DG 法的基本原理和稳定性分析（Shu Chi-Wang, 1998）

1 DG 法综述

----------------------Shu, 1998------------------------

间断 Galerki (DG)法是一类使用完备的不连续基函数的有限单元法，基函数通常选为分段多项式。因为基函数可以是完备不连续的，DG 法具有连续有限单元法不具备的灵活性，比如允许有悬挂节点的任意三角网格、自由改变每个单元内的多项式阶数，与周围相邻单元的无关（*p* 自适应性）、局部性数据结构（单元仅与其紧密相邻单元通信，与格式的精度（阶）无关）以及非常高的并行效率（通常在固定网格上可达 99%，在动态荷载均衡的自适应网格上可达 80%）(Biswas et al., 1994)。*h-p* 自适应、并行动态荷载均衡和高效求解特性的 DG 法模拟 Rayleigh-Taylor 流动不稳定性的研究参考(Remacle et al., 2003)。

DG 法首次由 Reed and Hill (1973)引入求解中子输移方程，求解方程是恒定线性双曲型方程。DG 法的主要发展由 Cockburn 完成，建立可求解非线性、时间相关问题，诸如可压缩欧拉方程，使用显格式、非线性稳定高阶 Runge-Kutta 时间离散和具有精确或近似的界面通量的黎曼求解器的 DG 空间离散以及总方差有界(total variation bounded, TVB)的非线性限制器，实现了强激波的非振荡数值特性。

----------------------------Cockburn, 1998---------------------------------

有多种使用 DG 法离散方程中时间、空间或两者的方法。本文考虑使用 DG 法离散空间项，联合使用显式 Runge-Kutta 时间推进算法，称之为 RKDG 法，由(Cockburn and Shu, 1989; 1998; 2001)引入和发展，用于求解对流占优的非线性双曲型方程组，以及称为局部 DG 法(LDG; Local discontinuous Galerkin)，用于求解非线性的对流-扩散方程，LDG 首先由 Bassi and Rebay(1997)建立，用于求解可压缩 Navier-Stokes 方程，由 Cockburn and Shu(1998)拓展至一般的对流扩散方程求解。

DG 法的空间离散具有高阶精度，灵活处理复杂几何边界和容易处理边界条件。并且，不连续性单元可生成块对角质量矩阵，容易求逆。采用高阶时间离散格式，如 Runge-Kutta 法，可高度并行化。最后，RKDG 法使用 van Leer 发展的“坡度限制器”，可有效抑制在数值解的不连续或强梯度处产生的数值振荡。

为研究 RKDG 法，可将其视为“单调性”的非常稳定和 1 阶精度的数值格式的高阶精度的“扰动”。的确，就是要设计能获得高阶精度的 RKDG 法并保持单调数值格式的稳定性。RKDG 法并不是一种全新的数值方法，它的基本思想来自于非线性守恒律的有限差分法和有限体积法的“高分辨率”格式。因此，RKDG 法吸纳了这些成功的思想，融入到 DG 法的框架下，并利用了有限单元法的优势。

DG 法已应用于包括电磁动力学、气体动力学、颗粒流、磁流体力学、浅水方程、物理海洋、油气存储、半导体设备、空隙介质污染物输移、水轮机、紊流、粘弹性流、天气预报等研究领域(Cockburn et al., 2000)。关于 DG 法的算法细节可参考讲义(Cockburn, 1999)以及综述论文(Cockburn, 2001)。

2 时间离散

重点介绍 Method of lines DG 法，即不离散时间变量。下面简要介绍时间离散格式。

双曲型问题或对流占优问题，诸如高 Reynolds 数 Navier-Stokes 方程，通常使用高阶非线性稳定的 Runge-Kutta 时间离散格式。

对于高阶的时间离散，使用 strong stability preserving (SSP) Runge-Kutta 或者多步法(Gottlieb et al., 2009)，该类方法是向前 Euler 步离散法的混合方法。例如，令 $u_t = L(u,t)$ 表示由有限体积法或 DG 法做高阶空间离散后的半离散格式，则 3 阶 SSP Runge-Kutta 法计算如下：

$$
\begin{aligned}
u_h^{(1)} &= u_h^n + \Delta t \mathcal{L}\left(u_h^n, t^n\right) \\
u_h^{(2)} &= \frac{3}{4} u_h^n + \frac{1}{4}\left(u_h^{(1)} + \Delta t \mathcal{L}\left(u_h^{(1)}, t^n + \Delta t\right)\right) \\
u_h^{n+1} &= \frac{1}{3} u_h^n + \frac{2}{3}\left(u_h^{(2)} + \Delta t \mathcal{L}\left(u_h^{(2)}, \right) t^n + \frac{\Delta t}{2}\right)
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

为获得 bound-preserving 高阶 FVM 格式或 DG 格式，需要使用 SSP 时间离散式（1）和单调的数值通量 f 。然后，在 Runge-Kutta 法或多步法的每个时间步上，使用简单的限制器。

此类格式是高阶的或低存储量的。具体细节可参考调查性文献(Shu C.-W., 2002)和综述性文献(Gottlieb et al., 2001)。

如果 PDE 包含高阶的空间导数，且系数值很小，则显格式的时间推进方法，如 Runge-Kutta 法将导致时间步长受到严格限制。如何建立此类方程求解的高效时间离散格式，并且仍然保持 DG 法的优势，如局部特性和并行效率，是一个值得深入研究的课题(Xia et al., 2007)。

3 DG 法求解守恒方程

DG 法是求解双曲型守恒方程的有效数值方法，可以有不连续性近似解。下面讨论 DG 法求解双曲型守恒方程的算法公式、稳定性分析和误差评估。

介绍的层次为：1D 标量守恒律 →

3.1 2D 恒定线性方程

首先介绍原始的 DG 法求解 2D 恒定态线性对流方程：

$$au_x + bu_y = f(x,y), \quad 0 \le x, y \le 1 \qquad (3.1)$$

式中，a 和 b 为常数。假设 a>0，b>0。

当施加以下入流边界条件后，式（3.1）是 well-posed 问题。

$$\begin{aligned} u(x,0) &= g_1(x), \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0,y) &= g_2(y), \quad 0 \le y \le 1 \end{aligned} \qquad (3.2)$$

假设使用矩形网格覆盖计算域$[0,1]^2$，包含以下单元（$1 \le i \le N_x, 1 \le j \le N_y$）：

$$I_{i,j} = \left\{ (x,y) : x_{i-\frac{1}{2}} \le x \le x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}} \le y \le y_{j+\frac{1}{2}} \right\}$$

其中，

$$\begin{aligned} 0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \cdots < x_{N_x+\frac{1}{2}} = 1 \\ 0 = y_{\frac{1}{2}} < y_{\frac{3}{2}} < \cdots < y_{N_y+\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

上式坐标为在[0,1]的 x, y 轴上的离散点。

还可以标记：

$$\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, 1 \le i \le N_x; \quad \Delta y_j = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}, 1 \le j \le N_y$$

以及

$$h=\max\left(\max_{1\le i\le N_x}\Delta x_i,\max_{1\le j\le N_y}\Delta y_j\right)$$

假设网格是规则的，即存在常数 $c>0$，与 h 无关，因此：

$$\Delta x_i\ge ch,\quad 1\le i\le N_x;\quad \Delta y_j\ge ch,\quad 1\le j\le N_y$$

再定义有限单元空间由下列分段多项式组成：

$$V_h^k=\left\{v:v|_{I_{i,j}}\in P^k\left(I_{i,j}\right);1\le i\le N_x,1\le j\le N_y\right\}\qquad（3.3）$$

式中，$P^k\left(I_{i,j}\right)$表示在单元$I_{i,j}$上定义的直到k阶的多项式集合。注意在空间V_h^k内的函数可能在穿过单元界面处是不连续的。

求解式（3.1）的 DG 法定义如下：对所有试函数$v_h\in V_h^k$和所有$1\le i\le N_x$,$1\le j\le N_y$，找到唯一的函数$u_h\in V_h^k$满足：

$$\begin{aligned}&-\iint_{I_{i,j}}\left(au_h\left(v_h\right)_x+bu_h\left(v_h\right)_y\right)dxdy+a\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}}\hat{u}_h\left(x_{i+\frac{1}{2}},y\right)v_h\left(x_{i+\frac{1}{2}}^-,y\right)dy\\&-a\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}}\hat{u}_h\left(x_{i-\frac{1}{2}},y\right)v_h\left(x_{i-\frac{1}{2}}^+,y\right)dy+b\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\hat{u}_h\left(x,y_{j+\frac{1}{2}}\right)v_h\left(x,y_{j+\frac{1}{2}}\right)dx\\&-b\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\hat{u}_h\left(x,y_{j-\frac{1}{2}}\right)v_h\left(x,y_{j-\frac{1}{2}}^+\right)dx=0\end{aligned}\qquad（3.4）$$

这里，u_h是数值通量，是定义在单元界面处的单值函数，与界面两侧的数值解u_h有关，因为界面处的u_h是不连续的。对于简单的线性对流 PDE 式（3.1），可选择迎风格式的数值通量格式：

$$\hat{u}_h\left(x_{i+\frac{1}{2}},y\right)=u_h\left(x_{i+\frac{1}{2}}^-,y\right),\quad \hat{u}_h\left(x,y_{j+\frac{1}{2}}\right)=u_h\left(x,y_{j+\frac{1}{2}}^-\right)$$

注意到，对于边界单元 i=1，左侧边的数值通量使用给定的边界条件计算：

$$\hat{u}_h\left(x_{\frac{1}{2}},y\right)=g_2(y)$$

类似地，对于边界单元 j=1，底部边的数值通量使用给定的边界条件计算：

$$\hat{u}_h\left(x,y_{\frac{1}{2}}\right)=g_1(x)$$

现在考察格式（3.4）的实施。如果选择$P^k\left(I_{i,j}\right)$的一个局部基函数，表示为

$\varphi_{i,j}^{\ell}(x,y)$（$\ell=1,2,\cdots,K=(k+1)(k+2)/2$），数值解可表述为：

$$u_h(x,y)=\sum_{\ell=1}^{K}u_{i,j}^{\ell}\varphi_{i,j}^{\ell}(x,y),\quad (x,y)\in I_{i,j}$$

需要求解系数：

$$u_{i,j}=\begin{pmatrix}u_{i,j}^{1}\\ \vdots\\ u_{i,j}^{K}\end{pmatrix}$$

根据格式（3.4），上式满足线性方程：

$$A_{i,j}u_{i,j}=rhs \qquad (3.5)$$

式中，$A_{i,j}$ 为 $K\times K$ 矩阵，第 (ℓ,m) 个元素计算如下：

$$\begin{aligned}a_{i,j}^{\ell,m} \;=\; & -\int\int_{I_{i,j}}\left(a\varphi_{i,j}^{m}(x,y)(\varphi_{i,j}^{\ell}(x,y))_x+b\varphi_{i,j}^{m}(x,y)(\varphi_{i,j}^{\ell}(x,y))_y\right)dxdy \qquad (3.6)\\ & +a\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\varphi_{i,j}^{m}(x_{i+\frac{1}{2}},y)\varphi_{i,j}^{\ell}(x_{i+\frac{1}{2}},y)dy+b\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\varphi_{i,j}^{m}(x,y_{j+\frac{1}{2}})\varphi_{i,j}^{\ell}(x,y_{j+\frac{1}{2}})dx,\end{aligned}$$

RHS 向量的第 l 个元素计算如下：

$$rhs^{\ell}=a\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}u_h(x_{i-\frac{1}{2}}^{-},y)\varphi_{i,j}^{\ell}(x_{i-\frac{1}{2}},y)dy+b\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}u_h(x,y_{j-\frac{1}{2}}^{-})\varphi_{i,j}^{\ell}(x,y_{j-\frac{1}{2}})dx$$

依赖于在左侧单元 $I_{i-1,j}$ 和底部单元 $I_{i,j-1}$ 上的 u_h 信息，如果他们是在计算域内，或者在边界条件上，如果一个或两个单元都在计算域以外。

显然，该方法没有涉及到大型方程组求解，容易实施。Lesaint and Raviart[25] 证明当使用 k 阶多项式的分段张量积作为基函数时，该方法在 L^2 范数上以最优精度（阶）为 $O\left(h^{k+1}\right)$ 收敛。数值试验表明：当使用常用的 k 阶分段多项式时也可以达到最优收敛速度。

上述方法可在任意三角网格上设计和实施。$O\left(h^{k+1/2}\right)$ 的 L^2 误差评估，其中 k 是多项式的阶，h 为网格尺寸（数值解足够光滑时）。大多数情况下，最优误差界为 $O\left(h^{k+1}\right)$，实际数值计算中，也可观察到最优精度可达 $O\left(h^{k+1}\right)$。

但是，尽管方法（3.4）容易精确、有效地实施，但不能统一地用于线性方程组，其中特征线信息来自不同方向，或者对于非线性方程组，特征线方向与解本身有关。

3.2 1D 非恒定守恒律

当仅使用 DG 法离散空间变量时，可解决方法（3.4）不能用于线性和非线性方程组的问题，时间离散可采用显格式的 Runge-Kutta 方法（2.1）实现。该方法称为 Runge-Kutta DG（RKDG）法[10,12,13,14,15]。

考察以下 1D 标量守恒方程：

$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad （3.7）$$

假设如下网格覆盖计算域[0,1]，由单元 $I_i = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$（$1 \le i \le N$）组成，其中：

$$0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \cdots < x_{N+\frac{1}{2}} = 1$$

标记：

$$\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, \quad 1 \le i \le N; \quad h = \max_{1\le i\le N} \Delta x_i$$

假设网格是规则的，即存在常数 c>0，与 h 无关，因此：

$$\Delta x_i \ge ch, \quad 1 \le i \le N$$

寻找 u 的近似阶 u_h，在各时间 $t \in [0,T]$ 上满足 $u_h(t)$ 属于以下由分段多项式组成的有限单元空间：

$$V_h^k = \left\{ v : v|_{I_i} \in P^k\left(I_i\right); 1 \le i \le N \right\} \qquad （3.8）$$

$$V_h = V_h^k \equiv \left\{ v \in L^1(0,1) : v|_{I_i} \in P^k\left(I_i\right), i = 1, \ldots, N \right\}$$

其中，$P^k\left(I_i\right)$ 表示在单元 I_i 上定义的直到 k 阶的多项式集合。求解方程（3.7）的半离散式 DG 法定义如下：对所有试函数 $v_h \in V_h^k$ 和所有 $1 \le i \le N$，找到唯一函数 $u_h = u_h(t) \in V_h^k$ 满足：

$$\int_{I_j} \partial_t u(x,t) v(x) dx - \int_{I_j} f(u(x,t)) \partial_x v(x) dx$$
$$+ f\left(u\left(x_{j+1/2}, t\right)\right) v\left(x_{j+1/2}^-\right) - f\left(u\left(x_{j-1/2}, t\right)\right) v\left(x_{j-1/2}^+\right) = 0$$

$$\int_{I_j} u(x,0) v(x) dx = \int_{I_j} u_0(x) v(x) dx \qquad （初始条件）$$

因为函数 u_h 在点 $x_{i+1/2}$ 处不连续，必须将非线性‘通量’ $f\left(u\left(x_{j+1/2}, t\right)\right)$ 用‘数

值通量’代替，数值通量与在点$(x_{j+1/2},t)$处的 2 个u_h值有关，定义为如下函数：

$$h(u)_{j+1/2}(t)=h\left(u\left(x_{j+1/2}^{-},t\right),u\left(x_{j+1/2}^{+},t\right)\right)$$

该数值通量格式后面要做适当选择。注意，不管有限单元空间的形式如何，总是使用相同的数值通量格式。因此，由 DG 空间离散得到的近似解定义为求解如下弱形式公式：

$$\forall i=1,\dots,N,\quad \forall v_h\in P^k\left(I_i\right):$$

$$\begin{aligned}&\int_{I_i}\left(u_h\right)_t\left(v_h\right)dx-\int_{I_i}f\left(u_h\right)\left(v_h\right)_x dx\\&+\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}v_h\left(x_{i+\frac{1}{2}}^{-}\right)-\hat{f}_{i-\frac{1}{2}}v_h\left(x_{i-\frac{1}{2}}^{+}\right)=0\end{aligned}\qquad (3.9)$$

此处，$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}$为数值通量，是定义在单元界面处的单值函数，通常与界面两侧的数值解u_h的值有关：

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}=\hat{f}\left(u_h\left(x_{i+\frac{1}{2}}^{-},t\right),u_h\left(x_{i+\frac{1}{2}}^{+},t\right)\right)$$

3.2.1 单元熵不等式和 L^2 稳定性

式（3.7）的弱解形式可能不唯一，唯一和物理相关的弱解（称为熵解），对于满足$U''(u)\geq 0$的任意凸集的熵 $U(n)$和对应的熵通量$F(u)=\int^{u}U'(u)f'(u)du$，满足如下分布意义上的熵不等式：

$$U(u)_t+F(u)_x\leq 0\qquad (3.10)$$

对于任意凸型熵$U(u)$满足$U''(u)\geq 0$，对应的熵通量$F(u)=\int^{u}U'(u)f'(u)du$。如果对（3.7）的数值近似也与（3.10）一样拥有相似的熵不等式，则 very nice。通常证明对有限差分和有限体积格式的离散熵不等式是非常困难的，特别是对于高阶格式或者当通量函数 $f(u)$非凸型或凹型时。但是，容易证明 DG 格式（3.9）满足单元熵不等式。

定理 3.1 半离散 DG 格式（3.9）的近似解u_h满足如下单元熵不等式：

$$\frac{d}{dt}\int_{I_i}U\left(u_h\right)dx+\hat{F}_{i+\frac{1}{2}}-\hat{F}_{i-\frac{1}{2}}\leq 0\qquad (3.11)$$

对平方熵$U(u)=\dfrac{u^2}{2}$，对于一些一致性熵通量：

$$\hat{F}_{i+\frac{1}{2}}=\hat{F}\left(u_h\left(x_{i+\frac{1}{2}}^-,t\right),u_h\left(x_{i+\frac{1}{2}}^+,t\right)\right)$$

满足$\hat{F}(u,u)=F(u)$。

定理 3.2 对于周期性边界条件或紧支边界条件，半离散 DG 格式（3.9）的解u_h满足如下L^2稳定性：

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left(u_h\right)^2dx\le 0 \qquad (3.17)$$

或者

$$\left\|u_h(\cdot,t)\right\|\le\left\|u_h(\cdot,0)\right\| \qquad (3.18)$$

此处或后文，未标记的范数均为L^2范数。

3.3 数值通量

为完成近似解u_h的定义，剩下的工作就是选择数值通量 h。为此，希望构建是所谓的单调性扰动的格式，尽管仅有 1 阶精度，但非常稳定，可收敛到熵解。更准确地说，当 k=0，且当近似解为分段常数函数时，DG 空间离散给出单调格式。

因为在此种情况下，对于$x\in I_i$，有：

$$u_h(x,t)=u_i^0$$

将弱形式公式写为如下形式：

$$\begin{aligned}&\forall j=1,\ldots,N:\\&\partial_t u_j^0(t)+\left\{h\left(u_j^0(t),u_{j+1}^0(t)\right)-h\left(u_{j-1}^0(t),u_j^0(t)\right)\right\}/\Delta_j=0\\&u_j^0(0)=\frac{1}{\Delta_j}\int_{I_j}u_0(x)dx\end{aligned}$$

单调性数值通量格式 $f(a,b)$满足如下条件：

（1）一致性：$\hat{f}(u,u)=f(u)$；

（2）连续性：$\hat{f}\left(u^-,u^+\right)$对于变量$u^-$和$u^+$至少是 Lipschitz 连续的；

（3）单调性：$\hat{f}\left(u^{-},u^{+}\right)$对于其第 1 个变量$u^{-}$是非递减函数，对于第 2 个变量$u^{+}$是非递增函数，符号标记为$\hat{f}(\uparrow,\downarrow)$。

常见的单调性通量包括：

（1）Local Lax-Friedrichs 通量：

$$\hat{f}^{LLF}\left(u^{-},u^{+}\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(u^{-}\right)+f\left(u^{+}\right)-\alpha\left(u^{+}-u^{-}\right)\right)$$

$$\alpha=\max_{\min(a,b)\le s\le\max(a,b)}\left|f'(u)\right|$$

（2）Godunov 通量：

$$\hat{f}^{God}\left(u^{-},u^{+}\right)=\begin{cases}\min_{u^{-}\le u\le u^{+}} f(u), & \text{if } u^{-}<u^{+}\\ \max_{u^{+}\le u\le u^{-}} f(u), & \text{if } u^{-}\ge u^{+}\end{cases}$$

（3）Engquist-Osher 通量：

$$\hat{f}^{EO}=\int_{0}^{u^{-}}\max\left(f'(u),0\right)du+\int_{0}^{u^{+}}\min\left(f'(u),0\right)du+f(0)$$

（4）具有“熵固定”的 Roe 通量格式：

$$h^{R}(a,b)=\begin{cases}f(a), & \text{if } f^{'}(u)\ge 0 \text{ for } u\in[\min(a,b),\max(a,b)]\\ f(b), & \text{if } f^{'}(u)\le 0 \text{ for } u\in[\min(a,b),\max(a,b)]\\ h^{LLF}(a,b), & \text{otherwise}\end{cases}$$

使用 Godunov 通量 h^{G} 计算通量 h，因为 Godunov 格式产生最小量的人工(数值）粘性。局部 Lax-Friedrichs 格式比 Godunov 格式产生的人工粘性要大，但计算效率相似。当然，如果 f 太复杂，则使用 Lax-Friedrichs 格式。但是，数值试验表明：随着近似解的阶数 k 增大，选择使用的数值通量格式对近似解的质量影响不大。

对流占优问题的 DG 法介绍(Cockburn, 1998)

2.1 原始的 DG 法

最原始的 DG 法是由 Reed and Hill (1973)引入用于求解中子输运方程：

$$\sigma u+div(\bar{a}u)=f$$

式中，σ 为实数；$\bar{a}$ 为常数矢量。

该方程为线性方程，当单元在特征线方向上适当排序后，可逐单元地做近似

计算。LeSaint and Raviart 首次对该方法做了分析，证明在一般三角网格上的收敛速率为 $(\Delta x)^k$，在笛卡尔网格上的收敛速率为 $(\Delta x)^{k+1}$。

2.2 非线性双曲系统：RKDG 法

非线性双曲守恒律：

$$u_t + \sum_{i=1}^{d} \left(f_i(u) \right)_{x_i} = 0$$

再加上合适的初始和边界条件。但是，非线性不允许逐单元地求解近似解。连续 FEM 必须一次性求解非线性方程组，这对于双曲型问题的计算效率很低。

1D 标量守恒律

为避免以上困难，Chavent and Salzano( )建立了 1D 标量守恒律的显格式的 DG 法，采用分段线性单元的 DG 法做空间离散，使用简单的欧拉格式做时间离散，后来证明该格式是无条件不稳定的。为改进该格式的稳定性，Chavent and Cockburn( )引入 van Leer 的坡度限制器，获得了证明是 total variation diminishing in the means (TVDM)和 total variation bounded (TVB)的格式，CFL<1/2。另一方面，该格式仅为时间 1 阶精度，坡度限制器平衡了在光滑区由线性不稳定性引起的数值振荡，反而影响了这些区域的数值解的质量。

这些困难由 Cockburn and Shu 克服，引入第一个 Runge Kutta DG 方法。RKDG 法中：（1）保持分段线性 DG 法做空间离散；（2）使用显格式的 TVD 的 2 阶精度的 Runge-Kutta 类型的时间离散格式(Shu and Cockburn,)；（3）修改坡度限制器，保持在极值处格式的精度。证明该格式为线性稳定(CFL<1/3)，在光滑区及极值处，时空精度都能达到 2 阶，在没有发生数值振荡的激波过渡区，可收敛至熵解。

Cockburn and Shu(1989)构建高阶精度的 RKDG 法用于标量守恒律。为了构建 k+1 阶精度的 RKDG 法，做法是：（1）使用 k 阶多项式的 DG 法做空间离散；（2）TVD 的 k+1 阶精度的显格式时间离散；（3）通用的坡度限制器。通用的坡度限制器是为了得到 TVDM 特性而不破坏格式的精度而精心设计的。Cockburn and Shu (1989)的数值试验表明：当 k=1, 2，在远离不连续区和在没有数值振荡的激波过渡区的光滑区可达到 k+1 阶精度，都可收敛至熵解。RKDG 格式还拓展至 1D 方程组的求解(Cockburn and Shu, 2000)。

多维情况

将 RKDG 法拓展至多维的标量守恒律(Cockburn et al., 1990)。在多维情况下，DG 法的空间离散和 TVD 的显格式时间离散都没问题，但构建通用的坡度限制器遇到了困难，这不是由单元的复杂形式造成的，而是由稳定特性引起的内在精度瓶颈问题造成的。

坡度限制器的作用是加强格式的非线性稳定性，在多维情况下，格式稳定性施加的精度限制条件比一维情况要严格。在一维情况下，可以构建具有 TVD 性质的高阶精度的格式，但在多维空间下做不到，因为 Goodman and LeVeque 已证明任何 TVD 格式至多只有 1 阶精度。因此，任何强制 TVD 性质或 TVDM 性质的通用坡度限制器，都会不可避免地降低格式的精度，至 1 阶精度。Cockburn, Hou and Shu ()设计了一个通用坡度限制器，强制局部最大值原则，仅因为他们与高阶精度格式不兼容。还没有其他类型格式证明对非线性 **f** 和任意三角网格满足最大值原则。

RKDG 法拓展至多维系统由 Cockburn and Shu ()开始，近期由 Cockburn and Shu (1998)完成。Bassi and Rebay( )应用该方法求解气体动力学的欧拉方程组。

RKDG 法的优势

RKDG 格式有以下优势：

首先，类似诸如 SUPG 法(Hughes and Brook,)的有限单元法，RKDG 法比有限差分法更适于处理复杂几何边界。并且，特殊的 DG 有限单元的空间离散可以非常容易地处理边界条件，无需为达到高阶精度而做特殊的边界条件数值处理。

其次，DG 法可以容易地处理网格自适应策略，因为网格的加密和粗化无需考虑典型的连续 FEM 的连续性限制。近似多项式的阶也容易由一个单元到另一单元的做修改。自适应性是双曲型问题的重要特征，考虑到不连续结构的复杂性。1D 黎曼问题可以在 *x*-*t* 平面上以封闭形式和不连续曲线（都是简单的穿过原点的直线）来求解，但在 2D 情况，黎曼问题表现出更复杂的结构。因此，RKDG 法可以使用自适应的三角网格来求解这些结构，具有重要优势。

第三，RKDG 法可高度并行化。因为单元是不连续的，质量矩阵是块对角的，因为块的阶数等于对应单元内的自由度数，这些块可一次性求逆。因此，在每个 Runge-Kutta 时间步，更新单元内的自由度，仅涉及多个单元的自由度共享一个

面，网格分区间的通信量保持最低量。大量文献讨论了 RKDG 法的自适应性和并行化(Biwas, Devine and Flaherty, ; deCougny et al., ; Devine et al., ; Ozturan et al.,)。

2.3 对流扩散系统：LDG 法

首先是由 Chen et al.()将 RKDG 法拓展至非线性，对流扩散方程系统，用于半导体设备模拟研究：

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}, D\mathbf{u}) = 0, \quad (0,T)\times\Omega$$

通过使用简单的投影到合适的有限单元空间上，获得 2 阶或 3 阶导数的不连续近似解。该投影需要全局质量矩阵的拟，为保证 LDG 法的高度并行化，质量矩阵集中。因为使用 1 阶多项式，质量集中是合理的。但是，如果使用更高阶的多项式，需要“质量集中”实施 LDG 法的完全并行化会导致精度的下降。但由 Bassi and Rebay( )用于可压缩 NS 方程求解时不会有上述问题。类似于 RKDG 法，LDG 法是求解非恒定对流占优流动的高阶精度的高度并行化方法。LDG 法由 Cockburn and Shu()推广为一般方法。

构建 LDG 法的基本思想是：合适地将原方程系统写为更大型的、退化的一阶系统，然后使用 RKDG 法离散。经过仔细选择重写方法，甚至无需坡度限制器，即可实现非线性稳定，就像用于纯双曲型问题的 RKDG 法一样(Jiang and Shu,)。

LDG 法与用于抛物型问题的 DG 法有很大不同。在 DG 法中，仅在时间上近似解不连续，在空间上不是。实际上，空间离散使用连续有限单元的标准 Galerkin 离散法。这与使用间断有限单元的 LDG 法的空间离散很不同。为强调此不同之处，称之为局部 DG 法(LDG; Local Discontinuos Galerkin)。大量的自由度和显格式时间离散的严格时间步限制条件，使得 LDG 法对扩散占优问题是无效率的，这种情况时，推荐使用空间上连续的近似解的方法。但是，对于纯双曲型问题，RKDG 法是成功的，LDG 法的极端局部求解域的依赖性，允许非常有效的并行化，可弥补在对流占优流动求解时引入的大量自由度的计算效率问题。

Karniadakis et al.已实施了 LDG 法求解 2D 和 3D 可压缩的 Navier-Stokes 方程。

3 1D 标量守恒律

3.1 引言

介绍 RKDG 法求解如下的简单问题：

$$u_t + f(u)_x = 0，在 (0,1)\times(0,T) 上 \qquad (3.1)$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \forall x \in (0,1) \qquad (3.2)$$

施加周期边界。

3.2 间断 Galerkin 空间离散

3.3 弱形式公式

见上面的 Shu Chi-Wang 的综述文章。3.2 节

3.4 单调性数值通量

选择使用单调性的数值通量格式。

见上面的 Shu Chi-Wang 的综述文章。3.3 节

3.5 对角化质量矩阵

如果选择 Legendre 多项式 P_ℓ 作为局部基函数，可利用其 L^2 正交性，即：

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(s) P_{\ell'}(s)\,ds = \left(\frac{2}{2\ell+1}\right)\delta_{\ell\ell'}$$

来获得对角化的质量矩阵。如果对于 $x \in I_j$，将近似解 u_h 表述为：

$$u_h(x,t) = \sum_{\ell=0}^{k} u_j^\ell \varphi_\ell(x)$$

其中，

$$\varphi_\ell(x) = P_\ell\left(2\left(x - x_j\right)/\Delta_j\right)$$

DG 法的弱形式公式：

$$\forall i = 1,\ldots,N, \quad \forall v_h \in P^k\left(I_i\right):$$

$$\begin{aligned}&\int_{I_i} \partial_t u_h(x,t) v_h(x)\,dx - \int_{I_i} f\left(u_h(x,t)\right)\partial_x v_h(x)\,dx \\ &+ h\left(u_h\right)_{i+1/2}(t) v_h\left(x_{i+1/2}^-\right) - h\left(u_h\right)_{i-1/2}(t) v_h\left(x_{i-1/2}^+\right) = 0\end{aligned} \qquad (3.7)$$

$$\int_{I_i} u_h(x,0) v_h(x)\,dx = \int_{I_i} u_0(x) v_h(x)\,dx \qquad (3.8)$$

弱形式公式（3.7）和（3.8），取如下简单形式：

$$\forall j=1,\ldots,N;\ell=0,\ldots,k:$$
$$\left(\frac{1}{2\ell+1}\right)\partial_t u_j^\ell(t)-\frac{1}{\Delta_j}\int_{I_j} f\left(u_h(x,t)\right)\partial_x\varphi_\ell(x)dx$$
$$+\frac{1}{\Delta_j}\left\{h\left(u_h\left(x_{j+1/2}\right)\right)(t)-(-1)^\ell h\left(u_h\left(x_{j-1/2}\right)\right)(t)\right\}=0$$
$$u_j^\ell(0)=\frac{2\ell+1}{\Delta_j}\int_{I_j}u_0(x)\varphi_\ell(x)dx$$

其中，使用了 Legendre 多项式的如下特性：

$$P_\ell(1)=1,\quad P_\ell(-1)=(-1)^\ell$$

这表明：在使用 DG 法对标量方程做空间离散后，得到了自由度的 ODE 系统，可重写为：

$$\frac{d}{dt}u_h=L_h\left(u_h\right),\quad (0,T) \qquad (3.9)$$

$$u_h(t=0)=u_{0h} \qquad (3.10)$$

由 DG 空间离散，V_h 中的单元 $L_h\left(u_h\right)$ 是对 $-f(u)_x$ 的近似。

注意到，如果选择不同的局部基函数，局部质量矩阵也可形成全局矩阵，但将总是 k+1 阶的矩阵。通过求逆，总可将 u_h 的自由度的方程组写为上述形式的 ODE 系统。

3.6 线性情况的收敛性分析

在线性情况 $f(u)=cu$ 下，方法（3.7）和（3.8）的 $L^\infty\left(0,T;L^2(0,1)\right)$ 精度以及有限单元空间 V_h 的近似特性，可使用方法的 $L^\infty\left(0,T;L^2(0,1)\right)$ 稳定性建立。

注意到在该种情况下，上述的所有的数值通量将统一，且等于：

$$h(a,b)=c\frac{a+b}{2}-\frac{|c|}{2}(b-a) \qquad (3.11)$$

因此下列结论适用于该类型的数值通量格式。

以 u_h 在 $x_{j+1/2}$ 处的跳跃的形式导出 L^2 稳定性，表示为：

$$\left[u_h\right]_{j+1/2}\equiv u_h\left(x_{j+1/2}^+\right)-u_h\left(x_{j+1/2}^-\right)$$

定理 3.1 （L^2 稳定性）有：

$$\frac{1}{2}\|u_h(T)\|^2_{L^2(0,1)} + \Theta_T\left(u_h\right) \le \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(0,1)}$$

其中，

$$\Theta_T\left(u_h\right) = \frac{|c|}{2}\int_0^T \sum_{1\le j\le N}\left[u_h(t)\right]^2_{j+1/2}dt$$

3.7 非线性情况的收敛性分析

3.8 TVD-Runge-Kutta 时间离散

（1）离散格式

因此，如果$\left\{t^n\right\}_{n=0}^N$为$[0,T]$的离散，$\Delta t^n = t^{n+1} - t^n, n = 0,\ldots,N-1$，时间推进算法可写为：

（1）设$u_h^0 = u_{0h}$；

（2）对于$n = 0,\ldots,N-1$，由u_h^n计算u_h^{n+1}如下：

1）设$u_h^{(0)} = u_h^n$；

2）对$i = 1,\ldots,k+1$，计算中间函数：

$$u_h^{(i)} = \left\{\sum_{l=0}^{i-1}\alpha_{il}u_h^{(l)} + \beta_{il}\Delta t^n L_h\left(u_h^{(l)}\right)\right\}$$

3）设$u_h^{n+1} = u_h^{(k+1)}$。

该算法容易编码实施，仅需要编写一个单独的子程序定义需要的$L_h\left(u_h\right)$。下标罗列了一些 Runge-Kutta 时间离散系数。

表 1 Runge-Kutta 时间离散系数

阶	α_{il}	β_{il}	$\max\left\{\beta_{il}/\alpha_{il}\right\}$

2	1 1/2　1/2	1 0　1/2	1
3	1 3/4　1/4 1/3　0　2/3	1 0　1/4 0　0　3/2	1

（2）稳定性特性

3.13 坡度限制器

高阶精度相对 TVDM 特性：经验上，理想的通用坡度限制器 $\Lambda\Pi_h$ 满足下列条件：

（1）保持单元的质量守恒；

（2）满足特性（3.16）、（3.17）和（3.18）；

（3）不会降低方法的精度。

第 1 个条件表示坡度限制必须不能改变各间隔内的总质量，即如果 $u_h = \Lambda\Pi_h\left(v_h\right)$，有：

$$\bar{u}_j = \bar{v}_j, \quad j = 1, \ldots, N$$

第 2 个条件表示，如果 $u_h = \Lambda\Pi_h\left(v_h\right)$ 以及 $w_h = u_h + \delta L_h\left(u_h\right)$，则对于足够小的 $|\delta|$ 值，有：

$$\left|\bar{w}_h\right|_{TV(0,1)} \leq \left|\bar{u}_h\right|_{TV(0,1)}$$

第 3 个条件需要详细讨论。

下面首先考虑能使 RKDG 格式具有 TVDM 特性的通用坡度限制器；然后适当修正以获得 TVBM 格式。

构建 TVDM 通用坡度限制器：考察函数 u_h 满足条件（3.16）~（3.18）。这些条件以 *minmod* 函数 m 定义如下：

$$m\left(a_1, \ldots, a_\nu\right) = \begin{cases} s \min_{1 \leq n \leq \nu} \left|a_n\right|, & \text{if } s = \operatorname{sign}\left(a_1\right) = \cdots = \operatorname{sign}\left(a_\nu\right) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

定理 3.10：假设满足如下 CFL 条件：

$$|\delta|\left(\frac{\left|f^{+}\right|_{Lip}}{\Delta_{j+1}}+\frac{\left|f^{-}\right|_{Lip}}{\Delta_{j}}\right)\le 1/2,\quad j=1,\dots,N \tag{3.19}$$

如果满足条件（3.16）~（3.18），则对于所有 $j=1,\dots,N$，有：

$$u_{j+1/2}^{-}-\bar{u}_j=m\left(u_{j+1/2}^{-}-\bar{u}_j,\bar{u}_j-\bar{u}_{j-1},\bar{u}_{j+1}-\bar{u}_j\right) \tag{3.20}$$

$$\bar{u}_j-u_{j-1/2}^{+}=m\left(\bar{u}_j-u_{j-1/2}^{+},\bar{u}_j-\bar{u}_{j-1},\bar{u}_{j+1}-\bar{u}_j\right) \tag{3.21}$$

TVDM 通用坡度限制器的例子：

（1）MUSCL 限制器：当使用分段式线性近似解时，即：

$$v_h\big|_{I_j}=\bar{v}_j+\left(x-x_j\right)v_{x,j},\quad j=1,\dots,N$$

如下的通用坡度限制器满足条件（3.20）和（3.21）：

$$u_h\big|_{I_j}=\bar{v}_j+\left(x-x_j\right)m\left(v_{x,j},\frac{\bar{v}_{j+1}-\bar{v}_j}{\Delta_j},\frac{\bar{v}_j-\bar{v}_{j-1}}{\Delta_j}\right)$$

这就是有名的 MUSCL 格式的 van Leer 坡度限制器。

（2）限制条件更宽松的限制器 $\Lambda\Pi_h^1$：如下限制更宽松的坡度限制器也满足条件（3.20）和（3.21）：

$$u_h\big|_{I_j}=\bar{v}_j+\left(x-x_j\right)m\left(v_{x,j},\frac{\bar{v}_{j+1}-\bar{v}_j}{\Delta_j/2},\frac{\bar{v}_j-\bar{v}_{j-1}}{\Delta_j/2}\right)$$

并且，还可以重写为：

$$u_{j+1/2}^{-}=\bar{v}_j+m\left(v_{j+1/2}^{-}-\bar{v}_j,\bar{v}_j-\bar{v}_{j-1},\bar{v}_{j+1}-\bar{v}_j\right) \tag{3.22}$$

$$u_{j-1/2}^{+}=\bar{v}_j-m\left(\bar{v}_j-v_{j-1/2}^{+},\bar{v}_j-\bar{v}_{j-1},\bar{v}_{j+1}-\bar{v}_j\right) \tag{3.23}$$

该限制器表示 $\Lambda\Pi_h^1$。

（3）限制器 $\Lambda\Pi_h^k$。此种情况下，近似解为 k 阶的分段式多项式，即当：

$$v_h(x,t)=\sum_{\ell=0}^{k}v_j^{\ell}\varphi_\ell(x)$$

其中，

$$\varphi_\ell(x)=P_\ell\left(2\left(x-x_j\right)/\Delta_j\right)$$

P_ℓ 为 Legendre 多项式，可以用非常简单的形式定义通用坡度限制器。为此，需要定义称为 v_h 的 P^1 分部：

$$v_h^1(x,t)=\sum_{\ell=0}^{1} v_j^\ell \varphi_\ell(x)$$

定义 $u_h=\Lambda\Pi_h(v_h)$ 如下：

对 $j=1,\ldots,N$，计算 $u_h|_{I_j}$ 如下：

1）使用式（3.22）和式（3.23），计算 $u_{j+1/2}^-$ 和 $u_{j-1/2}^+$；

2）如果 $u_{j+1/2}^-=v_{j+1/2}^-$ 和 $u_{j-1/2}^+=v_{j-1/2}^+$，设 $u_h|_{I_j}=v_h|_{I_j}$；

3）如果不是，取 $u_h|_{I_j}=\Lambda\Pi_h^1(v_h^1)$。

（4）限制器 $\Lambda\Pi_{h,\alpha}^k$：代替式（3.22）和式（3.23），现在使用：

$$u_{j+1/2}^-=\bar{v}_j+m\left(v_{j+1/2}^- -\bar{v}_j,\bar{v}_j-\bar{v}_{j-1},\bar{v}_{j+1}-\bar{v}_j,C(\Delta x)^\alpha\right) \qquad (3.24)$$

$$u_{j-1/2}^+=\bar{v}_j-m\left(\bar{v}_j-v_{j-1/2}^+,\bar{v}_j-\bar{v}_{j-1},\bar{v}_{j+1}-\bar{v}_j,C(\Delta x)^\alpha\right) \qquad (3.25)$$

对于一些固定常数值 C 和 $\alpha\in(0,1)$，得到一个通用坡度限制器，表示为 $\Lambda\Pi_{h,\alpha}^k$。实际上从未使用过这个通用坡度限制器，仅用于理论分析。

完整的 RKDG 法：注意到现在有了通用坡度限制器，可以给出完整的 RKDG 法计算步骤，如下：

（1）设 $u_h^0=\Lambda\Pi_h P_{V_h}(u_0)$；

（2）对 $n=0,\ldots,N-1$，计算 u_h^{n+1} 如下：

1）设 $u_h^{(0)}=u_h^n$；

2）对 $i=1,\ldots,k+1$，计算中间函数：

$$u_h^{(i)}=\Lambda\Pi_h\left\{\sum_{l=0}^{i-1}\alpha_{il}u_h^{(l)}+\beta_{il}\Delta t^n L_h\left(u_h^{(l)}\right)\right\}$$

3）设 $u_h^{n+1}=u_h^{(k+1)}$。

以上算法描述了完整的 RKDG 法。需要注意在 Runge-Kutta 法的每个中间计

算步，通用坡度限制器是如何应用的。在时间推进算法中实施的通用坡度限制器，保证了该格式是 TVDM 的，如下所示。

RKDG 法的 TVDM 特性：为此，注意到如果令：

$$u_h = \Lambda\Pi_h\left(v_h\right),\quad w_h = u_h + \delta L_h\left(u_h\right)$$

则有：

$$\left|\bar{u}_h\right|_{TV(0,1)} \le \left|\bar{v}_h\right|_{TV(0,1)} \qquad (3.26)$$

$$\left|\bar{w}_h\right|_{TV(0,1)} \le \left|\bar{u}_h\right|_{TV(0,1)},\quad \forall\,|\delta| \le \delta_0 \qquad (3.27)$$

其中，由定理 3.10，有：

$$\delta_0^{-1} = 2\max_j\left(\frac{\left|f^+\right|_{Lip}}{\Delta_{j+1}} + \frac{\left|f^-\right|_{Lip}}{\Delta_j}\right)\quad j = 1,\ldots,N$$

通过使用以上通用坡度限制器的 2 个特性，可以看出 RKDG 法是 TVDM 的。

定理 3.11：假设通用坡度限制器 $A\Pi_h$ 满足特性（3.26）和（3.27）。假设所有系数 α_{il} 都为非负值且满足如下条件：

$$\sum_{l=0}^{i-1}\alpha_{il} = 1,\quad i = 1,\ldots,k+1$$

则有：

$$\left|\bar{u}_h^n\right|_{TV(0,1)} \le \left|u_0\right|_{TV(0,1)},\quad \forall n \ge 0$$

TVBM 通用坡度限制器：如前所述，可以修改上文介绍的通用坡度限制器例子，使其在局部极值处避免降低精度。为实现此目的，通过用如下定义的 TVB 校正的 *minmod* 函数 $\bar{m}$，取代上面定义的通用坡度限制器(Shu, 1987)：

$$\bar{m}\left(a_1,\ldots,a_m\right) = \begin{cases} a_1, & \text{if } \left|a_1\right| \le M(\Delta x)^2 \\ m\left(a_1,\ldots,a_m\right), & \text{otherwise} \end{cases}$$

式中，M 为给定常数。

回顾构建的通用坡度限制器，既是 TVBM 坡度限制器。常数 M 是在局部极值处，解的 2 阶导数的绝对值的上确界。在非线性守恒律的情况，可以看出：如果初始数据是分段的 C^2，可以取：

$$M = \sup\left\{ \left| (u_0)_{xx}(y) \right|, y : (u_0)_x(y) = 0 \right\}$$

M 的其他选择参考(Cockburn and Shu, 1989)。

B. Cockburn and C.W. Shu. 1989. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws ii: General framework. Math. Comp., 52:411-435.

因此，如果常数 M 取上述定义，在极值处不会退化，导出的 RKDG 格式保持其最优精度。并且，有如下稳定性结论。

定理 3.12 假设通用坡度限制器 $\Lambda\Pi_h$ 是一个 TVBM 坡度限制器。同时假设所有系数 α_{il} 为非负值且满足如下条件：

$$\sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} = 1, \quad i = 1, \ldots, k+1$$

则有：

$$\left| \bar{u}_h^n \right|_{TV(0,1)} \le \left| \bar{u}_0 \right|_{TV(0,1)} + CM, \quad \forall n \ge 0$$

式中，C 仅与 k 有关。

3.14 验证

3.15 结论

本节是介绍 RKDG 法的核心内容，构建了周期边界条件下非线性标量守恒律的通用 RKDG 法。可以看出：RKDG 法可分 3 步建立。首先，使用 DG 法做守恒律的空间离散；然后，使用显格式 TVB-Runge-Kutta 时间离散，导出 ODE 系统；最后，引入通用坡度限制器，强制非线性稳定性，使通量格式精度不会退化。数值结果表明：RKDG 法使用 k 阶多项式，k=1, 2，在远离不连续处达到 k+1 阶精度，高阶多项式使 RKDG 法计算效率更高，甚至接近不连续处。所有结论都可扩展至初值问题。后文，将 RKDG 法拓展至多维系统。

4 RKDG 法用于多维方程组

4.1 前言

本节介绍将 RKDG 法拓展至多维系统：

$$u_t + \nabla f(u) = 0, \quad \Omega \times (0,T) \qquad (4.1)$$

$$u(x,0)=u_0(x), \forall x \in \Omega \qquad (4.2)$$

施加周期性边界条件。为简化，假设Ω为单位正方体。

4.2 通用的 RGDG 法

多维系统的 RKDG 法与 1D 标量守恒律的形式相同，即：

（1）设$u_h^0 = \Lambda\Pi_h P_{V_h}\left(u_0\right)$；

（2）对$n=0,\ldots,N-1$，计算u_h^{n+1}如下：

1）设$u_h^{(0)}=u_h^n$；

2）对$i=1,\ldots,k+1$，计算中间函数：

$$u_h^{(i)} = \Lambda\Pi_h\left\{\sum_{l=0}^{i-1}\alpha_{il}u_h^{(l)}+\beta_{il}\Delta t^n L_h\left(u_h^{(l)}\right)\right\}$$

3）设$u_h^{n+1}=u_h^{(k+1)}$。

下面将描述由 DG 空间离散导出的算子L_h以及通用坡度限制器$\Lambda\Pi_h$。

DG 空间离散：为展示 DG 法的空间离散，可考虑u为标量变量，逐分量地实施相同步骤。获得Ω的三角网格$\mathbb{T}_h$后，确定$L_h(\cdot)$如下：

首先，用在有限单元空间V_h中的v_h乘以（4.1），在三角网格$\mathbb{T}_h$中的单元K上积分，用近似解$u_h \in V_h$代替精确解u：

$$\frac{d}{dt}\int_K u_h(t,x)v_h(x)dx+\int_K \operatorname{div} f\left(u_h(t,x)\right)v_h(x)dx=0, \forall v_h \in V_h$$

分部积分，得到：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_K u_h(t,x)v_h(x)dx+\sum_{e\in\partial K}\int_e f\left(u_h(t,x)\right)\cdot n_{e,K}v_h(x)d\Gamma \\ &-\int_K f\left(u_h(t,x)\right)\cdot \operatorname{grad} v_h(x)dx=0, \quad \forall v_h \in V_h\end{aligned}$$

式中，$n_{e,K}$为边e的外法向单元向量。

注意到，$f\left(u_h(t,x)\right)\cdot n_{e,K}$没有准确定义，因为在$x\in e\in\partial K$处$u_h$是不连续的。因此，与 1D 情况一样，用函数$h_{e,K}\left(u_h\left(t,x^{int(K)}\right),u_h\left(t,x^{ext(K)}\right)\right)$代替$f\left(u_h(t,x)\right)\cdot n_{e,K}$。

函数 $h_{e,K}(\cdot,\cdot)$ 为任意连续两点上的单调 Lipschitz 通量，与 $f(u)\cdot n_{e,K}$ 一致。

这样可得到：

$$\frac{d}{dt}\int_K u_h(t,x)v_h(x)dx+\sum_{e\in\partial K}\int_e h_{e,K}(t,x)v_h(x)d\Gamma$$
$$-\int_K f\left(u_h(t,x)\right)\cdot \operatorname{grad} v_h(x)dx=0,\quad \forall v_h\in V_h$$

最终，用求积法则代替积分，如下：

$$\int_e h_{e,K}(t,x)v_h(x)d\Gamma\approx\sum_{l=1}^{L}\omega_l h_{e,K}\left(t,x_{el}\right)v\left(x_{el}\right)|e| \qquad (4.3)$$

$$\int_K f\left(u_h(t,x)\right)\cdot \operatorname{grad} v_h(x)dx\approx$$
$$\sum_{j=1}^{M}\omega_j f\left(u_h\left(t,x_{Kj}\right)\right)\cdot \operatorname{grad} v_h\left(x_{Kj}\right)|K| \qquad (4.4)$$

因此，最终得到弱形式计算公式：

$$\frac{d}{dt}\int_k u_h(t,x)v_h(x)dx+\sum_{e\in\partial K}\sum_{l=1}^{L}\omega_l h_{e,K}\left(t,x_{el}\right)v\left(x_{el}\right)|e|$$
$$-\sum_{j=1}^{M}\omega_j f\left(u_h\left(t,x_{Kj}\right)\right)\cdot \operatorname{grad} v_h\left(x_{Kj}\right)|K|=0,\quad \forall v_h\in V_h,\quad \forall K\in\mathbb{T}_h$$

这些方程可重写为 ODE 形式，即 $\frac{d}{dt}u_h=L_h\left(u_h,\gamma_h\right)$。这定义了算子 $L_h\left(u_h\right)$，是 $-\operatorname{div} f(u)$ 的离散近似。

通用坡度限制器 $\Lambda\Pi_h$ 的形式：多维空间下的通用坡度限制器 $\Lambda\Pi_h$ 的构建有困难，具体可参考文献 Cockburn, Hou and Shu (1990)。下面介绍非常简单、实用和有效的通用坡度限制器 $\Lambda\Pi_h$，与 1D 情况的通用坡度限制器 $\Lambda\Pi_h$ 关系密切。

为计算 $\Lambda\Pi_h u_h$，依赖于假设仅当在 u_h^1 的 P^1 部分中的 u_h 出现数值振荡，是 L^2 投影到分段线性函数 V_h^1 空间上。因此，如果在 u_h^1 内没有出现数值振荡，即如果：

$$u_h^1=\Lambda\Pi_h u_h^1$$

则假设在 u_h 内没有发生数值振荡，因此不做任何限制：

$$\Lambda\Pi_h u_h=u_h$$

另一方面，如果在解 u_h^1 的 P^1 部分中发生了数值振荡，即如果：

$$u_h^1 \neq \Lambda\Pi_h u_h^1$$

则舍去近似解的高阶部分，限制 P^1 的剩余部分：

$$\Lambda\Pi_h u_h = \Lambda\Pi_h u_h^1$$

这样，为了定义任意空间V_h的$\Lambda\Pi_h$，实际上仅需要定义分段线性函数V_h^1的$\Lambda\Pi_h$。对三角形单元和四边形单元的$\Lambda\Pi_h$精确定义将在下节讨论。

4.3 算法和实施细节

本节介绍算法和实施细节，包括数值通量、求积法则、自由度、通量和对三角形和四边形单元的分段线性和分段二次近似的 RKDG 法的限制器。

通量：数值通量使用简单的 Lax-Friedrichs 通量：

$$h_{e,K}(a,b) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{f}(a)\cdot n_{e,K} + \mathbf{f}(b)\cdot n_{e,K} - \alpha_{e,K}(b-a)\right]$$

数值粘性常数$\alpha_{e,K}$应该是边 e 的相邻区域内(x,t)上的雅克比矩阵$\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{f}\left(u_h(x,t)\right)\cdot n_{e,K}$的最大特征值估计。

对于三角形单元，使用局部 Lax-Friedrichs 格式：$\alpha_{e,K}$取$\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{f}\left(\bar{u}_K\right)\cdot n_{e,K}$和$\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{f}\left(\bar{u}_{K'}\right)\cdot n_{e,K}$的最大特征值（绝对值）中更大的一个，其中$\bar{u}_K$和$\bar{u}_{K'}$为共享边 e 的单元 K 和 K'内数值解的平均值。

对于四边形单元，使用局部 Lax-Friedrichs 格式：$\alpha_{e,K}$取$\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{f}\left(\bar{u}_{K''}\right)\cdot n_e, K$的最大特征值（绝对值）中最大的一个，其中$\bar{u}_{K''}$为单元$K''$内的数值解的平均值，绕所有在相同线上（水平或垂直，与$n_{e,K}$的方向有关）的单元，这些单元 K 和 K' 的共享边 e。

求积法则：如果使用 P^k 方法，则单元的边求积法则（4.3）必须对 $2k$+1 阶多项式是精确的，对单元的内部求积法则（4.4）必须对 $2k$ 阶多项式是精确的。这里讨论在三角形单元和四边形单元情况下，用于 P^1 和 P^2 方法的求积法则。

四边形单元：对于边积分，使用 P^1 方法时，使用如下的 2 点高斯法则：

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad (4.1)$$

使用 P^2 方法时，使用如下的 3 点高斯法则：

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx \frac{5}{9}\left[g\left(-\frac{3}{5}\right)+g\left(\frac{3}{5}\right)\right]+\frac{8}{9}g(0) \qquad (4.2)$$

对于单元内部，可使用（4.1）的张量积，P^1 方法使用 4 个积分点。但为节省计算时间，在单元边界上循环通量值，仅在单元中心处增加一个新的求积点。因此，为近似计算积分 $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(x,y)dxdy$，使用如下求积法则：

$$\begin{aligned}&\approx \frac{1}{4}\left[g\left(-1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+g\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-1\right)+g\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-1\right)\right.\\&\left.+g\left(1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+g\left(1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+g\left(\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)+g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)\right]+2g(0,0)\end{aligned}$$

P^2 方法使用（4.2）的张量积，使用 9 个求积点。

三角形单元：对于边积分，式（4.1）和式（4.2），分别对 P^1 和 P^2 方法使用 2 点或 3 点高斯求积，与四边形单元一样。

对于内部积分，式（4.4），使用 3 中点法则：

$$\int_K g(x,y)dxdy \approx \frac{|K|}{3}\sum_{i=1}^{3} g\left(m_i\right)$$

式中，m_i 为 P^1 情况时边的中点。P^2 情况时，使用 7 点积分法则，这在三角形单元上对 5 阶多项式积分是精确的。

基函数和自由度：需要强调的是基函数与自由度的选择不能影响算法，因为他们完全是由函数空间 $V(h)$、数值通量、积分法则、坡度限制器和时间离散的选择决定的。但是，选择合适的基函数和自由度会简化算法实施和计算。

四边形单元：对于 P^1 情况，使用如下的四边形单元 $\left[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}\right]\times\left[y_{j-\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}}\right]$ 内部的近似解 $u_h(x,y,t)$ 的表达式：

$$u_h(x,y,t)=\overline{u}(t)+u_x(t)\varphi_i(x)+u_y(t)\psi_j(y) \qquad (4.3)$$

其中，

$$\varphi_i(x)=\frac{x-x_i}{\Delta x_i/2},\quad \psi_j(y)=\frac{y-y_j}{\Delta y_j/2} \tag{4.4}$$

以及 $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$， $\Delta y_j = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}$

则随时间变化的自由度为：

$$\bar{u}(t),u_x(t),u_y(t)$$

这里删去下标 *ij*，这些自由度将表示他们属于$\left[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}\right]\times\left[y_{j-\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}}\right]$的单元 *ij*。

注意到，下列基函数是正交的：

$$1,\varphi_i(x),\quad \psi_j(y)$$

因此，局部质量矩阵是对角的：

$$M=\Delta x_i \Delta y_j\,\mathrm{diag}\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

对于 P^2 情况，四边形单元$\left[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}\right]\times\left[y_{j-\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}}\right]$内部的近似解$u_h(x,y,t)$的表达式为：

$$\begin{aligned}u_h(x,y,t)=&\bar{u}(t)+u_x(t)\varphi_i(x)+u_y(t)\psi_j(y)+u_{xy}(t)\varphi_i(x)\psi_j(y)\\&+u_{xx}(t)\left(\varphi_i^2(x)-\frac{1}{3}\right)+u_{yy}(t)\left(\psi_j^2(y)-\frac{1}{3}\right)\end{aligned} \tag{4.5}$$

式中，$\varphi_i(x)$和$\psi_j(y)$是由式（4.4）定义的。则随时间变化的自由度为：

$$\bar{u}(t),u_x(t),u_y(t),u_{xy}(t),u_{xx}(t),u_{yy}(t)$$

此时的基函数也是正交的：

$$1,\varphi_i(x),\psi_j(y),\varphi_i(x)\psi_j(y),\varphi_i^2(x)-\frac{1}{3},\psi_j^2(y)-\frac{1}{3}$$

因此局部的质量矩阵是对角的：

$$M=\Delta x_i \Delta y_j\,\mathrm{diag}\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{4}{45},\frac{4}{45}\right)$$

三角形单元：对于 P^1 情况，使用三角形单元 K 内部的近似解$u_h(x,y,t)$的表

达式为：

$$u_h(x,y,t)=\sum_{i=1}^{3}u_i(t)\varphi_i(x,y)$$

式中，自由度$u_i(t)$为在边中点处数值解的值；基函数$\varphi_i(x,y)$是线性函数，在第 i 条边的中点处取值 1，在另外两条边的中点处取值 0。

质量矩阵是对角的：

$$M=|K|\,diag\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

对于 P^2 情况，使用三角形单元 K 内部的近似解$u_h(x,y,t)$的表达式为：

$$u_h(x,y,t)=\sum_{i=1}^{6}u_i(t)\xi_i(x,y)$$

式中，自由度$u_i(t)$为在边的 3 个中点和 3 个顶点处数值解的值；基函数$\xi_i(x,y)$是二次方函数，在上述的 6 个点（3 个边中点和 3 个顶点）中的第 i 个点处取值 1，在其他的 5 个点处取值 0。此时质量矩阵不是对角的了。

坡度限制：对分段线性函数u_h构建坡度限制算子$\Lambda\Pi_h$，使其满足如下特性：

（1）精度：如果u_h是线性的，则$\Lambda\Pi_h u_h=u_h$；

（2）质量守恒：对三角网格$\mathbb{T}_h$的每个单元 K，有：

$$\int_K \Lambda\Pi_h u_h=\int_K u_h$$

（3）坡度限制：在三角网格$\mathbb{T}_h$的每个单元 K 上，$\Lambda\Pi_h u_h$的梯度不大于u_h值。

坡度限制算子的实际形式与文献(Cockburn and Shu, 1989)中的坡度限制算子紧密相关。

四边形单元：对式（4.3）中的u_x和u_y实施限制。对标量方程，可用下式限制（代替）u_x：

$$\bar{m}\left(u_x,\bar{u}_{i+1,j}-\bar{u}_{ij},\bar{u}_{ij}-\bar{u}_{i-1,j}\right)\qquad（4.6）$$

式中，函数$\bar{m}$是之前定义的 TVB 修正的 *minmod* 函数。

需要做 TVB 修正来避免光滑极值附近的不必要的限制，其中u_x和u_y有

$O\left(\Delta x^2\right)$或$O\left(\Delta y^2\right)$。以函数的 2 次导数来评价 TVB 常数 M (Cockburn and Shu, 1989)。通常数值解对较大取值范围的 M 不敏感，一般取 50。

类似地，用下式限制（代替）u_y：

$$\bar{m}\left(u_y, \bar{u}_{i,j+1}-\bar{u}_{ij}, \bar{u}_{ij}-\bar{u}_{i,j-1}\right)$$

将式（4.6）中的Δx换位Δy。

对于方程组，在局部特征变量中实施限制。为限制单元 ij 中的向量u_x，计算如下：

（1）确定矩阵 R 及其逆矩阵 R^{-1}，在 x 方向上，对单元 ij 中平均计算得到的雅克比矩阵对角化：

$$R^{-1}\frac{\partial f_1\left(\bar{u}_{ij}\right)}{\partial u}R=\Lambda$$

式中，Λ为包含雅克比矩阵特征值的对角化矩阵。

注意到，R 的列向量是$\frac{\partial f_1\left(\bar{u}_{ij}\right)}{\partial u}$的右特征向量，$R^{-1}$ 的行向量是左特征向量。

（2）变换所有需要限制的变量到特征场，即 3 个向量u_{xij}，$\bar{u}_{i+1,j}-\bar{u}_{ij}$和$\bar{u}_{ij}-\bar{u}_{i-1,j}$，该计算通过用 R^{-1} 左乘以这 3 个向量实现。

（3）对变换后的向量的各分量实施标量限制器（4.6）。

（4）通过在左边左乘以 R，将结果变换返回到原始空间。

三角形单元：为构建三角形单元的坡度限制算子，做如下计算。从简单的观察开始。考虑图 4.1 的三角形，其中 m_1 是在 K_0 的边界上边的中点，b_i 代表三角形 K_i (i=0, 1, 2, 3)的质心。

因为存在：

$$m_1-b_0=\alpha_1\left(b_1-b_0\right)+\alpha_2\left(b_2-b_0\right)$$

对于一些仅与 m_1 和单元几何形状有关的非负系数α_1和α_2，对任意线性函数u_h可写作：

$$u_h\left(m_1\right)-u_h\left(b_0\right)=\alpha_1\left(u_h\left(b_1\right)-u_h\left(b_0\right)\right)+\alpha_2\left(u_h\left(b_2\right)-u_h\left(b_0\right)\right)$$

且因为：

$$\bar{u}_{K_i} = \frac{1}{|K_i|}\int_{K_i} u_h = u_h\left(b_i\right), \quad i = 0,1,2,3$$

可得：

$$\tilde{u}_h\left(m_1, K_0\right) \equiv u_h\left(m_1\right) - \bar{u}_{K_0} = \alpha_1\left(\bar{u}_{K_1} - \bar{u}_{K_0}\right) + \alpha_2\left(\bar{u}_{K_2} - \bar{u}_{K_0}\right) \equiv \Delta\bar{u}\left(m_1, K_0\right)$$

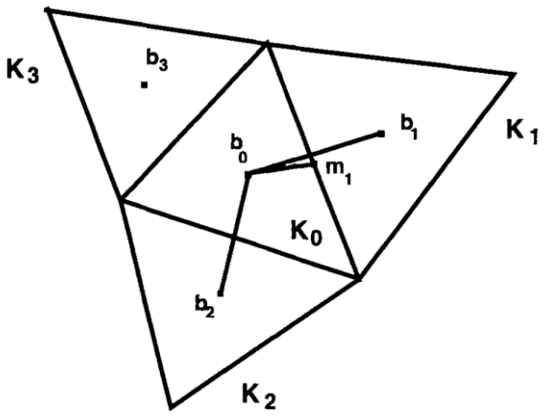

图 4.1 限制计算示意图

现在可以描述坡度限制计算了。考虑线性函数 u_h，令 $m_i, i = 1,2,3$ 为三角形 *K0* 的边的中点。则可以对 $(x, y) \in K_0$ 写出：

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^{3} u_h\left(m_i\right)\varphi_i(x, y) = \bar{u}_{K_0} + \sum_{i=1}^{3}\tilde{u}_h\left(m_i, K_0\right)\varphi_i(x, y)$$

为计算 $\Lambda\Pi_h u_h$，首先计算变量：

$$\Delta_i = \bar{m}\left(\tilde{u}_h\left(m_i, K_0\right), \nu\Delta\bar{u}\left(m_i, K_0\right)\right)$$

式中，$\bar{m}$ 为 TVB 修正的 *minmod* 函数，$\nu > 1$，ν 取 1.5。则如果 $\sum_{i=1}^{3}\Delta_i = 0$，可简单设：

$$\Lambda\Pi_h u_h(x, y) = \bar{u}_{K_0} + \sum_{i=1}^{3}\Delta_i\varphi_i(x, y)$$

如果 $\sum_{i=1}^{3}\Delta_i \neq 0$，计算：

$$pos = \sum_{i=1}^{3}\max\left(0, \Delta_i\right), \quad neg = \sum_{i=1}^{3}\max\left(0, -\Delta_i\right)$$

令：

$$\theta^{+}=\min\left(1,\frac{neg}{pos}\right),\quad \theta^{-}=\min\left(1,\frac{pos}{neg}\right)$$

则可以定义：

$$\Lambda\Pi_h u_h(x,y)=\bar{u}_{K_0}+\sum_{i=1}^{3}\hat{\Delta}_i\varphi_i(x,y)$$

式中，

$$\hat{\Delta}_i=\theta^{+}\max\left(0,\Delta_i\right)-\theta^{-}\max\left(0,-\Delta_i\right)$$

容易看出：该坡度限制算子满足上述的 3 个特性。

对于方程组，在局部特征变量中实施限制。为限制Δ_i，与四边形单元的计算相同，差别仅在于使用如下的雅克比矩阵做计算：

$$\frac{\partial}{\partial u}f\left(\bar{u}_{K_0}\right)\cdot\frac{m_i-b_0}{\left|m_i-b_0\right|}$$

4.5 数值试验

求解气体动力学的欧拉方程数值试验，2D 求解参考 Bassi and Rebay; 3D 求解参考 Warburton, Lomtev, Kirby and Karniadakis。

4.6 结论

本节将 RKDG 法拓展至多维系统。介绍了算法的细节和通过数值试验展示了求解欧拉方程的效率。RKDG 法可以灵活第地处理复杂几何边界，可使用不同类型的单元。并且，已显示使用高阶多项式不仅不会降低强激波的求解，还能提高接触不连续的求解精度和在光滑区格式具有较高计算效率。

5 对流-扩散问题：LDG 法

见 Cockburn 的论文。

Chapter2: An introduction to Discontinuous Galerkin for convection-dominated problems (Cockburn, 1998)

间断 Galerkin（DG）法原理 Cangiani et al. (2017)

1 阶标量双曲型方程

Cangiani et al. (2017)给出了 DG 法原理的数学分析，总结如下：

考虑使用 DG 法离散下面的 1 阶输运方程，即找到$u \in \mathcal{G}(\mathcal{L},\Omega)$满足：

$$\mathcal{L}u := \nabla\cdot(\mathbf{b}u) + cu = f \ \text{ in } \Omega \qquad (2.4)$$

$$u = g_{\mathrm{D}} \quad \text{on } \partial\_\Omega \qquad (2.5)$$

其中，$\mathcal{G}(\mathcal{L},\Omega)$表示下列集合给出的图形空间：

$$\mathcal{G}(\mathcal{L},\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) : \mathcal{L}v \in L^2(\Omega) \right\}$$

在介绍 DGFEM 近似求解方程（2.4）和（2.5）之前，首先考虑基于使用弱形式施加边界条件的标准连续 FEM 离散方法。$\mathcal{T}_h$表示计算域Ω的而规则形状分区，即由非重叠的 d 维单元$K \in \mathcal{T}_h$组成的网格，因此$\overline{\Omega} = \bigcup_{\kappa\in\mathcal{T}_h} \overline{\kappa}$。$p \in \mathbb{N}$表示多项式的阶，引入有限单元空间：

$$V_C^p(\mathcal{T}_h) := \left\{ u \in C(\Omega) : u|_\kappa \in \mathcal{P}_p(\kappa), \kappa \in \mathcal{T}_h \right\}$$

式中，$\mathcal{P}_p(\kappa)$表示在单元κ上 p 阶多项式的空间。

标准的连续 FEM 就是找到$u_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$，对所有的试函数$v_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$满足：

$$\int_\Omega \left(\nabla\cdot(\mathbf{b}u_h) + cu_h\right) v_h \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\_\Omega} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n} u_h v_h \mathrm{d}s = \int_\Omega f v_h \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\_\Omega} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n} g_{\mathrm{D}} v_h \mathrm{d}s \qquad (2.6)$$

由式（2.6）定义的 FEM 在大梯度或不连续的解析解附近，由于数值振荡表现出数值计算不稳定的问题。并且，即使没有数值振荡的情况，相比逼近$V_C^p(\mathcal{T}_h)$的速率（能力），FEM 近似解的收敛速度也很慢。为解决这个问题，需要对式（2.6）引入适当的数值扩散，来增加数值格式的稳定性，例如流线扩散 FEM（SUPG），

其中在体积分中的试函数用 $v_h+\delta\mathbf{b}\cdot\nabla v_h$ 代替，即当多项式阶数 p 固定时，$\delta=\mathcal{O}(h)$，而统一化为 hp 配置时，$\delta=\mathcal{O}(h/p)$。

DG FEM 离散式（2.4）和（2.5）的基本思路是逐单元地应用格式（2.6），在各单元的入流边界上实施预设的边界条件。该方法提高了数值计算稳定性，但对于 d 维网格，引入了更多的自由度。

为简洁表述 DG 有限单元法，引入一些标记。对于 $p\geq 0$，定义 DGFEM 空间：

$$V^p(\mathcal{T}_h):=\left\{u\in L^2(\Omega):u|_\kappa\in\mathcal{P}_p(\kappa),\kappa\in\mathcal{T}_h\right\}$$

对便于表述，这里仅考虑网格 $\mathcal{T}_h$ 上均匀分布阶数的多项式，通用的 hp 版本稍后介绍。对于一个单元 $\kappa\in\mathcal{T}_h$，$\partial\kappa$ 表示单元的边界，$\partial\kappa$ 的入流和出流部分分别定义为：

$$\begin{aligned}\partial_-\kappa&:=\left\{\mathbf{x}\in\partial\kappa,\quad \mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}_\kappa(\mathbf{x})<0\right\},\\ \partial_+\kappa&:=\left\{\mathbf{x}\in\partial\kappa,\quad \mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}_\kappa(\mathbf{x})\geq 0\right\}\end{aligned}$$

式中，$\mathbf{n}_\kappa(\mathbf{x})$ 表示在 $\mathbf{x}\in\partial\kappa$ 处对 $\partial\kappa$ 的外法向单位向量。

给定 $\kappa\in\mathcal{T}_h$，在 $\partial\kappa$ 上一个函数 $v\in H^1(\Omega,\mathcal{T}_h)$ 的迹与 κ 相关。那么，几乎对每一个 $\mathbf{x}\in\partial\kappa\setminus\partial\Omega$，存在唯一的单元 $\kappa'\in\mathcal{T}_h$，有 $\mathbf{x}\in\partial\kappa'$。因此，在 $\partial\kappa\setminus\partial\Omega$ 上的 v 的外侧或外迹 v_k^- 与 κ 相关，并且可用与单元 κ'（可能不止一个）有关的内迹 $v_{\kappa'}^+$ 来定义，因此 $\partial\kappa'$ 与 $\partial\kappa\setminus\partial\Omega$ 的交接处有正数值的(d-1)维度。忽略下标字母 κ 后变量 $v_\kappa^\pm$ 分别对应 $v^\pm$。

使用上述标记，由式(2.6)，引入如下的局部 FEM 计算公式：对于每个 $\kappa\in\mathcal{T}_h$，对所有的试函数 $v_h\in V_C^p(\mathcal{T}_h)$，找到 $u_h\in V_C^p(\mathcal{T}_h)$ 满足：

$$\int_\kappa\left(\nabla\cdot(\mathbf{b}u_h)+cu_h\right)v_h\mathrm{d}\mathbf{x}-\int_{\partial_-\kappa}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa u_h^+v_h^+\mathrm{d}s=\int_\kappa fv_h\mathrm{d}\mathbf{x}-\int_{\partial_-\kappa}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa\hat{g}v_h^+\mathrm{d}s \qquad (2.7)$$

其中，

$$\hat{g}(\mathbf{x}):=\begin{cases}u_h^-(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\partial_-\kappa\setminus\partial\Omega\\ g_\mathrm{D}(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\partial_-\kappa\cap\partial\Omega\end{cases}$$

对$\kappa \in \mathcal{T}_h$求和式（2.7），使用g的定义，近似计算式（2.4）和（2.5）的DGFEM可定义为：对所有的试函数$v_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$，找到$u_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$满足：

$$\begin{aligned}&\sum_{\kappa\in\mathcal{T}_h}\left\{\int_{\kappa}\left(\nabla\cdot(\mathbf{b}u_h)+cu_h\right)v_h\mathrm{d}\mathbf{x}-\int_{\partial\_\kappa\backslash\partial\Omega}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa\left(u_h^+-u_h^-\right)v_h^+\mathrm{d}s\right.\\&\left.-\int_{\partial_-\kappa\cap\partial\Omega}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa u_h^+v_h^+\mathrm{d}s\right\}=\sum_{\kappa\in\mathcal{T}_h}\left\{\int_{\mathcal{K}}fv_h\mathrm{d}\mathbf{x}-\int_{\partial\_\kappa\cap\partial\Omega}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa g_{\mathrm{D}}v_h^+\mathrm{d}s\right\}\end{aligned} \tag{2.8}$$

对式（2.8）的第 1 项分部积分，给出如下的等价计算公式：对所有的试函数$v_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$，找到$u_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$满足：

$$\begin{aligned}&\sum_{\kappa\in\mathcal{T}_h}\left\{\int_{\kappa}(-u_h\mathbf{b}\cdot\nabla v_h+cu_hv_h)\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{\partial\_\kappa\backslash\partial\Omega}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa u_h^-v_h^+\mathrm{d}s\right.\\&\left.+\int_{\partial_+\kappa}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa u_h^+v_h^+\mathrm{d}s\right\}=\sum_{\kappa\in\mathcal{T}_h}\left\{\int_{\kappa}fv_h\mathrm{d}\mathbf{x}-\int_{\partial\_\kappa\cap\partial\Omega}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa g_{\mathrm{D}}v_h^+\mathrm{d}s\right\}\end{aligned} \tag{2.9}$$

与式（2.6）定义的FEM比较，改善计算稳定性的DGFEM计算式（2.9）具有一定优势。现在考虑恒定流速场 $\mathbf{b}$ 的分量，可观测到：当$v_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$，对于所有$\delta>0$有$v_h+\delta\mathbf{b}\bullet\nabla v_h \in V^p(\mathcal{T}_h)$。因此，在DGFEM空间$V_C^p(\mathcal{T}_h)$中引入额外的自由度确保了基函数的流线方向导数也存在于空间$V_C^p(\mathcal{T}_h)$，与弱形式施加单元边界条件联合使用，提高了计算稳定性。

推导DGFEM式（2.9）的另一种方法是，更通用地应用于1阶非线性双曲型守恒方程的离散，使用广泛用于FVM中的数值通量的概念。该思路是考虑局部弱形式计算式（2.4）和（2.5），对其前几阶的项做分部积分。基于此方法，用一个光滑的试函数v乘以式（2.4），在一个单元$\kappa \in \mathcal{T}_h$上做积分：找到$u|_\kappa$，满足$u|_{\partial-\Omega}=g_{\mathrm{D}}$以及

$$\int_\kappa(-u\mathbf{b}\cdot\nabla v+cuv)\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{\partial\kappa}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa u^+v^+\mathrm{d}s=\int_\kappa fv\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{2.10}$$

DGFEM离散式（2.10）是基于用DGFEM近似解u_h代替解析解u，用v_h代替 v，其中u_h和v_h属于空间$V_C^p(\mathcal{T}_h)$。另外，因为u_h在相邻单元间是不连续的，必须用数值通量函数$\mathcal{H}(u_h^+,u_h^-,\mathbf{n}_\kappa)$代替通量$\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa u^+$，与$u_h$在$\partial\kappa,\kappa\in\mathcal{T}_h$上的内迹和外迹以及对$\partial\kappa$的外法向单位向量$\mathbf{n}_\kappa$相关。在网格$\mathcal{T}_h$内的单元$\kappa$上求和，生成

DGFEM 算法：对所有的试函数 $v_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$，找到 $u_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$ 满足：

$$\sum_{\kappa\in\mathcal{T}_h}\left\{\int_\kappa\left(-u_h\mathbf{b}\cdot\nabla v_h + c u_h v_h\right)\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\kappa}\mathcal{H}\left(u_h^+, u_h^-, \mathbf{n}_k\right)v_h^+\mathrm{ds}\right\} = \sum_{\kappa\in\mathcal{T}_h}\int_\kappa f v_h \mathrm{d}\mathbf{x} \qquad (2.11)$$

需要注意，数值通量函数的选择与使用的有限单元空间是相互独立的。数值通量函数 $\mathcal{H}(\cdot,\cdot,\cdot)$ 应满足 2 个关键特性：

（1）一致性：对每个 $\kappa \in \mathcal{T}_h$，要求 $\mathcal{H}\left(v, v, \mathbf{n}_\kappa\right)\big|_{\partial\kappa} = (\mathbf{b}v)\cdot\mathbf{n}_k$。

（2）守恒性：给定有限单元网格中的 2 个相邻单元 κ 和 κ'，在各点 $\mathbf{x}\in\partial\kappa\cap\partial\kappa' \neq \varnothing$，注意到 $\mathbf{n}_{\kappa'} = -\mathbf{n}_\kappa$，有 $\mathcal{H}\left(v, w, \mathbf{n}_k\right) = -\mathcal{H}\left(w, v, -\mathbf{n}_k\right)$。

最常用的是经典的迎风数值通量格式，对 $\kappa \in \mathcal{T}_h$ 有：

$$\mathcal{H}\left(u_h^+, u_h^-, \mathbf{n}_\kappa\right)\big|_{\partial\kappa} := \begin{cases} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa \lim\limits_{s\to 0^+} u_h(\mathbf{x}-s\mathbf{b}) & \mathbf{x}\in\partial\kappa\setminus\partial\_\Omega \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa g_{\mathrm{D}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x}\in\partial\kappa\cap\partial\_\Omega \end{cases} \qquad (2.12)$$

将式（2.12）代入式（2.11），即获得式（2.9）中的 DGFEM 格式。

Remark: 假设 $\mathbf{b}$ 在 Ω 内不会消失，可以用合适的“迎风”风格定义计算网格 $\mathcal{T}_h$ 内的单元编号。这样，由式（2.11）导出的 DGFEM 矩阵为块上三角型，可使用块状向后迭代方法高效求解。另外，该方法无需构建全局 DGFEM 矩阵，即可以设计有效的 *hp* 版本的 DGFEM。

参考文献

RKDG 基本原理文献

A. Cangiani et al., Chapter 2 Introduction to Discontinuous Galerkin Methods, *hp*-Version Discontinuous Galerkin Methods on Polygonal and Polyhedral Meshes, SpringerBriefs in Mathematics, , Springer International Publishing AG 2017

R. Biswas, K.D. Devine and J. Flaherty, Parallel, adaptive finite element methods for conservation laws, Applied Numerical Mathematics, 14 (1994), 255-283.

J.-F. Remacle, J. Flaherty and M. Shephard, An adaptive discontinuous Galerkin technique with an orthogonal basis applied to Rayleigh-Taylor flow instabilities, SIAM Review, 45 (2003), 53-72.

Shu C.W. 1987. TVB uniformly high order schemes for conservation laws. Math. Comp., 49: 105-121.

B. Cockburn, S. Hou and C.-W. Shu, The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: the multidimensional case, Mathematics of Computation, 54 (1990), 545-581.

B. Cockburn, G. Karniadakis and C.-W. Shu, The development of discontinuous Galerkin methods, in Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications, B. Cockburn, G. Karniadakis and C.-W. Shu, editors, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, volume 11, Springer, 2000, Part I: Overview, 3-50.

B. Cockburn, S.-Y. Lin and C.-W. Shu, TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one dimensional systems, Journal of Computational Physics, 84 (1989), 90-113.

B. Cockburn and C.-W. Shu, 1989. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework, Mathematics of Computation, 52: 411-435.

B. Cockburn and C.-W. Shu, 1991. The Runge-Kutta local projection P1-discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws, Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M2AN), 25: 337-361.

B. Cockburn and C.-W. Shu, 1998. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems, Journal of Computational Physics, 141: 199-224.

B. Cockburn and C.-W. Shu, 1998. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection diffusion systems, SIAM Journal on Numerical Analysis, 35: 2440-2463.

B. Cockburn and C.-W. Shu, 2001. Runge-Kutta Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems, Journal of Scientific Computing, 16: 173-261.

B. Cockburn and C.-W. Shu, 2005. Foreword for the special issue on discontinuous Galerkin method, Journal of Scientific Computing, 22-23: 1-3.

C. Dawson, 2006. Foreword for the special issue on discontinuous Galerkin method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195: 3183.

时间离散格式文献

S. Gottlieb and C.-W. Shu, 1998. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes, Mathematics of Computation, 67: 73-85.

C.-W. Shu, 2002. A survey of strong stability preserving high order time discretizations, in Collected Lectures on the Preservation of Stability under Discretization, D. Estep and S. Tavener, editors, SIAM, pp: 51-65.

S. Gottlieb, C.-W. Shu and E. Tadmor, 2001. Strong stability preserving high order time discretization methods, SIAM Review, 43: 89-112.

Y. Xia, Y. Xu and C.-W. Shu, Efficient time discretization for local discontinuous Galerkin methods, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, 8 (2007), 677-693.

附录 A 利普希兹连续

K 对于在实数集的子集的函数 $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，若存在常数 K，使得 $|f(a) - f(b)| \leq K|a - b| \quad \forall a, b \in D$，则称 f 符合利普希茨条件，对于 f 最小的常数 K 称为 f 的**利普希茨常数**。若 $K < 1$，f 称为收缩映射。

利普希茨条件也可对任意度量空间的函数定义：

给定两个度量空间 $(M, d_M), (N, d_N)$，$U \subseteq M$。若对于函数 $f: U \to N$，存在常数 K 使得

$$d_N(f(a), f(b)) \leq K d_M(a, b) \quad \forall a, b \in U,$$

则说它符合利普希茨条件。

附录 B L^2 投影

设 Ω 是多角形域， Γ_0 是边界 Γ 的角点集，三角剖分是均匀的. 记 m 次有限元空间为 S_m^h, u 及 $v \in S_m^h$ 可满足下列边界条件之一：

BV1. 在 Γ 上， $u = v = 0$;

BV2. 对任何 u, 在 Γ 上 v 自由.

对函数 $u \in L^2(\Omega)$, 其 L^2 投影 $u_h = P_h u \in S_m^h$ 满足正交关系

$$\int_\Omega (u - u_h) v dx = 0, \ v \in S_m^h. \tag{1}$$

若 $u \in W^{m+1,p}(\Omega), 1 \le p \le \infty$, 文 [4] 已得如下最佳误差估计

$$||u - u_h||_{0,p,\Omega} \le Ch^{m+1} ||u||_{m+1,p,\Omega}.$$