C^-$  和  $C^+$  区间内通量  $\mathbf{A}$  的雅克比矩阵的最大特征值； $\mathbf{n}$  为边的法向方向，指向为从“负”到“正”。

(2) 式 (20) ~ 式 (22) 表示 ODE 系统。这些 ODE 系统在时间上使用显格式 Runge-Kutta 法做积分。

(3) 在三角网格单元上实施 DG 法。使用正交(Dubiner)基函数(Kubatko et al., 2006)。仅重点研究分段线性  $k_e=1$  的近似。实施了稳定性后处理和坡度限制，此时阶  $k_e$  在 0~1 间动态变化，与坡度限制器的行为有关。

(4) 在模拟期间，单元  $\Omega_e$  可以是湿单元(在整个  $\Omega_e$  上  $H>0$ )，干单元( $H=0$ )，部分湿单元( $H \geq 0$ )。处理干湿地形的算法细节参考(Bunya et al., 2009)。

(5) 单元的边界可以是内部障碍物的部分，例如河堤，公路和铁路等。内部障碍物可以作为干单元排除在外，在风暴潮期间可以漫顶。使用特殊公式处理通过这些边界的通量。

## 2.1 水流静态解(lake at rest)

DG 法或其他方法求解守恒形式的浅水方程时的一个问题就是，是否算法可以保证水流静止。也就是，如果没有驱动力项，初始化  $U=V=0$  以及  $\zeta$  恒定不变，则所有时间  $\zeta$  都将保持恒定不变， $U$  和  $V$  仍然为 0。如果地形  $h$  不连续，该问题变得很重要，可参考文献(Rhebergen et al., 2008)介绍 DG 法处理该问题的方法。

在各三角单元的顶点处给出地形，由分段线性插值得到连续函数。因此， $\nabla h$  在各单元上是恒定不变的。

首先注意到，如果  $\mathbf{C}$  是恒定不变的，则由式 (21) 和 (22) 知  $\mathbf{Z}$  和  $\mathbf{Z}$  为 0。在没有驱动力的情况下，如果满足下列条件，则格式是通量平衡的：

$$-(\mathbf{A}(\mathbf{C}), \nabla \cdot \mathbf{w})_{\Omega_e} + \left\langle \mathbf{A}(\mathbf{C}^{int}, \mathbf{C}^{2,xt}; \mathbf{n}_e), \mathbf{w}^{int} \right\rangle_{\partial\Omega_e} = (\mathbf{h}(\mathbf{C}), \mathbf{w})_{\Omega_e}, \quad \mathbf{w} \in W_{h,e}$$

式中， $\mathbf{h}$  仅包含重力项：

$$\mathbf{h} = \left( 0, g S_p \zeta \frac{\partial h}{\partial x}, g \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

可见：在标准的笛卡尔坐标系下（当  $S_p \equiv 1$ ），格式是通量平衡的，因为  $\mathbf{h}$  是连续且分段线性的。对于球坐标系，必须考虑到  $S_p$  是空间变化的，即  $S_p = S_p(y)$ 。因此，关注  $x$  方向动量方程，注意到  $U=V=0$ ，要求：

$$\begin{aligned} & -(S_p (\zeta^2 / 2 + \zeta h), \frac{\partial w}{\partial x})_{\Omega_e} + \left\langle (\zeta^2 / 2 + \zeta h) S_p n_x, w^{int} \right\rangle_{\partial\Omega_e} \\ & = \langle S_p \zeta \frac{\partial h}{\partial x}, w \rangle_{\Omega_e} \end{aligned} \quad (24)$$

式中， $\zeta$  假设为各处不变。

单元和边的计算都涉及因子  $S_p$ ， $S_p = \cos(\phi_0) / \cos(\phi) = \cos(\phi_0) / \cos(y / R)$ 。可以使用该  $S_p$  的解析形式，但为了保持流速为 0，就必须在各单元和边上，精确地做所有涉及  $S_p$  的项的积分。相反地，如下近似计算  $S_p$ 。

在各条边上，假设  $S_p \approx \hat{S}_p$ ，通过在边的中点处计算  $S_p$  得到。并且，在各单元上计算  $S_p$  的近似值，与  $\hat{S}_p$  一致。此时，当  $k_e=0$ ，在各单元上  $S_p$  近似为常数值，

因此：

$$\left( S_p, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{\Omega_e} = \left\langle \hat{S}_p n_x, 1/2 + \psi \right\rangle_{\partial \Omega_e} \quad (25)$$

其中，

$$\psi = \begin{cases} h, & \text{if } \frac{\partial h}{\partial x} \neq 0 \quad \text{on } \Omega_e \\ x, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (26)$$

当  $w=1$  和  $\zeta=1$  时，上式与式 (24) 一致。当  $k_e=1$ ，近似  $S_p \approx S_{p,e}$ ，此时是在线性的 **Dubiner 基函数** 上，在单元  $\Omega_e$  上是线性的  $w$ ，施加一类散度定理：

$$\begin{aligned} & \left( S_{p,e} (1/2 + \psi), \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{\Omega_e} + \left( S_{p,e} \frac{\partial \psi}{\partial x}, w \right)_{\Omega_e} \\ &= \left\langle \hat{S}_p (1/2 + \psi) n_x, w \right\rangle_{\partial \Omega_e} \end{aligned} \quad (27)$$

### 3 对线性近似的坡度限制

当  $k_e=1$  的情况下，通常需要实施限制器或稳定性后处理算法，防止数值解产生振荡甚至崩溃。文献中已推荐了很多种限制器，本文测试了 3 种特别适合于三角单元的限制器。第 1 种限制器是基于重构格式(Durlofsky et al., 1992)，第 2 种限制器是(Cockburn and Shu, 1989)，这 2 种限制器都是“基于边”的，即在某单元上，计算该单元平均的线性插值，与之相邻的共享一条边的各单元，一次取 2 个 (**单元做插值**)。因此，如果单元有 3 个相邻单元，则计算 3 次线性插值，将这些插值结果与 DG 近似作比较。第 1 种限制器中，选择最小梯度插值作为后处理。第 2 种限制器更复杂，涉及特征变量的限制，但与共享边的相邻单元涉及的计算方法相同。这些限制器的表现各不相同，适用情况也有差别。另一种限制器是基于文献(Bell et al., 1988)。该限制器是“基于节点”的。该算法中，在各三角单元的节点处计算线性 DG 解。基本思想是找到 DG 解的最临近线性函数，在节点处满足某种不等式约束条件。令  $\Omega_e$  为一个单元， $w$  为定义在各单元上的分段线性函数。在  $\Omega_e$  的一个节点  $j$  处，坐标为  $(x_j, y_j)$ ，令  $w_j^-, w_j^+$  表示在所有共享节点  $j$  的单元上  $w$  的最大和最小单元平均值，即：

$$w_j^- = \min_{\Omega_l \in K_j} w(x_l, y_l)$$

式中， $K_j$  为共享节点  $j$  的所有单元集合； $(x_j, y_j)$  为单元  $\Omega_j$  的质心。

用最大值代替最小值，对  $w_j^+$  的定义依然成立。检查是否满足以下条件：

$$w_j^- \leq w_e(x_j, y_j) \leq w_j^+ \quad (28)$$

式中， $w_e$  表示在  $\Omega_e$  上计算的  $w$  值。

如果违反了式 (28) 的条件，则使用简单的经验公式调整节点值。如果在某特殊节点上违反了约束条件，则调整节点值，只要满足不等式约束条件即可，但是还要保持在  $\Omega_e$  上的单元平均值不变。下一步就是在其他节点上分配过剩（或缺）的节点值。方法就是将过剩（或缺）值平均分配到其他各节点，使其不会违反不等式约束条件。注意到，通过将  $\Omega_e$  的坡度设置为 0，总能满足约束条件 (28)，因此当平均分配节点值的方法失败时，该方法将成为默认计算方法。

#### 4 模拟内边界

计算域内的某些特征建筑物，如堤坝、围堰和抬升的公路等，都作为亚格子尺度的内部障碍物边界处理。特别地，单元的边与这些特征建筑物平行，具有固定的厚度，它们对水流的影响通过在边界积分项中的数值通量项计算来考虑。为描述该过程，考虑内部边界的计算如图 1，表示模拟区域内的一个堤坝。首先，内部障碍物分段(segments)是相互之间交接的“成对的边”来表征的，一面任意标记为“前端”，另一面标记为“后端”。如第 2 节所述，数值通量是利用变量  $w$  的内部(int)和外部(ext)的值来计算的。变量在障碍物分段的外部值是指定的，基于相对障碍物高度的水位值，施加 4 种类型水流条件中的 1 种：

case-1：自由水面在障碍物部分的前端和后端面都低于障碍物高度。此时，内部障碍物简单地作为固体墙面或非法向水流边界处理，即：指定在两面的外部变量，施加  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ 。

case-2：在障碍物分段两面的自由水位都高于障碍物高度，并且（障碍物）有相同高度（在定义的误差范围内）。如 case-1，障碍物分段的两边上的外部变量都要指定，满足条件  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ 。

case-3：障碍物前端的自由水位高于障碍物的高度和后端的自由水面高度。



此时，发生障碍物漫顶流动，水流从障碍物分段前端流向后端。此时的流动分为 2 种小类：亚临界流和超临界流。漫过障碍物的流率  $q_{\text{weir}}$  使用标准的堰流公式计算。相应地就设置了障碍物分段的前端和后端的外部  $q$  值，因此数值通量为  $\hat{q} = q_{\text{weir}}$ 。

case-4: 与 case-3 类似，但是从障碍物后端向前端发生漫顶流动。同样使用标准堰流公式计算漫顶流率，这样设置外部  $w$  值，因此  $\hat{q} = q_{\text{weir}}$ 。

## 5 数值计算结果

与 ADCIRC 模型的结果做对比：

(1) 经过对比分析，证明限制器 3 提供了精度和稳定性最好的计算表现。

(2) 狭窄渠道末端的港口内的 DG 法与 CG 法的模拟结果存在差异，原因初步分析是 DG 法是基于单元和边的离散，而 ADCIRC 模型是基于节点的离散。因此，这里的网格并不适合 DG 模型，渠道断面至少应包含 1 个三角单元。

基于节点的 DG 法呢？(Nodal-based DG method?)

## 6 结论

风暴潮模拟的内在复杂性：极端风驱动力、高度变化的地形、具有内部障碍物的近海岸复杂环境、入口和狭窄渠道、高度非线性的底部摩阻和干湿地形变化等。

ADCIRC 模型的缺陷是其严格限制为协调网格上的线性多项式，处理对流 (advection) 时有困难（实际计算中关闭了对流项）（这里的 advection 是指对流 convection+扩散 diffusion），需要调整统一波动连续方程中的  $\tau_0$  参数。ADCIRC 模型也不满足局部质量守恒，尽管这对于风暴潮模拟并非是关键问题。

使用 DG 法模拟风暴潮时，在最末端的狭窄渠道处，壅水高度还是过于衰减，因此还要研究开发具备精度和稳定性地模拟复杂环境的 DG 法，例如使用动态的  $p$  和  $h$  自适应网格、基于混合四边形和三角形的混合网格。本文建立的计算网格更适用于连续的、基于节点的有限单元模型，而 DG 模型是基于单元和边的模型。DG 法对不同网格的敏感性是将来需要探讨的。

DG 模型的计算量比 CG 模型的要大。基于相同有限单元网格、相同计算时

间步长和相同 CPU 数，ADCIRC 模型的计算效率平均是 DG 模型的 4 倍。比较研究 ADCIRC 模型与 DG 模型的精度和计算效率参考文献(Kubatko et al., 2009)，研究表明：考虑精度与并行效率时，DG 法在某些案例分析中相比 ADCIRC 模型有优势。改进 DG 法的整体效率，可通过使用自适应网格、更复杂的时间步（包括局部时间步长）、使用无积分法以及利用先进的软件编程技术，这是未来研究的课题。

## 参考文献

Clint Dawson, Ethan J. Kubatko, Joannes J. Westerink, Corey Trahan, Christopher Mirabito, Craig Michoski, Nishant Panda. 2011. Discontinuous Galerkin methods for modeling Hurricane storm surge. *Advances in Water Resources*, 34: 1165-1176.

Cockburn B, Shu C-W. 1998. The local discontinuous Galerkin finite element method for convection-diffusion systems. *SIAM J Numer Anal*, 35: 2440-2463.

Kubatko EJ, Westerink JJ, Dawson C. 2006. *hp* Discontinuous Galerkin methods for advection dominated problems in shallow water flow. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 196: 437-451.

Aizinger V, Dawson C. 2002. A discontinuous Galerkin method for two-dimensional flow and transport in shallow water. *Adv Water Res*, 25: 67-84.

Bunya S, Kubatko EJ, Westerink JJ, Dawson C. 2009. A wetting and drying treatment for the Runge-Kutta discontinuous Galerkin solution to the shallow water equations. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 198: 1548-1562.

Rhebergen S, Bokhove O, van der Vegt JJW. 2008. Discontinuous Galerkin finite element methods for hyperbolic nonconservative partial differential equations. *J Comp Phys*, 227: 1887-1922.

Durlofsky LJ, Engquist B, Osher S. 1992. Triangle based adaptive stencils for the solution of hyperbolic conservation laws. *J Comp Phys*, 98: 64-73.

Cockburn B, Shu C-W. 1989. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework. *Math Comp*, 52: 411-435.

Kubatko EJ, Bunya S, Dawson C, Westerink JJ, Mirabito C. 2009. A performance comparison of continuous and discontinuous finite element shallow water models. *J Sci Comput*, 40: 315-339.

## 高阶 DGSWE2D 模型(Brus et al., 2019)

### 1 前言

相对低阶格式，高阶格式具有较低的数值耗散；另外，高阶格式可以捕捉特殊的物理过程，比如欧拉方程的激波和浅水方程的干湿地形变化；三是  $h$  网格加密可求解某些细节的几何问题，但会降低使用高阶方法的计算效率；最后，某些区域的低精度解会降低高阶方法的精度，整体数值解下降为低阶精度。

真实的地球物理问题都是很复杂的，问题的描述，即计算域和相关的参数设置，都必须依赖于实测数据。如果测量数据或数据集的采样密度，不足以定义高阶精度模拟方法的参数，那么高阶方法也就没有优势了。甚至可获取足够精确的数据，仍然难以将数据融入数值计算中，使其与高阶精度数值解相一致。因此，需要探讨在高阶间断 Galerkin 法模拟几何边界复杂的近海岸区域中，数据的高阶表征和融入问题。

浅水方程可描述长波现象，诸如潮汐、风暴潮增水、密度差引起的水体振荡(seiches)和海啸。因此，常用来模拟近海岸的环流和自然灾害造成的洪水淹没。通常这将涉及包含大尺度的开阔海洋特征和小尺度的近海岸河道特征的大范围计算域。计算域中的海岸线几何边界和地形，必须根据实测数据集来表征，以实现精确的区域模拟。

真实的近海岸模拟涉及物理跨尺度和复杂几何边界。因此，基于非结构网格的有限单元模型可有效求解这些特征。网格分辨率可在开阔洋面处的数十公里和河口区、港湾和河道内数十米的范围内变化。间断 Galerkin 有限单元法特别适合求解此类问题的浅水方程。DG 法在求解对流占优流动时具有优良特性，DG 法的局部显格式使其易于高度并行化。另外，可使用单元上的  $p$  阶多项式近似，将 DG 法扩展至高阶精度。对于  $p$  阶的 DG 法离散，误差收敛速率一般在  $p+1/2$  到  $p+1$  之间，误差收敛速率与问题的特性有关。我们考虑  $p \geq 2$  阶的高阶 DG 法，

即高于 2 阶精度。

大多数的近海岸环流模型采用的数值方法都是 1 阶或 2 阶精度,如 SELFE、ADCIRC、TELEMAC 等模型。从 2000 年以来,使用低阶 DG 法求解浅水方程的研究已经开始(22~25),这些研究主要是重点探讨诸如溃坝和水跃的流动模拟。Aizinger et al. (2002)应用低阶 DG 法模拟 Mexico 海峡的 Galveston 港湾。de Brye et al. (2010)应用低阶 DG 法研究北海区域的河口环流。Dawson et al. (2010)应用线性( $p=1$ )DG 法模拟 Ike 飓风引起的风暴潮增水,据报道,在计算域的大部分位置 DG 法表现良好,但在复杂的河道水系内无法准确计算壅水,这是因为该区域内过高的数值耗散。这表明了低阶 DG 法在真实问题研究中存在的问题,使用高阶 ( $p \geq 2$  阶) 的 DG 法可实现此类问题的更高精度的模拟。

研究者已经应用高阶 DG 法求解浅水方程(Giraldo et al., 2002;...)。这些文献就重点研究了理想算例下高阶 DG 法求解的收敛性。Salehipour et al. (2013)使用高阶 DG 法和 7.5~60 km 的网格分辨率求解全球潮汐。Bernard et al. (2009)使用高阶 DG 法模拟浅水岛礁周围的潮汐水流,该研究表明:有必要使用高阶的边界表征,来避免数值振荡和虚假涡旋。Wirasaet et al. (2015)在理想的河道中使用高阶 DG 法求解浅水方程,并考虑了人工的边界层。上述的高阶 DG 法研究代表了高阶方法在浅水求解中的重要应用,但都没有考虑真实近海区域的河口和河道的复杂性。

高阶 DG 法的特性可改善计算效率,因为粗网格下使用高阶 DG 法可达到低阶格式同等级的数值误差,这已在理想的浅水流动问题中得到证实(Wirasaet et al., 2015), 研究表明:当数值误差很小( $O(10^{-8})$ )时,计算效率优势最明显,高阶格式比低阶格式快数千倍达到此误差水平。但是,在实际应用中很难达到此精度,能达到何种精度仍需要深入考察。确定高阶格式的精度的难点在于:建立能达到最高计算效率的最粗的计算网格,但在此网格分辨率下仍然能得到复杂计算域下的精确数值解。为了准确求解计算域内的特征流动,并实现期望的收敛速率,粗网格离散必须要同等高阶精度的计算域几何表征来配合使用(Bassi and Rebay, 1997)。求解浅水方程时,可使用边界上的曲线边(通过等参单元和超参单元)实现上述的考虑(Wirasaet et al., 2015)。另外,为了实现适当的收敛速率,必须使用同等阶的多项式来描述地形源项(Xing and Shu, 2006)。

用于海岸模拟的高阶网格可由低阶网格生成，该课题已有大量文献(Sherwin and Peiro, 2002-44)。开源代码的网格生成工具，如 GMSH 和 NEKMESH，都可创建带曲线边界的高阶网格。但我们的目的是与低阶方法的计算效率进行比较，因此通过转化现有的线性高分辨率网格得到高阶网格，该方法与(Ims and Wang, 2018; Jiao and Wang, 2012)的方法类似，但我们的方法更强调近海岸模拟的独特性，近海岸区域通常由错综复杂的河网组成，需要仔细处理。

本文内容：（1）使用高阶 DG 法模拟复杂近海岸环流；（2）曲边单元（等参或超参单元）；（3）使用约束的三次样条插值创建弯曲边界；（4）使用滑动最小二乘法定义高阶地形；以上技术结合网格粗化算法，可将现有的低阶网格转化为高阶网格。研究表明：结合足够密度的地形数据集，可实现最优收敛速率的浅水方程 DG 求解。这保证了在一定精度水平下，高阶 DG 法求解复杂计算域时，比低阶方法的计算效率更高。（5）网格压缩；（6）MPI 负载均衡。

本文解决小尺度河道中的水位预测过低的问题(Dawson et al., 2010)。应用于模拟 Galveston 湾，表明：高阶求解相比低阶高分辨率求解，提高 4 倍的计算效率。

## 2 DG 离散

### 2.1 空间离散

守恒形式的浅水方程可写作：

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_i(\mathbf{Q}) = S_i(\mathbf{Q}) + \nabla \cdot \mathbf{D}_i(\mathbf{Q}), \quad i=1,2,3 \quad (1)$$

其中，

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \xi \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q_x & Q_y \\ \frac{Q_x^2}{H} + \frac{1}{2}g(H^2 - b^2) & \frac{Q_x Q_y}{H} \\ \frac{Q_x Q_y}{H} & \frac{Q_y^2}{H} + \frac{1}{2}g(H^2 - b^2) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} g_y \frac{\partial b}{\partial x} - \tau Q_x + F_x \\ g \xi \frac{\partial b}{\partial y} - \tau Q_y + F_y \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2v_T \frac{\partial Q_x}{\partial x} & v_T \left( \frac{\partial Q_y}{\partial x} + \frac{\partial Q_x}{\partial y} \right) \\ v_T \left( \frac{\partial Q_y}{\partial x} + \frac{\partial Q_x}{\partial y} \right) & 2v_T \frac{\partial Q_y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

式（1）和式（2）描述了质量守恒( $i=1$ )和动量守恒( $i=2, 3$ )。此处， $Q_i$  和  $S_i$

分别代表守恒变量  $\mathbf{Q}$  和源项向量  $\mathbf{S}$  的第  $i$  个分量。 $\mathbf{F}$  矩阵的第  $i$  行包含  $x$  和  $y$  方向上的质量和动量通量函数向量, 标记为  $\mathbf{F}_i$ 。自由水面移动表示为  $\zeta$ ,  $H$  为总水柱高度,  $b$  为地形,  $H = \zeta + b$ 。 $x$  和  $y$  方向上的动量变量定义为  $Q_x \equiv uH$  和  $Q_y \equiv vH$ , 其中,  $u$  和  $v$  是  $x$  和  $y$  方向上沿水深积分平均的流速。另外,  $g$  为重力加速度常数,  $\tau$  为摩阻系数,  $F_x$  和  $F_y$  为附加源项, 包括 Coriolis 力和水面处的风切应力。通常使用二次摩阻关系式计算:

$$\tau = c_f \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{H} \quad (3)$$

其中,  $c_f$  为底部摩阻系数。

为参数化压格子尺度的紊动扩散, 侧向粘性切应力项, 也称为涡粘性项, 也包含在浅水方程中。该项可提高数值计算的稳定性, 特别是对于对流项不做特殊处理的情况时, 可提高程序的健壮性。使用 LDG 法处理 2 阶导数的粘性扩散项。LDG 法使用附属方程将 2 阶导数部分写为 1 阶导数方程组的形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{F}_i(\mathbf{Q}) - \mathbf{D}_i(\mathbf{E})) &= S_i(\mathbf{Q}), i = 1, 2, 3 \\ E_j - \nabla \cdot \mathbf{G}_j(\mathbf{Q}) &= 0, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (4)$$

其中,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{xy} \\ E_{yy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} Q_x & 0 \\ Q_y & Q_x \\ 0 & Q_y \end{bmatrix} \quad (5)$$

$E_j$  表示附属变量向量  $\mathbf{E}$  的第  $j$  个分量,  $G_j$  表示附属通量矩阵  $\mathbf{G}$  的第  $j$  行。附属变量可以将涡粘性矩阵重写为:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2\nu_T E_{xx} & \nu_T E_{xy} \\ \nu_T E_{xy} & 2\nu_T E_{yy} \end{bmatrix} \quad (6)$$

域  $\Omega$  三角化为一套  $K$  个不重叠的单元  $T_h = \{\Omega_k\}_{k=1, \dots, K}$ 。有限单元空间定义为  $V_h^p = \{w(\mathbf{x}) : w|_{\Omega_k} \in \mathcal{P}^p(\Omega_k)\}$ , 其中,  $\mathcal{P}^p(\Omega_k)$  为在单元  $\Omega_k \in T_h$  上定义的阶数  $\leq p$  的分段多项式空间。通过乘以一个试函数  $w_h \in V_h^p$ , 然后在单元域  $\Omega_k$  上积分得到式 (1) 的弱形式 (变分形式)。然后对散度项实施分部积分:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_k} \frac{\partial Q_i}{\partial t} w_h d\mathbf{x} - \int_{\Omega_k} (\mathbf{F}_i(\mathbf{Q}) - \mathbf{D}_i(\mathbf{E})) \cdot \nabla w_h d\mathbf{x} \\
& + \int_{\partial\Omega_k} (\mathbf{F}_i(\mathbf{Q}) - \mathbf{D}_i(\mathbf{E})) \cdot \mathbf{n} w_h d\Gamma = \int_{\Omega_k} S_i(\mathbf{Q}) w_h d\mathbf{x} \\
& i = 1, 2, 3 \\
& \int_{\Omega_k} E_j w_h d\mathbf{x} + \int_{\Omega_k} \mathbf{G}_j(\mathbf{Q}) \cdot \nabla w_h d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_k} \mathbf{G}_j(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} w_h d\Gamma = 0 \\
& j = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{7}$$

此处， $\mathbf{n}$  为单元的边  $\partial\Omega_k$  的外法向单位向量。

对所有的  $w_h \in V_h^p$ ，为找到近似解  $\mathbf{Q}_h, \mathbf{E}_h \in V_h^p$ ，需满足下列条件：

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_k} \frac{\partial (Q_i)_h}{\partial t} w_h d\mathbf{x} - \int_{\Omega_k} (\mathbf{F}_i(\mathbf{Q}_h) - \mathbf{D}_i(\mathbf{E}_h)) \cdot \nabla w_h d\mathbf{x} \\
& + \int_{\partial\Omega_k} (\mathbf{F}_i(\mathbf{Q}_h^{(in)}, \mathbf{Q}_h^{(ex)}) - \mathbf{D}_i(\mathbf{E}_h^{(in)}, \mathbf{E}_h^{(ex)})) \cdot \mathbf{n} w_h d\Gamma = \int_{\Omega_k} S_i(\mathbf{Q}_h) w_h d\mathbf{x} \\
& i = 1, 2, 3 \\
& \int_{\Omega_k} (E_h)_j w_h d\mathbf{x} + \int_{\Omega_k} \mathbf{G}_j(\mathbf{Q}_h) \cdot \nabla w_h d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_k} \mathbf{G}_j(\mathbf{Q}_h^{(in)}, \mathbf{Q}_h^{(ex)}) \cdot \mathbf{n} w_h d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

由于穿过单元界面的解的不连续性，即单元  $\Omega_k$  上的  $\mathbf{Q}_h^{(in)}, \mathbf{E}_h^{(in)}$  与相邻单元上的  $\mathbf{Q}_h^{(ex)}, \mathbf{E}_h^{(ex)}$  有不同的值，沿各单元的边  $\partial\Omega_k$  要定义近似解 2 次。称变量  $\mathbf{F}_i, \mathbf{D}_i, \mathbf{G}_j$  为数值通量，用于确定沿单元界面上的边积分的唯一近似值。对通量  $\mathbf{F}_i$ ，使用局部 Lax-Friedrichs (LLF) 通量格式计算：

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{Q}^{(in)}, \mathbf{Q}^{(ex)}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i(\mathbf{Q}^{(in)}) + \mathbf{F}_i(\mathbf{Q}^{(ex)})) \cdot \mathbf{n} - \frac{\alpha}{2} (Q_i^{(ex)} - Q_i^{(in)}) \tag{9}$$

式中， $\alpha$  为在  $\mathbf{Q}^{(in)}$  和  $\mathbf{Q}^{(ex)}$  之间的通量的雅克比矩阵的最大特征值：

$$\alpha = \max_{\mathbf{Q}^{(in)}, \mathbf{Q}^{(ex)}} \left| \bar{u} n_x + \bar{v} n_y + \sqrt{gH} \right| \tag{10}$$

对于通量  $\mathbf{D}_i, \mathbf{G}_j$ ，使用 Bassi and Rebay (1997) 推荐的平均通量计算：

$$G(\mathbf{Q}^{(in)}, \mathbf{Q}^{(ex)}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (Q_x^{(in)} + Q_x^{(ex)}) & 0 \\ \frac{1}{2} (Q_y^{(in)} + Q_y^{(ex)}) & \frac{1}{2} (Q_x^{(in)} + Q_x^{(ex)}) \\ 0 & \frac{1}{2} (Q_y^{(in)} + Q_y^{(ex)}) \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{E}^{(in)}, \mathbf{E}^{(ex)}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v_T(E_{xx}^{(in)} + E_{xx}^{(ex)}) & \frac{v_T}{2}(E_{xy}^{(in)} + E_{xy}^{(ex)}) \\ \frac{v_T}{2}(E_{xy}^{(in)} + E_{xy}^{(ex)}) & v_T(E_{yy}^{(in)} + E_{yy}^{(ex)}) \end{bmatrix} \quad (12)$$

使用  $V_h^p$  的一个正交基  $\{\phi_k^{(l)}(\mathbf{x})\}_{l=1,\dots,M}$ ，其中  $M$  与  $V_h^p$  的阶数有关， $M = (p+1)(p+2)/2$ 。因此，由时间相关的自由度（未知量）与空间相关的测试函数的线性组合来近似计算各相关变量：

$$\begin{aligned} (Q_h)_i &= \sum_{m=1}^M Q_{i,k}^{(m)}(t) \phi_k^{(m)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_k, \quad i=1,2,3 \\ (E_h)_j &= \sum_{m=1}^M E_{j,k}^{(m)}(t) \phi_k^{(m)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_k, \quad j=1,2,3 \end{aligned} \quad (13)$$

Galerkin 法中，测试函数与试函数(trial and test)相同，即  $w_h = \phi_k^{(l)}$ 。这引出 ODE 系统：

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^M \frac{\partial Q_{k,i}^{(m)}}{\partial t} \int_{\Omega_k} \phi_k^{(m)} \phi_k^{(l)} d\mathbf{x} - \int_{\Omega_k} (\mathbf{F}_i(\mathbf{Q}_h) - \mathbf{D}_i(\mathbf{E}_h)) \cdot \nabla \phi_k^{(l)} d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\partial\Omega_k} (\mathbf{F}_i(\mathbf{Q}_h^{(in)}, \mathbf{Q}_h^{(ex)}) - \mathbf{D}_i(\mathbf{E}_h^{(in)}, \mathbf{E}_h^{(ex)}) \cdot \mathbf{n}) \phi_k^{(l)} d\Gamma = \int_{\Omega_k} S_i(\mathbf{Q}_h) \phi_k^{(l)} d\mathbf{x} \\ &l=1,\dots,M, \quad i=1,2,3 \\ &\sum_{m=1}^M E_{k,j}^{(m)} \int_{\Omega_k} \phi_k^{(m)} \phi_k^{(l)} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_k} \mathbf{G}_j(\mathbf{Q}_h) \cdot \nabla \phi_k^{(l)} d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_k} \mathbf{G}_j(\mathbf{Q}_h^{(in)}, \mathbf{Q}_h^{(ex)}) \cdot \mathbf{n} \phi_k^{(l)} d\Gamma = 0 \\ &l=1,\dots,M, \quad j=1,2,3 \end{aligned} \quad (14)$$

式 (14) 的 DG 格式可写为紧凑形式：

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{Q}_i}{dt} = \mathcal{L}_h(\mathbf{Q}_h), \quad i=1,2,3 \quad (15)$$

式中， $\mathcal{L}_h$  为 DG 空间算子， $\mathbf{M}$  为（块对角化的）质量矩阵， $\tilde{\mathbf{Q}}_i$  为包含  $i$  个解分量的自由度的向量。

在各时间步，首先求解  $(E_h)_j$  变量，然后结果用于求解  $(Q_h)_i$  变量。注意当  $v_T = 0$  时，无需求解附属方程，格式退化为标准的 DG 法。

## 2.2 时间离散

DG 法中使用  $p$  阶多项式近似，则使用  $p+1$  阶精度的 Runge-Kutta 法做时间



离散。SSP RK 法保证向前 Euler 法的强稳定特性。2 阶段的 2 阶 SSP-RK 格式为：

$$\begin{aligned} Q_i^{(1)} &= Q_i^{(n)} + \Delta t \mathcal{L}_h(Q_i^{(n)}, t^{(n)}) \\ Q_i^{(n+1)} &= \frac{1}{2} \left( Q_i^{(n)} + Q_i^{(1)} + \Delta t \mathcal{L}_h(Q_i^{(1)}, t^{(n)} + \Delta t) \right), \quad i=1,2,3 \end{aligned} \quad (16)$$

采用线性浅水波速作为传播波速，则 CFL 条件为：

$$\sqrt{gb} \frac{\Delta t}{h_k} \leq \frac{1}{2p+1} \quad (17)$$

因此，计算时间步长为：

$$\Delta t = C \min_{x \in \Omega_k, \forall \Omega_k \in \mathcal{T}_k} \left( \frac{h_k}{\sqrt{gb}(2p+1)} \right) \quad (18)$$

式中， $h_k$  为单元  $\Omega_k$  的最大内切圆直径； $C$  为常数。

### 2.3 单元转换

高阶精度模型的计算网格中包含直边和曲边的三角单元，单元转换步骤统一考虑这 2 种类型的单元。对于非结构网格，该方法可以一致和高效地计算 DG 空间算子  $\mathcal{L}_h$  中的面积分和边积分。各单元  $\Omega_k \in \mathcal{T}_h$  有顶点  $\{\mathbf{x}_v^{(n)}\}_{n=1,\dots,3}$ ，通过参数化坐标转换  $\Psi_k: r \rightarrow x$ ，映射到参考单元上，其中  $\mathbf{r} = (r, s)$  为参考单元的坐标。三角形参考单元定义为  $I = \{(r, s) | -1 \leq r \leq 1, -1 \leq s \leq -r\}$ ，参考单元的顶点为  $\{r_v^{(n)}\}_{n=1,\dots,3}$ 。单元  $k$  坐标转换的阶数标记为  $p_{\Psi,k}$ 。直边单元使用  $p_{\Psi,k} = 1$  阶的坐标转换，曲边单元使用  $p_{\Psi,k} > 1$  的坐标转换。当  $p_{\Psi,k} = p$  时，称为等参单元， $p_{\Psi,k} > p$  为超参单元； $p_{\Psi,k} < p$  为次参单元。图 1 显示了  $p_{\Psi,k} = 3$  时的映射。 $I$  和  $\Omega_k, \Psi_k(\mathbf{r})$  之间的映射定义为：

$$x_k(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_{\Psi,k}} \psi^{(n)}(\mathbf{r}) \mathbf{x}_{\Psi,k}^{(n)} \quad (19)$$

式中， $\{\psi^{(n)}(\mathbf{r})\}_{n=1,\dots,N_{\Psi,k}}$  为 2D 的定义于参考单元  $I$  上的 **Lagrange 基函数**（也称为 **形函数**），相关的节点为  $\{r_{\Psi,k}^{(n)}\}_{n=1,\dots,N_{\Psi,k}}$ 。对应的物理单元  $\Omega_k$  的坐标为  $\{x_{\Psi,k}^{(n)}\}_{n=1,\dots,N_{\Psi,k}}$ ，

$N_{\Psi,k}$  为定义转换使用的坐标个数。对三角形单元做  $p_{\Psi,k}$  阶映射，

$$N_{\Psi,k} = (p_{\Psi,k} + 2)(p_{\Psi,k} + 1) / 2。$$

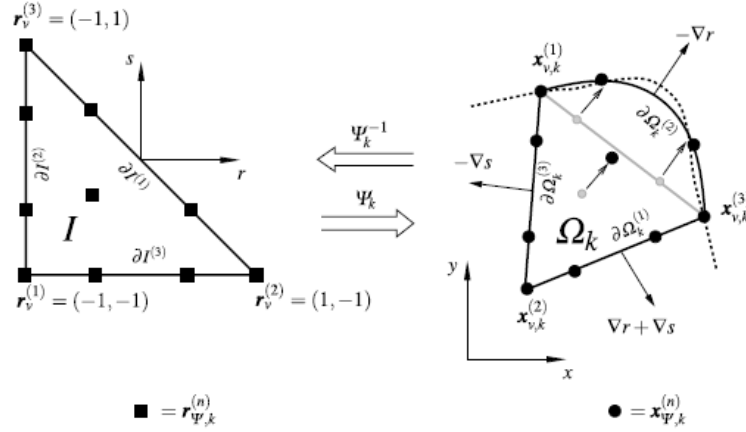


图 1  $p_{\Psi,k} = 3$  时的参数单元映射示意图。虚线表示物理区域边界。物理单元中的边节点移动，与边界重合，形成曲边近似。

Hesthaven 和 Warburton (2008) 给出在任意  $\mathbf{r}$  上计算形函数的方法。需要求解如下方程组：

$$\mathbf{V}^T \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}) \quad (20)$$

式中， $\mathbf{V}$  是范德蒙矩阵，矩阵  $(i, j)$  元素为  $\mathbf{V}^{(i,j)} = \phi^{(j)}(\mathbf{r}_{\Psi,k}^{(i)})$ ， $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) = [\psi^{(1)}(\mathbf{r}), \dots, \psi^{(N_{\Psi,k})}(\mathbf{r})]^T$ ， $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}) = [\phi^{(1)}(\mathbf{r}), \dots, \phi^{(N_{\Psi,k})}(\mathbf{r})]^T$ 。基于唯一的多项式插值，式 (20) 施加了 Lagrange 基函数的属性，即  $\psi^{(i)}(\mathbf{r}_{\Psi,k}^{(j)}) = \delta_{ij}$ 。注意到，可以通过求解式 (20) 的对应的  $\phi$  导数的右手边项，得到形函数的偏导数。

基于以上转换，可在参考单元坐标系下，使用单元基函数定义的 DG 解表述为：

$$\phi_k^{(l)}(x_k(r)) = \phi^{(l)}(r) \quad (21)$$

在物理单元  $\Omega_k$  上的面积分可转换到参考单元  $I$  上：

$$\int_{\Omega_k} f(x) dx = \int_I f(r) \det(\mathbf{J}_k) dr \quad (22)$$

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx = \int_I \left( \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial f(r)}{\partial s} \right) dr = \int_I \left( \frac{\partial y_k}{\partial s} \frac{\partial f(r)}{\partial r} - \frac{\partial y_k}{\partial r} \frac{\partial f(r)}{\partial s} \right) dr \quad (23)$$

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial f(x)}{\partial y} dx = \int_I \left( \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial f(r)}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) dr = \int_I \left( \frac{\partial x_k}{\partial r} \frac{\partial f(r)}{\partial s} - \frac{\partial x_k}{\partial s} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) dr \quad (24)$$

其中， $\mathbf{J}_k$  为单元  $\Omega_k$  的雅克比矩阵：

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_k}{\partial r} & \frac{\partial y_k}{\partial r} \\ \frac{\partial x_k}{\partial s} & \frac{\partial y_k}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (25)$$

图 1 所示，导数映射可以计算边的法向向量。对于三角形单元，法向向量为：

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y) = \begin{cases} \left( \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial y} \right) = \frac{1}{\det(\mathbf{J}_k)} \left( \frac{\partial y_k}{\partial s} - \frac{\partial y_k}{\partial r}, -\frac{\partial x_k}{\partial s} + \frac{\partial x_k}{\partial r} \right), & \text{on } \partial\Omega_k^{(1)} \\ \left( -\frac{\partial r}{\partial x}, -\frac{\partial r}{\partial y} \right) = \frac{1}{\det(\mathbf{J}_k)} \left( -\frac{\partial y_k}{\partial s}, \frac{\partial x_k}{\partial s} \right), & \text{on } \partial\Omega_k^{(2)} \\ \left( -\frac{\partial s}{\partial x}, -\frac{\partial s}{\partial y} \right) = \frac{1}{\det(\mathbf{J}_k)} \left( \frac{\partial y_k}{\partial r}, -\frac{\partial x_k}{\partial r} \right), & \text{on } \partial\Omega_k^{(3)} \end{cases} \quad (26)$$

对于直边单元，即  $p_{\Psi,k} = 1$ ，转换导数为常数。因此，式 (22) 中的积分可做简化，因为  $\det(\mathbf{J}_k)$  可移到积分以外。在 DG 格式中，这保证了基函数的正交特性，引出对角化的单元质量矩阵。因此，计算直边单元的质量矩阵的逆矩阵较为简单。但是，对于曲边单元， $p_{\Psi,k} > 1$ ，非线性的  $\det(\mathbf{J}_k)$  必须包含在积分内，这导致满元素的质量矩阵。实际计算中，该矩阵的逆预先计算和存储，用于后面计算过程的使用。曲边单元的转换导数的非线性也需要精确计算。使用针对三角形单元的足够精度的求积公式，计算面积分，来精确积分质量矩阵。这意味着，对于直边单元，要使用精确积分  $2p$  阶多项式的求积公式。对于曲边单元，使用  $2(p + p_{\Psi,k})$  阶的求积公式，比计算精确质量矩阵要高 1 阶，用于更高精度地计算通量的面积分。阶数也可以降低 1 阶，降低曲边单元的计算量。

## 2.4 边的转换

与单元转换类似，单元的各条边要映射到参考边，便于直边和曲边单元的数值通量积分计算。边的映射计算示意图 2。单元的各条边  $\{\partial\Omega_k^{(d)}\}_{d=1,\dots,3}$ ，通过转换  $\partial\Psi_{k,d} : \xi \rightarrow x$ ，映射到参考边  $E = \{\xi \mid -1 \leq \xi \leq 1\}$ ：

$$\mathbf{x}_{k,d}(\xi) = \sum_{n=1}^{N_{\partial\Psi,k,d}} \ell^{(n)}(\xi) \mathbf{x}_{\partial\Psi,k,d}^{(n)} \quad (27)$$

式中， $\{\ell^{(n)}(\xi)\}_{n=1,\dots,N_{\partial\Psi,k,d}}$  是与 Legendre-Gauss-Lobatto 点  $\{\xi_{\partial}^{(n)}(\Psi_{k,d})\}_{n=1,\dots,N_{\partial\Psi,k,d}}$  相关

的 1D Lagrange 基函数。沿  $\partial\Omega_k^{(d)}$  的点为  $\{\mathbf{x}_{\partial\Psi,k,d}^{(n)}\}_{n=1,\dots,N_{\partial\Psi,k,d}} \circ p_{\partial\Psi,k,d}$  阶的转换中涉及的点数为  $N_{\partial\Psi,k,d} = p_{\partial\Psi,k,d} + 1$ 。注意仅单元  $\Omega_k$  的曲线边需要  $p_{\partial\Psi,k,d} > 1$  阶的转换。直线边需要  $p_{\partial\Psi,k,d} = 1$ 。边积分的转换因子，将沿  $\partial\Omega_k^{(d)}$  的  $d\Gamma$  与沿  $E$  的  $d\xi$ ，联系起来：

$$d\Gamma = \underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx_{k,d}}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy_{k,d}}{d\xi}\right)^2}}_{J_{k,d}} d\xi \quad (28)$$

这样，边积分则计算如下：

$$\int_{\partial\Omega_k} f(\mathbf{x}) d\Gamma = \sum_{d=1}^3 \int_E f(\xi) J_{k,d} d\xi \quad (29)$$

使用标准的 Gauss-Legendre 求积公式计算这些线积分。对于直线边，使用精确积分  $2p+1$  阶多项式的求积公式。对于曲线边，需要使用  $2(p + p_{\partial\Psi,k,d}) + 1$  阶的求积公式。对于曲线单元的面积分，边积分公式可降低 1 阶来减小计算量。

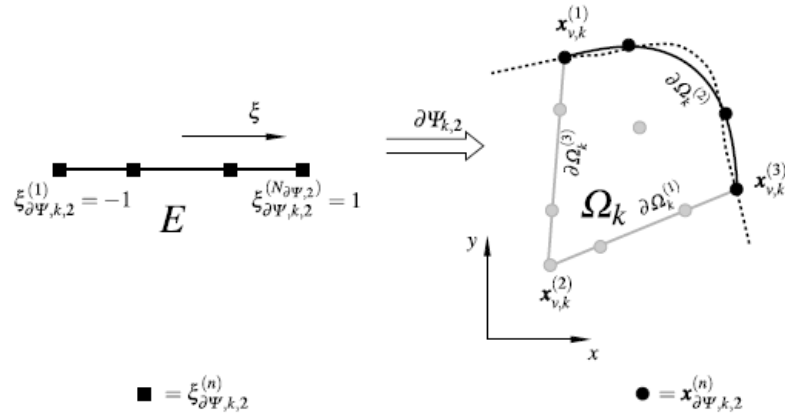


图 2  $p_{\Psi,k} = 3$  时参数化的边映射的示意图

### 3 弯曲边界

第 1 步是确定实际问题的弯曲边界几何，从直线边的网格开始，近似逼近测量数据集，来描述海岸线的几何边界。为确保可以实现高阶收敛，测量数据集的分辨率应该高于原始直线边的网格。某边界上的网格边界节点坐标标记为  $\{\mathbf{x}_{\partial\Omega}^{(n)}\}_{n=1,\dots,N_{\partial\Omega}}$ 。对应的海岸线的测量数据点为  $\{\mathbf{x}_c^{(n)}\}_{n=1,\dots,N_c}$ 。对于海岛边界，终点是封闭的，即  $\mathbf{x}_{\partial\Omega}^{(1)} = \mathbf{x}_{\partial\Omega}^{(N_{\partial\Omega})}$  以及  $\mathbf{x}_c^{(1)} = \mathbf{x}_c^{(N_c)}$ 。使用参数化的样条曲线插值海岸线测量

数据，在  $\mathbf{x}_{\partial\Omega}^{(n)}$  坐标间插值近似表征边界。边界上的边是弯曲的，这可通过计算样条上的点和调整定义在沿着边界的各单元上的高阶转换节点来实现。弯曲边界计算示意图如图 3。

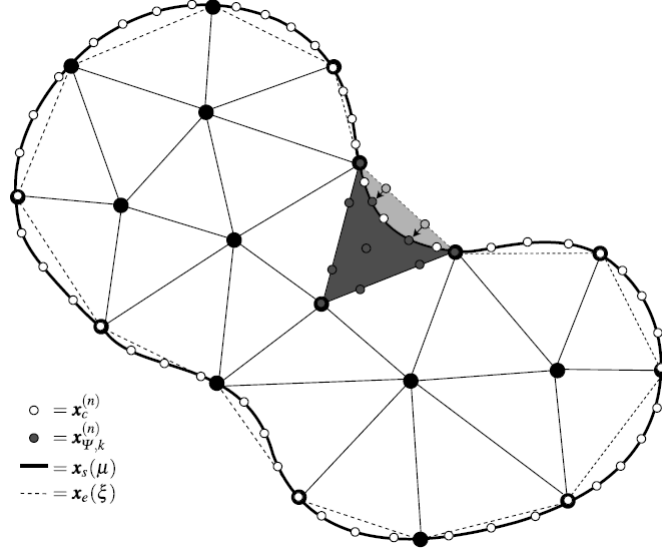


图 3 调整边界上边的坐标，创建近似样条曲线的弯曲单元。深灰色点代表用于定义高阶坐标转换的坐标。沿着直线边的浅灰色点是沿着样条曲线计算得到的，允许弯曲单元能更好地近似样条曲线边界。白色点代表用于创建样条曲线的数据点。

网格的各条边界上的直线边由参数化函数  $\mathbf{x}_{e,j}(\xi) = (x_{e,j}(\xi), y_{e,j}(\xi))$ ， $\xi \in [-1, 1]$  表示。边的函数计算如下：

$$\mathbf{x}_{e,j}(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)\mathbf{x}_{\partial\Omega}^{(j)} + \frac{1}{2}(1+\xi)\mathbf{x}_{\partial\Omega}^{(j+1)}, \quad j=1, \dots, N_{\partial\Omega}-1 \quad (30)$$

根据上式，在边界节点坐标  $\mathbf{x}_{\partial\Omega}^{(j)}$  和  $\mathbf{x}_{\partial\Omega}^{(j+1)}$  之间沿着边界  $j$  线性插值  $x$  和  $y$  坐标。

三次样条  $\mathbf{x}_{s,j}(\mu) = (x_{s,j}(\mu), y_{s,j}(\mu))$  在线段  $j$  上用  $\mu \in [\mu_j, \mu_j + h]$  参数化  $x$  和  $y$  坐标。样条函数计算如下：

$$\mathbf{x}_{s,j}(\mu) = \mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j(\mu - \mu_j) + \mathbf{c}_j(\mu - \mu_j)^2 + \mathbf{d}_j(\mu - \mu_j)^3, \quad j=1, \dots, N_c-1 \quad (31)$$

式中， $\mu_j = h(j-1)$  和  $h = 1/(N_c-1)$ 。

对于陆地边界外侧，通过求解自然边界条件下的方程组，确定样条系数  $\mathbf{a}_j = (a_{x,j}, a_{y,j})$ ， $\mathbf{b}_j = (b_{x,j}, b_{y,j})$ ， $\mathbf{c}_j = (c_{x,j}, c_{y,j})$ ， $\mathbf{d}_j = (d_{x,j}, d_{y,j})$ ：

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ h & 4h & h & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & h & 4h & h & \\ & & & & & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_{N_c-1} \\ c_{N_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h}(a_3 - 2a_2 + a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h}(a_{j+1} - 2a_j + a_{j-1}) \\ \vdots \\ \frac{3}{h}(a_{N_c} - 2a_{N_c-1} + a_{N_c-2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$\mathbf{a}_j$  系数为海岸线数据节点的  $x$  或  $y$  坐标, 即  $a_{x,j} = x_c^{(j)}$  和  $a_{y,j} = y_c^{(j)}$ 。使用这些  $a$  值和由式 (32) 确定的  $c$  值, 计算其他的系数:

$$b_j = \frac{1}{h}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h}{3}(2c_j + c_{j+1}) \quad (33)$$

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h} \quad (34)$$

位于海岛边界内侧, 边界条件是周期性的, 方程组变为:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & -1 \\ h & 4h & h & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & h & 4h & h & \\ -\frac{4h}{3} & -\frac{h}{3} & & & & & \frac{h}{3} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_{N_c-1} \\ c_{N_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h}(a_3 - 2a_2 + a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h}(a_{j+1} - 2a_j + a_{j-1}) \\ \vdots \\ \frac{3}{h}(a_{N_c} - a_{N_c-1} - a_2 + a_1) \end{bmatrix} \quad (35)$$

这就强迫在  $\mathbf{x}_{\partial\Omega}^{(1)}$  和  $\mathbf{x}_{\partial\Omega}^{(N_{\partial\Omega})}$  处, 样条函数的 1 阶和 2 阶导数相等。

### 3.1 诊断最大样条曲线弯曲

有很多种方法可以判断三次样条近似可能不合适, 以及局部线段多项式需要修正来满足某些限制条件。例如, 与某条边界上的边相关的样条, 可能相对单元的形状, 曲率过大, 这将导致单元转化的奇异性, 如图 4。

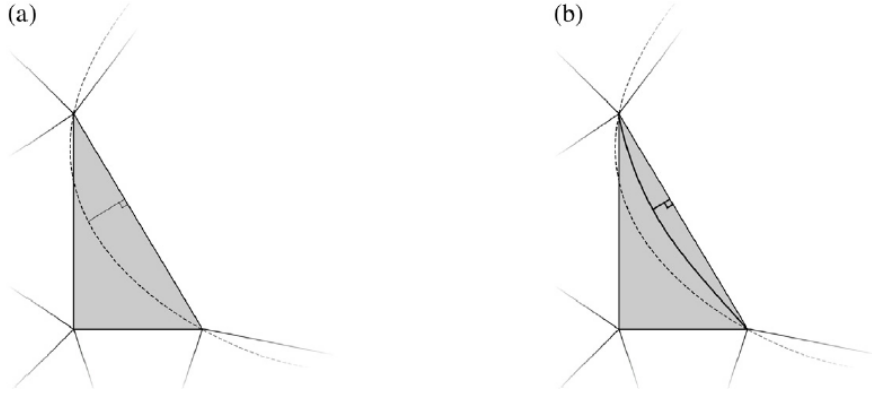


图 4 相对单元几何形状，具有极端曲率的样条：(a) 样条穿过单元的内部边，这将造成奇异的单元转换；(b) 局部修正，近似样条，同时防止较差的转换特性。

此时，样条穿过其他单元的边，且  $\det(\mathbf{J}_k)$  有负值。为判断出这个问题，需要计算样条与直线单元边之间的最大距离，然后与单元最小边长的指定比例作比较。必须确定满足一定限制条件的最大扰度，在直线边的正交方向丈量，如图 5。

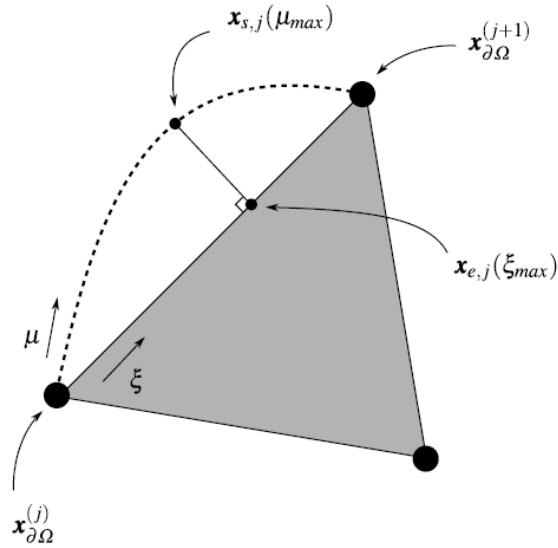


图 5 判断垂直于直线单元边的样条最大扰度。注意到，如果变形扰度值超过最小单元边长的指定比例时，需要进行修正。

样条与直线单元边之间的距离平方的方程是  $\mu$  和  $\xi$  的函数：

$$D(\mu, \xi) = \left( x_{s,j}(\mu) - x_{e,j}(\xi) \right)^2 + \left( y_{s,j}(\mu) - y_{e,j}(\xi) \right)^2 \quad (36)$$

通过求解  $\nabla D(\mu, \xi) = 0$  得到  $D$  的最大值，可能不满足正交性条件，因此必须引入限制条件。限制方程是直线单元边向量，与由（直线）边转换样条的扩张（转换）向量，之间的点积：

$$w(\mu, \xi) = (x_{\partial\Omega}^{(j)} - x_{e,j}(\xi))(x_{s,j}(\mu) - x_{e,j}(\xi)) + (y_{\partial\Omega}^{(j)} - y_{e,j}(\xi))(y_{s,j}(\mu) - y_{e,j}(\xi)) \quad (37)$$

为施加正交性限制，两个向量间的点积应为零。使用拉格朗日乘子，增加第 3 个独立变量，这使限制方程成为待求方程组的一部分：

$$\begin{aligned} \nabla D(\mu, \xi) &= \lambda \nabla w(\mu, \xi) \\ w(\mu, \xi) &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

因此，必须使用牛顿法求解方程组的根：

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial D}{\partial \mu} - \lambda \frac{\partial w}{\partial \mu} \\ G &= \frac{\partial D}{\partial \xi} - \lambda \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ E &= w \end{aligned} \quad (39)$$

迭代格式可写作：

$$\begin{bmatrix} \mu_{\max} \\ \xi_{\max} \\ \lambda_{\max} \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \mu_{\max} \\ \xi_{\max} \\ \lambda_{\max} \end{bmatrix}^{(k)} - \begin{bmatrix} \Delta\mu \\ \Delta\xi \\ \Delta\lambda \end{bmatrix}^{(k)} \quad (40)$$

其中， $\Delta$  值的向量通过求解线性方程组来获得：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \mu} & \frac{\partial F}{\partial \xi} & \frac{\partial F}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial G}{\partial \mu} & \frac{\partial G}{\partial \xi} & \frac{\partial G}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial E}{\partial \mu} & \frac{\partial E}{\partial \xi} & \frac{\partial E}{\partial \lambda} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta\mu \\ \Delta\xi \\ \Delta\lambda \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} F \\ G \\ E \end{bmatrix}^{(k)} \quad (41)$$

以这种方式表述上述问题，可使用高斯消去法求解方程组，这避免了计算雅可比矩阵的逆矩阵。

### 3.2 修正极端扰度变形

一旦确定了极端扰度变形的位罝，必须根据最大扰度阈值检测变形是否合理：可经验性地选择 0.4 倍的最大扰度，乘以使用单元的最小边长。如果计算的扰度超过该阈值，必须使用新的曲线代替局部的样条线段。此时，需要计算定义满足扰度阈值的局部边界线段的新的  $a_j, b_j, c_j, d_j$  值。这样可以防止奇异的单元转换，但也破坏了三样条曲线施加的在边界上边线段之间 1 阶和 2 阶导数连续的现状。第 1 步是：将相对直线单元边的最大扰度，调整至指定的扰度允许值  $d$ ，使其适



合于单元几何形状。可通过找到，相对单元边上的最大曲线扰度位置的距离为  $d$ （在边的垂直方向上丈量）的点，来完成上述的调整，如图 6。

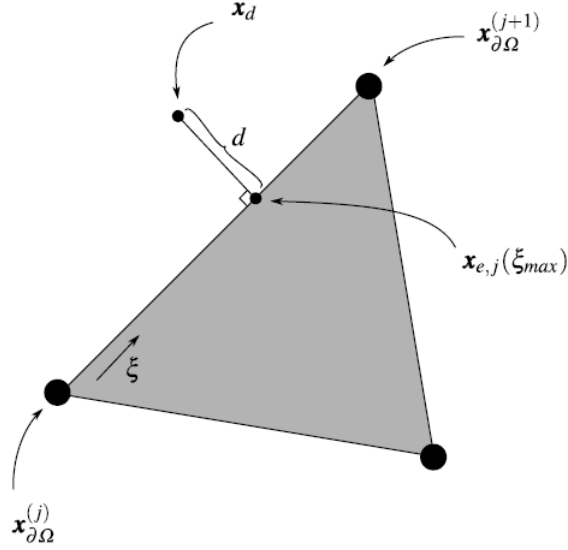


图 6 在最大样条扰度变形（在直线单元边的垂向方向丈量）位置处，确定满足指定扰度阈值条件的坐标值。

因为单元边上的最大扰度  $\xi_{\max}$  的位置是已知的，距离平方的函数是  $x$  和  $y$  的函数：

$$D(x, y) = \left( x - x_{e,j}(\xi_{\max}) \right)^2 + \left( y - y_{e,j}(\xi_{\max}) \right)^2 - d^2 \quad (42)$$

必须再次使用正交性限制，确保此距离是在单元边的垂直方向上丈量的：

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \left( x_{\partial\Omega}^{(j)} - x_{e,j}(\xi_{\max}) \right) \left( x - x_{e,j}(\xi_{\max}) \right) \\ & + \left( y_{\partial\Omega}^{(j)} - y_{e,j}(\xi_{\max}) \right) \left( y - y_{e,j}(\xi_{\max}) \right) \end{aligned} \quad (43)$$

必须求解式 (42) 和式 (43) 构成的方程组，来确定修正的扰度变形点  $x_d$  的坐标。因为这无需之前实施的最大化距离平方函数，也就无需拉格朗日乘子。但是，仍然需要使用牛顿法找到方程组的根。此时，迭代格式为：

$$\begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix}^{(k)} - \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial x} & \frac{\partial D}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D \\ w \end{bmatrix} \right)^{(k)} \quad (44)$$

在每一迭代步内，需要解析计算  $2 \times 2$  阶雅克比矩阵的逆矩阵。

第 2 步：当得到了修正扰度变形的坐标后，可以修正局部样条线段来避免较

差的单元转换。用  $\mathbf{x}_{s,j}^*(\mu)$  代替了三次样条线段  $\mathbf{x}_{s,j}(\mu)$ 。新函数保持与式 (31) 相同的形式，但具有修正的系数  $a_j^*, b_j^*, c_j^*, d_j^*$ ，这些系数通过求解方程组得到。选择修正的系数可保持局部样条线段的某些特性，但限制最大扰度为  $d$ 。确定这些修正的系数有 3 种情况，如图 7，限制系数值，使得  $\mathbf{x}_{s,j}^*(\mu)$  符合  $\mathbf{x}_{\partial\Omega}^{(j)}$  和  $\mathbf{x}_{\partial\Omega}^{(j+1)}$  的值。

第 1 种情况是：当单元边上的样条最大变形值  $\xi_{\max}$  位于边的“左 1/3”处，即  $-1 \leq r \leq -2/3$ ，此时，匹配  $\mathbf{x}_{s,j}(\mu_j + h)$  的右导数值，代替的多项式  $\mathbf{x}_{s,j}^*(\mu)$  的值等于在样条的最大变形  $\mu_{\max}$  处的  $\mathbf{x}_d$  值。第 2 种情况与第 1 种情况相反，此时，最大样条变形位于边的“右 1/3”处，即  $2/3 \leq r \leq 1$ ，匹配在  $\mathbf{x}_{s,j}(\mu_j)$  处的左导数值，等于在  $\mu_{\max}$  处的  $\mathbf{x}_d$  值。第 3 种情况是：当最大样条变形位于边的“中间 1/3”处，即  $-2/3 \leq r \leq 2/3$ ，限制代替函数，在离  $\mu_{\max}$  的两侧较小距离  $\delta$  处匹配  $\mathbf{x}_d$  值。

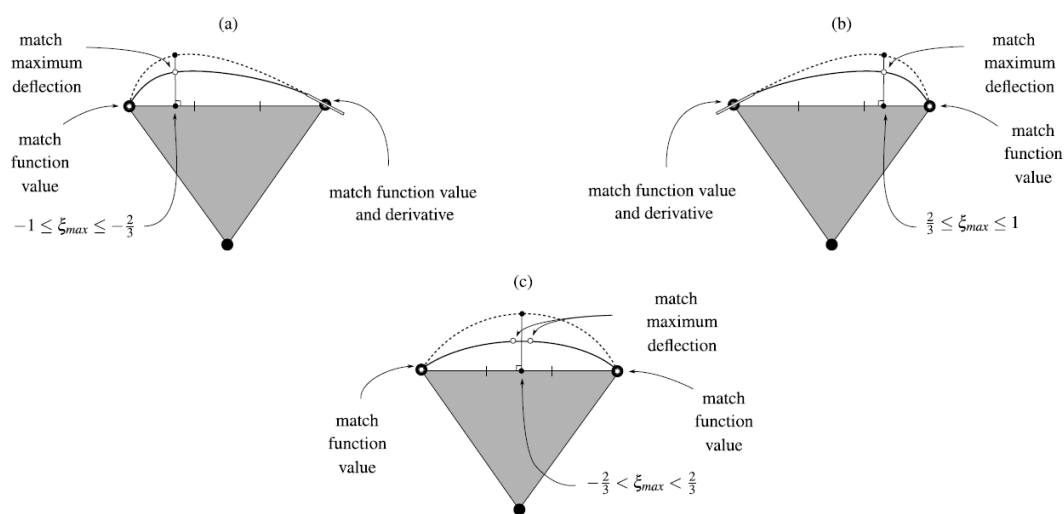


图 7 修正具有极端曲率的局部样条线段的策略：(a) 如果最大变形是在单元边的左 1/3 区段，代替样条的多项式应匹配：左右节点值、在最大变形处修正的变形坐标和样条的右导数值；(b) 如果最大变形是在单元边的右 1/3 区段，代替样条的多项式应匹配：左右节点值、在最大变形处修正的变形坐标和样条的左导数值；(c) 如果最大变形是在单元边的中间 1/3 区段，代替样条的多项式应匹配：左右节点值、在最大变形位置稍微移动  $\delta$  距离的左右修正变形坐标。

### 3.3 样条曲线曲率计算

通过确定沿样条的节点  $\{x_{\Psi,k}^{(n)}\}_{n=1,\dots,N_{\Psi,k}}$  的位置, 向单元  $\Omega_k$  引入弯曲边。首先使用线性单元转换, 分配节点  $\mathbf{x}_{\Psi,k}^{(n)}$ , 使得顶点间的其他节点位于直线边上。根据 Lengendre-Gauss-Lobatto 点  $\{\xi_{\partial\Psi,k,d}^{(m)}\}_{m=1,\dots,p_{\Psi,k}+1}$ , 各条边上有间距为  $d$  的节点。对于每个边界上的边, 移动沿直线边界的单元边上的节点, 使其与样条重合, 如图 8。

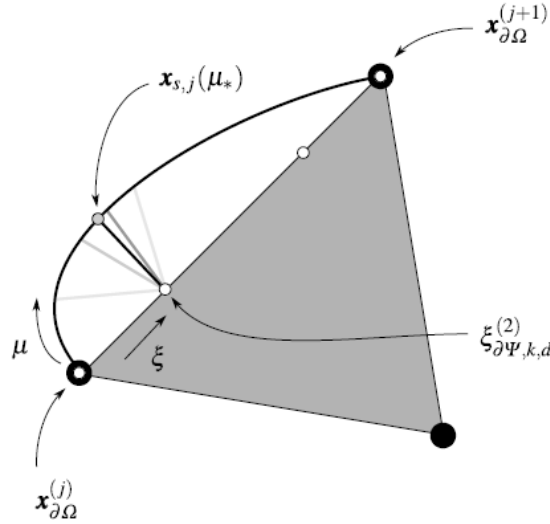


图 8 在最小化到直线边转换坐标的距离的位置, 计算样条曲线的曲率。样条曲线计算点满足迭代计算得到的阈值。

这通过定义最小化沿边界上的边和样条上的节点  $\mathbf{x}_{e,j} \left( \xi_{\partial\Psi,k,d}^{(m)} \right)$  之间的距离平方的  $\mu$  值来完成:

$$D(\mu) = \left( x_{s,j}(\mu) - x_{e,j} \left( \xi_{\partial\Psi,k,d}^{(m)} \right) \right)^2 + \left( y_{s,j}(\mu) - y_{e,j} \left( \xi_{\partial\Psi,k,d}^{(m)} \right) \right)^2 \quad (45)$$

因为直线边上节点的值是已知的，距离平方仅是  $\mu$  的函数。此时无需施加正交性限制条件，因为是最小化函数值，而不是最大化。通过找到 1 阶导数的根，确定函数最小值：

$$\frac{dD}{d\mu} = 2\left(x_{s,j}(\mu) - x_{e,j}\left(\xi_{\partial\Psi,k,d}^{(m)}\right)\right)\frac{dx_{s,j}}{d\mu} + 2\left(y_{s,j}(\mu) - y_{e,j}\left(\xi_{\partial\Psi,k,d}^{(m)}\right)\right)\frac{dy_{s,j}}{d\mu} \quad (46)$$

找到最小值  $\mu_*$  需要使用牛顿迭代法:

$$\mu_*^{(k+1)} = \mu_*^{(k)} - \frac{\frac{dD(\mu_*^{(k)})}{d\mu}}{\frac{d^2D(\mu_*^{(k)})}{d\mu^2}} \quad (47)$$

样条曲线曲率计算步骤，可确保沿着曲线边上的转换节点有合适的间距。因为三次样条曲线参数  $h$  为常数值时，以等间距  $\mu$  值计算的样条曲线，则不能将转换节点合理地布置于边上，这是因为常数值  $h$  造成变化的曲线上的节点间距。在连续的单元边之间的夹角很小时，根据式 (47) 定位节点变得尤其重要，因为此时样条曲线的曲率很大。使用 [Hesthaven and Warburton \(2008\)](#) 建议的映射和混合函数，确定内部单元转换点。

#### 4 高阶地形表征

与边界一样，高阶地形场也必须从测量数据集生成，生成的场必须是测量数据的泛函表征，使其对数值计算的影响与网格无关。可通过各种网格加密来保证地形场的一致性，因此保证 DG 解的收敛特性。地形表征通过使用滑动最小二乘 (MLS) 近似法来实现 (Levin, 2004)。MLS 法有很多优势：首先，可以很自然地处理散点数据，因为不需要规则的模板格子或设置散点个数；其二，最为最小二乘近似，给出高阶格式需要的一定程度的数据光滑；其三，为局部方法，因为仅需要计算点相邻的数据点，用于计算点值。这使得 MLS 法相比全局方法的计算效率更高。最后，MLS 法基于局部数据密度，给出不同程度的数据光滑，这对于非结构网格是很重要的，因为根据局部特征尺度，光滑数据可以恰当地光滑大尺度和小尺度的特征。

MLS 步骤从一套地形数据点  $\{B(\mathbf{x}_B^{(n)})\}_{n=1,\dots,N_B}$  开始，其中  $B(\mathbf{x}_B^{(n)})$  是在数据点  $\mathbf{x}_B^{(n)}$  处的地形值， $N_B$  是数据点的个数。MLS 表面的计算点是  $\mathbf{x}_j$ 。使用 *kd-tree* 方法找到落入距离  $\mathbf{x}_j$  半径  $R$  范围内的数据点  $\{\mathbf{x}_B^{(n)}\}_{n=1,\dots,\hat{N}_B}$ 。计算点周围的地形用  $p$  阶多项式近似计算：

$$\hat{b}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\hat{N}} \alpha_j^{(n)} \phi_j^{(n)}(\mathbf{x}) \quad (48)$$

其中，

$$\varphi_j^{(n)}(\mathbf{x}) = (x - x_j)^m (y - y_j)^l, \quad (m, l) \geq 0, \quad l + m \leq \hat{N} \quad (49)$$

以及  $\hat{N} = (\hat{p} + 1)(\hat{p} + 2) / 2$ 。求解如下方程组得到系数  $\alpha_j$ ：

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \alpha = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (50)$$

上式即是下列超定方程组：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \theta(\|\hat{\mathbf{x}}_B^{(1)} - \mathbf{x}_j\|) \varphi_j^{(1)}(\hat{\mathbf{x}}_B^{(1)}) & \dots & \theta(\|\hat{\mathbf{x}}_B^{(1)} - \mathbf{x}_j\|) \varphi_j^{(\hat{N})}(\hat{\mathbf{x}}_B^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \theta(\|\hat{\mathbf{x}}_B^{(\hat{N}_B)} - \mathbf{x}_j\|) \varphi_j^{(1)}(\hat{\mathbf{x}}_B^{(\hat{N}_B)}) & \dots & \theta(\|\hat{\mathbf{x}}_B^{(\hat{N}_B)} - \mathbf{x}_j\|) \varphi_j^{(\hat{N})}(\hat{\mathbf{x}}_B^{(\hat{N}_B)}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_j^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_j^{(\hat{N})} \end{bmatrix}}_{\alpha} = \underbrace{\begin{bmatrix} \theta(\|\hat{\mathbf{x}}_B^{(1)} - \mathbf{x}_j\|) B(\hat{\mathbf{x}}_B^{(1)}) \\ \vdots \\ \theta(\|\hat{\mathbf{x}}_B^{(\hat{N}_B)} - \mathbf{x}_j\|) B(\hat{\mathbf{x}}_B^{(\hat{N}_B)}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

此处， $\mathbf{A}$  是  $\hat{N}_B \times \hat{N}$  阶矩阵； $\theta(d)$  是计算如下的权重函数：

$$\theta(d) = \exp\left(-\frac{d^2}{(\sigma h_j)^2}\right) \quad (51)$$

该函数基于对各地形数据点到计算点的距离  $d$  分配贡献的权重。变量  $\sigma$  为光滑系数， $h_j$  为围绕计算点的局部点的间距丈量。 $\sigma$  越大，由周围数据点的贡献越大。 $kd$ -tree 搜索半径计算如下：

$$R = \sqrt{-(\sigma h_j)^2 \ln(\varepsilon)} \quad (52)$$

式中， $\varepsilon$  为确定在 MLS 近似中，距计算点多大的距离上可忽略数据点的贡献。

对单元  $\Omega_k$  中的每个高阶地形插值点  $\{\mathbf{x}_{b,k}^{(n)}\}_{n=1,\dots,N_b}$ ，求解式 (50)，这就确定了用于定义  $p_b$  阶地形表征所需的  $\{\hat{b}_k^{(n)}\}_{n=1,\dots,N_b}$  值，其中  $N_b = (p_b + 1)(p_b + 2) / 2$ 。地形节点位置在各单元内是 Legendre-Gauss-Lobatto 节点，因为较好的高阶插值特性，因此用来做地形插值节点，在这些节点处计算 MLS 表面的过程如图 9。地形的多项式表征的模(modal)系数  $\{\tilde{b}_k^{(n)}\}_{n=1,\dots,N_b}$ ，通过求解如下方程组来确定：

$$\mathbf{V}\tilde{\mathbf{b}}_k = \hat{\mathbf{b}}_k \quad (53)$$

式中,  $\tilde{\mathbf{b}}_k = [\tilde{b}_k^{(1)}, \dots, \tilde{b}_k^{(N_b)}]^T$ ,  $\hat{\mathbf{b}}_k = [\hat{b}_k^{(1)}, \dots, \hat{b}_k^{(N_b)}]^T$ ,  $\mathbf{V}$  为之前定义的范德蒙矩阵。

注意, 式 (53) 将导出  $C_0$  连续的地形场。

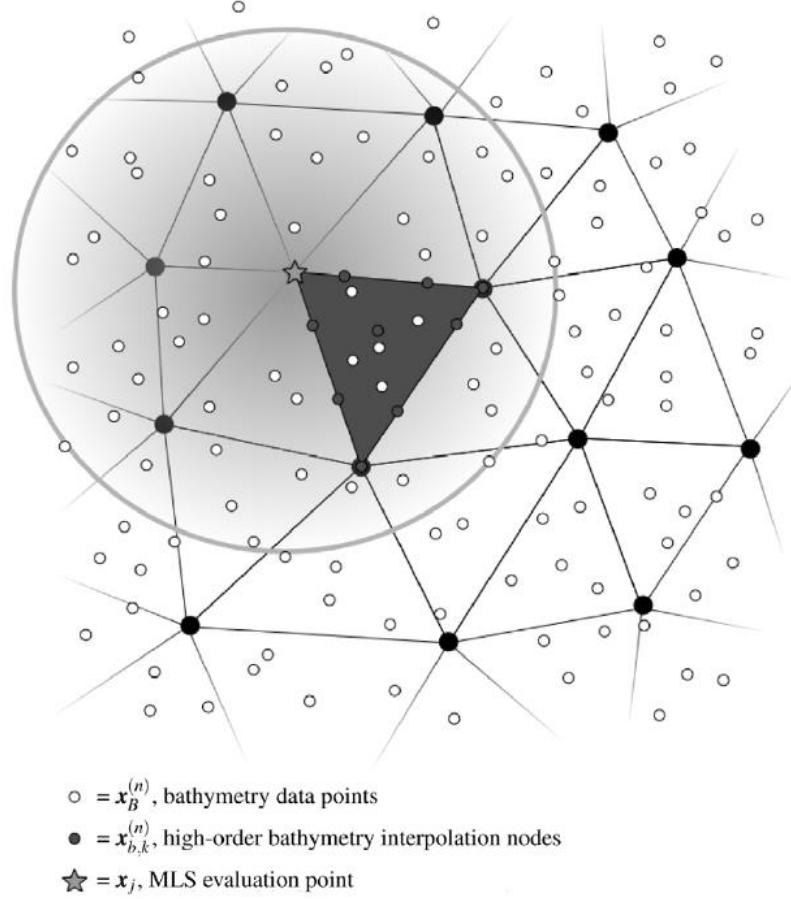


图 9 使用 MLS 近似一个单元上高阶地形插值节点的计算示意图。由于权重函数的指数衰减, 仅需要计算点周围的某些数据点。此处, 权重函数示意计算点周围的梯度。

## 5 网格压缩技术

实际应用中, 为实现近海岸的高阶方法的高效模拟, 依赖于创建粗化网格, 然后使用曲边单元和高阶地形, 提高数值精度。这样就可以在粗网格的较大单元上, 求解高分辨网格的亚格子尺度特征。可将现有的用于低阶方法模拟并可得到准确数值解的高分辨率网格, 转化为高阶方法使用的粗网格, 并达到相同等级的精度且计算效率更高。低阶方法通常需要高分辨率网格, 并使用观测数据验证计算结果。因此, 现有细网格包含很多细节信息, 需要仔细设计, 才能给出计算域

中某些关键位置的高分辨率数值解。因此，在粗化现有网格时，需要涉及能保留某种程度上的局部分辨率的技术是重要的。很多高质量网格包含了等值线跟踪的单元边，有助于识别地形特征，诸如航道、河岸或突变的大陆架等，应该约束这些单元边，是的在粗化网格中这些特征能得到保留。

本文使用的粗化网格策略是相邻节点剔除算法，这类似于非结构网格上为了实施多重网格算法而使用的最大值无关数据集的粗化算法。剔除算法考虑原始网格的每个节点，选择保留在粗网格的节点，除了已经确定保留下来的其他节点外，剔除它们的所有相邻节点，即与保留节点位于相同单元内的其他所有节点。为了避免过度改变边界几何形状，首先沿着网格的边界上实施保留或剔除节点的粗化步骤。然后，在对原始网格内描述地形特征的网格节点实施粗化步骤。当完成相邻节点的剔除步骤后，使用 Delaunay 三角化方法，确定剩余节点的单元连接关系。

粗化过程中必须考虑 2 个特殊情况。首先，随着网格粗化，一些小尺度的内部边界特征，如岛屿，可能由于低网格分辨率而被消除。任何少于 10 个单元边组成的岛屿边界都将保留下来，即所有的节点保持不变。第二，河道内仅有 1 个单元横跨断面，如果它们与保留节点相邻并位于边界的同一侧时，仅剔除这些节点。因此，位于河道横断面上的相邻节点将在粗化网格中保留，即使这些节点被约束在相同单元内，否则再判断是否要剔除掉。这个策略防止河道退化为单个节点或变的不能识别。

上述的网格压缩技术，充分考虑原始网格的局部网格分辨率以及沿地形特征的单元边的平行排列。但是，通常这不能生成高质量的单元形状。为解决这个问题，基于力的平衡，使用光滑算法，调整节点，改善网格质量。本质上，使用的光滑技术与 DistMesh 网格生成软件包的方法一样。但是，特别考虑了特征约束节点，防止这些节点被剔除。

网格压缩实施流程如图 10。显示的是 Galveston 港湾的局部放大网格，剔除相邻节点，粗化原始细网格，然后使用力的平衡算法光滑网格，重复该步骤。边的特征约束，以桔色表示，定位于沿着陡的地形梯度线上来定义航道。每步中这些边得到保留，确保在粗网格中能识别这些局部特征。最终的粗化网格包含高质量的单元，并保留原始网格中的局部分辨率的梯度特征。



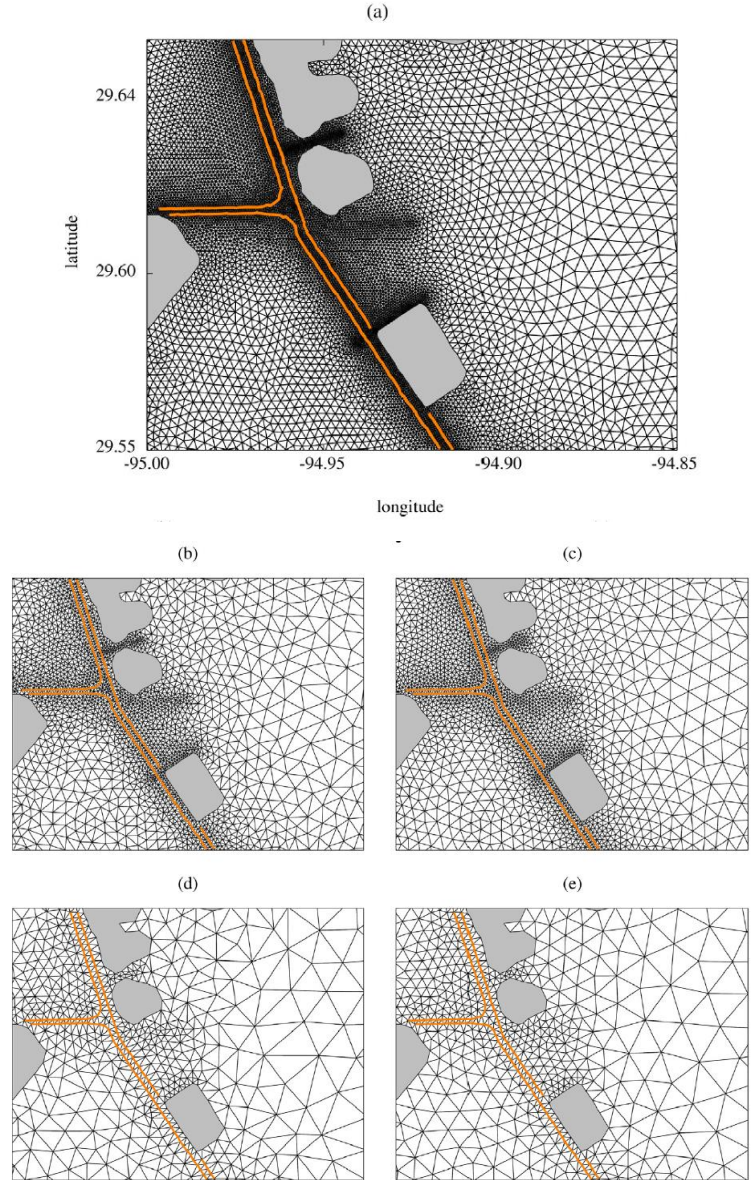


图 10 Galveston 海湾中 Fivemile 航道区域的网格压缩：(a) 原始网格；(b) 提出相邻节点后的粗化网格；(c) 光滑后的网格；(d)和(e)重复以上步骤后的粗网格。

桔色线表示在各网格中保留下来的特征约束。

## 6 高质量网格示例

基于三次样条的边界单元、MLS 高阶地形和网格压缩技术，整合在一起，用于创建适于高阶近似的网格。弯曲边界单元和高阶地形使粗网格能够捕捉亚格子尺度的特征，与原始的细网格一样。因此，使用线性近似求解细网格尺度特征时，网格太粗的情况，高阶方法就没有问题，高阶方法可以在粗网格上求解细网格的复杂特征，这就提高了高阶方法求解真实问题时的计算效率。

使用之前介绍的方法创建了 Galveston 海湾的高阶粗网格，用来评估高阶 DG



法的计算效率。图 11 比较了高阶的粗网格和原始细网格，以及具有直线边的边界单元的粗网格在 Alexander 岛附近区域的线性地形情况下的效果。如图 11(a)和(b)分别显示了覆盖网格和不覆盖网格下的细网格地形，可以得到相比粗网格更清晰的地形等值线。如图 11(a)和(c)，粗的高阶网格和线性细网格非常一致，尽管细网格的几何和地形特征更复杂，尤其是高阶表征深水航道区域。另外，曲边单元和高阶地形，能够步骤几乎所有的细网格几何和地形的亚格子尺度特征。通过比较，如图 11(d)，直线边单元、线性地形的粗网格，不能近似细网格的局部特征，效果较差。

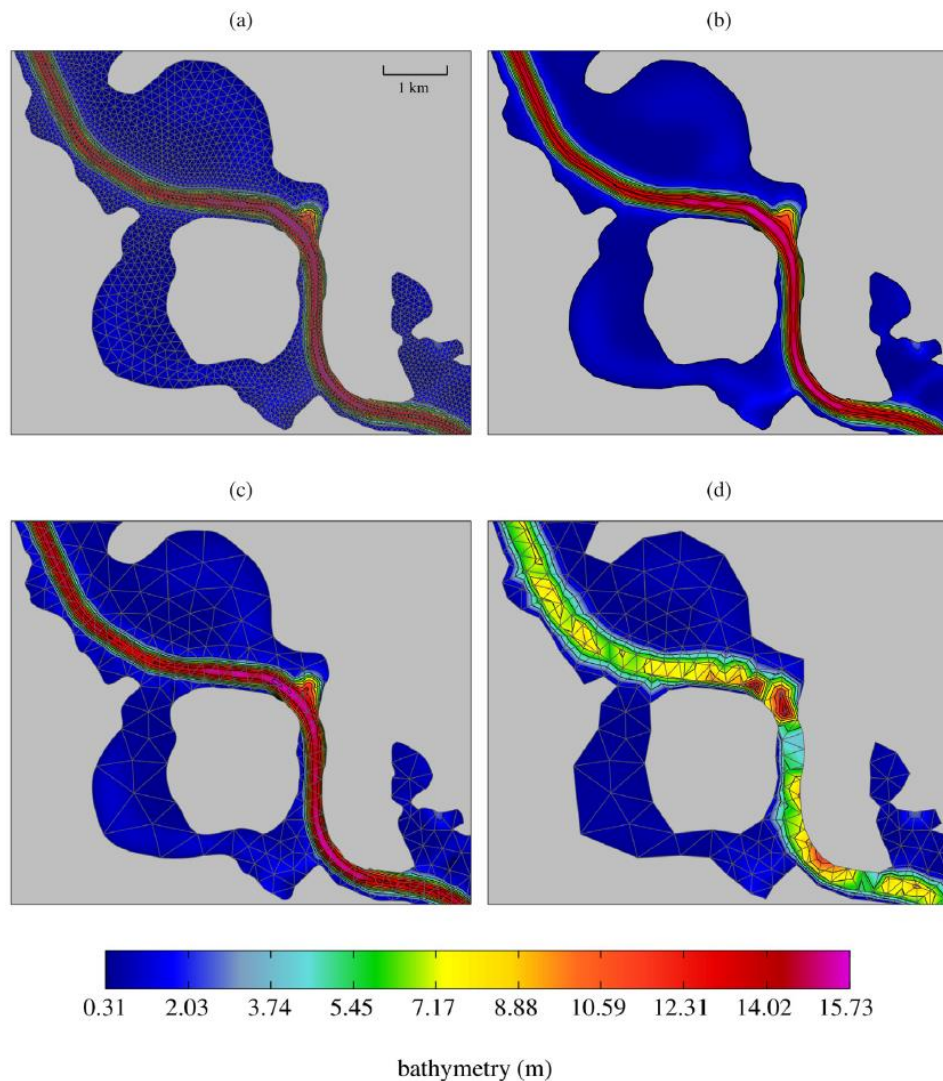


图 11 Galveston 海湾内在 Houston 航道汉道内 Alexander 岛区域内的高阶网格对比：(a)和(b)分别为有网格覆盖和无网格覆盖的高分辨率网格；(c) 有三次样条曲边单元和地形的高阶粗网格；(d) 使用直线边界和地形的高阶粗网格，不能识别航道和岛屿边界。

## 7 并行计算荷载均衡

曲边单元的计算量要高于直线边单元，额外的计算量是由于单元转换的非线性导致的。因为转换的导数在  $p_\psi \geq 2$  时不是常数值，在 DG 格式中这增加了积分公式的多项式阶数。因此，必须使用更高精度的高斯求积公式，来精确计算面积分和边上的线积分。另外，当  $\det(\mathbf{J}_k)$  不能移到质量矩阵积分的外面，基函数的正交性也不再保持，这就要求式 (15) 中的  $\mathcal{L}_h(\mathbf{Q}_h)$  乘以组合(full)质量矩阵的逆矩阵。

为了并行计算进行区域分解，如果单元是等份分配到各处理器上时与曲线单元有关的额外计算量造成荷载不均衡。此时，各子分区不大可能包含相同的曲线单元与直线单元的比例。子区域主要由直边单元组成时，必须在各 RK 步结束时，等待其它包含更高比例的曲边单元的子区域完成计算后，才能继续做时间推进计算。当处理器之间的计算荷载悬殊较大时，一部分处理器将处于长时间的闲置状态，因为这些处理器要等待包含曲线单元较多的处理器完成计算，这将导致显著的并行计算效率下降。

为了克服这个障碍，在区域分解时必须为单元分配权重，来平衡各子区域的计算荷载。含有高比例的曲线单元的子区域，应该整体上包含更少的单元，而大多是直边单元的子区域应分给更多的单元。METIS 图形分割软件可用来分解非结构网格，通过权重因子实现上述的区域分解功能。图 12 显示了使用不同权重因子时，Galveston 海湾的网格区域分解的大小。荷载不均衡的情况，各子区域上有大致相等的单元数，包含狭窄航道的子区域有更高比例的曲边单元，而开阔海洋的子区域包含更高比例的直边单元。随着增大权重因子，包含狭窄航道的子区域的大小缩小，而开阔海洋的子区域增大。通过试验，本研究取权重因子等于 6.0，在 3.0~9.0 之间取值对计算效率的影响不大。

基于操作计数，带有 1 个曲边的 DG 等参  $p=3$  单元，其计算次数近似是直边  $p=3$  单元的 2.75 倍。这里假设对曲边单元用 36 个面积分点，对直边单元用 12 个面积分点，对曲边用 7 个边积分点，对直边用 4 个边积分点。这里还考虑到这样一个事实：曲边单元需要组合质量矩阵的矩阵-向量相乘，而直边单元的质量矩阵是对角化的。因为仅沿着边界使用曲边单元，内部直线边之间的数值通量计

算与相邻单元（的直线边的数值通量计算）是共享的。这里没有考虑内存访问的影响，且假设每种操作的计算量相同，这与实际情况不符。实际比例可能更高，因为忽略了涉及边界条件的计算部分。

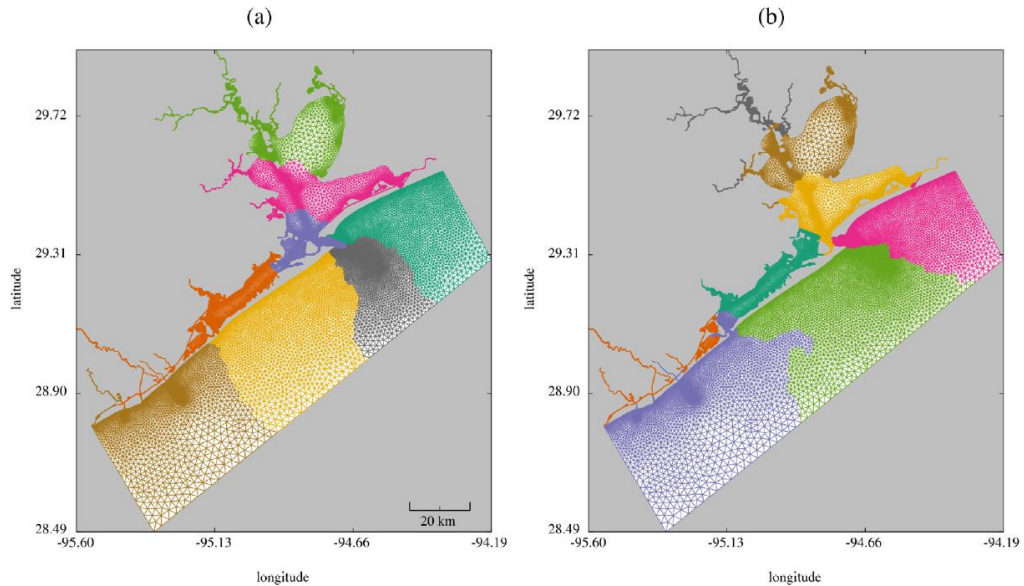


图 12 使用不同曲边单元权重因子时，区域分解对子区域大小的影响。各网格分解为 8 个子区域，各有不同的颜色：(a) 荷载不均衡情况，各子区域大致包含相等数据的单元；(b) 对曲边单元使用更大的权重因子，平衡各子区域上的计算量。

## 参考文献

低阶 DG 法求解浅水方程:

D. Schwanenberg, J. Kongeter, *A discontinuous Galerkin method for the shallow water equations with source terms*, in: B. Cockburn, G.E. Karniadakis, C.W. Shu (Eds.), *Discontinuous Galerkin Methods*, Springer, 2000, pp. 419-424.

H. Li, R. Liu, *The discontinuous Galerkin finite element method for the 2D shallow water equations*, *Math. Comput. Simulation* 56(3) (2001) 223-233.

S. Fagherazzi, P. Rasetarinera, M.Y. Hussaini, D.J. Furbish, *Numerical solution of the dam-break problem with a discontinuous Galerkin method*, *J. Hydraul. Eng.* 130 (6) (2004) 532-539.

D. Schwanenberg, M. Harms, *Discontinuous Galerkin finite-element method for transcritical two-dimensional shallow water flows*, *J. Hydraul. Eng.* 130 (5) (2004) 412-421.

V. Aizinger, C. Dawson, *A discontinuous Galerkin method for two-dimensional flow and transport in shallow water*, *Adv. Water Resour.* 25 (1) (2002) 67-84.

B. de Brye, A. de Brauwere, O. Gourgue, T. Karna, J. Lambrechts, R. Comblen, E. Deleersnijder,

*A finite-element, multi-scale model of the scheldt tributaries, river, estuary and ROFI, Coast. Eng.* 57 (9) (2010) 850-863.

C. Dawson, E.J. Kubatko, J.J. Westerink, C. Trahan, C. Mirabito, C. Michoski, N. Panda, 2010. *Discontinuous Galerkin methods for modeling hurricane storm surge, Adv. Water Resour.* 34: 1165-1176.

#### 高阶 DG 法求解浅水方程:

F. Giraldo, J. Hesthaven, T. Warburton, *Nodal high-order discontinuous Galerkin methods for the spherical shallow water equations, J. Comput. Phys.* 181 (2) (2002) 499-525.

C. Eskilsson, S.J. Sherwin, *A triangular spectral/hp discontinuous Galerkin method for modelling 2D shallow water equations, Internat. J. Numer. Methods Fluids* 45 (2004) 605-623.

E.J. Kubatko, J.J. Westerink, C. Dawson, *hp Discontinuous Galerkin methods for advection dominated problems in shallow water flow, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196 (2006) 437-451.

F.X. Giraldo, T. Warburton, *A high-order triangular discontinuous Galerkin oceanic shallow water model, Internat. J. Numer. Methods Fluids* 56 (7) (2008) 899-925.

#### 高阶 DG 法的理想算例:

H. Salehipour, G. Stuhne, W. Peltier, *A higher order discontinuous Galerkin, global shallow water model: Global ocean tides and aquaplanet benchmarks, Ocean Model.* 69 (0) (2013) 93-107.

P. Bernard, J. Remacle, V. Legat, *Boundary discretization for high-order discontinuous Galerkin computations of tidal flows around shallow water islands, Internat. J. Numer. Methods Fluids* 59 (5) (2009) 535.

D. Wirasaet, S. Brus, C. Michoski, E. Kubatko, J. Westerink, C. Dawson, *Artificial boundary layers in discontinuous Galerkin solutions to shallow water equations in channels, J. Comput. Phys.* 299 (2015) 597-612.

#### 曲线边界和高阶地形源项:

D. Wirasaet, E. Kubatko, C. Michoski, S. Tanaka, J. Westerink, C. Dawson, *Discontinuous Galerkin methods with nodal and hybrid modal/nodal triangular, quadrilateral, and polygonal elements for nonlinear shallow water flow, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 270 (2014) 113-149.

F. Bassi, S. Rebay, *High-order accurate discontinuous finite element solution of the 2D Euler equations, J. Comput. Phys.* 138 (1997) 251-285.

Y. Xing, C.-W. Shu, *A new approach of high order well-balanced finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for a class of hyperbolic systems with source terms, Commun. Comput. Phys.* 1 (1) (2006) 100-134.

#### 高阶网格生成:

S. Sherwin, J. Peiro, *Mesh generation in curvilinear domains using high-order elements, Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 53 (1) (2002) 207-223.

X.J. Luo, M.S. Shephard, R.M. Obara, R. Nastasia, M.W. Beall, *Automatic p-version mesh*

generation for curved domains, *Eng. Comput.* 20 (3) (2004) 273-285.

P.O. Persson, J. Peraire, Curved mesh generation and mesh refinement using Lagrangian solid mechanics, in: *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, 2009, p. 949.

T. Toulorge, C. Geuzaine, J.-F. Remacle, J. Lambrechts, Robust untangling of curvilinear meshes, *J. Comput. Phys.* 254 (2013) 8-26.

Z.Q. Xie, R. Sevilla, O. Hassan, K. Morgan, The generation of arbitrary order curved meshes for 3D finite element analysis, *Comput. Mech.* 51 (3) (2013) 361-374.

M. Fortunato, P.-O. Persson, High-order unstructured curved mesh generation using the Winslow equations, *J. Comput. Phys.* 307 (2016) 1-14.

#### **GMSH 和 NEKMESH**

C. Geuzaine, J.-F. Remacle, Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 79 (11) (2009) 1309-1331.

M. Turner, J. Peiro, D. Moxey, Curvilinear mesh generation using a variational framework, *Comput. Aided Des.* 103 (2018) 73-91.

#### **低阶网格转换为高阶网格:**

J. Ims, Z. Wang, Automated low-order to high-order mesh conversion, *Eng. Comput.* (2018) 1-13.

X. Jiao, D. Wang, Reconstructing high-order surfaces for meshing, *Eng. Comput.* 28 (4) (2012) 361-373.

#### **节点 DG 法:**

J.S. Hesthaven, T. Warburton, *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Application*, Springer Science & Business Media, 2008.

#### **高阶地形表征:**

P. Lancaster, K. Salkauskas, Surfaces generated by moving least squares methods, *Math. Comp.* 37 (155) (1981) 141-158.

D. Levin, Mesh-independent surface interpolation, in: *Geometric Modeling for Scientific Visualization*, Springer, 2004, pp. 37-49.