Aufgabe 1 [60 Punkte (15 × 2)]

Siehe die Fragensammlung

Aufgabe 2 [8+7=15 Punkte]

Betracten Sie eine Kugel mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt. Die Kugeloberfläche trägt die Flächenladungsdichte $\rho_F(\theta, \phi) = \rho_0 \cos\theta$. Im Innenraum ($|\vec{x}| < R$) und im Außenraum ($|\vec{x}| > R$) der Kugel befindet sich Vakuum.

Es sollen jeweils nur die führenden, d.h. die ersten nicht verschwindenden Terme der entsprechenden Entwicklung berechnet werden.

a) Bestimmen Sie eine geignete Näherung für das Potential $\Phi(\vec{x})$ in $|\vec{x}| \gg R$ und daraus das $\vec{E}$-Feld

Lösung

Man verallgemeinere die Ladungsdichte zunächst mit die δ-Distribution.

$$\rho(r, \theta) = \rho_0 \cos\theta \delta(r - R) \tag{1}$$

Potential: Karthesische Entwicklung

Man sehe direkt aus symmetrie Grunden dass $Q_{ges} = 0$ (wegen $\rho \propto \cos\theta$). Das heißt, dass der führenden Term höchstens das Dipolmoment sein kann. Für das Dipolmomnet gilt:

$$p_i = \int d^3x x_i \rho(\vec{x}) \tag{2}$$

Dabei ist $x_1 = x = r\sin\theta\cos\phi$, $x_2 = y = r\sin\theta\sin\phi$, $x_3 = z = r\cos\theta$

Aus symmetrie Grunden würde es Sinn machen wenn p_x und p_y verschwinden. Dies ist leicht zu überprüfen denn

$$p_x = \int d^3r r\sin\theta\cos\phi\rho(\vec{r}) \propto \int_0^{2\pi} \cos\phi = 0$$

und analog

$$p_y = \int d^3r r\sin\theta\sin\phi\rho(\vec{r}) \propto \int_0^{2\pi} \sin\phi = 0$$

Es würde auch Sinn machen, dass p_z nicht verschwindet, wegen der Polarität der Ladungsdichte.

$$\begin{aligned}
p_z &= \int d^3r \underbrace{(r\cos\theta)}_{z} \underbrace{\rho_0\cos\theta\delta(r-R)}_{\rho(\vec{r})} \\
&= \rho_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{\infty} dr r^3 \cos^2\theta\delta(r-R) \\
&= 2\pi\rho_0 \int_{-1}^{1} d\cos\theta\cos^2\theta \int_0^{\infty} dr r^3\delta(r-R) \\
&= 2\pi\rho_0 \left[\frac{2}{3}\right]\left[R^3\right] = \frac{4\pi}{3} R^3\rho_0 = V_k\rho_0
\end{aligned}$$

Sodass $\vec{p} = V_k\rho_0\mathbf{\hat{e}}_z$ mit V_k das Volumen der Kugel (bemerke, dass, obwohl nicht zufällig, das Kugelvolumen nur ein mathematisches Ergibnis ist, und keine tiefere Bedeutung hat).

Das Potential wird nun bis zur führende Ordnung gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = k\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{|\vec{r}|^3} = kV_k\rho_0\frac{r\cos\theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}V_k\rho_0\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{3}$$

Potential: Spährische Entwicklung

Man Schreibe $\rho(\vec{r})$ zunächst als linearkombination von Kugelflächenfunktionen.

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0\cos\theta\delta(r-R) = \rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}(\theta,\phi)\delta(r-R)$$

Wobei wir benutzt haben dass $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$

Das Potential wird für $r \gg 0$ gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = k\sum_{lm}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{q_{lm}}{r^{l+1}}Y_{lm}(\theta,\phi) \quad l\in\mathbb{N}_0 \quad m\in\mathbb{Z} \quad -l\leq m\leq l \tag{4}$$

mit

$$q_{lm} = \int d^3r r^l\rho(\vec{r})Y^*_{lm}(\theta,\phi) \tag{5}$$

Wir möchten jetzt die Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen anwenden. Es gilt

$$\int_\Omega d\Omega Y_{lm}(\Omega)Y^*_{l'm'}(\Omega) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{6}$$

Wobei man über den gesammten Raumwinkel Ω integriert.

Wegen der Orthogonalität aus Formel 6 zusammen mit unser Ladungsverteilung sieht man sofort, dass alle $q_{lm} = 0$ mit $l \neq 1$, $m \neq 0$.

$$q_{10} = \int drr^2\int d\Omega(r^1)\rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}Y^*_{10}\delta(r-R) = \rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}R^3$$

Sodass sich für das Potential ergibt, dass

$$\begin{aligned}\Phi(r,\theta) &= k\left(\frac{4\pi}{3}\right)\left(\rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}R^3\right)\frac{1}{r^2}Y_{10}(\theta,\phi) \\ &= k\underbrace{\frac{4\pi}{3}R^3}_{V_k}\rho_0\frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}V_k\rho_0\frac{\cos\theta}{r^2}\end{aligned} \tag{7}$$

E-Feld

Nun das wir wissen, dass $\Phi(r,\theta) = \frac{V_k\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{cos\theta}{r^2}$ können wir das elektrische Feld finden.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi(\vec{r}) \tag{8}$$

Das Problem lässt sich am einfachsten lösen indem wir ∇ in Kugelkoordinaten anwenden. Es gilt

$$\nabla = \nabla_k = \hat{\mathbf{e}}_r\partial_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \hat{\mathbf{e}}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi$$

sodass sich für das Elektrische Feld ergibt dass

$$\vec{E}(r,\theta) = -\frac{V_k\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\left[-2\frac{\cos\theta}{r^3}\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\mathbf{e}}_\theta\right] = \frac{V_k\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}(2\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_r + \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta) \tag{9}$$

b) Bestimmen Sie eine geignete Näherung für das Potential $\Phi(\vec{x})$ in der Nähe des Ursprungs $|\vec{x}| \ll R$ und daraus das $\vec{E}$-Feld

Lösung

Potential: Spährische Entwicklung

Mit der karthesische Entwicklung findet man hier keine Lösung, denn sie Funktioniert nur bei $r \gg 0$. Man muss also eine spährische Multipol-Entwicklung durchführen.

Für die spährische Multipol-Entwicklung nähe $r = 0$ gilt nun

$$\Phi(\vec{r}) = k\sum_{lm}\frac{4\pi}{2l+1}r^l q_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{10}$$

mit

$$q_{lm} = \int d^3r\frac{1}{r^{l+1}}\rho(\vec{r})Y^*_{lm}(\theta,\phi) \tag{11}$$

Sowie in Aufgabe a) verschwinden alle q_{lm} außer q_{10}.

$$\begin{aligned} q_{10} &= \int d^3r\frac{1}{r^{1+1}}\delta(r-R)\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}Y^*_{10} \\ &= \rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\underbrace{\int dr\frac{r^2}{r^2}\delta(r-R)}_{1}\underbrace{\int d\Omega Y_{10}(\Omega)Y^*_{lm}(\Omega)}_{1} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann das Potential

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= k\frac{4\pi}{3}r\sqrt{4\pi/3}\sqrt{3/4\pi}\cos\theta \\ &= \frac{4\pi}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho_0}{3}r\cos\theta = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}r\cos\theta \end{aligned} \tag{12}$$

E-Feld

Das $\vec{E}$-Feld lässt sich einfach finden wie in a)

$$\vec{E}(\theta) = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}(\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_r - \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\phi) \tag{13}$$

Aufgabe 3 [3+8+4=15 Punkte]

Betrachten Sie eine zeitlich veränderliche Stromdichte $J(\vec{x},t)$, deren räumliche Ausdehnung so klein ist, dass Sie in komplexer Schreibweise durch $\vec{J}(\vec{x},t) = J_0 e^{-i\omega t}\delta(\vec{x})\vec{e}_z$ approximiert werden kann. (J_0 und ω konstant). Die Quelle befindet sich im Vakuum.

a) Zeigen Sei ausgehend von einem geeigneten integralausdruck, dass das zugehörige Vektropotential durch

$$\vec{A}(\vec{x},t) = J_0 e^{-i\omega t}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r}\vec{e}_z$$

mit $r = |\vec{x}|$ gegeben ist.

b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus a) das $\vec{B}$-Feld und daraus da $\vec{E}$-Feld.

c) Hier sollen nur noch die Teile der in b) berechneten Felder betrachtet werden, die nicht stärker als $1/r$ abfallen, d.h. man betrachtet eine Näherung für die Felder weit weg von der Quelle. Berechnen Sie damit den zeitlich gemittelten Poyntingvektor und die zeitlich gemittelte Leistung $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}$, die unter dem Winkel θ zur z-Achse abgestrahlt wird.