Lösungssammlung Übungsblätter Theo IV
Blatt 4

Luc Kusters

WS 19/20

Die Lösungen die hier zusammengefasst wurden, kommen großenteils von Oliver Liang Wen, obwohl ich selber einige Sachen hinzugefügt habe. Ich möchte mich insbesondere für seine gute und regelmäßige festlegung der Übungsgruppenmitschriften bedanken, ohne welches dieses Projekt gar nicht möglich wäre.

Die Lösungen gehören zu den Übungsblätter der von V. Meden gehaltene Vorlesung zur theoretische Physik IV: Statistische Physik und Thermodynamik an der RWTH Aachen, WS19/20.

Weder absolute Vollständichkeit noch absolute Korrektheit kann garrantiert werden! Bei Anmerkungen, Fragen, Korrekturen oder sonstiges, könnt ihr mich gerne per email erreichen:
ljbkusters@gmail.com

3. **Van-der-Waals Gas**
Allgemeines:

$$\left(P + a\frac{N^2}{V^2}\right)(V - Nb) = Nk_BT \quad a, b > 0$$

a) Interpretiere die Terme aN^2/V^2 und Nb, was ist ihre Relation zum idealen Gas?

aN^2/V^2 ist eine interactions Term (ideales Gas hat keine interne WW). Nb Schränkt das volumen ein, man hat eine endliche Ausdehnung der Gasteilchen, die nicht gleichzeitig den gleichen Raum besetzen können.

Ideales gas: $a = b = 0$

b) Drücke die Funktion durch die teilchendichte aus ($n = N/V$). Skizziere $P(n)$ für verschiedene Werte von T. Was passiert für $n \to \frac{1}{b}$? Gebe eine Physikalische interpretation. Überzeuge dich, dass es eine kritische Temperatur T_c gibt, unterhal derer $P(n)$ monoton steigend ist.

$$(P + an^2)(V - Vnb) = Nk_BT \Leftrightarrow P(n) = \frac{nk_BT}{1 - nb} + an^2$$

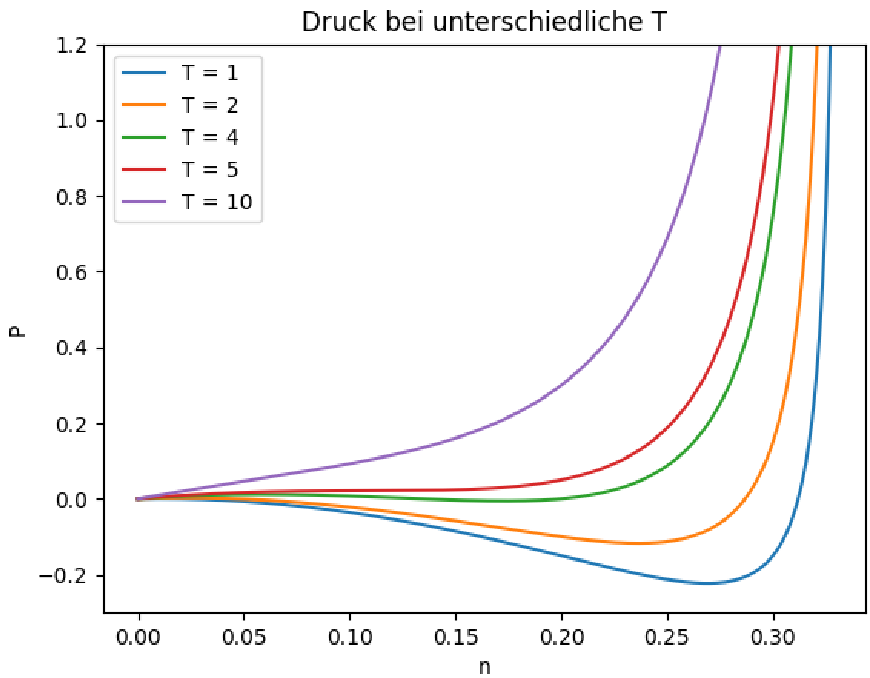

Abbildung 1: Druck gegen dichte für $a = 5$, $b = 3$, $k_B = 10^{-1}$ (willkürliche Werte)

Für $n \to b$ divergiert den Druck nach undendlich. Physikalische Interpretation: Raum ist komplett gefüllt mit Teilchen, kein freien Platz mehr.

Bei $T = T_c$ gibt es ein Sattelpunkt (in Abbildung **??** $T_c \approx 5$). Bei $T < T_c$ gibt es eine schwankung nach unten, oberhalb von T_c gibt ist die Funktion monoton steigend.

c) Bestimme die kritische Temperatur T_c sowie krit. Druck P_c und krit. Dichte n_c als Funktion von a und b.

Es soll gelten: $\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{n_c} = 0$

$$\frac{k_B T}{(1-k_B n_c)^2} - 2an_c = 0 \Leftrightarrow k_B T_c = 2an_c(1-k_B n_c)^2$$

und: $\left.\frac{\partial^2 p}{\partial n^2}\right|_{n_c} = 0$

$$k_B T_c = \frac{a}{b}(1-bn_c)^3$$

$$\rightarrow n_c = \frac{1}{3b} \quad P_c = \frac{a}{27b^2}k_B T_c \quad T_c = \frac{8a}{27k_B b}$$

d) Bestimme das universelle Verhältnis $k_B T_c n_c / P_c$

Einsetzen liefert: 8/3

e) Führe Dimensionslose Parameter ein: $P' = P/Pc$, $T' = T/T_c$, $n' = n/n_c$. Was passiert zu die a, b abhängigkeit? Was bedeutet dies für die Isotherme unterschiedliger Gase mit bekannte kritische Werte?

$$P' = \frac{8n'T'}{3-n'} - 3(n')^2$$

Isothermen werden in dieser Darstellung gleich aussehen.

f) Bestimme das Vorzeichen der isothermen Kompressibilität κ_T für $T < T_c$. Gebe eine physikalische Erklärung.

$\kappa_T = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial n}{\partial p}\right)_T < 0$ für ein Teil der Kurve. Hier findet ein Phasenwechsel statt (Gasteilchen verschwinden in eine flüßige Form, und erringeren damit den Druck).

4. **Negative Temperaturen**

a) Verwende $\ln n! \approx n \ln n - n \quad (n \gg 1)$ um die Entropie $S(E)$ als Funktion von E zu bestimmen. Skizziere $S(E)$

$$S = k_B \ln \Omega \approx k_B \left(N \ln N - \frac{N+m}{2} \ln \left(\frac{N+m}{2} \right) + \frac{N+m}{2} - \frac{N-m}{2} \ln \left(\frac{N-m}{2} \right) + \frac{N-m}{2} \right)$$

$$= k_B \left(N \ln N - \frac{N+m}{2} \ln \left(\frac{N+m}{2} \right) - \frac{N-m}{2} \ln \left(\frac{N-m}{2} \right) \right)$$

Es gilt $m = -\frac{E}{\mu_0 B}$

$$S(E,N) = k_B \left(N \ln N - \frac{N - E/\mu_0 B}{2} \ln \left(\frac{N - E/\mu_0 B}{2} \right) - \frac{N + E/\mu_0 B}{2} \ln \left(\frac{N + E/\mu_0 B}{2} \right) \right)$$

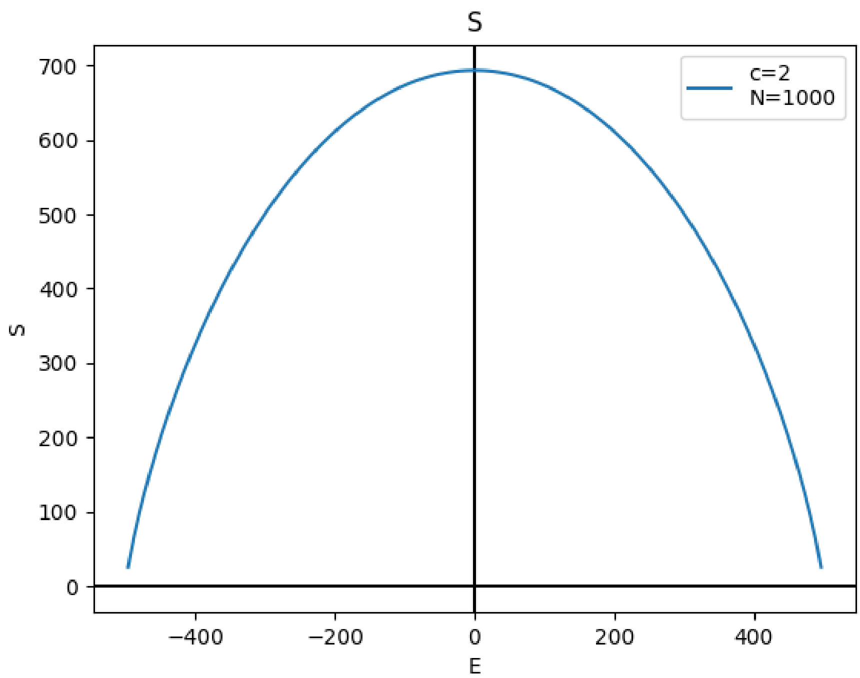

Abbildung 2: Entropie gegen Energie bei N=1000 (c=$\mu_0 B$)

b) Skizziere $\beta(E) = k_B \frac{\partial S}{\partial E}$, es gilt $\beta(0) = 0$. Welches Vorzeichen hat $\frac{\partial \beta}{\partial E}$?

(Siehe Abbildung 3)

Weil die Funktion monoton fallend ist, folgt direkt dass $\frac{\partial \beta}{\partial E} < 0$

c) Skizziere $T = \frac{1}{k_B \beta}$. Was passiert bei $E = 0$?

(Siehe Abbildung 4)

E divergiert nach $\pm\infty$.

d) Begrunde, dass T mit E ansteigt.

Weil β eine monoton fallende Funktion ist, und $T \propto 1/\beta$, ist T monoton steigend (außer $E = 0$, wo T nicht definiert ist).

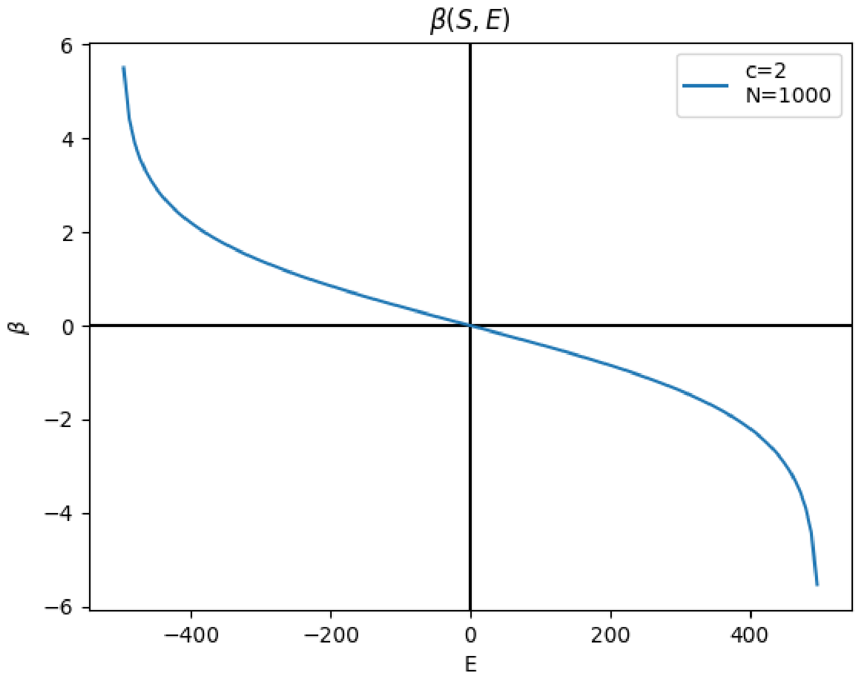

Abbildung 3: β gegen Energie (c=$\mu_0 B$)

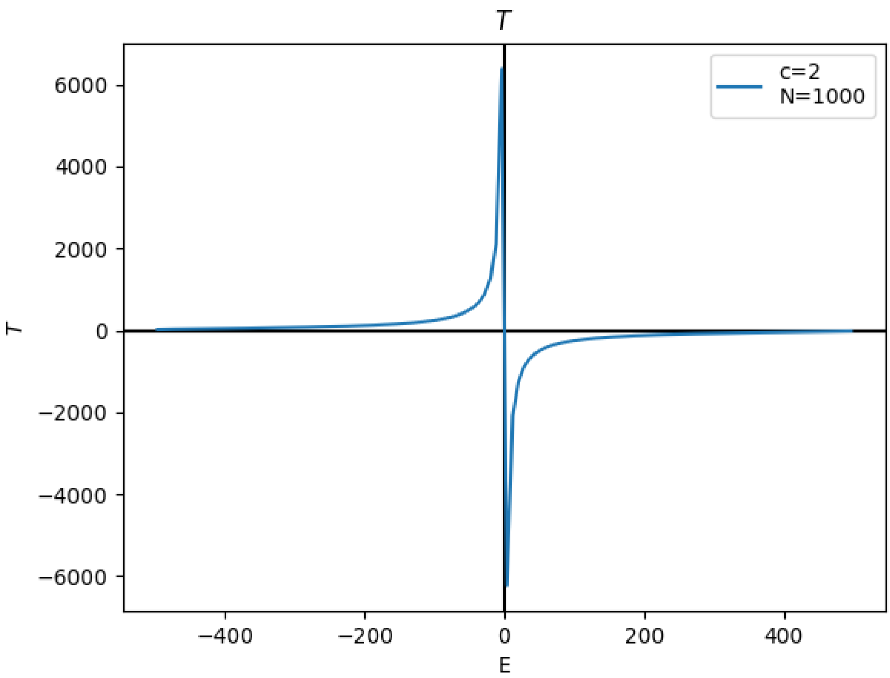

Abbildung 4: Temperatur Skizze (c=$\mu_0 B$)