# DG中的无积分方法

## DG法

应用DG法求解欧拉方程：

 （1）

求解域分解为任意形状的不重叠单元。DG法中为每个单元选择一套局部基函数，其中，*N*为*p*阶的局部多项式的函数，*d*为空间维度。以基函数集定义单元上的近似解：

 （2）

控制方程投影到基函数集的各成员上，写为弱形式：

 （3）

其中，为单元上的近似解，表示相邻单元上的近似解，为单元与相邻单元公共边上的分段，为的外法向单元向量，代表上解的迹。

近似解的系数是新的未知量，局部的积分投影生成关于这些未知量的控制方程组。采用与相关的低维度基函数集表述迹变量。表示数值通量，一般用Lax-Friedrichs的近似黎曼通量格式计算。

因为各单元有不同的局部近似解，各内部边上的解是双重的且不连续。近似黎曼通量求解不连续，提供相邻单元间数据通信机制。该数据通信在边的积分上发生，这意味这在某单元*Vi*上的解仅与相邻单元上解的边迹有关，与相邻单元解*Vj*的整体无关。并且，因为各单元上的近似解是存储为函数形式，无需额外近似即可获得解的边迹。

## 无积分方法

DG法中，可使用无积分计算公式，实现在任意非结构网格上任意精度的计算。无积分计算式中(Atkins and Shu, 1998)，通量向量用基函数集*bl*近似，近似黎曼通量用低阶基函数集近似：

，  （4）

使用这些近似，体积分和边界积分可解析计算，代替求积运算，引出下列简单的矩阵与向量的运算：

 （5）

式中，

 （6）

矩阵**M**，**A**和**B*ij***仅与单元形状和解的阶数*p*有关。因此，与单元类型有关的矩阵可以预先计算，应用于所有单元的计算，这可以很大程度上节省存储空间和计算量。式（5）的误差余量可采用下列运算评估：

 

 

 

式中，**T**ij为迹算子，表示包含边*j*上变量系数的向量。边包括内部边和边界上的边，必要时需要做区分。

## 无积分法文献调查

无积分方法用于DG模型中，代替数值求和，降低计算量和存储空间 (Atkins and Shu, 1998)。Rao et al. (2003)使用组成多项式函数的基函数做计算，无需数值求和，该方法减小了边界积分的计算时间。Marchandise et al. (2006)使用无积分方法求解水平集方程，用于界面捕捉，并使用BLAS库提高矩阵与向量的运算效率。无积分方法的优势是降低了积分点内部循环的计算量，利于代码的优化。

以上方法都是用于线性或张量积形式的非线性算子，如欧拉方程中的对流项(Hillewaert et al., 2006)。该类DG法中仅涉及多维多项式的积分，可以解析计算。在浅水方程的情况下，守恒形式的动量方程的对流项包含分裂项的非线性，积分的解析计算变的困难。为克服该问题，Nair (2015)使用流速代替动量作为主变量，避免了分裂形式的对流项。同样的方法，由Rannabauer et al. (2018)在ADER-DG法中求解海洋浅水方程。（守恒形式的SWE，可保证系统的守恒物理特性。）

## 讨论

式（6）在程序中，矩阵和向量怎么计算？

调用BLAS库，完成矩阵与向量的乘积运算。

浅水方程求解，无积分法引起非物理现象的问题怎么解决Rannabauer et al. (2018)？

参考Brus et al. (2019)的论文，其中，DG法的式（14）：

（14）

式（14）中忽略粘性项，即得到标准的RKDG法，即式（3）。

紧凑形式的式（15）：

 （15）

式中，为DG空间算子，**M**为（块对角化的）质量矩阵，为包含*i*个解分量的自由度的向量。

比较式（5）与式（15），可知：

质量矩阵**M**是一样的。

DG空间算子=**A-**

再观察式（5）与式（14），可知：

## DGSWE代码分析

积分方法



! 面积分

DO blk = 1,npart+1

DO et = 1,nel\_type

IF (npartet(et,blk) > 0) THEN

CALL area\_integration\_no\_ldg( )

! 边的线积分

DO blk = 1,npart+1

DO et = 1,nel\_type

ete = 2 - mod(et,2) ! restrict to straight-sided

IF (npartet(et,blk) > 0) THEN

CALL edge\_integration( )

CALL linear\_solve( )

RHS项包括：

DO dof = 1,ndof

DO el = 1,ne

rhsH(el,dof)=; rhsQx(el,dof)= ; rhsQy(el,dof)= ;

ENDDO

ENDDO

无积分法

 (5)

:

[1] basis\_eval.F90: 得到质量矩阵M：

do i=1, ndf; do j=1,ndf

mm(i,j) = mm(i,j) + wpta(pt,et)\*phia(i,pt,et)\*phia(j,pt,et)

enddo; enddo

! wpta is area and edge quadrature weights

! phia is basis functions evaluated at area quadrature points

[2] area\_transformation.F90:

! 乘以雅克比矩阵的逆

mm(j,i) = mm(j,i) + wpta(pt,et)\*phia(i,pt,et)\*phia(j,pt,et)\*detJa(el,pt)

[3]

mmi=

中：

：

! 得到节点形函数及其导数

**DO** pt = 1,npt

**DO** m = 1,n

l(m,pt) = phi(m,pt)

dldr(m,pt) = phi(m,npt+pt)

dlds(m,pt) = phi(m,2\*npt+pt)

**ENDDO**

**ENDDO**

：守恒变量的向量

:

**DO** l = 1,ndof

**DO** el = sel,eel

MirhsZ(el,l) = MirhsZ(el,l) + mmi(el,1)\*rhsZ(el,l)

MirhsQx(el,l) = MirhsQx(el,l) + mmi(el,1)\*rhsQx(el,l)

MirhsQy(el,l) = MirhsQy(el,l) + mmi(el,1)\*rhsQy(el,l)

rhsZ(el,l) = 0d0

rhsQx(el,l) = 0d0

rhsQy(el,l) = 0d0

**ENDDO**

**ENDDO**

中：

：数值通量的向量

## 参考文献

A. Baggag, H. Atkins, D. Keyes. Parallel implementation of the discontinuous Galerkin method. NASA/CR-1999-209546, ICASE Report No. 99-35.

Sara Faghih-Naini, Sebastian Kuckuk, Vadym Aizinger, et al. 2020. Quadrature-free discontinuous Galerkin method with code generation features for shallow water equations on automatically generated block-structured meshes. Advances in Water Resources 138: 103552

Rannabauer, L., Dumbser, M., Bader, M., 2018. ADER-DG with a-posteriori finite-volume limiting to simulate tsunamis in a parallel adaptive mesh refinement framework. Comput. Fluids 173, 299-306.

H.L. Atkins, C.W. Shu, 1998. Quadrature-free implementation of discontinuous Galerkin methods for hyperbolic equations, AIAA J. 36:775-782.

Atkins and Shu (1998)提出无求积法则的DG模型。