Aufgabe 1 [60 Punkte (15 × 2)]

Siehe die Fragensammlung

Aufgabe 2 [8+7=15 Punkte]

Betracten Sie eine Kugel mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt. Die Kugeloberfläche trägt die Flächenladungsdichte $\rho_F(\theta, \phi) = \rho_0 \cos\theta$. Im Innenraum ($|\vec{x}| < R$) und im Außenraum ($|\vec{x}| > R$) der Kugel befindet sich Vakuum.

Es sollen jeweils nur die führenden, d.h. die ersten nicht verschwindenden Terme der entsprechenden Entwicklung berechnet werden.

a) Bestimmen Sie eine geignete Näherung für das Potential $\Phi(\vec{x})$ in $|\vec{x}| \gg R$ und daraus das $\vec{E}$-Feld

Lösung

Man verallgemeinere die Ladungsdichte zunächst mit die δ-Distribution.

$$\rho(r, \theta) = \rho_0 \cos\theta \delta(r - R) \tag{1}$$

Potential: Karthesische Entwicklung

Man sehe direkt aus symmetrie Grunden dass $Q_{ges} = 0$ (wegen $\rho \propto \cos\theta$). Das heißt, dass der führenden Term höchstens das Dipolmoment sein kann. Für das Dipolmomnet gilt:

$$p_i = \int d^3x x_i \rho(\vec{x}) \tag{2}$$

Dabei ist $x_1 = x = r \sin\theta \cos\phi$, $x_2 = y = r \sin\theta \sin\phi$, $x_3 = z = r \cos\theta$

Aus symmetrie Grunden würde es Sinn machen wenn p_x und p_y verschwinden. Dies ist leicht zu überprüfen denn

$$p_x = \int d^3r r \sin\theta \cos\phi \rho(\vec{r}) \propto \int_0^{2\pi} \cos\phi = 0$$

und analog

$$p_y = \int d^3r r \sin\theta \sin\phi \rho(\vec{r}) \propto \int_0^{2\pi} \sin\phi = 0$$

Es würde auch Sinn machen, dass p_z nicht verschwindet, wegen der Polarität der Ladungsdichte.

$$\begin{aligned}
p_z &= \int d^3r \underbrace{(r\cos\theta)}_{z} \underbrace{\rho_0 \cos\theta \delta(r - R)}_{\rho(\vec{r})} \\
&= \rho_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{\infty} dr r^3 \cos^2\theta \delta(r - R) \\
&= 2\pi\rho_0 \int_{-1}^{1} d\cos\theta \cos^2\theta \int_0^{\infty} dr r^3 \delta(r - R) \\
&= 2\pi\rho_0 \left[\frac{2}{3}\right] \left[R^3\right] = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 = V_k \rho_0
\end{aligned}$$

Sodass $\vec{p} = V_k \rho_0 \hat{\mathbf{e}}_z$ mit V_k das Volumen der Kugel (bemerke, dass, obwohl nicht zufällig, das Kugelvolumen nur ein mathematisches Ergbinis ist, und keine tiefere Bedeutung hat).

Das Potential wird nun bis zur führende Ordnung gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = k\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{|\vec{r}|^3} = kV_k\rho_0\frac{r\cos\theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}V_k\rho_0\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{3}$$

Potential: Spährische Entwicklung

Man Schreibe $\rho(\vec{r})$ zunächst als linearkombination von Kugelflächenfunktionen.

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0\cos\theta\delta(r-R) = \rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}(\theta,\phi)\delta(r-R)$$

Wobei wir benutzt haben dass $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$

Das Potential wird für $r \gg 0$ gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = k\sum_{lm}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{q_{lm}}{r^{l+1}}Y_{lm}(\theta,\phi) \quad l\in\mathbb{N}_0 \quad m\in\mathbb{Z} \quad -l\leq m\leq l \tag{4}$$

mit

$$q_{lm} = \int d^3r r^l\rho(\vec{r})Y^*_{lm}(\theta,\phi) \tag{5}$$

Wir möchten jetzt die Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen anwenden. Es gilt

$$\int_\Omega d\Omega Y_{lm}(\Omega)Y^*_{l'm'}(\Omega) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{6}$$

Wobei man über den gesammten Raumwinkel Ω integriert.

Wegen der Orthogonalität aus Formel 6 zusammen mit unser Ladungsverteilung sieht man sofort, dass alle $q_{lm} = 0$ mit $l\neq 1$, $m\neq 0$.

$$q_{10} = \int drr^2\int d\Omega(r^1)\rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}Y^*_{10}\delta(r-R) = \rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}R^3$$

Sodass sich für das Potential ergibt, dass

$$\begin{aligned}\Phi(r,\theta) &= k\left(\frac{4\pi}{3}\right)\left(\rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}R^3\right)\frac{1}{r^2}Y_{10}(\theta,\phi)\\ &= k\underbrace{\frac{4\pi}{3}R^3}_{V_k}\rho_0\frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}V_k\rho_0\frac{\cos\theta}{r^2}\end{aligned} \tag{7}$$

E-Feld

Nun das wir wissen, dass $\Phi(r,\theta) = \frac{V_k\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{cos\theta}{r^2}$ können wir das elektrische Feld finden.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi(\vec{r}) \tag{8}$$

Das Problem lässt sich am einfachsten lösen indem wir ∇ in Kugelkoordinaten anwenden. Es gilt

$$\nabla = \nabla_k = \hat{\mathbf{e}}_r\partial_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \hat{\mathbf{e}}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi$$

sodass sich für das Elektrische Feld ergibt dass

$$\vec{E}(r,\theta) = -\frac{V_k\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\left[-2\frac{\cos\theta}{r^3}\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\mathbf{e}}_\theta\right] = \frac{V_k\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}(2\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_r + \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta) \tag{9}$$

b) Bestimmen Sie eine geignete Näherung für das Potential $\Phi(\vec{x})$ in der Nähe des Ursprungs $|\vec{x}| \ll R$ und daraus das $\vec{E}$-Feld

Lösung

Potential: Sphärische Entwicklung

Mit der karthesische Entwicklung findet man hier keine Lösung, denn sie Funktioniert nur bei $r \gg 0$. Man muss also eine spährische Multipol-Entwicklung durchführen.

Für die spährische Multipol-Entwicklung nähe $r = 0$ gilt nun

$$\Phi(\vec{r}) = k\sum_{lm}\frac{4\pi}{2l+1}r^l q_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{10}$$

mit

$$q_{lm} = \int d^3r\frac{1}{r^{l+1}}\rho(\vec{r})Y^*_{lm}(\theta,\phi) \tag{11}$$

Sowie in Aufgabe a) verschwinden alle q_{lm} außer q_{10}.

$$\begin{aligned} q_{10} &= \int d^3r\frac{1}{r^{1+1}}\delta(r-R)\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}Y^*_{10} \\ &= \rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\underbrace{\int dr\frac{r^2}{r^2}\delta(r-R)}_{1}\underbrace{\int d\Omega Y_{10}(\Omega)Y^*_{lm}(\Omega)}_{1} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann das Potential

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= k\frac{4\pi}{3}r\sqrt{4\pi/3}\sqrt{3/4\pi}\cos\theta \\ &= \frac{4\pi}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho_0}{3}r\cos\theta = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}r\cos\theta \end{aligned} \tag{12}$$

E-Feld

Das $\vec{E}$-Feld lässt sich einfach finden wie in a)

$$\vec{E}(\theta) = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}(\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_r - \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta) = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\hat{\mathbf{e}}_z \tag{13}$$

(Alternativ hätte man auch sehen können dass $\Phi \propto r\cos\theta = z$ und dann die karthesische definition von ∇ einsetzen können)

Die Korrektheit der Lösungen wurde überprüft und ist garantiert.

(Nach Aufgabe 2.3.13 aus "Grundkurs Theretische Physik 3: Elektrodynamik" von Wolfgang Nolting [10. Auflage])

Aufgabe 3 [3+8+4=15 Punkte]

Betrachten Sie eine zeitlich veränderliche Stromdichte $\vec{J}(\vec{x},t)$, deren räumliche Ausdehnung so klein ist, dass Sie in komplexer Schreibweise durch $\vec{J}(\vec{x},t) = J_0 e^{-i\omega t}\delta(\vec{x})\vec{e}_z$ approximiert werden kann. (J_0 und ω konstant). Die Quelle befindet sich im Vakuum.

a) Zeigen Sei ausgehend von einem geeigneten Integralausdruck, dass das zugehörige Vektropotential durch

$$\vec{A}(\vec{x},t) = J_0 e^{-i\omega t}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r}\vec{e}_z$$

mit $r = |\vec{x}|$ gegeben ist.

Lösung Allgemein gilt in der Lorenz Eichung: $\Box\vec{A}(\vec{r},t) = -\mu_0\vec{J}(\vec{r},t)$

Mit die Greensche Funktion zur d'Alembertsche Operator ($\Box = (\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})$) kann man $\vec{A}(\vec{r},t)$ finden.

Es gilt

$$\vec{A}(\vec{r},t) = -\mu_0\int d^3r'\int dt' G(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\vec{J}(\vec{r},t) \tag{1}$$

Wobei $G(\vec{r}-\vec{r}',t-t') = -\frac{1}{4\pi}\frac{\delta(t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ und $t_{ret} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ sodass insgesammt

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\int dt J_0 e^{-i\omega t'}\delta(\vec{r}')\delta\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{e}_z \\
&= J_0\frac{\mu_0}{4\pi}\int dt' e^{-i\omega t'}\delta\left(t-\frac{|\vec{r}|}{c}\right)\frac{1}{|\vec{r}|}\vec{e}_z \\
&= J_0\frac{\mu_0}{4\pi}e^{-iw\left(t-\frac{|\vec{r}|}{c}\right)}\frac{1}{r}\vec{e}_z \quad \text{mit} \quad k = \frac{\omega}{c} \\
&= J_0 e^{-i\omega t}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\vec{e}_z
\end{aligned} \tag{2}$$

b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus a) das $\vec{B}$-Feld und daraus da $\vec{E}$-Feld.

Es gilt die Bezieh

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t) \tag{3}$$

Weiter gilt für $\boldsymbol{\nabla}$ in Kugelkoordinaten natürlich

$$\boldsymbol{\nabla} = \vec{e}_r\partial_r + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\partial_\theta + \frac{\vec{e}_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi$$

Wegen $\vec{A}(\vec{r},t) = A(r,t)\vec{e}_z = A_t(t)A_r(r)\vec{e}_z$ folgt dass

$$\boldsymbol{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t) = (\vec{e}_r\times\vec{e}_z)A_t(t)\partial_r A_r(r) \tag{4}$$

Wobei man $A_t(t) = J_0 e^{-i\omega t}\frac{\mu_0}{4\pi}$ und $A_r(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$ definieren kann.

Und mit $(\vec{e}_r\times\vec{e}_z) = -\sin\theta\vec{e}_\phi$ findet man insgesammt für $\vec{B}(\vec{r},t)$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = A_t(t)\sin\theta(-\vec{e}_\phi)\left[ik-\frac{1}{r}\right]A_r(r) = \frac{J_0}{4\pi}e^{-i\omega t}\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{1}{r}-ik\right)\sin\theta\vec{e}_\phi \tag{5}$$

Nun sucht man noch das Elektrische Feld, welches für $r > 0$ (für $r > 0$ verschwindet den Strom) gegeben wird durch das Faradaysche Gesetz:

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) \tag{6}$$

Weil $\vec{E} \propto e^{-i\omega t}$ gilt, folgt $\partial_t \vec{E}(\vec{r},t) = i\omega\vec{E}(\vec{r},t)$

Nun kann man das Problem in zwei Wegen lösen. Entweder man nimmt direkt die Rotation von $\vec{B}$ oder man sieht dass

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla\Big(\nabla \cdot \vec{A}\Big) - \Delta\vec{A} \tag{7}$$

Was wesentlich einfacher zu lösen ist, weil $\vec{B}$ abhähngig von r, θ und ϕ ist während $\vec{A}$ nur von r abhängt.

In Kugelkoordinaten gilt

$$\Delta = \Delta_r + \Delta_\Omega = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \Delta_\Omega$$

Man berechne zunächst die Einzelkomponente

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{A}(\vec{r},t) &= A_t(t)\vec{e}_z\Delta_r A_r(r) + \Delta_\Omega A(r)\\
&= A_t(t)\vec{e}_z\left\{\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\left[ik - \frac{1}{r}\right]A(r)\right)\right\} + 0\\
&= A_t(t)\vec{e}_z\left\{\frac{1}{r^2}\left([2ik-1]A(r) + r^2\left[ik - \frac{1}{r}\right]^2 A(r)\right)\right\}\\
&= \left(\left[\frac{2ik}{r} + \frac{1}{r^2}\right] + \left[ik - \frac{1}{r}\right]^2\right)\vec{A}(\vec{r},t)
\end{aligned} \tag{8}$$

und

$$\begin{aligned}
\nabla\Big(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r},t)\Big) &= \nabla\left(\sin\theta\left[ik - \frac{1}{r}\right]A(\vec{r},t)\right)\\
&= \left(\vec{e}_r\partial_r + \frac{\vec{e}_\theta}{r} + \frac{e_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi\right)\left(\sin\theta\left[ik - \frac{1}{r}\right]A(\vec{r},t)\right)\\
&= \sin\theta\left[\frac{1}{r^2} + \left(ik - \frac{1}{r}\right)^2\right]A(\vec{r},t)\vec{e}_r + \frac{\cos\theta}{r}\left(ik - \frac{1}{r}\right)A(\vec{r},t)\vec{e}_\theta
\end{aligned} \tag{9}$$

Sodass insgesammt für $\vec{E}(\vec{r},t)$ gilt dass

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{c^2}{iw}\nabla \times \nabla \times \vec{A}(\vec{r},t)\\
&= \frac{c^2}{iw}\left(\sin\theta\left[\frac{1}{r^2} + \left(ik - \frac{1}{r}\right)^2\right]A(\vec{r},t)\vec{e}_r + \frac{\cos\theta}{r}\left(ik - \frac{1}{r}\right)A(\vec{r},t)\vec{e}_\theta\right.\\
&\qquad \left. - \left(\frac{ik}{r} + \left[\left[2ik - \frac{1}{r^2}\right] - \frac{1}{r}\right]^2\right)\vec{A}(\vec{r},t)\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

$$= \frac{c^2}{iw}\left(\sin\theta\left[\frac{1}{r^2} + \left(ik - \frac{1}{r}\right)^2\right]\vec{e}_r + \frac{\cos\theta}{r}\left(ik - \frac{1}{r}\right)\vec{e}_\theta - \left(\left[\frac{2ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right] + \left[ik - \frac{1}{r}\right]^2\right)\vec{e}_z\right)A(\vec{r},t)$$

c) Hier sollen nur noch die Teile der in b) berechneten Felder betrachtet werden, die nicht stärker als $1/r$ abfallen, d.h. man betrachtet eine Näherung für die Felder weit weg von der Quelle. Berechnen Sie damit den zeitlich gemittelten Poyntingvektor und die zeitlich gemittelte Leistung $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}$, die unter dem Winkel θ zur z-Achse abgestrahlt wird.

Weil $\vec{A}(\vec{r},t) \propto \frac{1}{r}$ fällt bei $\vec{B}$ und $\vec{E}$ alles zwischen den Klammeren weg, wo noch ein $\frac{1}{r}$ Term steht (für eine näherung bus zur $1/r$). $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind nun also gegeben durch

$$\vec{B}(\vec{r},t) = -ik\sin\theta A(\vec{r},t)\vec{e}_\phi + O(1/r^2) \tag{11}$$
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{c^2}{i\omega}\big(-\sin\theta k^2\vec{e}_r + k^2\vec{e}_z\big)A(\vec{r},t) + O(1/r^2) \tag{12}$$

Es folgt damit für $\bar{\vec{S}}$

$$\begin{aligned}
\bar{\vec{S}} &= \frac{1}{2\mu_0}\vec{E}^* \times \vec{B} \\
&= \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{-c^2}{i\omega}A^*\vec{r},t\right)(-\sin\theta ikA(\vec{r},t))\big[-k^2\sin\theta(\vec{e}_\phi \times \vec{e}_r) + k^2\vec{e}_\phi \times \vec{e}_z\big] \\
&= \frac{c^2k^3}{2\mu_0\omega}\sin\theta A^*(\vec{r},t)A(\vec{r},t)\left[-\sin\theta\vec{e}_\theta + \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix}\right] \\
&\text{Dabei ist } A^*(\vec{r},t)A(\vec{r},t) = \frac{\mu_0^2J_0^2}{16\pi^2r^2} \quad \text{und} \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0} \\
&= \frac{k^3J_0^2}{32\pi^2\epsilon_0\omega}\frac{\sin\theta}{r^2}\left[-\sin\theta\vec{e}_\theta + \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix}\right]
\end{aligned} \tag{13}$$

Man findet dann für $\partial P/\partial\theta$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial\theta} &= \int_0^{2\pi} d\phi r^2\sin\theta\bar{\vec{S}}\cdot\vec{e}_r \\
&= \frac{k^3J_0^2}{32\pi^2\epsilon_0\omega}\sin^2\theta\int_0^{2\pi} d\phi\left[-\sin\theta\underbrace{\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_r}_{=0} + \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix}\cdot\vec{e}_r}_{=\sin\theta}\right] \\
&= \frac{k^3J_0^2}{16\pi\epsilon_0\omega}\sin^3\theta
\end{aligned} \tag{14}$$

Aufgabe kommt aus Nachklausur WS18/19, dazu wurde eine Lösung veröffentlicht, womit diese Lösung überprüft wurde. Meine Lösung geht über einen anderen Weg, aber das Endergebnis ist gleich