1 题目

其中标红加星的题, 如 "*3.", 为较重要的题, 可以简化一些其他的证明. 不标红只加星的题, 如 "*3.", 为折磨题, 记一下结论就好了. 题目序号后蓝色的 [提示] [答案] 均可以点击, 点击提示或答案前的蓝色序号 3. 也可以跳转回题目.

1. [提示] [答案] 设 Γ 是由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 交成的圆周, 从第一卦限内看 Γ, 它的方向是逆时针. 计算第二型曲线积分

$$\int_\Gamma z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z\,.$$

2. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$, 证明 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上不一致连续.

3. [提示][答案] 设 $\{a_n\}$ 为非负递减的数列, 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n\to\infty} na_n=0$.

4. [提示][答案] (**Frullani 积分**) 设 $a,b>0$, $f\in C[0,+\infty)$, 证明:

(1) 如果 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty)$ 存在, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \big(f(0)-f(+\infty)\big)\ln\frac{b}{a}.$$

(2) 如果无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)/x\,\mathrm{d}x$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

(3) 如果 $f(+\infty)$ 存在, 且积分 $\int_0^1 f(x)/x\,\mathrm{d}x$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = -f(+\infty)\ln\frac{b}{a}.$$

5. [提示] [答案] 计算积分

$$I(r)=\int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos x+r^2)\,\mathrm{d}x\,.$$

6. [提示] [答案] 设 $p>0$, 讨论积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

的敛散性.

7. [提示] [答案] 求积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x)/x\,\mathrm{d}x$.

8. [提示][答案] 设 $f(x)\in C[0,1]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)=0.$$

9. [提示][答案] 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin(t)\,\mathrm{d}t\,,\quad \alpha>0$$

关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

10. [提示][答案] 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin(t)\,\mathrm{d}u\,,\quad \alpha>0$$

关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

*11. [提示][答案] 计算 Fresnel 积分 $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$.

12. [提示] [答案] 计算积分 $\int_0^{+\infty}\exp(-ax^2)\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, 其中 $a>0,\ b\in\mathbb{R}$.

13. [提示][答案] 计算积分 $\int_0^{\pi/2}\tan^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $|\alpha|<1$.

*14. [提示][答案] 设 $\mathbb{K}$ 是数域, $A\in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, $B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 A,B 没有相同的特征值, 证明矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解.

15. [提示][答案] 如 14 题, 可以进一步证明逆命题也成立, 即: 如果 $AX=XB$ 只有零解, 则 A,B 无公共特征值.

16. [提示][答案] 设 A 是 4 阶方阵, 满足 $\mathrm{tr}(A^i)=i\,(i=1,2,3,4)$, 求 $|A|$.

17. [提示][答案] n 阶方阵可对角化的充分必要条件.

*18. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 在 $x=1$ 处左连续, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x}=f(1).$$

19. [提示][答案] 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2=AA'$, 证明 A 为实对称阵.

20. [提示][答案] 设 $A,B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2=A$, $B^2=B$ 以及 $(A+B)^2=A+B$, 证明 $AB=BA=0$.

21. [提示] [答案] 设 A,B 都是 n 阶矩阵, 若 $A^k=0$, 且 $AB+BA=B$, 证明 $B=0$.

22. [提示][答案] A,B 是 n 阶方阵, $A+B=AB$, 求证

(1) $AB=BA$,

(2) $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$,

(3) A 可对角化当且仅当 B 可对角化.

23. [提示][答案] 设 $f(x),g(x)$ 为多项式, 且 $(f(x),g(x))=1$, A 是 n 阶方阵, 求证: $f(A)g(A)=0$ 的充分必要条件为 $\mathrm{rank}(f(A))+\mathrm{rank}(g(A))=n$.

24. [提示][答案] 设 A,B 为实对称阵, 求证:

(1) 若 A 正定, 则存在实可逆阵 P 使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 同时为对角阵;

(2) 若 A,B 半正定, 则 $\mathrm{tr}(AB)\geqslant 0$, 并且等号成立当且仅当 $AB=0$.

25. [提示][答案]

26. [提示][答案] 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

27. [提示][答案] $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi),$$

28. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明对每个 $x\in(a,b)$, 都存在对应的 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

29. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

30. [提示][答案] 求 $\lim_{n\to\infty}n(\pi/4-x_n)$, 其中:

$$x_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}.$$

31. [提示] [答案] 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\lim_{n\to\infty}p_n=\infty$, 证明极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1p_1+a_2p_2+\cdots+a_np_n}{p_n}=0.$$

32. [提示][答案] 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明极限

$$\lim_{n\to\infty}(n!a_1a_2\ldots a_n)^{1/n}=0.$$

33. [提示][答案] **面积原理**

(1) 设 f 是一个非负的递增函数, 则当 $\xi\geqslant m$ 时有

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]}f(k)-\int_m^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant f(\xi).$$

(2) 设 f 是一个非负的递减函数, 则极限

$$\lim_{\xi\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{[\xi]}f(k)-\int_m^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\alpha$$

存在, 且 $0\leqslant\alpha\leqslant f(m)$. 更进一步, 如果 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, 那么

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]}f(k)-\int_m^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x-\alpha\right|\leqslant f(\xi-1),$$

这里 $\xi\geqslant m+1$.

34. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微, 且 $f(a)f(b)<0$, 对任意 $x\in[a,b]$ 都有 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$. 证明序列 $\{x_n\}$ 极限存在, 其中 $x_1\in[a,b]$, $x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)\,(n=1,2,\ldots)$, 进而可以证明此极限为方程 $f(x)=0$ 的根.

35. [提示][答案] 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 数列 $\{y_n\}$: $y_1=1$, $2y_{n+1}=y_n+\sqrt{y_n^2+a_n}$ $(n=1,2,\ldots)$. 证明 $\{y_n\}$ 是单调递增的收敛数列.

36. [提示][答案] 设数列 $\{x_n\}$ 满足: 当 $n<m$ 时, $|x_n-x_m|>1/n$. 证明数列 $\{x_n\}$ 无界.

37. [提示] [答案] 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0)=f'(0)=f(1)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)=f(\xi)$.

38. [提示][答案] n 阶方阵的每行之和与每列之和均为 0, 证明其所有代数余子式全相等.

39. [提示][答案] 设函数 $f(x)$ 定义在 $(a,+\infty)$, 且 $f(x)$ 在每个有限区间 (a,b) 内都有界, 并满足

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=A.$$

证明 $\lim_{x\to+\infty}(f(x)/x)=A$.

40. [提示][答案] 证明:

(1) 关于 x 的方程 $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{kx}=n+1$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一的实根 a_n;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

41. [提示][答案] 设 $a>0$, 求积分

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\pi/2}}\frac{1}{1+\tan^a y^2}\,\mathrm{d}y$$

42. [提示][答案] 设 α,β 是 n 维列向量, A 是 n 阶方阵, 求证: $|A+\alpha\beta'|=|A|+\beta' A^*\alpha$.

43. [提示][答案] 设 $A\in \mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $B\in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, 且

$$AB=\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix},$$

求证 $BA=9I$.

44. [提示][答案] $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $A^2=A$, 若对任意列向量 x, 都有 $x'A'Ax\leqslant x'x$, 证明 $A'=A$.

45. [提示][答案] 证明对任意 $m\times n$ 矩阵 A, 都有 $\operatorname{rank}(AA')=\operatorname{rank}(A)$.

46. [提示][答案] $f(x)\in C[a,b]$, 证明函数 $m(x)=\min\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}f(\xi)$ 在 $[a,b]$ 连续.

47. [提示][答案] $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导, 且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, $f''(x)$ 有界, 证明 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

48. [提示][答案] $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上三阶连续可导, 且对任意的 $h>0$, 有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

求证: $f(x)$ 为次数至多为 2 的多项式.

49. [提示][答案] 设 $A'=A$, 证明 A 可逆当且仅当存在矩阵 B 使得 $AB+B'A$ 正定.

50. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, $f(a)=0$, 并且存在实数 $A>0$, 使得对任意 $x\in[a,b]$, 都有 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$, 证明在 $[a,b]$ 上, $f(x)\equiv 0$.

51. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一阶连续可导, 且

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)$$

证明: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

52. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 若对于任意 $x\in\mathbb{R}$, 都有 $\lim_{n\to+\infty}f(x+n)=0$, 证明 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

53. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对任意 $\delta>0$, 都有 $\lim_{n\to\infty}f(n\delta)=0$, 证明 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

54. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 则存在正实数 a, b, 使得 $|f(x)| \leqslant a|x| + b$.

55. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续, 证明 $|f(x)/x|$ 在 $[1, +\infty)$ 有界.

56. [提示][答案] 证明欧式空间中两标准正交基的过渡矩阵为正交阵.

57. [提示][答案] 设 α 是欧式空间 V 中的一个非零向量, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 是 V 中的 p 个向量, 满足

$$(a_i, a_j) \leqslant 0,\ (\alpha_i, \alpha) > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, p, i \neq j$$

证明

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 线性无关;

(2) n 维欧式空间中最多有 $n + 1$ 个向量, 使其两两互成钝角;

(3) n 维欧式空间中一定存在 $n + 1$ 个向量, 使其两两互为钝角.

58. [提示] [答案] 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 $AB = BA$, 利用线性方程组的知识证明

$$\operatorname{rank}(A + B) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - \operatorname{rank}(AB)$$

59. [提示][答案] 设 $B \in \mathrm{M}_{n\times 2}(\mathbb{C})$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

若 $A = BC$, 且 CB 的特征多项式为 $x^2 - 2x + 1$, 求 A 的特征值, 并求 $AX = 0$ 的基础解系.

60. [提示] [答案] 计算 n 阶 b – 循环行列式:

$$B = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ ba_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ ba_{n-1} & ba_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ba_2 & ba_3 & ba_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

***61.** [提示] [答案] 设 A 是 n 阶实反对称阵, $D = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ 是同阶的对角阵, 且 $d_i > 0\,(i = 1, 2, \dots, n)$. 求证 $|A + D| > 0$, 特别地, 若 $B = A + D$, 其中 A 是反对称阵, D 是正定对称阵, 则 B 是非异阵.

62. [提示][答案] 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 适合条件:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则称 A 为**严格对角占优阵**, 求证, 严格对角占优阵必是满秩阵, 若上述条件改为:

$$a_{ii} > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

求证 $|A| > 0$.

63. [提示] [答案] 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 对 $[a, b]$ 上任意一个闭区间 $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, 对介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的任一常数 l, 方程

$$f(x) = l$$

在 $[x_1, x_2]$ 上有且仅有有限个解, 证明 $f(x) \in C[a, b]$.

64. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=A$, 证明 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$, 其中 $A\in\mathbb{R}\cup\pm\infty$.

65. [提示][答案] 已知 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 $\mathrm{tr}(A)=0$, 证明

 (1) 存在数域 $\mathbb{K}$ 上的可逆阵 C, 使得 $C^{-1}AC$ 为主对角元全为 0 的矩阵.

 (2) 存在 $X,Y\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 使得 $XY-YX=A$.

 (3) 令 U 为 $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 中所有形如 $XY-YX$ 的矩阵组成的集合, 证明 U 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 的一个线性子空间.

66. [提示][答案] 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n$$

67. [提示][答案] 设 φ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, W 是 φ 的不变子空间, 且 $V=\mathrm{Im}\,\varphi\oplus W$, 证明

$$V=\mathrm{Im}\,\varphi\oplus\mathrm{Ker}\,\varphi.$$

68. [提示][答案] 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 且 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=1,\ \mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$, 证明 A 相似于 B.

69. [提示][答案] 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 求证: 必存在正整数 m, 使得

$$\mathrm{Im}\,\varphi^m=\mathrm{Im}\,\varphi^{m+1},\quad \mathrm{Ker}\,\varphi^m=\mathrm{Ker}\,\varphi^{m+1},\quad V=\mathrm{Im}\,\varphi^m\oplus\mathrm{Ker}\,\varphi^{m+1}.$$

70. [提示][答案] 使用 Jordan 标准型证明迹非 0 的秩 1 矩阵可对角化.

71. [提示][答案] 设 A 是 n 阶实对称阵, 证明: A 可逆的充分必要条件为存在矩阵 B, 使得 $AB+B'A$ 正定.

72. [提示][答案] 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 其中 A 是幂零阵, 且 $AB=BA$, 求证: $|B|=|A+B|$.

73. [提示] [答案] 设函数 f 在 $x=0$ 连续, 并且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A,$$

 求证: $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0)=A$.

74. [提示][答案] 设 x_n 是 $\tan x=x$ 在 $(n\pi,n\pi+\pi/2)$ 上的解,

 (1) 求证 $\lim_{n\to\infty}(n\pi+\pi/2-x_n)=0$,

 (2) 求 $\lim_{n\to\infty}n(n\pi+\pi/2-x_n)$.

75. [提示][答案] 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 且 $f(0)=0$, 并假设有实数 A 使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立, 证明 $f(x)\equiv 0\,(x\in(0,+\infty))$.

76. [提示] [答案] 设偶函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶连续可导, 且 $f(0)=1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(f(1/n)-1)$ 绝对收敛.

77. [提示][答案] 设 f 在 $[a,b]$ 上可导, 且 f' 在 $[a,b]$ 上可积, $f(a)=0$, 证明:

$$2\int_a^b(f(x))^2\,\mathrm{d}x\leqslant(b-a)^2\int_a^b(f'(x))^2\,\mathrm{d}x\,.$$

78. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 且存在实数 $A>0$, 使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$, 证明 $f(x)\equiv 0$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 均成立.

79. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数, $f(0)=f(1)=0$, 且对任意的 $x\in(0,1)$, 都有 $f(x)\neq 0$, 证明

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4$$

80. [提示][答案] 设 $f(x)\in C^2[a,b]$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

81. [提示][答案] 设 x_1,x_2,x_3 是多项式 $f(x)=x^3+ax+1$ 的三个根, 求一个首一多项式以 x_1^2,x_2^2,x_3^2 为根.

82. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可微, 且 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有界, 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

83. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$, $\lambda\in(0,1)$, 恒有 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$. 证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

84. [提示][答案] 设 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$, 且满足下列条件之一, 则有 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(1) $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有界;

(2) $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在.

85. [提示][答案] 广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 加上下面任一条件即可推出 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$:

(1) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在,

(2) $\int_a^{+\infty}f'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,

(3) $f(x)$ 单调, 这时有更强的结果: $\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$,

(4) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续,

(5) $f'(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

86. [提示][答案] 设 A 是三阶正交矩阵, 且 $|A|=1$, 证明存在正交阵 B, 使得 $A=B^2$.

87. [提示][答案] 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 且在任何有限闭区间上可积, 证明: 对任何闭区间 $[a,b]$, 有

$$\lim_{h\to0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$

88. [提示][答案] 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\{2x_{n+1}+x_n\}$ 收敛, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

89. [提示][答案] (**Young 不等式**) 设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上严格递增的连续函数, 且满足 $f(0)=0$, 证明对任意的 $a,b>0$, 有

$$ab\leqslant\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y.$$

90. [提示][答案] 设 $f,g\in C[a,b]$, g 在 $[a,b]$ 上不变号, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

91. [提示][答案] 设 A 为 3 阶非零实矩阵, $A^T = A^*$, 且 $|I+A| = |I-A| = 0$, 计算行列式 $|A^2 - A - 3I|$.

92. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, $g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 $T>0$ 为周期的连续函数, 且 $\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 求

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x$$

*93. [提示] [答案] 设 $f(x)$ 是实多项式, 且对任意实数 r, 都有 $f(r) \geqslant 0$. 证明存在实多项式 $g(x), h(x)$ 使得 $f(x) = g^2(x) + h^2(x)$, 更进一步可以要求 $\deg g(x) > \deg h(x)$.

94. [提示][答案] 设 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且适合条件:

$$\varphi_i^2 = \varphi_i, \quad \varphi_i\varphi_j = 0\,(i \neq j), \quad \bigcap_{i=1}^m \operatorname{Ker}\varphi_i = 0,$$

求证: $V = \bigoplus_{i=1}^m \operatorname{Im}\varphi_i$.

95. [提示][答案] 设 f 在 $(0,1]$ 上可导, 且 $\lim_{x\to0+}\sqrt{x}f'(x) = A \in \mathbb{R}$, 证明 f 在 $(0,1]$ 上一致连续.

96. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积, $f(1) = 0$, $f'(1) = a$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2x^nf(x)\,\mathrm{d}x = -a.$$

97. [提示][答案] 设 $f(x), g(x)$ 是次数不小于 1 的互素多项式, 求证, 必唯一地存在两个多项式 $u(x), v(x)$ 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1,$$

且 $\deg v(x) < \deg f(x)$, $\deg u(x) < \deg g(x)$.

98. [提示] [答案] 设 $f(x)$ 是次数大于 0 的首一整系数多项式, 若 $f(0), f(1)$ 都是奇数, 求证 $f(x)$ 没有有理根.

99. [提示][答案] 设 $f(x)$ 是次数大于 1 的奇数次有理系数多项式, 且它在有理数域上不可约, 求证: 若 x_1, x_2 是 $f(x)$ 在复数域上的两个不同的根, 则 $x_1 + x_2$ 必不是有理数.

100. [提示][答案] 设 A 是实矩阵, 又 $I_n - A$ 的特征值的模长都小于 1, 求证: $0 < |A| < 2^n$.

101. [提示][答案] 设

$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) = \left\{a_0 + a_1\sqrt[n]{2} + a_2\sqrt[n]{4} + \cdots + a_{n-1}\sqrt[n]{2^{n-1}} \;:\; a_i \in \mathbb{Q}, 0 \leqslant i \leqslant n-1\right\}$$

证明 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 是一个数域, 并求 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 做为 $\mathbb{Q}$ 上线性空间的一组基.

102. [提示][答案] 设 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式, φ 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 是 V 中的向量, 满足

$$\varphi(\alpha_i) = \alpha_{i+1}\,(i = 1, 2, \dots, n-1), \quad \varphi(\alpha_n) = -a_n\alpha_1 - a_{n-1}\alpha_2 - \cdots - a_1\alpha_n.$$

证明 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 V 的一组基.

103. [提示][答案] 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 存在可逆复矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = B$, 证明存在可逆实矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ = B$.

104. [提示][答案] 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足 $\operatorname{rank}(ABA) = \operatorname{rank}(A)$, 求证: AB 与 BA 相似.

105. [提示][答案] 设 A, B 为 n 阶方阵, 则 AB 与 BA 相似的充要条件是 $\operatorname{rank}((AB)^i) = \operatorname{rank}((BA)^i)\,(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

106. [提示][答案] 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 又 $\varphi(x) = f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 单调递减, 证明 $f(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$.

107. [提示] [答案] 计算积分

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x\,.$$

108. [提示][答案] 讨论广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,\mathrm{d}x$$

在何时绝对收敛或条件收敛.

109. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一阶连续可导, 且 $x \to +\infty$ 时, $f(x)$ 单调递减趋于 0, 证明无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\int_a^{+\infty} xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

110. [提示][答案] 设 $\{a_n\}$ 是正数列, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = A < +\infty$, 且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = 1$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 1.$$

111. [提示] [答案] 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 求 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_{n+k}}{n+k}$.

112. [提示][答案] 设 $f(x) \in C[1, +\infty)$, 对任意 $x \in [1, +\infty)$, 有 $f(x) > 0$, 且 $\lim_{x\to+\infty} \ln(f(x))/\ln(x) = -\lambda$, 证明: $\lambda > 1$ 时 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.[1]

113. [提示][答案] 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调, 并且积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

并且举反例说明 "去掉单调条件, 结论则不成立."

114. [提示][答案] 设 V 是 n 维线性空间, 对于整数 $k \geqslant n$, 证明存在一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in V$, 使得其中任意 n 个线性无关.

115. [提示][答案] 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列, 证明: $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 与 $\sum_{n=1}^\infty 2^n a_{2^n}$ 同时敛散.

116. [提示][答案] 设对任意 $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^\infty 1/a_n$ 收敛, 证明下述级数收敛 (利用绝对收敛函数重排不改变敛散性与级数值):

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

117. [提示][答案] 判断级数 $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{[\sqrt{n}]}/n^p$ 的敛散性.

118. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上二次连续可微, 且有 $\lim_{x\to 0} f(x)/x = 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^\infty f(1/n)$ 绝对收敛.

119. [提示][答案] 已知 $\sum_{n=1}^\infty (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^\infty b_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ 收敛.

120. [提示][答案] 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 若 $AB = BA$, 则 A, B 至少有一个公共的特征向量.

[1] 数列形式下的该判别法称为**对数判别法**

121. [提示][答案] 设 φ 是 n 维复线性空间 V 上的线性变换, 求证 φ 可对角化的充要条件是对 φ 的任一特征值 λ_0, 总有 $\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_0 I)\cap \mathrm{Im}(\varphi-\lambda_0 I)=0$.

*122. [提示][答案] 设在数域 $\mathbb{K}$ 上, 一元多项式 $f(x)=f_1f_2$, 且 $(f_1,f_2)=1$, V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, φ 是 V 上的线性变换, 证明 $\mathrm{Ker}\, f(\varphi)=\mathrm{Ker}\, f_1(\varphi)\oplus \mathrm{Ker}\, f_2(\varphi)$.

123. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且对任意 $x\in[a,+\infty)$, 都有

$$f(x+1)-f(x)=f'(x)$$

若 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=c$, 证明 $f'(x)=c$ 在 $[a,+\infty)$ 上恒成立.

124. [提示][答案] 设 $a_n>0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n<+\infty$, 对于 $\alpha,\beta>0$, 且 $\alpha+\beta>1$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}/n^{\beta}<+\infty$.

125. [提示] [答案] 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 对任意 $0\neq x\in\mathbb{R}^n$, 都有 $x'Ax>0$, 证明 $|A|>0$.

126. [提示][答案] 设有 n 阶分块对角阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k\end{pmatrix}$$

其中 A_i 与 B_i 为同阶方阵, 假定矩阵 A_i 适合非零多项式 $g_i(x)$, 且 $g_i(x)\,(i=1,\dots,k)$ 两两互素. 求证: 若对于每个 i, 存在多项式 $f_i(x)$, 使 $B_i=f_i(A_i)$, 则必存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

127. [提示][答案] 设 n 阶方阵 A 的秩为 $n-1$, B 是同阶非零阵, 且有 $AB=BA=0$, 证明: 存在不超过 $n-1$ 阶的多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

*128. [提示][答案] 设 V 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, φ 是 V 上的线性变换, 其特征多项式与极小多项式分别设为 $f(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$, 设

$$f(\lambda)=P_1(\lambda)^{r_1}P_2(\lambda)^{r_2}\dots P_t(\lambda)^{r_t},\quad m(\lambda)=P_1(\lambda)^{s_1}P_2(\lambda)^{s_2}\dots P_t(\lambda)^{s_t}$$

分别为 $f(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$ 的不可约分解, 其中 $P_i(\lambda)$ 为 $\mathbb{K}$ 上互异的首一不可约多项式, $r_i,s_i>0\,(i=1,2,\dots,t)$. 设 $V_i=\mathrm{Ker}\, P_i(\varphi)^{r_i}$, $U_i=\mathrm{Ker}\, P_i(\varphi)^{s_i}\,(i=1,2,\dots,t)$. 求证:

(1) $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_t$, $U=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_t$, 且 $U_i=V_i\,(i=1,2,\dots,t)$;

(2) $\varphi|_{V_i}$ 的特征多项式为 $P_i(\lambda)^{r_i}$, 极小多项式为 $P_i(\lambda)^{s_i}$. 特别地, $\dim V_i=r_i\deg P_i(\lambda)$.

129. [提示][答案] 证明任一 n 阶复矩阵 A 都相似于一个复对称阵.

130. [提示][答案] 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 求证: A 为半正定阵或半负定阵的充要条件是对任意满足 $\alpha'A\alpha=0$ 的 n 维实向量 α, 都有 $A\alpha=0$.

131. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 上可导, 且 $f(a)=f(b)$, 若 $|f'(x)|\leqslant 1$, 证明对任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$, 都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{(b-a)}{2}.$$

132. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(1)=0$, 证明 $\{f(x)x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

133. [提示][答案] 设 $p(x),q(x),r(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的正次数多项式, 且 $p(x)$ 与 $q(x)$ 互素, $\deg r(x)<\deg p(x)+\deg q(x)$, 证明存在数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式 $u(x),v(x)$, 满足 $\deg u(x)<\deg p(x)$, $\deg v(x)<\deg q(x)$, 使得 $r(x)=p(x)v(x)+q(x)u(x)$.

134. [提示][答案] (**Dini 定理**) 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续. 如果对每一个 $x\in[a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 关于 n 递减趋于 0. 那么 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

135. [提示][答案] 对任意 $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于 x 单调递增, 且 $\{f_n(x)\}$ 收敛于连续函数 $f(x)$. 证明: $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

136. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 记

$$A_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\Big(a+\frac{i}{n}(b-a)\Big)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

证明 $\lim_{n\to\infty}nA_n=(b-a)(f(b)-f(a))/2$.

137. [提示][答案] 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, σ,τ 是 V 上的线性变换, 且 $\sigma^2=\tau^2=0$, 且 $\sigma\tau+\tau\sigma=I_V$, 其中 I_V 是 V 上的恒等变换, 证明

(1) $V=\operatorname{Ker}\sigma\oplus\operatorname{Ker}\tau$;

(2) V 必是偶数维线性空间.

138. [提示][答案] 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, $f(x)$ 不恒为 0 并且满足 $0\leqslant f(x)\leqslant M$. 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\right)^2+\frac{M^2(b-a)^4}{12}\geqslant\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

139. [提示][答案] 计算极限 $\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1\ln x\cos^2(\lambda x)\,\mathrm{d}x$.

***140.** [提示][答案] 设 $A,B\in\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, 求证: 方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解的充分必要条件是存在可逆阵 P, 使得 $B=PA$.

141. [提示][答案] 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&\binom{1}{1}&0&\cdots&0&x\\1&\binom{2}{1}&\binom{2}{2}&\cdots&0&x^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&\binom{n-1}{1}&\binom{n-1}{2}&\cdots&\binom{n-1}{n-1}&x^{n-1}\\1&\binom{n}{1}&\binom{n}{2}&\cdots&\binom{n}{n-1}&x^n\end{vmatrix}$$

142. [提示][答案] 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的单调非增函数, 对于任意 $a\in(0,1)$, 证明: $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant a\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

143. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 且有 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$. 证明:

$$1\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(M+m)^2}{4mM}.$$

144. [提示][答案] 设开集 $D\subset\mathbb{R}^2$, $f:D\to\mathbb{R}$, 如果 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域上存在, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 处连续, 那么 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 在 (x_0,y_0) 处存在, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

145. [提示][答案] 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个凸区域, $f : D \to \mathbb{R}$ 有连续的一阶偏导数, 则 f 在 D 内为凸函数的充必条件为对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$, 有 $f(\boldsymbol{y}) \geqslant f(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \cdot \nabla f(\boldsymbol{x})$.

146. [提示][答案] 设 $\mathscr{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 $n\,(n \geqslant 3)$ 维线性空间 V 上的线性变换, $\mathscr{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

试证明:

$$a_{n-2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}^2(\mathscr{A}) - \operatorname{tr}(\mathscr{A}^2)\right).$$

147. [提示][答案] 设 $a \neq 0$, 计算积分:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)(1 + x^a)}.$$

148. [提示][答案] 设 A 是 n 阶实正定阵, $x \in \mathbb{R}^n$ 是非零列向量, 求证:

(1) $A + xx'$ 可逆.

(2) $0 < x'(A + xx')^{-1}x < 1$.

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 为 $A^{-1}B$ 的全体特征值.

149. [提示][答案] 设 A 是 n 阶半正定的实对称阵, S 为 n 阶实反对称阵, 满足 $AS + SA = 0$, 证明 $|A + S| > 0$ 的充分必要条件为 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(S) = n$.

150. [提示][答案] 设 A, B 为 n 阶正定实对称阵, 若 $A - B$ 半正定, 证明 $B^{-1} - A^{-1}$ 为半正定阵.

151. [提示][答案] 设 A 是 n 阶正定实对称阵, B 是同阶半正定实对称阵, 求证 $|A + B| \geqslant |A| + |B|$.

152. [提示][答案] 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性变换, 求证: φ 是正规算子的充分必要条件是 $\|\varphi(\alpha)\| = \|\varphi^*(\alpha)\|$ 对任意 $\alpha \in V$ 都成立.

*153. [提示][答案] 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性变换, 求证: φ 是正规算子的充分必要条件是若 v 是 φ 属于特征值 λ 的特征向量, 则 v 也是 φ^* 属于特征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量.

同时上三角化/对角化/标准型化

154. [提示][答案] 设 n 阶矩阵 $\{A_i : i = 1, 2, \ldots, m\}$ 两两可交换, 即 $A_iA_j = A_jA_i$ 对一切 i, j 都成立, 假定每一个 A_i 均可对角化, 证明: 它们可同时对角化.

155. [提示][答案] 若 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 $AB = BA$, 假定 A, B 的特征值都在 $\mathbb{K}$ 中, 证明: 存在 $\mathbb{K}$ 上的可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.

156. [提示][答案] 设 A 为 n 阶正定实对称阵, B 为同阶对称阵, 则存在可逆阵 C 使得

$$C'AC = I_n, \quad C'BC = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 $A^{-1}B$ 的特征值.

157. [提示][答案] 设 A, B 都是 n 阶半正定实对称矩阵, 证明: 存在可逆阵 C, 使得

$$C'AC = \operatorname{diag}\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{r\text{个}}, 0, \ldots, 0\}, \quad C'BC = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n\}$$

158. [提示][答案] 设 A 为 n 阶正定实对称阵, S 为同阶实反对称阵, 则存在可逆矩阵 C, 使得

$$C'AC = I_n, \quad C'SC = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & b_r \\ -b_r & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0\right\}$$

159. [提示][答案] 设 $A_i\,(i = 1, 2, \dots, m)$ 是 m 个实对称 (复正规) 矩阵且两两可交换, 证明: 存在正交 (酉) 矩阵 P, 使得 $P'A_iP$ ($P^{\mathrm{H}}A_iP$) 都是对角阵.

160. [提示][答案] 设 A, B 是两个 n 阶实正规矩阵, 且 $AB = BA$, 证明: 存在正交矩阵 P, 使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 同时为如下形状的分块对角矩阵: $\operatorname{diag}\{A_1, \dots, A_r, c_{2r+1}, \dots, c_n\}$, 其中 c_i 是实数, A_i 为形如 $\left(\begin{smallmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{smallmatrix}\right)$ 的二阶实矩阵.

161. [提示][答案] 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵, 满足 $AB + BA = 0$, 证明: 若 A 半正定, 则存在正交矩阵 P, 使得:

$$P'AP = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0\}, \quad P'BP = \operatorname{diag}\{0, \dots, 0, \mu_{r+1}, \dots, \mu_n\}.$$

矩阵/线性算子分解

162. [提示][答案] 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 则 A 可以分解为 $A = B + C$, 其中 B 为 Hermite 阵, C 为斜 Hermite 阵.

163. [提示][答案] 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 则 A 可以分解成两个对角阵的乘积, 即 $A = BC$, 且可以任意指定 B 或 C 为可逆阵.

164. [提示][答案] 设 A 是 n 阶 (半) 正定实对称阵, 则

(1) 存在主对角线上元素全等于 1 的上三角矩阵 B, 使得 $A = B'DB$, 其中 D 是 (半) 正定对角矩阵;

(2) (**Cholesky 分解**) 存在主对角线上元素全为正 (非负) 的上三角阵 C, 使得 $A = C'C$.

165. [提示][答案] (**QR 分解**) 设 A 是 n 阶实 (复) 矩阵, 则 A 可以分解为 $A = QR$, 其中 Q 是正交 (酉) 矩阵, R 是一个上三角阵, 且主对角线上的元素非负, 若 A 可逆, 则这样的分解唯一.

166. [提示][答案] (**极分解**) 设 V 是 n 维酉 (欧式) 空间, φ 是 V 上的任一线性算子, 则存在 V 上的酉 (正交) 算子 ω 以及 V 上的半正定自伴随算子 ψ, 使得 $\varphi = \omega\psi$, 其中 ψ 是唯一的, 并且若 φ 是非异线性算子, 则 ω 也唯一 [1].

167. [提示][答案] (**极分解**) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 则存在 n 阶正交阵 Q 以及 n 阶半正定对称阵 S, 使得 $A = QS$. 又设 $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 则存在 n 阶酉矩阵 U, 以及 n 阶半正定 Hermite 阵 H, 使得 $B = UH$, 上述分解式当 A, B 为非异阵的时候被唯一确定.

168. [提示][答案] (**谱分解**) 设 V 是 n 维欧式 (酉) 空间, φ 为 V 上的自伴随 (正规) 算子. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 为 φ 的全体不同特征值, W_i 为属于 λ_i 的特征子空间, 则 V 是 $W_i\,(i = 1, 2, \dots, k)$ 的正交直和. 这时若设 E_i 是 V 到 W_i 的正交投影, 则 φ 有如下分解式:

$$\varphi = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k.$$

169. [提示][答案] (**奇异值分解**) 设 V, U 分别为 n, m 维欧式 (酉) 空间, $\varphi : V \to U$ 是线性映射, 则存在 V 和 U 的标准正交基, 使 φ 在这两组基下的表示矩阵为 $\left(\begin{smallmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, 其中 $S = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ 是 φ 的非零奇异值.

170. [提示][答案] (**奇异值分解**) 设 A 是 $m \times n$ 的实 (复) 矩阵, 则存在 m 阶正交 (酉) 矩阵 P, n 阶正交 (酉) 矩阵 Q, 使得 $A = P\left(\begin{smallmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)Q$, 其中 $S = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ 是 A 的非零奇异值.

*171. [提示][答案] (**Jordan – Chevalley 分解**) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则 A 可以分解为 $A = B + C$, 其中 B, C 符合以下条件:

(1) B 是一个相似可对角化矩阵;

(2) C 是一个幂零阵;

(3) $BC = CB$;

(4) B, C 均可以表示为 A 的多项式.

不仅如此, 上述满足 (1) – (3) 的分解是唯一的.

[1] φ 也可以做这样的分解: $\varphi = \psi_1\omega_1$ 其中 ω_1 为酉 (正交) 算子, ψ_1 为半正定自伴随算子, 这样的分解也叫极分解, 下面矩阵版本的同理.

*172. [提示][答案] 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶复矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是其特征值, 求证: A 是正规矩阵的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{H}}A) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2.$$

173. [提示][答案] 利用 167 题证明: 存在正交阵 Q_1, Q_2, 使得 $Q_1AQ_2 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, 并且 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$ 是 $A'A$ 的特征值.

174. [提示][答案] 利用 $\cos px$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 展开证明积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad (0 < p < 1).$$

175. [提示][答案] 判断含参变量反常积分 $\int_0^{+\infty} \sqrt{u}\mathrm{e}^{-ux^2}\,\mathrm{d}x$ 对于 $u \in [0, +\infty)$ 的一致收敛性.

176. [提示][答案] 计算积分

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\,\mathrm{d}x$$

177. [提示][答案] 设 $f(x) \in C^1[a, b]$, 记

$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明:

$$\int_a^b (f(x) - A)^2\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)^2 \int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x\,.$$

178. [提示][答案] 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$.

179. [提示][答案] 已知 $f(x) \in C[-1, 1]$, 证明:

$$\lim_{y\to 0+} \int_{-1}^{1} \frac{y f(x)}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x = \pi f(0).$$

180. [提示][答案] 设 A 是 n 阶实对称阵:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix},\quad b_j \neq 0$$

证明:

(1) $\operatorname{rank}(A) \geqslant n-1$;

(2) A 的特征值各不相同.

181. [提示][答案] 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 是 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 的全体特征值, 若有 $\operatorname{rank}(\lambda_i I - A) = \operatorname{rank}(\lambda_i I - A)^2\ (i = 1, 2, \dots, k)$, 证明 A 可以相似对角化.

182. [提示][答案] 证明

$$\int_1^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\alpha^2}\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)^2\right) \mathrm{d}x$$

在 $(0,1)$ 上一致收敛.

183. [提示][答案] 设 $f(x)$ 为单调递减的正值函数, 证明 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 同时敛散.

184. [提示][答案] 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 均是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且 $\operatorname{Ker}\mathscr{A} \subset \operatorname{Ker}\mathscr{B}$, 证明, 存在线性变换 $\mathscr{T}$, 使得 $\mathscr{B} = \mathscr{T}\mathscr{A}$.

185. [提示][答案] 计算极限

$$\lim_{r\to+\infty} r\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\sin(rx)\,\mathrm{d}x\,.$$

186. [提示][答案] 设数域 $\mathbb{K}$ 上的全体矩阵 $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 上有线性变换 $\sigma(X) = AX - XA$, 其中 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$:

(1) 若 A 为幂零阵, 证明 σ 为幂零变换;

(2) 若 A 有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 证明 $\lambda_i - \lambda_j\ (1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 为 σ 的特征值.

187. [提示][答案] 设 $f(x)$ 是实系数多项式, 若有 $f(x) \mid f(x^2+x+1)$, 证明 $2 \mid \deg f(x)$.

188. [提示][答案] 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}y \int_x^y f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^3.$$

189. [提示][答案] 设 A, B 都是 n 阶正交阵, 证明 $|\det(A+B)| \leqslant 2^n$.

190. [提示][答案] 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 若 $AB = BA = 0$, $\operatorname{rank}(A^2) = \operatorname{rank}(A)$, 证明

$$\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

191. [提示][答案] 设 V 是 n 维内积空间, $V_1, V_2, \dots, V_r$ 是 V 的 r 个真子空间, 证明: 存在 V 的一组标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 使得对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant r$ 都有 $\alpha_i \notin V_j$.

192. [提示][答案] 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且有界, 证明对任意 $T>0$, 都存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty}\left(f(x_n+T)-f(x_n)\right)=0.$$

193. [提示][答案] (华师 2020) 计算级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

194. [提示][答案] (华师 2020) 计算

$$\oiint_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\sqrt{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 Σ 为抛物面 $z=(x^2+y^2)/2$ 在平面 $x=0$ 与 $x=2$ 之间的部分, 方向取下侧.

195. [提示][答案] 计算第二型曲线积分

$$\oint_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x-y}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

其中 L 为 $x^2+y^2=2$ 的圆周, 方向为逆时针.

196. [提示][答案] (浙大 2018) 设 A 为 n 阶非零实方阵, 且 $A^2=A$, 设 $\mathrm{rank}(A)=r$, 求证 A 正交相似于分块矩阵: $\begin{pmatrix} I_r & 0\\ B & 0\end{pmatrix}$, 其中 I_r 为 r 阶单位阵, B 为某一实矩阵.

197. [提示][答案] 求抛物面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 将球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$ 分成两部分的体积之比.

198. [提示][答案] 计算第一型曲面积分

$$I=\iint_S \frac{x^3+y^3+z^3}{1-z}\,\mathrm{d}S$$

其中 S 为 $x^2+y^2=(1-z)^2\,(0\leqslant z\leqslant 1)$.

199. [提示][答案] 计算 $I=\iiint_{\Omega} x^2\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=x^2+y^2$ 围成的有界区域.

200. [提示][答案] 计算第二型曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2+y^3)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 为 $x=\sqrt{1-2y^2-3z^2}$, 方向取 x 轴正向.

201. [提示][答案] 计算积分 $I=\iint_S(x+z)\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 S 是曲面 $x^2+z^2=2az\,(a>0)$ 被曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所截取的有限部分.

202. [提示][答案] 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 为对称阵, 若 A 正定, 证明 AB 的特征值全为实数.

203. [提示][答案] 设 φ 是实数域上 $n\,(n\geqslant 1)$ 维线性空间 V 的一个线性变换, 证明 φ 至少有一个维数是 1 或 2 的不变子空间.

204. [提示][答案] 设 A 是 n 阶半正定实对称矩阵, B 是 n 阶实矩阵, 若对于某个正整数 $k\geqslant 2$, 有 $A^kB=BA^k$ 成立, 证明 $AB=BA$.

205. [提示][答案] 设函数 $f\in C(\mathbb{R})$, 若有 $f(f(x))=x$, 证明存在 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得 $f(\xi)=\xi$.

206. [提示][答案] 设 f 是有整系数多项式, 若 f 在有理数域上不可约, 证明 f 在复数域上没有重根.

207. [提示][答案] 计算

$$I=\oint_L (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\,,$$

其中 L 是曲面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与 $x^2+y^2=2x$ 的交线的 $z\geqslant 0$ 的部分, 曲线方向为从 z 轴上方向下看是顺时针方向.

208. [提示][答案] 计算曲线积分 $I=\int_L z^2\,\mathrm{d}s$, 其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x+y=1$ 的交线.

209. [提示][答案] 设矩阵 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$, 其中 $n\geqslant 2$, 设 $f(\lambda)=\lambda^n+2\lambda^{n-1}+2$, 若有 $f(A)=0$, 证明 $f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式.

210. [提示][答案] 设函数 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上可导, $\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}f'(x)=A\in\mathbb{R}$, 证明 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上一致连续.

211. [提示][答案] (中科院 2019) 设有 $n+1$ 个列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta\in\mathbb{R}^n$, A 是一个 n 阶实对称正定阵, α_i' 为 α_i 的转置, 如果满足下列条件:

(1) $\alpha_j\neq 0\,(j=1,2,\dots,n)$;

(2) 对于任意 $i\neq j\,(i,j=1,2,\dots,n)$, 都有 $\alpha_i' A\alpha_j=0$;

(3) β 与每个 $\alpha_j\,(j=1,2,\dots,n)$ 都正交;

证明 $\beta=0$.

212. [提示][答案] (浙大 2020, 与 103 题类似) 若 $A,B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 存在 n 阶可逆复方阵 X 使得 $XA+2BX=0$, 证明存在可逆实方阵 Y, 使得 $YA+2BY=0$.

213. [提示][答案] (浙大 2020) 求行列式 $|A|$, 其中 A 的第 (i,j) 元为 $\operatorname{sgn}(i-j)$.

214. [提示][答案] 设 $\mathscr{A}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上 $n\,(n\geqslant 1)$ 维线性空间 V 上的线性变换, 证明 $\mathscr{A}$ 至少有一个维数是 1 或 2 的不变子空间.

215. [提示][答案] (华师 2021) 设 c_1,c_2,c_3 是多项式 $f(x)=2x^3-4x^2+6x-1$ 的三个复根, 求 $(c_1c_2+c_3^2)(c_2c_3+c_1^2)(c_1c_3+c_2^2)$.

216. [提示][答案] (华师 2021) 设实矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad a,b,c,d>0$$

证明: 一定存在 A 的特征向量 $(x,y)'\in\mathbb{R}^2$, 满足 $x,y>0$.

217. [提示][答案] (华师 2021) 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, B 是 n 阶实对称正定阵.

(1) 证明: 存在唯一 n 阶实矩阵 C 满足 $BC+CB=A$;

(2) 证明: 对 (1) 中的实矩阵 C, $BC=CB$ 当且仅当 $AB=BA$.

218. [提示][答案] 设数列 $\{na_n\}$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n-1})$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

219. [提示][答案] 求 $\lim_{n\to+\infty}(I_n/\ln n)$, 其中

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2(nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}t\,.$$

***220.** [提示][答案] 设 $I(x)=\int_0^{+\infty} x^{3/2}\exp(-x^2y^2)\,\mathrm{d}y$, 证明 $I(x)$ 关于 $x\geq 0$ 一致收敛.

221. [提示][答案] 计算曲线积分: $I=\int_L (x^2-y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\,\mathrm{d}y+(y^2-z^2)\,\mathrm{d}z$, 其中 L 是曲面 $x=\sqrt{2z-y^2-z^2}$ 与 $x+z=1$ 的交线上, 从点 $(0,-1,1)$ 到点 $(0,1,1)$ 的一段有向弧.

*222. [提示][答案] 记 $|M|$ 为矩阵 M 的行列式, 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

(1) 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = \left|A+\sqrt{-1}B\right|\cdot\left|A-\sqrt{-1}B\right|.$$

(2) 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B|\cdot|A-B|.$$

223. [提示][答案] 设函数

$$f(x)=\begin{cases} \int_0^x \sin(1/x)\,\mathrm{d}x & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导?

224. [提示][答案] 求积分

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

225. [提示][答案] 设 D 是 xOy 平面上由曲线 $y=\sqrt{x}$ 和直线 $y=x$ 围成的图形, 求 D 绕直线 $y=x$ 旋转产生的旋转体的体积.

226. [提示][答案] 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 证明: $\mathrm{rank}(A)=n$ 的充分必要条件为存在 n 阶实矩阵 B, 使得 $AB+B'A$ 为正定阵.

*227. [提示][答案] 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 设

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right),$$

证明: 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在任意有限区间上一致收敛.

228. [提示][答案] 与 227 很类似, 如果令 $f(x)=\sin(x)$, 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

229. [提示][答案] 判断下列级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

*230. [提示][答案] 设 $f(x)\in C^2(0,1)$, 满足 $f(0)=f(1)=0$, 且对任意 $x\in(0,1)$, $f(x)\neq 0$, 证明积分不等式

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>4.$$

231. [提示][答案] 设 V 是 n 维欧式空间, 证明

(1) 对于任意两个不同的单位向量 $\alpha, \beta \in V$, 总存在 V 上的镜面变换 $\mathscr{A}$, 使得 $\mathscr{A}(\alpha) = \beta$;

(2) 证明 V 上的任意正交变换 $\mathscr{B}$ 都可以表示成有限个镜面变换的乘积, 即存在 m 个镜面变换 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots, \mathscr{A}_m$, 使得

$$\mathscr{B} = \mathscr{A}_1\mathscr{A}_2 \dots \mathscr{A}_m.$$

232. [提示] [答案] 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)\,\mathrm{d}x$, 其中 a, b 不全为 0.

233. [提示][答案] 设 A 为 n 阶正定阵, $X \in \mathbb{R}^n$ 为非零列向量, 证明

(1) 矩阵 $A + XX'$ 可逆,

(2) $0 < X'(A + XX')^{-1}X < 1$.

234. [提示] [答案] $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 假设 $A^2 = A$, 且对任意的 $X \in \mathbb{R}^n$, 有

$$X'A'AX \leqslant X'X,$$

证明 A 为对称阵.

235. [提示][答案] (中科院 2021) 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 上的可逆线性变换, $v_1, v_2, \dots, v_m$ 张成 V, 且

$$\mathscr{A}(v_i) \in \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

求证 $\mathscr{A}$ 可对角化, 且特征值都为单位根.

236. [提示][答案] (中科院 2021) 证明 $\left|\int_a^{a+1} \sin t^2\,\mathrm{d}t\right| \leqslant a^{-1}\,(a > 0)$, 也可以证明更强的结论: $\left|\int_a^{a+1} \sin t^2\,\mathrm{d}t\right| < a^{-1}\,(a > 0)$.

237. [提示][答案] (中科院 2021) 求积分

$$I = \iint_D \frac{x^2 + y^2 - 2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D: x^2 + y^2 \geqslant 2,\ x \leqslant 1$.

238. [提示][答案] 计算积分

$$\iint_S (x + z)\,\mathrm{d}S\,,$$

其中 S 是曲面 $x^2 + y^2 = 2az\,(a > 0)$ 被曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所截取的有限部分.

239. [提示] [答案] 设 $W = \{A : \mathrm{tr}(A) = 0, A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\}$, 证明 W 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 的子空间, 并且求它的一组基.

240. [提示] [答案] 已知 A, C 是 n 阶正定对称矩阵, 且矩阵方程 $AX + XA = C$ 有唯一解 B, 证明 B 也是正定实对称阵.

241. [提示] [答案] 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 定义 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上的线性变换:

$$L_A : X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AX;$$
$$R_A : X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto XA,$$

证明存在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上的可逆线性变换 T, 使得 $L_A = TR_AT^{-1}$.

242. [提示] [答案] 设 $\alpha > 0$, $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \alpha(1 + x_n)^{-1}\,(n = 1, 2, \dots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

2 提示

1. (1) **Stokes 公式**. 可利用 Stokes 公式转换为面积.

   (2) **参数方程**. 利用该圆的参数方程进行计算:

$$\begin{cases} x = a\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right) \\ y = a\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\cos\theta\right) \\ z = a\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right) \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

2. 利用 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ 与 Lagrange 中值定理得到不一致连续的定义.

3. 用 Cauchy 收敛准则与 $\{a_n\}$ 的单调性考虑 $\sum_{k=n}^{2n} a_n$.

4. (1) 可以考虑

$$\int_A^B \frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_A^B \frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{aA}^{aB} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{bA}^{bB} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{aA}^{bA} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{aB}^{bB} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

   再利用积分中值定理与 $A \to 0,\ B \to +\infty$ 得到结论. (2), (3) 同理.

5. 分别考虑 $r = 0, |r| < 1, |r| = 1$ 与 $|r| > 1$, 其中 $|r| > 1$ 的情况可以令 $\rho = 1/r$, 再利用 $|r| < 1$ 的情况即可. 利用不定积分

$$\int \frac{1}{a + b\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t + C,$$

   计算 $I'(r)$, 与利用

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

   计算 $I(\pm 1)$ 即可求得答案.

6. 做换元 $t = 1/x$, 则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^p}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t$$

   再分成 $[0,1] \cup [1,+\infty)$ 进行讨论.

7. 用积分因子构造含参变量反常积分:

$$H(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad t \in [0,1],$$

   首先可以用 Abel 判别法说明 $H(t)$ 关于 $t \in [0,1]$ 一致收敛, 则有 $H(t) \in C[0,1]$. 又可以说明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x$$

   在 $t \in (0,1)$ 内闭一致收敛, 则可以得到 $H'(t)$ 在 $(0,1)$ 上的表达式:

$$H'(t) = \int_0^{+\infty} \sin x \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x,$$

   而对于这个反常积分的计算, 可以使用分部积分, 或者用[2] $\sin x = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})/(2\mathrm{i})$, 可以得到 $H'(t) = (1+t^2)^{-1}$, 即可求得 $H(0)$.

[2]这种写法我不确定是否标准, 或者是否有足够的理论依据

8. 由 $f \in C[0,1]$ 可知 f 在 $[0,1]$ 上一致连续, 则当 $|x-y|$ 足够小的时候 $|f(x)-f(y)|$ 也足够小, 再考虑 n 为偶数时

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n/2} f\left(\frac{2k-1}{n}\right) - f\left(\frac{2k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2}\varepsilon.$$

n 为奇数时只需要增加一项 $f(1)/n$.

9. $\left|\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin(t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}$

10.

$$\left|\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin(t)\right| \leqslant \left|\frac{t}{\mathrm{e}^{(\alpha+u^2)t}}\right| \leqslant \frac{t}{1+u^2 t} \leqslant \frac{1}{u^2}$$

12. 记

$$I(b) = \int_0^{+\infty} \exp(-ax^2)\cos(bx)\,\mathrm{d}x$$

则又 Weierstrass 判别法可知

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial b}\big(\exp(-ax^2)\cos(bx)\big)\,\mathrm{d}x$$

在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 于是可求得 $I'(b)$, 再对 $I(b)$ 利用分部积分, 可得

$$I'(b) = -\frac{b}{2a}I(b)$$

即 $(\ln I(b))' = -b/(2a)$, 再利用 $I(0)$ 的值可以计算得 $I(b)$.

21. 利用 $A^\ell B = B(I-A)^\ell$, 与 A 的特征值全 0 可以得到 $B=0$.

31. 利用 Abel 变换与 Stolz 公式.

37. 从结果入手, 即需要找 $g(x) = \mathrm{e}^x(f'(x)-f(x))$ 导数的零点, 那么由 Rolle 定理, 我们就需要找 $g(x_1) = g(x_2)$, 我们已经有了 $g(0)=0$, 那么只要找另一个 $g(\xi)=0$ 即可, 也就等价于要找 ξ 使得 $f'(\xi) = f(\xi)$.

58. 分别设 $(A+B)x=0, Ax=0, Bx=0, ABx=0, BAx=0$ 的解空间为 $V_{A+B}, V_A, V_B, V_{AB}, V_{BA}$, 注意到 $V_{AB} = V_{BA}$, 再利用这些解空间的包含关系即可得到结论.

60. 利用多项式 $f(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$ 与 $x^n = b$ 的根的特性来构造 Vandermonde 行列式.

61. 考虑 $(tA+D)x=0$ 的解的情况, 再利用 $t=0$ 来判断符号.

63. 假设 $f(x)$ 有间断点 c, 用定义可以说明在 $f(c)$ 附近存在 l_c, 使得 $f(x) = l_c$ 无根或有无数根.

73. 利用极限式构造一个趋于 0 的自变量, 再利用 $x=0$ 处的连续性及导数定义即可得到结论.

76. 注意到 $f(x)$ 为 $x=0$ 处可导的偶函数, 那么 $f'(0)=0$, 再利用比较判别法即可得到结论.

84. 我们给出两种方法的提示:

(**方法一**) 由 $f(x)\to 0$ 可得 x 足够大时 $|f(x)|$ 足够小, 由 Lagrange 中值定理可以得到 x 附近的某个 ξ, 使得 $f'(\xi)$ 足够小, 再利用 $f'(x)$ 在 ξ 点的 Taylor 展开, 搭配二阶导有界的条件, 即可说明对每个足够大的 x, 都有 $|f'(x)|$ 足够小, 命题得证.

(**方法二**) 取足够大的 $N \in \mathbb{N}$, 对任意足够大的 x 将 $f(x+1/N)$ 在 x 处 Taylor 展开, 就可以得到 $f'(x)$ 的表达式, 再利用 $f''(x)$ 有界, 以及 $f(x) \to 0$, 即可说明.

98. 首先可以知道如果 $f(x)$ 有有理根, 那这个有理根必是整数根, 再考虑 $f(x) \vDash 2$.

107. 考虑以下两个积分的关系:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \, \mathrm{d}x, \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \, \mathrm{d}x$$

111. 首先注意到 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(n+k)^{-1} = A \ln 2$, 再利用拟合法, 即考虑 $\sum_{k=1}^{n}(a_{n+k} - A)(n+k)^{-1}$ 即可.

125. 这里给出两种提示

(**方法一**) 将 A 分解为对称阵与反对称阵的和, 再利用 61 题得出结论.

(**方法二**) 注意到实矩阵 A 的虚特征值成对, 再利用 $x'Ax > 0$ 得到 A 的实特征值均为正, 那么 $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$.

232. 令 I 为 a 的函数

$$I(t) = \int_0^{\pi/2} \ln(t^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) \, \mathrm{d}x$$

利用方程组解出 $I'(t)$, 再计算 $\int_b^a I'(t) \, \mathrm{d}t$, 最后再考虑 a 或 b 为 0 的情况.

234. 移项后可得 $I - A'A$ 为半正定阵, 故存在 $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 使得 $I - A'A = C'C$, 可得出 $CA = 0$, 即 $C'CA = 0$. 再利用 $A^2 = A$ 即可得出结论.

239. 首先每个 $E_{ij}\,(i \neq j)$ 均是 W 的元素, 再考虑对角线元素的特点.

240. 将 $AB + BA = C$ 两侧同时转置, 就可以得到 B 是对称阵, 再设 B 的特征值 λ 与特征向量 α, 考虑 $\alpha'(AB+BA)\alpha > 0$ 即可.

241. 首先由 Jordan 标准型理论可知 A' 与 A 相似, 即 $AT_1 = T_1A'$, 定义 $T(X) = T_1X'$, 然后验证即可.

242. 可以 “先斩后奏”. 先假设极限存在, 并求得极限应该为 $y = (-1 + \sqrt{1+4\alpha})/2$. 再讨论 x_1 和 y 的大小关系来分别确定 $\{x_n\}$ 的性质.

3 答案

1. $\sqrt{3}\pi a^2$.

5.

$$I(r) = \begin{cases} 0 & , |r| \leqslant 1; \\ 2\pi \ln |r| & , |r| > 1. \end{cases}$$

6. 当 $0 < p < 2$ 时收敛, $p \geqslant 2$ 时发散.

7. $\pi/2$

12.

$$I(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right).$$

21. 将 $AB+BA=B$ 移项可得 $AB=B(I-A)$, 那么就有

$$A^2B=AAB=AB(I-A)=B(I-A)(I-A)=B(I-A)^2$$

同理可得对于任意的 $\ell\in\mathbb{N}$, 总有 $A^{\ell}B=B(I-A)^{\ell}$, 特别地, 令 $\ell=k$, 于是就有 $B(I-A)^k=0$. 再注意到 $A^k=0$, 那么 1 不是 A 的特征值, 故 $|I-A|\neq 0$, 也即 $(I-A)^k$ 可逆. 那么就有 $B=0$.

31. 由 Abel 变换可得

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}a_kp_k}{p_n}=\frac{S_np_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k(p_{k+1}-p_k)}{p_n}=S_n-\frac{\sum_{k=1}^{n-1}S_k(p_{k+1}-p_k)}{p_n}$$

其中 $S_k=\sum_{i=1}^{k}a_k$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 那么由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_kp_k}{p_n}=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n-1}(p_n-p_{n-1})}{p_n-p_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0.$$

37. 答案这里我们依然从结果入手, 提供一种思考的方式. 我们要说明 $f''(x)-f(x)$ 存在零点, 那么就是要找

$$f''(x)-f'(x)+f'(x)-f(x)=(f'(x)-f(x))'+(f'(x)-f(x))$$

的零点, 也就是找到 $g(x)=\mathrm{e}^x(f'(x)-f(x))$ 导数的零点, 那么只要找到不同的 x_1 和 x_2 使得 $g(x_1)=g(x_2)$ 即可. 而我们又知道 $g(0)=0$, 那么我们只要找 $g(x)$ 的另外一个零点即可, 也就是要找 $f'(x)-f(x)$ 的零点, 也就是要找 $h(x)=f(x)/\mathrm{e}^x$ 的导数的零点, 而由题知 $h(0)=h(1)=0$, 也就是存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $h'(\eta)=0$, 即 $g(\eta)=g(0)=0$, 那么就存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $g'(\xi)=0$, 即 $f''(\xi)=f(\xi)$.

58. 分别设 $(A+B)x=0, Ax=0, Bx=0, ABx=0, BAx=0$ 的解空间为 $V_{A+B}, V_A, V_B, V_{AB}, V_{BA}$, 由线性方程组的关系, 可以得到 $V_A\cap V_B\subset V_{A+B}$, $V_A\subset V_{BA}$, $V_B\subset V_{AB}$, 注意到 $V_{AB}=V_{BA}$, 那么就有 $V_A+V_B\subset V_{AB}$, 于是有

$$\dim(V_A+V_B)=\dim V_A+\dim V_B-\dim(V_A\cap V_B)$$
$$\dim V_{AB}\geqslant\dim V_A+\dim V_B-\dim V_{A+B}$$

再利用解空间和系数矩阵的关系:

$$\begin{aligned} n-\operatorname{rank}(AB) &\leqslant n-\operatorname{rank}A+n-\operatorname{rank}B-n+\operatorname{rank}(A+B)\\ \Longrightarrow\ \operatorname{rank}(A+B) &\leqslant \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-\operatorname{rank}(AB)\end{aligned}$$

60. 设多项式 $f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$, 再设 $x^n=b$ 的根分别为 $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$, 它们互不相同. 那么构造 Vandermonde 行列式

$$V=\begin{vmatrix}1&1&\ldots&1\\ \omega_1&\omega_2&\ldots&\omega_n\\ \omega_1^2&\omega_2^2&\ldots&\omega_n^2\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \omega_1^{n-1}&\omega_2^{n-1}&\ldots&\omega_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

那么考虑行列式乘法:

$$BV=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&\ldots&a_n\\ ba_n&a_1&a_2&\ldots&a_{n-1}\\ ba_{n-1}&ba_n&a_1&\ldots&a_{n-1}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ ba_2&ba_3&ba_4&\ldots&a_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&\ldots&1\\ \omega_1&\omega_2&\ldots&\omega_n\\ \omega_1^2&\omega_2^2&\ldots&\omega_n^2\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \omega_1^{n-1}&\omega_2^{n-1}&\ldots&\omega_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

可以计算得 BV 的第 (i,j) 元为:

$$\begin{aligned} BV(i,j) &= (ba_{n-i+2}, ba_{n-i+3}, \dots, ba_n, a_1, \dots, a_{n-i+1})\begin{pmatrix} 1 \\ \omega_j \\ \omega_j^2 \\ \vdots \\ \omega_j^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= ba_{n-i+2} + b\omega_j a_{n-i+3} + \cdots + b\omega_j^{i-2}a_n + \omega_j^{i-1}a_1 + \cdots + \omega_j^{n-1}a_{n-i+1} \end{aligned}$$

然后我们将 b 写为 ω_j^n, 并重新整理一下顺序, 就有

$$\begin{aligned} BV(i,j) &= \omega_j^{i-1}a_1 + \omega_j^i a_2 + \cdots + \omega_j^{n-1}a_{n-i+1} + \omega_j^n a_{n-j+2} + \cdots + \omega^{n+i-2}a_n \\ &= \omega_j^{i-1}(a_1 + \omega_j a_2 + \cdots + \omega_j^{n-1}a_n) = \omega_j^{i-1}f(\omega_j) \end{aligned}$$

那么我们可以重新写一份 BV:

$$BV = \begin{vmatrix} f(\omega_1) & f(\omega_2) & \dots & f(\omega_n) \\ \omega_1 f(\omega_1) & \omega_2 f(\omega_2) & \dots & \omega_n f(\omega_n) \\ \omega_1^2 f(\omega_1) & \omega_2^2 f(\omega_2) & \dots & \omega_n^2 f(\omega_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^{n-1} f(\omega_1) & \omega_2^{n-1} f(\omega_2) & \dots & \omega_n^{n-1} f(\omega_n) \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n f(\omega_i) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n f(\omega_i)V$$

由于 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 互不相同, 则 $V \neq 0$, 那么就有 $B = \prod_{i=1}^n f(\omega_i)$.

61. 设 $t \geqslant 0$, 记 $M(t) = (tA + D)$, 考虑 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $(tA + D)x = 0$, 则有 $x'(tA + D)x = 0$, 对等式两侧取转置, 注意到 tA 也是反对称阵, 那么就有

$$x'(-tA + D)x = 0$$

将两个等式相加, 就可以得到 $2x'Dx = 0$, 显然 D 是一个正定矩阵, 那么可以得到 $x = 0$, 即 $(tA + D)x = 0$ 只有零解, 即 $|M(t)|$ 对任意 t 恒不为 0, 而 $|M(t)|$ 是关于 t 的连续函数, 那么有连续函数的界值定理, 就有 $|M(t)|$ 恒正或恒负. 特别地, 考虑 $t = 0$, 由 $d_i > 0$ 可知 $|D| > 0$, 这说明 $|M(t)| > 0$, 那么取 $t = 1$, 就得到 $|M(1)| = |A + D| > 0$.

63. 假设 $f(x) \notin C[a,b]$, 则设 c 是 $f(x)$ 的间断点, 那么 $\lim_{x\to c+} f(x)$ 与 $\lim_{x\to c-} f(x)$ 至少一个不存在或不以 $f(c)$ 为极限, 设它为 $\lim_{x\to c+} f(c)$. 于是存在 ε_0, 使得对任意的 δ, 都存在 x, 使得 $c < x < c + \delta$, 但是 $|f(x) - f(c)| \geqslant \varepsilon_0$, 那么我们考虑集合

$$M_\delta = \{x \in (c, c+\delta) : f(x) \geqslant f(c) + \varepsilon_0\}, \quad m_\delta = \{x \in (c, c+\delta) : f(x) \leqslant f(c) - \varepsilon_0\}$$

对于 $\delta_1 < \delta_2$, 显然有 $M_{\delta_1} \subset M_{\delta_2}, m_{\delta_1} \subset m_{\delta_2}$, 并且当 δ 不断靠近 0 的过程中, M_δ 与 m_δ 一定有一个集合恒不为空集, 否则, 如果有某 δ', δ'' 分别使 $M_{\delta'} = m_{\delta''} = \varnothing$, 那么由包含关系, 就一定存在 $0 < \delta_0 < \min\{\delta', \delta''\}$, 使得 $M_{\delta_0} = m_{\delta_0} = \varnothing$, 那么对该 δ_0, 就不存在 $c < x < c + \delta_0$, 使得 $|f(x) - f(c)| \geqslant \varepsilon_0$, 这与 ε_0 的取法以及 c 是间断点矛盾, 不妨设 M_δ 恒不为空集. 下面用两种方法说明矛盾.

(方法一) 若存在 Δ, 使得对任意 $c < x < c + \Delta$ 的 x, 都有 $|f(x) - f(c)| \geqslant \varepsilon_0$, 那么取 $l_c = f(c) + \varepsilon_0/2$, 就有在 $[c, c+\Delta] \subset [a,b]$ 上, $f(x) = l_c$ 无解, 与题设矛盾.

若对任意的 δ, 都存在 y, 使得 $c < y < c + \delta$, 但是 $|f(y) - f(c)| < \varepsilon_0$, 下面进行构造: 先取定一个 δ_1, 由上面讨论可知存在 $c < y_1 < x_1 < c + \delta_1$, 但是

$$f(x_1) \geqslant f(c) + \varepsilon_0, \quad |f(y_1) - f(c)| < \varepsilon_0$$

那么可知对于

$$l_c = f(c) + \varepsilon_0 \in [f(y_1), f(x_1)],$$

存在 $\eta_1 \in [y_1, x_1]$, 使得 $f(\eta_1) = l_c$. 再取 $\delta_2 \in (0, y_1 - c)$, 那么又有 $c < y_2 < x_2 < c + \delta_2$ 满足

$$f(x_2) \geqslant f(c) + \varepsilon_0, \quad |f(y_2) - f(c)| < \varepsilon_0$$

那么就又有 $\eta_2 \in [y_2, x_2]$, 使得 $f(\eta_2) = l_c$, 如此构造可以得到一列互不相同的 $\{\eta_n\}$, 满足 $c < \eta_n < x_1$, 且 $f(\eta_n) = l_c$, 这与 $f(x) = l_c$ 在 $[c, x_1]$ 有有限个解矛盾. 综上: $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数.

(**方法二**) 固定 δ_0 设 $y \in M_{\delta_0}$, 则 $f(y) \geqslant f(c) + \varepsilon_0$, 那么对于 $l_c = f(c) + \varepsilon_0/2$, 由题知对于 $f(x) = l_c$ 在 $[c, y]$ 中只有有限个解, 设最小的解为 $t > c$, 那么记 $\delta_1 = t - c$, 由 M_{δ_1} 非空可知仍存在 $y' \in M_{\delta_1}$, 满足 $y' < c + t - c = t$, 且 $f(y') \geqslant f(c) + \varepsilon_0$, 再由题目条件可知存在 $t' \in [c, y']$, 满足 $f(t') = l_c$, 这与 t 是 $[c, y]$ 中最小的解矛盾, 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

73. 由

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A,$$

可知: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x| < \delta$ 时,

$$A - \varepsilon < \frac{f(2x) - f(x)}{x} < A + \varepsilon$$

又因为 $|2^{-1}x| < \delta$, 那么又有

$$A - \varepsilon < \frac{f(x) - f(2^{-1}x)}{2^{-1}x} < A + \varepsilon$$

即

$$2^{-1}(A - \varepsilon) < \frac{f(x) - f(2^{-1}x)}{x} < 2^{-1}(A + \varepsilon),$$

再取 $2^{-2}x, 2^{-3}x, \ldots, 2^{-n}x$, 就可以得到一列不等式:

$$\begin{gathered}
2^{-2}(A - \varepsilon) < \frac{f(2^{-1}x) - f(2^{-2}x)}{x} < 2^{-2}(A + \varepsilon) \\
2^{-3}(A - \varepsilon) < \frac{f(2^{-2}x) - f(2^{-3}x)}{x} < 2^{-3}(A + \varepsilon) \\
\cdots \\
2^{-n}(A - \varepsilon) < \frac{f(2^{-n+1}x) - f(2^{-n}x)}{x} < 2^{-n}(A + \varepsilon)
\end{gathered}$$

从 $2^{-1}x$ 开始将它们相加, 即可得到

$$(1 - 2^{-n})(A - \varepsilon) < \frac{f(x) - f(2^{-n}x)}{x} < (1 - 2^{-n})(A + \varepsilon) \tag{1}$$

由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 则 $\lim_{n \to \infty} f(2^{-n}x) = f(0)$, 那么对不等式 (1) 中的 n 取极限, 可得

$$A - \varepsilon \leqslant \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leqslant A + \varepsilon$$

这就说明了 $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0) = A$.

76. 首先我们证明 $f'(0)=0$, 由 $f(x)$ 为偶函数可得

$$f'(0)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{x}\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{-x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{x}\end{cases}$$

对比 $f'(0)$ 的两种表示可知 $f'(0)=0$, 再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶连续可导, 那么在 x 的某个邻域 $[x,x+1/n]$ 上二阶可导. 于是由带 Lagrange 余项的 Taylor 定理知存在 $\xi\in(0,1/n)$ 使得

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)+\frac{1}{n}f'(0)+\frac{1}{2n^2}f''(\xi)=1+\frac{1}{2n^2}f''(\xi),$$

那么 $|f(1/n)-1|=\mathcal{O}\left(n^{-2}\right)(n\to\infty)$, 那么由比较判别法的极限形式可以知道 $\sum_{n=1}^{\infty}(f(1/n)-1)$ 绝对收敛.

93. (1) 首先可以说明 $f(x)$ 的实根的重数都是偶数, 且首项系数 $k>0$ 即

$$f(x)=k\prod_{i=1}^{s}(x-a_i)^{2k_i}\prod_{j=1}^{t}(x^2+b_jx+c_j)^{l_j}:=kp^2(x)q(x), \tag{2}$$

其中 $k,a_i,b_j,c_j\in\mathbb{R},\ k_i,l_j\in\mathbb{N}\,(1\leqslant i\leqslant s,1\leqslant j\leqslant t)$, $b_j^2-4c_j<0$, 又可知对于每个 j, $x^2+b_jx+c_j$ 都有一对共轭的复根, 记为 $\omega_j,\bar{\omega}_j$, 并注意到 $x\in\mathbb{R}$ 于是又有

$$q(x)=\prod_{j=1}^{t}(x-\omega_j)^{l_j}\prod_{j=1}^{t}(x-\bar{\omega}_j)^{l_j}=\prod_{j=1}^{t}(x-\omega_j)^{l_j}\overline{\prod_{j=1}^{t}(x-\omega_j)^{l_j}}$$

若记 $\prod_{j=1}^{t}(x-\omega_j)^{l_j}=g_i(x)+\mathrm{i}h_1(x)$, 其中 $g_1(x),h_1(x)\in\mathbb{R}[x]$, 那么就有

$$q(x)=(g_1(x)+\mathrm{i}h_1(x))\overline{(g_1(x)+\mathrm{i}h_1(x))}=(g_1(x)+\mathrm{i}h_1(x))(g_1(x)-\mathrm{i}h_1(x))=g_1^2(x)+h_1^2(x)$$

于是令 $g(x)=\sqrt{k}p(x)g_1(x)$, $h(x)=\sqrt{k}p(x)h_1(x)$, 就有 $f(x)=g^2(x)+h^2(x)$.

(2) 注意到在刚才的过程中得到的 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的次数是相等的, 如果要得到次数不等的 g,h, 可以用数学归纳法. 首先依旧可以得到 (2) 的分解式, 当 $b^2-4c<0$ 时利用

$$x^2+b_1x+c_1=\left(x+\frac{b_1}{2}\right)^2+\frac{4c_1-b_1^2}{4}=\varphi_1^2(x)+\psi_1^2(x)$$

以及

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=\frac{1}{2}(ac+bd)^2+\frac{1}{2}(ad-bc)^2$$

可以得到 $q(x)$ 新的分解式 $g_2(x),h_2(x)$, 此时 $\deg g_2(x)>\deg h_2(x)$, 且令 $g(x)=\sqrt{k}p(x)g_2(x)$, $h(x)=\sqrt{k}p(x)h_2(x)$, 就有 $f(x)=g^2(x)+h^2(x)$, 这时就有 $\deg g(x)>\deg h(x)$.

98. 首先可以知道, 如果 p/q 为 $f(x)$ 的有理根, 其中 p,q 为互素的整数,

107. 设

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x\,,\quad J=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

那么首先可以得到

$$I+J=\int_0^{\pi/2}1\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

再对积分 I 用换元 $t=\pi/2-x$, 那么就有

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(\pi/2-t)}{\sin(\pi/2-t)+\cos(\pi/2-t)}\,\mathrm{d}\Big(\frac{\pi}{2}-t\Big)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t=J,$$

于是 $I=J=\pi/4$.

111. 一方面, 我们可以用定积分的定义求出

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{A}{n+k}=A\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=A\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}=A\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=A\ln 2.$$

然后我们来证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{n+k}-A}{n+k}=0.$$

由于 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$, 于是对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得对于任意 $k\in\mathbb{N}$, 都有 $|a_{n+k}-A|<\varepsilon$, 于是对于 $n>N$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{n+k}-A}{n+k}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_{n+k}-A|}{n+k}\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\leqslant\varepsilon$$

也就是说明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{n+k}}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{A}{n+k}=A\ln 2.$$

125. 我们用两种方法进行证明

(**方法一**) 将 A 分解为 $B+C$, 其中 B 是对称阵, C 是反对称阵, 那么

$$x'Ax=x'Bx+x'Cx>0,$$

另外注意到 $x'Cx\in\mathbb{R}$, 那么应当有

$$x'Cx=(x'Cx)'=-x'Cx\implies x'Cx=0,$$

于是 $x'Bx>0\,(0\neq x\in\mathbb{R}^n)$, 即 B 是正定阵, 那么由 61 题可知 $|A|=|B+C|>0$.

(**方法二**) 设 A 的特征值 $\lambda_1,\bar\lambda_1,\lambda_2,\bar\lambda_2,\dots,\lambda_r,\bar\lambda_r,\lambda_{2r+1},\dots,\lambda_n$, 其中前 $2r$ 个特征值为复特征值, 后 $n-2r$ 个为实数. 下面来说明 $\lambda_i>0\,(2r+1\leqslant i\leqslant n)$, 取 λ_i 的特征向量 $\alpha_i\in\mathbb{R}^n$, 那么有

$$\alpha_i'A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i'\alpha>0,$$

这说明 A 的全体实特征值全大于 0, 于是

$$|A|=\prod_{j=1}^{r}\lambda_j\bar\lambda_j\prod_{i=2r+1}^{n}\lambda_i>0.$$

232. 不妨设 $a,b>0$ 记

$$I(t)=\int_0^{\pi/2}\ln(t^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,\mathrm{d}x\,,\quad t>0$$

则待求积分为 $I(a)$, 由于 $\ln(t^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)$ 在 $(x,t) \in [0,\pi/2]\times(0,+\infty)$ 上连续可微, 故有

$$I'(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial t}\ln(t^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{2t\sin^2 x}{t^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

下面来计算 $I'(t)$. 记

$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{t^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\,, \quad B = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{t^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\,,$$

那么可以看出

$$t^2 A + b^2 B = \frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

另外

$$A + B = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\tan x}{t^2\tan^2 x + b^2},$$

令 $u = \tan x$, 则

$$A + B = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{t^2u^2 + b^2} = \frac{1}{tb}\arctan\frac{ut}{b}\bigg|_{u=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2tb}. \tag{4}$$

联立等式 (3) 与 (4) 即可解出

$$A = \frac{\pi}{2}\frac{1}{t(t+b)}$$

则 $I'(t) = 2tA = \pi/(t+b)$. 于是有

$$I(a) - I(b) = \int_b^a I'(t)\,\mathrm{d}t = \pi\ln\frac{a+b}{2b},$$

又因为 $I(b) = \int_0^{\pi/2}\ln b^2\,\mathrm{d}x = \pi\ln b$, 所以

$$I(a) = \pi\ln\frac{a+b}{2},$$

再考虑 $a > 0, b = 0$ 的情况, 利用

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

可得

$$\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2 x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 2\ln a + 2\ln\sin x\,\mathrm{d}x = \pi\ln\frac{a}{2},$$

这说明了对于任意 $a^2 + b^2 \neq 0$, 总有

$$I(a) = \int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}.$$

234. 将不等式移项, 可得出对任意 $X \in \mathbb{R}^n$, 都有

$$X'(I - A'A)X \geqslant 0,$$

又因为 $I-A'A$ 为对称阵, 所以 $I-A'A$ 为半正定矩阵, 那么存在 $C\in M_n(\mathbb{R})$, 使得 $I-A'A=C'C$, 在等式两侧同时左乘 A', 右乘 A, 就有

$$A'(I-A'A)A=A'C'CA \implies (CA)'(CA)=A'A-(A')^2A^2=A'A-A'A=0,$$

那么由 $\mathrm{tr}((CA)'(CA))=\mathrm{tr}(0)=0$ 可得 $CA=0$, 也就是

$$0=CA=C'CA=(I-A'A)A=A-A'A \implies A=A'A,$$

再两侧同时取转置, 就有 $A'=A'A=A$, 即 A 是对称阵.

239. W 是子空间是显然的. 下面求维数: 可知 $W_1=\left\{\sum_{i\neq j}x_{ij}E_{ij}: x_{ij}\in\mathbb{R}\right\}$ 是 W 的 $(n-1)n$ 维的子空间, 而 $W_2=\left\{\sum_{i=1}^n x_iE_{ii}: x_1+x_2+\cdots+x_n=0\right\}$ 是 W 的 $n-1$ 维的子空间, 且 $W_2\cap W_1=0$. 则

$$\dim W\geqslant \dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2=n^2-1$$

又因为 W 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的真子空间, 则 $\dim W=n^2-1$, $W=W_1\oplus W_2$. W 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的 n^2-1 维的子空间, 且 $\{E_{ij}: i\neq j\}\cup\{E_{11}-E_{kk}: k>1\}$ 是 W 的一组基.

240. 将 $AB+BA=C$ 两侧同时转置, 可以得到 $B'A+AB'=C$, 由于 B 是该矩阵方程的唯一解, 那么就有 $B=B'$, 也即 B 是对称阵. 那么要说明 B 是正定阵, 只要说明 B 的特征值全为正数. 设 B 的特征值 λ 与对应的特征向量 α, 于是由 C 的正定性可知

$$\alpha'(AB+BA)\alpha=\alpha'C\alpha>0,$$

也就是

$$\alpha'A\lambda\alpha+\alpha'\lambda A\alpha=2\lambda\alpha'A\alpha>0,$$

那么由 A 的正定性可知 $\alpha'A\alpha>0$, 那么 $\lambda>0$, 这就说明了 B 是正定实对称阵.

241. 我们断言 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 与 A' 相似, 则存在可逆阵 $T_1\in M_n(\mathbb{R})$, 使得 $AT_1=T_1A'$, 那么我们定义 $T(X)=T_1X'$, 先说明 $T(X)$ 是可逆变换: 令 $T_2: X\mapsto (T_1^{-1}X)'$, 可以验证

$$T_2T(X)=T_2(T_1X')=(T_1^{-1}T_1X')'=X,$$

对任意 $X\in M_n(\mathbb{R})$ 都成立, 于是 $T_2T=I$, 其中 I 为恒等变换, 这说明 T 为可逆变换. 下面再验证 $L_AT=TR_A$: 对任意的 $X\in M_n(\mathbb{R})$, 都有

$$L_AT(X)=L_A(T_1X')=AT_1X'=T_1A'X'=T_1(XA)'=T(XA)=TR_A(X),$$

这就说明了 $L_AT=TR_A$, 即 $L_A=TR_AT^{-1}$.

下面再来说明为什么 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 与 A' 相似, 首先存在可逆阵 P, 使得 A 相似于它的 Jordan 标准型 J_A, 即

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_s}(\lambda_s)\end{pmatrix}$$

那么就有 A' 相似于 J_A':

$$P'A'(P')^{-1}=\begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1)' & & & \\ & J_{r_2}(\lambda_2)' & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_s}(\lambda_s)'\end{pmatrix}$$

那么只需要说明 $J_{r_i}(\lambda_i)'$ 相似于 $J_{r_i}(\lambda_i)$ 即可. 首先它的特征多项式为 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$, 考虑

$$J_{r_i}(\lambda_i)' = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i}$$

的 $n-1$ 阶行列式因子: 由于 $\det J_{r_i}(\lambda_i)'\begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & r_i \\ 1 & 2 & \cdots & r_i-1 \end{pmatrix} = 1$, 于是它的 $n-1$ 阶行列式因子 $D_{n-1}=1$, 这说明它的 n 阶行列式因子 D_n 和它的第 n 个不变因子 d_n 相同, 均为它的特征多项式 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$, 那么它的初等因子组只有一个元素 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$, 即它的 Jordan 标准型只有一块 $J_{r_i}(\lambda_i)$, 于是 A 与 A' 的 Jordan 标准型相同, A 与 A' 相似.

242. 若 $\{x_n\}$ 极限存在, 设极限为 x, 那么在

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1+x_n}$$

两侧同时对 n 取极限, 可得 $x^2+x-\alpha=0$. 解得

$$x = \frac{-1+\sqrt{1+4\alpha}}{2} \quad 或 \quad x = \frac{-1-\sqrt{1+4\alpha}}{2},$$

由 $x_1, \alpha > 0$ 可知 $x_n > 0$, 那么可知, 如果 $\{x_n\}$ 极限存在, 则一定为 $x = (-1+\sqrt{1+4\alpha})/2$, 下面讨论 $\{x_n\}$ 的极限存在性.

下面研究 x_n 的分布情况. 若 $x_n < x$, 则

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1+x_n} > \frac{\alpha}{1+x} = x.$$

而若 $x_n > x$, 则

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1+x_n} < \frac{\alpha}{1+x} = x.$$

这说明 x_n 的值在 x 左右来回跳动, 不妨设 $x_1 > x$, $x_1 < x$ 的情况同理. 那么就有 $\{x_{2n+1}\} > x$, $\{x_{2n}\} < x$, 并且, 若 $\{x_{2n+1}\}$, $\{x_{2n}\}$ 收敛于 x, 则 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 那么可以猜想 $\{x_{2n}\}$ 单调递增, $\{x_{2n+1}\}$ 单调递减, 下面考察 $x_{n+2}-x_n$ 的符号:

$$x_{n+2}-x_n = \frac{\alpha}{1+x_{n+1}} - x_n = \frac{\alpha}{1+\alpha(1+x_n)^{-1}} - x_n = \frac{\alpha - x_n^2 - x_n}{1+\alpha+x_n} \begin{cases} >0 & x_n < x \\ <0 & x_n > x \end{cases},$$

这说明 $\{x_{2n}\}$ 单调递增有上界, $\{x_{2n+1}\}$ 单调递减有下界, 那么就可以说明

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = x$$

于是 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.