RWTH Aachen Univ.-Prof. Dr. V. Meden
Institut für Theorie der Statistischen Physik Dr. U. Kahlert

WS 2019/20 **Theoretische Physik IV – 14. Übungsblatt** Abgabe: 29.1.2020

Musterlösung

---

1. Einstein-Bose-Kondensation in niedrigen Dimensionen (6 Punkte)

Wir betrachten das System in einem "Volumen" $V = L^d$ mit der Kantenlänge L. Die Umrechnung der $\boldsymbol{p}$–Summe in dem Ausdruck

$$N = \langle N \rangle = \sum_{\boldsymbol{p}} \left[z^{-1} \exp\left(\frac{\beta\, p^2}{2\, m}\right) - 1 \right]^{-1}$$

für die Teilchenzahl in ein p–Integral lautet in den Dimensionen $d = 1, 2, 3$ nach Abspaltung des Termes für den Grundzustand und den Überlegungen zur Zustandsdichte aus der Vorlesung

$$N = \frac{z}{1-z} + V \int_0^\infty D(\epsilon) \frac{1}{z^{-1} \mathrm{e}^{\beta\epsilon} - 1}\, d\epsilon$$

mit

$$D(\epsilon) = C_d \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{d/2} \epsilon^{d/2-1}$$

und

d:	1	2	3
C_d:	2	1	$1/\pi$

Die C_d entsprechen im Wesentlichen den K_d der Aufgabe 4 von Übung 2. Durch das coarse grainig des Phasenraums ist hier noch ein Faktor $(2\pi)^{-d}$ zu berücksichtigen ($C_d/4\pi = K_d/(2\pi)^d$).

Es ist wieder $z = \exp(\beta\mu)$ die Fugazität und $\mu < 0$ für Bosonen. Eine eventuelle Spin-Entartung wird nicht berücksichtigt.

Mit der Substitution $y = \beta\epsilon$ erhält man nun

$$\begin{aligned} N &= \frac{z}{1-z} + C_d \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{d/2} (k_B T)^{d/2} \int_0^\infty \frac{y^{d/2-1}}{z^{-1}\mathrm{e}^y - 1}\, dy \\ &= \frac{z}{1-z} + B_d \frac{V}{\lambda_T^3} \int_0^\infty \frac{y^{d/2-1}}{z^{-1}\mathrm{e}^y - 1}\, dy \end{aligned}$$

mit der der thermischen Wellenlänge

$$\lambda_T = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

und

d:	1	2	3
B_d:	$1/\sqrt{\pi}$	1	$2/\sqrt{\pi}$

Mit der angebenen Beziehung

$$\int_0^\infty dy\, \frac{y^\alpha}{z^{-1}\mathrm{e}^y - 1} = \Gamma(\alpha+1)\, g_{\alpha+1}(z), \qquad g_\alpha(z) = \sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k^\alpha}$$

erhalten wir nach Division durch L^d

$$\frac{N}{L^d} = \frac{1}{L^d}\,\frac{z}{1-z} + \frac{1}{\lambda_T^d}\, g_{d/2}(z).$$

Hier haben wir außerdem benutzt, dass

$$B_d\,\Gamma(d/2) = 1$$

für alle d, wie sich sofort bestätigen lässt. Im Bereich $0 < z < 1$ wird im thermodynamischen Limes $L \to \infty$ bzw. $N \to \infty$

$$\frac{1}{L^d}\,\frac{z}{1-z} \to 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\langle N_0\rangle}{N} = \frac{1}{N}\,\frac{z}{1-z} \to 0,$$

so dass dort

$$\frac{N}{L^d} = \frac{1}{\lambda_T^d}\, g_{d/2}(z)$$

zu lösen ist. Diese Gleichung hat in den Dimensionen $d = 1$ und $d = 2$ für alle "Dichten" N/L^d immer eine Lösung in $0 < z < 1$, weil (Vergleich mit harmonischer Reihe)

$$g_{d/2}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^{d/2}} \xrightarrow{z\to 1} \begin{cases} \infty & d = 1,2 \\ g_{3/2}(1) = \zeta(3/2) & d = 3 \end{cases}$$

Für $d = 1$ und $d = 2$ bedarf es also überhaupt nicht des Kondensats. Die Bildung eines Kondesats, also die makroskopische Besetzung des Grundzustandes führt mit

$$\langle N_0\rangle = \frac{z}{1-z} \Rightarrow z = \frac{\langle N_0\rangle}{1+\langle N_0\rangle} \approx 1 - \frac{1}{\langle N_0\rangle}$$

und $\langle N_0\rangle/N = \mathcal{O}(1)$ auf $z = 1 - \mathcal{O}(L^{-d})$ bzw. $z = 1 - \mathcal{O}(1/N)$. Wenn wir dieses für $L, N \to \infty$ erzwingen würden, kämen wir auf

$$\frac{\langle N_0\rangle}{N} = \frac{1}{N}\,\frac{z}{1-z} = 1 - \frac{1}{\lambda_T^d}\,\frac{L^d}{N}\, g_{d/2}(1),$$

was wegen des oben dargestellten Verhaltens von $g_{d/2}(z)$ für $d = 1$ und $d = 2$ keine sinnvolle Bedingung für das Kondensat darstellte. Die Bose–Einstein–Kondensation tritt also nur für $d > 2$ auf.

2. Bose- und Fermi-Gas in zwei Dimensionen (2+2+2 = 6 Punkte)

a) Der Erwartungswert der Teilchenzahl des Bosegases mit Entartungsfaktor $g = 2s + 1$ ist

$$N = \sum_{n_x,n_y} \frac{g}{\exp\left[\beta(\epsilon(\vec{p}) - \mu)\right] - 1}$$

Mit $\epsilon(\vec{p}) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2)$, wobei $p_{x,y} = \frac{2\pi\hbar}{L} n_{x,y}$.

$$\approx \int_0^\infty d\epsilon\, \rho(\epsilon) \frac{g}{\exp\left[\beta(\epsilon - \mu)\right] - 1}$$

Hierbei ist $\rho(\epsilon) = \sum_{n_x,n_y} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{p})) = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^2 \int d^2p\,\delta\left(\epsilon - \epsilon(\vec{p})\right)$

$$= \frac{L^2 m}{2\pi\hbar^2} \quad \text{(vergleiche mit Aufgabe 1 für } d = 2)$$

$$\rightarrow N \;=\; \frac{\overbrace{L^2}^{A}\, m k_B T g}{2\pi\hbar^2} \int_{-\frac{\mu}{K_B T}}^{\infty} dx \frac{\exp(-x)}{1-\exp(-x)}$$

$$= -\frac{Ag}{\lambda_T^2} \ln\left(1 - \exp\left[\frac{\mu}{k_B T}\right]\right) \quad \text{mit} \quad \lambda_T = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

$$\Rightarrow \mu_{\text{BG2D}} \;=\; k_B T \ln\left(1 - \exp\left[-\frac{n\lambda_T^2}{g}\right]\right) \quad \text{mit der Teilchendichte} \quad n = \frac{N}{A}\,.$$

Es ist $\mu_{\text{BG2D}} \leq 0$ wie für Bosonen erwartet.

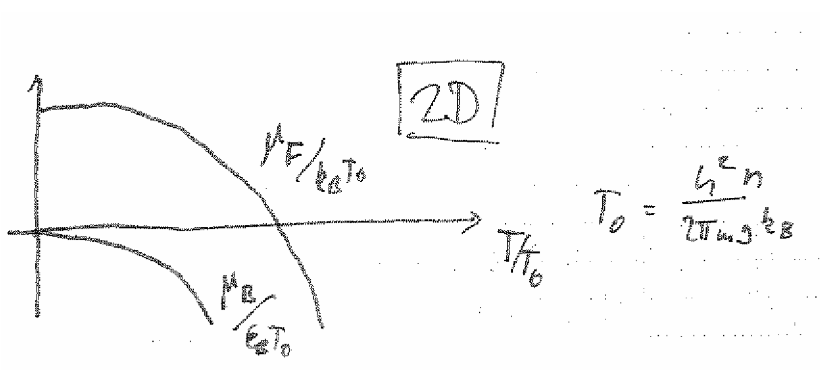
b) Die Herleitung für μ_{FG2D} ist analog zum Bosegas, hier muss nur das Vorzeichen in der Verteilung geändert werden:

$$N = \sum_{n_x, n_y} \frac{g}{\exp\left[\beta(\epsilon(\vec{p}) - \mu)\right] + 1}$$

Mit denselben Rechenschritten gelangt man dann zu

$$\mu_{\text{FG2D}} = k_B T \ln\left(\exp\left[\frac{n\lambda_T^2}{g}\right] - 1\right)$$

$$= \frac{k_B T n \lambda_T^2}{g} + k_B T \ln\left(1 - \exp\left[-\frac{n\lambda_T^2}{g}\right]\right)$$



c) Im klassischen Grenzfall ist $e^{\beta\mu} \ll 1$ und auch $\frac{n\lambda_T^2}{g} \ll 1$. Es ist dann

$$\ln\left(1 - \exp\left[-\frac{n\lambda_T^2}{g}\right]\right) \approx \ln\left(\frac{n\lambda_T^2}{g}\right)$$

und damit

$$\frac{\mu_{\text{BG2D}}}{k_B T} \approx \frac{\mu_{\text{FG2D}}}{k_B T} \approx \ln\left(\frac{n\lambda_T^2}{g}\right)\,.$$

Dies ist zu vergleichen mit dem klassischen dreidimensionalen Fall

$$\mu_{\text{kl}} = k_B T \ln\left(n\lambda^3\right)\,.$$