## Musterlösung

---

### 1. Spezifische Wärme (5 Punkte)

Da $C$ temperaturunabhängig ist, gilt $\langle E \rangle = CT$, wobei eine mögliche additive Konstante durch die Wahl der Energieskala zu null gesetzt wird. Damit gilt

$$\int_0^\infty dE\, \rho(E)\, \frac{E}{k_B T}\, e^{-E/k_B T} = \frac{C}{k_B} \int_0^\infty dE\, \rho(E)\, e^{-E/k_B T}.$$

Die linke Seite liefert mit partieller Integration

$$-\int_0^\infty dE\, E\, \rho(E)\, \frac{d}{dE}\, e^{-E/k_B T} = \int_0^\infty dE\, e^{-E/k_B T}\, \frac{d}{dE}\, E\, \rho(E) - \underbrace{\rho(E)\, E\, e^{-E/k_B T}\Big|_0^\infty}_{=0}$$

wobei wir angenommen haben das $\rho(E)$ bei $E = 0$ keine Singularität hat und für große $E$ maximal wie eine Potenz anwächst. Damit gilt

$$\int_0^\infty dE\, e^{-E/k_B T} \left[\frac{d}{dE}\, E\, \rho(E) - \frac{C}{k_B}\, \rho(E)\right] = 0.$$

Weil dies für alle $T$ gelten muss folgt

$$\frac{d}{dE}\, E\, \rho(E) - \frac{C}{k_B}\, \rho(E) = 0.$$

Mit $\xi(E) = \rho(E)\, E$ wird daraus

$$\xi'(E) = \frac{C}{k_B E}\, \xi(E) \quad \to \quad \xi(E) = \xi_0\, E^{C/k_B}$$

Daher ist die Zustandsdichte eine Potenzfunktion der Energie, d.h. $\rho(E) = \rho_0\, E^{C/k_B - 1}$.