Lösungssammlung Übungsblätter Theo IV
Blatt 1

Luc Kusters

WS 19/20

Die Lösungen die hier zusammengefasst wurden, kommen großenteils von Oliver Liang Wen, obwohl ich selber einige Sachen hinzugefügt habe. Ich möchte mich insbesondere für seine gute und regelmäßige festlegung der Übungsgruppenmitschriften bedanken, ohne welches dieses Projekt gar nicht möglich wäre.

Die Lösungen gehören zu den Übungsblätter der von V. Meden gehaltene Vorlesung zur theoretische Physik IV: Statistische Physik und Thermodynamik an der RWTH Aachen, WS19/20.

Weder absolute Vollständichkeit noch absolute Korrektheit kann garrantiert werden! Bei Anmerkungen, Fragen, Korrekturen oder sonstiges, könnt ihr mich gerne per email erreichen:
ljbkusters@gmail.com

1. **Kombinatorik**
   a) Anzal der 4-Buchstaben-Wörter die aus dem Alphabet zu bilden sind:
   26^4
   b) Anzal der 4-Buchstaben-Wörter die aus dem Alphabet zu bilden sind, ohne Wiederholung von Buchstaben:
   $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = \frac{26!}{21!}$
   Allgemein: $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
   c) Aus dem Alphabet 5 Buchstaben wählen, ohne Buchstaben zu wiederholen:
   $$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad (n = 26,\ k = 5)$$
   d) Aus dem Alphabet 5 Buchstaben wählen, mit wiederholung:
   $$\binom{n+k-1}{k} \quad (n = 26,\ k = 5)$$
   e) Buchstaben aus $\{p, h, y, s, i, k\}$ anordnen:
   $6!$
   f) Buchstaben aus $\{k, o, m, b, i, n, a, t, o, r, i, k\}$ (12 Buchstaben) anordnen:
   $12!/(2! \cdot 2! \cdot 2!)$

2. **Poissonverteilung**
Allgemeines:

$$P_N(m) = W_N(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \quad n = \frac{N+m}{2}$$

$$Np(1-p) \gg 1 \rightarrow \text{ Gauss}$$

$$p \ll 1, n \ll N \rightarrow \text{ Poisson}$$

a) Zeige: $\frac{N!}{(N-n)!} \approx N^n$ $(N \gg 1,\, n \ll N)$

$$\frac{N!}{(N-n)!} = \underbrace{N(N-1)\dots(N-n+1)}_{n\,\text{mal}} \frac{\cancel{(N-n)!}}{\cancel{(N-n)!}} \quad N \gg 1,\, n \ll N \Rightarrow N-1 \approx N-n \approx N$$

$$\approx N^n$$

b) Zeige: $(1-p)^{N-n} \approx e^{-Np}$ $(N \gg 1,\, n \ll N)$

$$y = (1-p)^{N-n} \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = (N-n)\ln(1-p)$$

$$(N-n) \approx N \quad \ln(1-p) = (0 - p + O(p^2)) \approx -p$$

$$\ln y \approx -Np$$

$$\Leftrightarrow y \approx e^{-Np}$$

c) Finde die Poissonverteilung

$$P_N(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

$$= \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{N-n}$$

$$\approx \frac{N^n}{n!} p^n e^{-Np} \quad \lambda := pN$$

$$\approx \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

d) Berechne: $\langle n \rangle$, Zeige: $\langle n \rangle = \lambda$

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Term für n=0 fällt weg denn $0 \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \right)}_{\overset{\text{Def.}}{=} e^{\lambda}}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

3. **Gammafunktion**
Allgemeines: Gamma Funktion $\Gamma(z) = \int_0^\infty dt\, t^{z-1} e^{-t} \quad \mathrm{Re}[z] > 0$

a) Zeige: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

$$\Gamma(z+1) \overset{!}{=} z\Gamma(z)$$
$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty dt\, t^z e^{-t}$$
$$= \left[-t^z e^{-t}\right]_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty dt\, z t^{z-1}\left(-e^{-t}\right) \quad \text{(mit partielle Integration nach t)}$$
$$= z\int_0^\infty dt\, t^{z-1} e^{-t} = z\Gamma(z)$$

b) Zeige: $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$.

$$\Gamma(n+1) \overset{!}{=} n! \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{(a)}$$
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{C} \quad \text{Es gilt also auch: } \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

Mit Vollständige induktion:
IA. $n = 1$

$$\Gamma(n+1)|_{n=1} = \Gamma(2) = 1\Gamma(1) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} = 1 = 1! = n!|_{n=1}$$

IS. $n \to n+1$

$$\Gamma((n+1)+1) = (n+1)\Gamma(n+1) \overset{\text{IA.}}{=} (n+1)n! = (n+1)!$$

Damit ist die Beziehung nach dem Prinzip der vollständige Induktion gezeigt.

c) Leite her: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad n \gg 1$ (Stirlingsche Formel).

$$f(t) = t^n e^{-t} \Leftrightarrow \ln(f(t)) = n\ln t - t$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(f(t)) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \frac{n}{t} - 1 = 0 \Leftrightarrow n = t$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\ln(f(t))\right|_{t=n} < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \Rightarrow \text{Sattelpunkt Nährenung geeignet}$$

Taylore $\ln(f(t))$ um $t_0 = n$.

$$\ln(f(t)) = [n\ln n - n]_{(0)} + \left[\underbrace{\left(\frac{n}{n} - 1\right)}_{0}(t-n)\right]_{(1)} - \left[\frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}\frac{(t-n)^2}{2}\right]_{(2)} + O\left([t-n]^3\right)$$
$$\Leftrightarrow f(t) \approx e^{n\ln n - n - \frac{1}{2n}(t-n)^2} = n^n e^{-n} e^{-\frac{1}{2n}(t-n)^2}$$
$$\Leftrightarrow n! = \Gamma(n+1) \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2n}(t-n)^2} dt$$

Substituiere $\tau = t - n \quad d\tau = dt \quad \tau(0) = -n \quad \tau(\infty) = \infty$

$$\Leftrightarrow n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-n}^\infty e^{-\frac{1}{2n}\tau^2} d\tau \quad \text{(Gauß Integral für große n)}$$
$$\overset{n\gg 1}{\approx} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2n}\tau^2} d\tau$$
$$= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n := F_S(n)$$

(Relative) Ungenauigkeit: $\epsilon_n = \frac{n! - F_S(n)}{n!}$
$\epsilon_5 = 0,017 \quad \epsilon_{10} = 0,008 \quad \epsilon_{100} = 0,0008$ (Monoton fallend)

4. **Shot-noise und Poisson-Verteilung**

a) Zeige: $P_n(\Delta t) = \frac{(\langle j\rangle \Delta t)^n}{n!} e^{-\langle j\rangle \Delta t}$

Man überlege sich daß für $dt \ll 1$:
$P_1(dt) = \langle j\rangle dt$
$P_n(dt) = 0 \quad n > 1$ Weil mehr als 2 Messungen auf Zeitskala dt unmöglich!
$P_0(dt) = 1 - \langle j\rangle dt$ Wahrscheinlichkeitserhaltung

Man erinnere sich:

$$\begin{aligned} P(A \,\text{und}\, B) &= P(A)P(B) && \text{falls nicht korreliert} \\ P(A \,\text{oder}\, B) &= P(A) + P(B) && \text{falls nicht korreliert} \end{aligned}$$

i. $P_0(\Delta t + dt) = P_0(\Delta t)P_0(dt)$
(Weil $P_0(\Delta t + dt) = P(0 \text{ in } \Delta t \text{ und } 0 \text{ in } dt)$ und Erreignisse nicht korreliert!)

ii. $P_n(\Delta t + dt) = P_n(\Delta t)P_0(dt) + P_{n-1}(\Delta t)P_1(dt)$
(Weil $P_n(\Delta t + dt) = P(n \text{ in } \Delta t \text{ und } 0 \text{ in } dt$ ODER $(n-1)$ in Δt und 1 in $dt)$ und höchstens 1 Erreignis in dt bzw. $P_n(dt) = 0$ für $n > 1$)

Taylore $P_n(\Delta t + dt)$ um $dt = 0$: $P_n(\Delta t + dt) = P_n(\Delta t) + P_0'(\Delta t)dt + O\big([dt]^2\big)$

$$\begin{aligned} P_n(\Delta t + dt) &\approx P_n(\Delta t) + P_n'(\Delta t)dt \\ &\stackrel{!}{=} P_n(\Delta t)P_0(dt) + P_{n-1}(\Delta t)P_1(dt) \\ &= P_n(\Delta t)(1 - \langle j\rangle dt) + P_{n-1}(\Delta t)(\langle j\rangle dt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n'(\Delta t) &= -\langle j\rangle P_n(\Delta t) + \langle j\rangle P_{n-1}(\Delta t) \\ \text{Ansatz: } P_n(\Delta t) &= f_n(\Delta t)e^{-\langle j\rangle \Delta t} \\ P_n'(\Delta t) &= \big(f_n'(\Delta t) - f_n(\Delta t)\langle j\rangle\big)e^{-\langle j\rangle \Delta t} \end{aligned}$$

für n=0

$$\begin{aligned} P_0(\Delta t + dt) &\approx P_0(\Delta t) + P_0'(\Delta t)dt \\ &\stackrel{!}{=} P_0(\Delta t)P_0(dt) \\ &= P_0(\Delta t)(1 - \langle j\rangle dt) \\ \Leftrightarrow P_0'(\Delta t) &\stackrel{!}{=} -\langle j\rangle P_0(\Delta t) \end{aligned}$$

$$(f_0' - f_0\langle j\rangle)e^{-\langle j\rangle \Delta t} = -\langle j\rangle f_0 e^{-\langle j\rangle \Delta t}$$

$$f_0' \stackrel{!}{=} 0 \text{ und } f_0 \stackrel{!}{=} 1 = const \Rightarrow f_0(0) = 1$$

$$\begin{aligned}
f_n' &= \langle j\rangle f_{n-1} \to \text{rekursiv} \\
f_1' &= \langle j\rangle \underbrace{f_0}_{=1} = \langle j\rangle \quad \text{integriere nach } d(\Delta t) \text{ von 0 bis } \Delta t_1 \\
f_1 &= \langle j\rangle \Delta t_1 \\
f_2' &= \langle j\rangle \underbrace{f_1}_{=\langle j\rangle \Delta t_1} = \langle j\rangle^2 \Delta t_1 \quad \text{integriere nach } d(\Delta t_1) \text{ von 0 bis } \Delta t_2 \\
f_2 &= \langle j\rangle^2 \frac{1}{2}(\Delta t_2)^2 = \left.\frac{(\Delta t_n \langle j\rangle)^n}{n!}\right|_{n=2} \\
&\dots \quad \text{(vollständige Induktion)} \\
\Leftrightarrow f_n &= \frac{(\Delta t\langle j\rangle)^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P_n(\Delta t) = \frac{(\Delta t\langle j\rangle)^n}{n!} e^{-\langle j\rangle \Delta t}$$

b) Berechne $\langle n\rangle$
Definiere $\langle j\rangle \Delta t = \lambda$
wie in Aufgabe 2d $\langle n\rangle = \lambda = \langle j\rangle \Delta t$

c) Berechne $\langle n\rangle^2$

$$\begin{aligned}
\langle n^2\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} \qquad \left(\frac{n}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}\right) \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}\right) \lambda^{n-1} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} \lambda^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \lambda^{n-1} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left(0 + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \lambda^{n-2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \lambda^{n-1} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left(\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\right) \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}\right) \\
&= \lambda^2 + \lambda \\
\sigma_n^2 &= \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = \lambda
\end{aligned}$$