Lösungssammlung Übungsblätter Theo IV
Blatt 6

Luc Kusters

WS 19/20

Die Lösungen die hier zusammengefasst wurden, kommen großenteils von Oliver Liang Wen, obwohl ich selber einige Sachen hinzugefügt habe. Ich möchte mich insbesondere für seine gute und regelmäßige festlegung der Übungsgruppenmitschriften bedanken, ohne welches dieses Projekt gar nicht möglich wäre.

Die Lösungen gehören zu den Übungsblätter der von V. Meden gehaltene Vorlesung zur theoretische Physik IV: Statistische Physik und Thermodynamik an der RWTH Aachen, WS19/20.

Weder absolute Vollständichkeit noch absolute Korrektheit kann garrantiert werden! Bei Anmerkungen, Fragen, Korrekturen oder sonstiges, könnt ihr mich gerne per email erreichen:
ljbkusters@gmail.com

1. **Spins im Magnetfeld: Thermodynamik**

Allgemeines:
Aus aufgabe 5.2: $Z = (2\cosh\frac{\mu_0 B}{k_B T})^N$ für N Spins im Magnetfeld B.

a) Berechne die freie Energie: $F = -k_B T \ln Z$.

$$F = -Nk_B T \ln\left(2\cosh\frac{\mu_0 B}{k_B T}\right)$$

b) Berechne die Entropie: $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$.

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \underbrace{-k_B \ln Z}_{(1)} - k_B T \frac{1}{Z}\underbrace{\frac{\partial Z}{\partial T}}_{(2)}$$

$$(1):\ -k_B \ln Z = -\frac{F}{T} \qquad (2):\ \frac{\partial Z}{\partial T} = 2\sinh\left(\frac{\mu_0 B}{k_B T}\right)\frac{\mu_0 B}{k_B}\frac{-1}{T^2}$$

Einsetzen liefert:

$$S = -\frac{F}{T} + k_B x \underbrace{\frac{\sinh x}{\cosh x}}_{\tanh x} \qquad x = \frac{\mu_0 B}{k_B T}$$

$$S = Nk_B[\ln(2\cosh x) - x\tanh x]$$

c) Berechne die spezifische Wärme: $C_B = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B$. Skizziere $C_B(T)$, wie verhält sich die Funktion für große und kleine T?

$$\frac{\partial x}{\partial T} = -\frac{x}{T}$$

$$\Leftrightarrow C_B = T\left[Nk_B\left(\cancel{\underbrace{\frac{\sinh x}{\cosh x}}_{\tanh x}\frac{-x}{T}} - \left(\cancel{\frac{-x}{T}\tanh x} + \frac{x}{\cosh^2 x}\frac{-x}{T}\right)\right)\right] = Nk_B x^2 \cosh^{-2}(x)$$

$$C_B(T) = Nk_B \frac{\mu_0^2 B^2}{k_B^2 T^2}\frac{1}{\cosh^2\frac{\mu_0 B}{k_B T}}$$

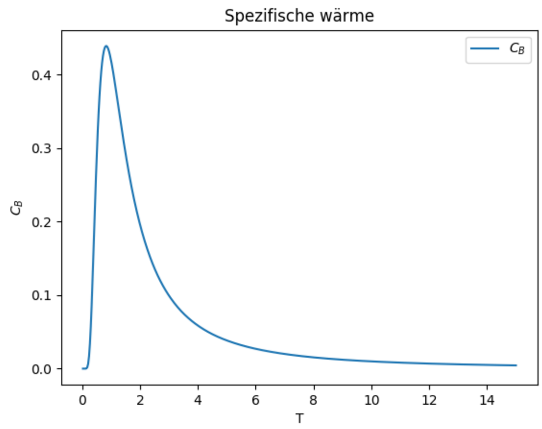

Abbildung 1: Skizze $C_B(T)$ bei willkürliche Konstanten

Wie man sieht, geht C_B nach 0 für T groß und T klein ($k_BT \gg \mu_0 B$.)

d) Bestimme die Magnetisierung $M = -\frac{\partial F}{\partial B}$ und Suzeptibilität $\chi = \frac{\partial M}{\partial B}\big|_{B=0}$

$$M = N\mu_0 \tanh\left(\frac{\mu_0 B}{k_B T}\right) = 2N\mu_0 \langle s_i \rangle$$

$$\chi = \frac{N\mu_0^2}{k_B T}$$

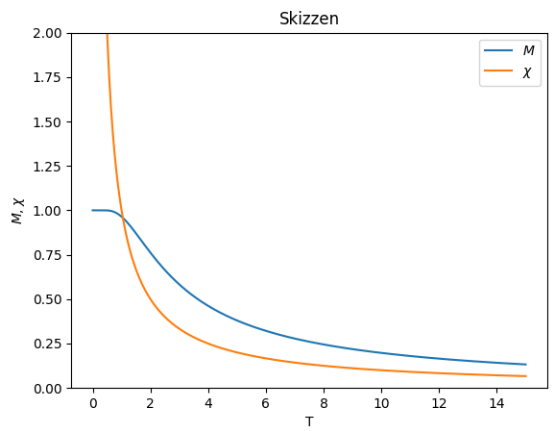

Abbildung 2: Skizzen M und χ

e) Bestimme die innere Energie $\langle E \rangle = F + TS$ und drücke diese durch M und B aus. Gebe eine physikalische Interpretation

$$\langle E \rangle = F + TS = N[-k_BT \ln\cosh(x) + k_BT \ln\cosh x + \mu_0 B \tanh(x)]$$
$$= -MB$$

Physikalische Interpretation: Die Energie ist die Summe aus alle mikroskopische Energieen $\epsilon_i = -2\mu_0 B s_i$ wobei M eine makroskopische Größe ist den "gesammt Spin" angibt.

2. **Adiabatische Entmagnetisierung**

Allgemeines: Paramagnetischen System im homogenen Magnetfeld B, thermisch isoliert mit ortsfesten magnetische Momente (keine Volumen Arbeit)

a) Drücke die Temperaturänderung bei adiabatische Änderung des B feldes als Funktion von $C_B = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_B$ und $\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B$ aus. Benutze:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial B}\right)_T = VT\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B - VM$$

Wir suchen: $\left(\frac{\partial T}{\partial B}\right)_{\text{ad}}$

$$\delta Q = dE + VMdB = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_B dT + VMdB + \left(\frac{\partial E}{\partial B}\right)_T dB$$

Wir betrachten ein adiabatisches Prozess $\Rightarrow \delta Q = 0$

$$0 = C_B dT + VMdB + \left(\frac{\partial E}{\partial B}\right)_T dB$$

Benutze den Hinweis:

$$\Leftrightarrow 0 = C_B dT + VT\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B dB$$

Multipliziere mit $\frac{1}{dB}$ und forme um.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial B}\right)_{\text{ad}} = -\frac{VT}{C_B}\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B$$

b) Sei $M = aB/VT$ und $C_B = b/T^2$ ($a, b > 0$ const.) Wie ändert sich die Temperatur beim adiab. Ausschalten des B Feldes? (Hinweis: $\delta W = -VMdB$)

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B = -\frac{aB}{VT^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial B}\right)_{\text{ad}} = \frac{aBT}{b}$$

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT'}{T} = \int_{B_0}^{B} \frac{aB'}{b} dB'$$

i. $T(B) = T_0 \exp\left(\frac{a}{2b}(B^2 - B_0^2)\right)$

ii. $T(0) = T_0 \exp\left(-\frac{a}{2b}B_0^2\right) < T_0$

3. **Beziehungen zwischen Antwortfunktionen**

Gegeben ist ein System das durch S, T, V und P beschrieben wird. Es folgt dass das System beschrieben werden kann durch $C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$, $C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$, $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$, $\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$, und $\alpha_P = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$. Verifiziere jeweils ob die Ergebnisse stimmen für ein ideales Gas.

a) Zeige dass $\frac{C_P}{C_V} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}$ gilt.

$$(i) : \frac{C_P}{C_V} = \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V} \quad \text{und} \quad (ii) : \frac{\kappa_T}{\kappa_S} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S}$$

Es gelten die Rechenregeln:

$$(1) : \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z} \qquad (2) : \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

$$(3) : \left(\frac{\partial f(x(y,z), y(x,z))}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$$

mit (i) und (2):

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S}{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S}$$

Nutze jetzt (1) links oben und rechts unten. Wende danach (3) an (oben und unten.)

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S}{\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T} = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}$$

Wende noch einmal (1) an:

$$\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S} \overset{(ii)}{=} \frac{\kappa_T}{\kappa_S} = \frac{C_P}{C_V}$$

Für ein ideales Gas gilt: $PV = Nk_BT$ und $\langle E \rangle = \frac{3}{2}Nk_BT$

$C_P = \frac{5}{2}Nk_B$ und $C_V = \frac{3}{2}Nk_B$, d.h. $\frac{C_V}{C_P} = \frac{5}{3}$.

Weiter gilt

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\partial_P(Nk_BT/P) = \frac{1}{P}$$

$\kappa_S = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$ wobei $V(S,P) = \frac{N}{\left(\frac{3}{2}k_BT\right)^{3/2}} \exp\left(\frac{S}{k_BN}\right)$

... Lösung unklar, ich werde dies noch nachfragen.

$$\Rightarrow \kappa_S = \frac{3}{5}\frac{1}{P}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\kappa_T}{\kappa_S} = \frac{5}{3} = \frac{C_P}{C_V}$$

b) Zeige dass $C_P - C_V = TV\frac{\alpha_P^2}{\kappa_T}$ gilt.

$$\begin{aligned}
C_P - C_V &= T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V\right] \\
&\text{Todo: Schrit?} \\
&= T\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P} \\
&\text{Todo: Schrit?} \\
&= T \quad \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T}_{-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -V\alpha_P} \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}_{-\frac{1}{V\kappa_T}} \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}_{V\alpha_P} \\
&= TV\frac{\alpha_P^2}{\kappa_T}
\end{aligned}$$

4. **Legendre-Transformation**

Gegeben System ist entarteten Fermi Gas mit Energie:

$$E(S,V,N) = a\frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} + b\frac{S^2}{V^{2/3}N^{1/3}} \qquad a,b>0$$

Es gilt weiter: $T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N}$ $\quad P = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N}$ $\quad \mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V}$ und $dE = TdS - PdV + \mu dN$

a) Zeige, dass E extensiv ist

Extensiv heißt: $E(S,N,V) \to E(\lambda S, \lambda N, \lambda V) = \lambda E(S,V,N)$

Beweis folgt direkt durch einsetzen:

$$\begin{aligned} E(\lambda S,\lambda N,\lambda V) &= a\frac{N^{5/3}}{V^{2/3}}\left(\frac{\lambda^{5/3}}{\lambda^{2/3}}\right) + b\frac{S^2}{V^{2/3}N^{1/3}}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^{2/3}\lambda^{1/3}}\right) \\ &= \lambda E \end{aligned}$$

b) Zeige dass für extensives E die Gibbs-Duhem-Relation gilt

$$SdT - VdP + Nd\mu = 0 \quad \text{(GD-Relation)}$$

Sei $\lambda = 1+\epsilon$ mit $\epsilon > 0$ und $\epsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} E(\lambda S,\lambda N,\lambda V) &= E + \frac{\partial E}{\partial S}\epsilon S + \frac{\partial E}{\partial V}\epsilon V + \frac{\partial E}{\partial N}\epsilon N \\ &= E + \epsilon(TS - PV + \mu N) \\ &\overset{!}{=} E + \epsilon E \end{aligned}$$

Es folgt also wegen extensivität:

$$E = TS - PV + \mu N$$

Aber $dE = TdS - PdV + \mu dN$ (Allgemein) und

$$\begin{aligned} d(E_{\text{ext}}) = d(TS - PV + \mu N) &= TdS + SdT - PdV - VdP + \mu dN + Nd\mu \\ \Leftrightarrow dE &= \underbrace{TdS - PdV + \mu dN}_{dE} + SdT - VdP + Nd\mu \\ \Leftrightarrow 0 &= SdT - VdP + Nd\mu \end{aligned}$$

c) Berechne die Legendre-Transformierte $F(T,V,N)$

Allgemeines: $X = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$, $Y = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$ und $F = f - xX$ bzw $F' = f - yY$

Hier: $S \to T$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} = \frac{2bS}{V^{2/3}N^{1/3}} := X$$

Finde jetzt: $S(X)$ (d.h. Löse auf nach S und setze X ein.)

$$S(X) = \frac{XV^{2/3}N^{1/3}}{2b}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} F(T,V,N) &= f(S(T,\alpha),\alpha) - S(T,\alpha)T \quad \alpha = N,V \\ &= a\frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} + \frac{1}{4b}V^{2/3}T^2 - \frac{1}{2b}V^{2/3}N^{1/3}T \\ &= a\frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} - \frac{1}{4b}V^{2/3}N^{1/3}T^2 \end{aligned}$$

d) Verifiziere die Integrabilitätsbedingung für dF bzgl. T und V

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV$$

Es soll gelten: $\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$

$$\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{1}{2b} V^{2/3} N^{1/3} T \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \frac{1 N^{1/3}}{3b V^{1/3}} T$$

$$\frac{\partial F}{\partial V} = -\frac{2aN^{5/3}}{3V^{5/3}} + \frac{2}{12b}\frac{N^{1/3}}{V^{1/3}} T^2 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{3b}\frac{N^{1/3}}{V^{1/3}} T$$

Damit ist die Integrabilitätsbedingung gezeigt.