Zusammenfassung Theoretische Physik II: Elektrodynamik

durch

Luc Jean Bert Kusters

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Elektrostatik **4**

2.1 Ladungen und Ladungsverteilungen 4
2.2 Elektrische Kraft, Elektrisches Feld und Elektrisches Potential 5
2.2.1 Coulombkraft 5
2.2.2 Das Elekrtische Feld 5
2.2.3 Das Elekrtische Potential 5
2.2.4 Die Feldgleichungen der Elektrostatik 6
2.3 Multipolentwicklung 7
2.3.1 Karthesische Multipolentwicklung 7
2.3.2 Sphärische Multipolentwicklung 8
2.4 Verhalten von Elektrostatische Felder an Randflächen 11
2.5 Lösung der Poisson Gleichung und Greensche Funktion 12
2.6 Spiegelladungsmethode 13
2.7 Elektrostatik in Materie 14

1 Einleitung

Diese Zusammenfassung wurde geschrieben um meine persönliches Verständniss zum Thema Elektrodynamik zu verbessern, denn man lernt am Meisten indem man versucht, sich in eine lehrende weise mit die Themen auseinanderzusetzen. Daneben finde ich persönlich das viele Skripte die ich gesehen habe einen unübersichtlichen überblick von der Elektrodynamik gaben, teilweise durch eine Informationsoverload und teilweise wegen oft fehlende motivierung der verschiedene Themenbereiche. Diese Zusammenfassung versucht ein bottom-up konstruierte Übersicht zu geben des Themas.

Natürlich ist eine Zusammenfassung nie so vollständig wie Skripte zur Vorlesungen oder Literatur. Auch Übungsaufgaben und Beispiele werden hier großenteils für kompaktheit aus der Zusammenfassung gelassen. Theorie verstehen und rechnen können sind immer zwei unterschiedliche Sachen, also zum vollständigen Verständniss des Themas muss man auch viele Zusammenhänge selbst Herleiten, sodass man eine intuition aufbaut wie man die Theorie in der Praxis anwendet. Dazu kann man am Besten Übungsaufgaben von der Üniversität widerholen oder aus Literatur Rechnenaufgaben machen.

Weil Deutsch nicht meine Muttersprache ist gibt es leider bestimmt welche Schreibfehler. Ich versuche sie so viel wie Möglich rauszunehmen wo ich sie sehe.

2 Elektrostatik

2.1 Ladungen und Ladungsverteilungen

Die Ursprung der EM-Kraft und EM-Felder ist die **Ladung**. Mathematisch wird die Ladungsverteilung eines Systems in Raum durch die **Ladungsdichte** gegeben. Ganz algemein kann eine Ladungsverteilung von N Punktladungen am Zeit t an den Orten $\boldsymbol{x}_i$ wie folgt beschrieben werden

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}_i(t)) \tag{2.1}$$

Wobei q_i sowohl positiv oder negativ sein kann.

Prinzipiell ist die Ladung in der Natur eine Eigenschaft von Punktteilchen, sodass es eigentlich keine kontinuierliche Ladungsverteilungen gibt. Auf makroskopische Skala ist diese Beschreibung jedoch sehr unhandlich, und ist eine Mittelung der Ladungsdichte eine wesentlich einfachere Beschreibung. Eine mögliche Definition für eine kontinuierliche Ladungsverteilung aus einer diskreten Ladungsverteilung sieht wie folgt aus

$$\rho_{\text{knt.}}(\boldsymbol{r}, t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V(\boldsymbol{r})} \int_{\Delta V(\boldsymbol{r})} \rho_{\text{dskr.}}(\boldsymbol{r}, t) d^3 r = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{Q_{\Delta V, \text{ges}}(t)}{\Delta V(\boldsymbol{r})} \tag{2.2}$$

Für Physikalische Systeme betrachtet man in der Regel immer nur beschränkte Ladungsverteilungen, das will sagen, die Ladungsdichte soll nur auf ein beschränktes Raumbereich von 0 verschieden sein. Dazu dürfen Ladungsverteilungen auch keine Pollstellen haben, d.h. nie divergieren. In manche theoretische Fälle, gibt es auch Ladungsverteilungen die nicht beschränkt sind, sondern hinreichend schnell im Unendlichen verschwinden (z.B. exponentiell unterdrückt), sodass zumindest

$$\int d^3 r \rho(\boldsymbol{r}, t) = Q_{\text{ges}} < \infty$$

gilt.

In der Elektrostatik betrachtet man erstmal ruhende Ladungsverteilungen, d.h.

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \rho(\boldsymbol{r}) \tag{2.3}$$

Es gibt also keine Ströme. Manchmal werden in der Elektrostatik auch quasi statische Prozeße betrachtet, wo die Effekte von bewegte Ladungen erstmal vernachlässicht werden. Die Elektrostatik ist somit ein Spezialfall der Elektrodynamik.

2.2 Elektrische Kraft, Elektrisches Feld und Elektrisches Potential

2.2.1 Coulombkraft

Schon in 1785 gelang Charles Augustin de Coulomb eine Beschreibung der Elektrische Kraft, welche man heutzutage dann auch die **Coulombkraft** nennt. Sie ist sehr ähnlich zum Newtons Schwerkraftsgesetz und lautet für zwei Punktladungen q_1 und q_2 an den Orten $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ wie folgt (im Vakuum)

$$\mathbf{F}_{1\to 2}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, q_1, q_2) = k q_1 q_2 \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3} \tag{2.4}$$

Oder in bekanntere Form (nicht vektoriell, Punktladungen auf Abstand r)

$$F_c = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

wobei $\mathbf{F}_{1\to 2}$ die Kraft ist, die Teilchen 1 auf Teilchen 2 ausübt. Sei $q_1 q_2 > 0$ so wirkt die Kraft abstoßend, und sei $q_1 q_2 < 0$, so wirkt sie natürlich anziehend.
Die Elektrische Kraft ist eine Zentralkraft und deswegen **konservativ**, d.h.

$$\oint \mathbf{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{s} = 0 \overset{*}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = 0 \tag{2.5}$$

(*Satz von Stokes)

Dies heißt auch, dass die Coulombkraft ein skalares Potential $V(\boldsymbol{r})$ besitzt, mit $\mathbf{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} V(\boldsymbol{r})$

2.2.2 Das Elekrtische Feld

Neben die Kraft, die nur über die Wechselwirkung zweier Teilchen definiert ist, ist es Sinnvoll das **Elektrische Feld** zu definieren. Man definiert das Elektrische Feld aus ersten Prinzipien aus der Coulombkraft.

$$\mathbf{F}(q_1, q_2, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = q_1 \left(k q_2 \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3} \right) = q_1 \mathbf{E}_2(\boldsymbol{r}_1)$$

Man verstehe dies so, dass Teilchen 1 mit Ladung q_1 sich am Ort $\boldsymbol{r}_1$ im äußeren Elektrisches Feld $\mathbf{E}_2$, erzeugt von Teilchen 2 mit Ladung q_2 das am ort r_2 liegt, befindet und daher eine Kraft spürt.

Eine Probeladung q im externen elektrischen Feld $\mathbf{E}$ spürt also die Kraft

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{r}) = q\mathbf{E}(\boldsymbol{r}) \tag{2.6}$$

Das Elektrische Feld einer Ladungsverteilung ρ_1 ist dann ein maß für die Kraft, die eine andere, äußere Ladungsverteilung ρ_2 wegen der Anwesendheid von ρ_1 spüren würde.

2.2.3 Das Elekrtische Potential

Weil die Coulombkraft ein Skalares Potential $V(\boldsymbol{r})$ besitzt, besitzt das Elektrische Feld auch ein skalares **Elektrisches Potential** $\phi(\boldsymbol{r})$ mit

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) \tag{2.7}$$

Dabei ist k die gleiche Konstante die auch im Coulombkraft auftauchte. Diese konstate ist abhängig vom gewählten Einheitssystem. In SI gilt z.B. $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ mit ϵ_0 die elekrische Permitivität des Vakuums, und in Gauß-Einheiten gilt $k = 1$

Nun wollen wir wissen, wie man aus eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$ das zugehörige elekrische Potential $\phi(\boldsymbol{r})$ bzw. elektrische Feld $\mathbf{E}(\boldsymbol{r})$ findet. Aus der Coulombkraft kann man herleiten, dass das Potential einer Punktladung Q welches im Ursprung liegt gegeben ist durch

$$\phi(\boldsymbol{r}) = k\frac{Q}{r} \quad r = |\boldsymbol{r}|$$

Denn $\mathbf{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) = k\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r$ woraus die Coulombkraft $F_c(\boldsymbol{r}) = k\frac{qQ}{r^2}$ wieder folgt. Liegt das Teilchen nicht im Ursprung, sondern am beliebigen Ort, $\boldsymbol{r}_0$ so findet man den Zusammenhang (durch eine einfache Translation)

$$\phi(\boldsymbol{r}) = k\frac{Q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}$$

Das Potential mehrere Punktteilchen ergibt sich aus der addition für die Potenziale der einzelnen Teilchen.

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_i \phi_i(\boldsymbol{r}) = k\sum_i \frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|}$$

Daraus lässt sich dann über das Limesprozeß einer Riemannsche Summe das Potential einer kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$ definieren

$$\phi(\boldsymbol{r}) = k\int d^3r' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{2.8}$$

Man kann auch direkt das E-Feld aus die Ladungsverteilung berechnen, falls man den Gradient (nach $\boldsymbol{r}$, nicht $\boldsymbol{r}'$) von der obere Formel nimmt, und findet

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{r}) = k\int d^3r' \rho(\boldsymbol{r}') \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \tag{2.9}$$

2.2.4 Die Feldgleichungen der Elektrostatik

Die Divergenz des elektrischen Feldes gibt nun die Quellendichte des Feldes. Wir wissen schon aus Erfahrung, dass die elektrische Ladung die Quelle der Coulombkraft ist und deswegen auch des elektrischen Feldes. Zusammen mit die Rotationsfreiheit der Coulombkraft, und somit auch die Rotationsfreiheit des E-Feldes folgen die beiden **Feldgleichungen der Elektrostatik**.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} &= 4\pi k\rho(\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Diese Feldgleichungen sind allgemeingültig für alle elektrostatische Felder.

Weiter folgt aus den Zusammenhänge $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ und $\boldsymbol{\nabla} \cdot E = 4\pi k\rho(\boldsymbol{r})$ die **Poisson-Gleichung**

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = -4\pi k\rho(\boldsymbol{r}) \tag{2.11}$$

Die Poisson-Gleichung ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Unter vorgabe von Randbedingungen kann man auch ohne die Ladungsverteilung zu kennen das Potential und daraus das Elekrtische Feld berechnen. Das Lösen der Poisson-Gleichung ist ein Thema für ein eigenes Kapitel.

Die Hauptaufgabe der Elektrostatik ist also das Berechnen von elektrostatische Potentiale und Felder unter vorgabe von Ladungsverteilungen oder Randbedingungen. Für Hochsymmetrische Probleme sind im Allgemeinen analytische Lösungen möglich, für schwierigere Probleme können meistens nur numerische Lösungen gefunden werden. Für uns ist erstmal das Finden von analytische Lösungen interessant um ein Grundverständnis aufzubauen. Dazu werden auch Methoden besprochen die uns analytische Näherungen geben können, wie die Multipolentwicklung.

2.3 Multipolentwicklung

Zunächst besprechen wir wie man analytische Näherungen finden kann unter angabe von komplexere Ladungsverteilungen. Das Problem ist meistens das Integrieren der

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

Term (in Kombination mit die Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r}')$). Deswegen möchten wir in der **karthesische Multipolentwicklung** diesen Term Taylor-entwickln, damit wir es in eine Reihe von Polinomiale Terme umwandeln können, weil diese Einfach(er) zu integrieren ist. Daneben gibt es noch die **Kugelfächen-Entwicklung** die sich insbesondere für Radial- bzw. Rotationssymmetrische Probleme eignet, die wir Später besprechen werden.

2.3.1 Karthesische Multipolentwicklung

Die karthesische Multipolentwicklung wird mittels eine Taylor-Entwicklung hergeleitet. Man muss dabei eine Multidimensionale Taylor-Entwicklung durchführen.

Eine allgemeine mehrdimensionale Taylorentwicklung wird gegeben durch:

$$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \big(\exp\big(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_{\boldsymbol{\beta}'}\big)f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}')\big)\Big|_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_{\boldsymbol{\beta}'})^n}{n!}f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}')\right)\Bigg|_{\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{\beta}_0}$$

Man bemerke dass ∇ einen Operator ist! Die exponential Funktion dient hier nur zur vereinfachung der Darstellung! Man Taylore nun um $\boldsymbol{r}'=0$ (dies heißt, daß $\boldsymbol{r}\gg\boldsymbol{r}'$ sodass $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\approx\boldsymbol{r}$, dafür muss $\boldsymbol{r}$ natürlich weit von der Quelle entfernt sein). Die Multipolentwicklung ist also ein **Fernfeldnäherung**.

Man definiere nun $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = f(r_1,r_2,r_3,r_1',r_2',r_3') \equiv \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ sodass bis zur 2. Ordnung die Taylorentwicklung für unsere Funktion wie folgt aussieht:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = f(\boldsymbol{r},0) + (\boldsymbol{r}'\cdot\nabla_{\bar{\boldsymbol{r}}'})f(\boldsymbol{r},\bar{\boldsymbol{r}}')\Big|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}'\cdot\nabla_{\bar{\boldsymbol{r}}'})^2 f(\boldsymbol{r},\bar{\boldsymbol{r}}')\Big|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} + \dots$$

<u>0. Ordnung:</u>

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|}\bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{1}{r}$$

<u>1. Ordnung:</u>

$$\boldsymbol{r}'\cdot\nabla_{\bar{\boldsymbol{r}}'}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|}\bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} = \frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$$

<u>2. Ordnung:</u>

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{r}}'\cdot\nabla_{\bar{\boldsymbol{r}}'})^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|}\bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} &= \frac{1}{2}\left[r_i'\frac{\partial}{\partial\bar{r}_i'}\right]\left[r_j'\frac{\partial}{\partial\bar{r}_j'}\right]\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|}\bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0}\\
&= \frac{r_i'r_j'}{2}\frac{\partial^2}{\partial_{\bar{r}_i'}\partial_{\bar{r}_j'}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|}\bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0}\\
&= \frac{r_i'r_j'}{2}\frac{\partial}{\partial_{\bar{r}_i'}}\frac{x_j}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|^3}\bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} \qquad x_j\equiv(r_j-\bar{r}_j')\\
&= \frac{r_i'r_j'}{2}\frac{\partial}{\partial_{\bar{r}_i'}}\frac{x_j}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|^3}\bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0}\\
&= \frac{r_i'r_j'}{2}\left(-\frac{3}{2}\frac{-2x_ix_j}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|^5} - \frac{\delta_{ij}}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|^3}\right)\bigg|_{\bar{\boldsymbol{r}}'=0} \qquad \text{(Produktregel)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{3r_ir_j-\delta_{ij}\boldsymbol{r}^2}{r^5}r_i'r_j'
\end{aligned}$$

Eine wichtige Bemerkung: Aus Symmetrie Grunden gilt

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{3r_ir_j-\delta_{ij}\boldsymbol{r}^2}{r^5}r'_ir'_j=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{3r'_ir'_j-\delta_{ij}\boldsymbol{r}'^2}{r^5}r_ir_j$$

Wir benutzen im allgemeinen die letzte Definition wenn wir die elektrische und magnetische Multipole berechnen. Man findet also bis zum 2. Ordnung

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\approx\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{3r'_ir'_j-\delta_{ij}\boldsymbol{r}'^2}{r^5}r_ir_j \tag{2.12}$$

Setzt man dies in die Definition für das Elektrische Potential ein, so findet man

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r})&=k\int d^3r'\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\\&\approx k\int d^3r'\rho(\boldsymbol{r}')\left(\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{3r'_ir'_j-\delta_{ij}\boldsymbol{r}'^2}{r^5}r_ir_j\right)\\&\equiv k\frac{Q}{r}+k\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}+\frac{k}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{r_ir_j}{r^5}Q_{ij}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{Monopol:}\quad &Q&=\int d^3r\rho(\boldsymbol{r})\quad\text{(Gesammtladung)}\\&\text{Dipol:}\quad &p_i&=\int d^3r\rho(\boldsymbol{r})r_i\quad \boldsymbol{p}=p_i\hat{\mathbf{e}}_i\\&\text{Quadrupol:}\quad &Q_{ij}&=\int d^3r\rho(\boldsymbol{r})\left(3r_ir_j-\delta_{ij}|\boldsymbol{r}|^2\right)\end{aligned}$$

Dabei hat die Quadrupoltensor Q_{ij} nur 5 Freiheitsgraden. Mit nur 5 Rechnungen alle (9) Quadrupol Elemente berechnen. Es gilt zwar $Q_{ij}=Q_{ji}$ (symmertrisch) und $\text{sp}(\boldsymbol{Q})=\sum_i Q_{ii}=0$ (spurfrei).

Im allgemeinen berechnet man keine weitere Ordnungen analytisch im Bachelorstudium, und zum Verständniss bringt dies auch nicht mehr (außer ärger), sodass höhere Ordnungen berechnen ein Problem ist das man lieber an Computer überlässt.

2.3.2 Sphärische Multipolentwicklung

Für Ladungsverteilungen die Radial- oder Rotationssymetrisch sind ist die Sphärische Multipolentwicklung besonders geeignet, vor allem falls man die Ladungsdichte als Linearkombination von Kugelfächen-Funktionen schreiben kann. Um die Sphärische Multipolentwicklung zu motivieren machen wir zunächst die Annahme (mit dem Seperationsansatz), dass das Winkelanteil des Potentials unabhähngig vom Radialanteil ist, also

$$\phi(\boldsymbol{r})=\phi_r(r)\phi_\Omega(\theta,\varphi)$$

Weil man (wie wir später besprechen werden) die Poisson-Gleichung mit dem gleichen Ansatz lösen wird, und die Kugelflächen-Funktionen $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ eine Eigenfunktion der Laplace Operator ist, ist es eine gute Idee um dies als Basis für eine Sphärische Entwicklung zu benutzen. Dazu formen die Kugelflächen-Funktionen unter Integration über $d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi$ eine orthonormale Basis. Es gilt die untere Zusammenhang.

$$\int d\Omega Y_{lm}(\Omega)Y^*_{l'm'}(\Omega)=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Die Entwicklung in Kugelkoordinaten ist rechnerisch etwas aufwändig, und wird hier erstmal übersprungen, aber sie wird in gute Literatur über die Elektrodynamik oft gegeben, wie z.B. in Kapitel 2.3.8 von Noltings "Grundkurs Theoretische Physik 3, Elektrodynamik". Man findet

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \tag{2.13}$$

$$\text{mit } l = 0,1,2,\ldots \text{ und } m = -l,\ldots,l$$
$$r_< = \min(r,r'),\ r_> = \max(r,r').$$

Setzt man dies in der Definition für das Elektrische Potential ein, so findet man

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &= k \int d^3r' \rho(\boldsymbol{r}') \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\
&= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \int_0^\infty dr' r'^2 \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \rho(\boldsymbol{r}') \\
&= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Omega) \left(\int_0^r dr' r'^2 \frac{r'^l}{r^{l+1}} + \int_r^\infty dr' r'^2 \frac{r^l}{r'^{l+1}} \right) \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') \rho(\boldsymbol{r}')
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Sei nun die Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r}') = \sum_{l'm'} f_{f'm'}(r') Y_{l'm'}(\Omega')$ für beliebige l' und m' (also einfach irgendeine Linearkombination von beliebige Kugelflächenfunktionen) so vereinfacht sich das Problem weiter, und kann man für eine Endliche Summe sogar exakte Lösungen finden. (Es ist nicht notwendig dass man die Ladungsdichte als Linearkombination von Kugelflächenfunktionen schreibt, nur einfacher).

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Omega) \sum_{l'm'} \left(\int_0^r dr' \frac{r'^(l+2)}{r^{l+1}} f_{l'm'}(r) + \int_r^\infty dr' \frac{r^l}{r'^{l-1}} f_{l'm'}(r) \right) \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') Y_{l'm'}(\Omega') \\
&= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Omega) \sum_{l'm'} \left(\int_0^r dr' \frac{r'^{l+2}}{r^{l+1}} f_{l'm'}(r) + \int_r^\infty dr' \frac{r^l}{r'^{l-1}} f_{l'm'}(r) \right) \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\
&= k \sum_{l'm'} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{l'm'}(\Omega) \left(\int_0^r dr' \frac{r'^{l+2}}{r^{l+1}} f_{l'm'}(r) + \int_r^\infty dr' \frac{r^l}{r'^{l-1}} f_{l'm'}(r) \right)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

d.h. alle Terme wo $l \neq l'$ oder $m \neq m'$ fallen wegen dem Kronecker-delta weg. Wir werden aber weiter wieder von eine allgemeine Ladungsdichte ausgehen.

Ist die Ladungsdichte nun nach Innen oder Nach außen beschränkt, dann kann man $r_>$ und $r_<$ eindeutig als r oder r' festlegen in bestimmte Raumbereiche. Hat man z.B. eine geladene Kugelschale wobei die Ladungsdichte, noch von θ und φ abhängen darf, so kann man das Potential im Inneren mit nur dem $\int_r^\infty dr$ Integral beschreiben, und dem Außenraum mit durch das $\int_0^r dr$ Integral. Es macht manchmal sogar kein Sinn die Lösungen der beide Raumbereiche gleichzeitig zu berechnen weil die Lösung für das Innere Raumbereich im äußeren Raumbereich divergiren kann oder umgekehrt. Wir Teilen hier also zunächst die Raumgebiete auf und finden Multipolmomente für dem innen und außen Räume $q_<^{lm}$ und $q_>^{lm}$

Im Innenraum ($r \approx 0$):

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Omega) \int_0^r dr' \frac{r^l}{r'^{l-1}} \int_\Omega d\Omega' \rho(\boldsymbol{r}) \\
&= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} r^l q_<^{lm} Y_{lm}(\Omega)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\text{mit } q_<^{lm} = \int_0^\infty dr' r'^{1-l} \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}(\Omega')\rho(\boldsymbol{r})$$

Im Außenraum ($r \gg 0$):

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{r}) &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Omega) \int_0^r dr' \frac{r'^{l+2}}{r^{l+1}} \int_\Omega d\Omega' \rho(\boldsymbol{r}) \\ &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_>^{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\Omega) \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\text{mit } q_>^{lm} = \int_0^\infty dr' r'^{l+2} \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}(\Omega')\rho(\boldsymbol{r})$$

2.4 Verhalten von Elektrostatische Felder an Randflächen

2.5 Lösung der Poisson Gleichung und Greensche Funktion

2.6 Spiegelladungsmethode

2.7 Elektrostatik in Materie