RWTH Aachen Univ.-Prof. Dr. V. Meden
Institut für Theorie der Statistischen Physi Dr. U. Kahlert

WS 2019/20 **Theoretische Physik IV – 4. Übungsblatt** Abgabe: 6.11.2019

Musterlösung

---

1. Relative Breite (4 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\ln P(E) = -\ln \Omega_{\text{tot}} + \ln \Omega(E) + \ln \Omega'(E_g - E).$$

Entwicklung um das Maximum E_M liefert

$$\ln P(E) = \ln P(E_M) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dE^2}\big(\ln \Omega(E) + \ln \Omega'(E_g - E)\big)\Big|_{E=E_M}(E - E_M)^2 + \dots,$$

da die erste Ableitung verschwindet. Mit der obigen Annahme für Ω und Ω' folgt

$$\ln P(E) \approx \ln P(E_M) - \frac{\lambda}{2}(E - E_M)^2, \quad \lambda = \frac{f}{E_M^2} + \frac{f'}{(E_M - E_g)^2} > 0.$$

Damit gilt

$$P(E) \approx P(E_M)\, e^{-\lambda(E-E_M)^2/2},$$

d.h. eine Gauss-Verteilung mit Breite

$$\Delta E = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{E_M}{\sqrt{f}} \frac{1}{\sqrt{1 + \underbrace{\frac{f'}{f}\frac{E_M^2}{(E_g - E_M)^2}}_{=x}}} \sim \frac{E_M}{\sqrt{f}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta E}{E_M} \sim \frac{1}{\sqrt{f}}.$$

Hierbei wurde benutzt, dass mit Vorlesung gilt $E_M \propto f$ und $E' = E_g - E_M \propto f'$ (s. auch konkret das Beispiel des idealen Gases), womit dann gilt $x = \mathcal{O}(f/f') = \mathcal{O}(1)$.

2. Ideales Gas (1+1+1+2+2 = 7 Punkte)

a)

$$S(E, V, N) = k_B N \ln c + k_B N \ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3Nk_B}{2}\ln\left(\frac{E}{N}\right)$$

b)

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \quad \to \quad E = \frac{3}{2}Nk_BT.$$

c) Mit dem Druck und (b) gilt

$$P = \frac{2}{3}\frac{E}{V} = \frac{Nk_BT}{V}.$$

d) Zunächst muss die Entropie als Funktion von V, N und T angegeben werden, mit (b) gilt

$$S(T, V, N) = k_B N \ln c + k_B N \ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3Nk_B}{2}\ln\left(\frac{3}{2}k_BT\right).$$

Damit

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2} N k_B.$$

Für C_P muss man die Entropie als Funktion von P, N und T angegeben, mit (c) gilt

$$S(T, P, N) = k_B N \ln c + k_B N \ln \left(\frac{k_B T}{P} \right) + \frac{3 N k_B}{2} \ln \left(\frac{3}{2} k_B T \right).$$

Damit

$$C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = \frac{5}{2} N k_B = C_V + N k_B.$$

e)

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{N k_B T}{V P^2} = \frac{1}{P} > 0.$$

Die Erhöhung des Druckes führt zu einer Veringerung des Volumens, wie erwartet.