

Warszawa 2014

Politechnika Warszawska  
Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych  
Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej



Natalia Biaduń  
Łukasz Jendrzejek  
Paweł Świokło

TECHNIKI AUTOMATYZACJI PROCESÓW - PROJEKT

**Sterowanie zbiornikiem z mieszaniem**

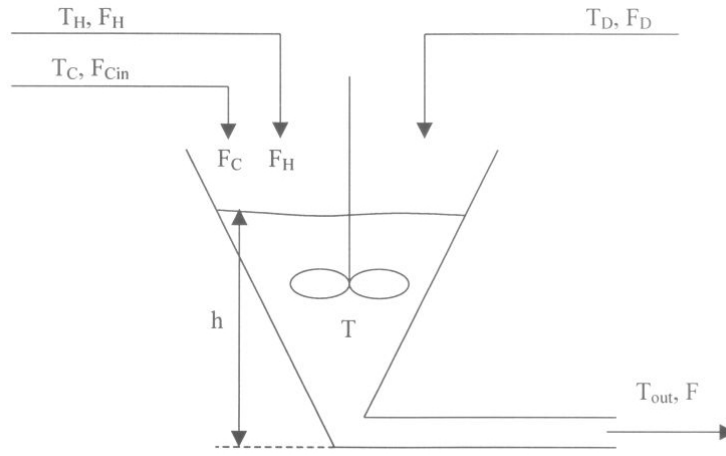
# Spis treści

<b>1</b>	<b>Opis obiektu</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Modelowanie otrzymanego obiektu</b>	<b>4</b>
2.1	Symulacja pełnego, nieliniowego obiektu . . . . .	4
2.2	Ciągłe w czasie modele zlinearyzowane . . . . .	6
2.2.1	Model w postaci równań stanu . . . . .	7
2.2.2	Badanie jakości linearyzacji . . . . .	9
2.2.3	Model w postaci transmitancyjnej . . . . .	11
2.3	Dyskretyzacja . . . . .	13
2.3.1	Wyznaczanie transmitancji dyskretnej . . . . .	13
2.3.2	Dobór okresu próbkowania . . . . .	14
2.3.3	Modele dyskretne . . . . .	14

# 1 Opis obiektu

Obiektem rozważanym w niniejszym zadaniu jest zbiornik, w którym następuje mieszanie wody ciepłej i zimnej, w taki sposób, aby uzyskać wyjściowy strumień wody o stałym natężeniu i temperaturze. Schemat obiektu został ukazany na rysunku 1. Są na nim ukazane trzy strumienie zasilające zbiornik:

- strumień ciepłej wody o temperaturze  $T_H$  i natężeniu dopływu  $F_H$ ,
- strumień zimnej wody o temperaturze  $T_C$  i natężeniu dopływu  $F_C$ ,
- strumień zakłócający o temperaturze  $T_D$  i natężeniu dopływu  $F_D$ .



Rysunek 1: Graficzny schemat struktury rozważanego zbiornika z mieszaniem.

Ponadto wysokość wody w zbiorniku reprezentowana jest przez parametr  $h$ , a temperatura wody wewnątrz zbiornika (zakładamy idealne mieszanie wody, tj. że w każdej jednostce objętości woda ma tą samą temperaturę) oznaczana jest symbolem  $T$ . Strumień wyjściowy z zbiornika stanowi odpływ grawitacyjny, tj. zależny wyłącznie od wysokości słupa wody w zbiorniku.

Wraz z obiektem zostały dostarczone równania opisujące występujące zależności:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = F_H + F_C + F_D - F(h) \\ V \frac{dT}{dt} = F_H T_H + F_C T_C + F_D T_D - (F_H + F_C + F_D) T \\ F(h) = \alpha \sqrt{h} \\ V(h) = C h^3 \\ T_{out}(t) = T(t - \tau) \end{cases} \quad (1)$$

Stałe opisujące zbiornik wynoszą odpowiednio:

- $C = 0.75$
- $\alpha = 15.9$

a punkt pracy, wokół którego odbywać się będzie linearyzacja i sterowanie obiektu dany jest parametrami o wartościach:

- $T_C = 16.97\text{ }^{\circ}\text{C}$
- $T_H = 74.41\text{ }^{\circ}\text{C}$
- $T_D = 35.31\text{ }^{\circ}\text{C}$
- $F_C = 32\text{ }\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$
- $F_H = 19\text{ }\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$
- $F_D = 7\text{ }\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$
- $\tau_C = 100\text{ s}$
- $\tau = 55\text{ s}$
- $h = 13.3\text{ cm}$
- $T = 38\text{ }^{\circ}\text{C}$

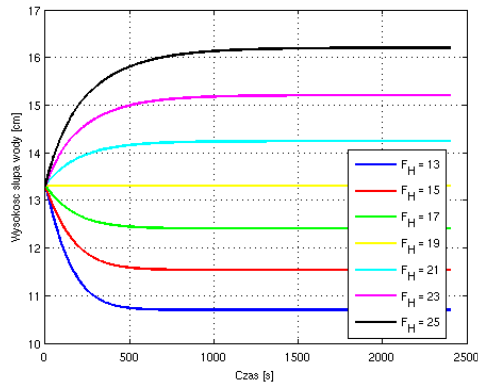
Warto zwrócić uwagę na opóźnienia wejść i wyjść obiektu. Ciepła woda dopływa do zbiornika z 100 sekundowym opóźnieniem, a zmiana temperatury strumienia wyjściowego cechuje się 55 sekundowym opóźnieniem. Ponadto stabilizacja wyjściowego strumienia jest operacją pośrednią, ponieważ bezpośrednio regulowana jest wysokość słupa cieczy w zbiorniku, a natężenie strumienia wyjściowego kształtuje się proporcjonalnie do wysokości poziomu cieczy.

## 2 Modelowanie otrzymanego obiektu

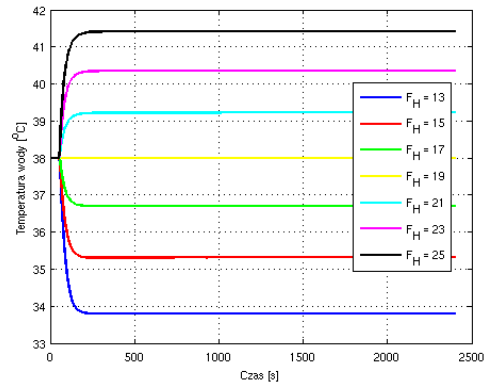
Pierwszą częścią projektu było skupienie się na samym obiekcie i sposobach jego modelowania. W pierwszej kolejności obiekt zostanie wiernie odwzorowany, wykorzystane będą bezpośrednio podane równania różniczkowe dostarczone wraz z treścią projektu. Po analizie zachowania obiektu i sprawdzeniu jego odpowiedzi na skoki wartości sygnałów na wejściach dokonana zostanie linearyzacja w punkcie pracy, a następnie dyskretyzacja uzyskanego modelu liniowego w celu wykorzystania go do regulacji.

### 2.1 Symulacja pełnego, nieliniowego obiektu

Opis matematyczny obiektu wyrażony w postaci równań różniczkowych, został rozwiązany za pomocą funkcji `ode45` programu Matlab posługującą się metodą Rungego-Kutty. Aby móc przyjrzeć się zachowaniu obiektu, dla każdej zmiennej wejściowej zostały przeprowadzone eksperymenty polegające na zasymulowaniu odpowiedzi obiektu na skokową zmianę jednego z wejść o różnych wartościach. Przyjęto założenie, że ponieważ dopływ wody ciepłej i zimnej są wartościami regulowanymi, tylko wielkość dopływu może ulegać zmianie. W przypadku zakłócającego strumienia wody zmianie może podlegać zarówno wielkość dopływu jak i temperatura dopływającej wody. Wyniki symulacji zostały przedstawione na rysunkach 2, 3, 4 i 5.

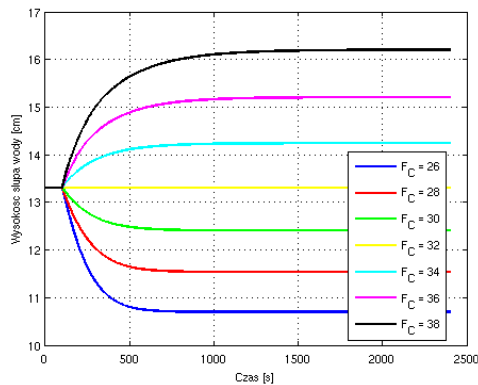


(a) Zmiana wysokości poziomu wody w zbiorniku.

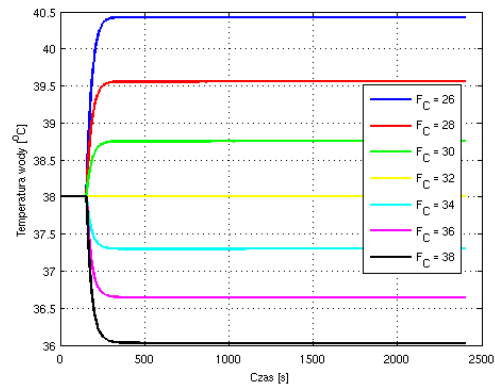


(b) Zmiana temperatury wody na wyjściu ze zbiornika.

Rysunek 2: Reakcja obiektu na zmianę wielkości dopływającego strumienia ciepłej wody.



(a) Zmiana wysokości poziomu wody w zbiorniku.



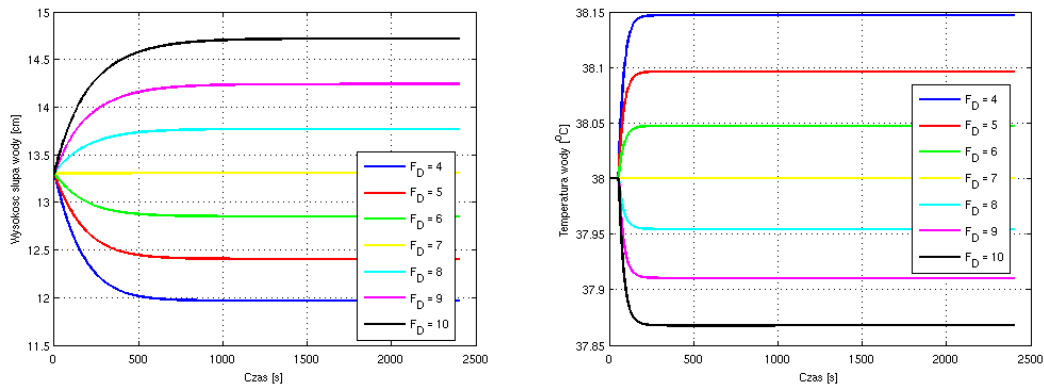
(b) Zmiana temperatury wody na wyjściu ze zbiornika.

Rysunek 3: Reakcja obiektu na zmianę wielkości dopływającego strumienia zimnej wody.

Przyglądając się kształtom odpowiedzi na obydwu wyjściach obiektu od razu można zauważyć, że temperatura strumienia wody opuszczającej zbiornik szybciej stabilizuje swoją wartość, mimo opóźnienia jakie jest zauważalne w odniesieniu do zmiany stanu wejść obiektu. Dopływający strumień wody ciepłej wpływa na proces z opóźnieniem, zgodnie z charakterystyką obiektu. Wysokość poziomu wody w zbiorniku ma dość sporą inercję, stabilizuje się zdecydowanie wolniej od temperatury wody wypływającej. Związane jest to z kształtem zbiornika, który przypomina ścięty stożek, tj. przekrój poprzeczny zbiornika ma większą średnicę wraz z różnicą wysokości względem podstawy zbiornika.

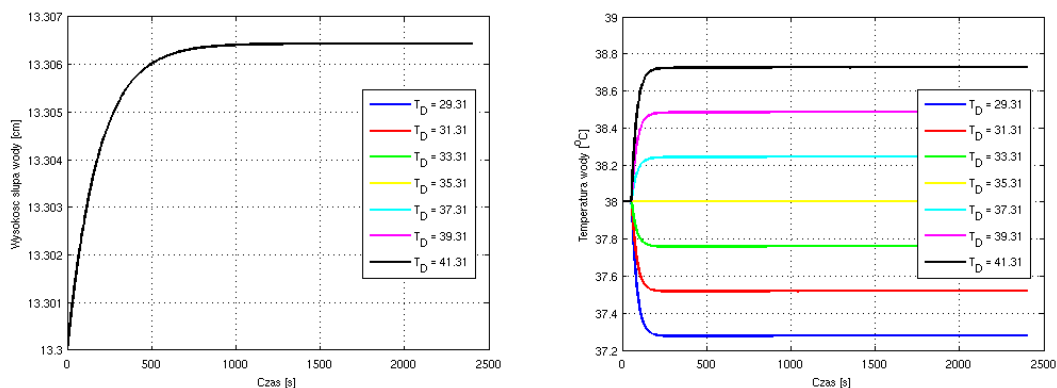
Porównywanie zmian zachowania obiektu na ingerencję w wartości poszczególnych wejść jest zgodne z ich fizycznym znaczeniem. Zwiększając dopływy poszczególnych strumieni wody ciepłej, zimnej i strumienia zakłócającego widoczne są zmiany wysokości poziomu wody w zbiorniku. Odpowiednio, kiedy dopływ jest zwiększany, poziom wody rośnie. Zachowanie temperatury zależne jest jednak od tego, który strumień jest zmieniany. Jeżeli zwiększeniu podlega intensywność dopływu wody ciepłej, temperatura wody wypływającej rośnie, natomiast jeżeli zwiększany jest dopływ wody zimnej, temperatura maleje. Dopływ zakłócający może jednak ingerować w obydwie strony, w zależności od tempera-

tury wody w zbiorniku i na dopływie strumienia zakłócającego, o czym należy pamiętać. Ponadto, w każdym momencie zmiana temperatury wody zakłócającej proces nie może wywoływać zmian wysokości wody w zbiorniku.



(a) Zmiana wysokości poziomu wody w zbiorniku. (b) Zmiana temperatury wody na wyjściu ze zbiornika.

Rysunek 4: Reakcja obiektu na zmianę wielkości dopływającego strumienia zakłócającego.



(a) Zmiana wysokości poziomu wody w zbiorniku. (b) Zmiana temperatury wody na wyjściu ze zbiornika.

Rysunek 5: Reakcja obiektu na zmianę temperatury strumienia zakłócającego.

## 2.2 Ciągłe w czasie modele zlinearyzowane

W większości rozważane obiekty są opisywane równaniami nieliniowymi. Ogólne sterowanie obiektów nieliniowych jest jednak zadaniem trudnym, dlatego często określa się interesujący punkt pracy i dokonuje się linearyzacji równań opisujących obiekt wokół tego punktu. Dokonując tego zabiegu traci się nieco na dokładności opisu obiektu, jednak w okolicach punktu pracy model liniowy wciąż dobrze oddaje zachowanie obiektu. Zysk z tego zabiegu leży jednak w tym, że modele liniowe posiadają dobrze rozwinięte i opracowane prawa sterowania, które zapewniają stabilność.

### 2.2.1 Model w postaci równań stanu

Jedną z powszechnie stosowanych metod linearyzacji jest linearyzacja lokalna. Jeżeli funkcja w przestrzeni  $n$  wymiarowej  $R^n$  jest różniczkowalna i ma w otoczeniu danego punktu  $x_0$  ciągle pochodne względem swoich argumentów, można dokonać lokalnego przybliżenia wartości  $f(x)$  w punkcie  $x$  bliskim  $x_0$  w postaci zależności:

$$f_{lin}(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) \quad (2)$$

Linearyzację należy rozpocząć od przekształcenia pierwszego równania obiektu. Równanie powinno zostać doprowadzone do postaci, w której po lewej stronie występuje pochodna zmiennej, a po prawej stronie występuje ona jawnie. Wykorzystując więc trójkę równań:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = F_H + F_C + F_D - F(h) \\ F(h) = \alpha\sqrt{h} \\ V(h) = Ch^3 \end{cases} \quad (3)$$

przyrost objętości wody w zbiorniku można wyrazić w postaci:

$$\frac{dV}{dt} = F_H + F_C + F_D - \alpha\sqrt[6]{\frac{1}{C}}\sqrt[6]{V} \quad (4)$$

Drugie równanie obiektu, opisujące przyrost temperatury wody w zbiorniku wymaga tylko niewielkiej korekty, podzielenie go obustronnie przez objętość, tak by po prawej stronie została tylko pochodna temperatury daje w rezultacie:

$$\frac{dT}{dt} = T_H \cdot \frac{F_H}{V} + T_C \cdot \frac{F_C}{V} + T_D \cdot \frac{F_D}{V} - T \cdot \frac{F_H+F_C+F_D}{V} \quad (5)$$

Należy jeszcze zaznaczyć w jaki sposób wyjście obiektu zależy od równań opisujących stan obiektu. Wyjściem zostaną nazwane wartości regulowane, to jest wysokość poziomu wody w zbiorniku i temperatura wypływającej wody. Kwestia opóźnień na wejściu i wyjściu obiektu zostanie na chwilę obecną pominięta ze względu na trudność modelowania opóźnień w postaci równań stanu. Tworzony model pozostaje adekwatny do obiektu pod założeniem, że wejścia i wyjścia modelu będą w odpowiedni sposób opóźniane poza nim. Pod tymi założeniami jedno z wyjść jest wprost wartością temperatury wody wewnątrz obiektu.

Dane równanie opisujące zależność objętości wody od wysokości poziomu wody zostało przekształcone tak, aby wyrazić odwrotną zależność:

$$h = \sqrt[3]{\frac{1}{C}} \cdot \sqrt[3]{V} \quad (6)$$

Po przekształceniach równań obiektu można zdefiniować je jako funkcje:

$$\begin{aligned}
f_1(F_H, F_C, F_D, V) &= \frac{dV}{dt} = F_H + F_C + F_D - \alpha \sqrt[6]{\frac{1}{C}} \sqrt[6]{V} \\
f_2(F_H, F_C, F_D, T_D, V, T) &= \frac{dT}{dt} = T_H \cdot \frac{F_H}{V} + T_C \cdot \frac{F_C}{V} + T_D \cdot \frac{F_D}{V} - T \cdot \frac{F_H + F_C + F_D}{V}
\end{aligned} \tag{7}$$

a następnie obliczyć ich pochodne czątkowe po każdej ze zmiennych. Tak więc pochodne cząstkowe funkcji  $f_1$  wynoszą:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial F_H} &= 1 \\
\frac{\partial f_1}{\partial F_C} &= 1 \\
\frac{\partial f_1}{\partial F_D} &= 1 \\
\frac{\partial f_1}{\partial V} &= -\frac{1}{6} \cdot \alpha \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{C}} \cdot V^{-\frac{5}{6}}
\end{aligned} \tag{8}$$

a dla funkcji  $f_2$  są one następujące:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial F_H} &= \frac{T_H - T}{V} \\
\frac{\partial f_2}{\partial F_C} &= \frac{T_C - T}{V} \\
\frac{\partial f_2}{\partial F_D} &= \frac{T_D - T}{V} \\
\frac{\partial f_2}{\partial T_D} &= \frac{F_D}{V} \\
\frac{\partial f_2}{\partial V} &= \frac{T(F_H + F_C + F_D) - T_H F_H - T_C F_C - T_D F_D}{V^2} \\
\frac{\partial f_2}{\partial T} &= -\frac{F_H + F_C + F_D}{V}
\end{aligned} \tag{9}$$

Ponadto warto także obliczyć pochodną funkcji wysokości po objętości wody w zbiorniku:

$$\frac{\partial h}{\partial V} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{C}} \cdot V^{-\frac{2}{3}} \tag{10}$$

Tak obliczone pochodne posłużą bezpośrednio do zapisania modelu liniowego w postaci równań stanu, muszą jednak zostać obliczone ich wartości w punkcie pracy. Należy pamiętać, że tak utworzony zlinearyzowany model odnosi się do zmian wartości wejść, stanów i wyjść w stosunku do wartości tych zmiennych w punkcie pracy. Ciągły model wyrażony za pomocą równań stanu jest więc postaci:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\
\mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}
\end{aligned} \tag{11}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} V - V_0 \\ T - T_0 \end{bmatrix}, & \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} F_H - F_{H0} \\ F_C - F_{C0} \\ F_D - F_{D0} \\ T_D - T_{D0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{y} &= \begin{bmatrix} h - h_0 \\ T - T_0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{12}$$



Macierze  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{C}$  składają się więc z następujących elementów (dla uproszczenia zapisu przyjąłem oznaczenie  $p.p.$  jako warunek zdefiniowany przez punkt pracy podany w treści polecenia):

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial V} \right|_{p.p.} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial T} \right|_{p.p.} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial V} \right|_{p.p.} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial T} \right|_{p.p.} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial F_H} \right|_{p.p.} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial F_C} \right|_{p.p.} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial F_D} \right|_{p.p.} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial T_D} \right|_{p.p.} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial F_H} \right|_{p.p.} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial F_C} \right|_{p.p.} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial F_D} \right|_{p.p.} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial T_D} \right|_{p.p.} \end{bmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial h}{\partial V} \right|_{p.p.} & \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_{p.p.} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{13}$$

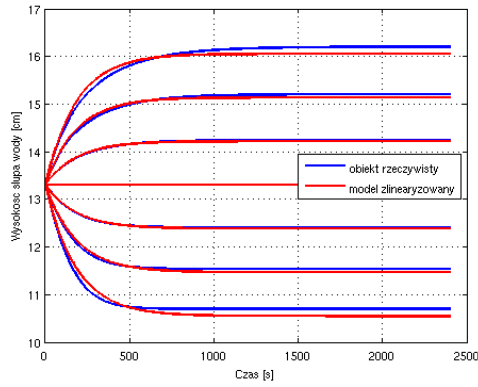
Podstawiając odpowiednie dane liczbowe i przeliczając wartości za pomocą programu Matlab, uzyskano następujący model liniowy obiektu w podanym punkcie pracy:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -0.0055 & 0 \\ 0 & -0.0329 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0.0206 & -0.0119 & -0.0015 & 0.0040 \end{bmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{14}$$

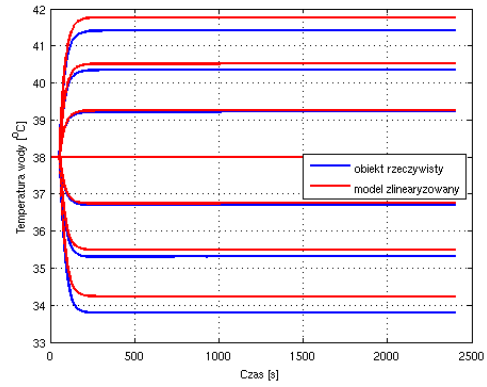
### 2.2.2 Badanie jakości linearyzacji

Zabieg linearyzacji powoduje przybliżenie modelu nieliniowego (w ogólności nieliniowość modelu może być bardzo silna) modelem liniowym. Przybliżenie takie ma sens tylko w bliskim otoczeniu punktu pracy, wokół którego dokonano linearyzacji, ponieważ im dalej stan obiektu oddala się od punktu pracy, tym większe różnice w działaniu objawiają się pomiędzy modelem nieliniowym, a zlinearyzowanym.

Aby sprawdzić jakość ponowione zostały eksperymenty skokowe z symulacji modelu nieliniowego i naniesione zostały rezultaty uzyskane przez model nieliniowy i zlinearyzowany. Wyniki tych eksperymentów zostały ukazane na wykresach 6, 7, 8 i 9.

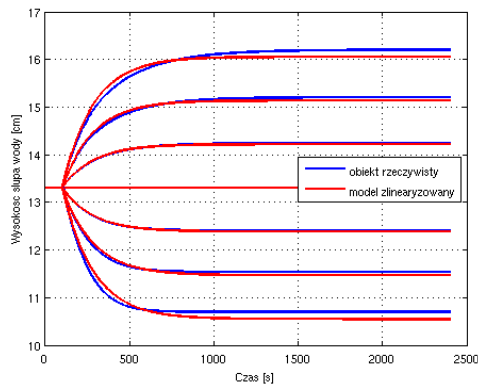


(a) Zmiana wysokości poziomu wody w zbiorniku.

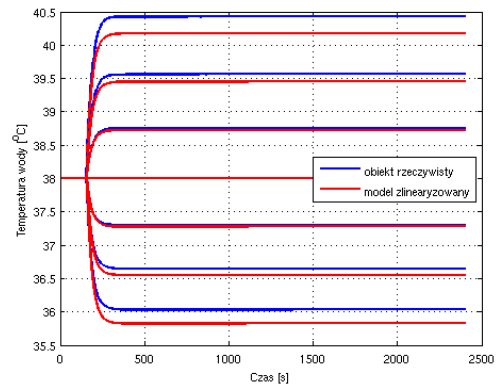


(b) Zmiana temperatury wody na wyjściu ze zbiornika.

Rysunek 6: Porównanie działania modelu zbiornika w postaci nieliniowych równań różniczkowych i lokalnego modelu zlinearyzowanego na zmianę wielkości dopływającego strumienia ciepłej wody.



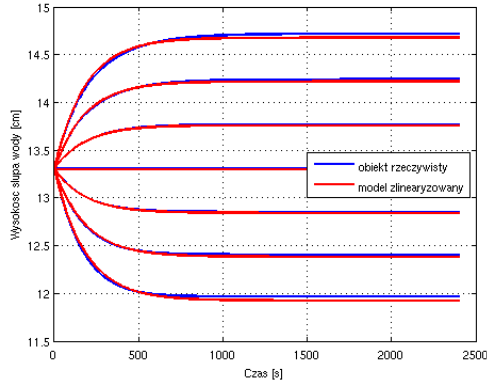
(a) Zmiana wysokości poziomu wody w zbiorniku.



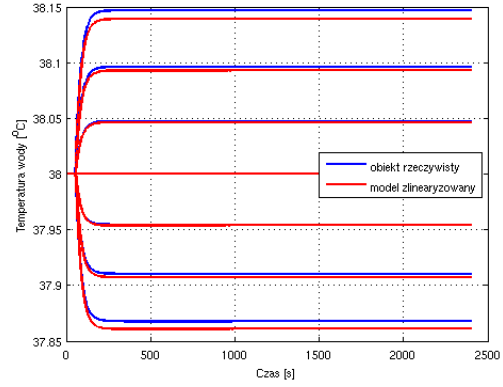
(b) Zmiana temperatury wody na wyjściu ze zbiornika.

Rysunek 7: Porównanie działania modelu zbiornika w postaci nieliniowych równań różniczkowych i lokalnego modelu zlinearyzowanego na zmianę wielkości dopływającego strumienia zimnej wody.

Z wykresów wynika, że linearyzacja obiektu przebiegła poprawnie - w stanie ustalonym w punkcie pracy model zlinearyzowany idealnie oddaje zachowanie obiektu. Im bardziej wartości wejść odbiegają od punktu wokół którego linearyzowano tym bardziej model zlinearyzowany odbiega od rzeczywistego obiektu. Dla przetestowanych skoków wartości zadanych można założyć, że model dobrze odwzorowuje rzeczywisty obiekt. Różnice w wysokości słupa cieczy nie przekraczają kilku milimetrów, a różnice w temperaturze osiągane przez model i obiekt rzeczywisty nie przekraczają  $0.5^{\circ}\text{C}$ .

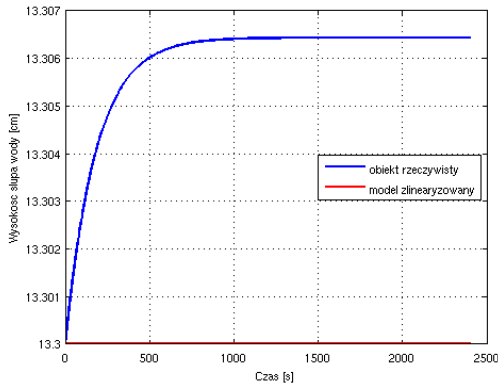


(a) Zmiana wysokości poziomu wody w zbiorniku.

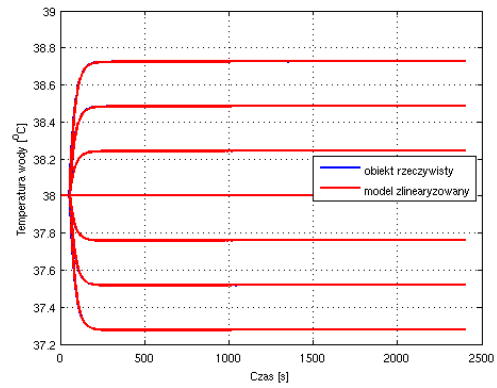


(b) Zmiana temperatury wody na wyjściu ze zbiornika.

Rysunek 8: Porównanie działania modelu zbiornika w postaci nieliniowych równań różniczkowych i lokalnego modelu zlinearyzowanego na zmianę wielkości dopływającego strumienia zakłócającego proces.



(a) Zmiana wysokości poziomu wody w zbiorniku.



(b) Zmiana temperatury wody na wyjściu ze zbiornika.

Rysunek 9: Porównanie działania modelu zbiornika w postaci nieliniowych równań różniczkowych i lokalnego modelu zlinearyzowanego na zmianę wielkości temperatury strumienia zakłócającego proces.

### 2.2.3 Model w postaci transmitancyjnej

Kolejnym punktem zadania było wyrażenie modelu liniowego w postaci transmitancji. Aby wyznaczyć postać transmitancyjną modelu posłużono się wzorem:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (15)$$

który wyraża zależność pomiędzy równaniami stanu a transmitancją. Wzór ten jest prawdziwy, kiedy przyjęte są zerowe warunki początkowe, co ma miejsce, ponieważ zmienne stanu wyrażają różnice pomiędzy wartościami aktualnymi zmiennych stanu a wartościami w punkcie pracy.

Odpowiednie osiem transmitancji składowych budujących macierz transmitancji  $\mathbf{G}(s)$  można w łatwy sposób wyznaczyć analitycznie. Najpierw należy odwrócić macierz  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ :

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{s^2 + (-a_{22} - a_{11})s - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Następnie podstawiając odwróconą macierz do równania (15) i rozszerzając zapis do wszystkich współczynników występujących w macierzach otrzymano:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \frac{1}{s^2 + (-a_{22} - a_{11})s - a_{12}a_{21}} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

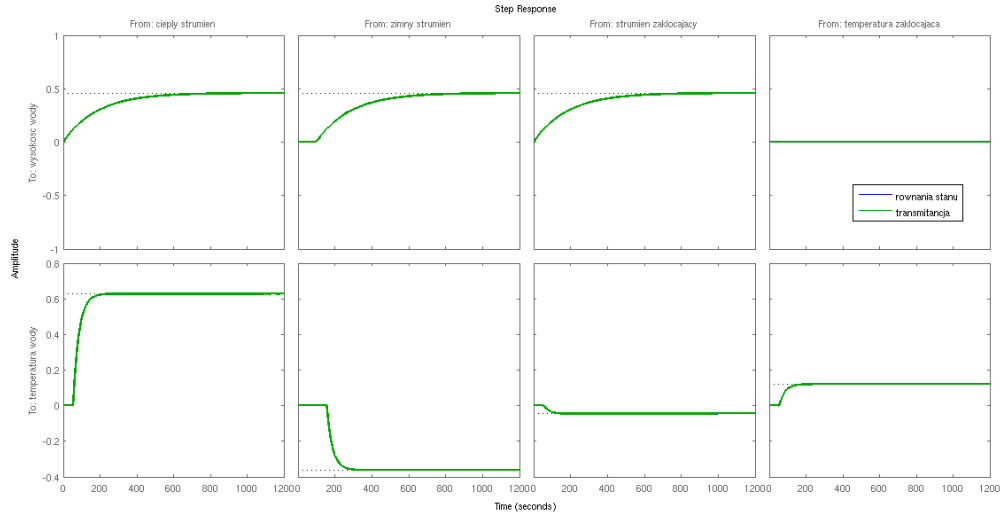
Przemnożenie ze sobą wszystkich macierzy daje w rezultacie macierz transmitancji obiektu. Dla przykładu, element  $G_{11}(s)$  dany jest zależnością:

$$G_{11}(s) = \frac{(b_{11}c_{11} + b_{21}c_{12})s + (a_{21}b_{11}c_{12} - a_{22}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{12}c_{11} - a_{11}b_{21}c_{12})}{s^2 + (-a_{22} - a_{11})s - a_{12}a_{21}} \quad (18)$$

W przeciwieństwie do równań stanu, w języku transmitancji w łatwy sposób można zapisać opóźnienie, jakim obciążone jest wejście lub wyjście obiektu. Operatorem opóźnienia w języku transmitancji jest  $e^{-sT_o}$ , gdzie  $T_o$  jest czasem opóźnienia. Mając wiedzę w jaki sposób wyrazić opóźnienie, a także jak można obliczyć wszystkie czątkowe transmitancje SISO, program Matlab posłużył do obliczenia wartości liczbowych transmitancji, które prezentują się następująco:

$$\begin{aligned} G_{11}(s) &= \frac{0.002513s + 8.259e - 05}{s^2 + 0.03835s + 0.00018}, \\ G_{12}(s) &= e^{-100s} \frac{0.002513s + 8.259e - 05}{s^2 + 0.03835s + 0.00018}, \\ G_{13}(s) &= \frac{0.002513s + 8.259e - 05}{s^2 + 0.03835s + 0.00018}, \\ G_{14}(s) &= 0 \\ G_{21}(s) &= e^{-55s} \frac{0.02064s + 0.000113}{s^2 + 0.03835s + 0.00018}, \\ G_{22}(s) &= e^{-155s} \frac{-0.01192s - 6.528e - 05}{s^2 + 0.03835s + 0.00018}, \\ G_{23}(s) &= e^{-55s} \frac{-0.001525s - 8.35e - 06}{s^2 + 0.03835s + 0.00018}, \\ G_{24}(s) &= e^{-55s} \frac{0.003967s + 2.173e - 05}{s^2 + 0.03835s + 0.00018} \end{aligned} \quad (19)$$

W celu weryfikacji obliczeń, za pomocą funkcji `ss` i `tf` w programie Matlab sporządzono dwa ciągłe modele o wartościach obliczonych na podstawie danych obiektu w postaci równań stanu i transmitancji. Następnie obydwa modele poddano skokom jednostkowym na wejściach za pomocą funkcji `step`. Wynik tej operacji został przedstawiony na rysunku 10. Jak widać, modele odpowiadają sobie idealnie, ponieważ wszystkie przebiegi pokrywają się. Świadczy to o tym, że model został poprawnie przetłumaczony z języka zmiennych stanu na język transmitancji.



Rysunek 10: Odpowiedzi modelu w postaci równań stanu i transmitancji na jednostkowe skoki na wejściach wykreślone za pomocą procedury `step`.

## 2.3 Dyskretyzacja

W związku z tym, że cyfrowe algorytmy regulacji nie działają w czasie ciągłym, ale pracują na sygnale spróbkowanym z pewnym okresem  $T_p$ , modele stanu jak i transmitancje z czasem ciągłym nie mają w nich zastosowania. Z tego powodu należy dokonać dyskretyzacji podanych modeli, czyli przejść z przestrzeni zmiennej  $s$  do przestrzeni zmiennej  $z$  w wypadku transmitancji oraz z różniczkowych równań stanu do równań różnicowych, bo takie modele mają zastosowanie w cyfrowych algorytmach regulacji.

### 2.3.1 Wyznaczanie transmitancji dyskretniej

Zakładając, że wykorzystywany jest ekstrapolator zerowego rzędu (tj. sygnał utrzymywany jest na stałym poziomie w czasie trwania okresu próbkowania), transmitancję dyskretną można obliczyć na podstawie transmitancji ciągłej za pomocą poniższego przekształcenia:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (20)$$

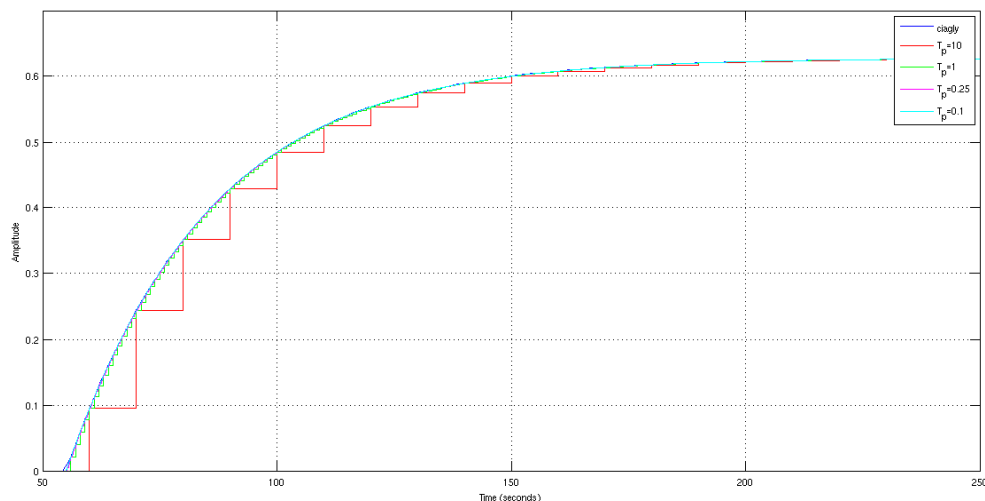
Transmitancję ciągłą należy wtedy rozłożyć na sumę ułamków prostych i dokonać  $Z$ -transformaty posługując się tablicami przekształceń i przyjmując odpowiedni okres próbkowania. Metoda dyskretyzacji z użyciem ekstrapolatora zerowego rzędu jest dostępna w

programie Matlab za pośrednictwem procedury `c2d`, więc posłużono się nią do wyznaczenia modeli dyskretnych.

### 2.3.2 Dobór okresu próbkowania

Jedynym parametrem w procesie dyskretyzacji jest okres próbkowania  $T_p$ . Jeżeli będzie on zbyt duży, model dyskretny będzie w swojej postaci znacząco odbiegał od modelu ciągłego. Natomiast dobranie zbyt małego okresu natomiast sprawi, że trzeba częściej próbkować sygnał, a także wykonywanie obliczeń będzie trzeba przeprowadzać częściej. Jeżeli procesy są szybkie a algorytmy regulacji złożone, może to generować problemy, a także może być niepotrzebne, ponieważ rzadsze próbkowanie da efekty bardzo zbliżone ilościowo i jakościowo.

W podanym wypadku układ jest bardzo wolny - wyjścia ustalają się odpowiednio po około 1000 i 250 sekundach. Efekty dyskretyzacji będą pokazane na wyjściu drugim, które ustala się znacząco szybciej. Jeżeli dyskretyzacja będzie dobra dla tego wyjścia, to dla pierwszego, które ustala się cztery razy wolniej, również będzie poprawna. Wyniki eksperymentów ukazano na rysunku 11.



Rysunek 11: Jakość odwzorowania modelu ciągłego modelami dyskretnymi o różnym okresie próbkowania.

Jak widać z wykresów, okres próbkowania 10 sekund jest absolutnie nie do przyjęcia. Dla 1 sekundy cały czas widać różnice pomiędzy wykresami nawet bez ich przybliżania. Natomiast różnica pomiędzy 0.25 i 0.1 sekundy jest nieznaczna, zatem 0.25 wydaje się być dobrym kompromisem pomiędzy jakością dyskretyzacji i ilością obliczeń.

### 2.3.3 Modele dyskretny

Dla przyjętego okresu próbkowania  $T_p = 0.25s$  obliczono wartości współczynników transmitancji i macierzy w różnicowych równaniach stanu. Uzyskano następujące wyniki:

### Macierze równań stanu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^\# &= \begin{bmatrix} 0.9986 & 0 \\ 0 & 0.9918 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{B}^\# &= \begin{bmatrix} 0.2498 & 0.2498 & 0.2498 & 0 \\ 0.005138 & -0.002967 & -0.0003796 & 0.0009877 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C}^\# &= \begin{bmatrix} 0.002513 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}^\# &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{21}$$

### Składowe transmitancje SISO macierzy transmitancji

$$\begin{aligned}
 G_{11}(z) &= \frac{0.0006277z^{-1} - 0.0006226z^{-2}}{1 - 1.99z^{-1} + 0.9905z^{-2}}, \\
 G_{12}(z) &= z^{-400} \frac{0.0006277z^{-1} - 0.0006226z^{-2}}{1 - 1.99z^{-1} + 0.9905z^{-2}}, \\
 G_{13}(z) &= \frac{0.0006277z^{-1} - 0.0006226z^{-2}}{1 - 1.99z^{-1} + 0.9905z^{-2}}, \\
 G_{14}(z) &= 0, \\
 G_{21}(z) &= z^{-220} \frac{0.005138z^{-1} - 0.005131z^{-2}}{1 - 1.99z^{-1} + 0.9905z^{-2}}, \\
 G_{22}(z) &= z^{-620} \frac{-0.002967z^{-1} + 0.0006226z^{-2}}{1 - 1.99z^{-1} + 0.9905z^{-2}}, \\
 G_{23}(z) &= z^{-220} \frac{-0.0003796z^{-1} + 0.0003791z^{-2}}{1 - 1.99z^{-1} + 0.9905z^{-2}}, \\
 G_{24}(z) &= z^{-220} \frac{0.0009877z^{-1} - 0.0009864z^{-2}}{1 - 1.99z^{-1} + 0.9905z^{-2}},
 \end{aligned} \tag{22}$$