

Lösungssammlung Übungsblätter Theo IV

Blatt 8

Luc Kusters

WS 19/20

Die Lösungen die hier zusammengefasst wurden, kommen größtenteils von Oliver Liang Wen, obwohl ich selber einige Sachen hinzugefügt habe. Ich möchte mich insbesondere für seine gute und regelmäßige festlegung der Übungsgruppenmitschriften bedanken, ohne welches dieses Projekt gar nicht möglich wäre.

Die Lösungen gehören zu den Übungsblätter der von V. Meden gehaltene Vorlesung zur theoretische Physik IV: Statistische Physik und Thermodynamik an der RWTH Aachen, WS19/20.

Weder absolute Vollständigkeit noch absolute Korrektheit kann garrantiert werden! Bei Anmerkungen, Fragen, Korrekturen oder sonstiges, könnt ihr mich gerne per email erreichen:

ljbkusters@gmail.com

1. Großkanonisches Potential

Leite die drei MWR für das großkanonische Potential her:

$$J(T, V, \mu) = E - TS - \mu N$$

Man suche zunächst den Differential-Ausdruck von J

$$\begin{aligned} dE &= TdS - PdV + \mu dN \\ dJ &= dE - TdS - SdT - \mu dN - Nd\mu \\ &= -SdT - PdV - Nd\mu \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$(i) : \left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)_{V, \mu} = -S \quad (ii) : \left(\frac{\partial J}{\partial V} \right)_{T, \mu} = -P \quad (iii) : \left(\frac{\partial J}{\partial \mu} \right)_{T, V} = -N$$

Mit Integrabilitätsbedingung:

$$\begin{aligned} (i + ii) : \quad \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)_{V, \mu} &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial J}{\partial V} \right)_{T, \mu} \Leftrightarrow - \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{T, \mu} = - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V, \mu} \\ (i + iii) : \quad \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)_{V, \mu} &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial J}{\partial \mu} \right)_{T, V} \Leftrightarrow - \left(\frac{\partial S}{\partial \mu} \right)_{T, V} = - \left(\frac{\partial N}{\partial T} \right)_{V, \mu} \\ (ii + iii) : \quad \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial J}{\partial V} \right)_{T, \mu} &= \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial J}{\partial \mu} \right)_{T, V} \Leftrightarrow - \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{T, V} = - \left(\frac{\partial N}{\partial V} \right)_{T, \mu} \end{aligned}$$

2. Zustandsänderungen

Bestimme die thermischen Expansionskoeffizienten sowie den Joule-Thompson-koeffizienten

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$$

für ein vd.-Waals-Gas für $T > T_c$. Benutze Aufgabe 4.3.

Aus der Vorlesung wissen wir dass: (siehe Skript Seite 88-91)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{aN^2}{C_V V^2} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{\alpha_P T}{C_V \kappa_T} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{V}{C_P}(T\alpha - 1)$$

Für ein vd. Waals Gas gelten die Zustandsgleichungen:

$$(1): \quad \left(P + a\frac{N^2}{V^2}\right)(V - Nb) = Nk_B T$$

$$(2): \quad \langle E \rangle = \frac{3}{2}Nk_B T - \frac{aN^2}{V}$$

Es gelten die Beziehungen:

$$\kappa_T = \left(-V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\right)^{-1} \quad \alpha_P = \kappa_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \quad C_P = C_V + \frac{VT\alpha_P^2}{\kappa_T}$$

Man kan (1) umschreiben nach:

$$P = \frac{Nk_B T}{V - Nb} - a\frac{N^2}{V^2}$$

Damit findet man für κ_T

$$\kappa_T = \left(-V\left[-\frac{Nk_B T}{(V - Nb)^2} + 2a\frac{N^2}{V^3}\right]\right)^{-1} = \frac{(V - Nb)^2}{VNk_B T} \left(1 - \frac{2a(V - b)^2}{V^2 Nk_B T}\right)^{-1}$$

und für $\alpha_P = \frac{V-b}{VT} \left(1 - \frac{2a(V-b)^2}{V^2 Nk_B T}\right)$

Es folgt aus (2):

$$C_V = \frac{3}{2}Nk_B$$

C_P folgt einfach durch einsetzen (ziemlich unschöne Term).

Die Joule-Thompson-koeffizienten findet man dann auch durch einsetzen.

3. Schwingender Kolben

Gegeben ist ein Kolben in einem Schwerfeld mit (konstante) äußere Luftdruck P_a . Der Kolben ist bei $z = z_0$ in seine Gleichgewichtszustand. Der Kolben wird jetzt ausgelenkt nach $z = z_0 + \Delta z$, wodurch eine Schwingung entsteht. Δz ist klein.

a) Bestimme die Oszillationsfrequenz ω_T für $T = \text{const.}$

Der Kolben hat die Masse m und Oberfläche A . Die Innendruck ist abhängig von der Position der Kolben. Man überlege sich die Wirkende Kräfte:

- Schwerkraft: $F_g = mg$ in $-\hat{e}_z$ Richtung.
- Äussere Luftdruck $F_a = P_a A$ in $-\hat{e}_z$ Richtung.
- Innere Luftdruck $F_i = P_i A$ in \hat{e}_z Richtung.

Man findet also:

$$m\ddot{z} = A[P_i(z) - P_a] - mg$$

Es muss weiter bei z_0 gelten dass $F_{ges}(z_0) = A[P_i(z_0) - P_a] - mg = 0$

Daraus folgt die Gleichgewichtsluftdruck im Kolben:

$$P_0 = \frac{mg}{A} + P_a$$

Wir möchten jetzt $P(z_0 + z)$ um $z = 0$ Entwickeln. (Bemerke dass diese z hier jetzt nicht die Höhe sondern den Auslenkungsparameter Δz darstellt. In diese Notation sind Differentiale wenig verwirrend.)

Es folgt bis zur Ersten Ordnung:

$$P(z_0 + z) \approx P(z_0) + \left[\frac{d}{dz} P(z_0) \right] z = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \bigg|_{V=V_0} \cdot z A$$

Wobei wir benutzen dass $V = z A$

Allgemein gilt jetzt $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$

Und man findet damit:

$$P(z_0 + z) = P_0 - \frac{Az}{V_0 \kappa_T} = P_0 - \frac{z}{\kappa_T z_0}$$

Es folgt für unsere DGL:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= \left[P_0 - \frac{z}{\kappa_T z_0} - P_0 + \frac{mg}{A} \right] A - \frac{mg}{A} \\ &= -\frac{Az}{z_0 \kappa_T} \\ \Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{A}{z_0 \kappa_T m} z &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_T^2 = \frac{A}{z_0 \kappa_T m} \end{aligned}$$

b) Bestimme ω_S für eine Adiabatische Schwingung. Erkläre warum $\omega_S > \omega_T$ gelten muss.

Analog zu (a) $\omega_s^2 = \frac{A}{z_0 \kappa_S m}$

$\omega_s > \omega_T$ weil bei ein adiabatisches Prozess alle Energie in Arbeit umgesetzt wird, während bei ein Isothermer Prozess auch eine Änderung in Entropie Statfindet. Dadurch ist die Schwingungsenergie größer für adiabatische Prozesse.

c) gebe ω_T und ω_S für ein ideales Gas.

Allgemein gilt $PV = Nk_B T$. Daraus folgt:

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{P^2}$$

$$\frac{\kappa_S}{\kappa_T} = \frac{C_V}{C_P} \quad \text{mit} \quad \frac{C_V}{C_P} = \frac{3}{5}$$

$$\kappa_S = \frac{3}{5} \kappa_T$$

Es folgt für die Frequenzen:

$$\omega_T = \sqrt{\frac{A^2 P_0}{m V_0}} \quad \omega_S = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{A^2 P_0}{m V_0}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \omega_T$$

4. Gekoppelte Wärmekraftmaschinen

a) Zwei Wärmekraftmaschinen, jeweils bei konstanter Temperatur, nehmen Wärme auf und geben Wärme ab, sind in Serien geschaltet.

- Maschine 1 nimmt $Q_3 > 0$ auf bei T_3 und gibt $-Q_2 < 0$ ab bei $T_2 < T_3$
- Maschine 2 nimmt $Q_2 > 0$ auf bei T_2 und gibt $-Q_1 < 0$ ab bei $T_1 < T_2$

$$T_3 \xrightarrow{Q_3} [M_1] \xrightarrow{Q_2} T_2 \xrightarrow{Q_2} [M_2] \xrightarrow{Q_1} T_1$$

Zeige dass der Wirkungsgrad des gesamten System gegeben ist durch

$$1 - \eta_{31} = (1 - \eta_{21})(1 - \eta_{23})$$

$$A_{32} = Q_3 - Q_2 = \eta_{31} Q_3$$

$$A_{21} = Q_2 - Q_1 = \eta_{21} Q_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q_1}{Q_3} = 1 - \eta_{31} \quad \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \eta_{21}$$

$$\eta_{31} = \frac{A_{32}}{Q_3}$$

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3}$$

$$= 1 - \frac{Q_1}{Q_3}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \eta_{31} = (1 - \eta_{21})(1 - \eta_{23})$$

b) Zeige dass es immer günstiger ist um Wärmekraftmaschinen aufzuteilen in mehrere Prozesse, falls für die reale Wirkungsgrad gelten würde dass $\eta_r = \alpha \eta_i$ mit $0 \leq \alpha \leq 1 = \text{const.}$ (Also nur eine konstante Abhängigkeit und keine sonstige Abhängigkeiten wie z.B. von Temperaturdifferenz). Gebe an, wieso dies in der Wirklichkeit nicht stimmen kann.

Für eine ideale Wärmekraftmaschine gilt $\eta_{ij} = 1 - \frac{T_j}{T_i}$ für $T_i > T_j$

Man zerlege jetzt das Prozess in 3 Maschinen über 3 Temperaturen $T_1 < T_2 < T_3$:

$$\frac{T_1}{T_3} = 1 - \left(1 - \frac{T_1}{T_3}\right) = 1 - \eta_{31} = (1 - \eta_{32})(1 - \eta_{21}) = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{T_1}{T_3}$$

Man findet im Idealfall dass das Aufteilen der WKM'en keine Auswirkung hat.

Für ein Reelles Prozess gilt nun aber:

$$\eta_r = \alpha \eta_i = \alpha \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)$$

Man definiere jetzt die direkte und aufgeteilte Wirkungsgrade:

$$\eta_{31}^d = \alpha \left(1 - \frac{T_1}{T_3}\right)$$

$$\eta_{31}^a = 1 - \left(1 - \alpha \frac{T_2}{T_3}\right) \left(1 - \alpha \frac{T_1}{T_2}\right)$$

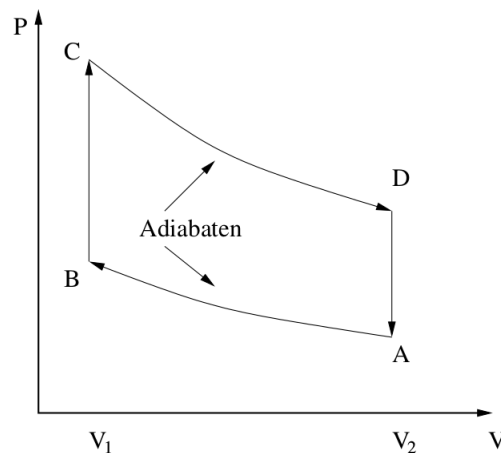
für $\alpha < 1$

$$\begin{aligned}\eta_{31}^d - \eta_{31}^a &= \alpha \left(1 - \frac{T_1}{T_3}\right) - 1 + \left(1 - \alpha \frac{T_2}{T_3}\right) \left(1 - \alpha \frac{T_1}{T_2}\right) \\ &= \text{algebra} \dots \\ &= -\alpha(1 - \alpha) \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \left(1 - \frac{T_2}{T_3}\right) < 0 \quad (\text{Alle Terme} \geq 0)\end{aligned}$$

Also ist $\eta^d < \eta^a$. In der realität macht dies kein Sinn, den für Sehr kleine Temperaturdifferenzen würden keiner der WKM'en etwas machen (Wegen z.B. interne Widerstandskräfte)

5. Otto-Prozess mit Photonengas

Man durchlaufe ein quasistatisches Kreißprozess ABCD. AB und CD sind Adiabaten. BC und DA sind isochor.



Das Prozess wird mit einem Photonengas betrieben. Dafür gilt:

$$E(T, V) = 3P(T)V \quad P(T) = aT^3 \quad a > 0$$

a) Zeige, dass für die Adiabatangleichung des Gases gilt:

$$PV^{4/3} = \text{const.}$$

$$\begin{aligned} dE &= -PdV \\ &= \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_P dV + \left(\frac{\partial E}{\partial P} \right)_V dP \\ &= 3PdV + 3VdP \\ -4PdV &= 3VdP \end{aligned}$$

Nach integrieren folgt direkt: $PV^{4/3} = \text{const.}$

b) Bestimme entlang der einzelnen Prozessschritte umgesetzten Arbeit und Wärmemengen.

i. AB, Adiabatisch

$$\delta Q = 0 \text{ und } \delta W = -PdV$$

$$P(V) = P_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{4/3} \Rightarrow P(V) = P_A \left(\frac{V_2}{V} \right)^{4/3}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \delta W &= -P_A \int_{V_2}^{V_1} \left(\frac{V_2}{V} \right)^{4/3} dV \\ &= 3P_A V_2^{4/3} \left[\frac{1}{V^{1/3}} \right]_{V_2}^{V_1} \\ &= 3P_A V_2^{4/3} \left[\frac{1}{V_1^{1/3}} - \frac{1}{V_2^{1/3}} \right] > 0 \end{aligned}$$

ii. BC, Isochor

$$\delta Q = dE \text{ und } \delta W = 0$$

$$dE = \Delta E_{ij} = 3V(P_j - P_i)$$

$$dE = \Delta E = 3V(P_C - P_B) > 0$$

iii. CD, Adiabatisch

$$\delta Q = 0 \text{ und } \delta W = -PdV$$

Analog AB:

$$\delta W = 3P_A V_1^{4/3} \left[\frac{1}{V_2^{1/3}} - \frac{1}{V_1^{1/3}} \right] < 0$$

iv. DA, Isochor

$$\delta Q = -TdS \text{ und } \delta W = 0$$

Analog BC:

$$dE = \Delta E = 3V(P_A - P_D) < 0$$

c) Bestimme den Wirkungsgrad als Funktion von V_1 und V_2 .

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{W_{tot}}{Q_{BC}} \\ &= \frac{Q_{BC} + Q_{DA}}{Q_{BC}} \\ &= 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} \\ &= 1 + \frac{V_2 P_D \frac{P_A}{P_D} - 1^*}{V_1 P_C \frac{1 - \frac{P_B}{P_C}}{1 - \frac{P_B}{P_C}}} \\ &= 1 - \frac{V_2 P_D}{V_1 P_C} \\ &= 1 - \frac{V_2}{V_1} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{4/3} \\ &= 1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

$$* \frac{P_A}{P_D} = \frac{P_B}{P_C}$$

d) Sei T_1 bzw. T_2 die niedrigste bzw. höchste Temperatur die beim Kreißprozess auftreten. In welche Punkten werden diese Temperature erreicht? Zeige dass die Wirkungsgrad kleiner als die ideale Wirkungsgrad ist.

$$P(T) = aT^3$$

D.h. dass für die größte bzw. kleinste Druck, es die größte bzw. kleinste Temperatur gibt (C bzw. A).

$$\eta = 1 - \frac{V_1^{1/3}}{V_2} < 1 - \frac{T_A}{T_C}$$

$$\text{Weil } \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{1/3} = \left(\frac{P_A}{P_C} \right)^{1/4} \propto \left(\frac{T_A}{T_C} \right)^{3/4} > \frac{T_A}{T_C}$$