# 数值积分：Gauss-Legendre积分公式

Dunavant (1985)将高斯积分公式的计算精度推导至20阶。

Rathod et al. (2007)系统地给出了Gauss数值积分公式不同方法的精度。

## 1 三角形上的积分公式

2D有限单元法需要在三角形单元上计算形函数及相关项的数值积分。通过仿射转换，可将任意三角形转换为笛卡尔坐标系(*x, y*)下的标准三角形*T*，坐标为(0,0), (0,1), (1,0)，或者3D空间下的自然三角形(Dunvant, 1985)。考虑在三角形*T*上计算数值积分。任意函数*f*在三角形*T*表面上的积分，可表示为双重积分：

 （1）

需要用求积公式计算积分值：

 （2）

式中，*cm*为积分点(*xm, ym*)上的相关积分权重，*N*为达到一定精度下的积分点个数。

基于式（2），Dunvant(1985)推导得到精度达到20阶的数值积分公式。其他方法，还有基于Gauss-Legendre和Gauss-Jacobi求积公式的根和权重来计算积分，其中Gauss-Jacobi求积公式的精度最高达7阶，超过7阶后得不到权重系数；而Abramowica and Stegun将Gauss-Legendre求积公式的精度推导至96阶。



图1 自然三角形及坐标(Dunvant, 1985)

式（1）的积分*I*可转换为在方形区域的表面上的积分，如图2，转换公式为：

 （3）

则Jacobian矩阵的行列式和微分面分别为：

 （4）

然后使用式（3）和式（4）计算式（1），有：

 （5）

式（5）的积分*I*可通过下列转换，进一步转换为标准的边长为2的方形区域上的积分（见图2）：

 （6）

Jacobian矩阵的行列式和微分面计算为：

 （7）



图2 标准三角形*T*转换为等价的(*u, v*)空间下边长为1的方形区域和空间下边长为2的方形区域

现在使用式（6）和式（7）来计算式（5），可得：

 （8）

式（8）表示在边长为2的方形区域上的积分。可使用Gauss-Legendre求积公式计算式（8）的积分*I*，可达到需要的精度。

由式（8），可以写出：

 （9）

式中，为在方向上的高斯积分点；*wi*和*wj*为对应的权重系数。

将式（9）重写为：

 （10）

其中，*s*为阶数；*ck*, *xk*和*yk*由下列关系式计算得到：

 （11）

权重系数*ck*和积分点可根据式（11）计算得到，然后由式（10）计算积分。

## 2 标准三角形*T*上的重积

在(*x, y*)空间上的*T*离散为个相同大小的三角形*Ti*，见图3。

利用积分的线性特性，由式（1）和图1的离散，可写出：

（12）

其中，

 （13）

现在应用Gauss-Legendre求积公式计算积分，与上述计算过程相似。现在使用如下转换：

 （14）



图3 *T*离散为*n*2个小三角形*Ti*

式（12）的积分*I*可写为：

 （15）

其中，

 （16）

由式（13）~式（15），可得到如下的重积分计算式：

 （17）

其中，

 （18）

可以通过编程得到以上权重系数与积分点的值，预先存储于计算机中。

## 参考文献

H.T. Rathod, K.V. Nagaraja, B. Venkatesudu. 2007.Symmetric Gauss Legendre quadrature formulas for composite numerical integration over a triangular surface. Applied Mathematics and Computation 188: 865-876

D.A. Dunavant, 1985. High degree efficient symmetrical Gaussian Quadrature Rules for the triangle, Int. J. Numer. Methods Eng. 21: 1129-1148.

B. Cockburn, C. Shu, 1998. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V. Multidimnesional systems, J. Comput. Phys. 141: 199-224.

Standard Gauss-Legendre quadrature rules are used to compute these integrals