

# Zusammenfassung Theoretische Physik II: Elektrodynamik

durch

**Luc Jean Bert Kusters**



## 0.1 Einleitung

Diese Zusammenfassung wurde geschrieben um meine persönliches Verständniss zum Thema Elektrodynamik zu verbessern, denn man lernt am Meisten indem man versucht, sich in eine lehrende weise mit die Themen auseinanderzusetzen. Daneben finde ich persönlich das viele Skripte die ich gesehen habe einen unübersichtlichen überblick von der Elektrodynamik gaben, teilweise durch eine Informationsoverload und teilweise wegen oft fehlende motivierung der verschiedene Themenbereiche. Diese Zusammenfassung versucht ein bottom-up konstruierte Übersicht zu geben des Themas.

Natürlich ist eine Zusammenfassung nie so vollständig wie Skripte zur Vorlesungen oder Literatur. Auch Übungsaufgaben und Beispiele werden hier großenteils für kompaktheit aus der Zusammenfassung gelassen. Theorie verstehen und rechnen können sind immer zwei unterschiedliche Sachen, also zum vollständigen Verständniss des Themas muss man auch viele Zusammenhänge selbst Herleiten, sodass man eine intuition aufbaut wie man die Theorie in der Praxis anwendet. Dazu kann man am Besten Übungsaufgaben von der Universität wiederholen oder aus Literatur Rechenaufgaben machen.

Weil Deutsch nicht meine Muttersprache ist gibt es leider bestimmt welche Schreibfehler. Ich versuche sie so viel wie Möglich rauszunehmen wo ich sie sehe.



# Inhaltsverzeichnis

0.1	Einleitung . . . . .	iii
<b>1</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>1</b>
1.1	Ladungen und Ladungsverteilungen . . . . .	3
1.2	Elektrische Kraft, Elektrisches Feld und Elektrisches Potential . . . . .	4
1.3	Multipolentwicklung . . . . .	7
1.4	Verhalten von Elektrostatik Felder an Randflächen . . . . .	11
1.5	Lösung der Poisson Gleichung und Greensche Funktion . . . . .	13
1.6	Elektrostatische Energie . . . . .	16
1.7	Elektrostatik in Materie . . . . .	17
1.8	Formelzettel . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Magnetostatik</b>	<b>21</b>
2.1	Stromdichten und Kontinuitätsgleichung . . . . .	22
2.2	Magnetfeld und Biot-Savart-Gesetz . . . . .	23
2.3	Multipolentwicklung: Magnetischer Dipol . . . . .	25
2.4	Magnetostatik in Materie . . . . .	26
2.5	Randwertprobleme in der Magnetostatik . . . . .	27
2.6	Ohmsches Gesetz . . . . .	28
2.7	Formelzettel . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Elektrodynamik</b>	<b>31</b>
3.1	Dynamische Ergänzung der Maxwellgleichungen . . . . .	32
3.2	Wellengleichung der Felder . . . . .	34
3.3	Energie des Elektromagnetischen Feldes . . . . .	38
3.4	Wellengleichung der Potentiale . . . . .	39
3.5	Bewegte und Beschleunigte Ladungen . . . . .	40
3.6	Wellenleiter . . . . .	41
3.7	Wellenpaketen . . . . .	42
3.8	Elektrodynamik in Materie . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Relativisitische Elektrodynamik</b>	<b>45</b>
4.1	Koordinaten Transformationen . . . . .	46
4.2	Spezielles Relativitätsprinzip und Lorentz Transformation . . . . .	47
4.3	Relativistische Elektrodynamik . . . . .	48
4.4	Relativistische Wirkung . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>51</b>
5.1	Dirac $\delta$ -Distribution . . . . .	52
5.2	Mehrdimensionale Ableitung: Der Nabla Operator . . . . .	54
5.3	Taylor Entwicklung . . . . .	55
5.4	Fourier Reihe und Transformation . . . . .	56
5.5	Integrale im Euklidischen Raum . . . . .	57
5.6	Integralsätze und Zerlegungssatz . . . . .	58

5.7 Zerlegundssatz . . . . .	59
<b>6 Ausgewählte Herleitungen</b>	<b>61</b>

# Kapitel 1

## Elektrostatik

<b>1.1</b>	<b>Ladungen und Ladungsverteilungen</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Elektrische Kraft, Elektrisches Feld und Elektrisches Potential</b>	<b>4</b>
1.2.1	Coulombkraft	4
1.2.2	Das Elektrische Feld	4
1.2.3	Das Elektrische Potential	4
1.2.4	Die Feldgleichungen der Elektrostatik	5
1.2.5	Poisson Gleichung	5
1.2.6	Die Hauptaufgabe der Elektrostatik	6
<b>1.3</b>	<b>Multipolentwicklung</b>	<b>7</b>
1.3.1	Kartesische Multipolentwicklung	7
1.3.2	Sphärische Multipolentwicklung	8
<b>1.4</b>	<b>Verhalten von Elektrostatische Felder an Randflächen</b>	<b>11</b>
1.4.1	Randflächen und Randkurven	11
1.4.2	Bedeutung der Sätze von Gauß und Stokes für Elektrostatische Felder	11
1.4.3	Anwendung auf Randflächen	11
<b>1.5</b>	<b>Lösung der Poisson Gleichung und Greensche Funktion</b>	<b>13</b>
1.5.1	die Poissongleichung	13
1.5.2	Die Greensche Identität und die Greensche Funktion	13
1.5.2.1	1. Greensche Identität	13
1.5.2.2	2. Greensche Identität	13
1.5.2.3	3. Greensche Identität	14
1.5.3	Einige Praktische Lösungswege	15
1.5.3.1	Spiegelladungsmethode	15
1.5.3.2	Separationsansatz	15
1.5.3.3	Allgemeine Separationsansatz in Kugelkoordinaten	15
<b>1.6</b>	<b>Elektrostatische Energie</b>	<b>16</b>
1.6.1	Energie von Ladungen im Externen Feld	16
1.6.2	Feldenergie und Selbstinteraction	16
<b>1.7</b>	<b>Elektrostatik in Materie</b>	<b>17</b>
1.7.1	Materialarten	17
1.7.2	Polarisation und Dielektrische Verschiebung	17
1.7.3	Randbedingungen an Dielektrika	18
<b>1.8</b>	<b>Formelzettel</b>	<b>19</b>
1.8.1	Ladungen und Ladungsverteilungen	19
1.8.2	Elektrische Kraft, Elektrisches Feld und Elektrisches Potential	19
1.8.3	Multipolentwicklung	19

1.8.4	Verhalten von Elektrostatische Felder an Randflächen . . . . .	20
1.8.5	Lösung der Poisson Gleichung und Greensche Funktion . . . . .	20
1.8.6	Elektrostatische Energie . . . . .	20
1.8.7	Elektrostatik in Materie . . . . .	20



## 1.1 Ladungen und Ladungsverteilungen

Die Ursprung der EM-Kraft und EM-Felder ist die **Ladung**. Mathematisch wird die Ladungsverteilung eines Systems in Raum durch die **Ladungsdichte** gegeben. Ganz allgemein kann eine Ladungsverteilung von  $N$  Punktladungen am Zeit  $t$  an den Orten  $\mathbf{x}_i$  wie folgt beschrieben werden

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_i(t)) \quad (1.1.1)$$

Wobei  $q_i$  sowohl positiv oder negativ sein kann.

Prinzipiell ist die Ladung in der Natur eine Eigenschaft von Punktteilchen, sodass es eigentlich keine kontinuierliche Ladungsverteilungen gibt. Auf makroskopische Skala ist diese Beschreibung jedoch sehr unhandlich, und ist eine Mittelung der Ladungsdichte eine wesentlich einfachere Beschreibung. Eine mögliche Definition für eine kontinuierliche Ladungsverteilung aus einer diskreten Ladungsverteilung sieht wie folgt aus

$$\rho_{\text{knt.}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta V(\mathbf{r})} \int_{\Delta V(\mathbf{r})} d^3 r' \rho_{\text{diskr}}(\mathbf{r}') = \frac{1}{\Delta V(\mathbf{r})} \sum_{q_i \in \Delta V(\mathbf{r})} q_i \quad (1.1.2)$$

wobei man das Volumenkästchen  $\Delta V$  um  $\mathbf{r}$  zentriert kontinuierlich verschieben kann, und annimmt, daß es viele Ladungen gibt, sodaß die Kontinuierliche Ladungsverteilung praktisch glatt wird.

Für Physikalische Systeme betrachtet man in der Regel immer nur beschränkte Ladungsverteilungen, das will sagen, die Ladungsdichte soll nur auf ein beschränktes Raumbereich von 0 verschieden sein. Dazu dürfen Ladungsverteilungen auch keine Pollstellen haben, d.h. nie divergieren. In manche theoretische Fälle, gibt es auch Ladungsverteilungen die nicht beschränkt sind, sondern hinreichend schnell im Unendlichen verschwinden (z.B. exponentiell unterdrückt), sodass zumindest

$$\int d^3 r \rho(\mathbf{r}, t) = Q_{\text{ges}} < \infty$$

gilt.

In der Elektrostatik betrachtet man erstmal ruhende Ladungsverteilungen, d.h.

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) \quad (1.1.3)$$

Es gibt also keine Ströme. Manchmal werden in der Elektrostatik auch quasi statische Prozesse betrachtet, wo die Effekte von bewegte Ladungen erstmal vernachlässicht werden. Die Elektrostatik ist somit ein Spezialfall der Elektrodynamik.

## 1.2 Elektrische Kraft, Elektrisches Feld und Elektrisches Potential

### 1.2.1 Coulombkraft

Schon in 1785 gelang Charles Augustin de Coulomb eine Beschreibung der Elektrische Kraft, welche man heutzutage dann auch die **Coulombkraft** nennt. Sie ist sehr ähnlich zum Newtons Schwerkraftsgesetz und lautet für zwei Punktladungen  $q_1$  und  $q_2$  an den Orten  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  wie folgt (im Vakuum)

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, q_1, q_2) = k q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (1.2.1)$$

Oder in bekanntere Form (nicht vektoriell, Punktladungen auf Abstand  $r$ )

$$F_c = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

wobei  $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$  die Kraft ist, die Teilchen 1 auf Teilchen 2 ausübt. Sei  $q_1 q_2 > 0$  so wirkt die Kraft abstoßend, und sei  $q_1 q_2 < 0$ , so wirkt sie anziehend. Diese Gleichung wird auch das **Coulomb-Gesetz** genannt. Dabei ist  $k$  eine Konstante die vom Einheitensystem abhängt. In SI gilt z.B.  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  mit  $\epsilon_0$  die *elektrische Permittivität* des Vakuums. In Gauß-Einheiten gilt  $k = 1$ .

Die Elektrische Kraft ist eine Zentralkraft und deswegen **konservativ**, d.h.

$$\oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (1.2.2)$$

(\*Satz von Stokes)

Dies heißt auch, dass die Coulombkraft ein skalares Potential  $V(\mathbf{r})$  besitzt, mit  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$

### 1.2.2 Das Elektrische Feld

Neben die Kraft, die nur über die Wechselwirkung zweier Teilchen definiert ist, ist es sinnvoll das **Elektrische Feld** zu definieren. Man definiert das Elektrische Feld aus ersten Prinzipien aus der Coulombkraft.

$$\mathbf{F}(q_1, q_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = q_1 \left( k q_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) = q_1 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1)$$

Man verstehe dies so, dass Teilchen 1 mit Ladung  $q_1$  sich am Ort  $\mathbf{r}_1$  im äußeren elektrisches Feld  $\mathbf{E}_2$ , erzeugt von Teilchen 2 mit Ladung  $q_2$  welches am Ort  $\mathbf{r}_2$  liegt, befindet und daher eine Kraft spürt.

Eine Probeladung  $q$  im externen elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  spürt also die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.2.3)$$

Das Elektrische Feld einer Ladungsverteilung  $\rho_1$  ist dann ein Maß für die Kraft, die eine andere, äußere Ladungsverteilung  $\rho_2$  wegen der Anwesenheit von  $\rho_1$  spüren würde.

### 1.2.3 Das Elektrische Potential

Weil die Coulombkraft ein Skalares Potential  $V(\mathbf{r})$  besitzt, besitzt das Elektrische Feld auch ein skalares **Elektrisches Potential**  $\phi(\mathbf{r})$  mit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (1.2.4)$$

Nun wollen wir wissen, wie man aus eine beliebige Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$  das zugehörige elektrische Potential  $\phi(\mathbf{r})$  bzw. elektrische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  findet. Aus der Coulombkraft kann man herleiten, dass das Potential einer Punktladung  $Q$  welches im Ursprung liegt gegeben ist durch

$$\phi(\mathbf{r}) = k \frac{Q}{r} \quad r = |\mathbf{r}|$$

Denn  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = k\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r$ , woraus die Coulombkraft  $F_c(\mathbf{r}) = k\frac{qQ}{r^2}$  wieder folgt. Liegt das Teilchen nicht im Ursprung, sondern am beliebigen Ort,  $\mathbf{r}_0$  so findet man den Zusammenhang (durch eine einfache Translation)

$$\phi(\mathbf{r}) = k\frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

Das Potential mehrere Punktteilchen ergibt sich aus der Addition für die Potentiale der einzelnen Teilchen.

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_i \phi_i(\mathbf{r}) = k \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

Daraus lässt sich dann über das Limesprozeß einer Riemannsche Summe das Potential einer kontinuierlichen Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$  definieren.

$$\phi(\mathbf{r}) = k \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.2.5)$$

Man kann auch direkt das E-Feld aus der Ladungsverteilung berechnen, falls man den Gradient (nach  $\mathbf{r}$ , nicht  $\mathbf{r}'$ ) von der obere Formel nimmt, und findet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.2.6)$$

Das elektrische Potential ist aber nicht eindeutig festgelegt, denn die **Eichtransformation**

$$\phi'(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) + \phi_0 \quad \phi_0 = \text{const.} \quad (1.2.7)$$

läßt das Elektrische Feld invariant (denn  $\nabla\phi_0 = 0$ ). Hierdurch wird im Allgemeinen das Potential nur als hilfreiches mathematisches Hilfsmittel gesehen, obwohl quantenmechanische Effekte wie das Aharanov-Bohm-Effekt auch darauf weisen können, dass das Potential auch ein physikalisches Feld ist. Dies ist aber erstmal nicht wichtig für die Einführung in der Elektrodynamik. Meistens wird  $\phi_0$  so gewählt, sodass  $\phi(\mathbf{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , dies ist aber nicht notwendig.

### 1.2.4 Die Feldgleichungen der Elektrostatik

Die Divergenz des elektrischen Feldes gibt nun die Quellendichte des Feldes. Wir wissen schon aus Erfahrung, dass die elektrische Ladung die Quelle der Coulombkraft ist und deswegen auch des elektrischen Feldes. Die genaue Zusammenhang zwischen der Divergenz und der Ladungsdichte folgt aus dem Zerlegungssatz. Zusammen mit der Rotationsfreiheit der Coulombkraft, und somit auch der Rotationsfreiheit des E-Feldes folgen die beiden **Feldgleichungen der Elektrostatik**.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi k \rho(\mathbf{r}) & (\text{inhomogen}) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 & (\text{homogen}) \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Diese Feldgleichungen sind allgemeingültig für alle elektrostatische Felder.

### 1.2.5 Poisson Gleichung

Weiter folgt aus den Zusammenhängen  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  und  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k \rho(\mathbf{r})$  die **Poisson Gleichung**

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi k \rho(\mathbf{r}) \quad (1.2.9)$$

Die Poisson-Gleichung ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Unter Vorgabe von **Randbedingungen** (das geometrische Analogon zu Anfangsbedingungen von DGLS in der Mechanik) sind die Gleichungen 1.2.5 und 1.2.6 meistens nicht mehr ausreichend, um korrekte Lösungen zu finden. Wir werden später sehen, dass sie nur in dem Spezialfall von verschwindenden Randbedingungen gültig sind, und die allgemeine Zusammenhänge formaler aus der Poisson-Gleichung herleiten. Das Lösen der Poisson-Gleichung ist aber ein Thema für ein eigenes Kapitel.

### 1.2.6 Die Hauptaufgabe der Elektrostatik

Die Hauptaufgabe der Elektrostatik ist also das Berechnen von elektrostatische Potentiale und Felder unter vorgabe von Ladungsverteilungen und Randbedingungen. Für Hochsymmetrische Probleme sind im Allgemeinen analytische Lösungen möglich, für schwierigere Probleme können meistens nur numerische Lösungen gefunden werden. Für uns ist erstmal das Finden von analytische Lösungen interessant um ein Grundverständnis aufzubauen. Dazu werden auch Methoden besprochen die uns analytische Näherungen geben können, wie die Multipolentwicklung.

## 1.3 Multipolentwicklung

Zunächst besprechen wir wie man analytische Näherungen finden kann unter Angabe von komplexere Ladungsverteilungen. Das Problem ist meistens das Integrieren der

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Term (in Kombination mit die Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r}')$ ). Deswegen möchten wir in der **karthesische Multipolentwicklung** diesen Term Taylor-entwickeln, damit wir es in eine Reihe von Polinomialen Termen umwandeln können, weil diese Einfach(er) zu integrieren ist. Daneben gibt es noch die **Kugelflächen-Entwicklung** die sich insbesondere für Radial- bzw. Rotationssymmetrische Probleme eignet, die wir Später besprechen werden.

### 1.3.1 Karthesische Multipolentwicklung

Die karthesische Multipolentwicklung wird mittels einer Taylor-Entwicklung hergeleitet. Man muss dabei eine Multidimensionale Taylor-Entwicklung durchführen.

Eine allgemeine mehrdimensionale Taylorentwicklung wird gegeben durch:

$$f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\beta}'}) f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}')) \Big|_{\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{\beta}_0} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\beta}'})^n}{n!} f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}') \right) \Big|_{\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{\beta}_0}$$

Man bemerke dass  $\nabla$  einen Operator ist! Die exponential Funktion dient hier nur zur Vereinfachung der Darstellung! Man Taylore nun um  $\mathbf{r}' = 0$  (dies heißt, daß  $\mathbf{r} \gg \mathbf{r}'$  sodass  $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \approx \mathbf{r}$ , dafür muss  $\mathbf{r}$  natürlich weit von der Quelle entfernt sein). Die Multipolentwicklung ist also ein **Fernfeldnäherung**.

Man definiere nun  $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = f(r_1, r_2, r_3, r'_1, r'_2, r'_3) \equiv \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  sodass bis zur 2. Ordnung die Taylorentwicklung für unsere Funktion wie folgt aussieht:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = f(\mathbf{r}, 0) + (\mathbf{r}' \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}'}) f(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}') \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} + \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}'})^2 f(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}') \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} + \dots$$

0. Ordnung:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|} \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{r}$$

1. Ordnung:

$$\mathbf{r}' \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|} \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} = \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

2. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{r}}' \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}'})^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|} \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} &= \frac{1}{2} \left[ r'_i \frac{\partial}{\partial \bar{r}'_i} \right] \left[ r'_j \frac{\partial}{\partial \bar{r}'_j} \right] \frac{1}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|} \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} \\ &= \frac{r'_i r'_j}{2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}'_i \partial \bar{r}'_j} \frac{1}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|} \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} \\ &= \frac{r'_i r'_j}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}'_i} \frac{x_j}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|^3} \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} \quad x_j \equiv (r_j - \bar{r}'_j) \\ &= \frac{r'_i r'_j}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}'_i} \frac{x_j}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|^3} \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} \\ &= \frac{r'_i r'_j}{2} \left( -\frac{3}{2} \frac{-2x_i x_j}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|^5} - \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|^3} \right) \Big|_{\bar{\mathbf{r}}'=0} \quad (\text{Produktregel}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} r^2}{r^5} r'_i r'_j \end{aligned}$$

Eine wichtige Bemerkung: Aus Symmetrie Grunden gilt

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} \mathbf{r}^2}{r^5} r'_i r'_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3r'_i r'_j - \delta_{ij} \mathbf{r}'^2}{r'^5} r_i r_j$$

Wir benutzen im allgemeinen die letzte Definition wenn wir die elektrische und magnetische Multipole berechnen. Man findet also bis zum 2. Ordnung

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3r'_i r'_j - \delta_{ij} \mathbf{r}'^2}{r^5} r_i r_j \quad (1.3.1)$$

Setzt man dies in die Definition für das Elektrische Potential ein, so findet man

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= k \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &\approx k \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3r'_i r'_j - \delta_{ij} \mathbf{r}'^2}{r^5} r_i r_j \right) \\ &\equiv k \frac{Q}{r} + k \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{k}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{r_i r_j}{r^5} Q_{ij} \end{aligned}$$

$$\text{Monopol:} \quad Q = \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) \quad (\text{Gesamtladung})$$

$$\text{Dipol:} \quad p_i = \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) r_i \quad \mathbf{p} = p_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

$$\text{Quadrupol:} \quad Q_{ij} = \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) (3r_i r_j - \delta_{ij} |\mathbf{r}|^2)$$

Dabei hat die Quadrupoltensor  $Q_{ij}$  nur 5 Freiheitsgraden. Mit nur 5 Rechnungen alle (9) Quadrupol Elemente berechnen. Es gilt zwar  $Q_{ij} = Q_{ji}$  (symmetrisch) und  $\text{sp}(\mathbf{Q}) = \sum_i Q_{ii} = 0$  (spurfrei).

Im allgemeinen berechnet man keine weitere Ordnungen analytisch im Bachelorstudium, und zum Verständniss bringt dies auch nicht mehr (außer ärger), sodass höhere Ordnungen berechnen ein Problem ist das man lieber an Computer überlässt.

### 1.3.2 Sphärische Multipolentwicklung

Für Ladungsverteilungen die Radial- oder Rotationssymmetrisch sind ist die Sphärische Multipolentwicklung besonders geeignet, vor allem falls man die Ladungsdichte als Linearkombination von Kugelflächen-Funktionen schreiben kann. Um die Sphärische Multipolentwicklung zu motivieren machen wir zunächst die Annahme (mit dem Separationsansatz), dass das Winkelanteil des Potentials unabhängig vom Radialanteil ist, also

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_r(r) \phi_\Omega(\theta, \varphi)$$

Weil man (wie wir später besprechen werden) die Poisson-Gleichung mit dem gleichen Ansatz lösen wird, und die Kugelflächen-Funktionen  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  eine Eigenfunktion der Laplace Operator ist, ist es eine gute Idee um dies als Basis für eine Sphärische Entwicklung zu benutzen. Dazu formen die Kugelflächen-Funktionen unter Integration über  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  eine orthonormale Basis. Es gilt die untere Zusammenhang.

$$\int d\Omega Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}^*(\Omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Die Entwicklung in Kugelkoordinaten ist rechnerisch etwas aufwändig, und wird hier erstmal übersprungen, aber sie wird in gute Literatur über die Elektrodynamik oft gegeben, wie z.B. in Kapitel 2.3.8 von Nolting's "Grundkurs Theoretische Physik 3, Elektrodynamik". Man findet

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \quad (1.3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } l = 0, 1, 2, \dots \text{ und } m = -l, \dots, l \\ r_{<} = \min(r, r'), \quad r_{>} = \max(r, r'). \end{aligned}$$

Setzt man dies in der Definition für das Elektrische Potential ein, so findet man

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= k \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \int_0^\infty dr' r'^2 \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \rho(\mathbf{r}') \\ &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Omega) \left( \int_0^r dr' r'^2 \frac{r'^l}{r^{l+1}} + \int_r^\infty dr' r'^2 \frac{r'^l}{r'^{l+1}} \right) \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') \rho(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Sei nun die Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r}') = \sum_{l'm'} f_{l'm'}(r') Y_{l'm'}(\Omega')$  für beliebige  $l'$  und  $m'$  (also einfach irgendeine Linearkombination von beliebige Kugelflächenfunktionen) so vereinfacht sich das Problem weiter, und kann man für eine Endliche Summe sogar exakte Lösungen finden. (Es ist nicht notwendig dass man die Ladungsdichte als Linearkombination von Kugelflächenfunktionen schreibt, nur einfacher).

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Omega) \sum_{l'm'} \left( \int_0^r dr' r'^{l'+2} \frac{r'^l}{r^{l+1}} f_{l'm'}(r) + \int_r^\infty dr' r'^{l'+2} \frac{r'^l}{r'^{l+1}} f_{l'm'}(r) \right) \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') Y_{l'm'}(\Omega') \\ &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Omega) \sum_{l'm'} \left( \int_0^r dr' r'^{l'+2} \frac{r'^l}{r^{l+1}} f_{l'm'}(r) + \int_r^\infty dr' r'^{l'+2} \frac{r'^l}{r'^{l+1}} f_{l'm'}(r) \right) \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\ &= k \sum_{l'm'} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{l'm'}(\Omega) \left( \int_0^r dr' r'^{l'+2} \frac{r'^l}{r^{l+1}} f_{l'm'}(r) + \int_r^\infty dr' r'^{l'+2} \frac{r'^l}{r'^{l+1}} f_{l'm'}(r) \right) \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

d.h. alle Terme wo  $l \neq l'$  oder  $m \neq m'$  fallen wegen dem Kronecker-delta weg. Wir werden aber weiter wieder von eine allgemeine Ladungsdichte ausgehen.

Ist die Ladungsdichte nun nach Innen oder Nach außen beschränkt, dann kann man  $r_{>}$  und  $r_{<}$  eindeutig als  $r$  oder  $r'$  festlegen in bestimmte Raumbereiche. Hat man z.B. eine geladene Kugelschale wobei die Ladungsdichte, noch von  $\theta$  und  $\varphi$  abhängen darf, so kann man das Potential im Inneren mit nur dem  $\int_r^\infty dr$  Integral beschreiben, und dem Außenraum mit durch das  $\int_0^r dr$  Integral. Es macht manchmal sogar kein Sinn die Lösungen der beide Raumbereiche gleichzeitig zu berechnen weil die Lösung für das Innere Raumbereich im äußeren Raumbereich divergieren kann oder umgekehrt. Wir Teilen hier also zunächst die Raumgebiete auf und finden Multipolmomente für dem innen und außen Räume  $q_{<}^{lm}$  und  $q_{>}^{lm}$

Im Innenraum ( $r \approx 0$ ):

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Omega) \int_0^r dr' r'^{l-1} \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') \rho(\mathbf{r}') \\ &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} r^l q_{<}^{lm} Y_{lm}(\Omega) \\ \text{mit } q_{<}^{lm} &= \int_0^\infty dr' r'^{1-l} \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') \rho(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Im Außenraum ( $r \gg 0$ ):

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\Omega) \int_0^r dr' r'^{l+2} \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') \rho(\mathbf{r}') \\ &= k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_{>}^{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\Omega) \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

$$\text{mit } q_{>}^{lm} = \int_0^\infty dr' r'^{l+2} \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') \rho(\mathbf{r}')$$



## 1.4 Verhalten von Elektrostatische Felder an Randflächen

In diesem Kapitel überlegen wir uns, wie Elektrische Felder sich an **Randflächen** verhalten. Dabei ist es wichtig dass wir die aus den Vektorkalkulus folgenden **Satz von Gauß** und **Satz von Stokes** näher betrachten.

### 1.4.1 Randflächen und Randkurven

Eine **Randfläche** ist ganz allgemein eine Fläche im Raum die Zwei Raumgebiete trennt, z.B. trennt die Randfläche einer Kugel das innere der Kugel von dem Außenraum. Man kann das Vakuum unendlich viele triviale Randflächen zuordnen. Was interessanter ist, sind Randflächen zwischen z.B. unterschiedliche Medien wie Vakuum, metallische Leiter, (un)geladene Dielektrika oder Ränder von Ladungsverteilungen.

Eine **Randkurve** ist eine Kurve die eine Oberfläche abschließt.

### 1.4.2 Bedeutung der Sätze von Gauß und Stokes für Elektrostatische Felder

Zunächst wiederholen wir wie die Sätze mathematisch ganz allgemein aussehen.

Sei  $V \subset \mathbb{R}^3$  eine Kompakte Menge mit glattem Rand  $\partial V$  mit ein nach äußeren orientierten Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}$  bzw. Flächen Element  $d\mathbf{A} = \mathbf{n}dA$ . Sei ferner das Vektorfeld  $\mathbf{F}$  stetig differenzierbar auf einer offenen Menge  $U$  mit  $V \subseteq U$  so gilt

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{Satz von Gauß} \quad (1.4.1)$$

Der Satz von Gauß besagt daß die Quellendichte (Divergenz) eines Vektorfeldes  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  integriert über ein Volumen  $V$  proportional zur Flußintegrals des Feldes durch der Randfläche des Volumen  $\partial V$ .

Sei  $A \subset \mathbb{R}^2$  eine einfach zusammenhängende Fläche mit glattem Randkurve  $\partial A$  (die gegen dem Urzeigersinn durchlaufen wird beim Integrieren). Sei ferner das Vektorfeld  $\mathbf{F}$  stetig differenzierbar auf einer offenen Menge  $U$  mit  $A \subseteq U$  so gilt

$$\int_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{Satz von Stokes} \quad (1.4.2)$$

Der Satz von Stokes besagt daß das Flußintegral über die Wirbeldichte (Rotation) eines Vektorfeldes  $\nabla \times \mathbf{F}$  über eine Fläche  $A$  proportional zur Kurvenintegral entlang die Randkurve der Fläche  $\partial A$

In der Regel verhalten physikalische Felder sich immer sehr schön, sodass wir uns über die Stetige Differenzierungsbedingung erstmal keine gedanken machen müssen. Die Sätze von Gauß und Stokes schränken unsere zu betrachten Volumina und Flächen zwar ein, aber nur sehr exotische Objekte erfüllen die Bedingungen nicht, sodaß wir uns in der Regel auch keine Gedanken machen müssen ob die mathematische Bedingungen erfüllt sind.

Zusammen mit die Feldgleichungen der Elektrostatik und die obere Sätze Folgen direkt die Folgende Aussagen

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \int_V \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{E})}_{4\pi k\rho(\mathbf{r})} dV = 4\pi k Q_{V,\text{ges}} \\ \oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_A \underbrace{(\nabla \times \mathbf{E})}_0 \cdot d\mathbf{A} = 0 \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

### 1.4.3 Anwendung auf Randflächen

Man kann nun eine allgemeine Randfläche im Raum betrachten. Legt man ein kleines Kästchen (Volumen) auf der Rand, zentriert um dem Rand — also ein teil des Kästchens liegt an eine Seite der Randfläche, und ein Teil an der andere Seite — und läßt man dieses Kästchen nun immer kleiner werden, so betrachtet man

annähernd zu die Randfläche selbst. Im limes von  $V \rightarrow 0$  findet man sogar lokale Punkte auf der Oberfläche und gilt

$$\lim_{V \rightarrow 0} \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 4\pi k\sigma(\mathbf{r})$$

Wobei  $\sigma(\mathbf{r})$  die lokale Flächenladungsdichte auf der Randfläche ist.

Analog kann man eine infinitesimale Flächenstückchen — die orthogonal auf der Randfläche steht, mit ein Teil an einer Seite der Randfläche und ein Teil auf der andere Seite — um die Randfläche zentrieren. Im limes von  $A \rightarrow 0$  findet man

$$\lim_{A \rightarrow 0} \oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$$

Es folgen die **Randflächenbedingungen**

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} &= 4\pi k\sigma(\mathbf{r}) \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Dies bedeutet weiter, daß die orthogonalkomponente  $\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$  (in der Anwesenheit einer Flächenladungsdichte) einen Sprung um  $4\pi k\sigma(\mathbf{r})$  macht, während die tangentialkomponente  $\mathbf{E}_\parallel = \mathbf{E} \times \mathbf{n}$  immer stetig ist.

## 1.5 Lösung der Poisson Gleichung und Greensche Funktion

In diesem Kapitel besprechen wir wie man die Poisson gleichung lösen kann.

### 1.5.1 die Poissongleichung

Wie wir schon in Kapitel 1.2.4 hergeleitet haben gilt in der Elektrostatik die **Poissongleichung**

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi k\rho(\mathbf{r})$$

Die aufgabe besteht nun darin,  $\phi$  zu finden. Die Poissongleichung stellt eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung dar, die gelöst werden kann unter vorgebe von **Randbedingungen**.

Praktische Lösungsmethoden sind meistens abhängig von die Geometrie des zu lösenden Problems und die vorgegebene Randbedingungen. Zunächst besprechen wir aber die Allgemeinste Lösung der Poissongleichung, über die **Greensche Funktion** der Poissongleichung.

### 1.5.2 Die Greensche Identität und die Greensche Funktion

Für das Poissonproblem gibt es 3 wichtige Identitäten, woraus man die allgemeine Lösung der Poissongleichung finden kann mittels die Greensche funktion. Zunächst betrachten wir die allgemeine mathematische Identitäten und wenden sie danach Spezifisch für das Poisson Problem an.

#### 1. Greensche Identität

Gäbe es ein Vektorfeld  $\mathbf{F} = \psi\nabla\varphi \equiv \psi\mathbf{\Gamma}$  mit  $\psi$  und  $\varphi$  beliebige Skalarfelder mit  $\psi \in C^1$  und  $\varphi \in C^2$  (d.h. 1 bzw. 2 mal stetig diffbar) so folgt aus dem Satz von Gauß

$$\int_V \underbrace{(\psi\Delta\varphi + \nabla\psi\nabla\varphi)}_{\nabla\cdot\mathbf{F}} dV = \oint_{\partial V} (\psi\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{A} \quad (1.5.1)$$

wobei man beachtet daß

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\psi\mathbf{\Gamma}) = \nabla\psi\mathbf{\Gamma} + \psi\nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = \nabla\psi\nabla\varphi + \psi\Delta\varphi$$

Die erste Greensche Identität ist also einen Spezialfall des Gauß Gesetzes

#### 2. Greensche Identität

Sei nun auch noch  $\psi \in C^2$ , und gäbe es ein weiteres  $\epsilon \in C^1$  sodass man das Vektorfeld  $\mathbf{F} = \psi(\epsilon\nabla\psi) - \varphi(\epsilon\nabla\varphi)$  definiert folgt wieder unter Anwendung der Satz von Gauß.

$$\int_V \underbrace{\psi\nabla \cdot (\epsilon\nabla\varphi) - \varphi\nabla \cdot (\epsilon\nabla\psi)}_{\nabla\cdot\mathbf{F}} dV = \oint_{\partial V} \epsilon(\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi) \cdot d\mathbf{A} \quad (1.5.2)$$

wobei man beachtet daß

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\psi(\epsilon\nabla\varphi) - \varphi(\epsilon\nabla\psi)) = \underbrace{(\nabla\psi)(\epsilon\nabla\varphi)}_{\nabla\psi\nabla\varphi} + \psi\nabla \cdot (\epsilon\nabla\varphi) - \underbrace{(\nabla\varphi)(\epsilon\nabla\psi)}_{\nabla\varphi\nabla\psi} - \varphi\nabla \cdot (\epsilon\nabla\psi)$$

Wir sind erstmal interessiert an dem Spezialfall wo  $\epsilon = 1$  ist, sodass folgt

$$\int_V \psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi dV = \oint_{\partial V} \psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi d\mathbf{A} \quad (1.5.3)$$

### 3. Greensche Identität

Die Greensche Funktion  $G$  ist eine Allgemeine Name für Funktionen, worauf unter Anwendung eines linearen Differentialoperators  $L$  auf diesen Funktion, sich die Diracsche  $\delta$ -Distribution ergibt. Es gilt also

$$LG = \delta \quad (1.5.4)$$

Man definiere nun die **Laplace-Greensche Funktion** (weiter erstmal einfach Greensche Funktion genannt) zum Laplace Operator  $\Delta$  sodass gilt

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.5.5)$$

Für den Laplace Operator erfüllt die Funktion  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  diese Bedingung. Diese Greensche Funktion ist aber nicht eindeutig definiert, denn die Funktion  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  erfüllt die Bedingung auch, falls  $\Delta F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$

Setzt man nun  $\psi = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  und  $\varphi = \phi(\mathbf{r}')$  in die die 2. Greensche Identität ein, so folgt die 3. Greensche Identität (hier schon als Spezialfall für das elektrische Potenzial)

$$\begin{aligned} \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \underbrace{\Delta \phi(\mathbf{r}')}_{-4\pi k \rho(\mathbf{r}')} - \phi(\mathbf{r}') \underbrace{\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}_{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} dV' &= -4\pi k \left( \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \right) - \phi(\mathbf{r}) \\ &= \oint_{\partial V} (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \cdot d\mathbf{A}' \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Es folgt die Allgemeine Lösung für das Potenzial

$$\Leftrightarrow \phi(\mathbf{r}) = -4\pi k \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \oint_{\partial V} (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \cdot d\mathbf{A} \quad (1.5.7)$$

Bemerke, dass falls  $\phi$  und  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  im Unendlichen nach null abfallen, mit  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  einfach Gleichung 1.2.5 folgt. Gleichung 1.2.5 ist also ein Spezialfall der allgemeine Lösung von  $\phi(\mathbf{r})$ , wo verschwindende Randbedingungen vorgegeben sind bzw. wo die Randbedingungen im Unendlichen liegen und deswegen verschwinden.

Ist nun auf die Randfläche  $\phi$  vorgegeben (Dirichlet Randbedingungen), so wählt man  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  meistens so, sodass  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}' \in \partial V} = 0$  gilt, also auf dem Rand verschwindet, und vereinfacht sich Funktion 1.5.7 zu

$$\phi(\mathbf{r}') = -4\pi k \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \oint_{\partial V} \phi(\mathbf{r}') \nabla G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{A} \quad (1.5.8)$$

wobei  $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  dann die obere Bedingung erfüllt, und manchmal auch die Dirichlet-Greensche Funktion genannt wird.

Ist statt dem Potential das E-Feld oder eine Ladungsdichte vorgegeben (von Neumann Randbedingungen, man beachte dass  $\sigma_F = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$ , sodass vorgebe von Flächenladungsdichte und E-feld auf dem Rand equivalent sind), so wählt man meistens  $\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r} \in \partial V} = 0$ , sodass Funktion 1.5.7 sich vereinfacht zu

$$\phi(\mathbf{r}') = -4\pi k \int_V \rho(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \oint_{\partial V} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \phi(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{A} \quad (1.5.9)$$

wobei  $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  dann die obere Bedingung erfüllt, und manchmal auch die Von-Neumann-Greensche Funktion genannt wird.

### 1.5.3 Einige Praktische Lösungswege

#### Spiegelladungsmethode

Das Problem welches betrachtet wird, ist eine Ladung auf einen Abstand  $a$ , z.B. auf der  $z$ -Achse, vor einer Unendlich ausgedehnten Leiterschicht, z.B. in der  $x$ - $y$ -Ebene. Allgemein gilt für Leiter, wo kein Strom durch fließt (was in der Elektrostatik der Fall ist) dass das Potential überall in dem Leiter konstant ist. Man muss also jetzt eine Lösung finden für dem die freie Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  und die Randbedingung  $\phi(x, y, z = 0) = \phi_0 = \text{const.}$ .

Eine konstantes Potential in der  $x$ - $y$ -Ebene ist einfach zu realisieren, falls man eine 2. Ladung bei  $\bar{\mathbf{r}}_0 = (x_0, y_0, -z_0)$  und mit Ladung  $-q$  legt. Das Potential oberhalb der Leiterebene erfüllt dann die Randbedingungen, jedoch ist aufzumerken, dass es diese negative Ladung in der Wirklichkeit gar nicht gibt, sodass diese Lösung nur für eine Hälfte des Raumgebietes richtig ist. Die Greensche Funktion zu diesem Problem ist  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}'|} \right]$ , sodass man dieses Problem auch formeller mit Formel 1.5.8 lösen könnte.

Die Spiegelladungsmethode ist auch für andere Geometrien geeignet, sowie eine Punktladung vor einer metallischen Kugel oder Zylinder, und die Spiegelladung und Ort der Spiegelladung sind immer entsprechend für das Problem zu wählen.

#### Separationsansatz

Der Separationsansatz ist ein Ansatz, wo man annimmt, dass die Koordinaten im Potential produktmäßig unabhängig sind, d.h.

$$\phi(u, v, w) = \phi_u(u)\phi_v(v)\phi_w(w)$$

Mit diesem Ansatz gelingt es in manche Fälle, die Multidimensionale Poisson-Gleichung in 2 oder 3 unabhängige DGLs 2. Ordnung zu entkoppeln.

#### Allgemeine Separationsansatz in Kugelkoordinaten

Für Rotations- oder Kugelsymmetrische Probleme eignet es sich, einen Separationsansatz zu machen, wo  $\phi(\mathbf{r}) = \phi_r(r)\phi_\Omega(\theta, \varphi)$ . Der Laplace Operator muss dann auch entsprechend in Kugelkoordinaten definiert werden. Es gilt

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right] \quad (1.5.10)$$

Dabei sind die Kugelflächenfunktionen  $Y_{lm}(\Omega)$  eine Eigenfunktion des Raumwinkel-Laplace-Operators  $\Delta_\Omega$  wobei gilt dass  $\Delta_\Omega Y_{lm}(\Omega) = -l(l+1)Y_{lm}(\Omega)$ . Deswegen sind die Kugelflächenfunktionen eine gute Wahl für unseren Ansatz. Weil die Kugelflächenfunktionen für alle  $l$  und  $m$  Eigenfunktionen sind, muss man die Superposition aller Lösungen nehmen. Zu jedem  $l$  und  $m$  könnte nun aber eine unterschiedliche Funktion  $\phi_r(r)$  gehören, sodass die allgemeine Lösung gegeben wird durch

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{lm} f_{lm}(r) Y_{lm}(\Omega) \quad l \in \mathbb{N}_0, m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$$

Die Herleitung von  $f_{lm}(r)$  wird hier zunächst übersprungen, ist aber in vielen Skripten und guter Literatur zu finden. Man findet am Ende die allgemeine Lösung

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} (a_{lm} r^l + b_{lm} r^{-l-1}) Y_{lm}(\Omega) \quad (1.5.11)$$

Sei das Problem nicht unabhängig von  $\varphi$ , so kann man auch stattdessen die Lösung über die Legendre Polynome  $P_l(\cos \theta)$  definieren (man beachte dass  $Y_{lm}(\Omega) \propto P_l(\cos \theta) e^{im\varphi}$ , sodass die  $\varphi$ -Abhängigkeit für  $m=0$  wegfällt) und findet für rotationssymmetrische Probleme den vereinfachten Ansatz

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l r^l + b_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta) \quad (1.5.12)$$

Das Lösen dieses Ansatzes wird dann meistens durch Koeffizientenvergleich mit den vorgegebenen Randbedingungen gemacht.

## 1.6 Elektrostatische Energie

In diesem Kapitel besprechen wir wie die Energie von Ladungsverteilungen in externe Felder aussieht, sowie die Wechselwirkungsenergie zweier Ladungsverteilungen.

### 1.6.1 Energie von Ladungen im Externen Feld

Bewegt sich eine Ladung  $q$  durch ein äußeres Elektrisches Feld  $\mathbf{E}_a(\mathbf{r})$  mit Potential  $\phi_a(\mathbf{r})$ , so spürt es die Kraft  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$  und wird die Arbeit

$$W = - \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = -q \int_C \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = q \int_C \nabla \phi_a(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = q(\phi_a(\mathbf{r}_1) - \phi_a(\mathbf{r}_0)) = qU_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_1}$$

verrichtet, wobei  $C$  eine beliebige Raumkurve von  $\mathbf{r}_0$  nach  $\mathbf{r}_1$  ist. Betrachtet man statt eine Punktladung eine Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r})$  im äußeren E-Feld, so muss man den oberen Zusammenhang über dem Volumen integrieren. Setzt man  $\phi_a(\mathbf{r}_0) = 0$  (Potential wird immer relativ definiert), so findet man für die Potentielle Energie den untere Zusammenhang

$$E_{\text{pot}} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \phi_a(\mathbf{r}) \quad (1.6.1)$$

Sei die Ladungsverteilungen auf einem kleinen Raumbereich um  $\mathbf{r}_0 = 0$  beschränkt, so kann man das äußere Potential Taylorentwickeln um eine gute näherung für die Potentielle Energie zu finden.

$$T(\phi_a(\mathbf{r}); \mathbf{r}_0 = 0) = \phi_a(0) - \mathbf{E}_a(0) \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2} \sum_{ij} \partial_j E_{a,i}(0) r_i r_j + \dots$$

Setzt man dies in Gleichung 1.6.1 ein, so findet man

$$E_{\text{pot}} \approx \phi_a(0)Q - \mathbf{E}_a(0) \cdot \mathbf{p} - \frac{1}{6} \sum_{ij} \partial_j E_i(0) Q_{ij} \quad (1.6.2)$$

Wobei  $Q$ ,  $\mathbf{p}$  und  $Q_{ij}$  die Multipolmomente sind. Man bemerke also, dass (näherungsweise für ausgedehnte Ladungsverteilungen) die elektrostatische potentielle Energie verursacht wird durch die Kopplung (d.h. "mathematische interaktion") von die Gesamtladung mit dem äußeren Potential und den Dipol mit dem E-Feld usw.

### 1.6.2 Feldenergie und Selbstinteraction

Bis jetzt wurden die Effekte die die Ladungsverteilungen selbst verursacht vernachlässigt. Jetzt möchten wir uns aber anschauen wie wir die gesamte energie eines Systems berechnen können, wenn wir nicht ausgehen von äußere felder. Sei nun  $\rho(\mathbf{r})$  die Ladungsverteilungen des gesamten Raumes, mit das zugehörige Elektrische Potential  $\phi_\rho(\mathbf{r})$ .

Es gilt noch immer die Zusammenhang aus Gleichung 1.6.1, stellt nun jedoch keine potentielle Energie in einem äußeren Feld mehr dar sondern eine Wechselwirkungsenergie und es gilt,

$$E_{\text{WW}} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \phi_\rho(\mathbf{r}) = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.6.3)$$

Über die Poissongleichung  $\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi k \rho(\mathbf{r})$  kann man dies weiter umformen nach

$$\begin{aligned} E_{\text{WW}} &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi k} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \phi(\mathbf{r}) \Delta\phi(\mathbf{r}) \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{8\pi k} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \underbrace{\nabla\phi(\mathbf{r}) \nabla\phi(\mathbf{r})}_{\mathbf{E}^2(\mathbf{r})} - \frac{1}{8\pi k} \underbrace{\oint_{\partial\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{r}) \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A}}_{=0 \text{ } (\phi(\mathbf{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 0)} \\ &= \frac{1}{8\pi k} \int d^3r \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

(\* 1. Greensche Identität)

## 1.7 Elektrostatik in Materie

Die bisherige hergeleitete Formeln sind alle Gültig im Vakuum. In Medien sowie Dielektrika oder Leiter können jedoch mikroskopische Interaktionen entstehen, weil Atome und Moleküle aus geladenen Teilchen bestehen, die Elektrische Felder verändern können. Eine Mikroskopische Beschreibung von Vielteilchen Systeme ist aber nicht das Ziel der makroskopische Elektrodynamik. Deswegen werden zunächst auf makroskopische Skala Vereinfachungen eingeführt, woraus man ein sehr praktisches und verständliches Bild der Elektrodynamik herleiten kann.

### 1.7.1 Materialarten

Man unterscheidet zunächst zwischen zwei Arten von Medien, zwar (Metallische) **Leiter** und **Dielektrika** (auch Isolatoren genannt).

1. In Leiter gibt es, neben gebundenen Ladungen (Valenzelektronen, Protonen), **freie Ladungen** (Leitungselektronen) die frei durch dem Medium bewegen können. Die freie Ladungen können angelegte elektrische Felde entgegenwirken und deswegen aufheben.
2. In Dielektrika sind alle Ladungen gebunden. Die einzige Gegenreaktion die die gebundene Ladungen auf äußere Felder haben können, sind **Polarisationseffekte** (denke z.B. an Verformung/Verschiebung der Elektronenwolke um dem Atom). Gitterstrukturen von Atomen können weiter dafür sorgen das diese Polarisationseffekte richtungsabhängig sind. Neben induzierte Dipole können auch spontane (das heißt nicht von äußere felder ausgelöste) Dipole in Dielektrika auftreten (z.B. inherentes Dipolmoment vom Wassermolekül).

(In Leiter können auch Polarisationseffekte auftreten, jedoch sind diese meistens einige Größenordnungen schwächer als die Effekte der freien Ladungen)

Um die aufspaltung von freie und gebundene Ladungen mathematisch zu beschreiben führen wir die zunächst die freie bzw. die gebundene Ladungsdichte  $\rho_f(\mathbf{r})$  und  $\rho_{\text{geb}}(\mathbf{r})$  ein wobei natürlich gilt, dass

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) + \rho_{\text{geb}}(\mathbf{r}) \quad (1.7.1)$$

### 1.7.2 Polarisation und Dielektrische Verschiebung

Mikroskopisch gibt es in einem Polarisierten Medium einen Satz von Dipole, die als Punktdipole  $\mathbf{p}_i$  betrachtet werden können. Wir führen jetzt die Größe  $\mathbf{P}$  ein, die **Polarisation**, die ein Maß ist für die Polarisationsdichte in einem Raumbereich und definieren es formal als Raummittelung von Punktdipole (analog zu Punktladung und Ladungsdichte)

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V(\mathbf{r})} \sum_{\mathbf{p}_i \in V(\mathbf{r})} \mathbf{p}_i \quad (1.7.2)$$

Die Polarisation kann aufgeteilt werden in die spontane Polarisation  $\mathbf{P}_{\text{sp}}$  und eine induzierte Polarisation  $\mathbf{P}_{\text{ind}}$  sodass

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_{\text{sp}}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}_{\text{ind}}(\mathbf{r}) \quad (1.7.3)$$

Dabei wird die induzierte Polarisation durch äußere elektrische Felder erzeugt und es gilt ganz allgemein

$$\mathbf{P}_{\text{ind}} = \frac{\hat{\chi}(\mathbf{r}, \mathbf{E}(\mathbf{r}))}{4\pi k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.7.4)$$

Wobei  $\hat{\chi}$  eine  $3 \times 3$ -Matrix ist die Richtungsabhängigkeit der Polarisation zulässt.  $\hat{\chi}$  ist weiter ganz allgemein eine Funktion von  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ .

Obwohl in viele Medien tatsächlich Orts- und elektrische Feldabhängigkeiten anwesend sein können, werden diese in der Regel nicht in Einführungskurse der Elektrodynamik behandelt. Man betrachtet stattdessen meistens **lineare**, **homogene** und **isotrope** Medien (hier weiter LHI-Medien genannt). Das heißt,

1. linearität: Elektrische Feldstärke unabhängig  $\rightarrow \hat{\chi}$  unabhängig von  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  sodaß  $|\mathbf{P}| \propto |\mathbf{E}|$  einen linearen Zusammenhang erfüllt
2. homogenität: Ortsunabhängigkeit  $\rightarrow \hat{\chi}$  unabhängig von  $\mathbf{r}$
3. isotropie: Raumrichtungsunabhängigkeit  $\rightarrow \hat{\chi} = \chi$  bzw. die  $3 \times 3$ -Matrix durch eine skalare Funktion ersetzt werden.

Als Spezialfall für LHI-Medien gilt deswegen

$$\mathbf{P}_{\text{ind}} = \frac{\chi}{4\pi k} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.7.5)$$

wobei  $\chi$  eine Materialabhängige Konstante ist.

Die Polarisation hat als Quelle die gebundene Ladungsdichte und es gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = -\rho_{\text{geb}}(\mathbf{r}) \quad (1.7.6)$$

wobei das Vorzeichen eine mathematische Formalität ist, um anzudeuten dass die Polarisation das Elektrische Feld entgegenwirkt.

Die freie Ladungsdichte  $\rho_f$  verursacht nun noch ein Zusätzliches Feld das sich sehr ähnlich zum Elektrischen Feld verhält. Dieses Feld wird die **dielektrische Verschiebung**  $\mathbf{D}$  genannt und es gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) \quad (1.7.7)$$

Mit Gleichung 1.7.1 und  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k \rho$  folgt nun

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k \rho(\mathbf{r}) = 4\pi k (\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}))$$

woraus weiterhin folgt dass

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi k (\mathbf{D}(\mathbf{r}) - \mathbf{P}(\mathbf{r})) \quad (1.7.8)$$

Vernachlässigen wir zunächst die spontane Polarisation (d.h. wir setzen  $\mathbf{P}_{\text{sp}}(\mathbf{r}) = 0$ ) und betrachten wir LHI-Medien so folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 4\pi k \left( \mathbf{D}(\mathbf{r}) - \frac{\chi}{4\pi k} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) \\ \Leftrightarrow \frac{(1+\chi)}{4\pi k} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{D}(\mathbf{r}) \\ \stackrel{\text{SI}}{\Leftrightarrow} \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}) &\equiv \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \epsilon_r = (1+\chi) \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

Für LHI-Medien ohne spontane Polarisation gilt also (in SI Einheiten)

$$\epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}(\mathbf{r})$$

### 1.7.3 Randbedingungen an Dielektrika

Es gelten an Dielektrika die Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) &\Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \sigma_f^F(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 &\Rightarrow \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

Das heißt dann, dass an eine Randfläche die Tangentialkomponente von  $\mathbf{E}$  stetig ist, und die Orthogonal-komponente von  $\mathbf{D}$  einen Sprung um  $\sigma_f^F$  machen kann.



## 1.8 Formelzettel

### 1.8.1 Ladungen und Ladungsverteilungen

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) \quad (\text{Elektrostatik})$$

### 1.8.2 Elektrische Kraft, Elektrisches Feld und Elektrisches Potential

Coulombkraft im äußeren E-Feld	Punktladung	$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$	Pot. einer Ladungs- verteilung*	$\phi(\mathbf{r}) = k \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' }$
Zusammenhang Pot.	E-Feld und	$\mathbf{E} = -\nabla\phi(\mathbf{r})$	E-Feld einer La- dungsverteilung*	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' ^3}$
Poisson-Gleichung		$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi k\rho(\mathbf{r})$		
Feldgleichungen der E-Statik		$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k\rho(\mathbf{r})$ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$	Pot. einer Punktla- dung*	$\phi(\mathbf{r}) = k \frac{Q}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 }$
Konstante $k$		$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (\text{SI})$ $k = 1 \quad (\text{Gauß})$	E-Feld einer Punkt- ladung*	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = kQ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 ^3}$

\* (Bei verschwindende Randbedingungen)

### 1.8.3 Multipolentwicklung

Grundlegende (Kartesisch)	Entwicklung	$\frac{1}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' } \bigg _{r \gg r'} \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{3r'_i r'_j - \delta_{ij} r'^2}{r^5} r_i r_j$
Kartesische wicklung	Multipolent- wicklung	$\phi(\mathbf{r}) \approx k \frac{Q}{r} + k \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{k}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{Q_{ij}}{r^5} r_i r_j$
Kartesische mente	Multipolmo- mente	$Q = \int d^3r' \rho(r')$ $\mathbf{p} = \int d^3r' \mathbf{r}' \rho(r')$ $Q_{ij} = \int d^3r' (3r'_i r'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(r')$
Grundlegende (Kugelfl.fkt.)	Entwicklung	$\frac{1}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' } = \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega)$ $r_{>} = \max(r, r') \quad r_{<} = \min(r, r')$
Kugelfl. Entwicklung Ursprung	Nah am	$\phi(\mathbf{r}) = k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} r'^l q_{<}^{lm} Y_{lm}(\Omega) \quad q_{<}^{lm} = \int_0^\infty dr' r'^{l-1} \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') \rho(\mathbf{r}')$
Kugelfl. Entwicklung weg vom Ursprung	Weit	$\phi(\mathbf{r}) = k \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_{>}^{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\Omega) \quad q_{>}^{lm} = \int_0^\infty dr' r'^{l+2} \int_\Omega d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') \rho(\mathbf{r}')$

- 1.8.4 Verhalten von Elektrostatische Felder an Randflächen
- 1.8.5 Lösung der Poisson Gleichung und Greensche Funktion
- 1.8.6 Elektrostatische Energie
- 1.8.7 Elektrostatik in Materie

# Kapitel 2

## Magnetostatik

<b>2.1</b>	<b>Stromdichten und Kontinuitätsgleichung . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>2.2</b>	<b>Magnetfeld und Biot-Savart-Gesetz . . . . .</b>	<b>23</b>
2.2.1	Ampèresche Kraft Gesetz . . . . .	23
2.2.2	Das Magnetfeld . . . . .	23
2.2.3	Das Vektorpotential . . . . .	23
2.2.4	Feldgleichungen der Magnetostatik . . . . .	24
2.2.5	Eichtransformation und Inhomogene Poisson-Gleichung . . . . .	24
2.2.6	Die Hauptaufgabe der Magnetostatik . . . . .	24
<b>2.3</b>	<b>Multipolentwicklung: Magnetischer Dipol . . . . .</b>	<b>25</b>
2.3.1	Monopolmoment . . . . .	25
2.3.2	Dipolmoment . . . . .	25
<b>2.4</b>	<b>Magnetostatik in Materie . . . . .</b>	<b>26</b>
2.4.1	Magnetische Felstärke und Magnetische Polarisation . . . . .	26
<b>2.5</b>	<b>Randwertprobleme in der Magnetostatik . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>2.6</b>	<b>Ohmsches Gesetz . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>2.7</b>	<b>Formelzettel . . . . .</b>	<b>29</b>

In der Magnetostatik betrachtet man nur **Zeitunabhängige** Stromdichten (daher *Magnetostatik*). Dies führt dazu, sowie in der Elektrostatik, das man Stationäre Felder betrachtet, und das Zeitunabhängige Effekte vernachlässigt werden können. Zwischen der Elektrostatik und der Magnetostatik gibt es viele Ähnlichkeiten. Deswegen werden wir nur kurz alle wichtige Themen besprechen ohne Herleitungen zu wiederholen.

## 2.1 Stromdichten und Kontinuitätsgleichung

In der Magnetostatik dürfen sich Ladungen endlich bewegen. Dies führt zu **Ladungsströme**, die mathematisch durch die **Stromdichte**  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  beschrieben werden. In der Magnetostatik betrachtet man zunächst Zeitunabhängige Stromdichten  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ . Weiter ist auch noch immer die Ladungsverteilung im Raum zeitunabhängig. Weil die Ladung eine physikalische Erhaltungsgröße ist (**Ladungserhaltung**), und Ladung sowohl die Ursprung der Ladungsdichte als die Stromdichte ist, sind die Größen  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  natürlich verknüpft. Die Ladungserhaltung wird Mathematisch beschrieben durch die **Kontinuitätsgleichung**

$$-\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) \quad (2.1.1)$$

Man kann dies So auffassen, dass die Fluß von Ladung in durch die Randfläche einer Raumbereich rein ( $-\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ ) gleich die Zeitliche Änderung ( $\partial_t \rho(\mathbf{r}, t)$ ) der Ladung im Raumbereich ist. Bemerke, dass das Minus da ist, weil für eine positive Ladungszunahme die man für einen Strom von positiven Ladungen,  $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  eine Senke darstellen soll, und nicht eine Quelle!

Weil die Ladungsdichte zeitunabhängig sein muss in der Magnetostatik, folgt direkt dass  $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ . Dies bedeutet also, dass die Stromdichte in einem Raumbereich rein also immer gleich sein muss als die Stromdichte aus dem Raumbereich raus, sowie zum Beispiel in einem Leiterdraht oder Leiterschleife.

Die Ladungsdichte die durch eine Punktladung erzeugt wird ist einfach die Ladungsdichte der Punktladung (Gleichung ??) mal seine Momentane geschwindigkeit.

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = q\dot{\mathbf{r}}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$$

Für mehrere Ladungsverteilungen folgt natürlich

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad (2.1.2)$$

Man kann dies dann wieder Räumlich mitteln um eine kontinuierliche Ladungsverteilung zu erhalten.

$$\mathbf{j}_{\text{kont}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V(\mathbf{r})} \sum_{\mathbf{j}_i \in V(\mathbf{r})} \mathbf{j}_i \quad (2.1.3)$$

Der gesamte Strom durch eine Oberfläche wird auch als  $I$  angedeutet. Es gilt

$$I_A = \int_A \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} \quad (2.1.4)$$

## 2.2 Magnetfeld und Biot-Savart-Gesetz

### 2.2.1 Ampèresche Kraft Gesetz

Analog zu wie die Ladungsdichte die Quelle für das Elektrostatische-Feld, ist die die Stromdichte die Quelle für das Magnetfeld. Im frühen 19. Jahrhundert wurde beobachtet dass Zwei stromdurchflossenen Leiterschleifen Kräfte auf einander ausübten. Die Kraft wirkt Anziehend falls die Ströme gleich ausgerichtet sind und vise versa. Diese magnetische Kraft wurde in 1823 von André Marie Ampère zuerst mathematisch beschrieben, und ist gegeben durch das **Ampèresche Kraft Gesetz** (nicht zu verwechseln mit dem Ampèresche Durchflutungsgesetz).

Gäbe es zwei Leiterschleifen die durch die einfache, geschlossene und disjunkte Raumkurven  $C_1$  bzw.  $C_2$  beschrieben werden, die durch die ströme  $I_1$  bzw.  $I_2$  durchflossen werden. Sind  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  weiter zwei unabhängige Ortsvektoren die vom Ursprung aus auf Punkte der Kurven  $C_1$  bzw.  $C_2$  weisen, so gilt für die Kraft die Leiterschleife 1 auf Leiterschleife 2 ausübt.

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = k' I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{r}_1 \times (d\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} = k' I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (2.2.1)$$

$k'$  Ist wieder eine Konstante die vom gewählten Einheitensystem abhängt. In SI gilt  $k' = \frac{\mu_0}{4\pi}$ . In Gausseinheiten gilt  $k' = \frac{1}{c}$  mit  $c$  die Lichtgeschwindigkeit. Wie wir in der Elektrodynamik sehen werden ist auch  $\mu_0$  zusammen mit  $\epsilon_0$  durch mit  $c$  verknüpft ( $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$  in SI). Eine relativistische beschreibung der Elektrodynamik weißt eine Äquivalenz zwischen dem Coulomb Gesetz und das Ampèresche Gesetz auf. Ob eine Elektrische oder eine Magnetische Kraft wirkt, wird dann abhängig vom gewählten Bezugssystem sein.

### 2.2.2 Das Magnetfeld

Es ist nun wieder sinnvoll, eine Beschreibung zu finden, analog zur Definition des Elektrischen Feldes, wobei die magnetische Kraft durch beschrieben wird durch ein äußeres (Magnet-)Feld das lokal auf eine Stromverteilung wirkt. Man definiere das Magnetfeld aus ersten Prinzipien aus die Ampèresche Kraft sodass

$$\mathbf{F}_{12} = I_1 \oint_{C_1} d\mathbf{r}_1 \times \mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_1) = k' I_2 \oint_{C_2} d\mathbf{r}_2 \times \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (2.2.2)$$

Das Magnetfeld läßt sich dann zu beliebige Stromverteilungen veralgemeinern, und wird das **Biot-Savart-Gesetz** genannt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = k' \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.2.3)$$

Dies entspricht, sowie in der Elektrostatik, wieder eine lösung für verschwindende Randbedingungen. Die gesammte magnetische Kraft auf eine beliebige Ladungsverteilung im äußeren Magnetfeld wird zu

$$\mathbf{F} = \int d^3 r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (2.2.4)$$

Das Magnetfeld ist nun also ein Maß, für die Kraft die ein infinitesimales Leiterstück bzw. eine bewegte Ladung lokal spüren Würde, durch die Anwesenheit eines Äußeren Stroms.

### 2.2.3 Das Vektorpotential

Es ist nun offensichtlich dass das Magnetfeld ein reines Rotationsfeld ist, indem man sieht dass

$$\nabla_r \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.2.5)$$

Aus dem Biot-Savart-Gesetz folgt also nun

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = k' \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.2.6)$$

### 2.2.4 Feldgleichungen der Magnetostatik

Sowie schon im letzten Abschnitt besprochen ist das Magnetfeld ein reines Rotationsfeld. Daraus folgt die homogene Feldgleichung der Magnetostatik. Aus dem Zerlegungssatz folgt zusammen mit die homogene Feldgleichung auch den Zusammenhang zwischen die Rotation des Magnetfeldes  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  und die Stromdichte  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 && \text{(homogen)} \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 4\pi k' \mathbf{j}(\mathbf{r}) && \text{(inhomogen)}\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

### 2.2.5 Eichtransformation und Inhomogene Poisson-Gleichung

Das Vektorpotential ist nicht eindeutig festgelegt, denn

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \nabla \times (\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}(\mathbf{r})) \quad \text{falls} \quad \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \nabla \chi(\mathbf{r})\tag{2.2.8}$$

Für ein beliebiges Skalarfeld  $\chi$ .

Das heißt das für die Magnetostatik die **Eichtransformation**

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \chi(\mathbf{r})\tag{2.2.9}$$

das Magnetfeld invariant läßt. In der Magnetostatik ist die **Coulomb-Eichung** üblich, wobei  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  gewählt wird, sodaß  $\Delta \chi(\mathbf{r}) = 0$ . In der Coulomb-Eichung folgt somit zusammen mit die magnetostatische Maxwellgleichungen die inhomogene Poisson-Gleichung

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -4\pi k' \mathbf{j}(\mathbf{r})\tag{2.2.10}$$

### 2.2.6 Die Hauptaufgabe der Magnetostatik

Die Hauptaufgabe der Magnetostatik ist also das Berechnen von magnetostatische Potentiale und Felder unter vorgabe von Stromverteilungen und Randbedingungen. Sowie bei der Elektrostatik sind für Hochsymmetrische Probleme analytische Lösungen möglich, für schwierigere Probleme können wieder meistens nur numerische Lösungen gefunden werden. Für uns ist erstmal wieder das Finden von analytische Lösungen interessant um ein Grundverständnis aufzubauen. Dazu werden weiter auch wieder Methoden besprochen die uns analytische Näherungen geben können, wie die Multipolentwicklung.

## 2.3 Multipolentwicklung: Magnetischer Dipol

Wie in der Elektrostatik möchten wir den Term  $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$  entwickeln. Weil die Multipolmomente wegen die Kreuzprodukte schnell mathematisch kompliziert werden. Dazu gibt es wegen  $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$  keine Magnetische Monopole. Deswegen wird in Einführungskurse für das Magnetfeld meistens nur die Magnetische Dipol besprochen. Zunächst wiederholen wir die Aussage die man erhält wenn man den  $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$  entwickelt

$$\left. \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right|_{\mathbf{r} \gg \mathbf{r}'} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.3.1)$$

Setzt man dies in Gleichung 2.2.6 ein, so findet man für das Vektorpotential die näherung

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{k'}{r} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + k' \frac{1}{r^3} \int d^3r' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad (2.3.2)$$

### 2.3.1 Monopolmoment

Es gilt nun aber

$$\int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$$

falls  $\mathbf{j}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  (was für die Multipolentwicklung sowieso schon vorausgesetzt wird, denn es wird gefordert, dass die Ladungsverteilung beschränkt ist, sodass  $\mathbf{r} \gg \mathbf{r}'$  gelten kann) sodass der magnetische Monopol wegfällt. Diese läßt sich beweisen, falls man ein beliebiges Vektorfeld  $g(\mathbf{r})$  mit dem Strom multipliziert und die Randfläche im Unendlichen betrachtet

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial \mathbb{R}^3} \underbrace{\mathbf{j}(\mathbf{r})}_{\rightarrow 0} g(\mathbf{r}) d\mathbf{A} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \nabla \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{r}) g(\mathbf{r})) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r (g(\mathbf{r}) \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r})}_{=0} + \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \nabla g(\mathbf{r})) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \nabla g(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Wählt man nun  $g(\mathbf{r}) = x, y$  oder  $z$ , so ist  $\nabla g(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}_i$  mit  $i \in \{x, y, z\}$  woraus folgt dass

$$\int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = \int d^3r j_i(\mathbf{r}) = 0 \quad i \in \{x, y, z\} \quad (2.3.4)$$

daraus folgt

$$\int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \stackrel{*}{=} \int d^3r (j_i(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_i) = \hat{\mathbf{e}}_i \underbrace{\int d^3r j_i(\mathbf{r})}_{=0} = 0 \quad * \text{ (Summenkonvention)} \quad (2.3.5)$$

### 2.3.2 Dipolmoment

Setzen wir nun  $g(\mathbf{r}) = r_i r_j$  mit  $r_i, r_j \in \{x, y, z\}$  und  $r_i \neq r_j$  in Gleichung 2.3.3 ein, so folgt mit  $\nabla r_i r_j = r_j \hat{\mathbf{e}}_i + r_i \hat{\mathbf{e}}_j$

$$0 = \int d^3r (r_i j_j + r_j j_i) \Leftrightarrow \int d^3r (r_i j_j) = - \int d^3r (r_j j_i) \quad (2.3.6)$$

Es folgt für das Vektorpotential zusammen mit die Aussage des Monopolmomentes

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx k' \frac{r_i}{r^3} \hat{\mathbf{e}}_j \int d^3r' \frac{1}{2} \left[ r'_i j_j(\mathbf{r}') - r'_j j_i(\mathbf{r}') \right] \quad (2.3.7)$$

Wir definieren nun das **magnetische Dipolmoment**

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')] \quad \text{mit} \quad \epsilon_{ijk} m_k = \frac{1}{2} \int d^3r' \left[ r'_i j_j(\mathbf{r}') - r'_j j_i(\mathbf{r}') \right] \quad (2.3.8)$$

Daraus folgt nun

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = k' \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})\mathbf{r} - \mathbf{m}r^2}{r^5} \quad (2.3.9)$$

## 2.4 Magnetostatik in Materie

### 2.4.1 Magnetische Felstärke und Magnetische Polarisation

Analog wie bei der Elektrostatik teilen wir nun in Medien den Gesamtstrom auf makroskopische Ebene auf in eine freie und eine gebundene Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_b(\mathbf{r}) \quad (2.4.1)$$

Dabei sind die gebundene Ströme im Medium zum Beispiel die Elektronen die um das Atom kreisen, sowie induzierte Ströme durch die Anwesenheit eines äußeren magnetischen Feldes, die jedoch auf kleine Raumgebiete beschränkt bleiben.

Nun führen die freien Ströme wieder zu einem Feld, die magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ , das das magnetische Feld sehr ähnelt. Die gebundenen Ströme führen zu einer Dipoldichte oder Magnetisierung  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ . Dabei läßt die Dipoldichte sich wieder verstehen als Volumenmittelung von Punktdipolen  $\mathbf{m}_i$  und gilt

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V(\mathbf{r})} \sum_{\mathbf{m}_i \in \Delta V(\mathbf{r})} \mathbf{m}_i \quad (2.4.2)$$

Nun wird die Magnetisierung wieder aufgeteilt in eine Spontane Magnetisierung  $\mathbf{M}_{\text{sp}}$  und eine induzierte Magnetisierung  $\mathbf{M}_{\text{ind}}$  mit

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}_{\text{sp}}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}_{\text{ind}}(\mathbf{r}) \quad (2.4.3)$$

Die Spontane Magnetisierung ist verantwortlich für Permanentmagneten, und ist viel bekannter als die spontane elektrische Polarisation. Obwohl in der klassischen Magnetostatik angenommen wird, dass die Dipoldichte durch Ströme verursacht wird, ist es in der Realität so, daß die Kreisströme von Elektronen nicht ausreichend sind um Magnetismus zu beschreiben. Dafür ist tatsächlich die Spin des Elektrons zum größten Teil verantwortlich, ist also eine Quantenmechanische Beschreibung erforderlich, aber dies ist nicht Thema dieser Einführungskurs.

Ziemlich analog wie bei der Elektrostatik wird  $\mathbf{M}_{\text{ind}}$  von einer äußeren magnetischen Feldstärke induziert und man definiere

$$\mathbf{M}_{\text{ind}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi k'} \hat{\chi}_M(\mathbf{r}, \mathbf{H}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.4.4)$$

Für LHI-Medien folgt nun wieder

$$\mathbf{M}_{\text{ind}}(\mathbf{r}) = \frac{\chi_M}{4\pi k'} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.4.5)$$

Weiter gilt

$$\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_b(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}) \quad (2.4.6)$$

sodass folgt

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 4\pi k' \mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ &= 4\pi k' (\mathbf{j}_f(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_b(\mathbf{r})) \\ &= 4\pi k' (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})) \\ \Leftrightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 4\pi k' (\mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}(\mathbf{r})) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Setzt man  $\mathbf{M}_{\text{sp}} = 0$ , und mit Gleichung 2.4.5 folgt weiter

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{(1 + \chi_M)}{4\pi k'} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \\ &\stackrel{\text{SI}}{=} \mu_r \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad \mu_r = (1 + \chi_M) \end{aligned} \quad (2.4.8)$$



## 2.5 Randwertprobleme in der Magnetostatik

Im Vakuum gelten es die Feldgleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 4\pi k' \mathbf{j}(\mathbf{r})\end{aligned}\tag{2.5.1}$$

Daraus folgen die Randbedingungen, analog wie beim elektrischen Feld

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 4\pi k' \mathbf{j}^F(\mathbf{r})\end{aligned}\tag{2.5.2}$$

Und ist die orthogonalkomponente des magnetischen Feldes immer stetig an einer Randfläche, während die Tangentialkomponente einen Sprung um  $4\pi k' \mathbf{j}^F(\mathbf{r})$  machen kann in der Anwesenheit von einer nichtverschwindenden Flächenstromdichte.

In Medien Gelten die Feldgleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{j}_f(\mathbf{r})\end{aligned}\tag{2.5.3}$$

mit  $\mathbf{j}_f(\mathbf{r})$  die freie Stromdichte und gelten die analoge Randbedingungen

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{j}_f^F(\mathbf{r})\end{aligned}$$

## 2.6 Ohmsches Gesetz

## 2.7 Formelzettel



# Kapitel 3

## Elektrodynamik

<b>3.1</b>	<b>Dynamische Ergänzung der Maxwellgleichungen . . . . .</b>	<b>32</b>
3.1.1	Maxwellsche Ergänzung des Ampèresche Durchflutungsgesetzes . . . . .	32
3.1.2	Faradaysche Induktionsgesetz . . . . .	33
3.1.3	Maxwell Gleichungen im Vakuum . . . . .	33
<b>3.2</b>	<b>Wellengleichung der Felder . . . . .</b>	<b>34</b>
3.2.1	Entkopplungsansatz der EM-Felder . . . . .	34
3.2.2	Allgemeine Lösung der Wellengleichung . . . . .	34
	Lösung der homogene Wellengleichung . . . . .	34
	Lösung der inhomogene Wellengleichung . . . . .	35
<b>3.3</b>	<b>Energie des Elektromagnetischen Feldes . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>3.4</b>	<b>Wellengleichung der Potentiale . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>3.5</b>	<b>Bewegte und Beschleunigte Ladungen . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>3.6</b>	<b>Wellenleiter . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>3.7</b>	<b>Wellenpaketen . . . . .</b>	<b>42</b>
<b>3.8</b>	<b>Elektrodynamik in Materie . . . . .</b>	<b>43</b>

### 3.1 Dynamische Ergänzung der Maxwellgleichungen

Endlich sind wir angekommen an dem Punkt, wo wir bewegte Ladungen betrachten können, ohne zeitliche Einschränkungen. Wir versuchen zunächst aus die statische Maxwellgleichungen allgemein gültige dynamische Maxwellgleichungen herzuleiten. Hier unten noch kurz eine Wiederholung der Maxwellgleichungen bis jetzt.

	Elektrostatik	Magnetostatik
inhomogen	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k \rho$	$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi k' \mathbf{j}$
homogen	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
	$k$	$k'$
SI	$1/4\pi\epsilon_0$	$\mu_0/4\pi$ ( $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ )
Gauss	1	$1/c$

Wir werden sehen, dass die homogene elektrostatische Maxwellgleichung und die inhomogene magnetostatische Maxwellgleichung in der Elektrodynamik nicht mehr gültig sein werden.

#### 3.1.1 Maxwellsche Ergänzung des Ampèresche Durchflutungsgesetzes

Bis jetzt konnten wir Ströme als reine Quelle des Magnetfeldes auffassen, wofür die inhomogene magnetostatische Maxwellgleichung (*Ampèresche Durchflutungsgesetz*) allgemeingültig war.

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 4\pi k' \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

Betrachten wir nochmal die Kontinuitätsgleichung Jetzt ist Zeitabhängigkeit erlaubt, Ladungsdichten dürfen sich Zeitlich ändern und es gilt dadurch im allgemeinen nicht mehr  $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$  sondern

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.1.1)$$

Wenn wir diese Aussage kombinieren mit der inhomogene Maxwellgleichung aus der Elektrostatik finden wir nun

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi k} \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = 0 \quad (3.1.2)$$

Weil diese Ableitungsoperationen alle Partiell sind, darf  $\partial_t$  mit  $\nabla$  vertauscht werden, und man findet

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi k} \nabla \cdot (\partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) \quad (3.1.3)$$

Dies führt aber zu einem Problem für die inhomogene Maxwellgleichung der Magnetostatik. Denn wenn wir die Divergenz der Rotation des Magnetfeldes nehmen, sollte das Ergebnis Null sein, es gilt aber erstmal.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \nabla \cdot (4\pi k' \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)) \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.1.4)$$

In der magnetostatik war dies einfach erfüllt, denn  $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$  galt. Jetzt finden wir aber

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = -\frac{4\pi k'}{4\pi k} \partial_t \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{IA}}{\neq} 0 \quad (3.1.5)$$

was im Allgemeinen nicht gleich Null ist! Deswegen brauchen wir die dynamische Ergänzung der inhomogene Maxwellgleichung der Magnetostatik, und finden die erste Elektrodynamische Maxwellgleichung.

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k' \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{k'}{k} \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (3.1.6)$$

#### Maxwell-Ampèresche Durchflutungsgesetz

Diese ergänzung wurde von Maxwell in 1861 publiziert. Dabei wird heutzutage  $\partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  die **Maxwellsche Verschiebungsstrom** genannt. Man sieht hier natürlich, dass das *Ampèresche Durchflutungsgesetz* einen Spezialfall ist für stationäre elektrisches Felder.

### 3.1.2 Faradaysche Induktionsgesetz

Im statischen fall galt bislang die homogene elektrostatische Maxwellgleichung

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

Jedoch wurde in 1831 die elektrische Induktion durch Faraday entdeckt. Das Ströme Magnetfelder ezeugen konnten, war schon bekannt, aber die elektrische Induktion zeigte auch das umgekehrte, zwar das Magnetfelder auch Ströme erzeugen könnten. Obwohl Faraday selber nie die mathematische Formulierung festgelegt hat, er war zwar mathematisch nicht sehr gelehrt, wurden aus seine Experimente die folgenden Zusammenhänge hergeleitet.

Faraday fand, dass falls man ein permanent Magnet nahe eine geschlossene Leiterschleife bewegte, sich einen Strom in der Leiterschleife entwickelte. Sei diese Leiterschleife nun die Randkurve  $\partial A$  einer kompakten einfach zusammenhängende Oberfläche  $A$ , so ist der Magnetischen fluss  $\Phi_B$  durch die Oberfläche

$$\Phi_B = \int_A \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} \quad (3.1.7)$$

Nun wurde entdeckt, dass die zeitliche Änderung von  $\Phi_B$  verantwortlich war für die Induktionsströme. Statt der Strom betrachten wir nun jedoch die induzierte Spannung  $U_{\text{ind}}$ , die natürlich über das *Ohmsche Gesetz* mit einander verknüpft sind. Es wurde beobachtet, dass

$$U_{\text{ind}} = -k'' \frac{d}{dt} \Phi_B(t) \quad (3.1.8)$$

Dabei ist sowohl eine Änderung des Magnetfeldes als auch eine Änderung der durchflossenen Oberfläche für die Änderung von  $\Phi_B$  verantwortlich. Die Spannung entlang einer Raumkurve wurde in der Elektrostatik gegeben durch

$$U_C = \int_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (3.1.9)$$

sodass man für die Induzierte Spannung entlang  $\partial A$  die untere Beziehung findet

$$\oint_{\partial A} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -k'' \frac{d\Phi_B}{dt}(t) \quad (3.1.10)$$

Unter anwendung des Gesetzes von Stokes findet man nun

$$\int_{A(t)} d\mathbf{A}(t) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = -k'' \frac{d}{dt} \int_{A(t)} d\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (3.1.11)$$

In differentieller form findet man die homogene Maxwellgleichung für die Rotation von  $\mathbf{E}$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + k'' \frac{d}{dt} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.1.12)$$

#### Faradaysche Induktionsgesetz

Dabei ist  $k''$  wieder eine Konstante, die vom Einheitensystem abhängt. In SI gilt  $k'' = 1$ , während in Gauss-einheiten gilt  $k'' = 1/c$

### 3.1.3 Maxwell Gleichungen im Vakuum

Mit die obere Ergänzungen sind wir jetzt zum Punkt gekommen, wo wir die allgemeingültige Maxwellgleichungen (im Vakuum) zusammenfassen können. Aus die Maxwellgleichungen können alle Elektrodynamische Zusammenhänge hergeleitet werden. Sie lauten

inhomogen	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k\rho$	$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{k'}{k} \partial_t \mathbf{E} = 4\pi k' \mathbf{j}$
homogen	$\nabla \times \mathbf{E} + k'' \partial_t \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

  

	$k$	$k'$	$k''$	
SI	$1/4\pi\epsilon_0$	$\mu_0/4\pi$	1	$(\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2)$
Gauss	1	$1/c$	$1/c$	

## 3.2 Wellengleichung der Felder

### 3.2.1 Entkopplungsansatz der EM-Felder

Im letzten Abschnitt wurden die Maxwellgleichungen ergänzt. Es fällt auf, dass die Differentialgleichungen der elektrische und magnetische Felder gekoppelt sind. Nun wollen wir die Maxwellgleichungen entkoppeln. Weil es sowohl für das  $\mathbf{E}$ -Feld als das  $\mathbf{B}$ -Feld eine gekoppelte, als eine freie Differentialgleichungen gibt, ist es sinnvoll uns mal anzuschauen, was passiert, wenn wir die Rotation der Rotation der entsprechenden Felder näher betrachten.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.2.1)$$

Es gelten für 2-Mal stetig differenzierbare Skalar-  $\varphi$  bzw. Vektorfelder  $\mathbf{F}$  die folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \varphi &= \text{div grad } \varphi - \Delta \varphi \\ \text{rot rot } \mathbf{F} &= \text{grad div } \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Betrachten wir zunächst Felder im ladungsfreien Vakuum, d.h.

$$\rho(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

So kann man das  $\mathbf{E}$ -Feld wie folgt vom  $\mathbf{B}$ -Feld entkoppeln

$$\begin{aligned} \underbrace{\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E})}_{\propto \rho=0} - \Delta \mathbf{E} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times k'' \partial_t \mathbf{B} = -\partial_t \left( \underbrace{4\pi k' \mathbf{j}}_{=0} + \frac{k'}{k} \partial_t \mathbf{E} \right) \\ &\Leftrightarrow \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{E} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Analog geht dies für das  $\mathbf{B}$ -Feld

$$\begin{aligned} \underbrace{\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B})}_{=0} - \Delta \mathbf{B} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \left( \underbrace{4\pi k' \mathbf{j}}_{=0} + \frac{k'}{k} \partial_t \mathbf{E} \right) = -k'' \frac{k'}{k} \partial_t^2 \mathbf{B} \\ &\Leftrightarrow \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Dabei findet man für sowohl SI als Gausseinheiten die  $1/c^2$  Konstante vor die Zeitableitung. Diese Gleichung wird auch die **(homogene) Wellengleichung** genannt, denn ebene Wellen lösen diese Gleichung, was wir im nächsten Abschnitt zeigen werden. Weiter wird

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \equiv \square \quad (3.2.5)$$

die *d'Alembertsche Operator* genannt. Kompakt schreibt man

$$\square \mathbf{E} = 0 \quad \square \mathbf{B} = 0 \quad (3.2.6)$$

### 3.2.2 Allgemeine Lösung der Wellengleichung

#### Lösung der homogene Wellengleichung

Zunächst betrachten wir die Lösung der homogene Wellengleichung für allgemeine Felder, denn die Lösung wird unabhängig davon sein ob wir sie durchführen mit einem Skalarfeld oder einem Vektorfeld. Wir betrachten das Problem

$$\square \psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.2.7)$$

Um dieses Problem zu Lösen wenden wir die Fouriertransformation an. Es gilt zwar

$$\psi(\mathbf{r}, t) = F^{-1}[\hat{\psi}(\mathbf{k}, \omega)] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \hat{\psi}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} \quad (3.2.8)$$



Wenden wir nun Links und rechts den d'Alambertschen Operator an, so folgt

$$\square\psi(\mathbf{r}, t) = 0 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega (\omega^2/c^2 - \mathbf{k}^2) \hat{\psi}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega t} \quad (3.2.9)$$

daraus folgt dann

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}, \omega) (\omega^2/c^2 - \mathbf{k}^2) = 0 \quad (3.2.10)$$

Um eine nicht triviale Lösung für  $\hat{\psi}(\mathbf{k}, \omega)$  zu finden machen wir den Ansatz

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}, \omega) = a_{\pm}(\mathbf{k}) \delta(\omega \pm c|\mathbf{k}|) \quad (3.2.11)$$

Sodass  $\hat{\psi}_{\pm}(\mathbf{k}, \omega)$  nur an die Nullstellen von  $(\omega^2/c^2 - \mathbf{k}^2) = 0$  von null verschieden ist. Setzt man dies in Gleichung 3.2.8 ein, so folgt

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int d^3k \int d\omega (\hat{\psi}_+(\mathbf{k}, \omega) + \hat{\psi}_-(\mathbf{k}, \omega)) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int d^3k \int d\omega (a_+(\mathbf{k}) \delta(\omega + c|\mathbf{k}|) + a_-(\mathbf{k}) \delta(\omega - c|\mathbf{k}|)) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int d^3k \left( a_+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - c|\mathbf{k}|t)} + a_-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + c|\mathbf{k}|t)} \right) \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Mit den Anfangsbedingungen  $\psi(\mathbf{r}, t=0) = \psi_0(\mathbf{r})$  und  $\frac{d}{dt}\psi(\mathbf{r}, t=0) = \nu_0(\mathbf{r})$  folgt

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int d^3k [a_+(\mathbf{k}) + a_-(\mathbf{k})] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \quad (3.2.13)$$

und

$$\nu_0(\mathbf{r}) = \frac{ic|\mathbf{k}|}{4\pi^2} \int d^3k [a_+(\mathbf{k}) - a_-(\mathbf{k})] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \quad (3.2.14)$$

Damit sind man  $a_{\pm}(\mathbf{k})$  festgelegt, und folgt nach etwas umformen und eine Fourier-Rücktransformation

$$a_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left( \psi_0(\mathbf{r}) \mp \frac{i}{c|\mathbf{k}|} \nu_0(\mathbf{r}) \right) \quad (3.2.15)$$

Damit ist die Lösung der Wellengleichung für beliebige Anfangsbedingungen festgelegt. Es ist nun leicht zu zeigen dass

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \varphi)} \quad \textbf{Ebene Welle} \quad (3.2.16)$$

mit  $A \in \mathbb{C}$  und  $\mathbf{k}, \mathbf{r}, t, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$

### Lösung der inhomogenen Wellengleichung

Gesucht ist nun eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung für allgemeine Felder.

$$\square\psi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) \quad (3.2.17)$$

Für die EM-Felder werden wir dann den Spezialfall betrachten, wo die Störfunktion  $f(\mathbf{r}, t) = 0$  ist. Weil wir später auch inhomogene Wellengleichungen entgegenkommen werden, ist es aber Sinnvoll, direkt den Zur Lösung der Wellengleichung schauen wir uns die **d'Alambert-Greensche Funktion** an. Dabei sind  $G$  und  $\delta$  nun Funktionen von  $\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t'$  sodass

$$\square G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \equiv \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (3.2.18)$$

Es folgt nun nach die 2. Greensche Identität

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \int dt' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') f(\mathbf{r}', t') \quad (3.2.19)$$

Wobei man erstmal annimmt, dass die Randbedingungen verschwinden. Um die Lösung zu finden, möchten wir  $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$  im Fourierraum betrachten, denn dies wird das Finden einer Lösung vereinfachen. Per Definition gilt

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega G(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-i\omega(t - t')} \quad (3.2.20)$$

Und weiter ist für die Fouriertransformation der  $\delta$ -Distributionen

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\ \delta(t - t') &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int d\omega e^{i\omega(t - t')} \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

sodass zusammen mit Gleichung 3.2.18

$$\square G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \int d\omega e^{i\omega(t - t')} \quad (3.2.22)$$

folgt, was dann zusammen mit Gleichung 3.2.20

$$\begin{aligned} \square G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega G(\mathbf{k}, \omega) \square e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-i\omega(t - t')} \quad (\text{mit Gleichung 3.2.20}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega G(\mathbf{k}, \omega) \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 \right) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-i\omega(t - t')} \quad (3.2.23) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{i\omega(t - t')} \quad (\text{mit Gleichung 3.2.22}) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$G(\mathbf{k}, \omega) \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 \right) = 1 \quad (3.2.24)$$

Eine naive Lösung dieser Gleichung ist nun einfach die algebraische Manipulation durchzuführen woraus man

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(\omega^2/c^2 - \mathbf{k}^2)} \quad (3.2.25)$$

findet. Diese Lösung entspricht auch tatsächlich die spezifische Lösung für die inhomogene Wellengleichung. Jedoch ist dies nicht die einzige Lösung, denn, man kann Lösungen der Form

$$g(\mathbf{k}, \omega) \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 \right) = 0 \quad (3.2.26)$$

auf Gleichung 3.2.24 drauf addieren ohne die rechte Seite zu ändern. Hieraus folgen tatsächlich zwei weitere Lösungen, welche die Lösung der homogene Wellengleichung beschreiben.

Die allgemeinste Lösung dieser Gleichung wird dann gegeben durch die superposition aller mögliche Lösung

$$\begin{aligned} G(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{(\omega^2/c^2 - \mathbf{k}^2)} + a_+(\mathbf{k})\delta(\omega + c|\mathbf{k}|) + a_-(\mathbf{k})\delta(\omega - c|\mathbf{k}|) \\ &\equiv G_{\text{inh}}(\mathbf{k}, \omega) + g_-(\mathbf{k}, \omega) + g_+(\mathbf{k}, \omega) \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Nun fehlt uns nur die Rücktransformation nach Ortskoordinaten. Setzen wir die gefundene Greensche funktion in Gleichung 3.2.20 ein und setzt man dies weiter in Gleichung 3.2.19 ein. So findet man

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int d^3r' \int dt' \int d^3k \int d\omega G(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-i\omega(t - t')} f(\mathbf{r}', t') \\ &= \psi_{\text{inh}}(\mathbf{r}, t) + \psi_+(\mathbf{r}, t) + \psi_-(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

mit

$$\begin{aligned}
\psi_{\text{inh}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int d^3 r' \int dt' \int d^3 k \int d\omega G_{\text{inh}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-i\omega(t-t')} f(\mathbf{r}', t') \\
\psi_{\pm}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int d^3 r' \int dt' \int d^3 k \int d\omega g_{\pm}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-i\omega(t-t')} f(\mathbf{r}', t')
\end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Betrachten wir zunächst die Lösung der homogene Wellengleichung

$$\psi_{\text{hom}}(\mathbf{r}, t) = \psi_+(\mathbf{r}, t) + \psi_-(\mathbf{r}, t) \tag{3.2.30}$$

### 3.3 Energie des Elektromagnetischen Feldes

### 3.4 Wellengleichung der Potentiale

### 3.5 Bewegte und Beschleunigte Ladungen

## **3.6 Wellenleiter**

### 3.7 Wellenpaketen



## 3.8 Elektrodynamik in Materie



# Kapitel 4

## Relativistische Elektrodynamik

4.1	Koordinaten Transformationen . . . . .	46
4.2	Spezielles Relativitätsprinzip und Lorentz Transformation . . . . .	47
4.3	Relativistische Elektrodynamik . . . . .	48
4.4	Relativistische Wirkung . . . . .	49

## 4.1 Koordinaten Transformationen

## **4.2 Spezielles Relativitätsprinzip und Lorentz Transformation**

### 4.3 Relativistische Elektrodynamik

## 4.4 Relativistische Wirkung





# Kapitel 5

## Mathematische Grundlagen

<b>5.1</b>	<b>Dirac <math>\delta</math>-Distribution . . . . .</b>	<b>52</b>
5.1.1	Definierende Eigenschaft . . . . .	52
5.1.2	Herleitung $\delta$ -Distribution aus Bekannte Kurven . . . . .	52
5.1.3	Einige Wichtige Identitäten . . . . .	52
<b>5.2</b>	<b>Mehrdimensionale Ableitung: Der Nabla Operator . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>5.3</b>	<b>Taylor Entwicklung . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>5.4</b>	<b>Fourier Reihe und Transformation . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>5.5</b>	<b>Integrale im Euklidischen Raum . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>5.6</b>	<b>Integralsätze und Zerlegungssatz . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>5.7</b>	<b>Zerlegundssatz . . . . .</b>	<b>59</b>

## 5.1 Dirac $\delta$ -Distribution

Die Dirac  $\delta$ -Distribution (manchmal auch  $\delta$ -Funktion genannt) ist eine normierte Distribution, die es erschafft, mittels der Kalkulus infinitesimale Punkte oder infinitesimal dünne Flächen im Raum zu beschreiben. Für die Elektrodynamik ist dies wichtig, denn die Ladung ist eine eigenschaft von Punktteilchen. Auch ist die Delta distribution sehr nützlich um Flächenladungen zu beschreiben.

### 5.1.1 Definierende Eigenschaft

Die  $\delta$ -Distribution muss die folgende Bedingungen erfüllen

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 1$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Wobei die untere Zusammenhang vor allem andeutet dass die  $\delta$ -Distribution um  $\mathbf{r}_0$  zentriert ist und unendlich spitz ist. Es folgt für diese Distribution mit eine beliebige Testfunktion  $f(\mathbf{r})$ .

$$\int_V d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.1.2)$$

### 5.1.2 Herleitung $\delta$ -Distribution aus Bekannte Kurven

Die Dirac  $\delta$ -Funktion kann aus mehrere normierbare Kurven hergeleitet werden. Wichtig ist die Eigenschaft, dass die Funktion im limes einer Parameter stets spitzer wird, aber trotzdem normiert bleibt, sodass sich die Distribution immer mehr auf einem Punkt anhäuft. Einige Beispiele solcher Funktionen sind

#### 1. Kleine Stufe

$$\delta(x - x_0) = \lim_{b \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{b} & x \in [x_0 - \frac{b}{2}, x_0 + \frac{b}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.1.3)$$

#### 2. Gauß Kurve

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.1.4)$$

#### 3. Lorentz Kurve

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + (x - x_0)^2} \quad (5.1.5)$$

Diese Funktionen werden in der Praxis aber nie direkt angewandt, sind also nur für die Vorstellung gedacht.

### 5.1.3 Einige Wichtige Identitäten

#### 1. Fundamentalere Eigenschaft

$$\int d^3r f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r}_0)$$

#### 2. Ableitung der $\delta$ -Funktion

$$\delta'(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f'(\mathbf{r})$$

#### 3. Integration der $\delta$ -Funktion (Stufenfunktion)

$$\int_{-\infty}^x dx' \delta(x' - x_0) \equiv \Theta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & x > x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \Theta(x - x_0) = \delta(x - x_0)$$

4.  $\delta$ -Funktion einer andere Funktion

$$\delta(g(\mathbf{r})) = \sum_{\mathbf{r}_i} \frac{1}{|g(\mathbf{r}_i)|} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad \text{mit } \mathbf{r}_i \text{ Nullstellen von } g(x)$$

5. Multidimensionale  $\delta$ -Funktion Zerlegung in 1-D  $\delta$ -Funktionen (Kartesisch und Krummlinig)

$$\delta(\mathbf{r}(x, y, z)) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad \delta(\mathbf{r}(u, v, w)) = \frac{1}{\gamma(u, v, w)} \delta(u)\delta(v)\delta(w)$$

Wobei  $\gamma$  die Funktionaldeterminante ist

## 5.2 Mehrdimensionale Ableitung: Der Nabla Operator

## 5.3 Taylor Entwicklung

Die Taylorentwicklung ist eine Näherungsmethode wobei man Funktionen in Polynome zerlegt.

Allgemeine Taylorentwicklung (Kompakte Darstellung):

$$f(x) = e^{(x-x_0) \cdot D_{x'}} f(x') \Big|_{x'=x_0} \quad (5.3.1)$$

Wobei  $D_{x'}$  eine allgemeine Ableitungsoperator ist. In eine Dimension folgt für  $D_{x'} = \frac{d}{dx'}$  die bekannte Zusammenhang.

$$f(x) = e^{(x-x_0) \frac{d}{dx'}} f(x') \Big|_{x'=x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (5.3.2)$$

Eine Mehrdimensionale Taylorentwicklung wird analog gegeben wobei  $D_{x'} = \nabla_{x'}$  und  $x \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_0(x_{01}, \dots, x_{0n})$

$$f(x) = e^{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \nabla_{\mathbf{x}'}} f(\mathbf{x}') \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nabla_{\mathbf{x}'}^n f(\mathbf{x}')}{n!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^n \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}_0} \quad (5.3.3)$$

Man kann gegebenenfalls auch um nur ein Teil der Variablen  $\{x_i, \dots, x_j\} \subset \{x_1, \dots, x_n\}$  entwickeln. Dabei teilen wir die Variable auf in  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{z}$  und entwickeln dann um  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_i}_{\mathbf{y}}, \underbrace{x_{i+1}, \dots, x_n}_{\mathbf{z}}) = \mathbf{x}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{y} + \mathbf{z} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

Wir finden die Entwicklung

$$f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = e^{((\mathbf{y}+\mathbf{z})-\mathbf{z}_0) \nabla_{\mathbf{z}'}} f(\mathbf{y}, \mathbf{z}') \Big|_{\mathbf{z}'=\mathbf{z}_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nabla_{\mathbf{z}'}^n f(\mathbf{y}, \mathbf{z}')}{n!} (\mathbf{x} - \mathbf{z}_0)^n \Big|_{\mathbf{z}'=\mathbf{z}_0} \quad (5.3.4)$$

Schneidet man eine Taylorfunktion ab eine bestimmte Ordnung ab, so erhält man eine gute Näherung für kleine Gebiete um  $x_0$ . Die Mehrdimensionale Taylorentwicklung wird in der Elektrodynamik unter anderem für die Multipolentwicklung benutzt.

Es ist wichtig aufzumerken, dass nicht alle Funktionen eine Taylorentwicklung besitzen, sondern nur analytische (holomorphe) Funktionen, aber dies ist in der Regel ein Thema für die Mathematikvorlesung.

## 5.4 Fourier Reihe und Transformation

## 5.5 Integrale im Euklidischen Raum

## 5.6 Integralsätze und Zerlegungssatz



## 5.7 Zerlegundssatz



## Kapitel 6

# Ausgewählte Herleitungen

