4.3.6 Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

Motivation: Ebene Wellen lösen die Wellengleichung
↳ Linearkombination von Ebene wellen auch

D.h.: Kann man eine Funktion in eine Linearkombination von Ebene Wellen zerlegen, so löst dies Funktion die Wellengleichung

Gesucht: Allgemeinste Lösung der Wellengleichung:

Fourier-Reihe: Basis $\{1, \cos(nx), \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$ bilden einen Orthogonalen Basis

mit dem Orthonormalbasis:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2a}}; \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right); \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right); n \in \mathbb{N}\right\}$$

für ein interval $[-a, a]$

Es bildet für die Kwadrat integrabele Funktionen im $I_a = [-a, a]$ ein Vollständiges System

d.h. Jede Kwadratisch integrabele Fkt $\left(\int_{-a}^{a} |f(x)|^2 dx < \infty\right)$ Lässt sich in dieser Basis entwickeln.

Fourier Reihe: (Reell)

$$f(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right]$$

für f eine $2a$ periodische Funktion $(f(x) = f(x+2a))$

Die Koeffizienten werden gegeben durch:

- $f_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$
- $a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$
- $b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$

---

für in $x=0$ gerade Funktionen: $b_n = 0$	Weder gerade noch ungerade
für in $x=0$ ungerade Funktionen: $a_n = 0$	$a_n \neq 0$ i.A., $b_n \neq 0$ i.A.

Komplexe Fourier-Reihe:

Völlig analoge, jedoch meistens einfachere beschreibung der Fourier-Reihe:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{ik_n x} \quad ; \quad k_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x) e^{-ik_n x} dx$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{ll} a_n = a_{-n} ; & b_n = -b_{-n} \\ a_0 = 2f_0 ; & b_0 = 0 \end{array}\right\} \alpha_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{ik_n x} \qquad k_n = \frac{n\pi}{a}}$$

Fourier Reihe

Wir können jetzt jede kwadrat integrabele Funktion als Fourier-Reihe schreiben, welches automatisch die Wellengleichung erfüllt.

Wichtiges beispiel: δ-Funktion mit $\delta(x-x_0) = f(x)$ und $-a < x_0 < a$

die Entwicklung folgt direkt aus der Definition:

$$\alpha_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} \delta(x-x_0) e^{-ik_n x} dx = \frac{e^{-ik_n x_0}}{2a}$$

$$\boxed{\delta(x-x_0) = \frac{1}{2a}\sum e^{i(n\pi/a)(x-x_0)}}$$

Fourier-Reihe → Fourier-Transformation: (Motivation)

Lässt man das Entwicklungsintervall $[-a,a]$ nach ∞ gehen (d.h. $a \to \infty \Rightarrow I \to (-\infty, \infty)$) so kann man auch nicht periodische Funktionen beschreiben.

Formale übergang FR → FT

Fourier Reihe: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i(n\pi/a)x}$

$$\alpha_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x) e^{-i(n\pi/a)x} dx$$

Man führe die Abkürzungen ein:

$$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{a}\ ,\quad \hat{f}_n = \alpha_n n \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ ,\quad \Delta k = \frac{\pi}{a}}$$

=> FR: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n e^{ik_n x} \Delta k$

$$\hat{f}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(x) e^{-ik_n x} dx$$

Lässt man nun $a \to \infty$ gehen so geht $\Delta k \to 0$
$k_n \to k$ (Diskrete k_n → kontinuierliche k)
Man kann diese übergang als Riemann Summe interpretieren (Beweis werde ich hier nicht geben)

sodaß:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{ik_n x} \Delta k \xrightarrow{a\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk = f(x)$$

$\hat{f}_n \to \hat{f}(k)$ (k wird kontinuierlich) *

$$\hat{f}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(x) e^{-ik_n x} dx \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \hat{f}(k)$$

* $k_n = \frac{n\pi}{a} \iff n = \frac{a k_n}{\pi} \iff \hat{f}_n = \hat{f}_{\frac{a k_n}{\pi}}$ „Diskrete Fkt. von k"

Daraus erhält man die Fourier (Hin- und Rück-) Transformation

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

(Impliziete Schreibweise
$F(f(x)) = \hat{f}(k)$
$F^{-1}(\hat{f}(k)) = f(x)$)

Einige wichtige Relationen (ohne Beweis)

1. $f(x)$ gerade $\rightarrow \hat{f}(k)$ gerade
2. $f(x)$ ungerade $\rightarrow \hat{f}(k)$ ungerade
3. Sei $f(x)$ Reell $\rightarrow \hat{f}(k) = \hat{f}_1(k) + i\hat{f}_2(k)$, f_1, f_2 Reell
4. Sei $g(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$

   $\Rightarrow \hat{g}(k) = \alpha_1 \hat{f}_1(k) + \alpha_2 \hat{f}_2(k)$
5. **Faltung**: $F(f_1(x) f_2(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \hat{f}_2(k') \hat{f}_1(k-k')$
6. **δ-Fkt**: $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \delta(x-x_0) e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0}$

$$\delta(x-x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{+i(x-x_0)k}$$

$$\Leftrightarrow \delta(k-k_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-i(k-k_0)x}$$

7. Vorfaktoren $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ „willkürlich" gewählt
   es muss aber gelten für:

$$\hat{f}(k) = A_1 \int dx \ldots$$

$$f(k) = A_2 \int dk \ldots$$

   dass $A_1 \cdot A_2 = \frac{1}{2\pi}$

8. Vorzeichen im exponenten ist auch willkürlich, aber hin und rück Trafo müssen umgekehrt sein:

$$dk\, e^{\pm ikx} \leftrightarrow dx\, e^{\mp ikx}$$

9. Konvention: Raum transformation:
   - $x \leftrightarrow k$ mit $k = 2\pi/\lambda$

   Zeit transformation:
   - $t \leftrightarrow \omega$ mit $\omega = 2\pi/T$

10. Mehrdimensional: $f(\underline{x}, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{d=4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_{\mathbb{R}} d\omega\, \hat{f}(\underline{k}, \omega) e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega t)}$

(dabei ist $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d$ mit d die Anzahl dimensionen) $\hat{f}(\underline{k}, \omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{d=4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int dt\, f(\underline{x}, t) e^{-i(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega t)}$