# Fragen und Lösungen zur Vorlesung Theo II

Luc Kusters

WS 19/20

Die Lösungen die hier zusammengefasst wurden, kommen von mir und aus die Theo II Whatsappgruppe. **Weder absolute Vollständichkeit noch absolute Korrektheit wird garantiert!** Aber wo ich mir unsicher war habe ich Sachen nachgefragt, oder mittels dem Skript geklärt. Bei Anmerkungen, Fragen, Korrekturen oder sonstiges, könnt ihr mich gerne per Whatsapp oder per email erreichen:
ljbkusters@gmail.com

Vielen Dank an jedem, der mitgeholfen hat! Insbesondere:

- Prof. Honerkamp / Dr. Mück für die Fragen
- "Der Andere" für Seine Bilder mit Lösungen in der Whatsappgruppe
- Lais für seine Aufmerksamkeit bei Fragen 2.7 und 2.8, wo immer noch Konstanten falsch definiert waren.
- "JP" für Seine Aufmerkungen zur verschiedene Fragen die die Formulierung von verschiedene Antworten korrigiert verbessert haben.
- Anton für Seine Aufmerkungen zur verschiedene Fragen die die Formulierung von verschiedene Antworten korrigiert und verbessert haben.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Grundkentnisse Elektrostatik I

| Frage | Sicherheitsgrad | Frage | Sicherheitsgrad | Frage | Sicherheitsgrad |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Sehr sicher | 6 | Sicher | 11 | Sehr sicher |
| 2 | Sehr sicher | 7 | Sehr sicher | 12 | Sehr sicher |
| 3 | Sehr sicher | 8 | Sehr sicher | 13 | Sehr sicher |
| 4 | Sehr sicher | 9 | Sehr sicher | 14 | Sehr sicher |
| 5 | Sehr sicher | 10 | Sicher | 15 | Sicher |

1. Man berechne $\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$.

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \quad \left(= -\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) \quad \text{(Skript 1.3.1)}$$

**Notiz:** Herleitung gegeben in Herleitungenblatt, siehe GitHub

2. Was ergibt $\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$?

$$\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \quad \text{(Skript 1.3.23)}$$

**Notiz:** Herleitung gegeben in Herleitungenblatt, siehe GitHub

3. Wie lauten die beiden Feldgleichungen für das elektrische Feld in der Elektrostatik?

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 4\pi k\rho(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = 0 \qquad \left(\text{SI: } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)$$

(Skript 1.3.25 und 1.3.6)

4. Wie lautet die Bestimmungsgleichung für das elektrostatische Potential bei gegebener Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r})$?

$$\phi(\boldsymbol{r}) = k\int d^3r'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \quad \text{(Skript 1.3.3)}$$

5. Wie berechnet sich das elektrische Feld $\mathbf{E}(\boldsymbol{r})$ aus dem Potential $\Phi(\boldsymbol{r})$?

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{r}) \quad \text{(Skript 1.3.2)}$$

6. Wie Berechnet man den Potentialunterschied [**Spannung**] zwischen den Orten $\boldsymbol{r}_2$ und $\boldsymbol{r}_1$ bei gegebenem Feld $\mathbf{E}(\boldsymbol{r})$?

$$U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = U_2 - U_1 = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\mathbf{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{s} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{s} = -(\Phi(\boldsymbol{r}_2)-\Phi(\boldsymbol{r}_1)) \quad \text{(Skript 3.2.6)}$$

**Notiz**: Wegen $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$ ist $\mathbf{E}$ ein reines Gradientenfeld. Dies heißt, daß das Integral über $\mathbf{E}$ wegunabhängig ist (nur gültig in der Elektrostatik!).

7. Was besagt der satz von Gauß als mathematische Aussage?

$$\int_V d^3r[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})] = \oint_{\partial V} d\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \quad \text{(Skript 1.3.12)}$$

**Notiz:** In 3 Dimensionen, wobei $V$ ein Volumen darstellt, und $\partial V$ dessen Randfläche darstellt.

8. Welche Aussage erhält man mit dem Satz von Gauß in der Elektrostatik in Anwesenheit von Ladungen in einem Volumen V?

$$\int_V dV \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{r}) = \int_{\partial V} d\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{r}) = 4\pi k \int_V \rho(\boldsymbol{r}) = 4\pi k Q_{\text{ges}}$$

Also ist der Elektrische Fluß durch dem Rand $\partial V$ proportional zur innere Ladung.

Für kugelsymmetrische Ladungsverteilungen folgt daraus weiter auch dass

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{r} \geq R) \propto Q\text{ges in } V_R \text{ mit maximale Ausdehnung } R.$$

9. Was besagt der Satz von Stokes Mathematisch?

$$\int_A d\boldsymbol{A} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})] = \oint_{\partial A} d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \quad \text{(Skript 1.4.10)}$$

**Notiz:** In 3 Dimensionen, wobei $A$ eine Fläche darstellt, und $\partial A$ dessen Randkurve darstellt.

10. Wann ist die Lösung der Poisson-Gleichung eindeutig?

Falls die Randbedingungen vorgegeben sind. (Skript §1.5)

**Notiz:** $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} + F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})$ ist wegen $F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})$ nicht eindeutig!

11. Man gebe das infinitesimale Flächenelement auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R an.

$$dA = R^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad d\boldsymbol{A} = \hat{\mathbf{e}}_r dA \quad \text{(Skript 1.3.25)}$$

**Notiz:** $\displaystyle\int_{\partial B_R(0)} dA = \int \delta(r-R) dV = \int \delta(r-R) r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = R^2 \int \sin\theta d\theta d\phi$

12. Man berechne das Volumen einer Kugel mit Radius R in Kugelkoordinaten

$$V_k = \int_{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R} 1 \cdot dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R 1 \cdot r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$V_k = \int_0^R r^2 dr \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \left[\frac{1}{3}R^3\right][2][2\pi] = \frac{4\pi}{3}R^3$$

(Skript 1.3.36∼38)

13. Wie sieht die Enwicklung einer Funktkion $f(\theta, \phi)$ in Kugelflächenfunkionen aus und wie bestimmt man die Entwicklungskoffizienten?

$$f(\theta, \phi) = \sum_{lm} f_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad l \in \mathbb{N}_0; \quad |m| \leq l; \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$f_{lm} = const. = \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi) = \int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) f(\Omega)$$

**Notiz:** Falls man $f(\theta, \phi)$ als linear kombination von $Y_{lm}(\theta, \phi)$ schreiben kann, kann man $f_{lm}$ sehr einfach bestimmen (es gilt zwar $\displaystyle\int d\Omega Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}^*(\Omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$)

(Skript 1.5.70∼71)

14. Wie lautet der Ansatz für die Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelfächenfunktionen?

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{lm} \left(a_{lm} r^l + b_{lm} r^{-(l+1)}\right) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \text{(Skript 1.5.80)}$$

15. Welche zwei wichtigen Gleichungen erfüllt die Dirichlet-Green'sche Funktion $G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})$?

**Nach Dr. Mück sollte man auf diese Frage antworten:**

a) $\Delta G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'})$

b) $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = 0$ auf dem Rand $\partial V$ (Rand wo die Randbedingungen vorgegeben sind.)

Das Untere ist nur als kurze Zusammenfassung aufzufassen und **nicht** die Antwort wie ich sie in der Klausur geben würde!

Allgemein Wichtige Bedingungen der Green'sche Funktion

a) $\Delta G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'})$ (Skript 1.5.90)

b) Sei $\Delta g(x) = f(x)$ eine Lösung der inhomogenen Laplace Gleichung, so ist

$$g(x) = \int G(x, x')f(x')dx' - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} d\boldsymbol{A} \cdot \left[f(x')\nabla' G(x, x') - G(x, x')\nabla' f(x')\right]$$

c) $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) \to 0$ bzw. $F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) \to 0$ für $\boldsymbol{r'} \to \infty$ (Skript §1.5.6, nach Formel 1.5.94)

**Notiz:** Relation (b) heißt in Wörter, das man die gesuchte Funktion $g(x)$, welche die Poissong-Gleichung erfüllt, finden kann, indem man das Integral berechnet. Für uns würde bei $g(x)$ Durchaus $\Phi$ stehen, und bei $f(x)$ durchaus $\rho$. Mit diese Relation kann man das Poisson-Problem von ein DGL in ein Integral umwandern, falls man $G(x, x')$ kennt. Dies ist der Hauptpunkt weshalb man gerne Greensche Funktionen Benützt, denn Integralen sind durchaus einfacher zu lösen als DGLs (vor allem in der Praxis, wobei numersich lösen möglich ist).

Allgemein folgt hieraus dass:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = k\int_V d^3r' G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})\rho(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} d\boldsymbol{A'} \cdot \left[\phi(r')\boldsymbol{\nabla}' G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})\boldsymbol{\nabla}'\phi(\boldsymbol{r'})\right] \quad \text{(Skript 1.5.97)}$$

**Bei Dirichlet-RWB (Hier gefragt):**

Zusätzlich

a) $G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = G_D(\boldsymbol{r'}, \boldsymbol{r})$ (Skript 1.5.99) (für reine Dirichlet Randbedingungen) (Skript §1.5.6)

b) Man wählt $G$ so, sodass $G$ auf $\partial V$ verschwindet. D.h. $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})\big|_{\boldsymbol{r}^{(\prime)} \in \partial V} = 0$

Es folgt daraus dass

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = k\int_V d^3r' G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})\rho(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} d\boldsymbol{A'} \cdot \phi(r')\boldsymbol{\nabla}' G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) \quad \text{(Skript 1.5.98 \& 99)}$$

Bei von Neumann-RWB:

a) Man wählt $G$ so, sodass $\nabla G$ auf $\partial V$ verschwindet. D.h. $\nabla G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})\big|_{\boldsymbol{r} \in \partial V} = 0$

Es folgt daraus dass

$$\Phi(\boldsymbol{r'}) = k\int_V d^3r G_N(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})\rho(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} d\boldsymbol{A} \cdot G_N(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) + C \quad \text{(Skript 1.5.100)}$$

Wobei $\Phi$ nur bis auf eine (für das E-Feld irrelevante) Konstante besimmen kann.

## 2 Grundkenntinsse Elektrostatik II / Magnetostatik

| Frage | Sicherheitsgrad | Frage | Sicherheitsgrad | Frage | Sicherheitsgrad |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Sehr sicher | 6 | Sicher | 11 | Sehr sicher |
| 2 | Sehr sicher | 7 | Sehr sicher | 12 | Sehr sicher |
| 3 | Sehr sicher | 8 | Sehr sicher | 13 | Sehr sicher |
| 4 | Sehr sicher | 9 | Sicher | 14 | Sicher |
| 5 | Sicher | 10 | Sicher | 15 | Sicher |

1. Wie lautet die Taylor-Entwicklung von $\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ in den Komponenten von $\boldsymbol{r}'$ bei $\boldsymbol{r}'=0$ bis einschließlich der Zweiten Ordnung?

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \frac{3r_ir_j - \delta_{ij}\boldsymbol{r}^2}{r^5} r_i' r_j' \quad \text{(Skript 1.6.2)}$$

**Notiz 1:** Dies ist eine "Fernfeld" Näherung, d.h. eine Gute Näherung für $r \gg 0$ (denn für $r=0$ divergiert die Näherung).
**Notiz 2:** Für genauere Information zur mehrdimensionale Taylor-Entwicklung, schaue im HöMa II Skript oder schaue hier nach: `https://de.wikipedia.org/wiki/Taylorreihe#Mehrdimensionale_Taylorreihe`

2. Man drücke das elektrostatische Potential $\Phi(\boldsymbol{r})$ einer räumlich begrenzte Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r}')$ mittels Monopol, den Dipolvektor und den Quadrupoltensor aus.

$$\Phi(\boldsymbol{r}) \approx k\frac{Q_{\text{ges}}}{r} + k\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}}{r^3} + \frac{k}{2}\sum_{ij}\frac{r_ir_j}{r^5}Q_{ij} \quad \text{(Skript 1.6.6)}$$

3. Man gebe Formel für das Monopolmoment, den Dipolvektor und den Quadrupoltensor an.

$$\begin{aligned}
&\text{Monopol:} && Q_{\text{ges}} = \int d^3r\rho(\boldsymbol{r}) && \text{(Skript 1.6.7)}\\
&\text{Dipol:} && p_i = \int d^3r\rho(\boldsymbol{r})r_i \quad \boldsymbol{p} = p_i\hat{\mathbf{e}}_i && \text{(Skript 1.6.8)}\\
&\text{Quadrupol:} && Q_{ij} = \int d^3r\rho(\boldsymbol{r})\Big(3r_ir_j - \delta_{ij}|\boldsymbol{r}|^2\Big) && \text{(Skript 1.6.9)}
\end{aligned}$$

**Notiz 1:** $Q_{ij}$ hat nur 5 Freiheitsgraden! D.h. man kann mit nur 5 Rechnungen alle (9) Quadrupol Elemente berechnen! Es gilt zwar $Q_{ij}=Q_{ji}$ und $\text{sp}(\boldsymbol{Q}) = \sum_i Q_{ii} = 0$.
**Notiz 2:** Die hier nicht gefragte Kugelkoordinaten Multipolentwicklung ist auch sehr wichtig! (Siehe Skript §1.6.6 S.42)

4. Wie koppeln Monopol und Dipol an ein externes elektrostatisches Potential bzw. Feld?

Für eine Multipol im Zentriert um $\boldsymbol{r}_0$:

$$E_{\text{pot}} = \Phi(\boldsymbol{r}_0)Q - \mathbf{E}(\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{p} \qquad \left(-\frac{1}{6}\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}E_i(\boldsymbol{r}_0)Q_{ij} + \dots\right) \quad \text{(Skript 1.7.7)}$$

**Notiz:** Energie minimierung für $\boldsymbol{p} \parallel \mathbf{E}$ und gleich ausgerichtet (also $\hat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{p}} = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{E}}$).

5. Wie lautet die elektrostatische Energie einer Ladungsverteilung? Man gebe zwei Äquivalente Ausdrücke, einerseits mit $\rho(\boldsymbol{r})$ und andersseits mit $\mathbf{E}(\boldsymbol{r})$.

$$\begin{aligned} &\text{mit } \rho \quad E_{\mathrm{WW}} = \frac{1}{2}\int d^3r\rho(\boldsymbol{r})\Phi_\rho(\boldsymbol{r}) \quad \text{(Skript 1.7.9)} \\ &\text{mit } \mathbf{E} \quad E_{\mathrm{WW}} = \frac{1}{8k\pi}\int d^3r\mathbf{E}^2(\boldsymbol{r}) \quad \text{(Skript 1.7.15)} \end{aligned}$$

6. Wie ist die elektrische Suszeptibilität $\chi$ in einem linearen, isotropen Medium definiert?

| | | |
|---|---|---|
| Definition: | $\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi k}\hat{\chi}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{E}$ | (Skript 1.8.1) |
| Falls isotrop: | $\hat{\chi}(\mathbf{E}) = \mathbb{1}\chi(\mathbf{E})$ | (Skript 1.8.2) |
| Mit schwache abh. von $\mathbf{E}$: (lineares Medium) | $\chi(\mathbf{E}) \approx \chi \quad (\chi = const. \in \mathbb{R})$ | (Skript 1.8.3) |

**Notiz 1:** $\hat{\chi}$ ist im allgemeinsten Fall definiert als ein Matrix/Tensor. dies lässt zu, dass $\hat{\chi}$ in unterschiedliche Richtungen andere Auswirkungen hat (Polarisation kann z.B. in x-Richtung Stärker sein als in y-Richtung). Wir betrachten in diesen Kurs aber im Allgemein lineare, isotrope Medien, wobei es keine Richtungsabhängigkeit gibt, und wobei $\chi$ auch nicht Stark abhängt von das äußere $E$-Feld. Dadurch kann man $\chi$ als eine Medienabhängige skalare Konstante sehen/nähern.
**Notiz 2:** Die im Skript gegebene Definition ist **Falsch**! (aber richtig bis auf der Vorfaktor.)

7. Wie lautet der Zusammenhang zwischen elektrischem Feld, dielektrischer Verschiebung und Polarisation?

$$\mathbf{E} = 4\pi k\mathbf{D} - 4\pi k\mathbf{P} \quad \text{(Skript 1.8.17)}$$

**Notiz 1:** Die im Skript gegebene Definition ist **Falsch**! (aber richtig bis auf die Vorfaktoren.)

**Notiz 2:** Alternativ gilt $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \overset{\text{(SI)}}{=} \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}$ mit $\epsilon = \frac{1+\chi}{4\pi k}$ (Herleitung wie im Skript) und $\epsilon_r = 1 + \chi$ (unter die richtige Bedingungen, siehe Skript) (Skript 1.8.17)

8. Welche Feldgleichung erfüllt die dielektrische Verschiebung?

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho_f(\boldsymbol{r}) \quad \text{(Skript 1.8.4)}$$

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P} = -\rho_P(\boldsymbol{r})) \quad \text{(Skript 1.8.6)}$$

**Notiz:** Die im Skript gegebene Definition ist **Falsch**! (aber richtig bis auf der Vorfaktor.)

9. Was geschieht mit dem $1/r$-Potential von Punktladungen in Metallen?

Die Punktladungen werden abgeschirmt (Potential fällt exponentiell ab) (Skript 1.8.30)

**Notiz:** Siehe auch Yukawa Potential: `https://en.wikipedia.org/wiki/Yukawa_potential`

**[MAGNETOSTATIK]**

10. Man schreibe die Kontinuitätsgleichung in differentieller Form und mit Integralen über ein Volumen $V$ bzw. dessen Oberfläche $\partial V$.

| | | |
|---|---|---|
| Differentieller Form | $\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r},t) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ | (Skript 2.1.5) |
| Integral Form | $\dot{Q}_V = \int_V d^3r\partial_t\rho(\boldsymbol{r},t) = -\int_{\partial V} d\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = -I_{\partial V}$ | (Skript 2.1.1 & 3) |

**Notiz:** Bemerke das beim Integral form den Satz v. Gauß angwand wurde.

11. Man schreibe Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r})$ und Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ für $i = 1,\dots,N$ Punktladungen $q_i$ mit Trajektorien $\boldsymbol{r}_i(t)$.

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_i q_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i(t)) \quad \text{(Skript 1.1.2)}$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \sum_i q_i\dot{(t)}\boldsymbol{r}_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i(t)) \quad \text{(Skript 2.1.2)}$$

12. Wie lautet das Biot-Savart'sche Gesetz für $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ und $\mathbf{B}(\boldsymbol{r})$?

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{r}) = k'\int d^3r'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \quad \text{(Skript 2.2.1)}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = k'\int d^3r'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \quad \text{(Skript 2.3.2)}$$

**Notiz 1:** $k' = \frac{\mu_0}{4\pi}$ (SI)
**Notiz 2:** $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{B}(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{\nabla}\times\frac{j(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{\boldsymbol{j}(r')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$

13. Wie lauten die zwei Feldgleichungen der Magnetostatik?

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \text{(Skript 2.3.5)}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(\boldsymbol{r}) = 4\pi k'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \quad \text{(Skript 2.3.12)}$$

14. Man berechne das magnetische Dipolmoment für eine Punktladung auf einer Kreisbahn mit Radius $R$ sowie Drehimpuls $\boldsymbol{L}$.

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = q\boldsymbol{v}(t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}(t)) \quad \text{(Skript 2.1.2)}$$

$$\boldsymbol{m}(t) = \frac{1}{2}\int d^3r(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)) = \frac{q}{2}\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{v}(t) = \frac{q}{2m}\boldsymbol{L}(t)$$

**Notiz:** Definition von $\boldsymbol{m}$ (Skript 2.4.8)

15. Wie lauten die Zusammenhänge zwischen $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ in einem Paramagneten?

Allgemein:

$$\mathbf{B} = 4\pi k'\mathbf{H} + 4\pi k'\mathbf{M} \quad \text{(Skript 2.5.12)}$$
$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M} \quad \text{(SI) (Skript 2.5.17)}$$

Im (Dia- und) Paramagneten:

$$\mathbf{M} = \chi_M\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi k'}\frac{\chi_M}{1+\chi_M}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad \text{mit} \quad \mu = 4\pi k'(1+\chi_M)$$

(Skript 2.6.3∼6)

**Notiz 1:** $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = \boldsymbol{j}_f$ und $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{M} = \boldsymbol{j}_M$
**Notiz 2:** Die im Skript gegebene Definition ist **Falsch**! (aber richtig bis auf der Vorfaktor.)

## 3 Grundkenntinsse Elektrodynamik

| Frage | Sicherheitsgrad | Frage | Sicherheitsgrad | Frage | Sicherheitsgrad |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Sehr sicher | 6 | Sicher | 11 | Sicher |
| 2 | Sehr sicher | 7 | Sicher | 12 | Sicher |
| 3 | Sicher | 8 | Sicher | 13 | Sicher |
| 4 | Sehr sicher | 9 | Sicher | 14 | Sicher |
| 5 | Sehr sicher | 10 | Sehr sicher | 15 | Sicher |

1. Wie lauten die vollen, makroskopischen Maxwell-Gleichungen für die Felder $\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t)$ und $\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t)$

| Name | Differentiell | Integral |
|---|---|---|
| Gauß'scher Satz | $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t)=4\pi k\rho(\boldsymbol{r},t)$ | $\oint_{\partial V} d\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t)=4\pi kQ_{\text{ges,V}}$ |
| Keine Magn. Monopole | $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t)=0$ | $\oint_{\partial V} d\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t)=0$ |
| Faraday'sche Gesetz | $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t)=-k''\partial_t\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t)$ | $\oint_{\partial A} d\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t)=-k''\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_A d\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t)$ |
| Ampère'sche Gesetz | $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t)=4\pi k'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)+\frac{k'}{k}\partial_t\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t)$ | $\oint_{\partial A} d\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t)=\iint_A d\boldsymbol{A}\cdot\Big(4\pi k'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)+\frac{k'}{k}\partial_t\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t)\Big)$ |

(SI: $k=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\quad k'=\frac{\mu_0}{4\pi}\quad k''=1$) (Gauß: $k=1\quad k'=\frac{1}{c}\quad k''=\frac{1}{c}$)

(Skript 3.4.1∼4)

**Notiz:** Die Integral-Form der Maxwell-Gleichungen folgt direkt aus beidseitig Integrieren der Differential-Form (über Volumen für die Divergenz-Gesetze, über Oberfläche für die Rotations-Gesetze) unter Anwendung der Gauß'sche und Stoke'sche Gesetze.

2. Welche Gleichung legt das Verhalten der aus Punktladungen zusammen gesetzten Quellen $\rho(\boldsymbol{r},t)$ und $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ in den Feldern $\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t)$ und $\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t)$ fest?

Die allgemeine Lorentzkraft: $\boldsymbol{F}_q=q\big(\mathbf{E}+k''\boldsymbol{v}\times\mathbf{B}\big)$ (Skript 3.7.1)

3. Man zeige mittels Kontinuitätsgleichung und Ampère-Gesetz, dass der Maxwell'sche Verschiebungsstrom für Ladungserhaltung notwendig ist.

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r},t)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t)\coloneqq 4\pi k'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r},t)$$

$$\text{Allgemein gilt: }\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)=0$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{\nabla}\cdot\big[4\pi k'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r},t)\big]\\
&=4\pi k'\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r},t)\\
&=4\pi k'\left(-\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r},t)\right)+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r},t)\overset{!}{=}0\\
\Leftrightarrow 4\pi k'\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r},t)^{*}\overset{!}{=}\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial}{\partial t}K\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t)\\
&=\frac{\partial}{\partial t}K4\pi k\rho(\boldsymbol{r},t)\Leftrightarrow K\overset{!}{=}\frac{k'}{k}\\
\Leftrightarrow \boldsymbol{C}(\boldsymbol{r},t)&\coloneqq\frac{k'}{k}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}$$

*Erinnere daß $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t)=4\pi k\rho(\boldsymbol{r},t)$

4. Wie lauten die Wellengleichungen für $\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t)$ und $\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t)$ im Vakuum?

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t) = \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t) = 0 \quad \text{(Skript 3.5.2 und 3.5.3)}$$

5. Wie sehen Ebene-Wellen-Lösungen im Vakuum aus? Was weiß man über die Richtungen der Felder bezüglich der Ausbreitungsrichtung?

   Allgemein gilt für eine ebene Welle:

$$f(\boldsymbol{r},t) = f_r(\boldsymbol{r})f_t(t)$$

   Die Lösungen der Wellengleichung für die elektromagnetische Feldern haben die Form:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{f}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{f}_{(0)} = \mathbf{E}_{(0)}, \mathbf{B}_{(0)} \quad \text{(Skript 3.5.4 \& 5)}$$

$$\boldsymbol{k} \perp \mathbf{E}_{(0)} \quad \boldsymbol{k} \perp \mathbf{B}_{(0)} \quad \mathbf{E}_{(0)} \perp \mathbf{B}_{(0)} \quad \text{(Skript 3.5.8$\sim$10)}$$

6. Wie erhällt man die Dispersionsrelation und wie lautet sie für elektromagnetische Wellen im Vakuum?

   Indem man die Lösung (gegebene Funktion) in der Wellengleichung einsetzt und die triviale Terme gegen einander wegstreicht.

$$\omega^2 = c^2\boldsymbol{k}^2 \quad \text{(Skript 3.5.7)}$$

7. Man gebe die Formeln für die Fourier-Hin- und Rücktransformation für eine Funktion $f(t)$ auf der $t$-Achse auf $\omega$-Achse und zurück an.

$$\hat{f}(\omega,\alpha) = \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} f(t,\alpha) \quad \text{(Skript 3.6.12)}$$

$$f(t,\alpha) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{+i\omega t} \hat{f}(\omega,\alpha) \quad \text{(Skript 3.6.11)}$$

   ($\alpha$ stellt hier nicht zur Transformation relevante sonstige Parameter dar, wie z.B. $\boldsymbol{r}$)

   **Notiz:** Hier wird explizit um die Fouriertransformation nach Zeit gefragt. Dies darf nicht verwechseld werden mit die Fouriertransformation von $\boldsymbol{x}$-raum nach $\boldsymbol{k}$-raum wobei man über $d^3x$ bzw. $d^3k$ integriert wird (Skript 3.6.17 und 3.6.18). Welche Parameter transformiert werden hängt also von der Frage ab!

8. Man berechne die Fouriertransformation von $\delta(t-t_0)$.

$$f(t) = \delta(t-t_0)$$

$$F[f(t)] = \hat{f}(\omega) = \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t}\delta(t-t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t_0} \quad \text{(Skript 3.9.7)}$$

9. Wie berechnet sich der Poynting-Vektor für reelle Felder? Was ist seine physikalische Bedeutung?

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t) \times \mathbf{B}(\boldsymbol{r},t) = \mathbf{E}(\boldsymbol{r},t) \times \mathbf{H}(\boldsymbol{r},t) \quad \text{(Skript 3.7.8)}$$

$$\text{(Allgemein)} \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{Re}[\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t)] \times \mathrm{Re}[\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t)]$$

   Die physikalische Bedeutung ist die von den Feldern verursachte Energiefluß.

10. Wie lauten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in Materie, charakterisiert durch Dielektrizitätskonstante $\epsilon_r$ und Permeabilität $\mu_r$?

$$\begin{array}{rrcl} \text{Inhomogen} & \nabla \cdot \mathbf{D} & = & \rho_f \\ & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} & = & \boldsymbol{j}_f \\ \text{Homogen} & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} & = & 0 \\ & \nabla \cdot \mathbf{B} & = & 0 \end{array} \quad \text{(Skript 4.1.5}\sim\text{8)}$$

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{r},t) = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}(\boldsymbol{r},t) \quad \text{und} \quad \mathbf{H}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\mu_0 \mu_r}\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t) \quad \text{(Skript 4.1.9)}$$

11. Durch welche drei Sachverhalte unterscheiden sich elektromagnetische Wellen in eienem Wellenleiter mit einfach zusammenhängenden rechteckigem Querschnitt von denen im Vakuum?

    a) Die Dispersionsrelation ändert sich ($\omega(\boldsymbol{k}) \neq c|\boldsymbol{k}|$ i.A.) (Skript 3.11.23)

    b) Minimal Energie für bestimmte Moden, vorher keine Wellenausbretung. (Skript 3.11.26)

    c) Es gilt i.A. **nicht** dass $\mathbf{E} \perp \boldsymbol{k}$ oder dass $\mathbf{B} \perp \boldsymbol{k}$ (d.h. i.A. keine TEM-Wellen, aber schon möglich) (Skript §3.11 TEM-Wellen)

12. Wie sind Phasen- und Gruppengeschwindigkeit definiert und was ist ihre physikalische Bedeutung?

    $v_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega(k)}{k}$ Gescwhindigkeit mit den die Spitzen der Welle sich ausbreiten

    $v_{\mathrm{gr}} = \frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k}$ Gewschwindigkeit mit den die Knoten einer ebene Welle sich ausbreiten. Geschwindigkeit eines gesammten Wellenpackets. (Skript 3.12.9)

    **Notiz:** $v_{\mathrm{ph}}$ kann durchaus größer als $c$ sein. Dies ist aber kein Problem, denn die Phasengeschwindigkeit "trägt" keine Information. Für $v_{\mathrm{gr}}$ gilt immer $v_{\mathrm{gr}} \leq c$!

13. Man gebe zwei Formen für das Ohm'sche Gesetz an. Wie ist die Beziehung zwischen Leitfähigkeit $\sigma$ und Widerstand $R$ für einen homogenen Leiter der länge $l$ und mit Querschnitt $A$?

    a) $U = IR$ (Skript 3.2.1)

    b) $\boldsymbol{j} = \sigma\mathbf{E}$ (Skript 3.2.2) $\left(\sigma = \frac{1}{\rho} \quad R = \frac{l}{\sigma A}\right)$

14. Wie entsteht eine komplexe, frequenzabhängige Dielektrizitätskonstante $\epsilon(\omega)$ in einem Metal?

$$\nabla \times \mathbf{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} \quad (\boldsymbol{j} = \sigma\mathbf{E})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} - \left(\sigma + \epsilon_0\epsilon_r\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - (\sigma - \epsilon_0\epsilon_r i\omega)\mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} + \epsilon_0 i\omega\left(\epsilon_r - \frac{\sigma}{i\omega\epsilon_0}\right)\mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\omega\epsilon_0\epsilon(\omega)\mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} + \epsilon_0\epsilon(\omega)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} &= 0 \\ \epsilon(\omega) &= \left(\epsilon_r - \frac{\sigma}{i\omega\epsilon_0}\right) \quad \text{(Skript 4.2.5)} \end{aligned}$$

15. Wie verhält sich die Dielektrizitätskonstante $\epsilon(\omega)$ bei der Plasmafrequenz $\omega_P$? Was passiert physikalisch bei $\omega = \omega_P$ und bei $\omega > \omega_P$?

$$\epsilon(\omega_P) = \epsilon_r \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}\right) \quad \text{(Skript 4.2.23)}$$

↳(Skript §4.2.2 Herleitung)

$$\Leftrightarrow \quad \epsilon(\omega_P) = 0 \quad \epsilon(\omega < \omega_P) < 0 \quad \epsilon(\omega > \omega_P) > 0$$

$$\omega_P = \sqrt{\frac{n_f e^2}{m \epsilon_0 \epsilon_r}} \quad \text{(Skript 4.2.31)}$$

$\omega > \omega_p$ $\Rightarrow$ Metalle werden durchsichtig (EM-Wellen verbreiten sich)
$\omega = \omega_p$ $\Rightarrow$ Nur rein elektrische longitudinale (Plasma-)Moden möglich
$\omega < \omega_p$ $\Rightarrow$ Exponentielle Abfall von EM-Wellen im Medium

(Skript §4.2.3 S.123)

# 4 Grundkenntinsse Relativität und rel. Elektrodynamik

| Frage | Sicherheitsgrad | Frage | Sicherheitsgrad | Frage | Sicherheitsgrad |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Sicher | 6 | Sicher | 11 | Sicher |
| 2 | Sicher | 7 | Sicher | 12 | Sicher |
| 3 | Sicher | 8 | Sicher | 13 | Sicher |
| 4 | Sicher | 9 | Sicher | 14 | Unsicher |
| 5 | Sicher | 10 | Sicher | 15 | |

**Wichtibe bemerkung:** Dieses Kapitel arbeitet schließlich mit Gauß'sche Einheiten!

1. Was bedeutet das spezielle Relativitätsprinzip für physikalische Gesetze und die Lichtgeschwindigkeit?

   Die zwei Einstein'sche Postulate der spezielle Relativität lauten:

   1. Die physikalische Gesetze sind in alle (gleichförmig geradlinig zueinander bewegte) Bezugssyteme gleich.

   2. Die Lichtgeschwindigkeit ist (im Vakuum) eine Konstante ($c$) in jedem Bezugssystem und ist insbesondere unabhängig von der Bewgegung der Quelle.

   **Notiz zu 1.:** Unterschiedliche Beobachter können aber unterschiedliche Gründen angeben weshalb ein Erreignis statt findet. (z.B. kann ein Beobachter im Ruhesystem einer Ladung nur Elektrische Kräfte sehen, während ein Beobachter in ein Ruhesystem wo die Ladung sich bewegt auch magnetische Kräfte sieht.) (Skript §5.2.1)

2. Wie lautet die Formel für den invarianten Raum-Zeit-Abstand ds in einem Koordinatensystem? Warum folgt aus der Invarianz von $ds$ die Invarianz der Lichgeschwindigkeit?

   Die invariante Raum-Zeit-Abstand ist gegeben durch:

   $$ds^2 = c^2dt^2 - d\boldsymbol{x}^2 \quad \text{(Skript 5.2.5)}$$

   Für ein Teilchen, wie z.B. ein Photon, dass sich mit der Lichtgeschwindigkeit bewegt soll gelten dass die Minkowski-Metrik verschwindet. Das heißt dass:

   $$(cdt)^2 - d\boldsymbol{x}^2 = 0$$

   Wobei natürlich gilt dass $d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}dt$ mit $|\boldsymbol{v}| = c$. ($d\boldsymbol{x}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$)

   In System $S'$ gibt es jetzt die Parameter $t'$, $\boldsymbol{x}'$ und $\boldsymbol{v}'$ mit $d\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{v}'dt'$. Wir möchen zeigen, dass $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}'|$ falls $|\boldsymbol{v}| = c$. Aus der Invarianz von $ds$ folgt dass $ds = ds'$, woraus folgt dass

   $$c^2dt^2 - d\boldsymbol{x}^2 = ds^2 = 0 = ds'^2 = c^2dt'^2 - d\boldsymbol{x}'^2$$

   Es muss also gelten, dass $c^2dt'^2 = d\boldsymbol{x}'^2$ und deswegen folgt $c = |\boldsymbol{v}'| \Rightarrow |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}'| = c$, sodass sich die Geschwindigkeit des Teilchens (bei Lichtgeschwindigkeit) als invariant ergibt.

3. Welche Bedingungen stellt man an eigentliche orthochrone Lorentz-transformationen?

   **Definition:** Eine Lorentz-Transformation, bei der (Raum-) Spiegelungen ausgeschlossen sind und die Orientierung der Zeit erhalten ist, wird als eigentliche, orthochrone Lorentz-Transformation bezeichnet.

   $${\Lambda^0}_0 \geq 1 \quad \text{und} \quad \det \Lambda = 1 \quad \text{(Skript 5.2.18)}$$

   **Notiz:** siehe auch `https://de.wikipedia.org/wiki/Lorentz-Transformation` (suche nach orthochron mit deinem Browser)

4. Wie lautet die Lorentz-Transformation für einen Boost in $z$-Richtung? Wie sieht die Inverse aus?

   Sei $S$ ein Ruhesystem und bewege $S'$ sich mit relativen Geschwindigkeit $v$ in $z$-Richtung. Man definiere die (einheitslosen) Größen: $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ (Skript 5.2.45)

   Für die Hintransformation gilt:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \text{ mit } \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{(Skript 5.2.46)}$$

   Für die Rücktransformation gilt:

$$x^{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x'^{\nu} \text{ mit } \Lambda_{\mu}{}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{(Skript 5.2.48)}$$

   Man erinnere sich daran dass: $(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = g_{\mu\sigma} \Lambda^{\sigma}{}_{\gamma} g^{\gamma\nu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ (Skript 5.2.25)

5. Man schreibe den kontravarianten Vierer-Vektor für ein Raum-Zeit-Ereignis x. Wie transformiert sich ein kontravarianter Lorentz-Vierer-Vektor?

$$x^{\mu} = (ct, x, y, z)^T \quad \text{(Skript 5.2.3)}$$
$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \qquad x^{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x'^{\nu} \quad \text{(Skript 5.2.12)}$$

6. Wie erhält man den kovarianten Vierer-Vektor für x mit dem metrischen Tensor?

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu} = (ct, -x, -y, -z)^T \quad \text{(Skript 5.2.8)}$$

7. Wie sieht das invariante Skalarprodukt zwischen zwei Vierer-Vektoren in einem Koordinaten-System aus, ohne und mit dem metrischen Tensor geschrieben?

   Seien $v^{\mu}$, $w^{\mu}$ Vierervektoren der Form: $(x_0, x_1, x_2, x_3)^T$ mit $x = v, w$

$$\begin{aligned} \langle v^{\mu}, w^{\mu} \rangle := v^{\mu} w_{\mu} = v^{\mu} g_{\mu\nu} w^{\nu} &= \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \\ &= v_0 w_0 - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) \quad \text{(Skript 5.2.6)} \end{aligned}$$

   Man bemerke dass $w_{\mu} = (w_0, -w_1, -w_2, -w_3)^T$

   Für $x_0 = ct_x$ und $x_{i \in \{1,2,3\}}$ (also im Koordinatensystem) folgt natürlich:

$$v^{\mu} w_{\mu} = c^2 (t_v t_w) - (v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z)$$

8. Warum ist die Gescwhindigkeit difineiert als $v^\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^\mu$ kein Lorentz-Vektor? Welche verwandtete Geschwindigkeit ist ein Lorentz-Vektor?

   $v^\mu$ ist kein Vierer-Vektor weil es nicht sich nicht wie ein Lorentz-Vektor. Das heißt, dass:

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}x'^\mu \neq \Lambda^\mu{}_\nu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^\nu \quad \text{(Skript 5.2.61)}$$

   Dies ist einfach zu Zeigen. Es gilt zwar: $v^\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^\mu = (c, \boldsymbol{v})$. Es gilt nun:

   $$v_\mu v^\mu = c^2 - \boldsymbol{v}^2$$

   Was offensichtlich kein Lorentz-Vektor entspricht.

   $u^\mu$, die **Weltgeschwindigkeit**, ist schon ein Lorentz-Vektor, mit $u^\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}x^\mu$ und

   $$d\tau = \frac{1}{c}ds = \gamma^{-1}dt \quad \text{(Skript 5.2.54 \& 55)}$$

9. Wie lauten die Komponenten des Vierer-Potenitals und des Vierer-Stroms in einem gegebenen Koordinatensystem? Wie schreibt sich die Wellengleichung damit?

   $$A^\mu(x^\alpha) = \begin{pmatrix} \Phi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(x^\alpha) \\ \boldsymbol{A}(x^\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{(Skript 5.3.8)}$$

   $$j^\mu(x^\alpha) = \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\rho(x^\alpha) \\ \boldsymbol{j}(x^\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{(Skript 5.3.1)}$$

   Alternativ gilt auch $j^\mu = \rho\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho}{\gamma}u^\mu$ (Skript 5.3.2 & 4)

   Sei $\Box = -\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) = -\partial_\mu\partial^\mu$ (Skript 5.3.11)

   Dann gilt für die Wellengleichung von $A^\mu$:

   $$\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{c}j^\mu \quad \text{bzw.} \quad \partial_\nu\partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c}j^\mu \quad \text{(Skript 5.3.12 \& 13)}$$

   **Notiz:** $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial^\mu = (\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \nabla)$

10. Man gebe den Feldstärke-Tensor als Funktion des Vierer-Potentials und Matrix mit den Komponenten von **E** und **B** an.

    $$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Skript 5.3.16)}$$

11. Wie lauten die homogenen Maxwell-Gleichungen in forminvarianter Schreibweise?

$$\partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0 \quad \text{(Skript 5.3.23)}$$

Oder auch:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \text{(Skript 5.3.28)}$$

Dabei ist $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\eta\gamma}F_{\eta\gamma}$

Mit (Skript 5.3.25)

$$\epsilon^{\mu\nu\eta\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{gerade Permutation} \\ -1 & \text{ungerade Permutation} \\ 0 & \text{nicht alle verschieden} \end{cases}$$

Es folgt daraus direkt dass

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{\nabla} \cdot B = 0 & (\nu = 0) & \text{(Skript 5.3.27)} \\ \boldsymbol{\nabla} \times E = -\frac{1}{c}\partial_t B & (\nu = 1,2,3) & \text{(Skript 5.3.27)} \end{array}$$

12. Wie lauten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in forminvarianter Schreibweise?

Wegen $\partial_\mu A^\mu = 0$ (Skript 5.3.15) (folgt aus Kontinuitätsgleichung), gilt auch

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{0} = -\Box A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad \text{(Skript 5.3.20)}$$

Es folgt daraus direkt dass

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho & (\nu = 0) & \text{(Skript 5.3.21)} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E} & (\nu = 1,2,3) & \text{(Skript 5.3.22)} \end{array}$$

13. Wie schreibt sich die Lorentz-Kraft für eine Ladung q auf forminvariante Weise?

$$K^\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p^\mu = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u^\mu = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu \quad \text{(Skript 5.4.53)}$$

14. Man gebe das kirchhoff'sche Beugungsintegral [für Lichteinfall] auf eine Blendenöffnung bei weit entfernter Lichtquelle und Senkrechtem Einfall an.

    Sei $G$ die Green'sche Funktion zur Helmholzgleichung mit

    $$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

    Sei weiter $\psi(\boldsymbol{r})$ eine skalare Funktion die die Helmholzgleichung Erfüllt (z.B.: Wellenamplitude). So ergibt sich für das allgemeine Kirchoff Integral

    $$\psi(\boldsymbol{r'}) = \int_{\partial V} d\boldsymbol{A} \cdot \left[\psi(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{\nabla} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \boldsymbol{\nabla} \psi(\boldsymbol{r})\right] \quad \text{(Skript 6.1.6)}$$

    Wobei $\partial V$ als die Blendenöffnung $A$ gesehen werden soll.

    Sei nun die Abstand Quelle-Blende $r_Q$ viel größer als die Breite der Blendenöffnung $a$ und die Abstand zur in der Mitte der Blende gelegte Usprung $r$. D.h.: $r \leq a \ll r_Q$

    So ist $k|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_Q| \approx kr_Q\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_Q^2}\right)$

    Sei nun $ka^2/r_Q \ll \pi$ bzw $\lambda \gg 2a^2/r_Q$ so ist

    $$\psi(\boldsymbol{r}) = C \int_A dA \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \quad \text{(Skript 6.1.14)}$$

    Dies ist bei Weit entfernter Lichtquelle der Falls.

15. Was ergibt sich in der Fraunhofer-Näherung? Wann gilt diese? Die Fraunhofer-Näherung gillt für

    $$\frac{a}{d} \ll \frac{\lambda}{a} \quad \text{(Skript 6.2.1)}$$

    Mit $a$ die Breite der Öffnung, $d$ die Abstand zur Schirm und $\lambda$ die Wellenlänge des Lichtes.

    Die Fraunhofer-Näherung ergibt für die (komplexe) Amplitude der elektromagnetische Wellen am Schirm:

    $$\psi(x) \approx \frac{e^{ikd}}{d} \int_{-a/2}^{a/2} dx' e^{-i\frac{k}{d}xx'} = -a\frac{e^{ikd}}{d}\frac{\sin(qx)}{qx} \quad \text{(Skript 6.2.6)}$$

    Mit $q = \frac{k}{d}\frac{a}{2}$ und wobei $x$ die Schirmkoordinate darstellt. Dabei beobachtet man die Intensität $I = |\psi(x)|^2$ auf dem Schirm.