

如果想启用提示, 请添加宏包 exam 的选项 hint

其中标红加星的题, 如 “*3.”, 为较重要的题, 可以简化一些其他的证明. 不标红只加星的题, 如 “*3.”, 为折磨题, 记一下结论就好了.

1. 设 Γ 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和平面 $x + y + z = 0$ 交成的圆周, 从第一卦限内看 Γ , 它的方向是逆时针. 计算第二型曲线积分

$$\int_{\Gamma} z dx + x dy + y dz.$$

答案: $\pi a^2 / \sqrt{3}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 证明 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上不一致连续.
3. 设 $\{a_n\}$ 为非负递减的数列, 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.
4. (Frullani 积分) 设 $a, b > 0, f \in C[0, +\infty)$, 证明:

- (1) 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$ 存在, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}.$$

- (2) 如果无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)/x dx$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

- (3) 如果 $f(+\infty)$ 存在, 且积分 $\int_0^1 f(x)/x dx$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}.$$

5. 计算积分

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx.$$

答案:

$$I(r) = \begin{cases} 0 & , |r| \leq 1; \\ 2\pi \ln |r| & , |r| > 1. \end{cases}$$

6. 设 $p > 0$, 讨论积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^p} dx$$

的敛散性.

答案: 当 $0 < p < 2$ 时收敛, $p \geq 2$ 时发散.

7. 求积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x)/x dx$.

答案: $\pi/2$

8. 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

9. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin(t) dt, \quad \alpha > 0$$

关于 u 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

10. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin(t) du, \quad \alpha > 0$$

关于 t 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

*11. 计算 Fresnel 积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

12. 计算积分 $\int_0^{+\infty} \exp(-ax^2) \cos(bx) dx$, 其中 $a > 0, b \in \mathbb{R}$.

答案:

$$I(b) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right).$$

13. 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha(x) dx$, 其中 $|\alpha| < 1$.

*14. 设 \mathbb{K} 是数域, $A \in M_m(\mathbb{K}), B \in M_n(\mathbb{K})$, 且 A, B 没有相同的特征值, 证明矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解.

15. 如 14 题, 可以进一步证明逆命题也成立, 即: 如果 $AX = XB$ 只有零解, 则 A, B 无公共特征值.

16. 设 A 是 4 阶方阵, 满足 $\text{tr}(A^i) = i (i = 1, 2, 3, 4)$, 求 $|A|$.

17. n 阶方阵可对角化的充分必要条件.

18. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积, 在 $x = 1$ 处左连续, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 x^n f(x) dx}{\int_0^1 x^n dx} = f(1).$$

19. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2 = AA'$, 证明 A 为实对称阵.

20. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2 = A, B^2 = B$ 以及 $(A+B)^2 = A+B$, 证明 $AB = BA = 0$.

21. 设 A, B 都是 n 阶矩阵, 若 $A^k = 0$, 且 $AB + BA = B$, 证明 $B = 0$.

22. A, B 是 n 阶方阵, $A+B=AB$, 求证

(1) $AB = BA$,

(2) $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$,

(3) A 可对角化当且仅当 B 可对角化.

*23. 设 $f(x), g(x)$ 为多项式, 且 $(f(x), g(x)) = 1$, A 是 n 阶方阵, 求证: $f(A)g(A) = 0$ 的充分必要条件为 $\text{rank}(f(A)) + \text{rank}(g(A)) = n$.

24. 设 A, B 为实对称阵, 求证:

(1) 若 A 正定, 则存在实可逆阵 P 使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 同时为对角阵;

(2) 若 A, B 半正定, 则 $\text{tr}(AB) \geq 0$, 并且等号成立当且仅当 $AB = 0$.

25. $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, 并且 $A = B + C$, 其中 B 为对称阵, C 为反对称阵, 证明: 若 $A^2 = 0$, 则 $A = 0$.

26. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

27. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi),$$

28. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明对每个 $x \in (a, b)$, 都存在对应的 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

29. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上三阶可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi).$$

30. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\pi/4 - x_n)$, 其中:

$$x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}.$$

31. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$, 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n}{p_n} = 0.$$

32. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n! a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = 0.$$

33. 面积原理

(1) 设 f 是一个非负的递增函数, 则当 $\xi \geq m$ 时有

$$\left| \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx \right| \leq f(\xi).$$

(2) 设 f 是一个非负的递减函数, 则极限

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx \right) = \alpha$$

存在, 且 $0 \leq \alpha \leq f(m)$. 更进一步, 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 那么

$$\left| \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx - \alpha \right| \leq f(\xi - 1),$$

这里 $\xi \geq m + 1$.

34. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二次可微, 且 $f(a)f(b) < 0$, 对任意 $x \in [a, b]$ 都有 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$. 证明序列 $\{x_n\}$ 极限存在, 其中 $x_1 \in [a, b]$, $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$), 进而可以证明此极限为方程 $f(x) = 0$ 的根.

35. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{y_n\} : y_1 = 1, 2y_{n+1} = y_n + \sqrt{y_n^2 + a_n} (n = 1, 2, \dots)$. 证明 $\{y_n\}$ 是单调递增的收敛数列.
36. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: 当 $n < m$ 时, $|x_n - x_m| > 1/n$. 证明数列 $\{x_n\}$ 无界.
37. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$.
38. n 阶方阵的每行之和与每列之和均为 0, 证明其所有代数余子式全相等.
39. 设函数 $f(x)$ 定义在 $(a, +\infty)$, 且 $f(x)$ 在每个有限区间 (a, b) 内都有界, 并满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = A.$$

证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)/x) = A$.

40. 证明: (1) 关于 x 的方程 $\sum_{k=1}^n e^{kx} = n+1$ 在 $(0, 1)$ 上存在唯一的实根 a_n ; (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.
41. 设 $a > 0$, 求积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\pi/2}} \frac{1}{1 + \tan^a y^2} dy$$

42. α, β 是 n 维列向量, A 是 n 阶方阵, 求证: $|A + \alpha\beta'| = |A| + \beta' A^* \alpha$.
43. 设 $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R}), B \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, 且

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

求证 $BA = 9I$.

44. $A \in M_n(\mathbb{R}), A^2 = A$, 若对任意列向量 x , 都有 $x' A' A x \leq x' x$, 证明 $A' = A$.
45. 证明对任意 $m \times n$ 矩阵 A , 都有 $\text{rank}(AA') = \text{rank}(A)$.
46. $f(x) \in C[a, b]$, 证明函数 $m(x) = \min_{a \leq \xi \leq x} f(\xi)$ 在 $[a, b]$ 连续.
47. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, $f''(x)$ 有界, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
48. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上三阶连续可导, 且对任意的 $h > 0$, 有

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

求证: $f(x)$ 为次数至多为 2 的多项式.

49. 设 $A' = A$, 证明 A 可逆当且仅当存在矩阵 B 使得 $AB + B'A$ 正定.
50. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, $f(a) = 0$, 并且存在实数 $A > 0$, 使得对任意 $x \in [a, b]$, 都有 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$, 证明在 $[a, b]$ 上, $f(x) \equiv 0$.
51. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上一阶连续可导, 且

$$f'(x) = \frac{1}{1 + f^2(x)} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right)$$

证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

52. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 若对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x+n) = 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
53. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且对任意 $\delta > 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n\delta) = 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
54. 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上一致连续, 则存在正实数 a, b , 使得 $|f(x)| \leq a|x| + b$.
55. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续, 证明 $|f(x)/x|$ 在 $[1, +\infty)$ 有界.
56. 证明欧式空间中两标准正交基的过渡矩阵为正交阵.
57. 设 α 是欧式空间 V 中的一个非零向量, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 是 V 中的 p 个向量, 满足

$$(a_i, a_j) \leq 0, (\alpha_i, \alpha) > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, p, i \neq j$$

证明

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 线性无关;
- (2) n 维欧式空间中最多有 $n+1$ 个向量, 使其两两互成钝角;
- (3) n 维欧式空间中一定存在 $n+1$ 个向量, 使其两两互为钝角.
58. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, 且 $AB = BA$, 利用线性方程组的知识证明

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \text{rank}(AB)$$

59. 设 $B \in M_{n \times 2}(\mathbb{C})$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

若 $A = BC$, 且 CB 的特征多项式为 $x^2 - 2x + 1$, 求 A 的特征值, 并求 $AX = 0$ 的基础解系.

60. 计算 n 阶 b -循环行列式:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ ba_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ ba_{n-1} & ba_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ba_2 & ba_3 & ba_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

- *61. 设 A 是 n 阶实反对称阵, $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ 是同阶的对角阵, 且 $d_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 求证 $|A+D| > 0$, 特别地, $I_n + A$ 与 $I_n - A$ 都是非异阵.

62. 如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 适合条件:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则称 A 为严格对角占优阵, 求证, 严格对角占优阵必是满秩阵, 若上述条件改为:

$$a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

求证 $|A| > 0$.

63. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 对 $[a, b]$ 上任意一个闭区间 $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, 对介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的任一常数 l , 方程

$$f(x) = l$$

在 $[x_1, x_2]$ 上有且仅有有限个解, 证明 $f(x) \in C[a, b]$.

64. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = A$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 其中 $A \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$.

65. 已知 $A \in M_n(\mathbb{K})$, 且 $\text{tr}(A) = 0$, 证明

- (1) 存在数域 \mathbb{K} 上的可逆阵 C , 使得 $C^{-1}AC$ 为主对角元全为 0 的矩阵.
- (2) 存在 $X, Y \in M_n(\mathbb{K})$, 使得 $XY - YX = A$.
- (3) 令 U 为 $M_n(\mathbb{K})$ 中所有形如 $XY - YX$ 的矩阵组成的集合, 证明 U 是 $M_n(\mathbb{K})$ 的一个线性子空间.

66. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)^n$$

67. 设 φ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换, W 是 φ 的不变子空间, 且 $V = \text{Im } \varphi \oplus W$, 证明

$$V = \text{Im } \varphi \oplus \text{Ker } \varphi.$$

68. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 且 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 1$, $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, 证明 A 相似于 B .

69. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 求证: 必存在正整数 m , 使得

$$\text{Im } \varphi^m = \text{Im } \varphi^{m+1}, \quad \text{Ker } \varphi^m = \text{Ker } \varphi^{m+1}, \quad V = \text{Im } \varphi^m \oplus \text{Ker } \varphi^{m+1}.$$

70. 使用 Jordan 标准型证明迹非 0 的秩 1 矩阵可对角化.

71. 设 A 是 n 阶实对称阵, 证明: A 可逆的充分必要条件为存在矩阵 B , 使得 $AB + B'A$ 正定.

72. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 其中 A 是幂零阵, 且 $AB = BA$, 求证: $|B| = |A + B|$.

73. 设函数 f 在 $x = 0$ 连续, 并且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A,$$

求证: $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0) = A$.

74. 设 x_n 是 $\tan x = x$ 在 $(n\pi, n\pi + \pi/2)$ 上的解,

- (1) 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\pi + \pi/2 - x_n) = 0$,
- (2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(n\pi + \pi/2 - x_n)$.

75. 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 且 $f(0) = 0$, 并假设有实数 A 使得 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 证明 $f(x) \equiv 0$ ($x \in (0, +\infty)$).

76. 设偶函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处二阶可导, 且 $f(0) = 1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (f(1/n) - 1)$ 绝对收敛.

77. 设 f 在 $[a, b]$ 上可导, 且 f' 在 $[a, b]$ 上可积, $f(a) = 0$, 证明:

$$2 \int_a^b (f(x))^2 dx \leq (b-a)^2 \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

78. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 且存在实数 $A > 0$, 使得 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$, 证明 $f(x) \equiv 0$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 均成立.

79. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的二阶导数, $f(0) = f(1) = 0$, 且对任意的 $x \in (0, 1)$, 都有 $f(x) \neq 0$, 证明

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4$$

80. 设 $f(x) \in C^2[a, b]$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

81. 设 x_1, x_2, x_3 是多项式 $f(x) = x^3 + ax + 1$ 的三个根, 求一个首一多项式以 x_1^2, x_2^2, x_3^2 为根.

82. 设 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 内可微, 且 $f'(x)$ 在 (a, b) 内有界, 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

83. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$, $\lambda \in (0, 1)$, 恒有 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. 证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

84. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 且满足下列条件之一, 则有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

(1) $f''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有界;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在.

85. 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 加上下面任一条件即可推出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在,

(2) $\int_a^{+\infty} f'(x) dx$ 收敛,

(3) $f(x)$ 单调, 这时有更强的结果: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$,

(4) $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续,

(5) $f'(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

86. 设 A 是三阶正交矩阵, 且 $|A| = 1$, 证明存在正交阵 B , 使得 $A = B^2$.

87. 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有定义, 且在任何有限闭区间上可积, 证明: 对任何闭区间 $[a, b]$, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

88. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\{2x_{n+1} + x_n\}$ 收敛, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

89. (Young 不等式) 设 $y = f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上严格递增的连续函数, 且满足 $f(0) = 0$, 证明对任意的 $a, b > 0$, 有

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy.$$

90. 设 $f, g \in C[a, b]$, g 在 $[a, b]$ 上不变号, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

91. 设 A 为 3 阶非零实矩阵, $A^T = A^*$, 且 $|I + A| = |I - A| = 0$, 计算行列式 $|A^2 - A - 3I|$.

92. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, $g(x)$ 是 \mathbb{R} 上以 $T > 0$ 为周期的连续函数, 且 $\int_0^T g(x) dx = 0$, 求

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(\lambda x) dx$$

*93. 设 $f(x)$ 是实多项式, 且对任意实数 r , 都有 $f(r) \geq 0$. 证明存在实多项式 $g(x), h(x)$ 使得 $f(x) = g^2(x) + h^2(x)$.

94. 设 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且适合条件:

$$\varphi_i^2 = \varphi_i, \quad \varphi_i \varphi_j = 0 \ (i \neq j), \quad \bigcap_{i=1}^m \text{Ker } \varphi_i = 0,$$

求证: $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \varphi_i$.

95. 设 f 在 $(0, 1]$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} f'(x) = A \in \mathbb{R}$, 证明 f 在 $(0, 1]$ 上一致连续.

96. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可积, $f(1) = 0, f'(1) = a$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n^2 x^n f(x) dx = -a.$$

97. 设 $f(x), g(x)$ 是次数不小于 1 的互素多项式, 求证, 必唯一地存在两个多项式 $u(x), v(x)$ 使得

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1,$$

且 $\deg v(x) < \deg f(x), \deg u(x) < \deg g(x)$.

98. 设 $f(x)$ 是次数大于 0 的首一整系数多项式, 若 $f(0), f(1)$ 都是奇数, 求证 $f(x)$ 没有有理根.

99. 设 $f(x)$ 是次数大于 1 的奇数次有理系数多项式, 且它在有理数域上不可约, 求证: 若 x_1, x_2 是 $f(x)$ 在复数域上的两个不同的根, 则 $x_1 + x_2$ 必不是有理数.

100. 设 A 是实矩阵, 又 $I_n - A$ 的特征值的模长都小于 1, 求证: $0 < |A| < 2^n$.

101. 设

$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) = \left\{ a_0 + a_1 \sqrt[n]{2} + a_2 \sqrt[n]{4} + \dots + a_{n-1} \sqrt[n]{2^{n-1}} : a_i \in \mathbb{Q}, 0 \leq i \leq n-1 \right\}$$

证明 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 是一个数域, 并求 $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ 做为 \mathbb{Q} 上线性空间的一组基.

102. 设 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ 是数域 \mathbb{K} 上的不可约多项式, φ 是 \mathbb{K} 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 是 V 中的向量, 满足

$$\varphi(\alpha_i) = \alpha_{i+1} \ (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad \varphi(\alpha_n) = -a_n \alpha_1 - a_{n-1} \alpha_2 - \dots - a_1 \alpha_n.$$

证明 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 V 的一组基.

103. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 存在可逆复矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 证明存在可逆实矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ = B$.

104. 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足 $\text{rank}(ABA) = \text{rank}(A)$, 求证: AB 与 BA 相似.

105. 设 A, B 为 n 阶方阵, 则 AB 与 BA 相似的充要条件是 $\text{rank}((AB)^i) = \text{rank}((BA)^i) (1 \leq i \leq n-1)$.

106. 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足 $\text{rank}(ABA) = r(B)$, 求证: AB 与 BA 相似.

107. 设 f 在 \mathbb{R} 上连续, 又 $\varphi(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$ 单调递减, 证明 $f(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$.

108. 计算积分

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

109. 讨论广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$$

在何时绝对收敛或条件收敛.

110. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一阶连续可导, 且 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 单调递减趋于 0, 证明无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛当且仅当 $\int_a^{+\infty} x f'(x) dx$ 收敛.

111. 设 $\{a_n\}$ 是正数列, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = A < +\infty$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 1$, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 1.$$

112. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_{n+k}}{n+k}$.

113. 设 $f(x) \in C[1, +\infty)$, 对任意 $x \in [1, +\infty)$, 有 $f(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x))/\ln(x) = -\lambda$, 证明: $\lambda > 1$ 时 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.¹

114. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调, 并且积分 $\int_0^1 f(x) dx$ 收敛, 证明:

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

并且举反例说明“去掉单调条件, 结论则不成立.”

115. 设 V 是 n 维线性空间, 对于整数 $k \geq n$, 证明存在一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in V$, 使得其中任意 n 个线性无关.

116. 设 $\{a_n\}$ 是递减正数列, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同时敛散.

117. 设对任意 $n \in \mathbb{N}, a_n > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ 收敛, 证明下述级数收敛 (利用绝对收敛函数重排不改变敛散性与级数值):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

118. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{n}]} / n^p$ 的敛散性.

119. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上二次连续可微, 且有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)$ 绝对收敛.

¹ 数列形式下的该判别法称为对数判别法

120. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

121. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 若 $AB = BA$, 则 A, B 至少有一个公共的特征向量.

122. 设 φ 是 n 维复线性空间 V 上的线性变换, 求证 φ 可对角化的充要条件是对 φ 的任一特征值 λ_0 , 总有 $\text{Ker}(\varphi - \lambda_0 I) \cap \text{Im}(\varphi - \lambda_0 I) = 0$.

*123. 设在数域 \mathbb{K} 上, 一元多项式 $f(x) = f_1 f_2$, 且 $(f_1, f_2) = 1$, V 是数域 \mathbb{K} 上的 n 维线性空间, φ 是 V 上的线性变换, 证明 $\text{Ker } f(\varphi) = \text{Ker } f_1(\varphi) \oplus \text{Ker } f_2(\varphi)$.

124. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可微, 且对任意 $x \in [a, +\infty)$, 都有

$$f(x+1) - f(x) = f'(x)$$

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = c$, 证明 $f'(x) = c$ 在 $[a, +\infty)$ 上恒成立.

125. 设 $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 对于 $\alpha, \beta > 0$, 且 $\alpha + \beta > 1$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha / n^\beta < +\infty$.

126. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 对任意 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, 都有 $x'Ax > 0$, 利用 61 题证明 $|A| > 0$.

127. 设有 n 阶分块对角阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix}$$

其中 A_i 与 B_i 为同阶方阵, 假定矩阵 A_i 适合非零多项式 $g_i(x)$, 且 $g_i(x) (i = 1, \dots, k)$ 两两互素. 求证: 若对于每个 i , 存在多项式 $f_i(x)$, 使 $B_i = f_i(A_i)$, 则必存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B = f(A)$.

128. 设 n 阶方阵 A 的秩为 $n-1$, B 是同阶非零阵, 且有 $AB = BA = 0$, 证明: 存在不超过 $n-1$ 阶的多项式 $f(x)$, 使得 $B = f(A)$.

*129. 设 V 为数域 \mathbb{K} 上的 n 维线性空间, φ 是 V 上的线性变换, 其特征多项式与极小多项式分别设为 $f(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$, 设

$$f(\lambda) = P_1(\lambda)^{r_1} P_2(\lambda)^{r_2} \dots P_t(\lambda)^{r_t}, \quad m(\lambda) = P_1(\lambda)^{s_1} P_2(\lambda)^{s_2} \dots P_t(\lambda)^{s_t}$$

分别为 $f(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$ 的不可约分解, 其中 $P_i(\lambda)$ 为 \mathbb{K} 上互异的首一不可约多项式, $r_i, s_i > 0 (i = 1, 2, \dots, t)$. 设 $V_i = \text{Ker } P_i(\varphi)^{r_i}$, $U_i = \text{Ker } P_i(\varphi)^{s_i} (i = 1, 2, \dots, t)$. 求证:

(1) $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_t$, $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_t$, 且 $U_i = V_i (i = 1, 2, \dots, t)$;

(2) $\varphi|_{V_i}$ 的特征多项式为 $P_i(\lambda)^{r_i}$, 极小多项式为 $P_i(\lambda)^{s_i}$. 特别地, $\dim V_i = r_i \deg P_i(\lambda)$.

130. 证明任一 n 阶复矩阵 A 都相似于一个复对称阵.

131. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 求证: A 为半正定阵或半负定阵的充要条件是对任意满足 $\alpha' A \alpha = 0$ 的 n 维实向量 α , 都有 $A \alpha = 0$.

132. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 上可导, 且 $f(a) = f(b)$, 若 $|f'(x)| \leq 1$, 证明对任意的 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 都有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{(b-a)}{2}.$$

133. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(1) = 0$, 证明 $\{f(x)x^n\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

134. 设 $p(x), q(x), r(x)$ 是数域 \mathbb{K} 上的正次数多项式, 且 $p(x)$ 与 $q(x)$ 互素, $\deg r(x) < \deg p(x) + \deg q(x)$, 证明存在数域 \mathbb{K} 上的多项式 $u(x), v(x)$, 满足 $\deg u(x) < \deg p(x), \deg v(x) < \deg q(x)$, 使得 $r(x) = p(x)v(x) + q(x)u(x)$.
135. (Dini 定理) 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在有限闭区间 $[a, b]$ 上连续. 如果对每一个 $x \in [a, b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 关于 n 递减趋于 0. 那么 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 0.
136. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上关于 x 单调递增, 且 $\{f_n(x)\}$ 收敛于连续函数 $f(x)$. 证明: $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.
137. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 记

$$A_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) - \int_a^b f(x) dx,$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} nA_n = (b-a)(f(b) - f(a))/2$.

138. 设 V 是数域 \mathbb{K} 上的 n 维线性空间, σ, τ 是 V 上的线性变换, 且 $\sigma^2 = \tau^2 = 0$, 且 $\sigma\tau + \tau\sigma = I_V$, 其中 I_V 是 V 上的恒等变换, 证明
- (1) $V = \text{Ker } \sigma \oplus \text{Ker } \tau$;
- (2) V 必是偶数维线性空间.
139. 设函数 $f(x) \in C[a, b]$, $f(x)$ 不恒为 0 并且满足 $0 \leq f(x) \leq M$. 证明:

$$\left(\int_a^b f(x) \cos x dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \sin x dx\right)^2 + \frac{M^2(b-a)^4}{12} \geq \left(\int_a^b f(x) dx\right)^2.$$

140. 计算极限 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln x \cos^2(\lambda x) dx$.

*141. 设 $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, 求证: 方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解的充分必要条件是存在可逆阵 P , 使得 $B = PA$.

142. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & 0 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & x^{n-1} \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

143. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的单调非增函数, 对于任意 $a \in (0, 1)$, 证明: $\int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^1 f(x) dx$.

144. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积, 且有 $0 < m \leq f(x) \leq M$. 证明:

$$1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(M+m)^2}{4mM}.$$

145. 设开集 $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, 如果 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 在 (x_0, y_0) 的某个邻域上存在, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 在 (x_0, y_0) 处连续, 那么 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 在 (x_0, y_0) 处存在, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

146. 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个凸区域, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 有连续的一阶偏导数, 则 f 在 D 内为凸函数的充必要条件为对任意 $x, y \in D$, 有 $f(y) \geq f(x) + (y - x) \cdot \nabla f(x)$.

147. 设 \mathcal{A} 为数域 \mathbb{K} 上的 $n (n \geq 3)$ 维线性空间 V 上的线性变换, \mathcal{A} 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

试证明:

$$a_{n-2} = \frac{1}{2}(\text{tr}^2(\mathcal{A}) - \text{tr}(\mathcal{A}^2)).$$

148. 设 $a \neq 0$, 计算积分:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}.$$

149. 设 A 是 n 阶实正定阵, $x \in \mathbb{R}^n$ 是非零列向量, 求证:

(1) $A + xx'$ 可逆.

(2) $0 < x'(A + xx')^{-1}x < 1$.

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 $A^{-1}B$ 的全体特征值.

150. 设 A 是 n 阶半正定的实对称阵, S 为 n 阶实反对称阵, 满足 $AS + SA = 0$, 证明 $|A + S| > 0$ 的充分必要条件为 $\text{rank}(A) + \text{rank}(S) = n$.

151. 设 A, B 为 n 阶正定实对称阵, 若 $A - B$ 半正定, 证明 $B^{-1} - A^{-1}$ 为半正定阵.

152. 设 A 是 n 阶正定实对称阵, B 是同阶半正定实对称阵, 求证 $|A + B| \geq |A| + |B|$.

153. 设 V 是 n 维西空间, φ 是 V 上的线性变换, 求证: φ 是正规算子的充分必要条件是 $\|\varphi(\alpha)\| = \|\varphi^*(\alpha)\|$ 对任意 $\alpha \in V$ 都成立.

154. 设 V 是 n 维西空间, φ 是 V 上的线性变换, 求证: φ 是正规算子的充分必要条件是若 v 是 φ 属于特征值 λ 的特征向量, 则 v 也是 φ^ 属于特征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量.

同时上三角化/对角化/标准型化

155. 设 n 阶矩阵 $\{A_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ 两两可交换, 即 $A_i A_j = A_j A_i$ 对一切 i, j 都成立, 假定每一个 A_i 均可对角化, 证明: 它们可同时对角化.

156. 若 $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, 且 $AB = BA$, 假定 A, B 的特征值都在 \mathbb{K} 中, 证明: 存在 \mathbb{K} 上的可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 都是上三角矩阵.

157. 设 A 为 n 阶正定实对称阵, B 为同阶对称阵, 则存在可逆阵 C 使得

$$C'AC = I_n, \quad C'BC = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 $A^{-1}B$ 的特征值.

158. 设 A, B 都是 n 阶半正定实对称矩阵, 证明: 存在可逆阵 C , 使得

$$C'AC = \text{diag}\{\underbrace{1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0\}, \quad C'BC = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\}$$

159. 设 A 为 n 阶正定实对称阵, S 为同阶实反对称阵, 则存在可逆矩阵 C , 使得

$$C'AC = I_n, \quad C'SC = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & b_r \\ -b_r & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0 \right\}$$

160. 设 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是 m 个实对称 (复正规) 矩阵且两两可交换, 证明: 存在正交 (酉) 矩阵 P , 使得 $P'A_iP$ ($P^H A_i P$) 都是对角阵.

161. 设 A, B 是两个 n 阶实正规矩阵, 且 $AB = BA$, 证明: 存在正交矩阵 P , 使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 同时为如下形状的分块对角矩阵: $\text{diag} \{A_1, \dots, A_r, c_{2r+1}, \dots, c_n\}$, 其中 c_i 是实数, A_i 为形如 $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$ 的二阶实矩阵.

162. 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵, 满足 $AB + BA = 0$, 证明: 若 A 半正定, 则存在正交矩阵 P , 使得:

$$P'AP = \text{diag} \{\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0\}, \quad P'BP = \text{diag} \{0, \dots, 0, \mu_{r+1}, \dots, \mu_n\}.$$

矩阵/线性算子分解

163. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则 A 可以分解为 $A = B + C$, 其中 B 为 Hermite 阵, C 为斜 Hermite 阵.

164. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则 A 可以分解成两个对角阵的乘积, 即 $A = BC$, 且可以任意指定 B 或 C 为可逆阵.

165. 设 A 是 n 阶 (半) 正定实对称阵, 则

(1) 存在主对角线上元素全等于 1 的上三角矩阵 B , 使得 $A = B'DB$, 其中 D 是 (半) 正定对角矩阵;

(2) (**Cholesky 分解**) 存在主对角线上元素全为正 (非负) 的上三角阵 C , 使得 $A = C'C$.

166. (**QR 分解**) 设 A 是 n 阶实 (复) 矩阵, 则 A 可以分解为 $A = QR$, 其中 Q 是正交 (酉) 矩阵, R 是一个上三角阵, 且主对角线上的元素非负, 若 A 可逆, 则这样的分解唯一.

167. (**极分解**) 设 V 是 n 维酉 (欧式) 空间, φ 是 V 上的任一线性算子, 则存在 V 上的酉 (正交) 算子 ω 以及 V 上的半正定自伴随算子 ψ , 使得 $\varphi = \omega\psi$, 其中 ψ 是唯一的, 并且若 φ 是非异线性算子, 则 ω 也唯一¹.

168. (**极分解**) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 则存在 n 阶正交阵 Q 以及 n 阶半正定对称阵 S , 使得 $A = QS$. 又设 $B \in M_n(\mathbb{C})$, 则存在 n 阶酉矩阵 U , 以及 n 阶半正定 Hermite 阵 H , 使得 $B = UH$, 上述分解式当 A, B 为非异阵的时候被唯一确定.

169. (**谱分解**) 设 V 是 n 维欧式 (酉) 空间, φ 为 V 上的自伴随 (正规) 算子. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 为 φ 的全体不同特征值, W_i 为属于 λ_i 的特征子空间, 则 V 是 $W_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 的正交直和. 这时若设 E_i 是 V 到 W_i 的正交投影, 则 φ 有如下分解式:

$$\varphi = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_k E_k.$$

170. (**奇异值分解**) 设 V, U 分别为 n, m 维欧式 (酉) 空间, $\varphi: V \rightarrow U$ 是线性映射, 则存在 V 和 U 的标准正交基, 使 φ 在这两组基下的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $S = \text{diag} \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ 是 φ 的非零奇异值.

171. (**奇异值分解**) 设 A 是 $m \times n$ 的实 (复) 矩阵, 则存在 m 阶正交 (酉) 矩阵 P , n 阶正交 (酉) 矩阵 Q , 使得 $A = P \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$, 其中 $S = \text{diag} \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ 是 A 的非零奇异值.

*172. (**Jordan - Chevalley 分解**) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则 A 可以分解为 $A = B + C$, 其中 B, C 符合以下条件:

- (1) B 是一个相似可对角化矩阵;
- (2) C 是一个幂零阵;
- (3) $BC = CB$;
- (4) B, C 均可以表示为 A 的多项式.

不仅如此, 上述满足 (1) - (3) 的分解是唯一的.

¹ φ 也可以做这样的分解: $\varphi = \psi_1 \omega_1$ 其中 ω_1 为酉 (正交) 算子, ψ_1 为半正定自伴随算子, 这样的分解也叫极分解, 下面矩阵版本的同理.

*173. 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶复矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是其特征值, 求证: A 是正规矩阵的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \operatorname{tr}(A^H A) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2.$$

174. 利用 168 题证明: 存在正交阵 Q_1, Q_2 , 使得 $Q_1 A Q_2 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 并且 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ 是 $A' A$ 的特征值.

175. 利用 $\cos px$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 展开证明积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad (0 < p < 1).$$

176. 判断含参变量反常积分 $\int_0^{+\infty} \sqrt{u} e^{-ux^2} dx$ 对于 $u \in [0, +\infty)$ 的一致收敛性.

177. 计算积分

$$I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx$$

178. 设 $f(x) \in C^1[a, b]$, 记

$$A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

证明:

$$\int_a^b (f(x) - A)^2 dx \leq (b-a)^2 \int_a^b (f'(x))^2 dx.$$

179. 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx$ ($a^2 + b^2 \neq 0$).

180. 已知 $f(x) \in C[-1, 1]$, 证明:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx = \pi f(0).$$

181. 设 A 是 n 阶实对称阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \quad b_j \neq 0$$

证明:

(1) $\text{rank}(A) \geq n-1$;

(2) A 的特征值各不相同.

182. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 是 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的全体特征值, 若有 $\text{rank}(\lambda_i I - A) = \text{rank}(\lambda_i I - A)^2$ ($i = 1, 2, \dots, k$), 证明 A 可以相似对角化.

183. 证明

$$\int_1^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\alpha^2}\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)^2\right) dx$$

在 $(0, 1)$ 上一致收敛.

184. 设 $f(x)$ 为单调递减的正值函数, 证明 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$ 同时敛散.

185. 设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 均是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且 $\text{Ker } \mathcal{A} \subset \text{Ker } \mathcal{B}$, 证明, 存在线性变换 \mathcal{T} , 使得 $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{A}$.

186. 计算极限

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(rx) dx.$$

187. 设数域 \mathbb{K} 上的全体矩阵 $M_n(\mathbb{K})$ 上有线性变换 $\sigma(X) = AX - XA$, 其中 $A \in M_n(\mathbb{K})$:

(1) 若 A 为零阵, 证明 σ 为零变换;

(2) 若 A 有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 证明 $\lambda_i - \lambda_j$ ($1 \leq i, j \leq n$) 为 σ 的特征值.

188. 设 $f(x)$ 是实系数多项式, 若有 $f(x) \mid f(x^2 + x + 1)$, 证明 $2 \mid \deg f(x)$.

189. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y f(x)f(y)f(z) dz = \frac{1}{6} \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^3.$$

190. 设 A, B 都是 n 阶正交阵, 证明 $|\det(A+B)| \leq 2^n$.

191. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 若 $AB = BA = 0$, $\text{rank}(A^2) = \text{rank}(A)$, 证明

$$\text{rank}(A+B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

192. 设 V 是 n 维内积空间, V_1, V_2, \dots, V_r 是 V 的 r 个真子空间, 证明: 存在 V 的一组标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 使得对任意的 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r$ 都有 $\alpha_i \notin V_j$.

193. 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续且有界, 证明对任意 $T > 0$, 都存在一个数列 $\{x_n\}$, 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n + T) - f(x_n)) = 0.$$

194. (华师 2020) 计算级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

195. (华师 2020) 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz + \sqrt{z} dx dy$$

其中 Σ 为抛物面 $z = (x^2 + y^2)/2$ 在平面 $x = 0$ 与 $x = 2$ 之间的部分, 方向取下侧.

196. 计算第二型曲线积分

$$\oint_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x-y}{4x^2+y^2} dy$$

其中 L 为 $x^2 + y^2 = 2$ 的圆周, 方向为逆时针.

197. (浙大 2018) 设 A 为 n 阶非零实方阵, 且 $A^2 = A$, 设 $\text{rank}(A) = r$, 求证 A 正交相似于分块矩阵: $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 I_r 为 r 阶单位阵, B 为某一实矩阵.

198. 求抛物面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 将球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4az$ 分成两部分的体积之比.

199. 计算第一型曲面积分

$$I = \iint_S \frac{x^3 + y^3 + z^3}{1-z} dS$$

其中 S 为 $x^2 + y^2 = (1-z)^2$ ($0 \leq z \leq 1$).

200. 计算 $I = \iiint_{\Omega} x^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, 其中 Ω 是曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = x^2 + y^2$ 围成的有界区域.

201. 计算第二型曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x dy dz + (2 + y^3) dz dx + z^3 dx dy$$

其中 Σ 为 $x = \sqrt{1 - 2y^2 - 3z^2}$, 方向取 x 轴正向.

202. 计算积分 $I = \iint_S (x+z) d\sigma$, 其中 S 是曲面 $x^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$) 被曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所截取的有限部分.

203. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 为对称阵, 若 A 正定, 证明 AB 的特征值全为实数.

204. 设 φ 是实数域上 n ($n \geq 1$) 维线性空间 V 的一个线性变换, 证明 φ 至少有一个维数是 1 或 2 的不变子空间.

205. 设 A 是 n 阶半正定实对称矩阵, B 是 n 阶实矩阵, 若对于某个正整数 $k \geq 2$, 有 $A^k B = B A^k$ 成立, 证明 $AB = BA$.

206. 设函数 $f \in C(\mathbb{R})$, 若有 $f(f(x)) = x$, 证明存在 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得 $f(\xi) = \xi$.

207. 设 f 是有整系数多项式, 若 f 在有理数域上不可约, 证明 f 在复数域上没有重根.

208. 计算

$$I = \oint_L (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz,$$

其中 L 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ 与 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线的 $z \geq 0$ 的部分, 曲线方向为从 z 轴上方向下看是顺时针方向.

209. 计算曲线积分 $I = \int_L z^2 ds$, 其中 L 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与 $x + y = 1$ 的交线.

210. 设矩阵 $A \in M_n(\mathbb{Q})$, 其中 $n \geq 2$, 设 $f(\lambda) = \lambda^n + 2\lambda^{n-1} + 2$, 若有 $f(A) = 0$, 证明 $f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式.

211. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上可导, $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} f'(x) = A \in \mathbb{R}$, 证明 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上一致连续.

212. (中科院 2019) 设有 $n+1$ 个列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}^n$, A 是一个 n 阶实对称正定阵, α'_i 为 α_i 的转置, 如果满足下列条件:

(1) $\alpha_j \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$);

(2) 对于任意 $i \neq j (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 都有 $\alpha_i' A \alpha_j = 0$;

(3) β 与每个 $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 都正交;

证明 $\beta = 0$.

213. (浙大 2020, 与 103 题类似) 若 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 存在 n 阶可逆复方阵 X 使得 $XA + 2BX = 0$, 证明存在可逆实方阵 Y , 使得 $YA + 2BY = 0$.

214. (浙大 2020) 求行列式 $|A|$, 其中 A 的第 (i, j) 元为 $\operatorname{sgn}(i - j)$.

215. 设 \mathcal{A} 是实数域 \mathbb{R} 上 $n (n \geq 1)$ 维线性空间 V 上的线性变换, 证明 \mathcal{A} 至少有一个维数是 1 或 2 的不变子空间.

216. (华师 2021) 设 c_1, c_2, c_3 是多项式 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ 的三个复根, 求 $(c_1c_2 + c_3^2)(c_2c_3 + c_1^2)(c_1c_3 + c_2^2)$.

217. (华师 2021) 设实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d > 0$$

证明: 一定存在 A 的特征向量 $(x, y)' \in \mathbb{R}^2$, 满足 $x, y > 0$.

218. (华师 2021) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, B 是 n 阶实对称正定阵.

(1) 证明: 存在唯一 n 阶实矩阵 C 满足 $BC + CB = A$;

(2) 证明: 对 (1) 中的实矩阵 C , $BC = CB$ 当且仅当 $AB = BA$.

219. 设数列 $\{na_n\}$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

220. 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n / \ln n)$, 其中

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin t} dt.$$

*221. 设 $I(x) = \int_0^{+\infty} x^{3/2} \exp(-x^2 y^2) dy$, 证明 $I(x)$ 关于 $x \geq 0$ 一致收敛.

222. 计算曲线积分: $I = \int_L (x^2 - y^2) dx + (x^2 - z^2) dy + (y^2 - z^2) dz$, 其中 L 是曲面 $x = \sqrt{2z - y^2 - z^2}$ 与 $x + z = 1$ 的交线上, 从点 $(0, -1, 1)$ 到点 $(0, 1, 1)$ 的一段有向弧.

*223. 记 $|M|$ 为矩阵 M 的行列式, 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$,

(1) 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = |A + \sqrt{-1}B| \cdot |A - \sqrt{-1}B|.$$

(2) 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| \cdot |A - B|.$$

224. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \sin(1/x) dx & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是否可导?

225. 求积分

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

226. 设 D 是 xOy 平面上由曲线 $y = \sqrt{x}$ 和直线 $y = x$ 围成的图形, 求 D 绕直线 $y = x$ 旋转产生的旋转体的体积.

227. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 证明: $\text{rank}(A) = n$ 的充分必要条件为存在 n 阶实矩阵 B , 使得 $AB + B'A$ 为正定阵.

*228. 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的连续函数, 设

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right),$$

证明: 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在任意有限区间上一致收敛.

229. 与 228 很类似, 如果令 $f(x) = \sin(x)$, 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 \mathbb{R} 上一致收敛.

230. 判断下列级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

*231. 设 $f(x) \in C^2(0, 1)$, 满足 $f(0) = f(1) = 0$, 且对任意 $x \in (0, 1)$, $f(x) \neq 0$, 证明积分不等式

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > 4.$$

232. 设 V 是 n 维欧氏空间, 证明

(1) 对于任意两个不同的单位向量 $\alpha, \beta \in V$, 总存在 V 上的镜面变换 \mathcal{A} , 使得 $\mathcal{A}(\alpha) = \beta$;

(2) 证明 V 上的任意正交变换 \mathcal{B} 都可以表示成有限个镜面变换的乘积, 即存在 m 个镜面变换 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m$, 使得

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \dots \mathcal{A}_m.$$

233. 计算积分 $I = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx$, 其中 a, b 不全为 0.

234. 设 A 为 n 阶正定阵, $X \in \mathbb{R}^n$ 为非零列向量, 证明

(1) 矩阵 $A + XX'$ 可逆,

(2) $0 < X'(A + XX')^{-1}X < 1$.

235. $A \in M_n(\mathbb{R})$, 假设 $A^2 = A$, 且对任意的 $X \in \mathbb{R}^n$, 有

$$X'A'AX \leq X'X,$$

证明 A 为对称阵.

236. (中科院 2021) 设 \mathcal{A} 是线性空间 V 上的可逆线性变换, v_1, v_2, \dots, v_m 张成 V , 且

$$\mathcal{A}(v_i) \in \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

求证 \mathcal{A} 可对角化, 且特征值都为单位根.

237. (中科院 2021) 证明 $\left| \int_a^{a+1} \sin t^2 dt \right| \leq a^{-1} (a > 0)$, 也可以证明更强的结论: $\left| \int_a^{a+1} \sin t^2 dt \right| < a^{-1} (a > 0)$.

238. (中科院 2021) 求积分

$$I = \iint_D \frac{x^2 + y^2 - 2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} dx dy,$$

其中 $D : x^2 + y^2 \geq 2, x \leq 1$.

239. 计算积分

$$\iint_S (x + z) dS,$$

其中 S 是曲面 $x^2 + y^2 = 2az (a > 0)$ 被曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所截取的有限部分.

240. 设 $W = \{A : \text{tr}(A) = 0, A \in M_n(\mathbb{R})\}$, 证明 W 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的子空间, 并且求它的一组基.

答案: W 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的 $n^2 - 1$ 维的子空间, 且 $\{E_{ij} : i \neq j\} \cup \{E_{11} - E_{kk} : k > 1\}$ 是 W 的一组基.

241. 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $f''(x)$ 有界, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.