1. 设 Γ 是由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 交成的圆周, 从第一卦限内看 Γ, 它的方向是逆时针. 计算第二型曲线积分

$$\int_\Gamma z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z\,.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$, 证明 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上不一致连续.

3. 设 $\{a_n\}$ 为非负递减的数列, 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

4. 设 $a,b>0$, $f\in C[0,+\infty)$, 证明:

   (1) 如果 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$ 存在, 那么
   $$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = (f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}.$$

   (2) 如果无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)/x\,\mathrm{d}x$ 收敛, 那么
   $$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

   (3) 如果 $f(+\infty)$ 存在, 且积分 $\int_0^1 f(x)/x\,\mathrm{d}x$ 收敛, 那么
   $$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = -f(+\infty)\ln\frac{b}{a}.$$

5. 计算积分
$$I(r)=\int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos x + r^2)\,\mathrm{d}x\,,\quad |r|<1.$$

6. 设 $p>0$, 讨论积分
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$$
的敛散性.

7. 求积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x)/x\,\mathrm{d}x$.

8. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 证明
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)=0.$$

9. 证明: 积分
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin(t)\,\mathrm{d}t\,,\quad \alpha>0$$
关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

10. 证明: 积分
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin(t)\,\mathrm{d}u\,,\quad \alpha>0$$
关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

11. 计算 Fresnel 积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$.

12. 计算积分 $\int_0^{+\infty} \exp(-ax^2)\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, 其中 $a>0,\ b\in\mathbb{R}$.

13. 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \tan^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $|\alpha|<1$.

14. 设 $\mathbb{K}$ 是数域, $A\in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, $B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 A,B 没有相同的特征值, 证明矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解.

15. 设 A 是 4 阶方阵, 满足 $\mathrm{tr}(A^i)=i\,(i=1,2,3,4)$, 求 $|A|$.

16. n 阶方阵可对角化的充分必要条件.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 在 $x=1$ 处左连续, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x}=f(1).$$

18. 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2=AA'$, 证明 A 为实对称阵.

19. 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2=A$, $B^2=B$ 以及 $(A+B)^2=A+B$, 证明 $AB=BA=0$.

20. 设 A,B 都是 n 阶矩阵, 若 $A^k=0$, 且 $AB+BA=B$, 证明 $B=0$.

21. A,B 是 n 阶方阵, $A+B=AB$, 求证

    (1) $AB=BA$,

    (2) $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$,

    (3) A 可对角化当且仅当 B 可对角化.

*22. 设 $f(x),g(x)$ 为多项式, 且 $(f(x),g(x))=1$, A 是 n 阶方阵, 求证: $f(A)g(A)=0$ 的充分必要条件为 $\mathrm{rank}(f(A))+\mathrm{rank}(g(A))=n$.

23. 设 A,B 为实对称阵, 求证:

    (1) 若 A 正定, 则存在实可逆阵 P 使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 同时为对角阵;

    (2) 若 A,B 半正定, 则 $\mathrm{tr}(AB)\geqslant 0$, 并且等号成立当且仅当 $AB=0$.

24. $A,B,C\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 并且 $A=B+C$, 其中 B 为对称阵, C 为反对称阵, 证明: 若 $A^2=0$, 则 $A=0$.

25. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

26. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi),$$

27. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明对每个 $x\in(a,b)$, 都存在对应的 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

28. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

29. $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 非负连续, 单调递减, 求证 $\{a_n\}$ 极限存在, 其中

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

30. 求 $\lim_{n\to\infty} n(\pi/4 - x_n)$, 其中:

$$x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}.$$

31. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$, 证明极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n}{p_n} = 0.$$

32. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明极限

$$\lim_{n\to\infty} (n!a_1a_2\dots a_n)^{1/n} = 0.$$

33. **面积原理**

   (1) 设 f 是一个非负的递增函数, 则当 $\xi \geqslant m$ 时有

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant f(\xi).$$

   (2) 设 f 是一个非负的递减函数, 则极限

$$\lim_{\xi\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \alpha$$

   存在, 且 $0 \leqslant \alpha \leqslant f(m)$. 更进一步, 如果 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 那么

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x - \alpha\right| \leqslant f(\xi-1),$$

   这里 $\xi \geqslant m+1$.

34. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微, 且 $f(a)f(b) < 0$, 对任意 $x \in [a,b]$ 都有 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$. 证明序列 $\{x_n\}$ 极限存在, 其中 $x_1 \in [a,b]$, $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)\,(n=1,2,\dots)$, 进而可以证明此极限为方程 $f(x)=0$ 的根.

35. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{y_n\}$: $y_1 = 1,\ 2y_{n+1} = y_n + \sqrt{y_n^2 + a_n}\ (n=1,2,\dots)$. 证明 $\{y_n\}$ 是单调递增的收敛数列.

36. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: 当 $n < m$ 时, $|x_n - x_m| > 1/n$. 证明数列 $\{x_n\}$ 无界.

37. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$.

38. n 阶方阵的每行之和与每列之和均为 0, 证明其所有代数余子式全相等.

39. 设函数 $f(x)$ 定义在 $(a,+\infty)$, 且 $f(x)$ 在每个有限区间 (a,b) 内都有界, 并满足

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = A.$$

   证明 $\lim_{x\to+\infty}(f(x)/x) = A$.

40. 证明: (1) 关于 x 的方程 $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{kx} = n+1$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一的实根 a_n; (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

41. 设 $a > 0$, 求积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\pi/2}} \frac{1}{1+\tan^a y^2}\,\mathrm{d}y$$

42. α, β 是 n 维列向量, A 是 n 阶方阵, 求证: $|A+\alpha\beta'| = |A| + \beta' A^* \alpha$.

43. 设 $A \in \mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, 且

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

求证 $BA = 9I$.

44. $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $A^2 = A$, 若对任意列向量 x, 都有 $x'A'Ax \leqslant x'x$, 证明 $A' = A$.

45. 证明对任意 $m\times n$ 矩阵 A, 都有 $\mathrm{rank}(AA') = \mathrm{rank}(A)$.

46. $f(x) \in C[a,b]$, 证明函数 $m(x) = \min\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi)$ 在 $[a,b]$ 连续.

47. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导, 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, $f''(x)$ 有界, 证明 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

48. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上三阶连续可导, 且对任意的 $h > 0$, 有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

求证: $f(x)$ 为次数至多为 2 的多项式.

49. 设 $A' = A$, 证明 A 可逆当且仅当存在矩阵 B 使得 $AB + B'A$ 正定.

50. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, $f(a) = 0$, 并且存在实数 $A > 0$, 使得对任意 $x \in [a,b]$, 都有 $|f'(x)| \leqslant A|f(x)|$, 证明在 $[a,b]$ 上, $f(x) \equiv 0$.

51. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一阶连续可导, 且

$$f'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)$$

证明: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

52. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 若对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim_{n\to+\infty} f(x+n) = 0$, 证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

53. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对任意 $\delta > 0$, 都有 $\lim_{n\to\infty} f(n\delta) = 0$, 证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

54. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 则存在正实数 a, b, 使得 $|f(x)| \leqslant a|x| + b$.

55. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续, 证明 $|f(x)/x|$ 在 $[1,+\infty)$ 有界.

56. 证明欧式空间中两标准正交基的过渡矩阵为正交阵.

57. 设 α 是欧式空间 V 中的一个非零向量, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 是 V 中的 p 个向量, 满足

$$(a_i, a_j) \leqslant 0,\ (\alpha_i, \alpha) > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, p, i \neq j$$

证明

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 线性无关;

(2) n 维欧式空间中最多有 $n+1$ 个向量, 使其两两互成钝角;

(3) n 维欧式空间中一定存在 $n+1$ 个向量, 使其两两互为钝角.

58. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 $AB = BA$, 利用线性方程组的知识证明

$$\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - \operatorname{rank}(AB)$$

59. 设 $B \in \mathrm{M}_{n\times 2}(\mathbb{C})$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

若 $A = BC$, 且 CB 的特征多项式为 $x^2 - 2x + 1$, 求 A 的特征值, 并求 $AX = 0$ 的基础解系.

60. 计算 n 阶 b – 循环行列式:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ ba_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ ba_{n-1} & ba_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ba_2 & ba_3 & ba_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

***61.** 设 A 是 n 阶实反对称阵, $D = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ 是同阶的对角阵, 且 $d_i > 0\,(i = 1, 2, \dots, n)$. 求证 $|A + D| > 0$, 特别地, $I_n + A$ 与 $I_n - A$ 都是非异阵.

62. 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 适合条件:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则称 A 为**严格对角占优阵**, 求证, 严格对角占优阵必是满秩阵, 若上述条件改为:

$$a_{ii} > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

求证 $|A| > 0$.

63. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 对 $[a, b]$ 上任意一个闭区间 $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, 对介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的任一常数 l, 方程

$$f(x) = l$$

在 $[x_1, x_2]$ 上有且仅有有限个解, 证明 $f(x) \in C[a, b]$.

64. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x)) = A$, 证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$, 其中 $A \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$.

65. 已知 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 $\operatorname{tr}(A) = 0$, 证明

(1) 存在数域 $\mathbb{K}$ 上的可逆阵 C, 使得 $C^{-1}AC$ 为主对角元全为 0 的矩阵.

(2) 存在 $X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 使得 $XY - YX = A$.

(3) 令 U 为 $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 中所有形如 $XY - YX$ 的矩阵组成的集合, 证明 U 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 的一个线性子空间.

66. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n$$

67. 设 φ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, W 是 φ 的不变子空间, 且 $V=\operatorname{Im}\varphi\oplus W$, 证明

$$V=\operatorname{Im}\varphi\oplus\operatorname{Ker}\varphi.$$

68. 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 且 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=1,\ \operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$, 证明 A 相似于 B.

69. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 求证: 必存在正整数 m, 使得

$$\operatorname{Im}\varphi^m=\operatorname{Im}\varphi^{m+1},\quad \operatorname{Ker}\varphi^m=\operatorname{Ker}\varphi^{m+1},\quad V=\operatorname{Im}\varphi^m\oplus\operatorname{Ker}\varphi^{m+1}.$$

70. 使用 Jordan 标准型证明迹非 0 的秩 1 矩阵可对角化.

71. 设 A 是 n 阶实对称阵, 证明: A 可逆的充分必要条件为存在矩阵 B, 使得 $AB+B'A$ 正定.

72. 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 其中 A 是幂零阵, 且 $AB=BA$, 求证: $|B|=|A+B|$.

73. 设函数 f 在 $x=0$ 连续, 并且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A,$$

求证: $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0)=A$.

74. 设 x_n 是 $\tan x=x$ 在 $(n\pi,n\pi+\pi/2)$ 上的解,

(1) 求证 $\lim_{n\to\infty}(n\pi+\pi/2-x_n)=0$,

(2) 求 $\lim_{n\to\infty}n(n\pi+\pi/2-x_n)$.

75. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 且 $f(0)=0$, 并假设有实数 A 使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立, 证明 $f(x)\equiv 0\,(x\in(0,+\infty))$.

76. 设偶函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, 且 $f(0)=1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(f(1/n)-1)$ 绝对收敛.

77. 设 f 在 $[a,b]$ 上可导, 且 f' 在 $[a,b]$ 上可积, $f(a)=0$, 证明:

$$2\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\leqslant (b-a)^2\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x\,.$$

78. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 且存在实数 $A>0$, 使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$, 证明 $f(x)\equiv 0$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 均成立.

79. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数, $f(0)=f(1)=0$, 且对任意的 $x\in(0,1)$, 都有 $f(x)\neq 0$, 证明

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4$$

80. 设 $f(x)\in C^2[a,b]$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

81. 设 x_1,x_2,x_3 是多项式 $f(x)=x^3+ax+1$ 的三个根, 求一个首一多项式以 x_1^2,x_2^2,x_3^2 为根.

82. 设 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可微, 且 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有界, 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

83. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$, $\lambda\in(0,1)$, 恒有 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$. 证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

84. 设 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$, 且满足下列条件之一, 则有 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(1) $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有界;

(2) $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在.

85. 广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 加上下面任一条件即可推出 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$:

(1) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在,

(2) $\int_a^{+\infty}f'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,

(3) $f(x)$ 单调, 这时有更强的结果: $\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$,

(4) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续,

(5) $f'(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

86. 设 A 是三阶正交矩阵, 且 $|A|=1$, 证明存在正交阵 B, 使得 $A=B^2$.

87. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 且在任何有限闭区间上可积, 证明: 对任何闭区间 $[a,b]$, 有

$$\lim_{h\to0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$

88. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\{2x_{n+1}+x_n\}$ 收敛, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

89. (**Young 不等式**) 设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上严格递增的连续函数, 且满足 $f(0)=0$, 证明对任意的 $a,b>0$, 有

$$ab\leqslant\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

90. 设 $f,g\in C[a,b]$, g 在 $[a,b]$ 上不变号, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

91. 设 A 为 3 阶非零实矩阵, $A^T=A^*$, 且 $|I+A|=|I-A|=0$, 计算行列式 $\left|A^2-A-3I\right|$.

92. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, $g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 $T>0$ 为周期的连续函数, 且 $\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 求

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x$$

93. 设 $f(x)$ 是实多项式, 且对任意实数 r, 都有 $f(r)\geqslant0$. 证明存在实多项式 $g(x),h(x)$ 使得 $f(x)=g^2(x)+h^2(x)$.

94. 设 $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_m$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且适合条件:

$$\varphi_i^2=\varphi_i,\quad \varphi_i\varphi_j=0\,(i\neq j),\quad \bigcap_{i=1}^m\operatorname{Ker}\varphi_i=0,$$

求证: $V=\bigoplus_{i=1}^m\operatorname{Im}\varphi_i$.

95. 设 f 在 $(0,1]$ 上可导, 且 $\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}f'(x)=A\in\mathbb{R}$, 证明 f 在 $(0,1]$ 上一致连续.

96. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积, $f(1)=0$, $f'(1)=a$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2x^nf(x)\,\mathrm{d}x=-a.$$

97. 设 $f(x),g(x)$ 是次数不小于 1 的互素多项式, 求证, 必唯一地存在两个多项式 $u(x),v(x)$ 使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1,$$

且 $\deg v(x)<\deg f(x)$, $\deg u(x)<\deg g(x)$.

98. 设 $f(x)$ 是次数大于 0 的首一整系数多项式, 若 $f(0),f(1)$ 都是奇数, 求证 $f(x)$ 没有有理根.

99. 设 $f(x)$ 是次数大于 1 的奇数次有理系数多项式, 且它在有理数域上不可约, 求证: 若 x_1,x_2 是 $f(x)$ 在复数域上的两个不同的根, 则 x_1+x_2 必不是有理数.

100. 设 A 是实矩阵, 又 I_n-A 的特征值的模长都小于 1, 求证: $0<|A|<2^n$.

101. 设

$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})=\left\{a_0+a_1\sqrt[n]{2}+a_2\sqrt[n]{4}+\cdots+a_{n-1}\sqrt[n]{2^{n-1}}\ :\ a_i\in\mathbb{Q},0\leqslant i\leqslant n-1\right\}$$

证明 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 是一个数域, 并求 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 做为 $\mathbb{Q}$ 上线性空间的一组基.

102. 设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式, φ 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\alpha_1\neq 0,\alpha_2,\dots,\alpha_n$, 是 V 中的向量, 满足

$$\varphi(\alpha_i)=\alpha_{i+1}\,(i=1,2,\dots,n-1),\quad \varphi(\alpha_n)=-a_n\alpha_1-a_{n-1}\alpha_2-\cdots-a_1\alpha_n.$$

证明 $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ 是 V 的一组基.

103. 设 $A,B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 存在可逆复矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$, 证明存在可逆实矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ=B$.

104. 设 A,B 为 n 阶方阵, 满足 $\mathrm{rank}(ABA)=\mathrm{rank}(A)$, 求证: AB 与 BA 相似.

105. 设 A,B 为 n 阶方阵, 则 AB 与 BA 相似的充要条件是 $\mathrm{rank}((AB)^i)=\mathrm{rank}((BA)^i)\,(1\leqslant i\leqslant n-1)$.

106. 设 A,B 为 n 阶方阵, 满足 $\mathrm{rank}(ABA)=r(B)$, 求证: AB 与 BA 相似.

107. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 又 $\varphi(x)=f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 单调递减, 证明 $f(x)\equiv 0, x\in\mathbb{R}$.

108. 计算积分

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x\,.$$

109. 讨论广义积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\,\mathrm{d}x$$

在何时绝对收敛或条件收敛.

110. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一阶连续可导, 且 $x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 单调递减趋于 0, 证明无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\int_a^{+\infty}xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

111. 设 $\{a_n\}$ 是正数列, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = A < +\infty$, 且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = 1$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 1.$$

112. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 求 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+k}}{n+k}$.

113. 设 $f(x) \in C[1, +\infty)$, 对任意 $x \in [1, +\infty)$, 有 $f(x) > 0$, 且 $\lim_{x\to+\infty} \ln(f(x))/\ln(x) = -\lambda$, 证明: $\lambda > 1$ 时 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.[1]

114. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调, 并且积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

并且举反例说明 “去掉单调条件, 结论则不成立.”

115. 设 V 是 n 维线性空间, 对于整数 $k \geqslant n$, 证明存在一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in V$, 使得其中任意 n 个线性无关.

116. 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同时敛散.

117. 设对任意 $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ 收敛, 证明下述级数收敛 (利用绝对收敛函数重排不改变敛散性与级数值):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

118. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{n}]}/n^p$ 的敛散性.

119. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二次连续可微, 且有 $\lim_{x\to 0} f(x)/x = 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)$ 绝对收敛.

120. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

121. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 若 $AB = BA$, 则 A, B 至少有一个公共的特征向量.

122. 设 φ 是 n 维复线性空间 V 上的线性变换, 求证 φ 可对角化的充要条件是对 φ 的任一特征值 λ_0, 总有 $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 I) \cap \mathrm{Im}(\varphi - \lambda_0 I) = 0$.

***123.** 设在数域 $\mathbb{K}$ 上, 一元多项式 $f(x) = f_1 f_2$, 且 $(f_1, f_2) = 1$, V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, φ 是 V 上的线性变换, 证明 $\mathrm{Ker}\, f(\varphi) = \mathrm{Ker}\, f_1(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}\, f_2(\varphi)$.

124. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可微, 且对任意 $x \in [a, +\infty)$, 都有

$$f(x+1) - f(x) = f'(x)$$

若 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = c$, 证明 $f'(x) = c$ 在 $[a, +\infty)$ 上恒成立.

125. 设 $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 对于 $\alpha, \beta > 0$, 且 $\alpha + \beta > 1$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}/n^{\beta} < +\infty$.

126. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 对任意 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, 都有 $x' A x > 0$, 利用 61 题证明 $|A| > 0$.

---

[1] 数列形式下的该判别法称为**对数判别法**

127. 设有 n 阶分块对角阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k\end{pmatrix}$$

其中 A_i 与 B_i 为同阶方阵, 假定矩阵 A_i 适合非零多项式 $g_i(x)$, 且 $g_i(x)\,(i=1,\dots,k)$ 两两互素. 求证: 若对于每个 i, 存在多项式 $f_i(x)$, 使 $B_i=f_i(A_i)$, 则必存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

128. 设 n 阶方阵 A 的秩为 $n-1$, B 是同阶非零阵, 且有 $AB=BA=0$, 证明: 存在不超过 $n-1$ 阶的多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

129. 如 14 题, 可以进一步证明逆命题也成立, 即: 如果 $AX=XB$ 只有零解, 则 A,B 无公共特征值.

***130.** 设 V 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, φ 是 V 上的线性变换, 其特征多项式与极小多项式分别设为 $f(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$, 设

$$f(\lambda)=P_1(\lambda)^{r_1}P_2(\lambda)^{r_2}\dots P_t(\lambda)^{r_t},\quad m(\lambda)=P_1(\lambda)^{s_1}P_2(\lambda)^{s_2}\dots P_t(\lambda)^{s_t}$$

分别为 $f(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$ 的不可约分解, 其中 $P_i(\lambda)$ 为 $\mathbb{K}$ 上互异的首一不可约多项式, $r_i,s_i>0\,(i=1,2,\dots,t)$. 设 $V_i=\operatorname{Ker}P_i(\varphi)^{r_i}$, $U_i=\operatorname{Ker}P_i(\varphi)^{s_i}\,(i=1,2,\dots,t)$. 求证:

(1) $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_t$, $U=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_t$, 且 $U_i=V_i\,(i=1,2,\dots,t)$;

(2) $\varphi|_{V_i}$ 的特征多项式为 $P_i(\lambda)^{r_i}$, 极小多项式为 $P_i(\lambda)^{s_i}$. 特别地, $\dim V_i=r_i\deg P_i(\lambda)$.

131. 证明任一 n 阶复矩阵 A 都相似于一个复对称阵.

132. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 求证: A 为半正定阵或半负定阵的充要条件是对任意满足 $\alpha' A\alpha=0$ 的 n 维实向量 α, 都有 $A\alpha=0$.

133. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 上可导, 且 $f(a)=f(b)$, 若 $|f'(x)|\leqslant 1$, 证明对任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$, 都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{(b-a)}{2}.$$

134. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(1)=0$, 证明 $\{f(x)x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

135. 设 $p(x),q(x),r(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的正次数多项式, 且 $p(x)$ 与 $q(x)$ 互素, $\deg r(x)<\deg p(x)+\deg q(x)$, 证明存在数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式 $u(x),v(x)$, 满足 $\deg u(x)<\deg p(x)$, $\deg v(x)<\deg q(x)$, 使得 $r(x)=p(x)v(x)+q(x)u(x)$.

136. (**Dini 定理**) 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续. 如果对每一个 $x\in[a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 关于 n 递减趋于 0. 那么 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

137. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于 x 单调递增, 且 $\{f_n(x)\}$ 收敛于连续函数 $f(x)$. 证明: $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

138. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 记

$$A_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\Big(a+\frac{i}{n}(b-a)\Big)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

证明 $\lim_{n\to\infty}nA_n=(b-a)(f(b)-f(a))/2$.

139. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, σ,τ 是 V 上的线性变换, 且 $\sigma^2=\tau^2=0$, 且 $\sigma\tau+\tau\sigma=I_V$, 其中 I_V 是 V 上的恒等变换, 证明

(1) $V = \operatorname{Ker}\sigma \oplus \operatorname{Ker}\tau$;

(2) V 必是偶数维线性空间.

140. 设函数 $f(x) \in C[a,b]$, $f(x)$ 不恒为 0 并且满足 $0 \leqslant f(x) \leqslant M$. 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x\,\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\right)^2 + \frac{M^2(b-a)^4}{12} \geqslant \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

141. 计算极限 $\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 \ln x\cos^2(\lambda x)\,\mathrm{d}x$.

*142. 设 $A, B \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, 求证: 方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解的充分必要条件是存在可逆阵 P, 使得 $B = PA$.

143. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & 0 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & x^{n-1} \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

144. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的单调非增函数, 对于任意 $a \in (0,1)$, 证明: $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant a\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

145. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 且有 $0 < m \leqslant f(x) \leqslant M$. 证明:

$$1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(M+m)^2}{4mM}.$$

146. 设开集 $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, 如果 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 的某个邻域上存在, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 处连续, 那么 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 在 (x_0, y_0) 处存在, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0, y_0).$$

147. 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个凸区域, $f : D \to \mathbb{R}$ 有连续的一阶偏导数, 则 f 在 D 内为凸函数的充必条件为对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$, 有 $f(\boldsymbol{y}) \geqslant f(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \cdot \nabla f(\boldsymbol{x})$.

148. 设 $\mathscr{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 $n\,(n \geqslant 3)$ 维线性空间 V 上的线性变换, $\mathscr{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

试证明:

$$a_{n-2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}^2(\mathscr{A}) - \operatorname{tr}(\mathscr{A}^2)\right).$$

149. 设 $a \neq 0$, 计算积分:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)}.$$

150. 设 A 是 n 阶实正定阵, $x \in \mathbb{R}^n$ 是非零列向量, 求证:

(1) $A+xx'$ 可逆.

(2) $0<x'(A+xx')^{-1}x<1$.

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 为 $A^{-1}B$ 的全体特征值.

151. 设 A 是 n 阶半正定的实对称阵, S 为 n 阶实反对称阵, 满足 $AS+SA=0$, 证明 $|A+S|>0$ 的充分必要条件为 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(S)=n$.

152. 设 A,B 为 n 阶正定实对称阵, 若 $A-B$ 半正定, 证明 $B^{-1}-A^{-1}$ 为半正定阵.

153. 设 A 是 n 阶正定实对称阵, B 是同阶半正定实对称阵, 求证 $|A+B|\geqslant|A|+|B|$.

154. 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性变换, 求证: φ 是正规算子的充分必要条件是 $\|\varphi(\alpha)\|=\|\varphi^*(\alpha)\|$ 对任意 $\alpha\in V$ 都成立.

*155. 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性变换, 求证: φ 是正规算子的充分必要条件是若 v 是 φ 属于特征值 λ 的特征向量, 则 v 也是 φ^* 属于特征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量.

*156. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶复矩阵, $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 是其特征值, 求证: A 是正规矩阵的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^n|\lambda_i|^2=\operatorname{tr}(A^{\mathrm{H}}A)=\sum_{i,j=1}^n|a_{ij}|^2.$$

同时上三角化/对角化/标准型化

157. 设 n 阶矩阵 $\{A_i:i=1,2,\dots,m\}$ 两两可交换, 即 $A_iA_j=A_jA_i$ 对一切 i,j 都成立, 假定每一个 A_i 均可对角化, 证明: 它们可同时对角化.

158. 若 $A,B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 $AB=BA$, 假定 A,B 的特征值都在 $\mathbb{K}$ 中, 证明: 存在 $\mathbb{K}$ 上的可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.

159. 设 A 为 n 阶正定实对称阵, B 为同阶对称阵, 则存在可逆阵 C 使得

$$C'AC=I_n,\quad C'BC=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 是 $A^{-1}B$ 的特征值.

160. 设 A,B 都是 n 阶半正定实对称矩阵, 证明: 存在可逆阵 C, 使得

$$C'AC=\operatorname{diag}\{\underbrace{1,\dots,1}_{r\text{ 个}},0,\dots,0\},\quad C'BC=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_r,\lambda_{r+1},\dots,\lambda_n\}$$

161. 设 A 为 n 阶正定实对称阵, S 为同阶实反对称阵, 则存在可逆矩阵 C, 使得

$$C'AC=I_n,\quad C'SC=\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}0&b_1\\-b_1&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&b_r\\-b_r&0\end{pmatrix},0,\dots,0\right\}$$

162. 设 $A_i\,(i=1,2,\dots,m)$ 是 m 个实对称 (复正规) 矩阵且两两可交换, 证明: 存在正交 (酉) 矩阵 P, 使得 $P'A_iP$ $(P^{\mathrm{H}}A_iP)$ 都是对角阵.

163. 设 A,B 是两个 n 阶实正规矩阵, 且 $AB=BA$, 证明: 存在正交矩阵 P, 使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 同时为如下形状的分块对角矩阵: $\operatorname{diag}\{A_1,\dots,A_r,c_{2r+1},\dots,c_n\}$, 其中 c_i 是实数, A_i 为形如 $\begin{pmatrix}a_i&b_i\\-b_i&a_i\end{pmatrix}$ 的二阶实矩阵.

164. 设 A,B 是 n 阶实对称矩阵, 满足 $AB+BA=0$, 证明: 若 A 半正定, 则存在正交矩阵 P, 使得:

$$P'AP=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_r,0,\dots,0\},\quad P'BP=\operatorname{diag}\{0,\dots,0,\mu_{r+1},\dots,\mu_n\}.$$

矩阵/线性算子分解

165. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 则 A 可以分解为 $A = B + C$, 其中 B 为 Hermite 阵, C 为斜 Hermite 阵.

166. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 则 A 可以分解成两个对角阵的乘积, 即 $A = BC$, 且可以任意指定 B 或 C 为可逆阵.

167. 设 A 是 n 阶 (半) 正定实对称阵, 则

    (1) 存在主对角线上元素全等于 1 的上三角矩阵 B, 使得 $A = B'DB$, 其中 D 是 (半) 正定对角矩阵;

    (2) (**Cholesky 分解**) 存在主对角线上元素全为正 (非负) 的上三角阵 C, 使得 $A = C'C$.

168. (**QR 分解**) 设 A 是 n 阶实 (复) 矩阵, 则 A 可以分解为 $A = QR$, 其中 Q 是正交 (酉) 矩阵, R 是一个上三角阵, 且主对角线上的元素非负, 若 A 可逆, 则这样的分解唯一.

169. (**极分解**) 设 V 是 n 维酉 (欧式) 空间, φ 是 V 上的任一线性算子, 则存在 V 上的酉 (正交) 算子 ω 以及 V 上的半正定自伴随算子 ψ, 使得 $\varphi = \omega\psi$, 其中 ψ 是唯一的, 并且若 φ 是非异线性算子, 则 ω 也唯一 [1].

170. (**极分解**) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 则存在 n 阶正交阵 Q 以及 n 阶半正定对称阵 S, 使得 $A = QS$. 又设 $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 则存在 n 阶酉矩阵 U, 以及 n 阶半正定 Hermite 阵 H, 使得 $B = UH$, 上述分解式当 A, B 为非异阵的时候被唯一确定.

171. (**谱分解**) 设 V 是 n 维欧式 (酉) 空间, φ 为 V 上的自伴随 (正规) 算子. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 为 φ 的全体不同特征值, W_i 为属于 λ_i 的特征子空间, 则 V 是 $W_i\,(i = 1, 2, \dots, k)$ 的正交直和. 这时若设 E_i 是 V 到 W_i 的正交投影, 则 φ 有如下分解式:

$$\varphi = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k.$$

172. (**奇异值分解**) 设 V, U 分别为 n, m 维欧式 (酉) 空间, $\varphi : V \to U$ 是线性映射, 则存在 V 和 U 的标准正交基, 使 φ 在这两组基下的表示矩阵为 $\left(\begin{smallmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, 其中 $S = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ 是 φ 的非零奇异值.

173. (**奇异值分解**) 设 A 是 $m \times n$ 的实 (复) 矩阵, 则存在 m 阶正交 (酉) 矩阵 P, n 阶正交 (酉) 矩阵 Q, 使得 $A = P\left(\begin{smallmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)Q$, 其中 $S = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ 是 A 的非零奇异值.

[1] φ 也可以做这样的分解: $\varphi = \psi_1\omega_1$ 其中 ω_1 为酉 (正交) 算子, ψ_1 为半正定自伴随算子, 这样的分解也叫极分解, 下面矩阵版本的同理.

174. 利用 170 题证明: 存在正交阵 Q_1, Q_2, 使得 $Q_1 A Q_2 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 并且 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ 是 $A'A$ 的特征值.

175. 利用 $\cos px$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 展开证明积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad (0 < p < 1).$$

176. 判断含参变量反常积分 $\int_0^{+\infty} \sqrt{u}\mathrm{e}^{-ux^2}\,\mathrm{d}x$ 对于 $u \in [0, +\infty)$ 的一致收敛性.

177. 计算积分

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\,\mathrm{d}x$$

178. 设 $f(x) \in C^1[a, b]$, 记

$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明:

$$\int_a^b (f(x)-A)^2\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)^2\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x\,.$$

179. 计算积分 $\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x\ (a^2+b^2\neq 0)$.

180. 已知 $f(x)\in C[-1,1]$, 证明:

$$\lim_{y\to 0+}\int_{-1}^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=\pi f(0).$$

181. 设 A 是 n 阶实对称阵:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix},\quad b_j\neq 0$$

证明:

(1) $\operatorname{rank}(A)\geqslant n-1$;

(2) A 的特征值各不相同.

182. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ 是 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 的全体特征值, 若有 $\operatorname{rank}(\lambda_i I-A)=\operatorname{rank}(\lambda_i I-A)^2\,(i=1,2,\dots,k)$, 证明 A 可以相似对角化.

183. 证明

$$\int_1^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{\alpha^2}\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)^2\right)\mathrm{d}x$$

在 $(0,1)$ 上一致收敛.

184. 设 $f(x)$ 为单调递减的正值函数, 证明 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 同时敛散.

185. 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 均是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}\subset\operatorname{Ker}\mathscr{B}$, 证明, 存在线性变换 $\mathscr{T}$, 使得 $\mathscr{B}=\mathscr{T}\mathscr{A}$.

186. 计算极限

$$\lim_{r\to+\infty} r\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sin(rx)\,\mathrm{d}x\,.$$

187. 设数域 $\mathbb{K}$ 上的全体矩阵 $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 上有线性变换 $\sigma(X)=AX-XA$, 其中 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$:

(1) 若 A 为幂零阵, 证明 σ 为幂零变换;

(2) 若 A 有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$, 证明 $\lambda_i-\lambda_j\,(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 为 σ 的特征值.

188. 设 $f(x)$ 是实系数多项式, 若有 $f(x)\mid f(x^2+x+1)$, 证明 $2\mid\deg f(x)$.

189. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^3.$$

190. 设 A, B 都是 n 阶正交阵, 证明 $|\det(A+B)| \leqslant 2^n$.

191. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 若 $AB = BA = 0$, $\operatorname{rank}(A^2) = \operatorname{rank}(A)$, 证明

$$\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

192. 设 V 是 n 维内积空间, $V_1, V_2, \ldots, V_r$ 是 V 的 r 个真子空间, 证明: 存在 V 的一组标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, 使得对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant r$ 都有 $\alpha_i \notin V_j$.

193. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且有界, 证明对任意 $T > 0$, 都存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} (f(x_n + T) - f(x_n)) = 0.$$

194. (华师 2020) 计算级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

195. (华师 2020) 计算

$$\oiint_{\Sigma} (z^2 + x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \sqrt{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 Σ 为抛物面 $z = (x^2+y^2)/2$ 在平面 $x = 0$ 与 $x = 2$ 之间的部分, 方向取下侧.

196. 计算第二型曲线积分

$$\oint_L \frac{4x - y}{4x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x - y}{4x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y$$

其中 L 为 $x^2 + y^2 = 2$ 的圆周, 方向为逆时针.