DG 法的一般原理和稳定性（Chi-Wang Shu）

Shu Chi-Wang 对 DG 法做了详细的解释和分析，并介绍了应用 DG 法求解各种低阶和高阶 PDE 的算法。总结如下：

1 DGFEM 综述(Shu,; Cockburn,)

Discontinuous Galerki (DG)法是一类使用完备的不连续基函数的有限单元法，基函数通常选为分段多项式。因为基函数可以是完备不连续的，DG 法具有连续有限单元法不具备的灵活性，比如允许有悬挂节点的任意三角网格、自由改变每个单元内的多项式阶数，与周围相邻单元的无关（*p* 自适应性）、局部性数据结构（单元仅与其紧密相邻单元通信，与格式的精度（阶）无关）以及非常高的并行效率（通常在固定网格上可达 99%，在动态荷载均衡的自适应网格上可达 80%）(Biswas et al., 1994)。*h-p* 自适应、并行动态荷载均衡和高效求解特性的 DG 法模拟 Rayleigh-Taylor 流动不稳定性的研究参考（Remacle et al., 2003）。

DG 法首次在 1973 年由 Reed and Hill 引入中子输移方程的求解，是一个时间无关的线性双曲型方程。DG 法的主要发展由 Cockburn et al.完成[10,12,13,14,15]，建立可求解非线性、时间相关问题，诸如可压缩欧拉方程，使用显格式、非线性稳定高阶 Runge-Kutta 时间离散[44]和具有精确或近似的界面通量的黎曼求解器的 DG 空间离散以及总方差限制(total variation bounded, TVB)的非线性限制器，实现了强激波的非振荡数值特性。

DG 法已应用于包括电磁动力学、气体动力学、颗粒流、磁流体力学、浅水方程、物理海洋、油气存储、半导体设备、空隙介质污染物输移、水轮机、紊流、粘弹性流、天气预报等各研究领域，具体细节可参考综述性文献[8,11,17,18,19]。

2 时间离散

重点介绍 Method of lines DG 法，即不离散时间变量。下面简要介绍时间离散格式。

双曲型问题或对流占优问题，诸如高 Reynolds 数 Navier-Stokes 方程，通常使用一类高阶非线性稳定的 Runge-Kutta 时间离散格式。

For high-order time discretizations, we can use a strong stability preserving (SSP) Runge–Kutta or multistep method (Gottlieb et al., 2009), which is a convex combination of several formal forward Euler steps. For example, let $u_t = L(u,t)$ denote a semi-discrete scheme with high-order spatial discretizations by a finite volume or DG method, then the third order SSP Runge-Kutta method is given by,

$$
\begin{aligned}
u_h^{(1)} &= u_h^n + \Delta t \mathcal{L}\left(u_h^n, t^n\right) \\
u_h^{(2)} &= \frac{3}{4} u_h^n + \frac{1}{4}\left(u_h^{(1)} + \Delta t \mathcal{L}\left(u_h^{(1)}, t^n + \Delta t\right)\right) \\
u_h^{n+1} &= \frac{1}{3} u_h^n + \frac{2}{3}\left(u_h^{(2)} + \Delta t \mathcal{L}\left(u_h^{(2)},\right) t^n + \frac{\Delta t}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

If the forward Euler is bound-preserving, then so are the high-order SSP methods due to the convex combinations. Early works using SSP methods to construct high-order bound-preserving schemes include Perthame and Shu (1996).

To render a high-order finite volume or DG scheme bound-preserving, we should use a SSP time discretizations such as (1) and a monotone flux f. Then in each time stage in a Runge–Kutta method or each time step of a multistep method, we should use the simple limiter.

此类格式是高阶的或低存储量的。具体细节可参考调查性文献[43]和综述性文献[21]。

如果 PDE 包含高阶的空间导数，且系数值很小，则显格式的时间推进方法，如 Runge-Kutta 法将导致时间步长受到严格限制。如何建立此类方程求解的高效时间离散格式，并且仍然保持 DG 法的优势，如局部特性和并行效率，是一个值得深入研究的课题[46]。

3 DG 法求解守恒方程

DG 法是求解双曲型守恒方程的有效数值方法，可以有不连续性近似解。下面讨论 DG 法求解双曲型守恒方程的算法公式、稳定性分析和误差评估。

3.1 2D 恒定态线性方程

首先介绍原始的 DG 法求解 2D 恒定态线性对流方程：

$$
au_x + bu_y = f(x,y), \quad 0 \le x, y \le 1 \tag{3.1}
$$

式中，a 和 b 为常数。假设 a>0，b>0。

当施加以下入流边界条件后，式（3.1）是 well-posed 问题。

$$\begin{aligned} &u(x,0)=g_1(x), \quad 0\le x\le 1 \\ &u(0,y)=g_2(y), \quad 0\le y\le 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

假设使用矩形网格覆盖计算域$[0,1]^2$，包含以下单元（$1\le i\le N_x, 1\le j\le N_y$）：

$$I_{i,j}=\left\{(x,y): x_{i-\frac{1}{2}}\le x\le x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}}\le y\le y_{j+\frac{1}{2}}\right\}$$

其中，

$$\begin{aligned} &0=x_{\frac{1}{2}}<x_{\frac{3}{2}}<\cdots<x_{N_x+\frac{1}{2}}=1 \\ &0=y_{\frac{1}{2}}<y_{\frac{3}{2}}<\cdots<y_{N_y+\frac{1}{2}}=1 \end{aligned}$$

上式坐标为在[0,1]的 x, y 轴上的离散点。

还可以标记：

$$\Delta x_i=x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}}, 1\le i\le N_x; \quad \Delta y_j=y_{j+\frac{1}{2}}-y_{j-\frac{1}{2}}, 1\le j\le N_y$$

以及

$$h=\max\left(\max_{1\le i\le N_x}\Delta x_i, \max_{1\le j\le N_y}\Delta y_j\right)$$

假设网格是规则的，即存在常数 $c>0$，与 h 无关，因此：

$$\Delta x_i\ge ch, \quad 1\le i\le N_x; \quad \Delta y_j\ge ch, \quad 1\le j\le N_y$$

再定义有限单元空间由下列分段多项式组成：

$$V_h^k=\left\{v: v|_{I_{i,j}}\in P^k\left(I_{i,j}\right); 1\le i\le N_x, 1\le j\le N_y\right\} \tag{3.3}$$

式中，$P^k\left(I_{i,j}\right)$表示在单元$I_{i,j}$上定义的直到k阶的多项式集合。注意在空间V_h^k内的函数可能在穿过单元界面处是不连续的。

求解式（3.1）的 DG 法定义如下：对所有试函数$v_h\in V_h^k$和所有$1\le i\le N_x$，$1\le j\le N_y$，找到唯一的函数$u_h\in V_h^k$满足：

$$
\begin{aligned}
&-\iint_{I_{i,j}}\left(au_h\left(v_h\right)_x+bu_h\left(v_h\right)_y\right)dxdy+a\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}}\hat{u}_h\left(x_{i+\frac{1}{2}},y\right)v_h\left(x_{i+\frac{1}{2}}^-,y\right)dy\\
&-a\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}}\hat{u}_h\left(x_{i-\frac{1}{2}},y\right)v_h\left(x_{i-\frac{1}{2}}^+,y\right)dy+b\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\hat{u}_h\left(x,y_{j+\frac{1}{2}}\right)v_h\left(x,y_{j+\frac{1}{2}}\right)dx \qquad (3.4)\\
&-b\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\hat{u}_h\left(x,y_{j-\frac{1}{2}}\right)v_h\left(x,y_{j-\frac{1}{2}}^+\right)dx=0
\end{aligned}
$$

这里，u_h是数值通量，是定义在单元界面处的单值函数，与界面两侧的数值解 u_h 有关，因为界面处的 u_h 是不连续的。对于简单的线性对流 PDE（3.1），可选择迎风格式的数值通量格式：

$$\hat{u}_h\left(x_{i+\frac{1}{2}},y\right)=u_h\left(x_{i+\frac{1}{2}}^-,y\right),\quad \hat{u}_h\left(x,y_{j+\frac{1}{2}}\right)=u_h\left(x,y_{j+\frac{1}{2}}^-\right)$$

注意到，对于边界单元 i=1，左侧边的数值通量使用给定的边界条件计算：

$$\hat{u}_h\left(x_{\frac{1}{2}},y\right)=g_2(y)$$

类似地，对于边界单元 j=1，底部边的数值通量使用给定的边界条件计算：

$$\hat{u}_h\left(x,y_{\frac{1}{2}}\right)=g_1(x)$$

现在考察格式（3.4）的实施。如果选择$P^k\left(I_{i,j}\right)$的一个局部基函数，表示为$\varphi_{i,j}^{\ell}(x,y)$（$\ell=1,2,\cdots,K=(k+1)(k+2)/2$），数值解可表述为：

$$u_h(x,y)=\sum_{\ell=1}^{K}u_{i,j}^{\ell}\varphi_{i,j}^{\ell}(x,y),\quad (x,y)\in I_{i,j}$$

需要求解系数：

$$u_{i,j}=\begin{pmatrix}u_{i,j}^1\\ \vdots\\ u_{i,j}^K\end{pmatrix}$$

根据格式（3.4），上式满足线性方程：

$$A_{i,j}u_{i,j}=rhs \qquad (3.5)$$

式中，$A_{i,j}$为$K\times K$矩阵，第(ℓ,m)个元素计算如下：

$$a_{i,j}^{\ell,m} = -\int\int_{I_{i,j}} \left(a\varphi_{i,j}^m(x,y)(\varphi_{i,j}^\ell(x,y))_x + b\varphi_{i,j}^m(x,y)(\varphi_{i,j}^\ell(x,y))_y\right) dxdy \qquad (3.6)$$
$$+a\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \varphi_{i,j}^m(x_{i+\frac{1}{2}},y)\varphi_{i,j}^\ell(x_{i+\frac{1}{2}},y)dy + b\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \varphi_{i,j}^m(x,y_{j+\frac{1}{2}})\varphi_{i,j}^\ell(x,y_{j+\frac{1}{2}})dx,$$

RHS 向量的第 *l* 个元素计算如下：

$$rhs^\ell = a\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} u_h(x_{i-\frac{1}{2}}^-,y)\varphi_{i,j}^\ell(x_{i-\frac{1}{2}},y)dy + b\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_h(x,y_{j-\frac{1}{2}}^-)\varphi_{i,j}^\ell(x,y_{j-\frac{1}{2}})dx$$

依赖于在左侧单元 $I_{i-1,j}$ 和底部单元 $I_{i,j-1}$ 上的 u_h 信息，如果他们是在计算域内，或者在边界条件上，如果一个或两个单元都在计算域以外。

显然，该方法没有涉及到大型方程组求解，容易实施。Lesaint and Raviart[25]证明当使用 *k* 阶多项式的分段张量积作为基函数时，该方法在 L^2 范数上以最优精度（阶）为 $O\left(h^{k+1}\right)$ 收敛。数值试验表明：当使用常用的 *k* 阶分段多项式时也可以达到最优收敛速度。

上述方法可在任意三角网格上设计和实施。$O\left(h^{k+1/2}\right)$ 的 L^2 误差评估，其中 *k* 是多项式的阶，*h* 为网格尺寸（数值解足够光滑时）。大多数情况下，最优误差界为 $O\left(h^{k+1}\right)$，实际数值计算中，也可观察到最优精度可达 $O\left(h^{k+1}\right)$。

但是，尽管方法（3.4）容易精确、有效地实施，但不能统一地用于线性方程组，其中特征线信息来自不同方向，或者对于非线性方程组，特征线方向与解本身有关。

3.2 1D 时间相关守恒方程

当仅使用 DG 法离散空间变量时，可解决方法（3.4）不能用于线性和非线性方程组的问题，时间离散可采用显格式的 Runge-Kutta 方法（2.1）实现。该方法称为 Runge-Kutta DG（RKDG）法[10,12,13,14,15]。

考察以下 1D 守恒方程：

$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad (3.7)$$

假设如下网格覆盖计算域[0,1]，由单元 $I_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right]$（$1 \le i \le N$）组成，其中：

$$0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \cdots < x_{N+\frac{1}{2}} = 1$$

标记：

$$\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}},\quad 1\le i\le N;\quad h=\max_{1\le i\le N}\Delta x_i$$

假设网格是规则的，即存在常数 $c>0$，与 h 无关，因此：

$$\Delta x_i \ge ch,\quad 1\le i\le N$$

定义有限单元空间由分段多项式组成：

$$V_h^k=\left\{v: v|_{I_i}\in P^k\left(I_i\right);1\le i\le N\right\}\qquad (3.8)$$

其中，$P^k\left(I_i\right)$表示在单元 I_i 上定义的直到 k 阶的多项式集合。求解方程（3.7）的半离散式 DG 法定义如下：对所有试函数$v_h\in V_h^k$和所有$1\le i\le N$，找到唯一函数$u_h=u_h(t)\in V_h^k$满足：

$$\int_{I_i}\left(u_h\right)_t\left(v_h\right)dx-\int_{I_i} f\left(u_h\right)\left(v_h\right)_x dx+\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}v_h\left(x^-_{i+\frac{1}{2}}\right)-\hat{f}_{i-\frac{1}{2}}v_h\left(x^+_{i-\frac{1}{2}}\right)=0\qquad (3.9)$$

此处，$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}$为数值通量，是定义在单元界面处的单值函数，通常与界面两侧的数值解u_h的值有关：

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}=\hat{f}\left(u_h\left(x^-_{i+\frac{1}{2}},t\right),u_h\left(x^+_{i+\frac{1}{2}},t\right)\right)$$

使用由有限差分格式和有限单元格式而来的单调性数值通量格式求解守恒方程组，满足如下条件：

（1）一致性：$\hat{f}(u,u)=f(u)$；

（2）连续性：$\hat{f}\left(u^-,u^+\right)$对于变量$u^-$和$u^+$至少是 Lipschitz 连续的；

（3）单调性：$\hat{f}\left(u^-,u^+\right)$对于其第 1 个变量$u^-$是非递减函数，对于第 2 个变量$u^+$是非递增函数，符号标记为$\hat{f}(\uparrow,\downarrow)$。

单调性通量包括 Lax-Friedrichs 通量：

$$\hat{f}^{LF}\left(u^-,u^+\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(u^-\right)+f\left(u^+\right)-\alpha\left(u^+-u^-\right)\right),\quad \alpha=\max_u\left|f'(u)\right|$$

Godunov 通量：

$$\hat{f}^{God}\left(u^-,u^+\right)=\begin{cases}\min_{u^-\le u\le u^+} f(u), & \text{if } u^-<u^+\\ \max_{u^+\le u\le u^-} f(u), & \text{if } u^-\ge u^+\end{cases}$$

Engquist-Osher 通量：

$$\hat{f}^{EO}=\int_0^{u^-}\max\left(f'(u),0\right)du+\int_0^{u^+}\min\left(f'(u),0\right)du+f(0)$$

3.2.1 单元熵不等式和 L^2 稳定性

式（3.7）的弱解形式可能不唯一，唯一和物理相关的弱解（称为熵解），对于满足 $U''(u)\ge 0$ 的任意凸集的熵 $U(n)$ 和对应的熵通量 $F(u)=\int^u U'(u)f'(u)du$，满足如下分布意义上的熵不等式：

$$U(u)_t+F(u)_x\le 0 \qquad （3.10）$$

间断 Galerkin（DG）法原理 Cangiani et al. (2017)

DG 法离散 1 阶双曲型 PDE

Cangiani et al. (2017)给出了 DG 法原理的数学分析，总结如下：

考虑使用 DG 法离散下面的 1 阶输运方程，即找到 $u\in\mathcal{G}(\mathcal{L},\Omega)$ 满足：

$$\mathcal{L}u:=\nabla\cdot(\mathbf{b}u)+cu=f \quad \text{in } \Omega \qquad （2.4）$$

$$u=g_{\mathrm{D}} \quad \text{on } \partial\_\Omega \qquad （2.5）$$

其中，$\mathcal{G}(\mathcal{L},\Omega)$ 表示下列集合给出的图空间(graph space)：

$$\mathcal{G}(\mathcal{L},\Omega):=\left\{v\in L^2(\Omega):\mathcal{L}v\in L^2(\Omega)\right\}$$

在介绍 DGFEM 近似求解方程（2.4）和（2.5）之前，首先考虑基于使用弱形式施加边界条件的标准连续 FEM 离散方法。$\mathcal{T}_h$ 表示计算域 Ω 的而规则形状分区，即由非重叠的 d 维单元 $K\in\mathcal{T}_h$ 组成的网格，因此 $\overline{\Omega}=\bigcup_{\kappa\in\mathcal{T}_h}\overline{\kappa}$。$p\in\mathbb{N}$ 表示多项式的阶，引入有限单元空间：

$$V_C^p\left(\mathcal{T}_h\right):=\left\{u\in C(\Omega):u|_\kappa\in\mathcal{P}_p(\kappa),\kappa\in\mathcal{T}_h\right\}$$

式中，$\mathcal{P}_p(\kappa)$ 表示在单元 κ 上 p 阶多项式的空间。

标准的连续 FEM 就是找到 $u_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$，对所有的试函数 $v_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$ 满足：

$$\int_\Omega \left(\nabla\cdot(\mathbf{b}u_h)+cu_h\right)v_h\mathrm{d}\mathbf{x}-\int_{\partial\_\Omega}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}u_h v_h\mathrm{d}s=\int_\Omega f v_h\mathrm{d}\mathbf{x}-\int_{\partial\_\Omega}\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}g_{\mathrm{D}}v_h\mathrm{d}s \qquad (2.6)$$

由式（2.6）定义的 FEM 在大梯度或不连续的解析解附近，由于数值振荡表现出数值计算不稳定的问题。并且，即使没有数值振荡的情况，相比逼近 $V_C^p(\mathcal{T}_h)$ 的速率（能力），FEM 近似解的收敛速度也很慢。为解决这个问题，需要对式（2.6）引入适当的数值扩散，来增加数值格式的稳定性，例如流线扩散 FEM（SUPG），其中在体积分中的试函数用 $v_h+\delta\mathbf{b}\cdot\nabla v_h$ 代替，即当多项式阶数 p 固定时，$\delta=\mathcal{O}(h)$，而统一化为 hp 配置时，$\delta=\mathcal{O}(h/p)$。

DG FEM 离散式（2.4）和（2.5）的基本思路是逐单元地(element-wise)应用格式（2.6），在各单元的入流边界上实施预设的边界条件。该方法提高了数值计算稳定性，但对于 d 维网格，引入了更多的自由度。

为表述 DG FEM 的简洁性，需要引入一些标记。对于 $p\geq 0$，定义 DGFEM 空间：

$$V^p(\mathcal{T}_h):=\left\{u\in L^2(\Omega):u|_\kappa\in\mathcal{P}_p(\kappa),\kappa\in\mathcal{T}_h\right\}$$

对便于表述，这里仅考虑网格 $\mathcal{T}_h$ 上均匀分布阶数的多项式，通用的 hp 版本稍后介绍。对于一个单元 $\kappa\in\mathcal{T}_h$，$\partial\kappa$ 表示单元的边界，$\partial\kappa$ 的入流和出流部分分别定义为：

$$\partial_-\kappa:=\left\{\mathbf{x}\in\partial\kappa,\quad \mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}_\kappa(\mathbf{x})<0\right\},$$
$$\partial_+\kappa:=\left\{\mathbf{x}\in\partial\kappa,\quad \mathbf{b}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}_\kappa(\mathbf{x})\geq 0\right\}$$

式中，$\mathbf{n}_\kappa(\mathbf{x})$ 表示在 $\mathbf{x}\in\partial\kappa$ 处对 $\partial\kappa$ 的外法向单位向量。

给定 $\kappa\in\mathcal{T}_h$，在 $\partial\kappa$ 上一个函数 $v\in H^1(\Omega,\mathcal{T}_h)$ 的迹与 κ 相关。那么，几乎对每一个 $\mathbf{x}\in\partial\kappa\setminus\partial\Omega$，存在唯一的单元 $\kappa'\in\mathcal{T}_h$，有 $\mathbf{x}\in\partial\kappa'$。因此，在 $\partial\kappa\setminus\partial\Omega$ 上的 v 的外侧或外迹 v_k^- 与 κ 相关，并且可用与单元 κ'（可能不止一个）有关的内迹 $v_{\kappa'}^+$ 来定义，因此 $\partial\kappa'$ 与 $\partial\kappa\setminus\partial\Omega$ 的交接处有正数值的(d-1)维度。忽略下标字母 κ 后变

量 $v_\kappa^\pm$ 分别对应 $v^\pm$ 。

使用上述标记，由式(2.6)，引入如下的局部 FEM 计算公式：对于每个 $\kappa \in \mathcal{T}_h$，对所有的试函数 $v_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$，找到 $u_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$ 满足：

$$\int_\kappa (\nabla\cdot(\mathbf{b}u_h)+cu_h)v_h \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\_\kappa} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa u_h^+ v_h^+ \mathrm{ds} = \int_\kappa f v_h \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\_\kappa} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa \hat{g} v_h^+ \mathrm{ds} \qquad (2.7)$$

其中，

$$\hat{g}(\mathbf{x}) := \begin{cases} u_h^-(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\partial\_\kappa \setminus \partial\Omega \\ g_{\mathrm{D}}(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\partial\_\kappa \cap \partial\Omega \end{cases}$$

对 $\kappa \in \mathcal{T}_h$ 求和式（2.7），使用 g 的定义，近似计算式（2.4）和（2.5）的 DGFEM 可定义为：对所有的试函数 $v_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$，找到 $u_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$ 满足：

$$\begin{aligned}&\sum_{\kappa\in\mathcal{T}_h}\left\{\int_\kappa (\nabla\cdot(\mathbf{b}u_h)+cu_h)v_h \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\_\kappa\setminus\partial\Omega} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa (u_h^+ - u_h^-) v_h^+ \mathrm{ds}\right.\\ &\left.-\int_{\partial\_\kappa\cap\partial\Omega} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa u_h^+ v_h^+ \mathrm{ds}\right\} = \sum_{\kappa\in\mathcal{T}_h}\left\{\int_\kappa f v_h \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\_\kappa\cap\partial\Omega} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa g_{\mathrm{D}} v_h^+ \mathrm{ds}\right\}\end{aligned} \qquad (2.8)$$

对式（2.8）的第 1 项分部积分，给出如下的等价计算公式：对所有的试函数 $v_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$，找到 $u_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$ 满足：

$$\begin{aligned}&\sum_{\kappa\in\mathcal{T}_h}\left\{\int_\kappa (-u_h\mathbf{b}\cdot\nabla v_h + cu_h v_h) \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\_\kappa\setminus\partial\Omega} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa u_h^- v_h^+ \mathrm{ds}\right.\\ &\left.+\int_{\partial_+\kappa} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa u_h^+ v_h^+ \mathrm{ds}\right\} = \sum_{\kappa\in\mathcal{T}_h}\left\{\int_\kappa f v_h \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\_\kappa\cap\partial\Omega} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa g_{\mathrm{D}} v_h^+ \mathrm{ds}\right\}\end{aligned} \qquad (2.9)$$

与式（2.6）定义的 FEM 比较，改善计算稳定性的 DGFEM 计算式（2.9）具有一定优势。现在考虑恒定流速场 **b** 的分量，可观测到：当 $v_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$，对于所有 $\delta > 0$ 有 $v_h + \delta\mathbf{b}\bullet\nabla v_h \in V^p(\mathcal{T}_h)$。因此，在 DGFEM 空间 $V_C^p(\mathcal{T}_h)$ 中引入额外的自由度确保了基函数的流线方向导数也存在于空间 $V_C^p(\mathcal{T}_h)$，与弱形式施加单元边界条件联合使用，提高了计算稳定性。

推导 DGFEM 式（2.9）的另一种方法是，更通用地应用于 1 阶非线性双曲型守恒方程的离散，使用广泛用于 FVM 中的数值通量的概念。该思路是考虑局部弱形式计算式（2.4）和（2.5），对其前几阶的项做分部积分。基于此方法，用

一个光滑的试函数 v 乘以式（2.4），在一个单元 $\kappa \in \mathcal{T}_h$ 上做积分：找到 $u|_\kappa$，满足 $u|_{\partial-\Omega} = g_{\mathrm{D}}$ 以及

$$\int_\kappa (-u\mathbf{b}\cdot\nabla v + cuv)\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\kappa} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa u^+ v^+ \mathrm{ds} = \int_\kappa f v \mathrm{d}\mathbf{x} \qquad (2.10)$$

DGFEM 离散式（2.10）是基于用 DGFEM 近似解 u_h 代替解析解 u，用 v_h 代替 v，其中 u_h 和 v_h 属于空间 $V_C^p(\mathcal{T}_h)$。另外，因为 u_h 在相邻单元间是不连续的，必须用数值通量函数 $\mathcal{H}(u_h^+, u_h^-, \mathbf{n}_\kappa)$ 代替通量 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa u^+$，与 u_h 在 $\partial\kappa, \kappa \in \mathcal{T}_h$ 上的内迹和外迹以及对 $\partial\kappa$ 的外法向单位向量 $\mathbf{n}_\kappa$ 相关。在网格 $\mathcal{T}_h$ 内的单元 κ 上求和，生成 DGFEM 算法：对所有的试函数 $v_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$，找到 $u_h \in V_C^p(\mathcal{T}_h)$ 满足：

$$\sum_{\kappa\in\mathcal{T}_h}\left\{\int_\kappa (-u_h\mathbf{b}\cdot\nabla v_h + cu_h v_h)\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\kappa}\mathcal{H}(u_h^+, u_h^-, \mathbf{n}_k)v_h^+\mathrm{ds}\right\} = \sum_{\kappa\in\mathcal{T}_h}\int_\kappa f v_h \mathrm{d}\mathbf{x} \qquad (2.11)$$

需要注意，数值通量函数的选择与使用的有限单元空间是相互独立的。数值通量函数 $\mathcal{H}(\cdot,\cdot,\cdot)$ 应满足 2 个关键特性：

（1）一致性：对每个 $\kappa \in \mathcal{T}_h$，要求 $\mathcal{H}(v, v, \mathbf{n}_\kappa)|_{\partial\kappa} = (\mathbf{b}v)\cdot\mathbf{n}_k$。

（2）守恒性：给定有限单元网格中的 2 个相邻单元 κ 和 κ'，在各点 $\mathbf{x} \in \partial\kappa \cap \partial\kappa' \neq \varnothing$，注意到 $\mathbf{n}_{\kappa'} = -\mathbf{n}_\kappa$，有 $\mathcal{H}(v, w, \mathbf{n}_k) = -\mathcal{H}(w, v, -\mathbf{n}_k)$。

最常用的是经典的迎风数值通量格式，对 $\kappa \in \mathcal{T}_h$ 有：

$$\mathcal{H}(u_h^+, u_h^-, \mathbf{n}_\kappa)\Big|_{\partial\kappa} := \begin{cases} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa \lim\limits_{s\to 0^+} u_h(\mathbf{x} - s\mathbf{b}) & \mathbf{x} \in \partial\kappa \setminus \partial\_\Omega \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}_\kappa g_{\mathrm{D}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \partial\kappa \cap \partial\_\Omega \end{cases} \qquad (2.12)$$

将式（2.12）代入式（2.11），即获得式（2.9）中的 DGFEM 格式。

Remark: 假设 $\mathbf{b}$ 在 Ω 内不会消失，可以用合适的“迎风”风格定义计算网格 $\mathcal{T}_h$ 内的单元编号。这样，由式（2.11）导出的 DGFEM 矩阵为块上三角型，可使用块状向后迭代方法高效求解。另外，该方法无需构建全局 DGFEM 矩阵，即可以设计有效的 *hp* 版本的 DGFEM。

参考文献

A. Cangiani et al., Chapter 2 Introduction to Discontinuous Galerkin Methods, *@hp-Version Discontinuous Galerkin Methods on Polygonal and Polyhedral Meshes*, SpringerBriefs in Mathematics, , Springer International Publishing AG 2017

Shu Chi-Wang. Discontinuous Galerkin Methods: General Approach and Stability.

R. Biswas, K.D. Devine and J. Flaherty, Parallel, adaptive finite element methods for conservation laws, Applied Numerical Mathematics, 14 (1994), 255-283.

J.-F. Remacle, J. Flaherty and M. Shephard, An adaptive discontinuous Galerkin technique with an orthogonal basis applied to Rayleigh-Taylor flow instabilities, SIAM Review, 45 (2003), 53-72.

B. Cockburn, S. Hou and C.-W. Shu, The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: the multidimensional case, Mathematics of Computation, 54 (1990), 545-581.

B. Cockburn, G. Karniadakis and C.-W. Shu, The development of discontinuous Galerkin methods, in Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications, B. Cockburn, G. Karniadakis and C.-W. Shu, editors, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, volume 11, Springer, 2000, Part I: Overview, 3-50.

B. Cockburn, S.-Y. Lin and C.-W. Shu, TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one dimensional systems, Journal of Computational Physics, 84 (1989), 90-113.

B. Cockburn and C.-W. Shu, TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework, Mathematics of Computation, 52 (1989), 411-435.

B. Cockburn and C.-W. Shu, The Runge-Kutta local projection P1-discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws, Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M2AN), 25 (1991), 337-361.

B. Cockburn and C.-W. Shu, The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems, Journal of Computational Physics, 141 (1998), 199-224.

B. Cockburn and C.-W. Shu, The local discontinuous Galerkin method for timedependent convection diffusion systems, SIAM Journal on Numerical Analysis, 35 (1998), 2440-2463.

B. Cockburn and C.-W. Shu, Runge-Kutta Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems, Journal of Scientific Computing, 16 (2001), 173-261.

B. Cockburn and C.-W. Shu, Foreword for the special issue on discontinuous Galerkin method, Journal of Scientific Computing, 22-23 (2005), 1-3.

C. Dawson, Foreword for the special issue on discontinuous Galerkin method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195 (2006), 3183.

时间离散格式

S. Gottlieb and C.-W. Shu, Total variation diminishing Runge-Kutta schemes, Mathematics of Computation, 67 (1998), 73-85.

C.-W. Shu, A survey of strong stability preserving high order time discretizations, in Collected Lectures on the Preservation of Stability under Discretization, D. Estep and S. Tavener, editors, SIAM, 2002, 51-65.

S. Gottlieb, C.-W. Shu and E. Tadmor, Strong stability preserving high order time discretization methods, SIAM Review, 43 (2001), 89-112.

利普希兹条件

K 对于在实数集的子集的函数 $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，若存在常数 K，使得 $|f(a)-f(b)| \le K|a-b| \quad \forall a,b \in D$，则称 f 符合利普希茨条件，对于 f 最小的常数 K 称为 f 的**利普希茨常数**。若 $K<1$，f 称为收缩映射。

利普希茨条件也可对任意度量空间的函数定义：

给定两个度量空间 $(M,d_M),(N,d_N)$，$U \subseteq M$。若对于函数 $f:U \to N$，存在常数 K 使得

$$d_N(f(a),f(b)) \le K d_M(a,b) \quad \forall a,b \in U,$$

则说它符合利普希茨条件。