1. 设 Γ 是由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 交成的圆周, 从第一卦限内看 Γ, 它的方向是逆时针. 计算第二型曲线积分

$$\int_\Gamma z\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z\,.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$, 证明 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上不一致连续.

3. 设 $\{a_n\}$ 为非负递减的数列, 如果级数 $\sum_{n=0}^\infty a_n$ 收敛, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$.

4. 设 $a,b>0$, $f\in C[0,+\infty)$, 证明:

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty)$ 存在, 那么

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=(f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}.$$

(2) 如果无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)/x\,\mathrm{d}x$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

(3) 如果 $f(+\infty)$ 存在, 且积分 $\int_0^1 f(x)/x\,\mathrm{d}x$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=-f(+\infty)\ln\frac{b}{a}.$$

5. 计算积分

$$I(r)=\int_0^\pi \ln\left(1-2r\cos x+r^2\right)\mathrm{d}x\,,\quad |r|<1.$$

6. 设 $p>0$, 讨论积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin(1/x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

的敛散性.

7. 求积分 $\int_0^{+\infty}\sin(x)/x\,\mathrm{d}x$.

8. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}f\left(\frac{k}{n}\right)=0.$$

9. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin(t)\,\mathrm{d}t\,,\quad \alpha>0$$

关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

10. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin(t)\,\mathrm{d}u\,,\quad \alpha>0$$

关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

11. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

12. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\exp\left(-ax^2\right)\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, 其中 $a>0,\ b\in\mathbb{R}$.

13. 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \tan^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $|\alpha| < 1$.

14. 设 $\mathbb{K}$ 是数域, $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 A, B 没有相同的特征值, 证明矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解.

15. 设 A 是 4 阶方阵, 满足 $\mathrm{tr}\big(A^i\big) = i\,(i = 1, 2, 3, 4)$, 求 $|A|$.

16. n 阶方阵可对角化的充分必要条件.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积, 在 $x = 1$ 处左连续, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x} = f(1).$$

18. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2 = AA'$, 证明 A 为实对称阵.

19. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2 = A$, $B^2 = B$ 以及 $(A + B)^2 = A + B$, 证明 $AB = BA = 0$.

20. 设 A, B 都是 n 阶矩阵, 若 $A^k = 0$, 且 $AB + BA = B$, 证明 $B = 0$.

21. A, B 是 n 阶方阵, $A + B = AB$, 求证

    (1) $AB = BA$,

    (2) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$,

    (3) A 可对角化当且仅当 B 可对角化.

22. 设 $f(x), g(x)$ 为多项式, 且 $(f(x), g(x)) = 1$, A 是 n 阶方阵, 求证: $f(A)g(A) = 0$ 的充分必要条件为 $\mathrm{rank}(f(A)) + \mathrm{rank}(g(A)) = n$.

23. 设 A, B 为实对称阵, 求证:

    (1) 若 A 正定, 则存在实可逆阵 P 使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 同时为对角阵;

    (2) 若 A, B 半正定, 则 $\mathrm{tr}(AB) \geqslant 0$, 并且等号成立当且仅当 $AB = 0$.

24. $A, B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 并且 $A = B + C$, 其中 B 为对称阵, C 为反对称阵, 证明: 若 $A^2 = 0$, 则 $A = 0$.

25. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\!\left(\pi\sqrt{n^2 + n}\right)$.

26. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi),$$

27. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明对每个 $x \in (a, b)$, 都存在对应的 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

28. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上三阶可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi).$$

29. $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 非负连续, 单调递减, 求证 $\{a_n\}$ 极限存在, 其中

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

30. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\pi/4 - x_n)$, 其中:

$$x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}.$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k \leqslant n\left(\frac{\pi}{4} - x_n\right) \leqslant -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k$$

31. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty$, 证明极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n}{p_n} = 0.$$

32. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明极限

$$\lim_{n\to\infty} (n! a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} = 0.$$

33. 面积原理

(1) 设 $x \geqslant m \in \mathbb{N}^*$, f 是一个非负的递增函数, 则当 $\xi \geqslant m$ 时有

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant f(\xi).$$

(2) 设 $x \geqslant m \in \mathbb{N}^*$, f 是一个非负的递减函数, 则极限

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \alpha$$

存在, 且 $0 \leqslant \alpha \leqslant f(m)$. 更进一步, 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 那么

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x - \alpha\right| \leqslant f(\xi - 1),$$

这里 $\xi \geqslant m + 1$.

34. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微, 且 $f(a)f(b) < 0$, 对任意 $x \in [a,b]$ 都有 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$. 证明序列 $\{x_n\}$ 极限存在, 其中 $x_1 \in [a,b]$, $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)\,(n = 1, 2, \ldots)$, 进而可以证明此极限为方程 $f(x) = 0$ 的根.

35. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{y_n\}$: $y_1 = 1$, $2y_{n+1} = y_n + \sqrt{y_n^2 + a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. 证明 $\{y_n\}$ 是单调递增的收敛数列.

36. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: 当 $n < m$ 时, $|x_n - x_m| > 1/n$. 证明数列 $\{x_n\}$ 无界.

37. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$.

38. n 阶方阵的每行之和与每列之和均为 0, 证明其所有代数余子式全相等.

39. 设函数 $f(x)$ 定义在 $(a, +\infty)$, 且 $f(x)$ 在每个有限区间 (a,b) 内都有界, 并满足

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = A.$$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)/x) = A$.

40. 证明: (1) 关于 x 的方程 $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{kx} = n + 1$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一的实根 a_n; (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

41. 设 $a > 0$, 求积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\pi/2}} \frac{1}{1 + \tan^a y^2}\,\mathrm{d}y$$

42. α, β 是 n 维列向量, A 是 n 阶方阵, 求证: $|A + \alpha\beta'| = |A| + \beta' A^* \alpha$.

43. 设 $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, 且

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

求证 $BA = 9I$.

44. $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $A^2 = A$, 若对任意列向量 x, 都有 $x'A'Ax \leqslant x'x$, 证明 $A' = A$.

45. 证明对任意 $m \times n$ 矩阵 A, 都有 $\mathrm{rank}(AA') = \mathrm{rank}(A)$.

46. (极分解) 对可逆阵 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 证明

    (1) 存在正交阵 P, 正定阵 B, 满足 $A = PB$.

    (2) 存在正交阵 Q_1, Q_2, 使得 $Q_1AQ_2 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 并且 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ 是 $A'A$ 的特征值.

47. $f(x) \in C[a,b]$, 证明函数 $m(x) = \min\limits_{a \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi)$ 在 $[a,b]$ 连续.

48. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, $f''(x)$ 有界, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

49. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上三阶连续可导, 且对任意的 $h > 0$, 有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

求证: $f(x)$ 为次数至多为 2 的多项式.

50. 设 $A' = A$, 证明 A 可逆当且仅当存在矩阵 B 使得 $AB + B'A$ 正定.

51. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, $f(a) = 0$, 并且存在实数 $A > 0$, 使得对任意 $x \in [a,b]$, 都有 $|f'(x)| \leqslant A|f(x)|$, 证明在 $[a,b]$ 上, $f(x) \equiv 0$.

52. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一阶连续可导, 且

$$f'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)$$

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

53. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 若对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+n) = 0$, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

54. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 则存在正实数 a, b, 使得 $|f(x)| \leqslant a|x| + b$.

55. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续, 证明 $|f(x)/x|$ 在 $[1,+\infty)$ 有界.

56. 证明欧式空间中两标准正交基的过渡矩阵为正交阵.