Herleitungen für Fragenblatt zur Theo II

Luc Kusters

WS 19/20

Die Lösungen die hier zusammengefasst wurden, kommen von mir und aus die Theo II Whatsappgruppe. **Weder absolute Vollständichkeit noch absolute Korrektheit wird garantiert!** Aber wo ich mir unsicher war habe ich Sachen nachgefragt, oder mittels dem Skript geklärt. Bei Anmerkungen, Fragen, Korrekturen oder sonstiges, könnt ihr mich gerne per Whatsapp oder per email erreichen:
ljbkusters@gmail.com

Vielen Dank an jedem, der mitgeholfen hat! Insbesondere:

- Prof. Honerkamp / Dr. Mück für die Fragen
- "Der Andere" für Seine Bilder mit Lösungen in der Whatsappgruppe
- Lais für seine Aufmerksamkeit bei Fragen 2.7 und 2.8, wo immer noch Konstanten falsch definiert waren.
- "JP" für Seine Aufmerkungen zur verschiedene Fragen die die Formulierung von verschiedene Antworten korrigiert verbessert haben.
- Anton für Seine Aufmerkungen zur verschiedene Fragen die die Formulierung von verschiedene Antworten korrigiert und verbessert haben.

Frage 1.1

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} &= \partial_i\hat{\mathbf{e}}_i\frac{1}{|r_i\hat{\mathbf{e}}_i - r_i'\hat{\mathbf{e}}_i|} \quad \text{Notation: } \boldsymbol{r} = r_i\hat{\mathbf{e}}_i = \sum_i r_i\hat{\mathbf{e}}_i \\
&= \hat{\mathbf{e}}_i\partial_i\frac{1}{\sqrt{(r_i - r_i')_i^2}} \quad \text{Notation: } (r_i - r_i')_i^2 = \sum_i (r_i - r_i')^2 \\
&= -\frac{2(r_i - r_i')_i}{2\left[\sqrt{(r_i - r_i')_i^2}\right]^3}\hat{\mathbf{e}}_i \\
&= -\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}
\end{aligned}$$

Frage 1.2 für $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$

$$\begin{aligned}
\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\
&= -\partial_i\hat{\mathbf{e}}_i\cdot\frac{r_i\hat{\mathbf{e}}_i - r_i'\hat{\mathbf{e}}_i}{\left[(r_i - r_i')_i^2\right]^{3/2}} \\
&= -\left(\frac{3}{\left[(r_i - r_i')_i^2\right]^{3/2}} + (r_i - r_i')_i\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2(r_i - r_i')}{\left[(r_i - r_i')_i^2\right]^{5/2}}\right) \\
&= -\left(\frac{3}{\left[(r_i - r_i')_i^2\right]^{3/2}} + \frac{-3(r_i - r_i')_i^2}{\left[(r_i - r_i')_i^2\right]^{5/2}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

für $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \to \infty \quad \text{und} \quad \Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \text{ undefiniert}$$

Dies ist sind genau die Eigenschaften der δ-Distribution.

Man weißt also dass $\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -C\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ Man möchte C noch finden:

$$\int_V dV\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -\int_V dV\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = -\int_{\partial V} d\boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

Führe die Koordinaten $\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ ein. $d\tilde{\boldsymbol{A}} = dA\hat{\mathbf{e}}_{\tilde{r}}$. Bemerke dass $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{A} = \tilde{\boldsymbol{r}}\cdot d\tilde{\boldsymbol{A}}$

$$= -\int_{\partial V} d\tilde{\boldsymbol{A}}\frac{\tilde{\boldsymbol{r}}}{|\tilde{\boldsymbol{r}}|^3} = -\int_{\partial V} d\tilde{\Omega}\tilde{r}^2\frac{\tilde{r}}{\tilde{r}^3} = -4\pi$$

Es folgt dann aus der Definition der δ-Distribution dass

$$-4\pi = \int dV\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -\int dVC\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \Rightarrow C = 4\pi$$

Sodass insgesammt gilt:

$$\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

Frage 2.1

$$\text{Zz:} \quad \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} + \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}|^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{3r_ir_j - \delta_{ij}\boldsymbol{r}^2}{r^5}r_i'r_j'$$

Eine allgemeine mehrdimensionale Taylorentwicklung wird gegeben durch:

$$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \big(\exp\big(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_{\boldsymbol{\beta}'}\big)f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}')\big)\Big|_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_{\boldsymbol{\beta}'})^n}{n!}f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}')\right)\Bigg|_{\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{\beta}_0}$$

Man bemerke dass ∇ einen Operator ist! Die exponential Funktion dient hier nur zur vereinfachung der Darstellung!

Man Taylore um $\boldsymbol{r}'=0$ (dies heißt, daß $\boldsymbol{r}\gg\boldsymbol{r}'$ sodass $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\approx\boldsymbol{r}$, dafür muss $\boldsymbol{r}$ natürlich weit von der Quelle entfernt sein).

Man definiere nun $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = f(r_1,r_2,r_3,r_1',r_2',r_3') \equiv \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$

Sodass bis zur 2. Ordnung die Taylorentwicklung für unsere Funktion wie folgt aussieht:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = f(\boldsymbol{r},0) + (\boldsymbol{r}'\cdot\nabla_{\bar{\boldsymbol{r}}'})f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big|_{\boldsymbol{r}'=0} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}'\cdot\nabla_{\bar{\boldsymbol{r}}'})^2 f(\boldsymbol{r},\bar{\boldsymbol{r}}')\Big|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} + \ldots$$

<u>0. Ordnung:</u>

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|}\Bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{1}{r}$$

<u>1. Ordnung:</u>

$$\bar{\boldsymbol{r}}'\cdot\nabla_{\bar{\boldsymbol{r}}'}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|}\Bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} \overset{\text{F1.1}}{=} \frac{\bar{\boldsymbol{r}}'\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$$

(Man bemerke dass hier nach $-\bar{\boldsymbol{r}}'$ ableitet, wodurch man das Negative von Frage 1.1 erhält)

<u>2. Ordnung:</u>

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{r}}'\cdot\nabla_{\bar{\boldsymbol{r}}'})^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|}\Bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} &= \frac{1}{2}\left[r_i'\frac{\partial}{\partial\bar{r}_i'}\right]\left[r_j'\frac{\partial}{\partial\bar{r}_j'}\right]\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|}\Bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} \\
&= \frac{r_i'r_j'}{2}\frac{\partial^2}{\partial_{\bar{r}_i'}\partial_{\bar{r}_j'}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|}\Bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} \\
&\overset{\text{F1.1}}{=} \frac{r_i'r_j'}{2}\frac{\partial}{\partial_{\bar{r}_i'}}\frac{x_j}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|^3}\Bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} \\
&= \frac{r_i'r_j'}{2}\frac{\partial}{\partial_{\bar{r}_i'}}\frac{x_j}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|^3}\Bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} \qquad x_j \equiv (r_j - \bar{r}_j') \\
&= \frac{r_i'r_j'}{2}\left(-\frac{3}{2}\frac{-2x_ix_j}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|^5} - \frac{\delta_{ij}}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|^3}\right)\Bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} \qquad \text{(Produktregel)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{3r_ir_j-\delta_{ij}\boldsymbol{r}^2}{r^5}r_i'r_j'
\end{aligned}$$

Eine wichtige Bemerkung: Aus Symmetrie gründe gilt

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{3r_ir_j-\delta_{ij}\boldsymbol{r}^2}{r^5}r'_ir'_j=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{3r'_ir'_j-\delta_{ij}\boldsymbol{r}'^2}{r^5}r_ir_j$$

Wir benutzen im allgemeinen die letzte Definition wenn wir die elektrische und magnetische Multipole berechnen!