Lösungssammlung Übungsblätter Theo IV
Blatt 7

Luc Kusters

WS 19/20

Die Lösungen die hier zusammengefasst wurden, kommen großenteils von Oliver Liang Wen, obwohl ich selber einige Sachen hinzugefügt habe. Ich möchte mich insbesondere für seine gute und regelmäßige festlegung der Übungsgruppenmitschriften bedanken, ohne welches dieses Projekt gar nicht möglich wäre.

Die Lösungen gehören zu den Übungsblätter der von V. Meden gehaltene Vorlesung zur theoretische Physik IV: Statistische Physik und Thermodynamik an der RWTH Aachen, WS19/20.

Weder absolute Vollständichkeit noch absolute Korrektheit kann garrantiert werden! Bei Anmerkungen, Fragen, Korrekturen oder sonstiges, könnt ihr mich gerne per email erreichen:
ljbkusters@gmail.com

1. **Adiabatengleichung des idealen Gases**
   Das System ist ein ideales Gas, N Teilchen, fN Freiheitsgraden. Es gilt:

$$(i) : E = \frac{f}{2} N k_B T \qquad (ii) : PV = N k_B T$$

Zeige mittels 1. HS, daß für ein adiabatisches Prozess und N const. gilt:

$$(1) : PV^{(f+2)/f} = \text{const.} \qquad (2) : VT^{f/2} = \text{const.}$$

$$\text{1. HS: } dE = \delta W + \delta Q$$

Adiabatisches Prozess $\delta Q = 0$

$$\Rightarrow dE = \delta W = -PdV$$

Aber weil $E = E(T) \Rightarrow dE = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right) dT$ wobei $\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right) = \frac{f}{2} N k_B$ also gilt:

$$dE = \frac{f}{2} N k_B dT = -PdV = -\frac{N k_B T}{V} dV$$

$$\Leftrightarrow \frac{f}{2} \frac{1}{T} dT = -\frac{1}{V} dV$$

$$\Leftrightarrow \ln T^{f/2} = -\ln V + C$$

$$\Leftrightarrow \ln VT^{f/2} = C$$

$$\Leftrightarrow VT^{f/2} = C' = \text{const.} \quad \text{(Lösung zu (2))}$$

Mit (ii) folgt $T = \frac{PV}{N k_B}$. Setze ein in die obigen Lösung:

$$V \left(\frac{PV}{N k_B} \right)^{f/2} = C'$$

$$\Leftrightarrow V^{f/2+1} P^{f/2} = (N k_B)^{f/2} C' = C''$$

$$\Leftrightarrow P^{f/2} V^{(f+2)/2} = C''$$

$$\Leftrightarrow PV^{(f+2)/f} = (C'')^{2/f} = C''' = \text{const.}$$

2. **Konstruktion der freien Energie**

Ein gas habe folgende Eigenschaften:

1. Bei speziellen Temperatur T_0, N fest und speziellen V_0 bis beliebige V, verrichtet das Gas die Arbeit:

$$W_g = Nk_BT \ln \frac{V}{V_0}$$

2. Die Entropie wird gegeben durch:

$$S(T,V) = Nk_B \frac{V_0}{V}\left(\frac{T}{T_0}\right)^a \qquad a = \text{const.}$$

a) Schränke a ein unter anwendung der thermischen Stabilität.

Thermische stabilität: $C_V > 0$ Es folgt

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = Nk_B \frac{V_0}{V} a \left(\frac{T}{T_0}\right)^a \overset{!}{>} 0 \Leftrightarrow a > 0$$

b) Berechne die freie Energie $F = F(T,V)$ relativ zu $F_0 = F(T_0, V_0)$. Benutze dass $dF = -SdT - PdV$

Es gilt $dF = -SdT - PdV$ und $-PdV = W_g = NkT_0 \ln \frac{V}{V_0}$.

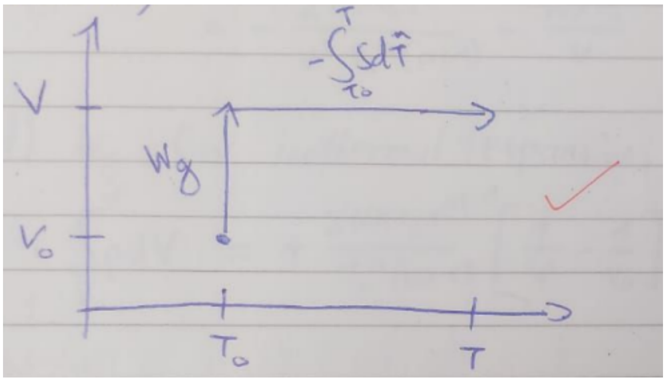

Abbildung 1: Skizze des gesuchten Prozeßes

Wir suchen also noch $-\int_{T_0}^T S(T')dT' := I$

$$\begin{aligned} I &= -\int_{T_0}^{T} Nk_B \frac{V_0}{V}\left(\frac{T'}{T_0}\right)^a dT' \\ &= -\frac{Nk_BV_0}{VT_0^a}\frac{1}{a+1}\left[T^{a+1} - T_0^{a+1}\right] \end{aligned}$$

Insgesammt:

$$dF = -SdT - PdV$$

$$\Leftrightarrow F(T,V) - F(T_0,V_0) = \frac{Nk_BV_0}{VT_0^a}\frac{1}{a+1}T^{a+1} - Nk_BT_0 \ln V + \frac{Nk_BV_0}{VT_0^a}\frac{1}{a+1}T_0^{a+1} + Nk_BT_0 \ln(V_0)$$

c) Finde $P = P(T,V)$

$$\begin{aligned} P(T,V) &= -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \\ &= Nk_BT_0\left[\frac{1}{V} - \frac{1}{a+1}\frac{V_0}{V^2}\left(\left(\frac{T}{T_0}\right)^a - 1\right)\right] \end{aligned}$$

d) Berechne die vom Gas geleistete Arbeit ($V_0 \to V$) für beliebige T.

$$W = \int_{V_0}^{V} P(V', T) dV' = Nk_B T_0 \left[\ln \frac{V}{V_0} - \frac{1}{a+1} \left(\left(\frac{T}{T_0} \right)^{a+1} - 1 \right) \left(\frac{1 - V_0}{V} \right) \right]$$

3. **Wärmekapazität für magnetische Systeme**

a) Konstruiere aus $E(S,B)$, $dE = TdS - VMdB$ ein Potential $\tilde{E}(S,M)$.
Es gilt $dE = TdS - VMdB$ und $d(MB) = BdM + MdB$
Es folgt

$$dE = TdS - Vd(MB) + VBdM \Leftrightarrow d(E + VMB) = TdS + VBdM$$

Man definiere $\tilde{E} = E + VBM$ und findet $d\tilde{E} = TdS + VBdM$

b) Zeige dass $\tilde{F}(T,M)$ $d\tilde{F} = -SdT + VBdM$ erfüllt.
Wir möchten jetzt $\tilde{E}(S,M) \to \tilde{F}(T,M)$ finden, sodass $d\tilde{F} = -SdT + VBdM$
Man definiere $\tilde{F} = \tilde{E} - TS$ mit $d(TS) = TdS + SdT$ Es folgt direkt:

$$d\tilde{F} = d\tilde{E} - TdS - SdT = -SdT + VBdM$$

c) Leite aus (b) eine Maxwell-Relation her. Woher rühren solche Relationen?

$$d\tilde{F} = -SdT + VBdM$$

Es folgt: $-S = \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial T}\right)_M$ und $VB = \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial M}\right)_T$. Aus der integrabilitätsbedingung folgt nun:

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T = V\left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_M$$

Maxwell relationen folgen immer aus der kombination eines Differentials zusammen bit der Integrabilitätsbedingung.

d) Drücke $C_B - C_M$ durch partielle Ableitungen (von S) aus und wende die in (c) gefundene MWR an sodass es nur noch partielle Ableitungen von B bzw. M übrig bleiben.

$$C_B - C_M = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B - T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M$$

$$-T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M = T\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_S$$

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B = T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M + \left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B\right]$$

Einsetzen liefert:

$$C_B - C_M = \cancel{T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M} + T\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B - \cancel{T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M}$$

$$= T\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B \overset{\text{MWR (b)}}{=} -TV\left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_M\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B$$

e) Zeige dass $\{M, B, T\}$ zusammen eine Zustandsgleichung erfüllen. Zeige damit dass

$$C_B - C_M = VT\left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_T^{-1}\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B^2$$

Wann gilt $C_B > C_M$?

$$-TV\left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_M\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B = TV\left(\frac{\partial B}{\partial M}\right)_T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B$$

$$= TV\left(\left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_T\right)^{-1}\left(\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B\right)^2 \qquad C_B > C_M \text{ falls } \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_T > 0$$

4. **Mean-field theory**

Gegeben ist ein hamiltonian

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h_z \sum_i \sigma_i \quad J > 0$$

a) Scheibe die Hamliton-Funktion in der form $H = -\sum_i h_{\text{eff},i}\sigma_i \quad h_{\text{eff},i} = h_i + h_z$

Jede spin liegt in ein lokales Feld bestehend aus das Äussere B-Feld und die interne Interaktion.

Bei ein kubishes Gitter mit N Spins, hat jede Spin $k = 6$ (direkte) Nachbarn. Um doppel-zählen zu vermeiden, summiert man nur über die Nachbarn σ_j wo $j \neq i$ mit abstand 1 (also keine diagonale ww) und halbiert das Endergebnis.

die summe über $\langle ij \rangle$ kann dadurch also durch $\sum_i^N \sum_{j>i}^N$ beschrieben werden.

$$H = -J\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{k} \sigma_i \sigma_j - h_z \sum_{i=0}^{N} \sigma_i$$

$$H = -\sum_i \left[J\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} \sigma_j + h_z \right] \sigma_i$$

$$= -\sum_i [h_{\text{eff},i}]\sigma_i$$

Man kann davon ausgehen, dass die Umgebung für jede Spin etwa gleich aussieht, und, dass deswegen die Interaktion mit anderen Spins für jede einzelne Spin etwa gleich ist. D.h.: $\sigma_j \to \langle \sigma \rangle$ ist eine plausibele Annahme.

$$h_{\text{eff},i} = \frac{1}{2}J\sum_{j=1}^{k} \sigma_j + h_z = \frac{1}{2}Jk\langle\sigma\rangle\Big|_{k=6} + h_z = 3J\langle\sigma\rangle + h_z$$

b) Die mittlere Magnetisierung M ist gegeben durch $M = N\langle \sigma \rangle$.

Zeige dass $m := \frac{M}{N} = \tanh\left(\frac{h_z}{k_B T} + \frac{KJm}{2k_B T}\right)$, benutze dabei das Ergebnis von Aufgabe 5.2.

Ergebnis 5.2: $\frac{M}{2N} = \frac{1}{2}\tanh(\beta\mu_0 B)$

In aufgabe 5.2 war $\mu_0 B$ die energie von 1 spin in ein N Spin System im äußeren Magnetfeld ohne interne Interaktion. Jetzt wird die Energie gegeben durch unser Hamilton funktion (wobei $\mu_0 B \to h_{\text{eff}}$). Man findent analog jetzt

$$m = \tanh(\beta h_{\text{eff}}) = \tanh\left(\frac{h_z}{k_B T} + \frac{kJ\langle\sigma\rangle}{2k_B T}\right) \qquad \langle\sigma\rangle = m$$

c) Betrachte den Fall wo $h_z = 0$. Überleche dich, dass es ein T_c gibt sodass für $T < T_c$ $m > 0$ gilt und für $T > T_c$ $m = 0$ sein muss. Gebe eine physikalische Interpretation und bestimme T_c

$$m = \tanh\left(\frac{kJm}{2k_BT}\right) \quad h_z = 0$$
$$m \coloneqq \tanh\left(\alpha\frac{m}{T}\right) = 1 - \frac{2}{e^{2\alpha\frac{m}{T}} + 1}$$

Man weiß das $m \in [-1, 1]$ (gegeben durch tanh Funktion). Für $T >> 2\alpha m$ geht $\exp\left(2\alpha\frac{m}{T}\right) \to 0$ und $m \to 0$

Um T_c zu finden kann man jetzt die Funktion $g(m)$ definieren mit $g(m) = \tanh\left(\frac{kJm}{2k_BT}\right) - m$. Man suche den Wert $T = T_c$ ab dem $g(m)$ genau eine Nullstelle hat. Man weiß das $\tanh x \to 1$ für große Werte von x. also für $g(m \gg 1) \to -m$ Weil $g(0) = \tanh(0) - 0 = 0$ darf dies die einzige Nullstelle sein, und muss die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}g'(m) = 0$ sein damit die Funktion monoton fällt. Nutze dass $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \approx \frac{x}{1}$ für x klein:

$$g(m \approx 0) \approx \frac{kJm}{2k_BT} - m$$
$$g'(m \approx 0) \approx \frac{kJ}{2k_BT} - 1 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{bei } T = T_c$$

Man verliert bei diese näherung keine genauigkeit für T_c weil man nur an $g'(m = 0)$ (bei genau $m = 0$) interessiert ist.

$$\frac{kJ}{2k_BT_c} = 1 \Leftrightarrow T_c = \frac{kJ}{2k_B}$$

d) Bestimme näherungsweise das Verhalten $m(T)$ in der Nähe von T_c

Man entwickle die Funktion nach T um T_c.

$$m(T_c) = \tanh\frac{kJm}{2k_BT_c} = \tanh m$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\tanh\frac{x}{T}\right) = \frac{1}{\cosh^2 x/T}\frac{-x}{T^2} \quad x/T_c = m$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}T} = -\frac{1}{\cosh^2 m}\frac{m}{T_c}$$

In linearer Ordnung folgt also:

$$m(T) = \tanh m - \frac{m}{\cosh^2 m}\left(\frac{T}{T_c} - 1\right) + O\left([T - T_c]^2\right)$$

Notiz: Ich garantiere NICHT das dies richtig ist!