1. 设 $\Gamma$ 是由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 交成的圆周, 从第一卦限内看 $\Gamma$, 它的方向是逆时针. 计算第二型曲线积分

$$\int_{\Gamma} z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z\,.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$, 证明 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上不一致连续.
3. 设 $\{a_n\}$ 为非负递减的数列, 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$.
4. 设 $a,b>0$, $f\in C[0,+\infty)$, 证明:

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty)$ 存在, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = (f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}.$$

(2) 如果无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)/x\,\mathrm{d}x$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

(3) 如果 $f(+\infty)$ 存在, 且积分 $\int_0^1 f(x)/x\,\mathrm{d}x$ 收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = -f(+\infty)\ln\frac{b}{a}.$$

5. 计算积分

$$I(r)=\int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos x+r^2)\,\mathrm{d}x\,,\quad |r|<1.$$

6. 设 $p>0$, 讨论积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

的敛散性.

7. 求积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x)/x\,\mathrm{d}x$.
8. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f\left(\frac{k}{n}\right)=0.$$

9. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin(t)\,\mathrm{d}t\,,\quad \alpha>0$$

关于 $u$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

10. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin(t)\,\mathrm{d}u\,,\quad \alpha>0$$

关于 $t$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

11. 计算 Fresnel 积分 $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$.
12. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\exp(-ax^2)\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, 其中 $a>0,\ b\in\mathbb{R}$.

13. 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \tan^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $|\alpha|<1$.
14. 设 $\mathbb{K}$ 是数域, $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 $A, B$ 没有相同的特征值, 证明矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解.
15. 设 $A$ 是 4 阶方阵, 满足 $\mathrm{tr}(A^i) = i\,(i = 1, 2, 3, 4)$, 求 $|A|$.
16. $n$ 阶方阵可对角化的充分必要条件.
17. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积, 在 $x = 1$ 处左连续, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x} = f(1).$$

18. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2 = AA'$, 证明 $A$ 为实对称阵.
19. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 若 $A^2 = A$, $B^2 = B$ 以及 $(A + B)^2 = A + B$, 证明 $AB = BA = 0$.
20. 设 $A, B$ 都是 $n$ 阶矩阵, 若 $A^k = 0$, 且 $AB + BA = B$, 证明 $B = 0$.
21. $A, B$ 是 $n$ 阶方阵, $A + B = AB$, 求证

    (1) $AB = BA$,

    (2) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$,

    (3) $A$ 可对角化当且仅当 $B$ 可对角化.

22. 设 $f(x), g(x)$ 为多项式, 且 $(f(x), g(x)) = 1$, $A$ 是 $n$ 阶方阵, 求证: $f(A)g(A) = 0$ 的充分必要条件为 $\mathrm{rank}(f(A)) + \mathrm{rank}(g(A)) = n$.
23. 设 $A, B$ 为实对称阵, 求证:

    (1) 若 $A$ 正定, 则存在实可逆阵 $P$ 使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 同时为对角阵;

    (2) 若 $A, B$ 半正定, 则 $\mathrm{tr}(AB) \geqslant 0$, 并且等号成立当且仅当 $AB = 0$.

24. $A, B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 并且 $A = B + C$, 其中 $B$ 为对称阵, $C$ 为反对称阵, 证明: 若 $A^2 = 0$, 则 $A = 0$.
25. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.
26. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi),$$

27. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明对每个 $x \in (a, b)$, 都存在对应的 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

28. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上三阶可导, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi).$$

29. $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 非负连续, 单调递减, 求证 $\{a_n\}$ 极限存在, 其中

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

30. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\pi/4 - x_n)$, 其中:

$$x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}.$$

31. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty$, 证明极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n}{p_n} = 0.$$

32. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明极限

$$\lim_{n\to\infty} \left(n! a_1 a_2 \dots a_n\right)^{1/n} = 0.$$

33. **面积原理**

(1) 设 $f$ 是一个非负的递增函数, 则当 $\xi \geqslant m$ 时有

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant f(\xi).$$

(2) 设 $f$ 是一个非负的递减函数, 则极限

$$\lim_{\xi\to\infty} \left(\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \alpha$$

存在, 且 $0 \leqslant \alpha \leqslant f(m)$. 更进一步, 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 那么

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x - \alpha\right| \leqslant f(\xi - 1),$$

这里 $\xi \geqslant m+1$.

34. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微, 且 $f(a)f(b) < 0$, 对任意 $x \in [a,b]$ 都有 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$. 证明序列 $\{x_n\}$ 极限存在, 其中 $x_1 \in [a,b]$, $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)\,(n = 1, 2, \dots)$, 进而可以证明此极限为方程 $f(x) = 0$ 的根.

35. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{y_n\}: y_1 = 1,\ 2y_{n+1} = y_n + \sqrt{y_n^2 + a_n}\ \ (n = 1, 2, \dots)$. 证明 $\{y_n\}$ 是单调递增的收敛数列.

36. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: 当 $n < m$ 时, $|x_n - x_m| > 1/n$. 证明数列 $\{x_n\}$ 无界.

37. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$.

38. $n$ 阶方阵的每行之和与每列之和均为 0, 证明其所有代数余子式全相等.

39. 设函数 $f(x)$ 定义在 $(a, +\infty)$, 且 $f(x)$ 在每个有限区间 $(a,b)$ 内都有界, 并满足

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = A.$$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)/x) = A$.

40. 证明: (1) 关于 $x$ 的方程 $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{kx} = n+1$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一的实根 $a_n$; (2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

41. 设 $a > 0$, 求积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\pi/2}} \frac{1}{1+\tan^a y^2}\,\mathrm{d}y$$

42. $\alpha, \beta$ 是 $n$ 维列向量, $A$ 是 $n$ 阶方阵, 求证: $|A + \alpha\beta'| = |A| + \beta' A^* \alpha$ .

43. 设 $A \in \mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, 且

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

求证 $BA = 9I$.

44. $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $A^2 = A$, 若对任意列向量 $x$, 都有 $x'A'Ax \leqslant x'x$, 证明 $A' = A$.

45. 证明对任意 $m \times n$ 矩阵 $A$, 都有 $\operatorname{rank}(AA') = \operatorname{rank}(A)$.

46. (极分解) 对可逆阵 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 证明

(1) 存在正交阵 $P$, 正定阵 $B$, 满足 $A = PB$.

(2) 存在正交阵 $Q_1, Q_2$, 使得 $Q_1AQ_2 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 并且 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ 是 $A'A$ 的特征值.

47. $f(x) \in C[a, b]$, 证明函数 $m(x) = \min\limits_{a \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi)$ 在 $[a, b]$ 连续.

48. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在, $f''(x)$ 有界, 证明 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

49. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上三阶连续可导, 且对任意的 $h > 0$, 有

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

求证: $f(x)$ 为次数至多为 2 的多项式.

50. 设 $A' = A$, 证明 $A$ 可逆当且仅当存在矩阵 $B$ 使得 $AB + B'A$ 正定.

51. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, $f(a) = 0$, 并且存在实数 $A > 0$, 使得对任意 $x \in [a, b]$, 都有 $|f'(x)| \leqslant A|f(x)|$, 证明在 $[a, b]$ 上, $f(x) \equiv 0$.

52. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上一阶连续可导, 且

$$f'(x) = \frac{1}{1 + f^2(x)}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}\right)$$

证明: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在.

53. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 若对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x + n) = 0$, 证明 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

54. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且对任意 $\delta > 0$, 都有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(n\delta) = 0$, 证明 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

55. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 则存在正实数 $a, b$, 使得 $|f(x)| \leqslant a|x| + b$.

56. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续, 证明 $|f(x)/x|$ 在 $[1, +\infty)$ 有界.

57. 证明欧式空间中两标准正交基的过渡矩阵为正交阵.

58. 设 $\alpha$ 是欧式空间 $V$ 中的一个非零向量, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 是 $V$ 中的 $p$ 个向量, 满足

$$(a_i, a_j) \leqslant 0,\ (\alpha_i, \alpha) > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, p, i \neq j$$

证明

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 线性无关;

(2) $n$ 维欧式空间中最多有 $n + 1$ 个向量, 使其两两互成钝角;

(3) $n$ 维欧式空间中一定存在 $n + 1$ 个向量, 使其两两互为钝角.

59. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 $AB = BA$, 利用线性方程组的知识证明

$$\operatorname{rank}(A + B) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - \operatorname{rank}(AB)$$

60. 设 $B \in \mathrm{M}_{n \times 2}(\mathbb{C})$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

若 $A = BC$, 且 $CB$ 的特征多项式为 $x^2 - 2x + 1$, 求 $A$ 的特征值, 并求 $AX = 0$ 的基础解系.

61. 计算 $n$ 阶 $b$ – 循环行列式:

$$A=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ ba_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ ba_{n-1} & ba_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ba_2 & ba_3 & ba_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

62. 设 $A$ 是 $n$ 阶实反对称阵, $D=\operatorname{diag}\{d_1,d_2,\dots,d_n\}$ 是同阶的对角阵, 且 $d_i>0\,(i=1,2,\dots,n)$. 求证 $|A+D|>0$, 特别地, $I_n+A$ 与 $I_n-A$ 都是非异阵.

63. 如果 $n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 适合条件:

$$|a_{ii}|>\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\quad i=1,2,\dots,n,$$

则称 $A$ 为**严格对角占优阵**, 求证, 严格对角占优阵必是满秩阵, 若上述条件改为:

$$a_{ii}>\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\quad i=1,2,\dots,n,$$

求证 $|A|>0$.

64. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 对 $[a,b]$ 上任意一个闭区间 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$, 对介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的任一常数 $l$, 方程

$$f(x)=l$$

在 $[x_1,x_2]$ 上有且仅有有限个解, 证明 $f(x)\in C[a,b]$.

65. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=A$, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 其中 $A\in\mathbb{R}\cup\pm\infty$.

66. 已知 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 且 $\operatorname{tr}(A)=0$, 证明

(1) 存在数域 $\mathbb{K}$ 上的可逆阵 $C$, 使得 $C^{-1}AC$ 为主对角元全为 0 的矩阵.

(2) 存在 $X,Y\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 使得 $XY-YX=A$.

(3) 令 $U$ 为 $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 中所有形如 $XY-YX$ 的矩阵组成的集合, 证明 $U$ 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 的一个线性子空间.

67. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n$$

68. 设 $\varphi$ 为 $n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换, $W$ 是 $\varphi$ 的不变子空间, 且 $V=\operatorname{Im}\varphi\oplus W$, 证明

$$V=\operatorname{Im}\varphi\oplus\operatorname{Ker}\varphi.$$

69. 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 且 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=1,\ \operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$, 证明 $A$ 相似于 $B$.

70. 设 $\varphi$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换, 求证: 必存在正整数 $m$, 使得

$$\operatorname{Im}\varphi^m=\operatorname{Im}\varphi^{m+1},\quad \operatorname{Ker}\varphi^m=\operatorname{Ker}\varphi^{m+1},\quad V=\operatorname{Im}\varphi^m\oplus\operatorname{Ker}\varphi^{m+1}.$$

71. 使用 Jordan 标准型证明迹非 0 的秩 1 矩阵可对角化.

72. 设 $A$ 是 $n$ 阶实对称阵, 证明: $A$ 可逆的充分必要条件为存在矩阵 $B$, 使得 $AB+B'A$ 正定.

73. 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 其中 $A$ 是幂零阵, 且 $AB=BA$, 求证: $|B|=|A+B|$.

74. 设函数 $f$ 在 $x=0$ 连续, 并且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A,$$

求证: $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0)=A$.

75. 设 $x_n$ 是 $\tan x=x$ 在 $(n\pi, n\pi+\pi/2)$ 上的解,

(1) 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\pi+\pi/2-x_n)=0$,

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n(n\pi+\pi/2-x_n)$.

76. 设 $f$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 且 $f(0)=0$, 并假设有实数 $A$ 使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立, 证明 $f(x)\equiv 0\,(x\in(0,+\infty))$.

77. 设偶函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, 且 $f(0)=1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(f(1/n)-1)$ 绝对收敛.

78. 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'$ 在 $[a,b]$ 上可积, $f(a)=0$, 证明:

$$2\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\leqslant (b-a)^2\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x\,.$$

79. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, 且存在实数 $A>0$, 使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$, 证明 $f(x)\equiv 0$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 均成立.

80. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数, $f(0)=f(1)=0$, 且对任意的 $x\in(0,1)$, 都有 $f(x)\neq 0$, 证明 $\int_0^1|f''(x)/f(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant 4$.

81. 设 $f(x)\in C^2[a,b]$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

82. 设 $x_1$, $x_2$, $x_3$ 是多项式 $f(x)=x^3+ax+1$ 的三个根, 求一个首一多项式以 $x_1^2$, $x_2^2$, $x_3^2$ 为根.

83. 设 $f(x)$ 在有限区间 $(a,b)$ 内可微, 且 $f'(x)$ 在 $(a,b)$ 内有界, 证明 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内有界.