Warszawa 2014

Politechnika Warszawska
Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych
Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej

Natalia Biaduń
Łukasz Jendrzejek
Paweł Świokło

TECHNIKI AUTOMATYZACJI PROCESÓW - PROJEKT

Sterowanie zbiornikiem z mieszaniem

Spis treści

1 Opis obiektu

2 Modelowanie otrzymanego obiektu

2.1 Symulacja pełnego, nieliniowego obiektu

2.2 Ciągłe w czasie modele zlinearyzowane

W większości rozważane obiekty są opisywane równaniami nieliniowymi. Ogólne sterowanie obiektów nieliniowych jest jednak zadaniem trudnym, dlatego często określa się interesujący punkt pracy i dokonuje się linearyzacji równań opisujących obiekt wokół tego punktu. Dokonując tego zabiegu traci się nieco na dokładności opisu obiektu, jednak w okolicach punktu pracy model liniowy wciąż dobrze oddaje zachowanie obiektu. Zysk z tego zabiegu leży jednak w tym, że modele liniowe posiadają dobrze rozwinięte i opracowane prawa sterowania, które zapewniają stabilność.

2.2.1 Model w postaci równań stanu

Jedną z powszechnie stosowanych metod linearyzacji jest linearyzacja lokalna. Jeżeli funkcja w przestrzeni n wymiarowej R^n jest różniczkowalna i ma w otoczeniu danego punktu x_0 ciągłe pochodne względem swoich argumentów, można dokonać lokalnego przybliżenia wartości $f(x)$ w punkcie x bliskim x_0 w postaci zależności:

$$f_{lin}(x) \;=\; f(x_0) \;+\; \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) \tag{1}$$

Linearyzację należy rozpocząć od przekształcenia pierwszego równania obiektu. Równanie powinno zostać doprowadzone do postaci, w której po lewej stronie występuje pochodna zmiennej, a po prawej stronie występuje ona jawnie. Wykorzystując więc trójkę równań:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= F_H + F_C + F_D - F(h) \\ F(h) &= \alpha\sqrt{h} \\ V(h) &= Ch^3 \end{cases} \tag{2}$$

równanie opisujące przyrost objętości wody w zbiorniku można wyrazić w postaci:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \;=\; F_H \;+\; F_C \;+\; F_D \;-\; \alpha\sqrt[6]{\frac{1}{C}}\sqrt[6]{V} \tag{3}$$

Drugie równanie obiektu, opisujące przyrost temperatury wody w zbiorniku wymaga tylko niewielkiej korekty, podzielenie go obustronnie przez objętość, tak by po prawej stronie została tylko pochodna temperatury daje w rezultacie:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \;=\; T_H \cdot \frac{F_H}{V} \;+\; T_C \cdot \frac{F_C}{V} \;+\; T_D \cdot \frac{F_D}{V} \;-\; T \cdot \frac{F_H+F_C+F_D}{V} \tag{4}$$

Należy jeszcze zaznaczyć w jaki sposób wyjście obiektu zależy od równań opisujących stan obiektu. Wyjściem zostaną nazwane wartości regulowane, to jest wysokość poziomu wody w zbiorniku i temperatura wypływającej wody. Kwestia opóźnień na wejściu i wyjściu obiektu zostanie na chwilę obecną pominięta ze względu na trudność modelowania opóźnień w postaci równań stanu. Tworzony model pozostaje adekwatny do obiektu pod założeniem, że wejścia i wyjścia modelu będą w odpowiedni sposób opóźniane poza nim. Pod tymi założeniami jedno z wyjść jest wprost wartością temperatury wody wewnątrz obiektu. Dane równanie opisujące zależność objętości wody od wysokości poziomu wody zostało przekształcone tak, aby wyrazić odwrotną zależność:

$$h = \sqrt[3]{\frac{1}{C}} \cdot \sqrt[3]{V} \tag{5}$$

Po przekształceniach równań obiektu można zdefiniować je jako funkcje:

$$\begin{aligned} f_1(F_H, F_C, F_D, V) &= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = F_H + F_C + F_D - \alpha\sqrt[6]{\frac{1}{C}}\sqrt[6]{V} \\ f_2(F_H, F_C, F_D, T_D, V, T) &= \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = T_H \cdot \frac{F_H}{V} + T_C \cdot \frac{F_C}{V} + T_D \cdot \frac{F_D}{V} - T \cdot \frac{F_H+F_C+F_D}{V} \end{aligned} \tag{6}$$

a następnie obliczyć ich pochodne czątkowe po każdej ze zmiennych. Tak więc pochodne cząstkowe funkcji f_1 wynoszą:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial F_H} &= 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial F_C} &= 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial F_D} &= 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial V} &= -\frac{1}{6} \cdot \alpha \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{C}} \cdot V^{-\frac{5}{6}} \end{aligned} \tag{7}$$

a dla funkcji f_2 są one następujące:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial F_H} &= \frac{T_H - T}{V} \\ \frac{\partial f_2}{\partial F_C} &= \frac{T_C - T}{V} \\ \frac{\partial f_2}{\partial F_D} &= \frac{T_D - T}{V} \\ \frac{\partial f_2}{\partial T_D} &= \frac{F_D}{V} \\ \frac{\partial f_2}{\partial V} &= \frac{T(F_H+F_C+F_D) - T_H F_H - T_C F_C - T_D F_D}{V^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial T} &= -\frac{F_H + F_C + F_D}{V} \end{aligned} \tag{8}$$

Ponadto warto także obliczyć pochodną funkcji wysokości po objętości wody w zbiorniku:

$$\frac{\partial h}{\partial V} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{C}} \cdot V^{-\frac{2}{3}} \tag{9}$$

Tak obliczone pochodne posłużą bezpośrednio do zapisania modelu liniowego w postaci równań stanu, muszą jednak zostać obliczone ich wartości w punkcie pracy. Należy pamiętać, że tak utworzony zlinearyzowany model odnosi się do zmian wartości wejść, stanów i wyjść w stosunku do wartości tych zmiennych w punkcie pracy. Ciągły model wyrażony za pomocą równań stanu jest więc postaci:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D} \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} V - V_0 \\ T - T_0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{u} &= \begin{bmatrix} F_H - F_{H0} \\ F_C - F_{C0} \\ F_D - F_{D0} \\ T_D - T_{D0} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} h - h_0 \\ T - T_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

Macierze $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{C}$ składają się więc z następujących elementów (dla uproszczenia zapisu przyjąłem oznaczenie *p.p.* jako warunek zdefiniowany przez punkt pracy podany w treści polecenia):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial V}\Big|_{p.p.} & \frac{\partial f_1}{\partial T}\Big|_{p.p.} \\ \frac{\partial f_2}{\partial V}\Big|_{p.p.} & \frac{\partial f_2}{\partial T}\Big|_{p.p.} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial F_H}\Big|_{p.p.} & \frac{\partial f_1}{\partial F_C}\Big|_{p.p.} & \frac{\partial f_1}{\partial F_D}\Big|_{p.p.} & \frac{\partial f_1}{\partial T_D}\Big|_{p.p.} \\ \frac{\partial f_2}{\partial F_H}\Big|_{p.p.} & \frac{\partial f_2}{\partial F_C}\Big|_{p.p.} & \frac{\partial f_2}{\partial F_D}\Big|_{p.p.} & \frac{\partial f_2}{\partial T_D}\Big|_{p.p.} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{C} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial V}\Big|_{p.p.} & \frac{\partial h}{\partial T}\Big|_{p.p.} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{D} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

2.2.2 Model w postaci transmitancyjnej

2.2.3 Badanie jakości linearyzacji

2.3 Modele liniowe dyskretne

2.3.1 Model w postaci równań stanu

2.3.2 Model w postaci transmitancyjnej

2.3.3 Badanie jakości dyskretyzacji