

# 1 题目

其中标红加星的题, 如 “\*3.”, 为较重要的题, 可以简化一些其他的证明. 不标红只加星的题, 如 “\*3.”, 为折磨题, 记一下结论就好了. 题目序号后蓝色的 [提示] [答案] 均可以点击, 点击提示或答案前的蓝色序号 3. 也可以跳转回题目.

1. [提示] [答案] 设  $\Gamma$  是由球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  和平面  $x + y + z = 0$  交成的圆周, 从第一卦限内看  $\Gamma$ , 它的方向是逆时针. 计算第二型曲线积分

$$\int_{\Gamma} z dx + x dy + y dz.$$

2. [提示] [答案] 设  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上可导, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ , 证明  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上不一致连续.

3. [提示] [答案] 设  $\{a_n\}$  为非负递减的数列, 如果级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  收敛, 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ .

4. [提示] [答案] (Frullani 积分) 设  $a, b > 0, f \in C[0, +\infty)$ , 证明:

- (1) 如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$  存在, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}.$$

- (2) 如果无穷积分  $\int_1^{+\infty} f(x)/x dx$  收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

- (3) 如果  $f(+\infty)$  存在, 且积分  $\int_0^1 f(x)/x dx$  收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}.$$

5. [提示] [答案] 计算积分

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx.$$

6. [提示] [答案] 设  $p > 0$ , 讨论积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^p} dx$$

的敛散性.

7. [提示] [答案] 求积分  $\int_0^{+\infty} \sin(x)/x dx$ .

8. [提示] [答案] 设  $f(x) \in C[0, 1]$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

9. [提示] [答案] 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin(t) dt, \quad \alpha > 0$$

关于  $u$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

10. [提示][答案] 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin(t) \, du, \quad \alpha > 0$$

关于  $t$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

- \*11. [提示][答案] 计算 Fresnel 积分  $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \, dx$ .

12. [提示][答案] 计算积分  $\int_0^{+\infty} \exp(-ax^2) \cos(bx) \, dx$ , 其中  $a > 0, b \in \mathbb{R}$ .

13. [提示][答案] 计算积分  $\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha(x) \, dx$ , 其中  $|\alpha| < 1$ .

- \*14. [提示][答案] 设  $\mathbb{K}$  是数域,  $A \in M_m(\mathbb{K}), B \in M_n(\mathbb{K})$ , 且  $A, B$  没有相同的特征值, 证明矩阵方程  $AX = XB$  只有零解.

15. [提示][答案] 如 14 题, 可以进一步证明逆命题也成立, 即: 如果  $AX = XB$  只有零解, 则  $A, B$  无公共特征值.

16. [提示][答案] 设  $A$  是 4 阶方阵, 满足  $\operatorname{tr}(A^i) = i (i = 1, 2, 3, 4)$ , 求  $|A|$ .

17. [提示][答案]  $n$  阶方阵可对角化的充分必要条件.

18. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可积, 在  $x = 1$  处左连续, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 x^n f(x) \, dx}{\int_0^1 x^n \, dx} = f(1).$$

19. [提示][答案] 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , 若  $A^2 = AA'$ , 证明  $A$  为实对称阵.

20. [提示][答案] 设  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , 若  $A^2 = A, B^2 = B$  以及  $(A+B)^2 = A+B$ , 证明  $AB = BA = 0$ .

21. [提示][答案] 设  $A, B$  都是  $n$  阶矩阵, 若  $A^k = 0$ , 且  $AB + BA = B$ , 证明  $B = 0$ .

22. [提示][答案]  $A, B$  是  $n$  阶方阵,  $A + B = AB$ , 求证

(1)  $AB = BA$ ,

(2)  $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$ ,

(3)  $A$  可对角化当且仅当  $B$  可对角化.

23. [提示][答案] 设  $f(x), g(x)$  为多项式, 且  $(f(x), g(x)) = 1$ ,  $A$  是  $n$  阶方阵, 求证:  $f(A)g(A) = 0$  的充分必要条件为  $\operatorname{rank}(f(A)) + \operatorname{rank}(g(A)) = n$ .

24. [提示][答案] 设  $A, B$  为实对称阵, 求证:

(1) 若  $A$  正定, 则存在实可逆阵  $P$  使得  $P'AP$  和  $P'BP$  同时为对角阵;

(2) 若  $A, B$  半正定, 则  $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$ , 并且等号成立当且仅当  $AB = 0$ .

25. [提示][答案]  $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ , 并且  $A = B + C$ , 其中  $B$  为对称阵,  $C$  为反对称阵, 证明: 若  $A^2 = 0$ , 则  $A = 0$ .

26. [提示][答案] 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$ .

27. [提示][答案]  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi),$$

28. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 证明对每个  $x \in (a, b)$ , 都存在对应的  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

29. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上三阶可导, 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi).$$

30. [提示][答案] 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\pi/4 - x_n)$ , 其中:

$$x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}.$$

31. [提示][答案] 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$ , 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n}{p_n} = 0.$$

32. [提示][答案] 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n! a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = 0.$$

33. [提示][答案] 面积原理

- (1) 设  $f$  是一个非负的递增函数, 则当  $\xi \geq m$  时有

$$\left| \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx \right| \leq f(\xi).$$

- (2) 设  $f$  是一个非负的递减函数, 则极限

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx \right) = \alpha$$

存在, 且  $0 \leq \alpha \leq f(m)$ . 更进一步, 如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 那么

$$\left| \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx - \alpha \right| \leq f(\xi - 1),$$

这里  $\xi \geq m + 1$ .

34. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二次可微, 且  $f(a)f(b) < 0$ , 对任意  $x \in [a, b]$  都有  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$ . 证明序列  $\{x_n\}$  极限存在, 其中  $x_1 \in [a, b]$ ,  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 进而可以证明此极限为方程  $f(x) = 0$  的根.

35. [提示][答案] 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 数列  $\{y_n\}$ :  $y_1 = 1$ ,  $2y_{n+1} = y_n + \sqrt{y_n^2 + a_n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). 证明  $\{y_n\}$  是单调递增的收敛数列.

36. [提示][答案] 设数列  $\{x_n\}$  满足: 当  $n < m$  时,  $|x_n - x_m| > 1/n$ . 证明数列  $\{x_n\}$  无界.

37. [提示][答案] 设  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\xi) = f(\xi)$ .

38. [提示][答案]  $n$  阶方阵的每行之和与每列之和均为 0, 证明其所有代数余子式全相等.

39. [提示][答案] 设函数  $f(x)$  定义在  $(a, +\infty)$ , 且  $f(x)$  在每个有限区间  $(a, b)$  内都有界, 并满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = A.$$

证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)/x) = A$ .

40. [提示][答案] 证明:

(1) 关于  $x$  的方程  $\sum_{k=1}^n e^{kx} = n+1$  在  $(0, 1)$  上存在唯一的实根  $a_n$ ;

(2) 数列  $\{a_n\}$  收敛, 并求其极限.

41. [提示][答案] 设  $a > 0$ , 求积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\pi/2}} \frac{1}{1 + \tan^a y^2} dy$$

42. [提示][答案] 设  $\alpha, \beta$  是  $n$  维列向量,  $A$  是  $n$  阶方阵, 求证:  $|A + \alpha\beta'| = |A| + \beta' A^* \alpha$ .

43. [提示][答案] 设  $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ , 且

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

求证  $BA = 9I$ .

44. [提示][答案]  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $A^2 = A$ , 若对任意列向量  $x$ , 都有  $x' A' A x \leq x' x$ , 证明  $A' = A$ .

45. [提示][答案] 证明对任意  $m \times n$  矩阵  $A$ , 都有  $\text{rank}(AA') = \text{rank}(A)$ .

46. [提示][答案]  $f(x) \in C[a, b]$ , 证明函数  $m(x) = \min_{a \leq \xi \leq x} f(\xi)$  在  $[a, b]$  连续.

47. [提示][答案]  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上二阶可导, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在,  $f''(x)$  有界, 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

48. [提示][答案]  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上三阶连续可导, 且对任意的  $h > 0$ , 有

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

求证:  $f(x)$  为次数至多为 2 的多项式.

49. [提示][答案] 设  $A' = A$ , 证明  $A$  可逆当且仅当存在矩阵  $B$  使得  $AB + B'A$  正定.

50. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可微,  $f(a) = 0$ , 并且存在实数  $A > 0$ , 使得对任意  $x \in [a, b]$ , 都有  $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ , 证明在  $[a, b]$  上,  $f(x) \equiv 0$ .

51. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上一阶连续可导, 且

$$f'(x) = \frac{1}{1 + f^2(x)} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right)$$

证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在.

52. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续, 若对于任意  $x \in \mathbb{R}$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x+n) = 0$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

53. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续, 且对任意  $\delta > 0$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n\delta) = 0$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

54. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上一致连续, 则存在正实数  $a, b$ , 使得  $|f(x)| \leq a|x| + b$ .

55. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上一致连续, 证明  $|f(x)/x|$  在  $[1, +\infty)$  有界.

56. [提示][答案] 证明欧式空间中两标准正交基的过渡矩阵为正交阵.

57. [提示][答案] 设  $\alpha$  是欧式空间  $V$  中的一个非零向量,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  是  $V$  中的  $p$  个向量, 满足

$$(a_i, a_j) \leq 0, (\alpha_i, \alpha) > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, p, i \neq j$$

证明

(1)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  线性无关;

(2)  $n$  维欧式空间中最多有  $n+1$  个向量, 使其两两互成钝角;

(3)  $n$  维欧式空间中一定存在  $n+1$  个向量, 使其两两互为钝角.

58. [提示][答案] 设  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ , 且  $AB = BA$ , 利用线性方程组的知识证明

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \text{rank}(AB)$$

59. [提示][答案] 设  $B \in M_{n \times 2}(\mathbb{C})$ ,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

若  $A = BC$ , 且  $CB$  的特征多项式为  $x^2 - 2x + 1$ , 求  $A$  的特征值, 并求  $AX = 0$  的基础解系.

60. [提示][答案] 计算  $n$  阶  $b$ -循环行列式:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ ba_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ ba_{n-1} & ba_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ba_2 & ba_3 & ba_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

\*61. [提示][答案] 设  $A$  是  $n$  阶实反对称阵,  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  是同阶的对角阵, 且  $d_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 求证  $|A+D| > 0$ , 特别地,  $I_n + A$  与  $I_n - A$  都是非异阵.

62. [提示][答案] 如果  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  适合条件:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则称  $A$  为**严格对角占优阵**, 求证, 严格对角占优阵必是满秩阵, 若上述条件改为:

$$a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

求证  $|A| > 0$ .

63. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有定义, 对  $[a, b]$  上任意一个闭区间  $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ , 对介于  $f(x_1)$  与  $f(x_2)$  之间的任一常数  $l$ , 方程

$$f(x) = l$$

在  $[x_1, x_2]$  上有且仅有有限个解, 证明  $f(x) \in C[a, b]$ .

64. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上可导, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = A$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 其中  $A \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ .

65. [提示][答案] 已知  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , 且  $\text{tr}(A) = 0$ , 证明

(1) 存在数域  $\mathbb{K}$  上的可逆阵  $C$ , 使得  $C^{-1}AC$  为主对角元全为 0 的矩阵.

(2) 存在  $X, Y \in M_n(\mathbb{K})$ , 使得  $XY - YX = A$ .

(3) 令  $U$  为  $M_n(\mathbb{K})$  中所有形如  $XY - YX$  的矩阵组成的集合, 证明  $U$  是  $M_n(\mathbb{K})$  的一个线性子空间.

66. [提示][答案] 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)^n$$

67. [提示][答案] 设  $\varphi$  为  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换,  $W$  是  $\varphi$  的不变子空间, 且  $V = \text{Im } \varphi \oplus W$ , 证明

$$V = \text{Im } \varphi \oplus \text{Ker } \varphi.$$

68. [提示][答案] 设  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ , 且  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 1$ ,  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ , 证明  $A$  相似于  $B$ .

69. [提示][答案] 设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 求证: 必存在正整数  $m$ , 使得

$$\text{Im } \varphi^m = \text{Im } \varphi^{m+1}, \quad \text{Ker } \varphi^m = \text{Ker } \varphi^{m+1}, \quad V = \text{Im } \varphi^m \oplus \text{Ker } \varphi^{m+1}.$$

70. [提示][答案] 使用 Jordan 标准型证明迹非 0 的秩 1 矩阵可对角化.

71. [提示][答案] 设  $A$  是  $n$  阶实对称阵, 证明:  $A$  可逆的充分必要条件为存在矩阵  $B$ , 使得  $AB + B'A$  正定.

72. [提示][答案] 设  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ , 其中  $A$  是幂零阵, 且  $AB = BA$ , 求证:  $|B| = |A + B|$ .

73. [提示][答案] 设函数  $f$  在  $x = 0$  连续, 并且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A,$$

求证:  $f'(0)$  存在, 且  $f'(0) = A$ .

74. [提示][答案] 设  $x_n$  是  $\tan x = x$  在  $(n\pi, n\pi + \pi/2)$  上的解,

(1) 求证  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\pi + \pi/2 - x_n) = 0$ ,

(2) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(n\pi + \pi/2 - x_n)$ .

75. [提示][答案] 设  $f$  在  $[0, +\infty)$  上可微, 且  $f(0) = 0$ , 并假设有实数  $A$  使得  $|f'(x)| \leq A|f(x)|$  对  $x \in (0, +\infty)$  恒成立, 证明  $f(x) \equiv 0$  ( $x \in (0, +\infty)$ ).

76. [提示][答案] 设偶函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处二阶可导, 且  $f(0) = 1$ , 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (f(1/n) - 1)$  绝对收敛.

77. [提示][答案] 设  $f$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $f'$  在  $[a, b]$  上可积,  $f(a) = 0$ , 证明:

$$2 \int_a^b (f(x))^2 dx \leq (b-a)^2 \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

78. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可微, 且存在实数  $A > 0$ , 使得  $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ , 证明  $f(x) \equiv 0$  对  $x \in [0, +\infty)$  均成立.

79. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有连续的二阶导数,  $f(0) = f(1) = 0$ , 且对任意的  $x \in (0, 1)$ , 都有  $f(x) \neq 0$ , 证明

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4$$

80. [提示][答案] 设  $f(x) \in C^2[a, b]$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

81. [提示][答案] 设  $x_1, x_2, x_3$  是多项式  $f(x) = x^3 + ax + 1$  的三个根, 求一个首一多项式以  $x_1^2, x_2^2, x_3^2$  为根.

82. [提示][答案] 设  $f(x)$  在有限区间  $(a, b)$  内可微, 且  $f'(x)$  在  $(a, b)$  内有界, 证明  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有界.

83. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且对任意  $x_1, x_2 \in [a, b], \lambda \in (0, 1)$ , 恒有  $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ . 证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

84. [提示][答案] 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 且满足下列条件之一, 则有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

(1)  $f''(x)$  在  $(0, +\infty)$  有界;

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在.

85. [提示][答案] 广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 加上下面任一条件即可推出  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ :

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在,

(2)  $\int_a^{+\infty} f'(x) dx$  收敛,

(3)  $f(x)$  单调, 这时有更强的结果:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$ ,

(4)  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续,

(5)  $f'(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有界.

86. [提示][答案] 设  $A$  是三阶正交矩阵, 且  $|A| = 1$ , 证明存在正交阵  $B$ , 使得  $A = B^2$ .

87. [提示][答案] 设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有定义, 且在任何有限闭区间上可积, 证明: 对任何闭区间  $[a, b]$ , 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

88. [提示][答案] 设数列  $\{x_n\}$  满足  $\{2x_{n+1} + x_n\}$  收敛, 证明数列  $\{x_n\}$  收敛.

89. [提示][答案] (**Young 不等式**) 设  $y = f(x)$  是区间  $[0, +\infty)$  上严格递增的连续函数, 且满足  $f(0) = 0$ , 证明对任意的  $a, b > 0$ , 有

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy.$$

90. [提示][答案] 设  $f, g \in C[a, b]$ ,  $g$  在  $[a, b]$  上不变号, 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

91. [提示][答案] 设  $A$  为 3 阶非零实矩阵,  $A^T = A^*$ , 且  $|I + A| = |I - A| = 0$ , 计算行列式  $|A^2 - A - 3I|$ .

92. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调,  $g(x)$  是  $\mathbb{R}$  上以  $T > 0$  为周期的连续函数, 且  $\int_0^T g(x) dx = 0$ , 求

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(\lambda x) dx$$

\*93. [提示][答案] 设  $f(x)$  是实多项式, 且对任意实数  $r$ , 都有  $f(r) \geq 0$ . 证明存在实多项式  $g(x), h(x)$  使得  $f(x) = g^2(x) + h^2(x)$ , 更进一步可以要求  $\deg g(x) > \deg h(x)$ .

94. [提示][答案] 设  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 且适合条件:

$$\varphi_i^2 = \varphi_i, \quad \varphi_i \varphi_j = 0 \ (i \neq j), \quad \bigcap_{i=1}^m \text{Ker } \varphi_i = 0,$$

求证:  $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \varphi_i$ .

95. [提示][答案] 设  $f$  在  $(0, 1]$  上可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} f'(x) = A \in \mathbb{R}$ , 证明  $f$  在  $(0, 1]$  上一致连续.

96. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  可积,  $f(1) = 0, f'(1) = a$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n^2 x^n f(x) dx = -a.$$

97. [提示][答案] 设  $f(x), g(x)$  是次数不小于 1 的互素多项式, 求证, 必唯一地存在两个多项式  $u(x), v(x)$  使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1,$$

且  $\deg v(x) < \deg f(x), \deg u(x) < \deg g(x)$ .

98. [提示][答案] 设  $f(x)$  是次数大于 0 的首一整系数多项式, 若  $f(0), f(1)$  都是奇数, 求证  $f(x)$  没有有理根.

99. [提示][答案] 设  $f(x)$  是次数大于 1 的奇数次有理系数多项式, 且它在有理数域上不可约, 求证: 若  $x_1, x_2$  是  $f(x)$  在复数域上的两个不同的根, 则  $x_1 + x_2$  必不是有理数.

100. [提示][答案] 设  $A$  是实矩阵, 又  $I_n - A$  的特征值的模长都小于 1, 求证:  $0 < |A| < 2^n$ .

101. [提示][答案] 设

$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) = \left\{ a_0 + a_1 \sqrt[n]{2} + a_2 \sqrt[n]{4} + \dots + a_{n-1} \sqrt[n]{2^{n-1}} : a_i \in \mathbb{Q}, 0 \leq i \leq n-1 \right\}$$

证明  $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$  是一个数域, 并求  $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$  作为  $\mathbb{Q}$  上线性空间的一组基.

102. [提示][答案] 设  $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  是数域  $\mathbb{K}$  上的不可约多项式,  $\varphi$  是  $\mathbb{K}$  上的  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换,  $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 是  $V$  中的向量, 满足

$$\varphi(\alpha_i) = \alpha_{i+1} \ (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad \varphi(\alpha_n) = -a_n \alpha_1 - a_{n-1} \alpha_2 - \dots - a_1 \alpha_n.$$

证明  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  是  $V$  的一组基.

103. [提示][答案] 设  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , 存在可逆复矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$ , 证明存在可逆实矩阵  $Q$  使得  $Q^{-1}AQ = B$ .

104. [提示][答案] 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 满足  $\text{rank}(ABA) = \text{rank}(A)$ , 求证:  $AB$  与  $BA$  相似.

105. [提示][答案] 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 则  $AB$  与  $BA$  相似的充要条件是  $\text{rank}((AB)^i) = \text{rank}((BA)^i) \ (1 \leq i \leq n-1)$ .



106. [提示][答案] 设  $f$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 又  $\varphi(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$  单调递减, 证明  $f(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$ .

107. [提示][答案] 计算积分

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

108. [提示][答案] 讨论广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$$

在何时绝对收敛或条件收敛.

109. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一阶连续可导, 且  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x)$  单调递减趋于 0, 证明无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛当且仅当  $\int_a^{+\infty} x f'(x) dx$  收敛.

110. [提示][答案] 设  $\{a_n\}$  是正数列,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = A < +\infty$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 1$ , 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 1.$$

111. [提示][答案] 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_{n+k}}{n+k}$ .

112. [提示][答案] 设  $f(x) \in C[1, +\infty)$ , 对任意  $x \in [1, +\infty)$ , 有  $f(x) > 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x))/\ln(x) = -\lambda$ , 证明:  $\lambda > 1$  时  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  收敛.<sup>1</sup>

113. [提示][答案] 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调, 并且积分  $\int_0^1 f(x) dx$  收敛, 证明:

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

并且举反例说明“去掉单调条件, 结论则不成立.”

114. [提示][答案] 设  $V$  是  $n$  维线性空间, 对于整数  $k \geq n$ , 证明存在一组向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in V$ , 使得其中任意  $n$  个线性无关.

115. [提示][答案] 设  $\{a_n\}$  是递减正数列, 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  同时敛散.

116. [提示][答案] 设对任意  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n > 0$ , 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$  收敛, 证明下述级数收敛 (利用绝对收敛函数重排不改变敛散性与级数值):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

117. [提示][答案] 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{n}]} / n^p$  的敛散性.

118. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上二次连续可微, 且有  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = 0$ , 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)$  绝对收敛.

119. [提示][答案] 已知  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$  绝对收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

120. [提示][答案] 设  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ , 若  $AB = BA$ , 则  $A, B$  至少有一个公共的特征向量.

<sup>1</sup> 数列形式下的该判别法称为对数判别法

121. [提示][答案] 设  $\varphi$  是  $n$  维复线性空间  $V$  上的线性变换, 求证  $\varphi$  可对角化的充要条件是对  $\varphi$  的任一特征值  $\lambda_0$ , 总有  $\text{Ker}(\varphi - \lambda_0 I) \cap \text{Im}(\varphi - \lambda_0 I) = 0$ .

\*122. [提示][答案] 设在数域  $\mathbb{K}$  上, 一元多项式  $f(x) = f_1 f_2$ , 且  $(f_1, f_2) = 1$ ,  $V$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  维线性空间,  $\varphi$  是  $V$  上的线性变换, 证明  $\text{Ker } f(\varphi) = \text{Ker } f_1(\varphi) \oplus \text{Ker } f_2(\varphi)$ .

123. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上可微, 且对任意  $x \in [a, +\infty)$ , 都有

$$f(x+1) - f(x) = f'(x)$$

若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = c$ , 证明  $f'(x) = c$  在  $[a, +\infty)$  上恒成立.

124. [提示][答案] 设  $a_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ , 对于  $\alpha, \beta > 0$ , 且  $\alpha + \beta > 1$ , 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha / n^\beta < +\infty$ .

125. [提示][答案] 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , 对任意  $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ , 都有  $x'Ax > 0$ , 利用 61 题证明  $|A| > 0$ .

126. [提示][答案] 设有  $n$  阶分块对角阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix}$$

其中  $A_i$  与  $B_i$  为同阶方阵, 假定矩阵  $A_i$  适合非零多项式  $g_i(x)$ , 且  $g_i(x) (i = 1, \dots, k)$  两两互素. 求证: 若对于每个  $i$ , 存在多项式  $f_i(x)$ , 使  $B_i = f_i(A_i)$ , 则必存在次数不超过  $n-1$  的多项式  $f(x)$ , 使得  $B = f(A)$ .

127. [提示][答案] 设  $n$  阶方阵  $A$  的秩为  $n-1$ ,  $B$  是同阶非零阵, 且有  $AB = BA = 0$ , 证明: 存在不超过  $n-1$  阶的多项式  $f(x)$ , 使得  $B = f(A)$ .

\*128. [提示][答案] 设  $V$  为数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  维线性空间,  $\varphi$  是  $V$  上的线性变换, 其特征多项式与极小多项式分别设为  $f(\lambda)$  与  $m(\lambda)$ , 设

$$f(\lambda) = P_1(\lambda)^{r_1} P_2(\lambda)^{r_2} \dots P_t(\lambda)^{r_t}, \quad m(\lambda) = P_1(\lambda)^{s_1} P_2(\lambda)^{s_2} \dots P_t(\lambda)^{s_t}$$

分别为  $f(\lambda)$  与  $m(\lambda)$  的不可约分解, 其中  $P_i(\lambda)$  为  $\mathbb{K}$  上互异的首一不可约多项式,  $r_i, s_i > 0 (i = 1, 2, \dots, t)$ . 设  $V_i = \text{Ker } P_i(\varphi)^{r_i}$ ,  $U_i = \text{Ker } P_i(\varphi)^{s_i} (i = 1, 2, \dots, t)$ . 求证:

(1)  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_t$ ,  $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_t$ , 且  $U_i = V_i (i = 1, 2, \dots, t)$ ;

(2)  $\varphi|_{V_i}$  的特征多项式为  $P_i(\lambda)^{r_i}$ , 极小多项式为  $P_i(\lambda)^{s_i}$ . 特别地,  $\dim V_i = r_i \deg P_i(\lambda)$ .

129. [提示][答案] 证明任一  $n$  阶复矩阵  $A$  都相似于一个复对称阵.

130. [提示][答案] 设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵, 求证:  $A$  为半正定阵或半负定阵的充要条件是对任意满足  $\alpha' A \alpha = 0$  的  $n$  维实向量  $\alpha$ , 都有  $A \alpha = 0$ .

131. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $(a, b)$  上可导, 且  $f(a) = f(b)$ , 若  $|f'(x)| \leq 1$ , 证明对任意的  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , 都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{(b-a)}{2}.$$

132. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(1) = 0$ , 证明  $\{f(x)x^n\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛.

133. [提示][答案] 设  $p(x), q(x), r(x)$  是数域  $\mathbb{K}$  上的正次数多项式, 且  $p(x)$  与  $q(x)$  互素,  $\deg r(x) < \deg p(x) + \deg q(x)$ , 证明存在数域  $\mathbb{K}$  上的多项式  $u(x), v(x)$ , 满足  $\deg u(x) < \deg p(x)$ ,  $\deg v(x) < \deg q(x)$ , 使得  $r(x) = p(x)v(x) + q(x)u(x)$ .

134. [提示][答案] (**Dini 定理**) 设函数列  $\{f_n(x)\}$  在有限闭区间  $[a, b]$  上连续. 如果对每一个  $x \in [a, b]$ , 数列  $\{f_n(x)\}$  关于  $n$  递减趋于 0. 那么  $f_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛于 0.
135. [提示][答案] 对任意  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x)$  在  $[a, b]$  上关于  $x$  单调递增, 且  $\{f_n(x)\}$  收敛于连续函数  $f(x)$ . 证明:  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f(x)$ .
136. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 记

$$A_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) - \int_a^b f(x) dx,$$

证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} nA_n = (b-a)(f(b) - f(a))/2$ .

137. [提示][答案] 设  $V$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  维线性空间,  $\sigma, \tau$  是  $V$  上的线性变换, 且  $\sigma^2 = \tau^2 = 0$ , 且  $\sigma\tau + \tau\sigma = I_V$ , 其中  $I_V$  是  $V$  上的恒等变换, 证明

(1)  $V = \text{Ker } \sigma \oplus \text{Ker } \tau$ ;

(2)  $V$  必是偶数维线性空间.

138. [提示][答案] 设函数  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $f(x)$  不恒为 0 并且满足  $0 \leq f(x) \leq M$ . 证明:

$$\left(\int_a^b f(x) \cos x dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \sin x dx\right)^2 + \frac{M^2(b-a)^4}{12} \geq \left(\int_a^b f(x) dx\right)^2.$$

139. [提示][答案] 计算极限  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln x \cos^2(\lambda x) dx$ .

- \*140. [提示][答案] 设  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ , 求证: 方程组  $Ax = 0$  与  $Bx = 0$  同解的充分必要条件是存在可逆阵  $P$ , 使得  $B = PA$ .

141. [提示][答案] 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & 0 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & x^{n-1} \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

142. [提示][答案] 设  $f(x)$  是定义在  $[0, 1]$  上的单调非增函数, 对于任意  $a \in (0, 1)$ , 证明:  $\int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^1 f(x) dx$ .

143. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上 Riemann 可积, 且有  $0 < m \leq f(x) \leq M$ . 证明:

$$1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(M+m)^2}{4mM}.$$

144. [提示][答案] 设开集  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , 如果  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  在  $(x_0, y_0)$  的某个邻域上存在, 且  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  在  $(x_0, y_0)$  处连续, 那么  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  在  $(x_0, y_0)$  处存在, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

145. [提示][答案] 设  $D \subset \mathbb{R}^2$  是一个凸区域,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  有连续的一阶偏导数, 则  $f$  在  $D$  内为凸函数的充必要条件为对任意  $x, y \in D$ , 有  $f(y) \geq f(x) + (y - x) \cdot \nabla f(x)$ .

146. [提示][答案] 设  $\mathcal{A}$  为数域  $\mathbb{K}$  上的  $n (n \geq 3)$  维线性空间  $V$  上的线性变换,  $\mathcal{A}$  的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

试证明:

$$a_{n-2} = \frac{1}{2}(\text{tr}^2(\mathcal{A}) - \text{tr}(\mathcal{A}^2)).$$

147. [提示][答案] 设  $a \neq 0$ , 计算积分:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}.$$

148. [提示][答案] 设  $A$  是  $n$  阶实正定阵,  $x \in \mathbb{R}^n$  是非零列向量, 求证:

(1)  $A + xx'$  可逆.

(2)  $0 < x'(A + xx')^{-1}x < 1$ .

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为  $A^{-1}B$  的全体特征值.

149. [提示][答案] 设  $A$  是  $n$  阶半正定的实对称阵,  $S$  为  $n$  阶实反对称阵, 满足  $AS + SA = 0$ , 证明  $|A + S| > 0$  的充分必要条件为  $\text{rank}(A) + \text{rank}(S) = n$ .

150. [提示][答案] 设  $A, B$  为  $n$  阶正定实对称阵, 若  $A - B$  半正定, 证明  $B^{-1} - A^{-1}$  为半正定阵.

151. [提示][答案] 设  $A$  是  $n$  阶正定实对称阵,  $B$  是同阶半正定实对称阵, 求证  $|A + B| \geq |A| + |B|$ .

152. [提示][答案] 设  $V$  是  $n$  维西空间,  $\varphi$  是  $V$  上的线性变换, 求证:  $\varphi$  是正规算子的充分必要条件是  $\|\varphi(\alpha)\| = \|\varphi^*(\alpha)\|$  对任意  $\alpha \in V$  都成立.

\*153. [提示][答案] 设  $V$  是  $n$  维西空间,  $\varphi$  是  $V$  上的线性变换, 求证:  $\varphi$  是正规算子的充分必要条件是若  $v$  是  $\varphi$  属于特征值  $\lambda$  的特征向量, 则  $v$  也是  $\varphi^*$  属于特征值  $\bar{\lambda}$  的特征向量.

### 同时上三角化/对角化/标准型化

154. [提示][答案] 设  $n$  阶矩阵  $\{A_i : i = 1, 2, \dots, m\}$  两两可交换, 即  $A_i A_j = A_j A_i$  对一切  $i, j$  都成立, 假定每一个  $A_i$  均可对角化, 证明: 它们可同时对角化.

155. [提示][答案] 若  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ , 且  $AB = BA$ , 假定  $A, B$  的特征值都在  $\mathbb{K}$  中, 证明: 存在  $\mathbb{K}$  上的可逆阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  与  $P^{-1}BP$  都是上三角矩阵.

156. [提示][答案] 设  $A$  为  $n$  阶正定实对称阵,  $B$  为同阶对称阵, 则存在可逆阵  $C$  使得

$$C'AC = I_n, \quad C'BC = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $A^{-1}B$  的特征值.

157. [提示][答案] 设  $A, B$  都是  $n$  阶半正定实对称矩阵, 证明: 存在可逆阵  $C$ , 使得

$$C'AC = \text{diag}\{\underbrace{1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0\}, \quad C'BC = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\}$$

158. [提示][答案] 设  $A$  为  $n$  阶正定实对称阵,  $S$  为同阶实反对称阵, 则存在可逆矩阵  $C$ , 使得

$$C'AC = I_n, \quad C'SC = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & b_r \\ -b_r & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0 \right\}$$

159. [提示][答案] 设  $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$  是  $m$  个实对称 (复正规) 矩阵且两两可交换, 证明: 存在正交 (酉) 矩阵  $P$ , 使得  $P'A_iP$  ( $P^H A_i P$ ) 都是对角阵.

160. [提示][答案] 设  $A, B$  是两个  $n$  阶实正规矩阵, 且  $AB = BA$ , 证明: 存在正交矩阵  $P$ , 使得  $P'AP$  和  $P'BP$  同时为如下形状的分块对角矩阵:  $\text{diag} \{A_1, \dots, A_r, c_{2r+1}, \dots, c_n\}$ , 其中  $c_i$  是实数,  $A_i$  为形如  $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$  的二阶实矩阵.

161. [提示][答案] 设  $A, B$  是  $n$  阶实对称矩阵, 满足  $AB + BA = 0$ , 证明: 若  $A$  半正定, 则存在正交矩阵  $P$ , 使得:

$$P'AP = \text{diag} \{\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0\}, \quad P'BP = \text{diag} \{0, \dots, 0, \mu_{r+1}, \dots, \mu_n\}.$$

### 矩阵/线性算子分解

162. [提示][答案] 设  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , 则  $A$  可以分解为  $A = B + C$ , 其中  $B$  为 Hermite 阵,  $C$  为斜 Hermite 阵.

163. [提示][答案] 设  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , 则  $A$  可以分解成两个对角阵的乘积, 即  $A = BC$ , 且可以任意指定  $B$  或  $C$  为可逆阵.

164. [提示][答案] 设  $A$  是  $n$  阶 (半) 正定实对称阵, 则

- (1) 存在主对角线上元素全等于 1 的上三角矩阵  $B$ , 使得  $A = B'DB$ , 其中  $D$  是 (半) 正定对角矩阵;
- (2) (**Cholesky 分解**) 存在主对角线上元素全为正 (非负) 的上三角阵  $C$ , 使得  $A = C'C$ .

165. [提示][答案] (**QR 分解**) 设  $A$  是  $n$  阶实 (复) 矩阵, 则  $A$  可以分解为  $A = QR$ , 其中  $Q$  是正交 (酉) 矩阵,  $R$  是一个上三角阵, 且主对角线上的元素非负, 若  $A$  可逆, 则这样的分解唯一.

166. [提示][答案] (**极分解**) 设  $V$  是  $n$  维酉 (欧式) 空间,  $\varphi$  是  $V$  上的任一线性算子, 则存在  $V$  上的酉 (正交) 算子  $\omega$  以及  $V$  上的半正定自伴随算子  $\psi$ , 使得  $\varphi = \omega\psi$ , 其中  $\psi$  是唯一的, 并且若  $\varphi$  是非异线性算子, 则  $\omega$  也唯一.

167. [提示][答案] (**极分解**) 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , 则存在  $n$  阶正交阵  $Q$  以及  $n$  阶半正定对称阵  $S$ , 使得  $A = QS$ . 又设  $B \in M_n(\mathbb{C})$ , 则存在  $n$  阶酉矩阵  $U$ , 以及  $n$  阶半正定 Hermite 阵  $H$ , 使得  $B = UH$ , 上述分解式当  $A, B$  为非异阵的时候被唯一确定.

168. [提示][答案] (**谱分解**) 设  $V$  是  $n$  维欧式 (酉) 空间,  $\varphi$  为  $V$  上的自伴随 (正规) 算子.  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  为  $\varphi$  的全体不同特征值,  $W_i$  为属于  $\lambda_i$  的特征子空间, 则  $V$  是  $W_i (i = 1, 2, \dots, k)$  的正交直和. 这时若设  $E_i$  是  $V$  到  $W_i$  的正交投影, 则  $\varphi$  有如下分解式:

$$\varphi = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_k E_k.$$

169. [提示][答案] (**奇异值分解**) 设  $V, U$  分别为  $n, m$  维欧式 (酉) 空间,  $\varphi: V \rightarrow U$  是线性映射, 则存在  $V$  和  $U$  的标准正交基, 使  $\varphi$  在这两组基下的表示矩阵为  $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 其中  $S = \text{diag} \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  是  $\varphi$  的非零奇异值.

170. [提示][答案] (**奇异值分解**) 设  $A$  是  $m \times n$  的实 (复) 矩阵, 则存在  $m$  阶正交 (酉) 矩阵  $P$ ,  $n$  阶正交 (酉) 矩阵  $Q$ , 使得  $A = P \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ , 其中  $S = \text{diag} \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  是  $A$  的非零奇异值.

\*171. [提示][答案] (Jordan - Chevalley 分解) 设  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , 则  $A$  可以分解为  $A = B + C$ , 其中  $B, C$  符合以下条件:

- (1)  $B$  是一个相似可对角化矩阵;
- (2)  $C$  是一个幂零阵;
- (3)  $BC = CB$ ;
- (4)  $B, C$  均可以表示为  $A$  的多项式.

不仅如此, 上述满足 (1) - (3) 的分解是唯一的.

<sup>1</sup> $\varphi$  也可以做这样的分解:  $\varphi = \psi_1 \omega_1$  其中  $\omega_1$  为酉 (正交) 算子,  $\psi_1$  为半正定自伴随算子, 这样的分解也叫极分解, 下面矩阵版本的同理.

\*172. [提示][答案] 设  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶复矩阵,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是其特征值, 求证:  $A$  是正规矩阵的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \operatorname{tr}(A^H A) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2.$$

173. [提示][答案] 利用 167 题证明: 存在正交阵  $Q_1, Q_2$ , 使得  $Q_1 A Q_2 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , 并且  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$  是  $A' A$  的特征值.

174. [提示][答案] 利用  $\cos px$  在  $[-\pi, \pi]$  上的 Fourier 展开证明积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad (0 < p < 1).$$

175. [提示][答案] 判断含参变量反常积分  $\int_0^{+\infty} \sqrt{u} e^{-ux^2} dx$  对于  $u \in [0, +\infty)$  的一致收敛性.

176. [提示][答案] 计算积分

$$I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx$$

177. [提示][答案] 设  $f(x) \in C^1[a, b]$ , 记

$$A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

证明:

$$\int_a^b (f(x) - A)^2 dx \leq (b-a)^2 \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

178. [提示][答案] 计算积分  $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx$  ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ).

179. [提示][答案] 已知  $f(x) \in C[-1, 1]$ , 证明:

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \int_{-1}^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx = \pi f(0).$$

180. [提示][答案] 设  $A$  是  $n$  阶实对称阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \quad b_j \neq 0$$

证明:

(1)  $\text{rank}(A) \geq n-1$ ;

(2)  $A$  的特征值各不相同.

181. [提示][答案] 设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  是  $A \in M_n(\mathbb{C})$  的全体特征值, 若有  $\text{rank}(\lambda_i I - A) = \text{rank}(\lambda_i I - A)^2$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), 证明  $A$  可以相似对角化.

182. [提示][答案] 证明

$$\int_1^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\alpha^2}\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)^2\right) dx$$

在  $(0, 1)$  上一致收敛.

183. [提示][答案] 设  $f(x)$  为单调递减的正值函数, 证明  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  与  $\int_a^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$  同时敛散.

184. [提示][答案] 设  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  均是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 且  $\text{Ker } \mathcal{A} \subset \text{Ker } \mathcal{B}$ , 证明, 存在线性变换  $\mathcal{T}$ , 使得  $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{A}$ .

185. [提示][答案] 计算极限

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(rx) dx.$$

186. [提示][答案] 设数域  $\mathbb{K}$  上的全体矩阵  $M_n(\mathbb{K})$  上有线性变换  $\sigma(X) = AX - XA$ , 其中  $A \in M_n(\mathbb{K})$ :

(1) 若  $A$  为幂零阵, 证明  $\sigma$  为幂零变换;

(2) 若  $A$  有特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 证明  $\lambda_i - \lambda_j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) 为  $\sigma$  的特征值.

187. [提示][答案] 设  $f(x)$  是实系数多项式, 若有  $f(x) \mid f(x^2 + x + 1)$ , 证明  $2 \mid \deg f(x)$ .

188. [提示][答案] 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明:

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y f(x)f(y)f(z) dz = \frac{1}{6} \left( \int_0^1 f(t) dt \right)^3.$$

189. [提示][答案] 设  $A, B$  都是  $n$  阶正交阵, 证明  $|\det(A+B)| \leq 2^n$ .

190. [提示][答案] 设  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ , 若  $AB = BA = 0$ ,  $\text{rank}(A^2) = \text{rank}(A)$ , 证明

$$\text{rank}(A+B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

191. [提示][答案] 设  $V$  是  $n$  维内积空间,  $V_1, V_2, \dots, V_r$  是  $V$  的  $r$  个真子空间, 证明: 存在  $V$  的一组标准正交基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 使得对任意的  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r$  都有  $\alpha_i \notin V_j$ .

192. [提示][答案] 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续且有界, 证明对任意  $T > 0$ , 都存在一个数列  $\{x_n\}$ , 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n + T) - f(x_n)) = 0.$$

193. [提示][答案] (华师 2020) 计算级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n(2n+1)}}$ .

194. [提示][答案] (华师 2020) 计算

$$\oiint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz + \sqrt{z} dx dy$$

其中  $\Sigma$  为抛物面  $z = (x^2 + y^2)/2$  在平面  $x = 0$  与  $x = 2$  之间的部分, 方向取下侧.

195. [提示][答案] 计算第二型曲线积分

$$\oint_L \frac{4x - y}{4x^2 + y^2} dx + \frac{x - y}{4x^2 + y^2} dy$$

其中  $L$  为  $x^2 + y^2 = 2$  的圆周, 方向为逆时针.

196. [提示][答案] (浙大 2018) 设  $A$  为  $n$  阶非零实方阵, 且  $A^2 = A$ , 设  $\text{rank}(A) = r$ , 求证  $A$  正交相似于分块矩阵:  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 其中  $I_r$  为  $r$  阶单位阵,  $B$  为某一实矩阵.

197. [提示][答案] 求抛物面  $x^2 + y^2 + az = 4a^2$  将球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4az$  分成两部分的体积之比.

198. [提示][答案] 计算第一型曲面积分

$$I = \iint_S \frac{x^3 + y^3 + z^3}{1 - z} dS$$

其中  $S$  为  $x^2 + y^2 = (1 - z)^2$  ( $0 \leq z \leq 1$ ).

199. [提示][答案] 计算  $I = \iiint_{\Omega} x^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与  $z = x^2 + y^2$  围成的有界区域.

200. [提示][答案] 计算第二型曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x dy dz + (2 + y^3) dz dx + z^3 dx dy$$

其中  $\Sigma$  为  $x = \sqrt{1 - 2y^2 - 3z^2}$ , 方向取  $x$  轴正向.

201. [提示][答案] 计算积分  $I = \iint_S (x + z) d\sigma$ , 其中  $S$  是曲面  $x^2 + z^2 = 2az$  ( $a > 0$ ) 被曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  所截取的有限部分.

202. [提示][答案] 设  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  为对称阵, 若  $A$  正定, 证明  $AB$  的特征值全为实数.

203. [提示][答案] 设  $\varphi$  是实数域上  $n$  ( $n \geq 1$ ) 维线性空间  $V$  的一个线性变换, 证明  $\varphi$  至少有一个维数是 1 或 2 的不变子空间.

204. [提示][答案] 设  $A$  是  $n$  阶半正定实对称矩阵,  $B$  是  $n$  阶实矩阵, 若对于某个正整数  $k \geq 2$ , 有  $A^k B = B A^k$  成立, 证明  $AB = BA$ .

205. [提示][答案] 设函数  $f \in C(\mathbb{R})$ , 若有  $f(f(x)) = x$ , 证明存在  $\xi \in \mathbb{R}$  使得  $f(\xi) = \xi$ .

206. [提示][答案] 设  $f$  是有整系数多项式, 若  $f$  在有理数域上不可约, 证明  $f$  在复数域上没有重根.



207. [提示][答案] 计算

$$I = \oint_L (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz,$$

其中  $L$  是曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$  与  $x^2 + y^2 = 2x$  的交线的  $z \geq 0$  的部分, 曲线方向为从  $z$  轴上方向下看是顺时针方向.

208. [提示][答案] 计算曲线积分  $I = \int_L z^2 ds$ , 其中  $L$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  与  $x + y = 1$  的交线.

209. [提示][答案] 设矩阵  $A \in M_n(\mathbb{Q})$ , 其中  $n \geq 2$ , 设  $f(\lambda) = \lambda^n + 2\lambda^{n-1} + 2$ , 若有  $f(A) = 0$ , 证明  $f(\lambda)$  是  $A$  的特征多项式.

210. [提示][答案] 设函数  $f(x)$  在  $(0, 1]$  上可导,  $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} f'(x) = A \in \mathbb{R}$ , 证明  $f(x)$  在  $(0, 1]$  上一致连续.

211. [提示][答案] (中科院 2019) 设有  $n+1$  个列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  是一个  $n$  阶实对称正定阵,  $\alpha_i'$  为  $\alpha_i$  的转置, 如果满足下列条件:

- (1)  $\alpha_j \neq 0 (j = 1, 2, \dots, n)$ ;
- (2) 对于任意  $i \neq j (i, j = 1, 2, \dots, n)$ , 都有  $\alpha_i' A \alpha_j = 0$ ;
- (3)  $\beta$  与每个  $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, n)$  都正交;

证明  $\beta = 0$ .

212. [提示][答案] (浙大 2020, 与 103 题类似) 若  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , 存在  $n$  阶可逆复方阵  $X$  使得  $XA + 2BX = 0$ , 证明存在可逆实方阵  $Y$ , 使得  $YA + 2BY = 0$ .

213. [提示][答案] (浙大 2020) 求行列式  $|A|$ , 其中  $A$  的第  $(i, j)$  元为  $\operatorname{sgn}(i - j)$ .

214. [提示][答案] 设  $\mathcal{A}$  是实数域  $\mathbb{R}$  上  $n (n \geq 1)$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 证明  $\mathcal{A}$  至少有一个维数是 1 或 2 的不变子空间.

215. [提示][答案] (华师 2021) 设  $c_1, c_2, c_3$  是多项式  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 1$  的三个复根, 求  $(c_1 c_2 + c_3^2)(c_2 c_3 + c_1^2)(c_1 c_3 + c_2^2)$ .

216. [提示][答案] (华师 2021) 设实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d > 0$$

证明: 一定存在  $A$  的特征向量  $(x, y)' \in \mathbb{R}^2$ , 满足  $x, y > 0$ .

217. [提示][答案] (华师 2021) 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $B$  是  $n$  阶实对称正定阵.

- (1) 证明: 存在唯一  $n$  阶实矩阵  $C$  满足  $BC + CB = A$ ;
- (2) 证明: 对 (1) 中的实矩阵  $C$ ,  $BC = CB$  当且仅当  $AB = BA$ .

218. [提示][答案] 设数列  $\{na_n\}$  收敛, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$  收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛.

219. [提示][答案] 求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n / \ln n)$ , 其中

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin t} dt.$$

\*220. [提示][答案] 设  $I(x) = \int_0^{+\infty} x^{3/2} \exp(-x^2 y^2) dy$ , 证明  $I(x)$  关于  $x \geq 0$  一致收敛.

221. [提示][答案] 计算曲线积分:  $I = \int_L (x^2 - y^2) dx + (x^2 - z^2) dy + (y^2 - z^2) dz$ , 其中  $L$  是曲面  $x = \sqrt{2z - y^2 - z^2}$  与  $x + z = 1$  的交线上, 从点  $(0, -1, 1)$  到点  $(0, 1, 1)$  的一段有向弧.

\*222. [提示][答案] 记  $|M|$  为矩阵  $M$  的行列式, 设  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ,

(1) 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = |A + \sqrt{-1}B| \cdot |A - \sqrt{-1}B|.$$

(2) 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| \cdot |A - B|.$$

223. [提示][答案] 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \sin(1/x) dx & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

则  $f(x)$  在  $x = 0$  处是否可导?

224. [提示][答案] 求积分

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

225. [提示][答案] 设  $D$  是  $xOy$  平面上由曲线  $y = \sqrt{x}$  和直线  $y = x$  围成的图形, 求  $D$  绕直线  $y = x$  旋转产生的旋转体的体积.

226. [提示][答案] 设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵, 证明:  $\text{rank}(A) = n$  的充分必要条件为存在  $n$  阶实矩阵  $B$ , 使得  $AB + B'A$  为正定阵.

\*227. [提示][答案] 设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的连续函数, 设

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right),$$

证明: 函数列  $\{f_n(x)\}$  在任意有限区间上一致收敛.

228. [提示][答案] 与 227 很类似, 如果令  $f(x) = \sin(x)$ , 证明  $\{f_n(x)\}$  在  $\mathbb{R}$  上一致收敛.

229. [提示][答案] 判断下列级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

\*230. [提示][答案] 设  $f(x) \in C^2(0, 1)$ , 满足  $f(0) = f(1) = 0$ , 且对任意  $x \in (0, 1)$ ,  $f(x) \neq 0$ , 证明积分不等式

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > 4.$$

231. [提示][答案] 设  $V$  是  $n$  维欧氏空间, 证明

- (1) 对于任意两个不同的单位向量  $\alpha, \beta \in V$ , 总存在  $V$  上的镜面变换  $\mathcal{A}$ , 使得  $\mathcal{A}(\alpha) = \beta$ ;  
 (2) 证明  $V$  上的任意正交变换  $\mathcal{B}$  都可以表示成有限个镜面变换的乘积, 即存在  $m$  个镜面变换  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m$ , 使得

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \dots \mathcal{A}_m.$$

232. [提示][答案] 计算积分  $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx$ , 其中  $a, b$  不全为 0.

233. [提示][答案] 设  $A$  为  $n$  阶正定阵,  $X \in \mathbb{R}^n$  为非零列向量, 证明

- (1) 矩阵  $A + XX'$  可逆,  
 (2)  $0 < X'(A + XX')^{-1}X < 1$ .

234. [提示][答案]  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , 假设  $A^2 = A$ , 且对任意的  $X \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$X'A'AX \leq X'X,$$

证明  $A$  为对称阵.

235. [提示][答案] (中科院 2021) 设  $\mathcal{A}$  是线性空间  $V$  上的可逆线性变换,  $v_1, v_2, \dots, v_m$  张成  $V$ , 且

$$\mathcal{A}(v_i) \in \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

求证  $\mathcal{A}$  可对角化, 且特征值都为单位根.

236. [提示][答案] (中科院 2021) 证明  $\left| \int_a^{a+1} \sin t^2 dt \right| \leq a^{-1} (a > 0)$ , 也可以证明更强的结论:  $\left| \int_a^{a+1} \sin t^2 dt \right| < a^{-1} (a > 0)$ .

237. [提示][答案] (中科院 2021) 求积分

$$I = \iint_D \frac{x^2 + y^2 - 2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} dx dy,$$

其中  $D: x^2 + y^2 \geq 2, x \leq 1$ .

238. [提示][答案] 计算积分

$$\iint_S (x + z) dS,$$

其中  $S$  是曲面  $x^2 + y^2 = 2az (a > 0)$  被曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  所截取的有限部分.

239. [提示][答案] 设  $W = \{A: \operatorname{tr}(A) = 0, A \in M_n(\mathbb{R})\}$ , 证明  $W$  是  $M_n(\mathbb{R})$  的子空间, 并且求它的一组基.

## 2 提示

1. (1) **Stokes 公式**. 可利用 Stokes 公式转换为面积.

(2) **参数方程**. 利用该圆的参数方程进行计算:

$$\begin{cases} x = a\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta\right) \\ y = a\left(-\frac{2}{\sqrt{6}} \cos \theta\right) \\ z = a\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta\right) \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

2. 利用  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$  与 Lagrange 中值定理得到不一致连续的定义.

3. 用 Cauchy 收敛准则与  $\{a_n\}$  的单调性考虑  $\sum_{k=n}^{2n} a_n$ .

4. (1) 可以考虑

$$\int_A^B \frac{f(ax)}{x} dx - \int_A^B \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{aA}^{aB} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{bA}^{bB} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{aA}^{bA} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{aB}^{bB} \frac{f(x)}{x} dx$$

再利用积分中值定理与  $A \rightarrow 0, B \rightarrow +\infty$  得到结论. (2), (3) 同理.

5. 分别考虑  $r = 0, |r| < 1, |r| = 1$  与  $|r| > 1$ , 其中  $|r| > 1$  的情况可以令  $\rho = 1/r$ , 再利用  $|r| < 1$  的情况即可. 利用不定积分

$$\int \frac{1}{a + b \cos x} dx = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} t + C,$$

计算  $I'(r)$ , 与利用

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

计算  $I(\pm 1)$  即可求得答案.

6. 做换元  $t = 1/x$ , 则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^p} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-p}} dt$$

再分成  $[0, 1] \cup [1, +\infty)$  进行讨论.

7. 用积分因子构造含参变量反常积分:

$$H(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx, \quad t \in [0, 1],$$

首先可以用 Abel 判别法说明  $H(t)$  关于  $t \in [0, 1]$  一致收敛, 则有  $H(t) \in C[0, 1]$ . 又可以说明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \right) dx$$

在  $t \in (0, 1)$  内闭一致收敛, 则可以得到  $H'(t)$  在  $(0, 1)$  上的表达式:

$$H'(t) = \int_0^{+\infty} \sin x e^{-tx} dx,$$

而对于这个反常积分的计算, 可以使用分部积分, 或者用<sup>2</sup>  $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$ , 可以得到  $H'(t) = (1 + t^2)^{-1}$ , 即可求得  $H(0)$ .

8. 由  $f \in C[0, 1]$  可知  $f$  在  $[0, 1]$  上一致连续, 则当  $|x - y|$  足够小的时候  $|f(x) - f(y)|$  也足够小, 再考虑  $n$  为偶数时

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f\left(\frac{2k-1}{n}\right) - f\left(\frac{2k}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} \varepsilon.$$

$n$  为奇数时只需要增加一项  $f(1)/n$ .

9.  $\left| e^{-(\alpha+u^2)t} \sin(t) \right| \leq e^{-\alpha t}$

<sup>2</sup>这种写法我不确定是否标准, 或者是否有足够的理论依据

10.

$$\left| e^{-(\alpha+u^2)t} \sin(t) \right| \leq \left| \frac{t}{e^{(\alpha+u^2)t}} \right| \leq \frac{t}{1+u^2t} \leq \frac{1}{u^2}$$

12. 记

$$I(b) = \int_0^{+\infty} \exp(-ax^2) \cos(bx) dx$$

则又 Weierstrass 判别法可知

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial b} (\exp(-ax^2) \cos(bx)) dx$$

在  $\mathbb{R}$  上一致收敛, 于是可求得  $I'(b)$ , 再对  $I(b)$  利用分部积分, 可得

$$I'(b) = -\frac{b}{2a} I(b)$$

即  $(\ln I(b))' = -b/(2a)$ , 再利用  $I(0)$  的值可以计算得  $I(b)$ .

63. 假设  $f(x)$  有间断点  $c$ , 用定义可以说明在  $f(c)$  附近存在  $l_c$ , 使得  $f(x) = l_c$  无根或有无数根.

73. 利用极限式构造一个趋于 0 的自变量, 再利用  $x=0$  处的连续性及导数定义即可得到结论.

84. 我们给出两种方法的提示:

(方法一) 由  $f(x) \rightarrow 0$  可得  $x$  足够大时  $|f(x)|$  足够小, 由 Lagrange 中值定理可以得到  $x$  附近的某个  $\xi$ , 使得  $f'(\xi)$  足够小, 再利用  $f'(x)$  在  $\xi$  点的 Taylor 展开, 搭配二阶导有界的条件, 即可说明对每个足够大的  $x$ , 都有  $|f'(x)|$  足够小, 命题得证.

(方法二) 取足够大的  $N \in \mathbb{N}$ , 对任意足够大的  $x$  将  $f(x+1/N)$  在  $x$  处 Taylor 展开, 就可以得到  $f'(x)$  的表达式, 再利用  $f''(x)$  有界, 以及  $f(x) \rightarrow 0$ , 即可说明.

111. 首先注意到  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A(n+k)^{-1} = A \ln 2$ , 再利用拟合法, 即考虑  $\sum_{k=1}^n (a_{n+k} - A)(n+k)^{-1}$  即可.

232. 令  $I$  为  $a$  的函数

$$I(t) = \int_0^{\pi/2} \ln(t^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx$$

利用方程组解出  $I'(t)$ , 再计算  $\int_b^a I'(t) dt$ , 最后再考虑  $a$  或  $b$  为 0 的情况.

234. 移项后可得  $I - A'A$  为半正定阵, 故存在  $C \in M_n(\mathbb{R})$ , 使得  $I - A'A = C'C$ , 可得出  $CA = 0$ , 即  $C'CA = 0$ . 再利用  $A^2 = A$  即可得出结论.

239. 首先每个  $E_{ij} (i \neq j)$  均是  $W$  的元素

### 3 答案

1.  $\sqrt{3}\pi a^2$ .

5.

$$I(r) = \begin{cases} 0 & , |r| \leq 1; \\ 2\pi \ln |r| & , |r| > 1. \end{cases}$$

6. 当  $0 < p < 2$  时收敛,  $p \geq 2$  时发散.

7.  $\pi/2$

12.

$$I(b) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right).$$

63. 假设  $f(x) \notin C[a, b]$ , 则设  $c$  是  $f(x)$  的间断点, 那么  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$  至少一个不存在或不以  $f(c)$  为极限, 设它为  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ . 于是存在  $\varepsilon_0$ , 使得对任意的  $\delta$ , 都存在  $x$ , 使得  $c < x < c + \delta$ , 但是  $|f(x) - f(c)| \geq \varepsilon_0$ , 那么我们考虑集合

$$M_\delta = \{x \in (c, c + \delta) : f(x) \geq f(c) + \varepsilon_0\}, \quad m_\delta = \{x \in (c, c + \delta) : f(x) \leq f(c) - \varepsilon_0\}$$

对于  $\delta_1 < \delta_2$ , 显然有  $M_{\delta_1} \subset M_{\delta_2}, m_{\delta_1} \subset m_{\delta_2}$ , 并且当  $\delta$  不断靠近 0 的过程中,  $M_\delta$  与  $m_\delta$  一定有一个集合恒不为空集, 否则, 如果有某  $\delta', \delta''$  分别使  $M_{\delta'} = m_{\delta''} = \emptyset$ , 那么由包含关系, 就一定存在  $0 < \delta_0 < \min\{\delta', \delta''\}$ , 使得  $M_{\delta_0} = m_{\delta_0} = \emptyset$ , 那么对该  $\delta_0$ , 就不存在  $c < x < c + \delta_0$ , 使得  $|f(x) - f(c)| \geq \varepsilon_0$ , 这与  $\varepsilon_0$  的取法以及  $c$  是间断点矛盾, 不妨设  $M_\delta$  恒不为空集. 下面用两种方法说明矛盾.

(方法一) 若存在  $\Delta$ , 使得对任意  $c < x < c + \Delta$  的  $x$ , 都有  $|f(x) - f(c)| \geq \varepsilon_0$ , 那么取  $l_c = f(c) + \varepsilon_0/2$ , 就有在  $[c, c + \Delta] \subset [a, b]$  上,  $f(x) = l_c$  无解, 与题设矛盾.

若对任意的  $\delta$ , 都存在  $y$ , 使得  $c < y < c + \delta$ , 但是  $|f(y) - f(c)| < \varepsilon_0$ , 下面进行构造: 先取定一个  $\delta_1$ , 由上面讨论可知存在  $c < y_1 < x_1 < c + \delta_1$ , 但是

$$f(x_1) \geq f(c) + \varepsilon_0, \quad |f(y_1) - f(c)| < \varepsilon_0$$

那么可知对于

$$l_c = f(c) + \varepsilon_0 \in [f(y_1), f(x_1)],$$

存在  $\eta_1 \in [y_1, x_1]$ , 使得  $f(\eta_1) = l_c$ . 再取  $\delta_2 \in (0, y_1 - c)$ , 那么又有  $c < y_2 < x_2 < c + \delta_2$  满足

$$f(x_2) \geq f(c) + \varepsilon_0, \quad |f(y_2) - f(c)| < \varepsilon_0$$

那么就又有  $\eta_2 \in [y_2, x_2]$ , 使得  $f(\eta_2) = l_c$ , 如此构造可以得到一系列互不相同的  $\{\eta_n\}$ , 满足  $c < \eta_n < x_1$ , 且  $f(\eta_n) = l_c$ , 这与  $f(x) = l_c$  在  $[c, x_1]$  有有限个解矛盾. 综上:  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的连续函数.

(方法二) 固定  $\delta_0$  设  $y \in M_{\delta_0}$ , 则  $f(y) \geq f(c) + \varepsilon_0$ , 那么对于  $l_c = f(c) + \varepsilon_0/2$ , 由题知对于  $f(x) = l_c$  在  $[c, y]$  中只有有限个解, 设最小的解为  $t > c$ , 那么记  $\delta_1 = t - c$ , 由  $M_{\delta_1}$  非空可知仍存在  $y' \in M_{\delta_1}$ , 满足  $y' < c + t - c = t$ , 且  $f(y') \geq f(c) + \varepsilon_0$ , 再由题目条件可知存在  $t' \in [c, y']$ , 满足  $f(t') = l_c$ , 这与  $t$  是  $[c, y]$  中最小的解矛盾, 故  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

73. 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A,$$

可知: 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|x| < \delta$  时,

$$A - \varepsilon < \frac{f(2x) - f(x)}{x} < A + \varepsilon$$

又因为  $|2^{-1}x| < \delta$ , 那么又有

$$A - \varepsilon < \frac{f(x) - f(2^{-1}x)}{2^{-1}x} < A + \varepsilon$$

即

$$2^{-1}(A - \varepsilon) < \frac{f(x) - f(2^{-1}x)}{x} < 2^{-1}(A + \varepsilon),$$

再取  $2^{-2}x, 2^{-3}x, \dots, 2^{-n}x$ , 就可以得到一系列不等式:

$$\begin{aligned} 2^{-2}(A - \varepsilon) &< \frac{f(2^{-1}x) - f(2^{-2}x)}{x} < 2^{-2}(A + \varepsilon) \\ 2^{-3}(A - \varepsilon) &< \frac{f(2^{-2}x) - f(2^{-3}x)}{x} < 2^{-3}(A + \varepsilon) \\ &\dots \\ 2^{-n}(A - \varepsilon) &< \frac{f(2^{-n+1}x) - f(2^{-n}x)}{x} < 2^{-n}(A + \varepsilon) \end{aligned}$$

从  $2^{-1}x$  开始将它们相加, 即可得到

$$(1 - 2^{-n})(A - \varepsilon) < \frac{f(x) - f(2^{-n}x)}{x} < (1 - 2^{-n})(A + \varepsilon) \quad (1)$$

由于  $f(x)$  在  $x = 0$  连续, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(2^{-n}x) = f(0)$ , 那么对不等式 (1) 中的  $n$  取极限, 可得

$$A - \varepsilon \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq A + \varepsilon$$

这就说明了  $f'(0)$  存在, 且  $f'(0) = A$ .

93. (1) 首先可以说明  $f(x)$  的实根的重数都是偶数, 且首项系数  $k > 0$  即

$$f(x) = k \prod_{i=1}^s (x - a_i)^{2k_i} \prod_{j=1}^t (x^2 + b_j x + c_j)^{l_j} := k p^2(x) q(x), \quad (2)$$

其中  $k, a_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ ,  $k_i, l_j \in \mathbb{N}$  ( $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t$ ),  $b_j^2 - 4c_j < 0$ , 又可知对于每个  $j$ ,  $x^2 + b_j x + c_j$  都有一对共轭的复根, 记为  $\omega_j, \bar{\omega}_j$ , 并注意到  $x \in \mathbb{R}$  于是又有

$$q(x) = \prod_{j=1}^t (x - \omega_j)^{l_j} \prod_{j=1}^t (x - \bar{\omega}_j)^{l_j} = \prod_{j=1}^t (x - \omega_j)^{l_j} \overline{\prod_{j=1}^t (x - \omega_j)^{l_j}}$$

若记  $\prod_{j=1}^t (x - \omega_j)^{l_j} = g_1(x) + i h_1(x)$ , 其中  $g_1(x), h_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ , 那么就有

$$q(x) = (g_1(x) + i h_1(x)) \overline{(g_1(x) + i h_1(x))} = (g_1(x) + i h_1(x))(g_1(x) - i h_1(x)) = g_1^2(x) + h_1^2(x)$$

于是令  $g(x) = \sqrt{k} p(x) g_1(x)$ ,  $h(x) = \sqrt{k} p(x) h_1(x)$ , 就有  $f(x) = g^2(x) + h^2(x)$ .

(2) 注意到在刚才的过程中得到的  $g(x)$  与  $h(x)$  的次数是相等的, 如果要得到次数不等的  $g, h$ , 可以用数学归纳法. 首先依旧可以得到 (2) 的分解式, 当  $b^2 - 4c < 0$  时利用

$$x^2 + b_1 x + c_1 = \left(x + \frac{b_1}{2}\right)^2 + \frac{4c_1 - b_1^2}{4} = \varphi_1^2(x) + \psi_1^2(x)$$

以及

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = \frac{1}{2}(ac + bd)^2 + \frac{1}{2}(ad - bc)^2$$

可以得到  $q(x)$  新的分解式  $g_2(x), h_2(x)$ , 此时  $\deg g_2(x) > \deg h_2(x)$ , 且令  $g(x) = \sqrt{k} p(x) g_2(x)$ ,  $h(x) = \sqrt{k} p(x) h_2(x)$ , 就有  $f(x) = g^2(x) + h^2(x)$ , 这时就有  $\deg g(x) > \deg h(x)$ .

111. 一方面, 我们可以用定积分的定义求出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{A}{n+k} = A \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = A \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} = A \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = A \ln 2.$$

然后我们来证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_{n+k} - A}{n+k} = 0.$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 于是对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得对于任意  $k \in \mathbb{N}$ , 都有  $|a_{n+k} - A| < \varepsilon$ , 于是对于  $n > N$

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{a_{n+k} - A}{n+k} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|a_{n+k} - A|}{n+k} \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

也就是说明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_{n+k}}{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{A}{n+k} = A \ln 2.$$

232. 不妨设  $a, b > 0$  记

$$I(t) = \int_0^{\pi/2} \ln(t^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx, \quad t > 0$$

则待求积分为  $I(a)$ , 由于  $\ln(t^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)$  在  $(x, t) \in [0, \pi/2] \times (0, +\infty)$  上连续可微, 故有

$$I'(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial t} \ln(t^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2t \sin^2 x}{t^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx$$

下面来计算  $I'(t)$ . 记

$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{t^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx, \quad B = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{t^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx,$$

那么可以看出

$$t^2 A + b^2 B = \frac{\pi}{2}, \quad (3)$$

另外

$$A + B = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{d \tan x}{t^2 \tan^2 x + b^2},$$

令  $u = \tan x$ , 则

$$A + B = \int_0^{+\infty} \frac{du}{t^2 u^2 + b^2} = \frac{1}{tb} \arctan \frac{ut}{b} \Big|_{u=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2tb}. \quad (4)$$

联立等式 (3) 与 (4) 即可解出

$$A = \frac{\pi}{2} \frac{1}{t(t+b)}$$

则  $I'(t) = 2tA = \pi/(t+b)$ . 于是有

$$I(a) - I(b) = \int_b^a I'(t) dt = \pi \ln \frac{a+b}{2b},$$



又因为  $I(b) = \int_0^{\pi/2} \ln b^2 dx = \pi \ln b$ , 所以

$$I(a) = \pi \ln \frac{a+b}{2},$$

再考虑  $a > 0, b = 0$  的情况, 利用

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

可得

$$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi/2} 2 \ln a + 2 \ln \sin x dx = \pi \ln \frac{a}{2},$$

这说明了对于任意  $a^2 + b^2 \neq 0$ , 总有

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}.$$

234. 将不等式移项, 可得出对任意  $X \in \mathbb{R}^n$ , 都有

$$X'(I - A'A)X \geq 0,$$

即  $I - A'A$  为半正定矩阵, 那么存在  $C \in M_n(\mathbb{R})$ , 使得  $I - A'A = C'C$ , 在等式两侧同时左乘  $A'$ , 右乘  $A$ , 就有

$$A'(I - A'A)A = A'C'CA \implies (CA)'(CA) = A'A - (A')^2 A^2 = A'A - A'A = 0,$$

那么由  $\text{tr}((CA)'(CA)) = \text{tr}(0) = 0$  可得  $CA = 0$ , 也就是

$$0 = CA = C'CA = (I - A'A)A = A - A'A \implies A = A'A,$$

再两侧同时取转置, 就有  $A' = A'A = A$ , 即  $A$  是对称阵.

239.  $W$  是子空间是显然的. 下面求维数: 可知  $W_1 = \{\sum_{i \neq j} x_{ij} E_{ij} : x_{ij} \in \mathbb{R}\}$  是  $W$  的  $(n-1)n$  维的子空间, 而  $W_2 = \{\sum_{i=1}^n x_i E_{ii} : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$  是  $W$  的  $n-1$  维的子空间, 且  $W_2 \cap W_1 = 0$ . 则

$$\dim W \geq \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 = n^2 - 1$$

又因为  $W$  是  $M_n(\mathbb{R})$  的真子空间, 则  $\dim W = n^2 - 1$ ,  $W = W_1 \oplus W_2$ .  $W$  是  $M_n(\mathbb{R})$  的  $n^2 - 1$  维的子空间, 且  $\{E_{ij} : i \neq j\} \cup \{E_{11} - E_{kk} : k > 1\}$  是  $W$  的一组基.