

Zusammenfassung Theoretische Physik II: Elektrodynamik

durch

Luc Jean Bert Kusters

0.1 Einleitung

Diese Zusammenfassung wurde geschrieben um meine persönliches Verständniss zum Thema Elektrodynamik zu verbessern, denn man lernt am Meisten indem man versucht, sich in eine lehrende weise mit die Themen auseinanderzusetzen. Daneben finde ich persönlich das viele Skripte die ich gesehen habe einen unübersichtlichen überblick von der Elektrodynamik gaben, teilweise durch eine Informationsoverload und teilweise wegen oft fehlende motivierung der verschiedene Themenbereiche. Diese Zusammenfassung versucht ein bottom-up konstruierte Übersicht zu geben des Themas.

Natürlich ist eine Zusammenfassung nie so vollständig wie Skripte zur Vorlesungen oder Literatur. Auch Übungsaufgaben und Beispiele werden hier großenteils für kompaktheit aus der Zusammenfassung gelassen. Theorie verstehen und rechnen können sind immer zwei unterschiedliche Sachen, also zum vollständigen Verständniss des Themas muss man auch viele Zusammenhänge selbst Herleiten, sodass man eine intuition aufbaut wie man die Theorie in der Praxis anwendet. Dazu kann man am Besten Übungsaufgaben von der Universität wiederholen oder aus Literatur Rechenaufgaben machen.

Weil Deutsch nicht meine Muttersprache ist gibt es leider bestimmt welche Schreibfehler. Ich versuche sie so viel wie Möglich rauszunehmen wo ich sie sehe.

Inhaltsverzeichnis

0.1	Einleitung	iii
1	Elektrostatik	1
1.1	Ladungen und Ladungsverteilungen	1
1.2	Elektrische Kraft, Elektrisches Feld und Elektrisches Potential	2
1.3	Multipolentwicklung	4
1.4	Verhalten von Elektrostatische Felder an Randflächen	8
1.5	Lösung der Poisson Gleichung und Greensche Funktion	10
1.6	Elektrostatische Energie	13
1.7	Elektrostatik in Materie	14
1.8	Formelzettel	16
2	Magnetostatik	17
3	Elektrodynamik	19
4	Relativisitische Elektrodynamik	21
5	Mathematische Grundlagen	23
5.1	Dirac δ -Distribution	23
5.2	Mehrdimensionale Ableitung: Der Nabla Operator	25
5.3	Taylor Entwicklung	26
5.4	Fourier Reihe und Transformation	27
5.5	Integrale im Euklidischen Raum	28
5.6	Integralsätze und Zerlegungssatz	29
5.7	Zerlegundssatz	30
6	Ausgewählte Herleitungen	31

Kapitel 1

Elektrostatik

1.1 Ladungen und Ladungsverteilungen

Die Ursprung der EM-Kraft und EM-Felder ist die **Ladung**. Mathematisch wird die Ladungsverteilung eines Systems in Raum durch die **Ladungsdichte** gegeben. Ganz allgemein kann eine Ladungsverteilung von N Punktladungen am Zeit t an den Orten \mathbf{x}_i wie folgt beschrieben werden

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i(t)) \quad (1.1.1)$$

Wobei q_i sowohl positiv oder negativ sein kann.

Prinzipiell ist die Ladung in der Natur eine Eigenschaft von Punktteilchen, sodass es eigentlich keine kontinuierliche Ladungsverteilungen gibt. Auf makroskopische Skala ist diese Beschreibung jedoch sehr unhandlich, und ist eine Mittelung der Ladungsdichte eine wesentlich einfachere Beschreibung. Eine mögliche Definition für eine kontinuierliche Ladungsverteilung aus einer diskreten Ladungsverteilung sieht wie folgt aus

$$\rho_{\text{knt.}}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V(\mathbf{r})} \int_{\Delta V(\mathbf{r})} \rho_{\text{dskr.}}(\mathbf{r}, t) d^3r = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{Q_{\Delta V, \text{ges}}(t)}{\Delta V(\mathbf{r})} \quad (1.1.2)$$

Für Physikalische Systeme betrachtet man in der Regel immer nur beschränkte Ladungsverteilungen, das will sagen, die Ladungsdichte soll nur auf ein beschränktes Raumbereich von 0 verschieden sein. Dazu dürfen Ladungsverteilungen auch keine Pollstellen haben, d.h. nie divergieren. In manche theoretische Fälle, gibt es auch Ladungsverteilungen die nicht beschränkt sind, sondern hinreichend schnell im Unendlichen verschwinden (z.B. exponentiell unterdrückt), sodass zumindest

$$\int d^3r \rho(\mathbf{r}, t) = Q_{\text{ges}} < \infty$$

gilt.

In der Elektrostatik betrachtet man erstmal ruhende Ladungsverteilungen, d.h.

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) \quad (1.1.3)$$

Es gibt also keine Ströme. Manchmal werden in der Elektrostatik auch quasi statische Prozesse betrachtet, wo die Effekte von bewegte Ladungen erstmal vernachlässicht werden. Die Elektrostatik ist somit ein Spezialfall der Elektrodynamik.

1.2 Elektrische Kraft, Elektrisches Feld und Elektrisches Potential

1.2.1 Coulombkraft

Schon in 1785 gelang Charles Augustin de Coulomb eine Beschreibung der Elektrische Kraft, welche man heutzutage dann auch die **Coulombkraft** nennt. Sie ist sehr ähnlich zum Newtons Schwerkraftsgesetz und lautet für zwei Punktladungen q_1 und q_2 an den Orten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 wie folgt (im Vakuum)

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, q_1, q_2) = k q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (1.2.1)$$

Oder in bekanntere Form (nicht vektoriell, Punktladungen auf Abstand r)

$$F_c = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

wobei $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ die Kraft ist, die Teilchen 1 auf Teilchen 2 ausübt. Sei $q_1 q_2 > 0$ so wirkt die Kraft abstoßend, und sei $q_1 q_2 < 0$, so wirkt sie natürlich anziehend.

Die Elektrische Kraft ist eine Zentralkraft und deswegen **konservativ**, d.h.

$$\oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (1.2.2)$$

(*Satz von Stokes)

Dies heißt auch, dass die Coulombkraft ein skalares Potential $V(\mathbf{r})$ besitzt, mit $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$

1.2.2 Das Elektrische Feld

Neben die Kraft, die nur über die Wechselwirkung zweier Teilchen definiert ist, ist es sinnvoll das **Elektrische Feld** zu definieren. Man definiert das Elektrische Feld aus ersten Prinzipien aus der Coulombkraft.

$$\mathbf{F}(q_1, q_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = q_1 \left(k q_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) = q_1 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1)$$

Man verstehe dies so, dass Teilchen 1 mit Ladung q_1 sich am Ort \mathbf{r}_1 im äußeren Elektrisches Feld \mathbf{E}_2 , erzeugt von Teilchen 2 mit Ladung q_2 das am Ort \mathbf{r}_2 liegt, befindet und daher eine Kraft spürt.

Eine Probeladung q im externen elektrischen Feld \mathbf{E} spürt also die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.2.3)$$

Das Elektrische Feld einer Ladungsverteilung ρ_1 ist dann ein Maß für die Kraft, die eine andere, äußere Ladungsverteilung ρ_2 wegen der Anwesenheit von ρ_1 spüren würde.

1.2.3 Das Elektrische Potential

Weil die Coulombkraft ein Skalares Potential $V(\mathbf{r})$ besitzt, besitzt das Elektrische Feld auch ein skalares **Elektrisches Potential** $\phi(\mathbf{r})$ mit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}) \quad (1.2.4)$$

Dabei ist k die gleiche Konstante die auch im Coulombkraft auftauchte. Diese konstante ist abhängig vom gewählten Einheitssystem. In SI gilt z.B. $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ mit ϵ_0 die elektrische Permittivität des Vakuums, und in Gauß-Einheiten gilt $k = 1$

Nun wollen wir wissen, wie man aus eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ das zugehörige elektrische Potential $\phi(\mathbf{r})$ bzw. elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ findet. Aus der Coulombkraft kann man herleiten, dass das Potential einer Punktladung Q welches im Ursprung liegt gegeben ist durch

$$\phi(\mathbf{r}) = k \frac{Q}{r} \quad r = |\mathbf{r}|$$

Denn $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = k\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r$, woraus die Coulombkraft $F_c(\mathbf{r}) = k\frac{qQ}{r^2}$ wieder folgt. Liegt das Teilchen nicht im Ursprung, sondern am beliebigen Ort, \mathbf{r}_0 so findet man den Zusammenhang (durch eine einfache Translation)

$$\phi(\mathbf{r}) = k\frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

Das Potential mehrere Punktteilchen ergibt sich aus der Addition für die Potenziale der einzelnen Teilchen.

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_i \phi_i(\mathbf{r}) = k \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

Daraus lässt sich dann über das Limesprozeß einer Riemannsche Summe das Potential einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ definieren.

$$\phi(\mathbf{r}) = k \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.2.5)$$

Wir werden Später sehen, dass dies nur ein Spezialfall ist, und diesen Zusammenhang formaler aus der Poisson-Gleichung herleiten.

Man kann auch direkt das E-Feld aus der Ladungsverteilung berechnen, falls man den Gradienten (nach \mathbf{r} , nicht \mathbf{r}') von der obigen Formel nimmt, und findet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.2.6)$$

1.2.4 Die Feldgleichungen der Elektrostatik

Die Divergenz des elektrischen Feldes gibt nun die Quellendichte des Feldes. Wir wissen schon aus Erfahrung, dass die elektrische Ladung die Quelle der Coulombkraft ist und deswegen auch des elektrischen Feldes. Zusammen mit der Rotationsfreiheit der Coulombkraft, und somit auch die Rotationsfreiheit des E-Feldes folgen die beiden **Feldgleichungen der Elektrostatik**.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi k \rho(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Diese Feldgleichungen sind allgemeingültig für alle elektrostatischen Felder.

Weiter folgt aus den Zusammenhängen $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ und $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k \rho(\mathbf{r})$ die **Poisson-Gleichung**

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi k \rho(\mathbf{r}) \quad (1.2.8)$$

Die Poisson-Gleichung ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Unter Vorgabe von Randbedingungen kann man auch ohne die Ladungsverteilung zu kennen das Potential und daraus das elektrische Feld berechnen. Das Lösen der Poisson-Gleichung ist ein Thema für ein eigenes Kapitel.

Die Hauptaufgabe der Elektrostatik ist also das Berechnen von elektrostatischen Potentialen und Feldern unter Vorgabe von Ladungsverteilungen oder Randbedingungen. Für hochsymmetrische Probleme sind im Allgemeinen analytische Lösungen möglich, für schwierigere Probleme können meistens nur numerische Lösungen gefunden werden. Für uns ist erstmal das Finden von analytischen Lösungen interessant um ein Grundverständnis aufzubauen. Dazu werden auch Methoden besprochen, die uns analytische Näherungen geben können, wie die Multipolentwicklung.

1.3 Multipolentwicklung

Zunächst besprechen wir wie man analytische Näherungen finden kann unter Angabe von komplexere Ladungsverteilungen. Das Problem ist meistens das Integrieren der

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Term (in Kombination mit die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}')$). Deswegen möchten wir in der **karthesische Multipolentwicklung** diesen Term Taylor-entwickeln, damit wir es in eine Reihe von Polinomialen Termen umwandeln können, weil diese Einfach(er) zu integrieren ist. Daneben gibt es noch die **Kugelflächen-Entwicklung** die sich insbesondere für Radial- bzw. Rotationssymmetrische Probleme eignet, die wir Später besprechen werden.

1.3.1 Karthesische Multipolentwicklung

Die karthesische Multipolentwicklung wird mittels einer Taylor-Entwicklung hergeleitet. Man muss dabei eine Multidimensionale Taylor-Entwicklung durchführen.

Eine allgemeine mehrdimensionale Taylorentwicklung wird gegeben durch:

$$f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\beta}'}) f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}')) \Big|_{\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{\beta}_0} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\beta}'})^n}{n!} f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}') \right) \Big|_{\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{\beta}_0}$$

Man bemerke dass ∇ einen Operator ist! Die exponential Funktion dient hier nur zur Vereinfachung der Darstellung! Man Taylore nun um $\mathbf{r}' = 0$ (dies heißt, daß $\mathbf{r} \gg \mathbf{r}'$ sodass $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \approx \mathbf{r}$, dafür muss \mathbf{r} natürlich weit von der Quelle entfernt sein). Die Multipolentwicklung ist also eine **Fernfeldnäherung**.

Man definiere nun $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = f(r_1, r_2, r_3, r'_1, r'_2, r'_3) \equiv \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ sodass bis zur 2. Ordnung die Taylorentwicklung für unsere Funktion wie folgt aussieht:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = f(\mathbf{r}, 0) + (\mathbf{r}' \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}'}) f(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}') \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} + \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}'})^2 f(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}') \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} + \dots$$

0. Ordnung:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|} \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{r}$$

1. Ordnung:

$$\mathbf{r}' \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|} \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} = \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

2. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{r}}' \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}'})^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|} \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} &= \frac{1}{2} \left[r'_i \frac{\partial}{\partial \bar{r}'_i} \right] \left[r'_j \frac{\partial}{\partial \bar{r}'_j} \right] \frac{1}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|} \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} \\ &= \frac{r'_i r'_j}{2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}'_i \partial \bar{r}'_j} \frac{1}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|} \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} \\ &= \frac{r'_i r'_j}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}'_i} \frac{x_j}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|^3} \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} \quad x_j \equiv (r_j - \bar{r}'_j) \\ &= \frac{r'_i r'_j}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}'_i} \frac{x_j}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|^3} \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} \\ &= \frac{r'_i r'_j}{2} \left(-\frac{3}{2} \frac{-2x_i x_j}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|^5} - \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|^3} \right) \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} \quad (\text{Produktregel}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} r^2}{r^5} r'_i r'_j \end{aligned}$$

Eine wichtige Bemerkung: Aus Symmetrie Grunden gilt

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} \mathbf{r}^2}{r^5} r'_i r'_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3r'_i r'_j - \delta_{ij} \mathbf{r}'^2}{r'^5} r_i r_j$$

Wir benutzen im allgemeinen die letzte Definition wenn wir die elektrische und magnetische Multipole berechnen. Man findet also bis zum 2. Ordnung

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3r'_i r'_j - \delta_{ij} \mathbf{r}'^2}{r^5} r_i r_j \quad (1.3.1)$$

Setzt man dies in die Definition für das Elektrische Potential ein, so findet man

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= k \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &\approx k \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3r'_i r'_j - \delta_{ij} \mathbf{r}'^2}{r^5} r_i r_j \right) \\ &\equiv k \frac{Q}{r} + k \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{k}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{r_i r_j}{r^5} Q_{ij} \end{aligned}$$

$$\text{Monopol:} \quad Q = \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) \quad (\text{Gesamtladung})$$

$$\text{Dipol:} \quad p_i = \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) r_i \quad \mathbf{p} = p_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

$$\text{Quadrupol:} \quad Q_{ij} = \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) (3r_i r_j - \delta_{ij} |\mathbf{r}|^2)$$

Dabei hat die Quadrupoltensor Q_{ij} nur 5 Freiheitsgraden. Mit nur 5 Rechnungen alle (9) Quadrupol Elemente berechnen. Es gilt zwar $Q_{ij} = Q_{ji}$ (symmetrisch) und $\text{sp}(\mathbf{Q}) = \sum_i Q_{ii} = 0$ (spurfrei).

Im allgemeinen berechnet man keine weitere Ordnungen analytisch im Bachelorstudium, und zum Verständniss bringt dies auch nicht mehr (außer ärger), sodass höhere Ordnungen berechnen ein Problem ist das man lieber an Computer überlässt.

1.3.2 Sphärische Multipolentwicklung

Für Ladungsverteilungen die Radial- oder Rotationssymmetrisch sind ist die Sphärische Multipolentwicklung besonders geeignet, vor allem falls man die Ladungsdichte als Linearkombination von Kugelflächen-Funktionen schreiben kann. Um die Sphärische Multipolentwicklung zu motivieren machen wir zunächst die Annahme (mit dem Separationsansatz), dass das Winkelanteil des Potentials unabhängig vom Radialanteil ist, also

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_r(r) \phi_\Omega(\theta, \varphi)$$

Weil man (wie wir später besprechen werden) die Poisson-Gleichung mit dem gleichen Ansatz lösen wird, und die Kugelflächen-Funktionen $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ eine Eigenfunktion der Laplace Operator ist, ist es eine gute Idee um dies als Basis für eine Sphärische Entwicklung zu benutzen. Dazu formen die Kugelflächen-Funktionen unter Integration über $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ eine orthonormale Basis. Es gilt die untere Zusammenhang.

$$\int d\Omega Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}^*(\Omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Die Entwicklung in Kugelkoordinaten ist rechnerisch etwas aufwändig, und wird hier erstmal übersprungen, aber sie wird in gute Literatur über die Elektrodynamik oft gegeben, wie z.B. in Kapitel 2.3.8 von Nolting's "Grundkurs Theoretische Physik 3, Elektrodynamik". Man findet

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \quad (1.3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } l = 0, 1, 2, \dots \text{ und } m = -l, \dots, l \\ r_{<} = \min(r, r'), \quad r_{>} = \max(r, r'). \end{aligned}$$

Setzt man dies in der Definition für das Elektrische Potential ein, so findet man

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= k \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \int_0^\infty dr' r'^2 \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \rho(\mathbf{r}') \\ &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Omega) \left(\int_0^r dr' r'^2 \frac{r'^l}{r^{l+1}} + \int_r^\infty dr' r'^2 \frac{r'^l}{r'^{l+1}} \right) \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') \rho(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Sei nun die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}') = \sum_{l'm'} f_{l'm'}(r') Y_{l'm'}(\Omega')$ für beliebige l' und m' (also einfach irgendeine Linearkombination von beliebige Kugelflächenfunktionen) so vereinfacht sich das Problem weiter, und kann man für eine Endliche Summe sogar exakte Lösungen finden. (Es ist nicht notwendig dass man die Ladungsdichte als Linearkombination von Kugelflächenfunktionen schreibt, nur einfacher).

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Omega) \sum_{l'm'} \left(\int_0^r dr' r'^{\frac{l'+2}{l+1}} f_{l'm'}(r') + \int_r^\infty dr' \frac{r'^l}{r'^{l-1}} f_{l'm'}(r') \right) \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') Y_{l'm'}(\Omega') \\ &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Omega) \sum_{l'm'} \left(\int_0^r dr' r'^{\frac{l'+2}{l+1}} f_{l'm'}(r') + \int_r^\infty dr' \frac{r'^l}{r'^{l-1}} f_{l'm'}(r') \right) \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\ &= k \sum_{l'm'} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{l'm'}(\Omega) \left(\int_0^r dr' r'^{\frac{l'+2}{l+1}} f_{l'm'}(r') + \int_r^\infty dr' \frac{r'^l}{r'^{l-1}} f_{l'm'}(r') \right) \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

d.h. alle Terme wo $l \neq l'$ oder $m \neq m'$ fallen wegen dem Kronecker-delta weg. Wir werden aber weiter wieder von eine allgemeine Ladungsdichte ausgehen.

Ist die Ladungsdichte nun nach Innen oder Nach außen beschränkt, dann kann man $r_{>}$ und $r_{<}$ eindeutig als r oder r' festlegen in bestimmte Raumbereiche. Hat man z.B. eine geladene Kugelschale wobei die Ladungsdichte, noch von θ und φ abhängen darf, so kann man das Potential im Inneren mit nur dem $\int_r^\infty dr$ Integral beschreiben, und dem Außenraum mit durch das $\int_0^r dr$ Integral. Es macht manchmal sogar kein Sinn die Lösungen der beide Raumbereiche gleichzeitig zu berechnen weil die Lösung für das Innere Raumbereich im äußeren Raumbereich divergieren kann oder umgekehrt. Wir Teilen hier also zunächst die Raumgebiete auf und finden Multipolmomente für dem innen und außen Räume $q_{<}^{lm}$ und $q_{>}^{lm}$

Im Innenraum ($r \approx 0$):

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Omega) \int_0^r dr' \frac{r'^l}{r'^{l-1}} \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') \rho(\mathbf{r}') \\ &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} r^l q_{<}^{lm} Y_{lm}(\Omega) \\ \text{mit } q_{<}^{lm} &= \int_0^\infty dr' r'^{1-l} \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') \rho(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Im Außenraum ($r \gg 0$):

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Omega) \int_0^r dr' \frac{r'^{l+2}}{r'^{l+1}} \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') \rho(\mathbf{r}') \\ &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_{>}^{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\Omega) \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

$$\text{mit } q_{>}^{lm} = \int_0^\infty dr' r'^{l+2} \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') \rho(\mathbf{r})$$

1.4 Verhalten von Elektrostatische Felder an Randflächen

In diesem Kapitel überlegen wir uns, wie Elektrische Felder sich an **Randflächen** verhalten. Dabei ist es wichtig dass wir die aus den Vektorkalkulus folgenden **Satz von Gauß** und **Satz von Stokes** näher betrachten.

Randflächen und Randkurven

Eine **Randfläche** ist ganz allgemein eine Fläche im Raum die Zwei Raumgebiete trennt, z.B. trennt die Randfläche einer Kugel das innere der Kugel von dem Außenraum. Man kann das Vakuum unendlich viele triviale Randflächen zuordnen. Was interessanter ist, sind Randflächen zwischen z.B. unterschiedliche Medien wie Vakuum, metallische Leiter, (un)geladene Dielektrika oder Ränder von Ladungsverteilungen.

Eine **Randkurve** ist eine Kurve die eine Oberfläche abschließt.

Bedeutung der Sätze von Gauß und Stokes für Elektrostatische Felder

Zunächst wiederholen wir wie die Sätze mathematisch ganz allgemein aussehen.

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine Kompakte Menge mit glattem Rand ∂V mit ein nach äußeren orientierten Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} bzw. Flächen Element $d\mathbf{A} = \mathbf{n}dA$. Sei ferner das Vektorfeld \mathbf{F} stetig differenzierbar auf einer offenen Menge U mit $V \subseteq U$ so gilt

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{Satz von Gauß} \quad (1.4.1)$$

Der Satz von Gauß besagt daß die Quellendichte (Divergenz) eines Vektorfeldes $\nabla \cdot \mathbf{F}$ integriert über ein Volumen V proportional zur Flußintegrals des Feldes durch der Randfläche des Volumen ∂V .

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine einfach zusammenhängende Fläche mit glattem Randkurve ∂A (die gegen dem Urzeigersinn durchlaufen wird beim Integrieren). Sei ferner das Vektorfeld \mathbf{F} stetig differenzierbar auf einer offenen Menge U mit $A \subseteq U$ so gilt

$$\int_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{Satz von Stokes} \quad (1.4.2)$$

Der Satz von Stokes besagt daß das Flußintegral über die Wirbeldichte (Rotation) eines Vektorfeldes $\nabla \times \mathbf{F}$ über eine Fläche A proportional zur Kurvenintegral entlang die Randkurve der Fläche ∂A

In der Regel verhalten physikalische Felder sich immer sehr schön, sodass wir uns über die Stetige Differenzierungsbedingung erstmal keine gedanken machen müssen. Die Sätze von Gauß und Stokes schränken unsere zu betrachten Volumina und Flächen zwar ein, aber nur sehr exotische Objekte erfüllen die Bedingungen nicht, sodaß wir uns in der Regel auch keine Gedanken machen müssen ob die mathematische Bedingungen erfüllt sind.

Zusammen mit die Feldgleichungen der Elektrostatik und die obere Sätze Folgen direkt die Folgende Aussagen

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \int_V \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{E})}_{4\pi k\rho(\mathbf{r})} dV = 4\pi k Q_{V,\text{ges}} \\ \oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_A \underbrace{(\nabla \times \mathbf{E})}_0 \cdot d\mathbf{A} = 0 \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Anwendung auf Randflächen

Man kann nun eine allgemeine Randfläche im Raum betrachten. Legt man ein kleines Kästchen (Volumen) auf der Rand, zentriert um dem Rand — also ein teil des Kästchens liegt an eine Seite der Randfläche, und ein Teil an der andere Seite — und läßt man dieses Kästchen nun immer kleiner werden, so betrachtet man

annähernd zu die Randfläche selbst. Im limes von $V \rightarrow 0$ findet man sogar lokale Punkte auf der Oberfläche und gilt

$$\lim_{V \rightarrow 0} \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 4\pi k\sigma(\mathbf{r})$$

Wobei $\sigma(\mathbf{r})$ die lokale Flächenladungsdichte auf der Randfläche ist.

Analog kann man eine infinitesimale Flächenstückchen — die orthogonal auf der Randfläche steht, mit ein Teil an einer Seite der Randfläche und ein Teil auf der andere Seite — um die Randfläche zentrieren. Im limes von $A \rightarrow 0$ findet man

$$\lim_{A \rightarrow 0} \oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$$

Es folgen die **Randflächenbedingungen**

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} &= 4\pi k\sigma(\mathbf{r}) \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Dies bedeutet weiter, daß die orthogonalkomponente $\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ (in der Anwesenheit einer Flächenladungsdichte) einen Sprung um $4\pi k\sigma(\mathbf{r})$ macht, während die tangentialkomponente $\mathbf{E}_\parallel = \mathbf{E} \times \mathbf{n}$ immer stetig ist.

1.5 Lösung der Poisson Gleichung und Greensche Funktion

In diesem Kapitel besprechen wir wie man die Poisson Gleichung lösen kann.

1.5.1 die Poissongleichung

Wie wir schon in Kapitel 1.2.4 hergeleitet haben gilt in der Elektrostatik die **Poissongleichung**

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi k\rho(\mathbf{r})$$

Die Aufgabe besteht nun darin, ϕ zu finden. Die Poissongleichung stellt eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung dar, die gelöst werden kann unter Vorgabe von Randbedingungen (analog zu Anfangsbedingungen in der Mechanik).

Praktische Lösungsmethoden sind meistens abhängig von der Geometrie des zu lösenden Problems und die vorgegebene Randbedingungen. Zunächst besprechen wir aber die Allgemeinste Lösung (jedoch oft nicht schnellste oder einfachste Lösungsweg) der Poissongleichung, über die **Greensche Funktion** (der Poissongleichung).

1.5.2 Die Greensche Identität und die Greensche Funktion

Für das Poissonproblem gibt es 3 wichtige Identitäten, woraus man die allgemeine Lösung der Poissongleichung finden kann mittels der Green'schen Funktion. Zunächst betrachten wir die allgemeine mathematische Identitäten und wenden sie danach spezifisch für das Poisson Problem an.

1. Green'sche Identität

Gäbe es ein Vektorfeld $\mathbf{F} = \psi\nabla\varphi \equiv \psi\mathbf{\Gamma}$ mit ψ und φ beliebige Skalarfelder mit $\psi \in C^1$ und $\varphi \in C^2$ (d.h. 1 bzw. 2 mal stetig diffbar) so folgt aus dem Satz von Gauß

$$\int_V \underbrace{(\psi\Delta\varphi + \nabla\psi\nabla\varphi)}_{\nabla\cdot\mathbf{F}} dV = \oint_{\partial V} (\psi\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{A} \quad (1.5.1)$$

wobei man beachtet daß

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\psi\mathbf{\Gamma}) = \nabla\psi\mathbf{\Gamma} + \psi\nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = \nabla\psi\nabla\varphi + \psi\Delta\varphi$$

Die erste Greensche Identität ist also einen Spezialfall des Gauß Gesetzes

2. Green'sche Identität

Sei nun auch noch $\psi \in C^2$, und gäbe es ein weiteres $\epsilon \in C^1$ sodass man das Vektorfeld $\mathbf{F} = \psi(\epsilon\nabla\psi) - \varphi(\epsilon\nabla\psi)$ definiert folgt wieder unter Anwendung der Satz von Gauß.

$$\int_V \underbrace{\psi\nabla \cdot (\epsilon\nabla\varphi) - \varphi\nabla \cdot (\epsilon\nabla\psi)}_{\nabla\cdot\mathbf{F}} dV = \oint_{\partial V} \epsilon(\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi) \cdot d\mathbf{A} \quad (1.5.2)$$

wobei man beachtet daß

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\psi(\epsilon\nabla\varphi) - \varphi(\epsilon\nabla\psi)) = \underbrace{(\nabla\psi)(\epsilon\nabla\varphi)}_{\nabla\psi\nabla\varphi} + \psi\nabla \cdot (\epsilon\nabla\varphi) - \underbrace{(\nabla\varphi)(\epsilon\nabla\psi)}_{\nabla\varphi\nabla\psi} - \varphi\nabla \cdot (\epsilon\nabla\psi)$$

Wir sind erstmal interessiert an dem Spezialfall wo $\epsilon = 1$ ist, sodass folgt

$$\int_V \psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi dV = \oint_{\partial V} \psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi d\mathbf{A} \quad (1.5.3)$$

3. Green'sche Identität

Man definiere nun die **Greensche Funktion** sodass gilt

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.5.4)$$

Für den Laplace Operator Δ erfüllt die Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ diese Bedingung. Die Green'sche Funktion ist aber nicht eindeutig definiert, denn die Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ erfüllt die Bedingung auch, falls $\Delta F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$

Setzt man nun $\psi = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ und $\varphi = \phi(\mathbf{r}')$ in die 2. Greensche Identität ein, so folgt die 3. Greensche Identität (hier schon als Spezialfall für das elektrische Potenzial)

$$\begin{aligned} \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \underbrace{\Delta \phi(\mathbf{r}')}_{-4\pi k \rho(\mathbf{r}')} - \phi(\mathbf{r}') \underbrace{\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}_{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} dV' &= -4\pi k \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \phi(\mathbf{r}) \\ &= \oint_{\partial V} (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \cdot d\mathbf{A}' \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Es folgt die Allgemeine Lösung für das Potenzial

$$\Leftrightarrow \phi(\mathbf{r}) = -4\pi k \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \oint_{\partial V} (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \cdot d\mathbf{A} \quad (1.5.6)$$

Bemerke, dass falls ϕ und $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ im Unendlichen nach null abfallen, mit $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ einfach Funktion 1.2.5 folgt. Dies ist also ein Spezialfall der allgemeinen Lösung von $\phi(\mathbf{r})$, wo keine Randbedingungen vorgegeben sind, bzw. wo die Randbedingungen im Unendlichen liegen und deswegen verschwinden.

Ist nun auf die Randfläche ϕ vorgegeben (Dirichlet Randbedingungen), so wählt man $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ meistens so, sodass $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}' \in \partial V} = 0$ gilt, also auf dem Rand verschwindet, und vereinfacht sich Funktion 1.5.6 zu

$$\phi(\mathbf{r}') = -4\pi k \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \oint_{\partial V} \phi(\mathbf{r}') \nabla G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{A} \quad (1.5.7)$$

wobei $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ dann die obere Bedingung erfüllt, und manchmal auch die Dirichlet-Green'sche Funktion genannt wird.

Ist statt dem Potential das E-Feld oder eine Ladungsdichte vorgegeben (von Neumann Randbedingungen, man beachte dass $\sigma_F = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$, sodass vorgebe von Flächenladungsdichte und E-feld auf dem Rand equivalent sind), so wählt man meistens dass $\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r} \in \partial V} = 0$, sodass Funktion 1.5.6 sich vereinfacht zu

$$\phi(\mathbf{r}') = -4\pi k \int_V \rho(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \oint_{\partial V} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \phi(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{A} \quad (1.5.8)$$

wobei $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ dann die obere Bedingung erfüllt, und manchmal auch die Von-Neumann-Green'sche Funktion genannt wird.

1.5.3 Praktische Lösungswege

In diesen Abschnitt werden wir uns mit Praktische Lösungsmethoden der Poisson-Gleichung auseinandersetzen.

Spiegelladungsmethode

Das Problem welches betrachtet wird, ist eine Ladung auf einen Abstand a , z.B. auf der z -Achse, vor einer Unendlich ausgedehnten Leiterschicht, z.B. in der x - y -Ebene. Allgemein gilt für Leiter, wo kein Strom durch fließt (was in der Elektrostatik der Fall ist) dass das Potential überall in dem Leiter konstant ist. Man muss also jetzt eine Lösung finden für dem die freie Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ und die Randbedingung $\phi(x, y, z = 0) = \phi_0 = \text{const.}$

Eine konstantes Potential in der x-y-Ebene ist einfach zu realisieren, falls man eine 2. Ladung bei $\bar{\mathbf{r}}_0 = (x_0, y_0, -z_0)$ und mit Ladung $-q$ legt. Das Potential oberhalb der Leiterebene erfüllt dann die Randbedingungen, jedoch ist aufzumerken, dass es diese negative Ladung in der Wirklichkeit gar nicht gibt, sodass diese Lösung nur für eine Hälfte des Raumgebietes richtig ist. Die Green'sche Funktion zu diesem Problem ist $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}|} \right]$, sodass man dieses Problem auch formeller mit Formel 1.5.7 lösen könnte.

Die Spiegelladungsmethode ist auch für andere Geometrien geeignet, sowie eine Punktladung vor eine metallische Kugel oder Zylinder, und die Spiegelladung und ort der Spiegelladung sind immer entsprechend für das Problem zu wählen.

Seperationsansatz

Die Seperationsansatz ist einen Ansatz, wo man annimmt, dass das Koordinaten im Potential produktmäßig unabhängig sind, d.h.

$$\phi(u, v, w) = \phi_u(u)\phi_v(v)\phi_w(w)$$

Mit diesem Ansatz gelingt es in manche Fälle, die Multidimensionale Poissongleichung in 2 oder 3 unabhängige DGLs 2. Ordnung zu entkoppeln.

Allgemeine Seperationsansatz in Kugelkoordinaten

Für Rotations- oder Kugelsymmetrische Probleme eignet es sich, eine Separationsansatz zu machen, wo $\phi(\mathbf{r}) = \phi_r(r)\phi_\Omega(\theta, \varphi)$. Der Laplace Operator muss dann auch entsprechend in Kugelkoordinaten definiert werden. Es gilt

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right] \quad (1.5.9)$$

Dabei sind die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\Omega)$ eine eigenfunktion der Raumwinkel-Laplace-Operator Δ_Ω wobei gilt dass $\Delta_\Omega Y_{lm}(\Omega) = l(l+1)Y_{lm}(\Omega)$. Deswegen sind die Kugelflächenfunktionen einen guten Wahl für unseren Ansatz. Weil die Kugelflächenfunktionen für alle l und m Eigenfunktion sind, muss man die Superposition aller Lösungen nehmen. Zu jedem l und m könnte nun aber eine unterschiedliche Funktion $\phi_r(r)$ gehören, sodass die allgemeine Lösung gegeben wird durch

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{lm} f_{lm}(r) Y_{lm}(\Omega) \quad l \in \mathbb{N}_0, m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$$

Die Herleitung von $f_{lm}(r)$ wird hier zunächst übersprungen, ist aber in viele Skripte und gute Literatur zu finden. Man findet am Ende die allgemeine Lösung

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} (a_{lm} r^l + b_{lm} r^{-l-1}) Y_{lm}(\Omega) \quad (1.5.10)$$

Sei das Problem nicht unabhängig von φ , so kann man auch stattdessen die Lösung über die Legendre Polynome $P_l(\cos \theta)$ definieren (man beachte das $Y_{lm}(\Omega) \propto P_l(\cos \theta) e^{im\varphi}$, sodass die φ abhängigkeit für $m=0$ wegfällt) und findet für rotationssymmetrische Probleme den vereinfachten Ansatz

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l r^l + b_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta) \quad (1.5.11)$$

Das lösen dieser Ansätze wird dann meistens durch Koeffizientenvergleich mit den vorgegebenen Randbedingungen gemacht.

1.6 Elektrostatistische Energie

In diesem Kapitel besprechen wir wie die Energie von Ladungsverteilungen in externe Felder aussieht, sowie die Wechselwirkungsenergie zweier Ladungsverteilungen.

1.6.1 Energie von Ladungen im Externen Feld

Bewegt sich eine Ladung q durch ein äußeres Elektrisches Feld $\mathbf{E}_a(\mathbf{r})$ mit Potential $\phi_a(\mathbf{r})$, so spürt es die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und wird die Arbeit

$$W = - \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = -q \int_C \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = q \int_C \nabla \phi_a(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = q(\phi_a(\mathbf{r}_1) - \phi_a(\mathbf{r}_0)) = qU_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_1}$$

verrichtet, wobei C eine beliebige Raumkurve von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r}_1 ist. Betrachtet man statt eine Punktladung eine Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ im äußeren E-Feld, so muss man den oberen Zusammenhang über dem Volumen integrieren. Setzt man $\phi_a(\mathbf{r}_0) = 0$ (Potential wird immer relativ definiert), so findet man für die Potentielle Energie den untere Zusammenhang

$$E_{\text{pot}} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \phi_a(\mathbf{r}) \quad (1.6.1)$$

Sei die Ladungsverteilungen auf einem kleinen Raumbereich um $\mathbf{r}_0 = 0$ beschränkt, so kann man das äußere Potential Taylorentwickeln um eine gute näherung für die Potentielle Energie zu finden.

$$T(\phi_a(\mathbf{r}); \mathbf{r}_0 = 0) = \phi_a(0) - \mathbf{E}_a(0) \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2} \sum_{ij} \partial_j E_{a,i}(0) r_i r_j + \dots$$

Setzt man dies in Gleichung 1.6.1 ein, so findet man

$$E_{\text{pot}} \approx \phi_a(0)Q - \mathbf{E}_a(0) \cdot \mathbf{p} - \frac{1}{6} \sum_{ij} \partial_j E_i(0) Q_{ij} \quad (1.6.2)$$

Wobei Q , \mathbf{p} und Q_{ij} die Multipolmomente sind. Man bemerke also, dass (näherungsweise für ausgedehnte Ladungsverteilungen) die elektrostatische potentielle Energie verursacht wird durch die Kopplung (d.h. "mathematische interaktion") von die Gesamtladung mit dem äußeren Potential und den Dipol mit dem E-Feld usw.

1.6.2 Feldenergie und Selbstinteraction

Bis jetzt wurden die Effekte die die Ladungsverteilungen selbst verursacht vernachlässigt. Jetzt möchten wir uns aber anschauen wie wir die gesamte energie eines Systems berechnen können, wenn wir nicht ausgehen von äußere felder. Sei nun $\rho(\mathbf{r})$ die Ladungsverteilungen des gesamten Raumes, mit das zugehörige Elektrische Potential $\phi_\rho(\mathbf{r})$.

Es gilt noch immer die Zusammenhang aus Gleichung 1.6.1, stellt nun jedoch keine potentielle Energie in einem äußeren Feld mehr dar sondern eine Wechselwirkungsenergie und es gilt,

$$E_{\text{WW}} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \phi_\rho(\mathbf{r}) = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.6.3)$$

Über die Poissongleichung $\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi k \rho(\mathbf{r})$ kann man dies weiter umformen nach

$$\begin{aligned} E_{\text{WW}} &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi k} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \phi(\mathbf{r}) \Delta\phi(\mathbf{r}) \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{8\pi k} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \underbrace{\nabla\phi(\mathbf{r}) \nabla\phi(\mathbf{r})}_{\mathbf{E}^2(\mathbf{r})} - \frac{1}{8\pi k} \underbrace{\oint_{\partial\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{r}) \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A}}_{=0 \text{ (}\phi(\mathbf{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 0)} \\ &= \frac{1}{8\pi k} \int d^3r \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

(* 1. Greensche Identität)

1.7 Elektrostatik in Materie

Die bisherige hergeleitete Formeln sind alle Gültig im Vakuum. In Medien sowie Dielektrika oder Leiter können jedoch mikroskopische Interaktionen entstehen, weil Atome und Moleküle aus geladenen Teilchen bestehen, die Elektrische Felder verändern können. Eine Mikroskopische Beschreibung von Vielteilchen Systeme ist aber nicht das Ziel der makroskopische Elektrodynamik. Deswegen werden zunächst auf Makroskopische Skala vereinfachungen eingeführt, woraus man ein sehr praktisches und verständliches Bild der Elektrodynamik herleiten kann.

1.7.1 Materialarten

Man unterscheidet zunächst zwischen zwei Arten von Medien, zwar (Metallische) **Leiter** und **Dielektrika** (auch Isolatoren genannt).

1. In Leiter gibt es, neben gebundenen Ladungen (Valenzelektronen, Protonen), **freie Ladungen** (Leitungselektronen) die frei durch dem Medium bewegen können. Die freie Ladungen können angelegte elektrische Felde entgegenwirken und deswegen aufheben.
2. In Dielektrika sind alle Ladungen gebunden. Die einzige Gegenreaktion die die gebundene Ladungen auf äußere Felder haben können, sind **Polarisationseffekte** (denke z.B. an Verformung/Verschiebung der Elektronenwolke um dem Atom). Gitterstrukturen von Atomen können weiter dafür sorgen das diese Polarisationseffekte richtungsabhängig sind. Neben induzierte Dipole können auch spontane (das heißt nich von äußere felder ausgelöste) Dipole in Dielektrika auftreten (z.B. inherentes Dipolmoment vom Wassermolekül).

(In Leiter können auch Polarisationseffekte auftreten, jedoch sind diese meistens einige größenordnungen schwächer als die Effekte der freien Ladungen)

Um die aufspaltung von freie und gebundene Ladungen mathematisch zu beschreiben führen wir die zunächst die freie bzw. die gebundene Ladungsdichte $\rho_f(\mathbf{r})$ und $\rho_{\text{geb}}(\mathbf{r})$ ein wobei natürlich gilt, dass

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) + \rho_{\text{geb}}(\mathbf{r}) \quad (1.7.1)$$

1.7.2 Polarisation und dielektrische Verschiebung

Mikroskopisch gibt es in einem Polarisierten Medium einen Satz von Dipole, die als Punktdipole \mathbf{p}_i betrachtet werden können. Wir füren jetzt die Größe \mathbf{P} ein, die **Polarisation**, die ein Maß ist für die Polarisationsdichte in einem Raumbereich und definieren es formal als Raummittelung von Punktdipole (analog zu Punktladung und Ladungsdichte)

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V(\mathbf{r})} \sum_{\mathbf{p}_i \in V(\mathbf{r})} \mathbf{p}_i \quad (1.7.2)$$

Die Polarisation kann aufgeteilt werden in die spontane Polarisation \mathbf{P}_{sp} und eine induzierte Polarisation \mathbf{P}_{ind} sodass

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_{\text{sp}}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}_{\text{ind}}(\mathbf{r}) \quad (1.7.3)$$

Dabei wird die induzierte Polarisation durch äußere elektrische Felder erzeugt und es gilt ganz allgeimen

$$\mathbf{P}_{\text{ind}} = 4\pi k \hat{\chi}(\mathbf{r}, \mathbf{E}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.7.4)$$

Wobei $\hat{\chi}$ eine 3×3 -Matrix ist die Richtungsabhängigkeit der Polarisation zulässt. $\hat{\chi}$ ist weiter ganz allgemein eine Funktion von \mathbf{r} und $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Obwohl in viele Medien tatsächlich eine Orts- und elektrisches Feldabhängigkeit anwesend sein kann, werden in diese in der Regel nicht in Einführungskurse der Elektrodynamik behandelt. Man betrachtet stattdessen meistens **lineare**, **homogene** und **isotrope** Medien (LHI-Medien). Das heißt,

1. isotropie: Raumrichtungsunabhängigkeit $\rightarrow \hat{\chi} = 1\chi$ bzw. die 3×3 -Matrix durch eine skalare Funktion ersetzt werden.
2. homogenität: Ortsunabhängigkeit $\rightarrow \hat{\chi}$ unabängig von \mathbf{r}

3. linearität: Elektrische Feldstärke unabhängig $\rightarrow \hat{\chi}$ unabhängig (oder sehr sehr schwach abhängig) von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ sodaß $|\mathbf{P}| \propto |\mathbf{E}|$ eine lineare Zusammenhang erfüllt

Als Spezialfall für LHI-Medien gilt deswegen

$$\mathbf{P}_{\text{ind}} = \frac{\chi}{4\pi k} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.7.5)$$

wobei χ eine Materialabhängige Konstante ist.

Die Polarisation hat als Quelle die gebundene Ladungsdichte und es gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = -\rho_{\text{geb}}(\mathbf{r}) \quad (1.7.6)$$

wobei das Vorzeichen eine mathematische Formalität ist, um anzudeuten dass die Polarisation das Elektrische Feld entgegenwirkt.

Die freie Ladungsdichte ρ_f verursacht nun noch ein Zusätzliches Feld das sich sehr ähnlich zum Elektrischen Feld verhält. Dieses Feld wird die **dielektrische Verschiebung** \mathbf{D} genannt und es gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) \quad (1.7.7)$$

Mit Gleichung 1.7.1 und $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k \rho$ folgt nun

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k \rho(\mathbf{r}) = 4\pi k (\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}))$$

sodass folgt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k (\mathbf{D}(\mathbf{r}) - \mathbf{P}(\mathbf{r})) \quad (1.7.8)$$

Vernachlässigen wir zunächst die spontane Polarisation (d.h. wir setzen $\mathbf{P}_{\text{sp}}(\mathbf{r}) = 0$) und betrachten wir LHI-Medien so folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 4\pi k \mathbf{D}(\mathbf{r}) - \chi \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \Leftrightarrow \frac{(1+\chi)}{4\pi k} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{D}(\mathbf{r}) \\ \stackrel{\text{SI}}{\Leftrightarrow} \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}) &\equiv \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \epsilon_r = (1+\chi) \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

Für LHI-Medien ohne spontane Polarisation gilt also (in SI einheiten)

$$\epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}(\mathbf{r})$$

1.7.3 Randbedingungen an Dielektrika

Es gelten an Dielektrika die Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \rho_f(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

Das heißt dann, dass an eine Randfläche die Tangentialkomponente von \mathbf{E} stetig ist, und die Orthogonal-komponente von \mathbf{D} einen Sprung um ρ_f machen kann.

1.8 Formelzettel

1.8.1 Ladungen und Ladungsverteilungen

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) \quad (\text{Elektrostatik})$$

1.8.2 Elektrische Kraft, Elektrisches Feld und Elektrisches Potential

Coulombkraft einer Punktladung im äußeren E-Feld Feldgleichungen der E-Statik

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k \rho(\mathbf{r})$$

Zusammenhang E-Feld und Elektrisches Potential

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi(\mathbf{r})$$

Poisson-Gleichung

Berechnung des E-Feld und Potential aus Ladungsverteilung

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi k\rho(\mathbf{r})$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

1.8.3 Multipolentwicklung

1.8.4 Verhalten von Elektrostatische Felder an Randflächen

1.8.5 Lösung der Poisson Gleichung und Greensche Funktion

1.8.6 Elektrostatische Energie

1.8.7 Elektrostatik in Materie

Kapitel 2

Magnetostatik

Kapitel 3

Elektrodynamik

Kapitel 4

Relativistische Elektrodynamik

Kapitel 5

Mathematische Grundlagen

5.1 Dirac δ -Distribution

Die Dirac δ -Distribution (manchmal auch δ -Funktion genannt) ist eine normierte Distribution, die es erschafft, mittels der Kalkulus infinitesimale Punkte oder infinitesimal dünne Flächen im Raum zu beschreiben. Für die Elektrodynamik ist dies wichtig, denn die Ladung ist eine eigenschaft von Punktteilchen. Auch ist die Delta distribution sehr nützlich um Flächenladungen zu beschreiben.

5.1.1 Definierende Eigenschaft

Die δ -Distribution muss die folgende Bedingungen erfüllen

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 1$$
$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Wobei die untere Zusammenhang vor allem andeutet dass die δ -Distribution um \mathbf{r}_0 zentriert ist und unendlich spitz ist. Es folgt für diese Distribution mit eine beliebige Testfunktion $f(\mathbf{r})$.

$$\int_V d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.1.2)$$

5.1.2 Herleitung δ -Distribution aus Bekannte Kurven

Die Dirac δ -Funktion kann aus mehrere normierbare Kurven hergeleitet werden. Wichtig ist die Eigenschaft, dass die Funktion im limes einer Parameter stets spitzer wird, aber trotzdem normiert bleibt, sodass sich die Distribution immer mehr auf einem Punkt anhäuft. Einige Beispiele solcher Funktionen sind

1. Kleine Stufe

$$\delta(x - x_0) = \lim_{b \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{b} & x \in [x_0 - \frac{b}{2}, x_0 + \frac{b}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.1.3)$$

2. Gauß Kurve

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.1.4)$$

3. Lorentz Kurve

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + (x - x_0)^2} \quad (5.1.5)$$

Diese Funktionen werden in der Praxis aber nie direkt angewandt, sind also nur für die Vorstellung gedacht.

5.1.3 Einige Wichtige Identitäten

1. Fundamentalere Eigenschaft

$$\int d^3 \mathbf{r} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r}_0)$$

2. Ableitung der δ -Funktion

$$\delta'(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f'(\mathbf{r})$$

3. Integration der δ -Funktion (Stufenfunktion)

$$\int_{-\infty}^x dx' \delta(x' - x_0) \equiv \Theta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & x > x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \Theta(x - x_0) = \delta(x - x_0)$$

4. δ -Funktion einer anderen Funktion

$$\delta(g(\mathbf{r})) = \sum_{\mathbf{r}_i} \frac{1}{|g'(\mathbf{r}_i)|} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad \text{mit } \mathbf{r}_i \text{ Nullstellen von } g(x)$$

5. Multidimensionale δ -Funktion Zerlegung in 1-D δ -Funktionen (Kartesisch und Krummlinienig)

$$\delta(\mathbf{r}(x, y, z)) = \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad \delta(\mathbf{r}(u, v, w)) = \frac{1}{\gamma(u, v, w)} \delta(u) \delta(v) \delta(w)$$

Wobei γ die Funktionaldeterminante ist

5.2 Mehrdimensionale Ableitung: Der Nabla Operator

5.3 Taylor Entwicklung

Die Taylorentwicklung ist eine Näherungsmethode wobei man Funktionen in Polynome zerlegt.

Allgemeine Taylorentwicklung (Kompakte Darstellung):

$$f(x) = e^{(x-x_0) \cdot D_{x'}} f(x') \Big|_{x'=x_0} \quad (5.3.1)$$

Wobei $D_{x'}$ eine allgemeine Ableitungsoperator ist. In eine Dimension folgt für $D_{x'} = \frac{d}{dx'}$ die bekannte Zusammenhang.

$$f(x) = e^{(x-x_0) \frac{d}{dx'}} f(x') \Big|_{x'=x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (5.3.2)$$

Eine Mehrdimensionale Taylorentwicklung wird analog gegeben wobei $D_{x'} = \nabla_{x'}$ und $x \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_0(x_{01}, \dots, x_{0n})$

$$f(x) = e^{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \nabla_{\mathbf{x}'}} f(\mathbf{x}') \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nabla_{\mathbf{x}'}^n f(\mathbf{x}')}{n!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^n \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}_0} \quad (5.3.3)$$

Man kann gegebenenfalls auch um nur ein Teil der Variablen $\{x_i, \dots, x_j\} \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ entwickeln. Dabei teilen wir die Variable auf in \mathbf{y} und \mathbf{z} und entwickeln dann um $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_i}_{\mathbf{y}}, \underbrace{x_{i+1}, \dots, x_n}_{\mathbf{z}}) = \mathbf{x}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{y} + \mathbf{z} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

Wir finden die Entwicklung

$$f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = e^{((\mathbf{y}+\mathbf{z})-\mathbf{z}_0) \nabla_{\mathbf{z}'}} f(\mathbf{y}, \mathbf{z}') \Big|_{\mathbf{z}'=\mathbf{z}_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nabla_{\mathbf{z}'}^n f(\mathbf{y}, \mathbf{z}')}{n!} (\mathbf{x} - \mathbf{z}_0)^n \Big|_{\mathbf{z}'=\mathbf{z}_0} \quad (5.3.4)$$

Schneidet man eine Taylorfunktion ab eine bestimmte Ordnung ab, so erhält man eine gute Näherung für kleine Gebiete um x_0 . Die Mehrdimensionale Taylorentwicklung wird in der Elektrodynamik unter anderem für die Multipolentwicklung benutzt.

Es ist wichtig aufzumerken, dass nicht alle Funktionen eine Taylorentwicklung besitzen, sondern nur analytische (holomorphe) Funktionen, aber dies ist in der Regel ein Thema für die Mathematikvorlesung.

5.4 Fourier Reihe und Transformation

5.5 Integrale im Euklidischen Raum

5.6 Integralsätze und Zerlegungssatz

5.7 Zerlegundssatz

Kapitel 6

Ausgewählte Herleitungen