

1. 设 Γ 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和平面 $x + y + z = 0$ 交成的圆周, 从第一卦限内看 Γ , 它的方向是逆时针. 计算第二型曲线积分

$$\int_{\Gamma} z \, dx + x \, dy + y \, dz.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 证明 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上不一致连续.

3. 设 $\{a_n\}$ 为非负递减的数列, 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

4. 设 $a, b > 0, f \in C[0, +\infty)$, 证明:

(1) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$ 存在, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}.$$

(2) 如果无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)/x \, dx$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

(3) 如果 $f(+\infty)$ 存在, 且积分 $\int_0^1 f(x)/x \, dx$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, dx = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}.$$

5. 计算积分

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) \, dx, \quad |r| < 1.$$

6. 设 $p > 0$, 讨论积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^p} \, dx$$

的敛散性.

7. 求积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x)/x \, dx$.

8. 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

9. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin(t) \, dt, \quad \alpha > 0$$

关于 u 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

10. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin(t) \, du, \quad \alpha > 0$$

关于 t 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

11. 计算积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \, dx$.

12. 计算积分 $\int_0^{+\infty} \exp(-ax^2) \cos(bx) \, dx$, 其中 $a > 0, b \in \mathbb{R}$.

13. 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha(x) dx$, 其中 $|\alpha| < 1$.
14. 设 \mathbb{K} 是数域, $A \in M_m(\mathbb{K})$, $B \in M_n(\mathbb{K})$, 且 A, B 没有相同的特征值, 证明矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解.
15. 设 A 是 4 阶方阵, 满足 $\text{tr}(A^i) = i (i = 1, 2, 3, 4)$, 求 $|A|$.
16. n 阶方阵可对角化的充分必要条件.
17. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积, 在 $x = 1$ 处左连续, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 x^n f(x) dx}{\int_0^1 x^n dx} = f(1).$$

18. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2 = AA'$, 证明 A 为实对称阵.
19. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2 = A$, $B^2 = B$ 以及 $(A+B)^2 = A+B$, 证明 $AB = BA = 0$.
20. 设 A, B 都是 n 阶矩阵, 若 $A^k = 0$, 且 $AB + BA = B$, 证明 $B = 0$.
21. A, B 是 n 阶方阵, $A+B = AB$, 求证
- (1) $AB = BA$,
 - (2) $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$,
 - (3) A 可对角化当且仅当 B 可对角化.
22. 设 $f(x), g(x)$ 为多项式, 且 $(f(x), g(x)) = 1$, A 是 n 阶方阵, 求证: $f(A)g(A) = 0$ 的充分必要条件为 $\text{rank}(f(A)) + \text{rank}(g(A)) = n$.
23. 设 A, B 为实对称阵, 求证:
- (1) 若 A 正定, 则存在实可逆阵 P 使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 同时为对角阵;
 - (2) 若 A, B 半正定, 则 $\text{tr}(AB) \geq 0$, 并且等号成立当且仅当 $AB = 0$.
24. $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, 并且 $A = B + C$, 其中 B 为对称阵, C 为反对称阵, 证明: 若 $A^2 = 0$, 则 $A = 0$.
25. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.
26. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi),$$

27. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明对每个 $x \in (a, b)$, 都存在对应的 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

28. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上三阶可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi).$$

29. $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 非负连续, 单调递减, 求证 $\{a_n\}$ 极限存在, 其中

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_0^n f(x) dx.$$

30. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\pi/4 - x_n)$, 其中:

$$x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}.$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_k \leq n\left(\frac{\pi}{4} - x_n\right) \leq -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_k$$

31. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$, 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n}{p_n} = 0.$$

32. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n! a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = 0.$$

33. 面积原理

(1) 设 $x \geq m \in \mathbb{N}^*$, f 是一个非负的递增函数, 则当 $\xi \geq m$ 时有

$$\left| \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx \right| \leq f(\xi).$$

(2) 设 $x \geq m \in \mathbb{N}^*$, f 是一个非负的递减函数, 则极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx \right) = \alpha$$

存在, 且 $0 \leq \alpha \leq f(m)$. 更进一步, 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 那么

$$\left| \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx - \alpha \right| \leq f(\xi - 1),$$

这里 $\xi \geq m + 1$.

34. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二次可微, 且 $f(a)f(b) < 0$, 对任意 $x \in [a, b]$ 都有 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$. 证明序列 $\{x_n\}$ 极限存在, 其中 $x_1 \in [a, b]$, $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$), 进而可以证明此极限为方程 $f(x) = 0$ 的根.

35. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{y_n\}$: $y_1 = 1$, $2y_{n+1} = y_n + \sqrt{y_n^2 + a_n}$ ($n = 1, 2, \dots$). 证明 $\{y_n\}$ 是单调递增的收敛数列.

36. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: 当 $n < m$ 时, $|x_n - x_m| > 1/n$. 证明数列 $\{x_n\}$ 无界.

37. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$.

38. n 阶方阵的每行之和与每列之和均为 0, 证明其所有代数余子式全相等.

39. 设函数 $f(x)$ 定义在 $(a, +\infty)$, 且 $f(x)$ 在每个有限区间 (a, b) 内都有界, 并满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = A.$$

证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)/x) = A$.

40. 证明: (1) 关于 x 的方程 $\sum_{k=1}^n e^{kx} = n+1$ 在 $(0, 1)$ 上存在唯一的实根 a_n ; (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

41. 设 $a > 0$, 求积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\pi/2}} \frac{1}{1 + \tan^a y^2} dy$$

42. α, β 是 n 维列向量, A 是 n 阶方阵, 求证: $|A + \alpha\beta'| = |A| + \beta' A^* \alpha$.

43. 设 $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, 且

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

求证 $BA = 9I$.

44. $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^2 = A$, 若对任意列向量 x , 都有 $x' A' A x \leq x' x$, 证明 $A' = A$.

45. 证明对任意 $m \times n$ 矩阵 A , 都有 $\text{rank}(AA') = \text{rank}(A)$.