Musterlösung

---

1. Phasenraum des harmonischen Oszillators (2+2 = 4 Punkte)

a) Die Gleichung $H(q,p) = E$ kann als

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{m\omega^2 q^2}{2E} = 1$$

geschrieben werden, was eine Ellipse mit den Halbachsen $a = \sqrt{2mE}$ und $b = \sqrt{2E/m\omega^2}$ definiert. Das Volumen ist damit gegeben durch

$$V(E) = \int_{H(q,p)\leq E} dq\, dp = \pi ab = \frac{2\pi E}{\omega}.$$

b) Quantenmechanisch ist

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow n(E) = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\,.$$

Da $n = 0$ schon der erste Zustand ist, ist die Anzahl Zustände die kleiner als eine gegebene Energie E sind ($N(E) = n(E) + 1$):

$$N(E) \leq \frac{E}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}.$$

Phasenraumvolumen pro Zustand:

$$\frac{V(E)}{N(E)} = \frac{2\pi\hbar}{1 + \frac{\hbar\omega}{2E}} = 2\pi\hbar\left(1 - \frac{\hbar\omega}{2E} + \dots\right) = 2\pi\hbar.$$

2. Weg(un)abhängigkeit der Arbeit (5 Punkte)

Damit die Zustände P_1, V_1 und P_2, V_2 auf der Adiabaten $P\,V^\gamma$ =const liegen, muss $P_1\,V_1^\gamma = P_2\,V_2^\gamma$ erfüllt sein. Die Adiabate selbst ist durch

$$P = P_2\left(\frac{V_2}{V}\right)^\gamma$$

darstellbar.

$$W = \int_{V_1}^{V_2} dV\, P(V)$$

für die Wege (a),(b),(c),(d).

(a)

$$W_a = P_2\,(V_2 - V_1).$$

(b)

$$W_b = P_2 V_2^\gamma \int_{V_1}^{V_2} dV\, V^{-\gamma} = P_2 V_2^\gamma \frac{V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}}{\gamma - 1} = \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{\gamma - 1}.$$

$$\frac{W_b}{W_a} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{(V_2/V_1)^\gamma - V_2/V_1}{V_2/V_1 - 1}.$$

Für $V_2/V_1 = 4$ und $\gamma = 5/3$ wird $W_b/W_a = 3,04$.

(c)

$$W_c = \frac{P_1 + P_2}{2} (V_2 - V_1), \qquad \frac{W_c}{W_a} = \frac{1}{2} \left[(V_2/V_1)^\gamma + 1 \right].$$

Für die angegebenen Werte wird $W_c/W_a = 5,54$.

(d)

$$W_d = P_1 (V_2 - V_1), \qquad \frac{W_d}{W_a} = (V_2/V_1)^\gamma.$$

Für die angegebenen Werte wird $W_d/W_a = 10,08$.

4. Ideales Gas harter Kugeln in einer Dimension (6+2 = 8 Punkte)

a) Das Phasenraumvolumen ist:

$$\begin{aligned}
\Phi(E,V,N) &= \frac{1}{h^N} \int dx_1 \dots dx_N dp_1 \dots dp_N\, \Theta(E - H(x,p)) \\
&= \frac{Q_N}{h^N} \cdot \int dp_1 \dots dp_N \underbrace{\Theta(E - \frac{1}{2m} \sum p_i^2)}_{\sum p_i^2 \le 2mE \quad \text{(N-dim. Kugel)}} \\
&= Q_N \cdot \frac{C_N(\sqrt{2mE})}{h^N}
\end{aligned}$$

mit

$$Q_N = \int_{\sigma/2}^{V-(N-1/2)\sigma} dx_1 \int_{x_1+\sigma}^{V-(N-3/2)\sigma} dx_2 \cdots \int_{x_{N-1}+\sigma}^{V-\sigma/2} dx_N\,.$$

Hierbei sind die x_i die Mittelpunkte der Kugeln und es wird integriert über den maximalen x–Bereich, wenn x_{i-1} gegeben ist und alle Kugeln $j > i$ maximal gegen den rechten Rand V geschoben sind.

Es muss kein kombinatorischer Faktor eingeführt werden, da die Kugeln durch ihre Anordung auf der x-Achse unterscheidbar sind.

Mit der Transformation $y_l = x_l - (l - 1/2)\sigma$ wird dann

$$Q_N = \int_0^{V^*} dy_1 \int_{y_1}^{V^*} dy_2 \int_{y_2}^{V^*} dy_3 \cdots \int_{y_{N-1}}^{V^*} dy_N \quad \text{mit } V^* = V - N\sigma$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{V^*} dy_1 \int_{y_1}^{V^*} dy_2 \int_{y_2}^{V^*} dy_3 \ldots \underbrace{\int_{y_{N-2}}^{V^*} dy_{N-1}(V^* - y_{N-1})}_{\frac{1}{2}(V^*-y_{N-2})^2} \\
&= \int_0^{V^*} dy_1 \int_{y_1}^{V^*} dy_2 \int_{y_2}^{V^*} dy_3 \ldots \underbrace{\frac{1}{2}\int_{y_{N-3}}^{V^*} dy_{N-2}(V^* - y_{N-2})^2}_{\frac{1}{3!}(V^*-y_{N-3})^3} \\
&\ldots \\
&= \int_0^{V^*} dy_1 \int_{y_1}^{V^*} dy_2 \int_{y_2}^{V^*} dy_3 \ldots \frac{1}{n!}\int_{y_{N-n-1}}^{V^*} dy_{N-n}(V^* - y_{N-n})^n \\
&= \int_0^{V^*} dy_1 \frac{1}{(N-1)!}(V^* - y_1)^{N-1} = -\frac{1}{N!}\left[(V^* - y_1)^N\right]_0^{V^*} = \frac{1}{N!}\,{V^*}^N\,.
\end{aligned}
$$

Damit erhält man man für das Phasenraumvolumen:

$$
\begin{aligned}
\Phi(E,V,N) &= \frac{(2\pi m E)^{N/2}}{\Gamma(N/2+1)} \cdot \frac{{V^*}^N}{N! h^N} \\
&\equiv K_N (mE)^{N/2}\, {V^*}^N\,,
\end{aligned}
$$

wobei die Konstante K_N nur von der Teilchenzahl N abhängt.

b) Damit wird die Entropie:

$$
\begin{aligned}
S(E,V,N) &= k_B \ln \Phi(E,V,N) \\
&= k_B \ln K_N + k_B N \ln V^* + k_B \frac{N}{2}\ln(mE)\,.
\end{aligned}
$$

Die Temperatur ergibt sich zu

$$
\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} = \frac{N k_B}{2}\,\frac{1}{E}
$$

und damit ist (diesmal nicht gefragt):

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{N}{2} k_B T \\
C_V &= \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N} = \frac{N}{2} k_B\,.
\end{aligned}
$$