Lösungssammlung Übungsblätter Theo IV
Blatt 3

Luc Kusters

WS 19/20

Die Lösungen die hier zusammengefasst wurden, kommen großenteils von Oliver Liang Wen, obwohl ich selber einige Sachen hinzugefügt habe. Ich möchte mich insbesondere für seine gute und regelmäßige festlegung der Übungsgruppenmitschriften bedanken, ohne welches dieses Projekt gar nicht möglich wäre.

Die Lösungen gehören zu den Übungsblätter der von V. Meden gehaltene Vorlesung zur theoretische Physik IV: Statistische Physik und Thermodynamik an der RWTH Aachen, WS19/20.

Weder absolute Vollständichkeit noch absolute Korrektheit kann garrantiert werden! Bei Anmerkungen, Fragen, Korrekturen oder sonstiges, könnt ihr mich gerne per email erreichen:
ljbkusters@gmail.com

3. **Vollständiges Integral und integrierender Faktor**

a) Finde eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Vollständigkeit eines Differentials df

$$df = a(x, y)dx + b(x, y)dy$$
$$\text{mit } a = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \quad b = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$$

Andere Schreibweise: $df = (\boldsymbol{\nabla} f(x, y)) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$

wegen $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} f = 0$ gilt auch $\boldsymbol{\nabla} \times \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix} = 0$

Eine notwendige Bedingung ist daher:

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$$

Und es ist ausreichend wenn:

$$x, y \in G \,|\, G \text{ einfach zusammenhängend}$$

b) Es sei $\Phi(x, y) = C = const.$ eine Lösung der DGL: $dy/dx = -a(x, y)/b(x, y)$ ZZ:

$$\frac{\partial_x \Phi(x, y)}{a(x, y)} = \frac{\partial_y \Phi(x, y)}{b(x, y)} = \mu(x, y)$$

und dass $\mu(x, y)df$ ein vollständiges Differential ist.

Weil $\Phi(x, y) = C \Leftrightarrow d\Phi == \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \Phi_x dx + \Phi_y dy = 0$

Teile beidseitig durch dx

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} = \Phi_x + \Phi_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

Wir wissen bereits dass $y' = -a/b$

San setze dies ein:

$$\Phi_x + \Phi_y \left(-\frac{a}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\Phi_x}{a} = \frac{\Phi_y}{b} := \mu(x, y)$$

Es muss noch gezeigt werden dass μdf vollständig ist.

Man erinnere sich dass $df = adx + bdy$

$$\mu df = \mu a dx + \mu b dy$$

Setzte jetzt bei dx $\mu = \frac{\Phi_x}{a}$ ein und bei dy $\mu = \frac{\Phi_y}{b}$ ein. Es folgt direkt:

$$\mu df = \frac{\Phi_x}{a} adx + \frac{\Phi_y}{b} bdy = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = d\Phi$$

Welches nach Definition ein vollständiges Differential ist.

c) bestimme $\mu(x,y)$ für

$$df = aydx - bxdy$$
$$df = y^3dx - (2xy^2+1)dy$$

i) $df = aydx - bxdy$

Finde Φ so, sodass $\Phi = const.$ und Lösung zu $y' = -a/b$

Definiere: $a' = ay$ und $b' = -bx$

Es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a'}{b'} \Leftrightarrow \frac{1}{ay}dy = \frac{1}{bx}dx$$
$$\Leftrightarrow \ln y = \frac{a}{b}\ln x + c$$
$$\Leftrightarrow \ln y - \frac{a}{b}\ln x = c := \Phi$$

Notiz: Φ hat keine eindeutige Lösung! Eine andere Lösung wäre z.B.: $y = \tilde{c}x^{a/b} \Leftrightarrow \frac{y}{x^{a/b}} = \tilde{c} = \Phi$

Überprüfe dass $\Phi_x/a' = \Phi_y/b'$

$$\Phi_x = -\frac{a}{b}\frac{1}{x}$$
$$\Phi_y = -\frac{1}{y}$$

Es folgt:

$$\Phi_x/a' = \Phi_y/b' \Leftrightarrow \frac{-\cancel{a}}{bx}\frac{1}{\cancel{a}y} = \frac{1}{y}\frac{-1}{bx} = (-bxy)^{-1}$$

Die Bedingung ist also erfüllt: $\mu(x,y) = (-bxy)^{-1}$

(auch der integrierender Faktor ist **nicht** eindeuig!)

ii) $df = y^3dx + (2xy^2+1)dy$

Definiere $a' = y^3$ $b' = 2xy^2 + 1$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y^3}{2xy^2+1}$$

Definiere: $z = 2xy^2 + 1$

$$dz = 2y^2dx + 4xydy$$
$$\Leftrightarrow dx = \frac{1}{y^3}(df - zdy)$$
$$x = \frac{z-1}{2y^3}$$
$$dz = \frac{2}{y}df - \frac{2}{y}dy$$
$$df = 1dy + \frac{y}{2}dz$$

Löse das Problem jetzt mit dy und dz statt dx und dy!

Definiere: $a = 1$ und $b = \frac{y}{2}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = -\frac{y}{2} \Rightarrow y = Ce^{-z/2}$$
$$\Leftrightarrow e^{-z/2}/y = C := \Phi$$
$$\Leftrightarrow \mu = \Phi_y/1 = 2\Phi_z/y = -\frac{1}{y}$$