其中标红加星的题, 如 "*3.", 为较重要的题, 可以简化一些其他的证明. 不标红只加星的题, 如 "*3.", 为折磨题, 记一下结论就好了.

1. 设 Γ 是由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 交成的圆周, 从第一卦限内看 Γ, 它的方向是逆时针. 计算第二型曲线积分

$$\int_\Gamma z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z\,.$$

提示 (Stokes 公式)**:** 可利用 Stokes 公式转换为面积.

提示 (参数方程)**:** 利用该圆的参数方程进行计算:

$$\begin{cases} x = a\Big(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\Big) \\ y = a\Big(-\frac{2}{\sqrt{6}}\cos\theta\Big) \\ z = a\Big(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\Big) \end{cases}, \quad \theta\in[0,2\pi],$$

答案: $\pi a^2/\sqrt{3}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$, 证明 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上不一致连续.

提示: 用反证法, 假设一致连续, 再用 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ 与 Lagrange 中值定理导出矛盾.

3. 设 $\{a_n\}$ 为非负递减的数列, 如果级数 $\sum_{n=0}^\infty a_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

提示: 用 Cauchy 收敛准则与 $\{a_n\}$ 的单调性考虑 $\sum_{k=n} 2na_n$.

4. (**Frullani 积分**) 设 $a,b>0$, $f\in C[0,+\infty)$, 证明:

(1) 如果 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty)$ 存在, 那么

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = (f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}.$$

(2) 如果无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)/x\,\mathrm{d}x$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

(3) 如果 $f(+\infty)$ 存在, 且积分 $\int_0^1 f(x)/x\,\mathrm{d}x$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = -f(+\infty)\ln\frac{b}{a}.$$

提示: (1) 可以考虑

$$\int_A^B\frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_A^B\frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{aA}^{aB}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{bA}^{bB}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{aA}^{bA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{aB}^{bB}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

再利用积分中值定理与 $A\to0,\ B\to+\infty$ 得到结论. (2), (3) 同理.

5. 计算积分

$$I(r)=\int_0^\pi \ln(1-2r\cos x + r^2)\,\mathrm{d}x\,.$$

提示: 分别考虑 $r=0$, $|r|<1$, $|r|=1$ 与 $|r|>1$, 其中 $|r|>1$ 的情况可以令 $\rho=1/r$, 再利用 $|r|<1$ 的情况即可. 利用不定积分

$$\int \frac{1}{a+b\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t+C,$$

计算 $I'(r)$, 与利用

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

计算 $I(\pm1)$ 即可求得答案.

答案:

$$I(r)=\begin{cases}0 & ,|r|\leqslant 1;\\ 2\pi\ln|r| & ,|r|>1.\end{cases}$$

6. 设 $p>0$, 讨论积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1/x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

的敛散性.

提示: 做换元 $t=1/x$, 则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1/x)}{x^p}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t$$

再分成 $[0,1]\cup[1,+\infty)$ 进行讨论.

答案: 当 $0<p<2$ 时收敛, $p\geqslant 2$ 时发散.

7. 求积分 $\int_0^{+\infty}\sin(x)/x\,\mathrm{d}x$.

提示: 用积分因子构造含参变量反常积分:

$$H(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,,\quad t\in[0,1],$$

首先可以用 Abel 判别法说明 $H(t)$ 关于 $t\in[0,1]$ 一致收敛, 则有 $H(t)\in C[0,1]$. 又可以说明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x$$

在 $t\in(0,1)$ 内闭一致收敛, 则可以得到 $H'(t)$ 在 $(0,1)$ 上的表达式:

$$H'(t)=\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x\,,$$

而对于这个反常积分的计算, 可以使用分部积分, 或者用[1] $\sin x=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})/(2\mathrm{i})$, 可以得到 $H'(t)=(1+t^2)^{-1}$, 即可求得 $H(0)$.

答案: $\pi/2$

8. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f\left(\frac{k}{n}\right)=0.$$

[1]这种写法我不确定是否标准, 或者是否有足够的理论依据

提示: 由 $f \in C[0,1]$ 可知 f 在 $[0,1]$ 上一致连续, 则当 $|x-y|$ 足够小的时候 $|f(x)-f(y)|$ 也足够小, 再考虑 n 为偶数时

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n/2} f\left(\frac{2k-1}{n}\right) - f\left(\frac{2k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2}\varepsilon.$$

n 为奇数时只需要增加一项 $f(1)/n$.

9. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin(t)\,\mathrm{d}t\,,\quad \alpha>0$$

关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

提示: $\left|\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin(t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}$

10. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin(t)\,\mathrm{d}u\,,\quad \alpha>0$$

关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

提示:

$$\left|\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin(t)\right| \leqslant \left|\frac{t}{\mathrm{e}^{(\alpha+u^2)t}}\right| \leqslant \frac{t}{1+u^2t} \leqslant \frac{1}{u^2}$$

*11. 计算 Fresnel 积分 $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$.

12. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\exp(-ax^2)\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, 其中 $a>0,\ b\in\mathbb{R}$.

提示: 记

$$I(b)=\int_0^{+\infty}\exp(-ax^2)\cos(bx)\,\mathrm{d}x$$

则又 Weierstrass 判别法可知

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial b}\big(\exp(-ax^2)\cos(bx)\big)\,\mathrm{d}x$$

在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 于是可求得 $I'(b)$, 再对 $I(b)$ 利用分部积分, 可得

$$I'(b)=-\frac{b}{2a}I(b)$$

即 $(\ln I(b))'=-b/(2a)$, 再利用 $I(0)$ 的值可以计算得 $I(b)$.

答案:

$$I(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right).$$

13. 计算积分 $\int_0^{\pi/2}\tan^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $|\alpha|<1$.

*14. 设 $\mathbb{K}$ 是数域, $A\in\mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, $B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 A,B 没有相同的特征值, 证明矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解.

15. 如 14 题, 可以进一步证明逆命题也成立, 即: 如果 $AX=XB$ 只有零解, 则 A,B 无公共特征值.

16. 设 A 是 4 阶方阵, 满足 $\operatorname{tr}(A^i) = i\,(i = 1, 2, 3, 4)$, 求 $|A|$.

17. n 阶方阵可对角化的充分必要条件.

18. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积, 在 $x = 1$ 处左连续, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x} = f(1).$$

19. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2 = AA'$, 证明 A 为实对称阵.

20. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2 = A$, $B^2 = B$ 以及 $(A + B)^2 = A + B$, 证明 $AB = BA = 0$.

21. 设 A, B 都是 n 阶矩阵, 若 $A^k = 0$, 且 $AB + BA = B$, 证明 $B = 0$.

22. A, B 是 n 阶方阵, $A + B = AB$, 求证

    (1) $AB = BA$,

    (2) $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$,

    (3) A 可对角化当且仅当 B 可对角化.

*23. 设 $f(x), g(x)$ 为多项式, 且 $(f(x), g(x)) = 1$, A 是 n 阶方阵, 求证: $f(A)g(A) = 0$ 的充分必要条件为 $\operatorname{rank}(f(A)) + \operatorname{rank}(g(A)) = n$.

24. 设 A, B 为实对称阵, 求证:

    (1) 若 A 正定, 则存在实可逆阵 P 使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 同时为对角阵;

    (2) 若 A, B 半正定, 则 $\operatorname{tr}(AB) \geqslant 0$, 并且等号成立当且仅当 $AB = 0$.

25. $A, B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 并且 $A = B + C$, 其中 B 为对称阵, C 为反对称阵, 证明: 若 $A^2 = 0$, 则 $A = 0$.

26. 求极限 $\lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2 + n}\right)$.

27. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(a) = \frac{1}{4}(b - a)^2 f''(\xi),$$

28. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明对每个 $x \in (a, b)$, 都存在对应的 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)(x - b).$$

29. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上三阶可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b - a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b - a)^3 f'''(\xi).$$

30. 求 $\lim_{n\to\infty} n(\pi/4 - x_n)$, 其中:

$$x_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2}.$$

31. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$, 证明极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n}{p_n} = 0.$$

32. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明极限

$$\lim_{n\to\infty} (n!a_1a_2\dots a_n)^{1/n} = 0.$$

33. **面积原理**

(1) 设 f 是一个非负的递增函数, 则当 $\xi \geqslant m$ 时有

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant f(\xi).$$

(2) 设 f 是一个非负的递减函数, 则极限

$$\lim_{\xi\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \alpha$$

存在, 且 $0 \leqslant \alpha \leqslant f(m)$. 更进一步, 如果 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 那么

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x - \alpha\right| \leqslant f(\xi-1),$$

这里 $\xi \geqslant m+1$.

34. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微, 且 $f(a)f(b) < 0$, 对任意 $x \in [a,b]$ 都有 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$. 证明序列 $\{x_n\}$ 极限存在, 其中 $x_1 \in [a,b]$, $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)\,(n = 1,2,\dots)$, 进而可以证明此极限为方程 $f(x) = 0$ 的根.

35. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{y_n\}$: $y_1 = 1,\ 2y_{n+1} = y_n + \sqrt{y_n^2 + a_n}$ $(n = 1,2,\dots)$. 证明 $\{y_n\}$ 是单调递增的收敛数列.

36. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: 当 $n < m$ 时, $|x_n - x_m| > 1/n$. 证明数列 $\{x_n\}$ 无界.

37. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$.

38. n 阶方阵的每行之和与每列之和均为 0, 证明其所有代数余子式全相等.

39. 设函数 $f(x)$ 定义在 $(a,+\infty)$, 且 $f(x)$ 在每个有限区间 (a,b) 内都有界, 并满足

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = A.$$

证明 $\lim_{x\to+\infty}(f(x)/x) = A$.

40. 证明: (1) 关于 x 的方程 $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{kx} = n+1$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一的实根 a_n; (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

41. 设 $a > 0$, 求积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\pi/2}} \frac{1}{1+\tan^a y^2}\,\mathrm{d}y$$

42. α, β 是 n 维列向量, A 是 n 阶方阵, 求证: $|A + \alpha\beta'| = |A| + \beta' A^* \alpha$.

43. 设 $A \in \mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, 且

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

求证 $BA = 9I$.

44. $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $A^2 = A$, 若对任意列向量 x, 都有 $x'A'Ax \leqslant x'x$, 证明 $A' = A$.

45. 证明对任意 $m \times n$ 矩阵 A, 都有 $\mathrm{rank}(AA') = \mathrm{rank}(A)$.

46. $f(x) \in C[a,b]$, 证明函数 $m(x) = \min\limits_{a \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi)$ 在 $[a,b]$ 连续.

47. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导, 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, $f''(x)$ 有界, 证明 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

48. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上三阶连续可导, 且对任意的 $h > 0$, 有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

求证: $f(x)$ 为次数至多为 2 的多项式.

49. 设 $A' = A$, 证明 A 可逆当且仅当存在矩阵 B 使得 $AB + B'A$ 正定.

50. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, $f(a) = 0$, 并且存在实数 $A > 0$, 使得对任意 $x \in [a,b]$, 都有 $|f'(x)| \leqslant A|f(x)|$, 证明在 $[a,b]$ 上, $f(x) \equiv 0$.

51. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一阶连续可导, 且

$$f'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)$$

证明: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

52. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 若对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim_{n\to+\infty} f(x+n) = 0$, 证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

53. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对任意 $\delta > 0$, 都有 $\lim_{n\to\infty} f(n\delta) = 0$, 证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

54. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 则存在正实数 a, b, 使得 $|f(x)| \leqslant a|x| + b$.

55. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续, 证明 $|f(x)/x|$ 在 $[1,+\infty)$ 有界.

56. 证明欧式空间中两标准正交基的过渡矩阵为正交阵.

57. 设 α 是欧式空间 V 中的一个非零向量, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 是 V 中的 p 个向量, 满足

$$(a_i, a_j) \leqslant 0,\ (\alpha_i, \alpha) > 0, \quad i,j = 1,2,\dots,p, i \neq j$$

证明

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 线性无关;

(2) n 维欧式空间中最多有 $n+1$ 个向量, 使其两两互成钝角;

(3) n 维欧式空间中一定存在 $n+1$ 个向量, 使其两两互为钝角.

58. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 $AB = BA$, 利用线性方程组的知识证明

$$\mathrm{rank}(A+B) \leqslant \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - \mathrm{rank}(AB)$$

59. 设 $B \in \mathrm{M}_{n\times 2}(\mathbb{C})$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

若 $A = BC$, 且 CB 的特征多项式为 $x^2 - 2x + 1$, 求 A 的特征值, 并求 $AX = 0$ 的基础解系.

60. 计算 n 阶 b – 循环行列式:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ ba_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ ba_{n-1} & ba_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ba_2 & ba_3 & ba_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

*61. 设 A 是 n 阶实反对称阵, $D = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ 是同阶的对角阵, 且 $d_i > 0\,(i = 1, 2, \dots, n)$. 求证 $|A + D| > 0$, 特别地, $I_n + A$ 与 $I_n - A$ 都是非异阵.

62. 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 适合条件:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则称 A 为**严格对角占优阵**, 求证, 严格对角占优阵必是满秩阵, 若上述条件改为:

$$a_{ii} > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

求证 $|A| > 0$.

63. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 对 $[a, b]$ 上任意一个闭区间 $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, 对介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的任一常数 l, 方程

$$f(x) = l$$

在 $[x_1, x_2]$ 上有且仅有有限个解, 证明 $f(x) \in C[a, b]$.

64. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x\to+\infty}(f(x) + f'(x)) = A$, 证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$, 其中 $A \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$.

65. 已知 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 $\operatorname{tr}(A) = 0$, 证明

(1) 存在数域 $\mathbb{K}$ 上的可逆阵 C, 使得 $C^{-1}AC$ 为主对角元全为 0 的矩阵.

(2) 存在 $X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 使得 $XY - YX = A$.

(3) 令 U 为 $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 中所有形如 $XY - YX$ 的矩阵组成的集合, 证明 U 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 的一个线性子空间.

66. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)^n$$

67. 设 φ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, W 是 φ 的不变子空间, 且 $V = \operatorname{Im}\varphi \oplus W$, 证明

$$V = \operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Ker}\varphi.$$

68. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 且 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = 1$, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$, 证明 A 相似于 B.

69. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 求证: 必存在正整数 m, 使得

$$\operatorname{Im}\varphi^m = \operatorname{Im}\varphi^{m+1}, \quad \operatorname{Ker}\varphi^m = \operatorname{Ker}\varphi^{m+1}, \quad V = \operatorname{Im}\varphi^m \oplus \operatorname{Ker}\varphi^{m+1}.$$

70. 使用 Jordan 标准型证明迹非 0 的秩 1 矩阵可对角化.

71. 设 A 是 n 阶实对称阵, 证明: A 可逆的充分必要条件为存在矩阵 B, 使得 $AB+B'A$ 正定.

72. 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 其中 A 是幂零阵, 且 $AB=BA$, 求证: $|B|=|A+B|$.

73. 设函数 f 在 $x=0$ 连续, 并且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A,$$

求证: $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0)=A$.

74. 设 x_n 是 $\tan x=x$ 在 $(n\pi,n\pi+\pi/2)$ 上的解,

(1) 求证 $\lim_{n\to\infty}(n\pi+\pi/2-x_n)=0$,

(2) 求 $\lim_{n\to\infty}n(n\pi+\pi/2-x_n)$.

75. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 且 $f(0)=0$, 并假设有实数 A 使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立, 证明 $f(x)\equiv 0\,(x\in(0,+\infty))$.

76. 设偶函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, 且 $f(0)=1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(f(1/n)-1)$ 绝对收敛.

77. 设 f 在 $[a,b]$ 上可导, 且 f' 在 $[a,b]$ 上可积, $f(a)=0$, 证明:

$$2\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\leqslant (b-a)^2\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x\,.$$

78. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 且存在实数 $A>0$, 使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$, 证明 $f(x)\equiv 0$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 均成立.

79. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数, $f(0)=f(1)=0$, 且对任意的 $x\in(0,1)$, 都有 $f(x)\neq 0$, 证明

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4$$

80. 设 $f(x)\in C^2[a,b]$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

81. 设 x_1,x_2,x_3 是多项式 $f(x)=x^3+ax+1$ 的三个根, 求一个首一多项式以 x_1^2,x_2^2,x_3^2 为根.

82. 设 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可微, 且 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有界, 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

83. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$, $\lambda\in(0,1)$, 恒有 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$. 证明

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

84. 设 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$, 且满足下列条件之一, 则有 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(1) $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有界;

(2) $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在.

85. 广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 加上下面任一条件即可推出 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$:

(1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在,

(2) $\int_a^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,

(3) $f(x)$ 单调, 这时有更强的结果: $\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0$,

(4) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续,

(5) $f'(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

86. 设 A 是三阶正交矩阵, 且 $|A|=1$, 证明存在正交阵 B, 使得 $A=B^2$.

87. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 且在任何有限闭区间上可积, 证明: 对任何闭区间 $[a,b]$, 有

$$\lim_{h\to0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$

88. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\{2x_{n+1}+x_n\}$ 收敛, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

89. (**Young 不等式**) 设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上严格递增的连续函数, 且满足 $f(0)=0$, 证明对任意的 $a,b>0$, 有

$$ab\leqslant\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

90. 设 $f,g\in C[a,b]$, g 在 $[a,b]$ 上不变号, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

91. 设 A 为 3 阶非零实矩阵, $A^T=A^*$, 且 $|I+A|=|I-A|=0$, 计算行列式 $|A^2-A-3I|$.

92. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, $g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 $T>0$ 为周期的连续函数, 且 $\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 求

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\,\mathrm{d}x$$

*93. 设 $f(x)$ 是实多项式, 且对任意实数 r, 都有 $f(r)\geqslant0$. 证明存在实多项式 $g(x),h(x)$ 使得 $f(x)=g^2(x)+h^2(x)$.

94. 设 $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_m$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且适合条件:

$$\varphi_i^2=\varphi_i,\quad \varphi_i\varphi_j=0\,(i\neq j),\quad \bigcap_{i=1}^m \operatorname{Ker}\varphi_i=0,$$

求证: $V=\bigoplus_{i=1}^m \operatorname{Im}\varphi_i$.

95. 设 f 在 $(0,1]$ 上可导, 且 $\lim_{x\to0+}\sqrt{x}f'(x)=A\in\mathbb{R}$, 证明 f 在 $(0,1]$ 上一致连续.

96. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积, $f(1)=0$, $f'(1)=a$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2x^nf(x)\,\mathrm{d}x=-a.$$

97. 设 $f(x),g(x)$ 是次数不小于 1 的互素多项式, 求证, 必唯一地存在两个多项式 $u(x),v(x)$ 使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1,$$

且 $\deg v(x)<\deg f(x)$, $\deg u(x)<\deg g(x)$.

98. 设 $f(x)$ 是次数大于 0 的首一整系数多项式, 若 $f(0), f(1)$ 都是奇数, 求证 $f(x)$ 没有有理根.

99. 设 $f(x)$ 是次数大于 1 的奇数次有理系数多项式, 且它在有理数域上不可约, 求证: 若 x_1, x_2 是 $f(x)$ 在复数域上的两个不同的根, 则 $x_1 + x_2$ 必不是有理数.

100. 设 A 是实矩阵, 又 $I_n - A$ 的特征值的模长都小于 1, 求证: $0 < |A| < 2^n$.

101. 设

$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) = \left\{a_0 + a_1\sqrt[n]{2} + a_2\sqrt[n]{4} + \cdots + a_{n-1}\sqrt[n]{2^{n-1}} \,:\, a_i \in \mathbb{Q}, 0 \leqslant i \leqslant n-1\right\}$$

证明 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 是一个数域, 并求 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 做为 $\mathbb{Q}$ 上线性空间的一组基.

102. 设 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式, φ 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 是 V 中的向量, 满足

$$\varphi(\alpha_i) = \alpha_{i+1}\,(i = 1, 2, \dots, n-1), \quad \varphi(\alpha_n) = -a_n\alpha_1 - a_{n-1}\alpha_2 - \cdots - a_1\alpha_n.$$

证明 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 V 的一组基.

103. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 存在可逆复矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = B$, 证明存在可逆实矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ = B$.

104. 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足 $\mathrm{rank}(ABA) = \mathrm{rank}(A)$, 求证: AB 与 BA 相似.

105. 设 A, B 为 n 阶方阵, 则 AB 与 BA 相似的充要条件是 $\mathrm{rank}((AB)^i) = \mathrm{rank}((BA)^i)\,(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

106. 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足 $\mathrm{rank}(ABA) = r(B)$, 求证: AB 与 BA 相似.

107. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 又 $\varphi(x) = f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 单调递减, 证明 $f(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$.

108. 计算积分

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x\,.$$

109. 讨论广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,\mathrm{d}x$$

在何时绝对收敛或条件收敛.

110. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一阶连续可导, 且 $x \to +\infty$ 时, $f(x)$ 单调递减趋于 0, 证明无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\int_a^{+\infty} xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

111. 设 $\{a_n\}$ 是正数列, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = A < +\infty$, 且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} = 1$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 1.$$

112. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{a_{n+k}}{n+k}$.

113. 设 $f(x) \in C[1, +\infty)$, 对任意 $x \in [1, +\infty)$, 有 $f(x) > 0$, 且 $\lim_{x\to+\infty}\ln(f(x))/\ln(x) = -\lambda$, 证明: $\lambda > 1$ 时 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.[2]

[2]数列形式下的该判别法称为**对数判别法**

114. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调, 并且积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

并且举反例说明 "去掉单调条件, 结论则不成立."

115. 设 V 是 n 维线性空间, 对于整数 $k \geqslant n$, 证明存在一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in V$, 使得其中任意 n 个线性无关.

116. 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同时敛散.

117. 设对任意 $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ 收敛, 证明下述级数收敛 (利用绝对收敛函数重排不改变敛散性与级数值):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

118. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{n}]}/n^p$ 的敛散性.

119. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二次连续可微, 且有 $\lim_{x\to 0} f(x)/x = 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)$ 绝对收敛.

120. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

121. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 若 $AB = BA$, 则 A, B 至少有一个公共的特征向量.

122. 设 φ 是 n 维复线性空间 V 上的线性变换, 求证 φ 可对角化的充要条件是对 φ 的任一特征值 λ_0, 总有 $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0 I) \cap \mathrm{Im}(\varphi - \lambda_0 I) = 0$.

*123. 设在数域 $\mathbb{K}$ 上, 一元多项式 $f(x) = f_1 f_2$, 且 $(f_1, f_2) = 1$, V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, φ 是 V 上的线性变换, 证明 $\mathrm{Ker}\, f(\varphi) = \mathrm{Ker}\, f_1(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}\, f_2(\varphi)$.

124. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可微, 且对任意 $x \in [a, +\infty)$, 都有

$$f(x+1) - f(x) = f'(x)$$

若 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = c$, 证明 $f'(x) = c$ 在 $[a, +\infty)$ 上恒成立.

125. 设 $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 对于 $\alpha, \beta > 0$, 且 $\alpha + \beta > 1$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}/n^{\beta} < +\infty$.

126. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 对任意 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, 都有 $x'Ax > 0$, 利用 61 题证明 $|A| > 0$.

127. 设有 n 阶分块对角阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix}$$

其中 A_i 与 B_i 为同阶方阵, 假定矩阵 A_i 适合非零多项式 $g_i(x)$, 且 $g_i(x)\,(i = 1, \ldots, k)$ 两两互素. 求证: 若对于每个 i, 存在多项式 $f_i(x)$, 使 $B_i = f_i(A_i)$, 则必存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B = f(A)$.

128. 设 n 阶方阵 A 的秩为 $n-1$, B 是同阶非零阵, 且有 $AB = BA = 0$, 证明: 存在不超过 $n-1$ 阶的多项式 $f(x)$, 使得 $B = f(A)$.

*129. 设 V 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, φ 是 V 上的线性变换, 其特征多项式与极小多项式分别设为 $f(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$, 设

$$f(\lambda)=P_1(\lambda)^{r_1}P_2(\lambda)^{r_2}\dots P_t(\lambda)^{r_t},\quad m(\lambda)=P_1(\lambda)^{s_1}P_2(\lambda)^{s_2}\dots P_t(\lambda)^{s_t}$$

分别为 $f(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$ 的不可约分解, 其中 $P_i(\lambda)$ 为 $\mathbb{K}$ 上互异的首一不可约多项式, $r_i,s_i>0\,(i=1,2,\dots,t)$. 设 $V_i=\operatorname{Ker}P_i(\varphi)^{r_i}$, $U_i=\operatorname{Ker}P_i(\varphi)^{s_i}\,(i=1,2,\dots,t)$. 求证:

(1) $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_t$, $U=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_t$, 且 $U_i=V_i\,(i=1,2,\dots,t)$;

(2) $\varphi|_{V_i}$ 的特征多项式为 $P_i(\lambda)^{r_i}$, 极小多项式为 $P_i(\lambda)^{s_i}$. 特别地, $\dim V_i=r_i\deg P_i(\lambda)$.

130. 证明任一 n 阶复矩阵 A 都相似于一个复对称阵.

131. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 求证: A 为半正定阵或半负定阵的充要条件是对任意满足 $\alpha' A\alpha=0$ 的 n 维实向量 α, 都有 $A\alpha=0$.

132. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 上可导, 且 $f(a)=f(b)$, 若 $|f'(x)|\leqslant 1$, 证明对任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$, 都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{(b-a)}{2}.$$

133. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(1)=0$, 证明 $\{f(x)x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

134. 设 $p(x),q(x),r(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的正次数多项式, 且 $p(x)$ 与 $q(x)$ 互素, $\deg r(x)<\deg p(x)+\deg q(x)$, 证明存在数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式 $u(x),v(x)$, 满足 $\deg u(x)<\deg p(x)$, $\deg v(x)<\deg q(x)$, 使得 $r(x)=p(x)v(x)+q(x)u(x)$.

135. (**Dini 定理**) 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续. 如果对每一个 $x\in[a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 关于 n 递减趋于 0. 那么 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

136. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于 x 单调递增, 且 $\{f_n(x)\}$ 收敛于连续函数 $f(x)$. 证明: $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

137. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 记

$$A_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\Big(a+\frac{i}{n}(b-a)\Big)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

证明 $\lim_{n\to\infty}nA_n=(b-a)(f(b)-f(a))/2$.

138. 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, σ,τ 是 V 上的线性变换, 且 $\sigma^2=\tau^2=0$, 且 $\sigma\tau+\tau\sigma=I_V$, 其中 I_V 是 V 上的恒等变换, 证明

(1) $V=\operatorname{Ker}\sigma\oplus\operatorname{Ker}\tau$;

(2) V 必是偶数维线性空间.

139. 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, $f(x)$ 不恒为 0 并且满足 $0\leqslant f(x)\leqslant M$. 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\right)^2+\frac{M^2(b-a)^4}{12}\geqslant\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

140. 计算极限 $\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1\ln x\cos^2(\lambda x)\,\mathrm{d}x$.

*141. 设 $A,B\in\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, 求证: 方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解的充分必要条件是存在可逆阵 P, 使得 $B=PA$.

142. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 & x\\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & 0 & x^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & x^{n-1}\\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} & x^n\end{vmatrix}$$

143. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的单调非增函数, 对于任意 $a\in(0,1)$, 证明: $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant a\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

144. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 且有 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$. 证明:

$$1\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(M+m)^2}{4mM}.$$

145. 设开集 $D\subset\mathbb{R}^2$, $f:D\to\mathbb{R}$, 如果 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域上存在, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 处连续, 那么 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 在 (x_0,y_0) 处存在, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

146. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是一个凸区域, $f:D\to\mathbb{R}$ 有连续的一阶偏导数, 则 f 在 D 内为凸函数的充必条件为对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$, 有 $f(\boldsymbol{y})\geqslant f(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\cdot\nabla f(\boldsymbol{x})$.

147. 设 $\mathscr{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 $n\,(n\geqslant 3)$ 维线性空间 V 上的线性变换, $\mathscr{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+a_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+a_1\lambda+a_0,$$

试证明:

$$a_{n-2}=\frac{1}{2}\big(\mathrm{tr}^2(\mathscr{A})-\mathrm{tr}(\mathscr{A}^2)\big).$$

148. 设 $a\neq 0$, 计算积分:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)}.$$

149. 设 A 是 n 阶实正定阵, $x\in\mathbb{R}^n$ 是非零列向量, 求证:

(1) $A+xx'$ 可逆.

(2) $0<x'(A+xx')^{-1}x<1$.

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 为 $A^{-1}B$ 的全体特征值.

150. 设 A 是 n 阶半正定的实对称阵, S 为 n 阶实反对称阵, 满足 $AS+SA=0$, 证明 $|A+S|>0$ 的充分必要条件为 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(S)=n$.

151. 设 A,B 为 n 阶正定实对称阵, 若 $A-B$ 半正定, 证明 $B^{-1}-A^{-1}$ 为半正定阵.

152. 设 A 是 n 阶正定实对称阵, B 是同阶半正定实对称阵, 求证 $|A+B|\geqslant|A|+|B|$.

153. 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性变换, 求证: φ 是正规算子的充分必要条件是 $\|\varphi(\alpha)\| = \|\varphi^*(\alpha)\|$ 对任意 $\alpha \in V$ 都成立.

*154. 设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性变换, 求证: φ 是正规算子的充分必要条件是若 v 是 φ 属于特征值 λ 的特征向量, 则 v 也是 φ^* 属于特征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量.

同时上三角化/对角化/标准型化

155. 设 n 阶矩阵 $\{A_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ 两两可交换, 即 $A_iA_j = A_jA_i$ 对一切 i, j 都成立, 假定每一个 A_i 均可对角化, 证明: 它们可同时对角化.

156. 若 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 $AB = BA$, 假定 A, B 的特征值都在 $\mathbb{K}$ 中, 证明: 存在 $\mathbb{K}$ 上的可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.

157. 设 A 为 n 阶正定实对称阵, B 为同阶对称阵, 则存在可逆阵 C 使得

$$C'AC = I_n, \quad C'BC = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 $A^{-1}B$ 的特征值.

158. 设 A, B 都是 n 阶半正定实对称矩阵, 证明: 存在可逆阵 C, 使得

$$C'AC = \mathrm{diag}\{\underbrace{1, \dots, 1}_{r\text{个}}, 0, \dots, 0\}, \quad C'BC = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\}$$

159. 设 A 为 n 阶正定实对称阵, S 为同阶实反对称阵, 则存在可逆矩阵 C, 使得

$$C'AC = I_n, \quad C'SC = \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & b_r \\ -b_r & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0\right\}$$

160. 设 $A_i\,(i = 1, 2, \dots, m)$ 是 m 个实对称 (复正规) 矩阵且两两可交换, 证明: 存在正交 (酉) 矩阵 P, 使得 $P'A_iP$ $(P^{\mathrm{H}}A_iP)$ 都是对角阵.

161. 设 A, B 是两个 n 阶实正规矩阵, 且 $AB = BA$, 证明: 存在正交矩阵 P, 使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 同时为如下形状的分块对角矩阵: $\mathrm{diag}\,\{A_1, \dots, A_r, c_{2r+1}, \dots, c_n\}$, 其中 c_i 是实数, A_i 为形如 $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$ 的二阶实矩阵.

162. 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵, 满足 $AB + BA = 0$, 证明: 若 A 半正定, 则存在正交矩阵 P, 使得:

$$P'AP = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0\}, \quad P'BP = \mathrm{diag}\,\{0, \dots, 0, \mu_{r+1}, \dots, \mu_n\}.$$

矩阵/线性算子分解

163. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 则 A 可以分解为 $A = B + C$, 其中 B 为 Hermite 阵, C 为斜 Hermite 阵.

164. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 则 A 可以分解成两个对角阵的乘积, 即 $A = BC$, 且可以任意指定 B 或 C 为可逆阵.

165. 设 A 是 n 阶 (半) 正定实对称阵, 则

(1) 存在主对角线上元素全等于 1 的上三角矩阵 B, 使得 $A = B'DB$, 其中 D 是 (半) 正定对角矩阵;

(2) (**Cholesky 分解**) 存在主对角线上元素全为正 (非负) 的上三角阵 C, 使得 $A = C'C$.

166. (**QR 分解**) 设 A 是 n 阶实 (复) 矩阵, 则 A 可以分解为 $A=QR$, 其中 Q 是正交 (酉) 矩阵, R 是一个上三角阵, 且主对角线上的元素非负, 若 A 可逆, 则这样的分解唯一.

167. (**极分解**) 设 V 是 n 维酉 (欧式) 空间, φ 是 V 上的任一线性算子, 则存在 V 上的酉 (正交) 算子 ω 以及 V 上的半正定自伴随算子 ψ, 使得 $\varphi=\omega\psi$, 其中 ψ 是唯一的, 并且若 φ 是非异线性算子, 则 ω 也唯一 [1].

168. (**极分解**) 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 则存在 n 阶正交阵 Q 以及 n 阶半正定对称阵 S, 使得 $A=QS$. 又设 $B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 则存在 n 阶酉矩阵 U, 以及 n 阶半正定 Hermite 阵 H, 使得 $B=UH$, 上述分解式当 A,B 为非异阵的时候被唯一确定.

169. (**谱分解**) 设 V 是 n 维欧式 (酉) 空间, φ 为 V 上的自伴随 (正规) 算子. $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ 为 φ 的全体不同特征值, W_i 为属于 λ_i 的特征子空间, 则 V 是 $W_i\,(i=1,2,\dots,k)$ 的正交直和. 这时若设 E_i 是 V 到 W_i 的正交投影, 则 φ 有如下分解式:

$$\varphi=\lambda_1E_1+\lambda_2E_2+\cdots+\lambda_kE_k.$$

170. (**奇异值分解**) 设 V,U 分别为 n,m 维欧式 (酉) 空间, $\varphi: V\to U$ 是线性映射, 则存在 V 和 U 的标准正交基, 使 φ 在这两组基下的表示矩阵为 $\left(\begin{smallmatrix}S&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, 其中 $S=\operatorname{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r\}$, $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>0$ 是 φ 的非零奇异值.

171. (**奇异值分解**) 设 A 是 $m\times n$ 的实 (复) 矩阵, 则存在 m 阶正交 (酉) 矩阵 P, n 阶正交 (酉) 矩阵 Q, 使得 $A=P\left(\begin{smallmatrix}S&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)Q$, 其中 $S=\operatorname{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r\}$, $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>0$ 是 A 的非零奇异值.

*172. (**Jordan – Chevalley 分解**) 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 则 A 可以分解为 $A=B+C$, 其中 B,C 符合以下条件:

(1) B 是一个相似可对角化矩阵;

(2) C 是一个幂零阵;

(3) $BC=CB$;

(4) B,C 均可以表示为 A 的多项式.

不仅如此, 上述满足 (1) – (3) 的分解是唯一的.

[1] φ 也可以做这样的分解: $\varphi=\psi_1\omega_1$ 其中 ω_1 为酉 (正交) 算子, ψ_1 为半正定自伴随算子, 这样的分解也叫极分解, 下面矩阵版本的同理.

***173.** 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶复矩阵, $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 是其特征值, 求证: A 是正规矩阵的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^n|\lambda_i|^2=\operatorname{tr}(A^{\mathrm{H}}A)=\sum_{i,j=1}^n|a_{ij}|^2.$$

174. 利用 168 题证明: 存在正交阵 Q_1,Q_2, 使得 $Q_1AQ_2=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$, 并且 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\dots,\lambda_n^2$ 是 $A'A$ 的特征值.

175. 利用 $\cos px$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 展开证明积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad(0<p<1).$$

176. 判断含参变量反常积分 $\int_0^{+\infty}\sqrt{u}\mathrm{e}^{-ux^2}\,\mathrm{d}x$ 对于 $u\in[0,+\infty)$ 的一致收敛性.

177. 计算积分

$$I(r)=\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\,\mathrm{d}x$$

178. 设 $f(x) \in C^1[a,b]$, 记

$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明:

$$\int_a^b (f(x)-A)^2\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)^2\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x\,.$$

179. 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x\ (a^2+b^2\neq 0)$.

180. 已知 $f(x)\in C[-1,1]$, 证明:

$$\lim_{y\to 0+}\int_{-1}^{1}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = \pi f(0).$$

181. 设 A 是 n 阶实对称阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix},\quad b_j\neq 0$$

证明:

(1) $\operatorname{rank}(A)\geqslant n-1$;

(2) A 的特征值各不相同.

182. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ 是 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 的全体特征值, 若有 $\operatorname{rank}(\lambda_i I - A) = \operatorname{rank}(\lambda_i I - A)^2\ (i=1,2,\dots,k)$, 证明 A 可以相似对角化.

183. 证明

$$\int_1^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{\alpha^2}\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)^2\right)\mathrm{d}x$$

在 $(0,1)$ 上一致收敛.

184. 设 $f(x)$ 为单调递减的正值函数, 证明 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ 同时敛散.

185. 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 均是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}\subset\operatorname{Ker}\mathscr{B}$, 证明, 存在线性变换 $\mathscr{T}$, 使得 $\mathscr{B}=\mathscr{T}\mathscr{A}$.

186. 计算极限

$$\lim_{r\to+\infty} r\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sin(rx)\,\mathrm{d}x\,.$$

187. 设数域 $\mathbb{K}$ 上的全体矩阵 $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 上有线性变换 $\sigma(X)=AX-XA$, 其中 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$:

(1) 若 A 为幂零阵, 证明 σ 为幂零变换;

(2) 若 A 有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$, 证明 $\lambda_i-\lambda_j\ (1\leqslant i,j\leqslant n)$ 为 σ 的特征值.

188. 设 $f(x)$ 是实系数多项式, 若有 $f(x)\mid f(x^2+x+1)$, 证明 $2\mid \deg f(x)$.

189. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}y \int_x^y f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^3.$$

190. 设 A, B 都是 n 阶正交阵, 证明 $|\det(A+B)| \leqslant 2^n$.

191. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 若 $AB = BA = 0$, $\operatorname{rank}(A^2) = \operatorname{rank}(A)$, 证明

$$\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

192. 设 V 是 n 维内积空间, $V_1, V_2, \ldots, V_r$ 是 V 的 r 个真子空间, 证明: 存在 V 的一组标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, 使得对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant r$ 都有 $\alpha_i \notin V_j$.

193. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且有界, 证明对任意 $T > 0$, 都存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty}\left(f(x_n+T) - f(x_n)\right) = 0.$$

194. (华师 2020) 计算级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

195. (华师 2020) 计算

$$\oiint_{\Sigma} (z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \sqrt{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 Σ 为抛物面 $z = (x^2+y^2)/2$ 在平面 $x = 0$ 与 $x = 2$ 之间的部分, 方向取下侧.

196. 计算第二型曲线积分

$$\oint_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x-y}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

其中 L 为 $x^2+y^2 = 2$ 的圆周, 方向为逆时针.

197. (浙大 2018) 设 A 为 n 阶非零实方阵, 且 $A^2 = A$, 设 $\operatorname{rank}(A) = r$, 求证 A 正交相似于分块矩阵: $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$, 其中 I_r 为 r 阶单位阵, B 为某一实矩阵.

198. 求抛物面 $x^2+y^2+az = 4a^2$ 将球体 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4az$ 分成两部分的体积之比.

199. 计算第一型曲面积分

$$I = \iint_S \frac{x^3+y^3+z^3}{1-z}\,\mathrm{d}S$$

其中 S 为 $x^2+y^2 = (1-z)^2\,(0 \leqslant z \leqslant 1)$.

200. 计算 $I = \iiint_{\Omega} x^2\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z = x^2+y^2$ 围成的有界区域.

201. 计算第二型曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (2+y^3)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 为 $x = \sqrt{1-2y^2-3z^2}$, 方向取 x 轴正向.

202. 计算积分 $I = \iint_S (x+z)\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 S 是曲面 $x^2+z^2 = 2az\,(a>0)$ 被曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 所截取的有限部分.

203. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 为对称阵, 若 A 正定, 证明 AB 的特征值全为实数.

204. 设 φ 是实数域上 $n\,(n \geqslant 1)$ 维线性空间 V 的一个线性变换, 证明 φ 至少有一个维数是 1 或 2 的不变子空间.

205. 设 A 是 n 阶半正定实对称矩阵, B 是 n 阶实矩阵, 若对于某个正整数 $k \geqslant 2$, 有 $A^kB = BA^k$ 成立, 证明 $AB = BA$.

206. 设函数 $f \in C(\mathbb{R})$, 若有 $f(f(x)) = x$, 证明存在 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得 $f(\xi) = \xi$.

207. 设 f 是有整系数多项式, 若 f 在有理数域上不可约, 证明 f 在复数域上没有重根.

208. 计算

$$I = \oint_L (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2 + x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z\,,$$

其中 L 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ 与 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线的 $z \geqslant 0$ 的部分, 曲线方向为从 z 轴上方向下看是顺时针方向.

209. 计算曲线积分 $I = \int_L z^2\,\mathrm{d}s$, 其中 L 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与 $x + y = 1$ 的交线.

210. 设矩阵 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$, 其中 $n \geqslant 2$, 设 $f(\lambda) = \lambda^n + 2\lambda^{n-1} + 2$, 若有 $f(A) = 0$, 证明 $f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式.

211. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上可导, $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} f'(x) = A \in \mathbb{R}$, 证明 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上一致连续.

212. (中科院 2019) 设有 $n + 1$ 个列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}^n$, A 是一个 n 阶实对称正定阵, α_i' 为 α_i 的转置, 如果满足下列条件:

(1) $\alpha_j \neq 0\,(j = 1, 2, \ldots, n)$;

(2) 对于任意 $i \neq j\,(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, 都有 $\alpha_i' A \alpha_j = 0$;

(3) β 与每个 $\alpha_j\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ 都正交;

证明 $\beta = 0$.

213. (浙大 2020, 与 103 题类似) 若 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 存在 n 阶可逆复方阵 X 使得 $XA + 2BX = 0$, 证明存在可逆实方阵 Y, 使得 $YA + 2BY = 0$.

214. (浙大 2020) 求行列式 $|A|$, 其中 A 的第 (i, j) 元为 $\mathrm{sgn}(i - j)$.

215. 设 $\mathscr{A}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上 $n\,(n \geqslant 1)$ 维线性空间 V 上的线性变换, 证明 $\mathscr{A}$ 至少有一个维数是 1 或 2 的不变子空间.

216. (华师 2021) 设 c_1, c_2, c_3 是多项式 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ 的三个复根, 求 $(c_1c_2 + c_3^2)(c_2c_3 + c_1^2)(c_1c_3 + c_2^2)$.

217. (华师 2021) 设实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d > 0$$

证明: 一定存在 A 的特征向量 $(x, y)' \in \mathbb{R}^2$, 满足 $x, y > 0$.

218. (华师 2021) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, B 是 n 阶实对称正定阵.

(1) 证明: 存在唯一 n 阶实矩阵 C 满足 $BC + CB = A$;

(2) 证明: 对 (1) 中的实矩阵 C, $BC = CB$ 当且仅当 $AB = BA$.

219. 设数列 $\{na_n\}$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

220. 求 $\lim_{n\to+\infty}(I_n/\ln n)$, 其中

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}t\,.$$

*221. 设 $I(x) = \int_0^{+\infty} x^{3/2}\exp(-x^2y^2)\,\mathrm{d}y$, 证明 $I(x)$ 关于 $x \geq 0$ 一致收敛.

222. 计算曲线积分: $I = \int_L (x^2-y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-z^2)\,\mathrm{d}y + (y^2-z^2)\,\mathrm{d}z$, 其中 L 是曲面 $x = \sqrt{2z-y^2-z^2}$ 与 $x+z=1$ 的交线上, 从点 $(0,-1,1)$ 到点 $(0,1,1)$ 的一段有向弧.

*223. 记 $|M|$ 为矩阵 M 的行列式, 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

(1) 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = \left|A+\sqrt{-1}B\right| \cdot \left|A-\sqrt{-1}B\right|.$$

(2) 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|.$$

224. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \sin(1/x)\,\mathrm{d}x & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导?

225. 求积分

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

226. 设 D 是 xOy 平面上由曲线 $y=\sqrt{x}$ 和直线 $y=x$ 围成的图形, 求 D 绕直线 $y=x$ 旋转产生的旋转体的体积.

227. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 证明: $\mathrm{rank}(A)=n$ 的充分必要条件为存在 n 阶实矩阵 B, 使得 $AB+B'A$ 为正定阵.

*228. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 设

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x+\frac{k}{n}\right),$$

证明: 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在任意有限区间上一致收敛.

229. 与 228 很类似, 如果令 $f(x)=\sin(x)$, 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

230. 判断下列级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

*231. 设 $f(x) \in C^2(0,1)$, 满足 $f(0)=f(1)=0$, 且对任意 $x \in (0,1)$, $f(x) \neq 0$, 证明积分不等式

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| \mathrm{d}x > 4.$$

232. 设 V 是 n 维欧式空间, 证明

(1) 对于任意两个不同的单位向量 $\alpha, \beta \in V$, 总存在 V 上的镜面变换 $\mathscr{A}$, 使得 $\mathscr{A}(\alpha) = \beta$;

(2) 证明 V 上的任意正交变换 $\mathscr{B}$ 都可以表示成有限个镜面变换的乘积, 即存在 m 个镜面变换 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \dots, \mathscr{A}_m$, 使得

$$\mathscr{B} = \mathscr{A}_1 \mathscr{A}_2 \dots \mathscr{A}_m.$$

233. 计算积分 $I = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)\, \mathrm{d}x$, 其中 a, b 不全为 0.

234. 设 A 为 n 阶正定阵, $X \in \mathbb{R}^n$ 为非零列向量, 证明

(1) 矩阵 $A + XX'$ 可逆,

(2) $0 < X'(A + XX')^{-1} X < 1$.

235. $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 假设 $A^2 = A$, 且对任意的 $X \in \mathbb{R}^n$, 有

$$X'A'AX \leqslant X'X,$$

证明 A 为对称阵.

236. (中科院 2021) 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 上的可逆线性变换, $v_1, v_2, \dots, v_m$ 张成 V, 且

$$\mathscr{A}(v_i) \in \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

求证 $\mathscr{A}$ 可对角化, 且特征值都为单位根.

237. (中科院 2021) 证明 $\left|\int_a^{a+1} \sin t^2\, \mathrm{d}t\right| \leqslant a^{-1}\,(a > 0)$, 也可以证明更强的结论: $\left|\int_a^{a+1} \sin t^2\, \mathrm{d}t\right| < a^{-1}\,(a > 0)$.

238. (中科院 2021) 求积分

$$I = \iint_D \frac{x^2 + y^2 - 2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D: x^2 + y^2 \geqslant 2,\ x \leqslant 1$.

239. 计算积分

$$\iint_S (x + z)\, \mathrm{d}S\,,$$

其中 S 是曲面 $x^2 + y^2 = 2az\,(a > 0)$ 被曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所截取的有限部分.

240. 设 $W = \{A : \mathrm{tr}(A) = 0, A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\}$, 证明 W 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 的子空间, 并且求它的一组基.

提示: W 是子空间是显然的. 下面求维数: 可知 $W_1 = \left\{\sum_{i \neq j} x_{ij} E_{ij} : x_{ij} \in \mathbb{R}\right\}$ 是 W 的 $(n-1)n$ 维的子空间, 而 $W_2 = \left\{\sum_{i=1}^n x_i E_{ii} : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\right\}$ 是 W 的 $n-1$ 维的子空间, 且 $W_2 \cap W_1 = 0$. 则

$$\dim W \geqslant \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 = n^2 - 1$$

又因为 W 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 的真子空间, 则 $\dim W = n^2 - 1$, $W = W_1 \oplus W_2$.

答案: W 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 的 $n^2 - 1$ 维的子空间, 且 $\left\{E_{ij} : i \neq j\right\} \cup \{E_{11} - E_{kk} : k > 1\}$ 是 W 的一组基.

241. 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $f''(x)$ 有界, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 证明: $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

提示 (法一): 由 $f(x) \to 0$ 可得 x 足够大时 $|f(x)|$ 足够小, 由 Lagrange 中值定理可以得到 x 附近的某个 ξ, 使得 $f'(\xi)$ 足够小, 再利用 $f'(x)$ 在 ξ 点的 Taylor 展开, 搭配二阶导有界的条件, 即可说明对每个足够大的 x, 都有 $|f'(x)|$ 足够小, 命题得证.

提示 (法二): 取足够大的 $N \in \mathbb{N}$, 对任意足够大的 x 将 $f(x+1/N)$ 在 x 处 Taylor 展开, 就可以得到 $f'(x)$ 的表达式, 再利用 $f''(x)$ 有界, 以及 $f(x) \to 0$, 即可说明.