Fragen und Lösungen zur Vorlesung Theo II

Luc Kusters

WS 19/20

Die Lösungen die hier zusammengefasst wurden, kommen von mir und aus die Theo II Whatsappgruppe. **Weder absolute Vollständichkeit noch absolute Korrektheit wird garrantiert!** Aber wo ich mir unsicher war habe ich Sachen nachgefragt, oder mittels dem Skript geklärt. Bei Anmerkungen, Fragen, Korrekturen oder sonstiges, könnt ihr mich gerne per email erreichen:
ljbkusters@gmail.com

Vielen Dank an jedem, der mitgeholfen hat! Insbesondere:

- Prof. Honerkamp / Dr. Mück für die Fragen
- "Der Andere" für Seine Bilder mit Lösungen in der Whatsappgruppe
- Lais für seine Aufmerksamkeit bei Fragen 2.7 und 2.8, wo immer noch Konstanten falsch definiert waren.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundkentnisse Elektrostatik I

Frage	Sicherheitsgrad	Frage	Sicherheitsgrad	Frage	Sicherheitsgrad
1	Sehr sicher	6	Sicher	11	Sehr sicher
2	Sehr sicher	7	Sehr sicher	12	Sehr sicher
3	Sehr sicher	8	Sehr sicher	13	Sehr sicher
4	Sehr sicher	9	Sehr sicher	14	Sehr sicher
5	Sehr sicher	10	Sicher	15	Sicher

1. Man berechne $\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$.

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad \left(= -\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \quad \text{(Skript 1.3.1)}$$

2. Was ergibt $\Delta\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$?

$$\Delta\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad \text{(Skript 1.3.23)}$$

3. Wie lauten die beiden Feldgleichungen für das elektrische Feld in der Elektrostatik?

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 4\pi k\rho(\mathbf{r}) \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = 0 \qquad \left(\text{SI: } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)$$

(Skript 1.3.25 und 1.3.6)

4. Wie lautet die Bestimmungsgleichung für das elektrostatische Potential bei gegebener Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$?

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3r'\,\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \text{(Skript 1.3.3)}$$

5. Wie berechnet sich das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ aus dem Potential $\Phi(\mathbf{r})$?

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi(\mathbf{r}) \quad \text{(Skript 1.3.2)}$$

6. Wie Berechnet man den Potentialunterschied **[Spannung]** zwischen den Orten $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_1$ bei gegebenem Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$?

$$U(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = U_2 - U_1 = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\boldsymbol{\nabla}\Phi(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{s} = -(\Phi(\mathbf{r}_2)-\Phi(\mathbf{r}_1)) \quad \text{(Skript 3.2.6)}$$

Notiz: Wegen $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$ ist $\mathbf{E}$ ein reines Gradientenfeld. Dies heißt, daß das Integral über $\mathbf{E}$ wegunabhängig ist (nur gültig in der Elektrostatik!).

7. Was besagt der satz von Gauß als mathematische Aussage?

$$\int_V d^3r[\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r})] = \oint_{\partial V} d\mathbf{A}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad \text{(Skript 1.3.12)}$$

Notiz: In 3 Dimensionen, wobei V ein Volumen darstellt, und ∂V dessen Randfläche darstellt.

8. Welche Aussage erhält man mit dem Satz von Gauß in der Elektrostatik in Anwesenheit von Ladungen in einem Volumen V?

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})\Big|_{|\mathbf{r}|>R} \propto Q_{\text{ges}} \in V_R \quad \text{(Skript 1.3.33)}$$

Oder in Wörter: Das Elektrische Feld außerhalb einem Volumen $V_R{}^*$ ist proportional zur Gesammtladung Q_{ges} im Volumen V_R

9. Was besagt der Satz von Stokes Mathematisch?

$$\int_A d\mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(\mathbf{r})] = \oint_{\partial A} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad \text{(Skript 1.4.10)}$$

Notiz: In 3 Dimensionen, wobei A eine Fläche darstellt, und ∂A dessen Randkurve darstellt.

10. Wann ist die Lösung der Poisson-Gleichung eindeutig?

Falls die Randbedingungen vorgegeben sind. (Skript §1.5)

Notiz: $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ist wegen $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ nicht eindeutig!

11. Man gebe das infinitesimale Flächenelement auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R an.

$$dA = R^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{e}}_r dA \quad \text{(Skript 1.3.25)}$$

Notiz: $\displaystyle\int_{\partial B_R(0)} dA = \int \delta(r-R)dV = \int \delta(r-R) r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = R^2 \int \sin\theta d\theta d\phi$

12. Man berechne das Volumen einer Kugel mit Radius R in Kugelkoordinaten

$$V_k = \int_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le R} 1 \cdot dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} 1 \cdot r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$V_k = \int_0^R r^2 dr \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \left[\frac{1}{3}R^3\right][2][2\pi] = \frac{4\pi}{3}R^3$$

(Skript 1.3.36∼38)

13. Wie sieht die Enwicklung einer Funktkion $f(\theta, \phi)$ in Kugelflächenfunkionen aus und wie bestimmt man die Entwicklungskoffizienten?

$$f(\theta,\phi) = \sum_{lm} f_{lm} Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad l \in \mathbb{N}_0; \quad |m| \le l; \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$f_{lm} = const. = \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}^*(\theta,\phi) f(\theta,\phi) = \int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) f(\Omega)$$

Notiz: Falls man $f(\theta, \phi)$ als linear kombination von $Y_{lm}(\theta, \phi)$ schreiben kann, kann man f_{lm} sehr einfach bestimmen (es gilt zwar $\displaystyle\int d\Omega Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}^*(\Omega) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$)

(Skript 1.5.70∼71)

*Volumen mit maximale Radius R, d.h. $V_R \subset B_R(\mathbf{r}_0)$ wobei B_R ein Kugel mit Radius R zentriert um $\mathbf{r}_0$ ist.

14. Wie lautet der Ansatz für die Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelfächenfunktionen?

$$f(r,\theta,\phi) = \sum_{lm} \left(a_{lm} r^l + b_{lm} r^{-(l+1)}\right) Y_{lm}(\theta,\phi) \quad \text{(Skript 1.5.80)}$$

15. Welche zwei wichtigen Gleichungen erfüllt die Dirichlet-Green'sche Funktion $G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')$?

Allgemein Wichtige Bedingungen der Greenshce Funktion

a) $\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ (Skript 1.5.90)

b) Sei $\Delta g(x) = f(x)$ eine Lösung der inhomogenen Laplace Gleichung, so ist

$$g(x) = \Delta \int G(x,x') f(x') dx'$$

c) $G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \to 0$ bzw. $F(\mathbf{r},\mathbf{r}') \to 0$ für $\mathbf{r}' \to \infty$ (Skript §1.5.6, nach Formel 1.5.94)

Notiz: Relation (b) heißt in Wörter, das man die gesuchte Funktion $g(x)$, welche die Poissong-Gleichung erfüllt, lösen kann, indem man das Integral berechnet. Für uns würde bei g(x) Durchaus Φ stehen, und bei $f(x)$ durchaus ρ. Mit diese Relation kann man das Poisson-Problem von ein DGL in ein Integral umwandern, falls man $G(x,x')$ kennt. Dies ist der Hauptpunkt weshalb man gerne Greensche Funktionen Benützt, denn Integralen sind durchaus einfacher zu lösen als DGLs (vor allem in der Praxis, wobei Numersich lösen möglich ist).

Bei Dirichlet-RWB. (Hier gefragt):

a) $G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G_D(\mathbf{r}',\mathbf{r})$ (Skript 1.5.99) (für reine Dirichlet Randbedingungen) (Skript §1.5.6)

b) $\Phi(\mathbf{r}) = k\int_V d^3r' G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} d\mathbf{A}' \cdot \phi(r') \boldsymbol{\nabla}' G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ (Skript 1.5.90)

Bei von Neumann-RWB.:

a) $\Phi(\mathbf{r}') = k\int_V d^3r G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}) \boldsymbol{\nabla}\phi(r) + C$

2 Grundkenntinsse Elektrostatik II / Magnetostatik

Frage	Sicherheitsgrad	Frage	Sicherheitsgrad	Frage	Sicherheitsgrad
1	Sehr sicher	6	Sicher	11	Sehr sicher
2	Sehr sicher	7	Sehr sicher	12	Sehr sicher
3	Sehr sicher	8	Sehr sicher	13	Sehr sicher
4	Sehr sicher	9	Sicher	14	Sicher
5	Sicher	10	Sicher	15	Sicher

1. Wie lautet die Taylor-Entwicklung von $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ in den Komponenten von $\mathbf{r}'$ bei $\mathbf{r}'=0$ bis einschließlich der Zweiten Ordnung?

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \frac{3r_{ij} - \delta_{ij}r^2}{r^5} r'_i r'_j \quad \text{(Skript 1.6.2)}$$

Notiz 1: Dies ist eine "Fernfeld" Näherung, d.h. eine Gute Näherung für $r \gg 0$
Notiz 2: Für genauere Information zur Mehrdimensionale Taylor-Entwicklung, schaue im HöMa II Skript oder schaue hier nach: `https://de.wikipedia.org/wiki/Taylorreihe#Mehrdimensionale_Taylorreihe`

2. Man drücke das elektrostatische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ einer räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ mittels Monopol, den Dipolvektor und den Quadrupoltensor aus.

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx k\frac{Q_{\text{ges}}}{r} + k\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{r^3} + \frac{k}{2}\sum_{ij}\frac{r_i r_j}{r^5}Q_{ij} \quad \text{(Skript 1.6.6)}$$

3. Man gebe Formel für das Monopolmoment, den Dipolvektor und den Quadrupoltensor an.

$$\begin{aligned} &\text{Monopol:} && Q_{\text{ges}} = \int d^3r\rho(\mathbf{r}) && \text{(Skript 1.6.7)} \\ &\text{Dipol:} && p_i = \int d^3r\rho(\mathbf{r})r_i \quad \mathbf{p} = p_i\hat{\mathbf{e}}_i && \text{(Skript 1.6.8)} \\ &\text{Quadrupol:} && Q_{ij} = \int d^3r\rho(\mathbf{r})\Big(3r_ir_j - \delta_{ij}|\mathbf{r}|^2\Big) && \text{(Skript 1.6.9)} \end{aligned}$$

Notiz 1: Q_{ij} hat nur 5 Freiheitsgraden! D.h. man kann mit nur 5 Rechnungen alle (9) Quadrupol Elemente berechnen! Es gilt zwar $Q_{ij} = Q_{ji}$ und $\text{sp}(\boldsymbol{Q}) = \sum_i Q_{ii} = 0$.
Notiz 2: Die hier nicht gefragte Kugelkoordinaten Multipolentwicklung ist auch sehr wichtig! (Siehe Skript §1.6.6 S.42)

4. Wie koppeln Monopol und Dipol an ein externes elektrostatisches Potential bzw. Feld?

Für eine Multipol im Zentriert um $\mathbf{r}_0$:

$$E_{\text{pot}} = \Phi(\mathbf{r}_0)Q - \mathbf{E}(\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{p} \quad \left(+\frac{1}{6}\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}E_i(\mathbf{r}_0)Q_{ij} + \dots\right) \quad \text{(Skript 1.7.7)}$$

Notiz: Energie minimierung für $\mathbf{p} \parallel \mathbf{E}$ und gleich ausgerichtet (also $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{p} = \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{E}$).

5. Wie lautet die elektrostatische Energie einer Ladungsverteilung? Man gebe zwei Äquivalente Ausdrücke, einerseits mit $\rho(\mathbf{r})$ und anderseits mit $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

$$\begin{aligned} &\text{mit } \rho && E_{\text{WW}} = \frac{1}{2}\int d^3r\rho(\mathbf{r})\Phi_\rho(\mathbf{r}) && \text{(Skript 1.7.9)} \\ &\text{mit } \mathbf{E} && E_{\text{WW}} = \frac{1}{8k\pi}\int d^3r\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) && \text{(Skript 1.7.15)} \end{aligned}$$

6. Wie ist die elektrische Suszeptibilität χ in einem linearen, isotropen Medium definiert?

Definition:	$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi k}\hat{\chi}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{E}$	(Skript 1.8.1)
Falls linear, isotrop:	$\hat{\chi}(\mathbf{E}) = \mathbb{1}\chi(\mathbf{E})$	(Skript 1.8.2)
Mit schwache abh. von $\mathbf{E}$:	$\chi(\mathbf{E}) \approx \chi \quad (\chi = const. \in \mathbb{R})$	(Skript 1.8.3)

Notiz 1: $\hat{\chi}$ ist im allgemeinsten Fall definiert als ein Matrix/Tensor. dies lässt zu, dass $\hat{\chi}$ in unterschiedliche Richtungen andere Auswirkungen hat (Polarisation kann z.B. in x-Richtung Stärker sein als in y-Richtung). Wir betrachten in diesen Kurs aber im Allgemein lineare, isotrope Medien, wobei es keine Richtungsabhängigkeit gibt, und wobei χ auch nicht Stark abhängt von das äußere E-Feld. Dadurch kann man χ als eine Medienabhängige skalare Konstante sehen/nähern.
Notiz 2: Die im Skript gegebene Definition ist **Falsch**! (aber richtig bis auf der Vorfaktor.)

7. Wie lautet der Zusammenhang zwischen elektrischem Feld, dielektrischer Verschiebung und Polarisation?

$$\mathbf{E} = 4\pi k\mathbf{D} - 4\pi k\mathbf{P} \quad \text{(Skript 1.8.17)}$$

Notiz 1: Die im Skript gegebene Definition ist **Falsch**! (aber richtig bis auf die Vorfaktoren.)

Notiz 2: Alternativ gilt $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \overset{(SI)}{=} \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}$ mit $\epsilon = \frac{1+\chi}{4\pi k}$ (Herleitung wie im Skript) und $\epsilon_r = 1 + \chi$ (unter die richtige Bedingungen, siehe Skript) (Skript 1.8.17)

8. Welche Feldgleichung erfüllt die dielektrische Verschiebung?

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho_f(\mathbf{r}) \quad \text{(Skript 1.8.4)}$$

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P} = -\rho_P(\mathbf{r})) \quad \text{(Skript 1.8.6)}$$

Notiz: Die im Skript gegebene Definition ist **Falsch**! (aber richtig bis auf der Vorfaktor.)

9. Was geschieht mit dem $1/r$-Potential von Punktladungen in Metallen?

Die Punktladungen werden abgeschirmt (Potential fällt exponentiell ab) (Skript 1.8.30)

Notiz: Siehe auch Yukawa Potential: `https://en.wikipedia.org/wiki/Yukawa_potential`

[MAGNETOSTATIK]

10. Man scheibe die Kontinuitätsgleichung in differentieller Form und mit Integralen über ein Volumen V bzw. dessen Oberfläche ∂V.

Differentieller Form	$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r}, t) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$	(Skript 2.1.5)
Integral Form	$\dot{Q}_V = \int_V d^3r\partial_t\rho(\mathbf{r}, t) = -\int_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -I_{\partial V}$	(Skript 2.1.1 und 2.1.3)

11. Man schreibe Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ und Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ für $i = 1, \ldots, N$ Punktladungen q_i mit Trajektorien $\mathbf{r}_i(t)$.

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad \text{(Skript 1.1.2)}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_i q_i\dot{\mathbf{r}}_i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad \text{(Skript 2.1.2)}$$

12. Wie lautet das Biot-Savart'sche Gesetz für $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r})$?

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = k' \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \text{(Skript 2.2.1)}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = k' \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{(Skript 2.3.2)}$$

Notiz: $k' = \frac{\mu_0}{4\pi}$ (SI)

13. Wie lauten die zwei Feldgleichungen der Magnetostatik?

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{(Skript 2.3.5)} \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = 4\pi k' \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad \text{(Skript 2.3.12)}$$

14. Man berechne das magnetische Dipolmoment für eine Punktladung auf einer Kreisbahn mit Radius R sowie Drehimpuls $\mathbf{L}$.

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{j} = \frac{q}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{q}{2m}\mathbf{L}$$

Notiz: Man bemerke, dass man hier keine integrale formulierung braucht weil wir von ein Punktdipol reden bzw. die δ-Funktion im Integral eine einfache Lösung ergibt.

15. Wie lauten die Zusammenhänge zwischen $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ in einem Paramagneten?

$$\mathbf{B} = 4\pi k' \mathbf{H} + 4\pi k' \mathbf{M} \quad \text{(Skript 2.5.12)}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad \text{(SI) (Skript 2.5.17)}$$

Notiz 1: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f$ und $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_M$
Notiz 2: Die im Skript gegebene Definition ist **Falsch**! (aber richtig bis auf die Vorfaktor.)

3 Grundkenntinsse Elektrodynamik

Frage	Sicherheitsgrad	Frage	Sicherheitsgrad	Frage	Sicherheitsgrad
1	Sehr sicher	6	Sicher	11	Sicher
2	Sehr sicher	7	Sicher	12	Sicher
3	Sicher	8	Sicher	13	Sicher
4	Sehr sicher	9	Sicher	14	Sicher
5	Sehr sicher	10	Sehr sicher	15	Sicher

1. Wie lauten die vollen, makroskopischen Maxwell-Gleichungen für die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$

Name	Differentiell	Integral
Gauß'scher Satz	$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 4\pi k\rho(\mathbf{r},t)$	$\oint_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 4\pi k Q_{\text{ges,V}}$
Keine Magn. Monopole	$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$	$\oint_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$
Faraday'sche Gesetz	$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = k''\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r},t)$	$\oint_{\partial A} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = k'' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t)$
Ampère'sche Gesetz	$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 4\pi k'\mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \frac{k'}{k}\partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r},t)$	$\oint_{\partial A} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \iint_A d\mathbf{A} \cdot \left(4\pi k'\mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \frac{k'}{k}\partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right)$

(SI: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ $\quad k' = \frac{\mu_0}{4\pi}$ $\quad k'' = 1$) (Gauß: $k = 1$ $\quad k' = \frac{1}{c}$ $\quad k'' = \frac{1}{c}$)

(Skript 3.4.1∼4)

Notiz: Die Integral-Form der Maxwell-Gleichungen folgt direkt aus beidseitig Integrieren der Differential-Form (über Volumen für die Divergenz-Gesetze, über Oberfläche für die Rotations-Gesetze) unter Anwendung der Gauß'sche und Stoke'sche Gesetze.

2. Welche Gleichung legt das Verhalten der aus Punktladungen zusammen gesetzten Quellen $\rho(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ in den Feldern $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ fest?

Die allgemeine Lorentzkraft: $\mathbf{F}_q = q\big(\mathbf{E} + k''\mathbf{v} \times \mathbf{B}\big)$ (Skript 3.7.1)

3. Man zeige mittels Kontinuitätsgleichung und Ampère-Gesetz, dass der Maxwell'sche Verschiebungsstrom für Ladungserhaltung notwendig ist.

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) := 4\pi k'\mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \mathbf{C}(\mathbf{r},t)$$

$$\text{Allgemein gilt: } \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r},t) = \nabla \times \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r},t) = 0$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \nabla \cdot \big[4\pi k'\mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \mathbf{C}(\mathbf{r},t)\big] \\
&= 4\pi k'\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \nabla \cdot \mathbf{C}(\mathbf{r},t) \\
&= 4\pi k'\left(-\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t)\right) + \nabla \cdot \mathbf{C}(\mathbf{r},t) \overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow 4\pi k'\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) &= \nabla \cdot \mathbf{C}(\mathbf{r},t)^* \overset{!}{=} \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t}K\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}K4\pi k\rho(\mathbf{r},t) \Leftrightarrow K \overset{!}{=} \frac{k'}{k} \\
\Leftrightarrow \mathbf{C}(\mathbf{r},t) &:= \frac{k'}{k}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)
\end{aligned}$$

*Erinnere daß $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 4\pi k\rho(\mathbf{r},t)$

4. Wie lauten die Wellengleichungen für $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ im Vakuum?

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0 \quad \text{(Skript 3.5.2 und 3.5.3)}$$

5. Wie sehen Ebene-Wellen-Lösungen im Vakuum aus? Was weiß man über die Richtungen der Felder bezüglich der Ausbreitungsrichtung?

$$f(\mathbf{r},t) = f_r(\mathbf{r})f_t(t)$$

$$\mathbf{k}\perp\mathbf{E} \quad \mathbf{k}\perp\mathbf{B} \quad \mathbf{E}\perp\mathbf{B} \quad \text{(Skript 3.5.8}\sim\text{10)}$$

6. Wie erhällt man die Dispersionsrelation und wie lautet sie für elektromagnetische Wellen im Vakuum?

Indem man die Lösung (gegebene Funktion) in der Wellengleichung einsetzt und die triviale Terme gegen einander wegstreicht.

$$\frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k} = c \quad \text{(im Vakuum)} \quad \text{(Skript 3.5.7)}$$

7. Man gebe die Formeln für die Fourier-Hin- und Rücktransformation für eine Funktion $f(t)$ auf der t-Achse auf ω-Achse und zurück an.

$$\hat{f}(\omega,\alpha) = \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} f(t,\alpha) \quad \text{(Skript 3.6.12)}$$

$$f(t,\alpha) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{+i\omega t} \hat{f}(\omega,\alpha) \quad \text{(Skript 3.6.11)}$$

(α stellt hier nicht zur Transformation relevante sonstige Parameter dar, wie z.B. $\mathbf{r}$)

Notiz: Hier wird explizit um die Fouriertransformation nach Zeit gefragt. Dies darf nicht verwechseld werden mit die Fouriertransformation von $\mathbf{x}$-raum nach $\mathbf{k}$-raum wobei man über d^3x bzw. d^3k integriert wird (Skript 3.6.17 und 3.6.18). Welche Parameter transformiert werden hängt also von der Frage ab!

8. Man berechne die Fouriertransformation von $\delta(t-t_0)$.

$$f(t) = \delta(t-t_0)$$

$$F[f(t)] = \hat{f}(\omega) = \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t}\delta(t-t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t_0} \quad \text{(Skript 3.9.7)}$$

9. Wie berechnet sich der Poynting-Vektor für reelle Felder? Was ist seine physikalische Bedeutung?

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t) \quad \text{(Skript 3.7.8)}$$

$$\text{(Allgemein)} \quad \mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)]\times\mathrm{Re}[\mathbf{B}(\mathbf{r},t)]$$

Die physikalische Bedeutung ist die von den Feldern verursachte Energiefluß.

10. Wie lauten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in Materie, charakterisiert durch Dielektrizitätskonstante ϵ_r und Permeabilität μ_r?

$$\begin{array}{lrcl} \text{Inhomogen} & \nabla \cdot \mathbf{D} & = & \rho_f \\ & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} & = & \mathbf{j}_f \\ \text{Homogen} & \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} & = & 0 \\ & \nabla \cdot \mathbf{B} & = & 0 \end{array} \quad \text{(Skript 4.1.5$\sim$8)}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \text{und} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0 \mu_r}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad \text{(Skript 4.1.9)}$$

11. Durch welche drei Sachverhalte unterscheiden sich elektromagnetische Wellen in eienem Wellenleiter mit einfach zusammenhängenden rechteckigem Querschnitt von denen im Vakuum?
    a) Die Dispersionsrelation ändert sich ($\omega(\mathbf{k}) \neq c|\mathbf{k}|$ i.A.)
    b) Es gilt i.A. **nicht** dass $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$
    c) Es gilt i.A. **nicht** dass $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ oder dass $\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$

(Skript §3.11)

12. Wie sind Phasen- und Gruppengeschwindigkeit definiert und was ist ihre physikalische Bedeutung?

$v_{\text{ph}} = \frac{\omega(k)}{k}$ Gescwhindigkeit mit den die Spitzen der Welle sich ausbreiten

$v_{\text{gr}} = \frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k}$ Gewschwindigkeit mit den die Knoten einer ebene Welle sich ausbreiten. Geschwindigkeit eines gesammten Wellenpackets. (Skript 3.12.9)

Notiz: v_{ph} kann durchaus größer als c sein. Dies ist aber kein Problem, denn die Phasengeschwindigkeit "trägt" keine Information. Für v_{gr} gilt immer $v_{\text{gr}} \leq c$!

13. Man gebe zwei Formen für das Ohm'sche Gesetz an. Wie ist die Beziehung zwischen Leitfähigkeit σ und Widerstand R für einen homogenen Leiter der länge l und mit Querschnitt A?
    a) $U = IR$ (Skript 3.2.1)
    b) $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ (Skript 3.2.2) $\left(\sigma = \frac{1}{\rho} \quad R = \frac{l}{\sigma A}\right)$

14. Wie entsteht eine komplexe, frequenzabhängige Dielektrizitätskonstante $\epsilon(\omega)$ in einem Metal?

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \left(\sigma + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - (\sigma + \epsilon_0 \epsilon_r i\omega)\mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + \epsilon_0 i\omega \left(\epsilon_r - \frac{\sigma}{i\omega\epsilon_0}\right)\mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + i\omega\epsilon_0 \epsilon(\omega)\mathbf{E} = 0$$

$$\epsilon(\omega) = \left(\epsilon_r - \frac{\sigma}{i\omega\epsilon_0}\right) \quad \text{(Skript 4.2.5)}$$

15. Wie verhält sich die Dielektrizitätskonstante $\epsilon(\omega)$ bei der Plasmafrequenz ω_P? Was passiert physikalisch bei $\omega = \omega_P$ und bei $\omega > \omega_P$?

$$\epsilon(\omega_P) = \epsilon_r \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}\right) \quad \text{(Skript 4.2.23)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \epsilon(\omega_P) = 0 \quad \epsilon(\omega < \omega_P) < 0 \quad \epsilon(\omega > \omega_P) > 0$$

$$\omega_P = \sqrt{\frac{n_f e^2}{m \epsilon_0 \epsilon_r}} \quad \text{(Skript 4.2.31)}$$

$\omega > \omega_p$ $\Rightarrow$ Metalle werden durchsichtig
$\omega \leq \omega_p$ $\Rightarrow$ Exponentielle Abfall von EM-Wellen im Medium

(Skript §4.2.3 S.123)