

1. 设 Γ 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和平面 $x + y + z = 0$ 交成的圆周, 从第一卦限内看 Γ , 它的方向是逆时针. 计算第二型曲线积分

$$\int_{\Gamma} z dx + x dy + y dz.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 证明 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上不一致连续.

3. 设 $\{a_n\}$ 为非负递减的数列, 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

4. 设 $a, b > 0$, $f \in C[0, +\infty)$, 证明:

(1) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$ 存在, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}.$$

(2) 如果无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)/x dx$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

(3) 如果 $f(+\infty)$ 存在, 且积分 $\int_0^1 f(x)/x dx$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}.$$

5. 计算积分

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx, \quad |r| < 1.$$

6. 设 $p > 0$, 讨论积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^p} dx$$

的敛散性.

7. 求积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x)/x dx$.

8. 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

9. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin(t) dt, \quad \alpha > 0$$

关于 u 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

10. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin(t) du, \quad \alpha > 0$$

关于 t 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

11. 计算 Fresnel 积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

12. 计算积分 $\int_0^{+\infty} \exp(-ax^2) \cos(bx) dx$, 其中 $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

13. 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha(x) dx$, 其中 $|\alpha| < 1$.
14. 设 \mathbb{K} 是数域, $A \in M_m(\mathbb{K})$, $B \in M_n(\mathbb{K})$, 且 A, B 没有相同的特征值, 证明矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解.
15. 设 A 是 4 阶方阵, 满足 $\text{tr}(A^i) = i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), 求 $|A|$.
16. n 阶方阵可对角化的充分必要条件.
17. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积, 在 $x = 1$ 处左连续, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 x^n f(x) dx}{\int_0^1 x^n dx} = f(1).$$

18. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2 = AA'$, 证明 A 为实对称阵.
19. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2 = A$, $B^2 = B$ 以及 $(A+B)^2 = A+B$, 证明 $AB = BA = 0$.
20. 设 A, B 都是 n 阶矩阵, 若 $A^k = 0$, 且 $AB + BA = B$, 证明 $B = 0$.
21. A, B 是 n 阶方阵, $A+B = AB$, 求证
- (1) $AB = BA$,
 - (2) $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$,
 - (3) A 可对角化当且仅当 B 可对角化.
22. 设 $f(x), g(x)$ 为多项式, 且 $(f(x), g(x)) = 1$, A 是 n 阶方阵, 求证: $f(A)g(A) = 0$ 的充分必要条件为 $\text{rank}(f(A)) + \text{rank}(g(A)) = n$.
23. 设 A, B 为实对称阵, 求证:
- (1) 若 A 正定, 则存在实可逆阵 P 使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 同时为对角阵;
 - (2) 若 A, B 半正定, 则 $\text{tr}(AB) \geq 0$, 并且等号成立当且仅当 $AB = 0$.
24. $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, 并且 $A = B + C$, 其中 B 为对称阵, C 为反对称阵, 证明: 若 $A^2 = 0$, 则 $A = 0$.
25. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.
26. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi),$$

27. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明对每个 $x \in (a, b)$, 都存在对应的 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

28. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上三阶可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi).$$

29. $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 非负连续, 单调递减, 求证 $\{a_n\}$ 极限存在, 其中

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_0^n f(x) dx.$$

30. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\pi/4 - x_n)$, 其中:

$$x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}.$$

31. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$, 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n}{p_n} = 0.$$

32. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n! a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} = 0.$$

33. 面积原理

(1) 设 $x \geq m \in \mathbb{N}^*$, f 是一个非负的递增函数, 则当 $\xi \geq m$ 时有

$$\left| \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx \right| \leq f(\xi).$$

(2) 设 $x \geq m \in \mathbb{N}^*$, f 是一个非负的递减函数, 则极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx \right) = \alpha$$

存在, 且 $0 \leq \alpha \leq f(m)$. 更进一步, 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 那么

$$\left| \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx - \alpha \right| \leq f(\xi - 1),$$

这里 $\xi \geq m + 1$.

34. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二次可微, 且 $f(a)f(b) < 0$, 对任意 $x \in [a, b]$ 都有 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$. 证明序列 $\{x_n\}$ 极限存在, 其中 $x_1 \in [a, b]$, $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$), 进而可以证明此极限为方程 $f(x) = 0$ 的根.

35. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{y_n\}: y_1 = 1, 2y_{n+1} = y_n + \sqrt{y_n^2 + a_n}$ ($n = 1, 2, \dots$). 证明 $\{y_n\}$ 是单调递增的收敛数列.

36. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: 当 $n < m$ 时, $|x_n - x_m| > 1/n$. 证明数列 $\{x_n\}$ 无界.

37. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$.

38. n 阶方阵的每行之和与每列之和均为 0, 证明其所有代数余子式全相等.

39. 设函数 $f(x)$ 定义在 $(a, +\infty)$, 且 $f(x)$ 在每个有限区间 (a, b) 内都有界, 并满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = A.$$

证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)/x) = A$.

40. 证明: (1) 关于 x 的方程 $\sum_{k=1}^n e^{kx} = n+1$ 在 $(0, 1)$ 上存在唯一的实根 a_n ; (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

41. 设 $a > 0$, 求积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\pi/2}} \frac{1}{1 + \tan^a y^2} dy$$

42. α, β 是 n 维列向量, A 是 n 阶方阵, 求证: $|A + \alpha\beta'| = |A| + \beta'A^*\alpha$.

43. 设 $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$, $B \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, 且

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

求证 $BA = 9I$.

44. $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^2 = A$, 若对任意列向量 x , 都有 $x'A'Ax \leq x'x$, 证明 $A' = A$.
45. 证明对任意 $m \times n$ 矩阵 A , 都有 $\text{rank}(AA') = \text{rank}(A)$.
46. (极分解) 对可逆阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 证明
- (1) 存在正交阵 P , 正定阵 B , 满足 $A = PB$.
 - (2) 存在正交阵 Q_1, Q_2 , 使得 $Q_1AQ_2 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 并且 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ 是 $A'A$ 的特征值.
47. $f(x) \in C[a, b]$, 证明函数 $m(x) = \min_{a \leq \xi \leq x} f(\xi)$ 在 $[a, b]$ 连续.
48. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, $f''(x)$ 有界, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
49. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上三阶连续可导, 且对任意的 $h > 0$, 有

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

求证: $f(x)$ 为次数至多为 2 的多项式.

50. 设 $A' = A$, 证明 A 可逆当且仅当存在矩阵 B 使得 $AB + B'A$ 正定.
51. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, $f(a) = 0$, 并且存在实数 $A > 0$, 使得对任意 $x \in [a, b]$, 都有 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$, 证明在 $[a, b]$ 上, $f(x) \equiv 0$.
52. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上一阶连续可导, 且

$$f'(x) = \frac{1}{1 + f^2(x)} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right)$$

证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

53. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 若对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x+n) = 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
54. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且对任意 $\delta > 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n\delta) = 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
55. 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上一致连续, 则存在正实数 a, b , 使得 $|f(x)| \leq a|x| + b$.
56. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续, 证明 $|f(x)/x|$ 在 $[1, +\infty)$ 有界.
57. 证明欧式空间中两标准正交基的过渡矩阵为正交阵.
58. 设 α 是欧式空间 V 中的一个非零向量, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 是 V 中的 p 个向量, 满足

$$(a_i, a_j) \leq 0, (\alpha_i, \alpha) > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, p, i \neq j$$

证明

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 线性无关;
 - (2) n 维欧式空间中最多有 $n+1$ 个向量, 使其两两互成钝角;
 - (3) n 维欧式空间中一定存在 $n+1$ 个向量, 使其两两互为钝角.
59. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, 且 $AB = BA$, 利用线性方程组的知识证明

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \text{rank}(AB)$$

60. 设 $B \in M_{n \times 2}(\mathbb{C})$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

若 $A = BC$, 且 CB 的特征多项式为 $x^2 - 2x + 1$, 求 A 的特征值, 并求 $AX = 0$ 的基础解系.

61. 计算 n 阶 b -循环行列式:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ ba_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ ba_{n-1} & ba_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ba_2 & ba_3 & ba_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

62. 设 A 是 n 阶实反对称阵, $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ 是同阶的对角阵, 且 $d_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$. 求证 $|A + D| > 0$, 特别地, $I_n + A$ 与 $I_n - A$ 都是非异阵.

63. 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 适合条件:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则称 A 为**严格对角占优阵**, 求证, 严格对角占优阵必是满秩阵, 若上述条件改为:

$$a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

求证 $|A| > 0$.

64. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 对 $[a, b]$ 上任意一个闭区间 $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, 对介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的任一常数 l , 方程

$$f(x) = l$$

在 $[x_1, x_2]$ 上有且仅有有限个解, 证明 $f(x) \in C[a, b]$.

65. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = A$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 其中 $A \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$.

66. 已知 $A \in M_n(\mathbb{K})$, 且 $\text{tr}(A) = 0$, 证明

(1) 存在数域 \mathbb{K} 上的可逆阵 C , 使得 $C^{-1}AC$ 为主对角元全为 0 的矩阵.

(2) 存在 $X, Y \in M_n(\mathbb{K})$, 使得 $XY - YX = A$.

(3) 令 U 为 $M_n(\mathbb{K})$ 中所有形如 $XY - YX$ 的矩阵组成的集合, 证明 U 是 $M_n(\mathbb{K})$ 的一个线性子空间.

67. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)^n$$

68. 设 φ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, W 是 φ 的不变子空间, 且 $V = \text{Im } \varphi \oplus W$, 证明

$$V = \text{Im } \varphi \oplus \text{Ker } \varphi.$$

69. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 且 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 1$, $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, 证明 A 相似于 B .

70. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 求证: 必存在正整数 m , 使得

$$\text{Im } \varphi^m = \text{Im } \varphi^{m+1}, \quad \text{Ker } \varphi^m = \text{Ker } \varphi^{m+1}, \quad V = \text{Im } \varphi^m \oplus \text{Ker } \varphi^{m+1}.$$

71. 使用 Jordan 标准型证明迹非 0 的秩 1 矩阵可对角化.

72. 设 A 是 n 阶实对称阵, 证明: A 可逆的充分必要条件为存在矩阵 B , 使得 $AB + B'A$ 正定.

73. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 其中 A 是幂零阵, 且 $AB = BA$, 求证: $|B| = |A + B|$.

74. 设函数 f 在 $x = 0$ 连续, 并且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A,$$

求证: $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0) = A$.

75. 设 x_n 是 $\tan x = x$ 在 $(n\pi, n\pi + \pi/2)$ 上的解,

(1) 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\pi + \pi/2 - x_n) = 0$,

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(n\pi + \pi/2 - x_n)$.

76. 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 且 $f(0) = 0$, 并假设有实数 A 使得 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 证明 $f(x) \equiv 0$ ($x \in (0, +\infty)$).

77. 设偶函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导, 且 $f(0) = 1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (f(1/n) - 1)$ 绝对收敛.

78. 设 f 在 $[a, b]$ 上可导, 且 f' 在 $[a, b]$ 上可积, $f(a) = 0$, 证明:

$$2 \int_a^b (f(x))^2 dx \leq (b-a)^2 \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

79. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 且存在实数 $A > 0$, 使得 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$, 证明 $f(x) \equiv 0$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 均成立.