

1. 设 Γ 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和平面 $x + y + z = 0$ 交成的圆周, 从第一卦限内看 Γ , 它的方向是逆时针. 计算第二型曲线积分

$$\int_{\Gamma} z \, dx + x \, dy + y \, dz.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 证明 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上不一致连续.

3. 设 $\{a_n\}$ 为非负递减的数列, 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

4. 设 $a, b > 0, f \in C[0, +\infty)$, 证明:

- (1) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$ 存在, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}.$$

- (2) 如果无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)/x \, dx$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

- (3) 如果 $f(+\infty)$ 存在, 且积分 $\int_0^1 f(x)/x \, dx$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, dx = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}.$$

5. 计算积分

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) \, dx, \quad |r| < 1.$$

6. 设 $p > 0$, 讨论积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^p} \, dx$$

的敛散性.

7. 求积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x)/x \, dx$.

8. 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

9. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin(t) \, dt, \quad \alpha > 0$$

关于 u 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

10. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin(t) \, du, \quad \alpha > 0$$

关于 t 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

11. 计算 Fresnel 积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.
12. 计算积分 $\int_0^{+\infty} \exp(-ax^2) \cos(bx) dx$, 其中 $a > 0, b \in \mathbb{R}$.
13. 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha(x) dx$, 其中 $|\alpha| < 1$.
14. 设 \mathbb{K} 是数域, $A \in M_m(\mathbb{K}), B \in M_n(\mathbb{K})$, 且 A, B 没有相同的特征值, 证明矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解.
15. 设 A 是 4 阶方阵, 满足 $\text{tr}(A^i) = i (i = 1, 2, 3, 4)$, 求 $|A|$.
16. n 阶方阵可对角化的充分必要条件.
17. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积, 在 $x = 1$ 处左连续, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 x^n f(x) dx}{\int_0^1 x^n dx} = f(1).$$

18. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2 = AA'$, 证明 A 为实对称阵.
19. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2 = A, B^2 = B$ 以及 $(A+B)^2 = A+B$, 证明 $AB = BA = 0$.
20. 设 A, B 都是 n 阶矩阵, 若 $A^k = 0$, 且 $AB + BA = B$, 证明 $B = 0$.
21. A, B 是 n 阶方阵, $A + B = AB$, 求证
 - (1) $AB = BA$,
 - (2) $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$,
 - (3) A 可对角化当且仅当 B 可对角化.
- *22. 设 $f(x), g(x)$ 为多项式, 且 $(f(x), g(x)) = 1$, A 是 n 阶方阵, 求证: $f(A)g(A) = 0$ 的充分必要条件为 $\text{rank}(f(A)) + \text{rank}(g(A)) = n$.
23. 设 A, B 为实对称阵, 求证:
 - (1) 若 A 正定, 则存在实可逆阵 P 使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 同时为对角阵;
 - (2) 若 A, B 半正定, 则 $\text{tr}(AB) \geq 0$, 并且等号成立当且仅当 $AB = 0$.
24. $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, 并且 $A = B + C$, 其中 B 为对称阵, C 为反对称阵, 证明: 若 $A^2 = 0$, 则 $A = 0$.
25. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n})$.
26. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi),$$

27. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明对每个 $x \in (a, b)$, 都存在对应的 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

28. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上三阶可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi).$$

29. $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 非负连续, 单调递减, 求证 $\{a_n\}$ 极限存在, 其中

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_0^n f(x) dx.$$

30. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\pi/4 - x_n)$, 其中:

$$x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}.$$

31. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$, 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n}{p_n} = 0.$$

32. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n! a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = 0.$$

33. 面积原理

(1) 设 f 是一个非负的递增函数, 则当 $\xi \geq m$ 时有

$$\left| \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx \right| \leq f(\xi).$$

(2) 设 f 是一个非负的递减函数, 则极限

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx \right) = \alpha$$

存在, 且 $0 \leq \alpha \leq f(m)$. 更进一步, 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 那么

$$\left| \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx - \alpha \right| \leq f(\xi - 1),$$

这里 $\xi \geq m + 1$.

34. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二次可微, 且 $f(a)f(b) < 0$, 对任意 $x \in [a, b]$ 都有 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$. 证明序列 $\{x_n\}$ 极限存在, 其中 $x_1 \in [a, b]$, $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$), 进而可以证明此极限为方程 $f(x) = 0$ 的根.

35. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{y_n\}$: $y_1 = 1$, $2y_{n+1} = y_n + \sqrt{y_n^2 + a_n}$ ($n = 1, 2, \dots$). 证明 $\{y_n\}$ 是单调递增的收敛数列.

36. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: 当 $n < m$ 时, $|x_n - x_m| > 1/n$. 证明数列 $\{x_n\}$ 无界.

37. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$.

38. n 阶方阵的每行之和与每列之和均为 0, 证明其所有代数余子式全相等.

39. 设函数 $f(x)$ 定义在 $(a, +\infty)$, 且 $f(x)$ 在每个有限区间 (a, b) 内都有界, 并满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = A.$$

证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)/x) = A$.

40. 证明: (1) 关于 x 的方程 $\sum_{k=1}^n e^{kx} = n+1$ 在 $(0, 1)$ 上存在唯一的实根 a_n ; (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

41. 设 $a > 0$, 求积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\pi/2}} \frac{1}{1 + \tan^a y^2} dy$$

42. α, β 是 n 维列向量, A 是 n 阶方阵, 求证: $|A + \alpha\beta'| = |A| + \beta' A^* \alpha$.

43. 设 $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$, $B \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, 且

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

求证 $BA = 9I$.

44. $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^2 = A$, 若对任意列向量 x , 都有 $x' A' A x \leq x' x$, 证明 $A' = A$.

45. 证明对任意 $m \times n$ 矩阵 A , 都有 $\text{rank}(AA') = \text{rank}(A)$.

46. (极分解) 对可逆阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 证明

(1) 存在正交阵 P , 正定阵 B , 满足 $A = PB$.

(2) 存在正交阵 Q_1, Q_2 , 使得 $Q_1 A Q_2 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 并且 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ 是 $A' A$ 的特征值.

47. $f(x) \in C[a, b]$, 证明函数 $m(x) = \min_{a \leq \xi \leq x} f(\xi)$ 在 $[a, b]$ 连续.

48. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, $f''(x)$ 有界, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

49. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上三阶连续可导, 且对任意的 $h > 0$, 有

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

求证: $f(x)$ 为次数至多为 2 的多项式.

50. 设 $A' = A$, 证明 A 可逆当且仅当存在矩阵 B 使得 $AB + B'A$ 正定.

51. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, $f(a) = 0$, 并且存在实数 $A > 0$, 使得对任意 $x \in [a, b]$, 都有 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$, 证明在 $[a, b]$ 上, $f(x) \equiv 0$.

52. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上一阶连续可导, 且

$$f'(x) = \frac{1}{1 + f^2(x)} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right)$$

证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

53. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 若对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x+n) = 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

54. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且对任意 $\delta > 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n\delta) = 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

55. 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上一致连续, 则存在正实数 a, b , 使得 $|f(x)| \leq a|x| + b$.

56. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续, 证明 $|f(x)/x|$ 在 $[1, +\infty)$ 有界.

57. 证明欧式空间中两标准正交基的过渡矩阵为正交阵.

58. 设 α 是欧式空间 V 中的一个非零向量, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 是 V 中的 p 个向量, 满足

$$(a_i, a_j) \leq 0, (a_i, \alpha) > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, p, i \neq j$$

证明

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 线性无关;

(2) n 维欧式空间中最多有 $n+1$ 个向量, 使其两两互成钝角;

(3) n 维欧式空间中一定存在 $n+1$ 个向量, 使其两两互为钝角.

59. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, 且 $AB = BA$, 利用线性方程组的知识证明

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \text{rank}(AB)$$

60. 设 $B \in M_{n \times 2}(\mathbb{C})$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

若 $A = BC$, 且 CB 的特征多项式为 $x^2 - 2x + 1$, 求 A 的特征值, 并求 $AX = 0$ 的基础解系.

61. 计算 n 阶 b -循环行列式:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ ba_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ ba_{n-1} & ba_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ba_2 & ba_3 & ba_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

*62. 设 A 是 n 阶实反对称阵, $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ 是同阶的对角阵, 且 $d_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 求证 $|A+D| > 0$, 特别地, $I_n + A$ 与 $I_n - A$ 都是非异阵.

63. 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 适合条件:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则称 A 为**严格对角占优阵**, 求证, 严格对角占优阵必是满秩阵, 若上述条件改为:

$$a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

求证 $|A| > 0$.

64. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 对 $[a, b]$ 上任意一个闭区间 $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, 对介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的任一常数 l , 方程

$$f(x) = l$$

在 $[x_1, x_2]$ 上有且仅有有限个解, 证明 $f(x) \in C[a, b]$.

65. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = A$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 其中 $A \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$.

66. 已知 $A \in M_n(\mathbb{K})$, 且 $\text{tr}(A) = 0$, 证明

(1) 存在数域 \mathbb{K} 上的可逆阵 C , 使得 $C^{-1}AC$ 为主对角元全为 0 的矩阵.

(2) 存在 $X, Y \in M_n(\mathbb{K})$, 使得 $XY - YX = A$.

(3) 令 U 为 $M_n(\mathbb{K})$ 中所有形如 $XY - YX$ 的矩阵组成的集合, 证明 U 是 $M_n(\mathbb{K})$ 的一个线性子空间.

67. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)^n$$

68. 设 φ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, W 是 φ 的不变子空间, 且 $V = \text{Im } \varphi \oplus W$, 证明

$$V = \text{Im } \varphi \oplus \text{Ker } \varphi.$$

69. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 且 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 1$, $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, 证明 A 相似于 B .

70. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 求证: 必存在正整数 m , 使得

$$\text{Im } \varphi^m = \text{Im } \varphi^{m+1}, \quad \text{Ker } \varphi^m = \text{Ker } \varphi^{m+1}, \quad V = \text{Im } \varphi^m \oplus \text{Ker } \varphi^{m+1}.$$

71. 使用 Jordan 标准型证明迹非 0 的秩 1 矩阵可对角化.

72. 设 A 是 n 阶实对称阵, 证明: A 可逆的充分必要条件为存在矩阵 B , 使得 $AB + B'A$ 正定.

73. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 其中 A 是幂零阵, 且 $AB = BA$, 求证: $|B| = |A + B|$.

74. 设函数 f 在 $x = 0$ 连续, 并且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A,$$

求证: $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0) = A$.

75. 设 x_n 是 $\tan x = x$ 在 $(n\pi, n\pi + \pi/2)$ 上的解,

(1) 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\pi + \pi/2 - x_n) = 0$,

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(n\pi + \pi/2 - x_n)$.

76. 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 且 $f(0) = 0$, 并假设有实数 A 使得 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 证明 $f(x) \equiv 0$ ($x \in (0, +\infty)$).

77. 设偶函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导, 且 $f(0) = 1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (f(1/n) - 1)$ 绝对收敛.

78. 设 f 在 $[a, b]$ 上可导, 且 f' 在 $[a, b]$ 上可积, $f(a) = 0$, 证明:

$$2 \int_a^b (f(x))^2 dx \leq (b-a)^2 \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

79. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 且存在实数 $A > 0$, 使得 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$, 证明 $f(x) \equiv 0$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 均成立.

80. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的二阶导数, $f(0) = f(1) = 0$, 且对任意的 $x \in (0, 1)$, 都有 $f(x) \neq 0$, 证明

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4$$

81. 设 $f(x) \in C^2[a, b]$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

82. 设 x_1, x_2, x_3 是多项式 $f(x) = x^3 + ax + 1$ 的三个根, 求一个首一多项式以 x_1^2, x_2^2, x_3^2 为根.

83. 设 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 内可微, 且 $f'(x)$ 在 (a, b) 内有界, 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

84. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$, $\lambda \in (0, 1)$, 恒有 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. 证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

85. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 且满足下列条件之一, 则有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

(1) $f''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有界;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在.

86. 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 加上下面任一条件即可推出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在,

(2) $\int_a^{+\infty} f'(x) dx$ 收敛,

(3) $f(x)$ 单调, 这时有更强的结果: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$,

(4) $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续,

(5) $f'(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

87. 设 A 是三阶正交矩阵, 且 $|A| = 1$, 证明存在正交阵 B , 使得 $A = B^2$.

88. 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义, 且在任何有限闭区间上可积, 证明: 对任何闭区间 $[a, b]$, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

89. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\{2x_{n+1} + x_n\}$ 收敛, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

90. (Young 不等式) 设 $y = f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上严格递增的连续函数, 且满足 $f(0) = 0$, 证明对任意的 $a, b > 0$, 有

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy.$$

91. 设 $f, g \in C[a, b]$, g 在 $[a, b]$ 上不变号, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

92. 设 A 为 3 阶非零实矩阵, $A^T = A^*$, 且 $|I + A| = |I - A| = 0$, 计算行列式 $|A^2 - A - 3I|$.

93. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, $g(x)$ 是 \mathbb{R} 上以 $T > 0$ 为周期的连续函数, 且 $\int_0^T g(x) dx = 0$, 求

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(\lambda x) dx$$

94. 设 $f(x)$ 是实多项式, 且对任意实数 r , 都有 $f(r) \geq 0$. 证明存在实多项式 $g(x), h(x)$ 使得 $f(x) = g^2(x) + h^2(x)$.

95. 设 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且适合条件:

$$\varphi_i^2 = \varphi_i, \quad \varphi_i \varphi_j = 0 \ (i \neq j), \quad \bigcap_{i=1}^m \text{Ker } \varphi_i = 0,$$

求证: $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \varphi_i$.

96. 设 f 在 $(0, 1]$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} f'(x) = A \in \mathbb{R}$, 证明 f 在 $(0, 1]$ 上一致连续.

97. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可积, $f(1) = 0, f'(1) = a$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n^2 x^n f(x) dx = -a.$$

98. 设 $f(x), g(x)$ 是次数不小于 1 的互素多项式, 求证, 必唯一地存在两个多项式 $u(x), v(x)$ 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1,$$

且 $\deg v(x) < \deg f(x), \deg u(x) < \deg g(x)$.

99. 设 $f(x)$ 是次数大于 0 的首一整系数多项式, 若 $f(0), f(1)$ 都是奇数, 求证 $f(x)$ 没有有理根.

100. 设 $f(x)$ 是次数大于 1 的奇数次有理系数多项式, 且它在有理数域上不可约, 求证: 若 x_1, x_2 是 $f(x)$ 在复数域上的两个不同的根, 则 $x_1 + x_2$ 必不是有理数.

101. 设 A 是实矩阵, 又 $I_n - A$ 的特征值的模长都小于 1, 求证: $0 < |A| < 2^n$.

102. 设

$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) = \{a_0 + a_1 \sqrt[n]{2} + a_2 \sqrt[n]{4} + \dots + a_{n-1} \sqrt[n]{2^{n-1}} : a_i \in \mathbb{Q}, 0 \leq i \leq n-1\}$$

证明 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 是一个数域, 并求 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 做为 \mathbb{Q} 上线性空间的一组基.

103. 设 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ 是数域 \mathbb{K} 上的不可约多项式, φ 是 \mathbb{K} 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 是 V 中的向量, 满足

$$\varphi(\alpha_i) = \alpha_{i+1} \ (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad \varphi(\alpha_n) = -a_n \alpha_1 - a_{n-1} \alpha_2 - \dots - a_1 \alpha_n.$$

证明 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 V 的一组基.

104. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 存在可逆复矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 证明存在可逆实矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ = B$.

105. 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足 $\text{rank}(ABA) = r(A)$, 求证: AB 与 BA 相似.

106. 设 A, B 为 n 阶方阵, 则 AB 与 BA 相似的充要条件是 $\text{rank}((AB)^i) = \text{rank}((BA)^i) \ (1 \leq i \leq n-1)$.

107. 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足 $\text{rank}(ABA) = r(B)$, 求证: AB 与 BA 相似.

108. 设 f 在 \mathbb{R} 上连续, 又 $\varphi(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$ 单调递减, 证明 $f(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$.

109. 计算积分

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

110. 讨论广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$$

在何时绝对收敛或条件收敛.

111. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一阶连续可导, 且 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 单调递减趋于 0, 证明无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛当且仅当 $\int_a^{+\infty} x f'(x) dx$ 收敛.

112. 设 $\{a_n\}$ 是正数列, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = A < +\infty$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 1$, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 1.$$

113. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_{n+k}}{n+k}$.

114. 设 $f(x) \in C[1, +\infty)$, 对任意 $x \in [1, +\infty)$, 有 $f(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x))/\ln(x) = -\lambda$, 证明: $\lambda > 1$ 时 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.¹

115. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调, 并且积分 $\int_0^1 f(x) dx$ 收敛, 证明:

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

并且举反例说明“去掉单调条件, 结论则不成立.”

116. 设 V 是 n 维线性空间, 对于整数 $k \geq n$, 证明存在一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in V$, 使得其中任意 n 个线性无关.

117. 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同时敛散.

118. 设对任意 $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ 收敛, 证明下述级数收敛 (利用绝对收敛函数重排不改变敛散性与级数值):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

119. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{n}]} / n^p$ 的敛散性.

120. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上二次连续可微, 且有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)$ 绝对收敛.

121. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

122. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 若 $AB = BA$, 则 A, B 至少有一个公共的特征向量.

123. 设 φ 是 n 维复线性空间 V 上的线性变换, 求证 φ 可对角化的充要条件是对 φ 的任一特征值 λ_0 , 总有 $\text{Ker}(\varphi - \lambda_0 I) \cap \text{Im}(\varphi - \lambda_0 I) = 0$.

¹数列形式下的该判别法称为对数判别法

*124. 设在数域 \mathbb{K} 上, 一元多项式 $f(x) = f_1 f_2$, 且 $(f_1, f_2) = 1$, V 是数域 \mathbb{K} 上的 n 维线性空间, φ 是 V 上的线性变换, 证明 $\text{Ker } f(\varphi) = \text{Ker } f_1(\varphi) \oplus \text{Ker } f_2(\varphi)$.

125. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可微, 且对任意 $x \in [a, +\infty)$, 都有

$$f(x+1) - f(x) = f'(x)$$

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = c$, 证明 $f'(x) = c$ 在 $[a, +\infty)$ 上恒成立.

126. 设 $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 对于 $\alpha, \beta > 0$, 且 $\alpha + \beta > 1$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha / n^\beta < +\infty$.

127. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 对任意 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, 都有 $x'Ax > 0$, 利用 62 题证明 $|A| > 0$.

128. 设有 n 阶分块对角阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix}$$

其中 A_i 与 B_i 为同阶方阵, 假定矩阵 A_i 适合非零多项式 $g_i(x)$, 且 $g_i(x) (i = 1, \dots, k)$ 两两互素. 求证: 若对于每个 i , 存在多项式 $f_i(x)$, 使 $B_i = f_i(A_i)$, 则必存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B = f(A)$.

129. 设 n 阶方阵 A 的秩为 $n-1$, B 是同阶非零阵, 且有 $AB = BA = 0$, 证明: 存在不超过 $n-1$ 阶的多项式 $f(x)$, 使得 $B = f(A)$.

130. 如 14 题, 可以进一步证明逆命题也成立, 即: 如果 $AX = XB$ 只有零解, 则 A, B 无公共特征值.

*131. 设 V 为数域 \mathbb{K} 上的 n 维线性空间, φ 是 V 上的线性变换, 其特征多项式与极小多项式分别设为 $f(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$, 设

$$f(\lambda) = P_1(\lambda)^{r_1} P_2(\lambda)^{r_2} \dots P_t(\lambda)^{r_t}, \quad m(\lambda) = P_1(\lambda)^{s_1} P_2(\lambda)^{s_2} \dots P_t(\lambda)^{s_t}$$

分别为 $f(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$ 的不可约分解, 其中 $P_i(\lambda)$ 为 \mathbb{K} 上互异的首一不可约多项式, $r_i, s_i > 0 (i = 1, 2, \dots, t)$. 设 $V_i = \text{Ker } P_i(\varphi)^{r_i}$, $U_i = \text{Ker } P_i(\varphi)^{s_i} (i = 1, 2, \dots, t)$. 求证:

(1) $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_t$, $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_t$, 且 $U_i = V_i (i = 1, 2, \dots, t)$;

(2) $\varphi|_{V_i}$ 的特征多项式为 $P_i(\lambda)^{r_i}$, 极小多项式为 $P_i(\lambda)^{s_i}$. 特别地, $\dim V_i = r_i \deg P_i(\lambda)$.

132. 证明任一 n 阶复矩阵 A 都可以分解为两个 n 阶对称阵的乘积, 即 $A = BC$, 并且可以任意指定 B 或 C 为可逆阵.

133. 证明任一 n 阶复矩阵 A 都相似于一个复对称阵.

134. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 求证: A 为半正定阵或半负定阵的充要条件是对任意满足 $\alpha' A \alpha = 0$ 的 n 维实向量 α , 都有 $A \alpha = 0$.

135. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 上可导, 且 $f(a) = f(b)$, 若 $|f'(x)| \leq 1$, 证明对任意的 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{(b-a)}{2}.$$

136. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(1) = 0$, 证明 $\{f(x)x^n\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

137. 设 $p(x), q(x), r(x)$ 是数域 \mathbb{K} 上的正次数多项式, 且 $p(x)$ 与 $q(x)$ 互素, $\deg r(x) < \deg p(x) + \deg q(x)$, 证明存在数域 \mathbb{K} 上的多项式 $u(x), v(x)$, 满足 $\deg u(x) < \deg p(x)$, $\deg v(x) < \deg q(x)$, 使得 $r(x) = p(x)v(x) + q(x)u(x)$.

138. (Dini 定理) 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在有限闭区间 $[a, b]$ 上连续. 如果对每一个 $x \in [a, b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 关于 n 递减趋于 0. 那么 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 0.
139. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上关于 x 单调递增, 且 $\{f_n(x)\}$ 收敛于连续函数 $f(x)$. 证明: $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.
140. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 记

$$A_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) - \int_a^b f(x) dx,$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} nA_n = (b-a)(f(b) - f(a))/2$.

141. 设 V 是数域 \mathbb{K} 上的 n 维线性空间, σ, τ 是 V 上的线性变换, 且 $\sigma^2 = \tau^2 = 0$, 且 $\sigma\tau + \tau\sigma = I_V$, 其中 I_V 是 V 上的恒等变换, 证明

(1) $V = \text{Ker } \sigma \oplus \text{Ker } \tau$;

(2) V 必是偶数维线性空间.

142. 设函数 $f(x) \in C[a, b]$, $f(x)$ 不恒为 0 并且满足 $0 \leq f(x) \leq M$. 证明:

$$\left(\int_a^b f(x) \cos x dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \sin x dx\right)^2 + \frac{M^2(b-a)^4}{12} \geq \left(\int_a^b f(x) dx\right)^2.$$

143. 计算极限 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln x \cos^2(\lambda x) dx$.

*144. 设 $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, 求证: 方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解的充分必要条件是存在可逆阵 P , 使得 $B = PA$.

145. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} & \cdots & 0 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} & x^{n-1} \\ 1 & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} & x^n \end{vmatrix}$$

146. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的单调非增函数, 对于任意 $a \in (0, 1)$, 证明: $\int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^1 f(x) dx$.

147. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积, 且有 $0 < m \leq f(x) \leq M$. 证明:

$$1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(M+m)^2}{4mM}.$$