

1. 设  $\Gamma$  是由球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  和平面  $x + y + z = 0$  交成的圆周, 从第一卦限内看  $\Gamma$ , 它的方向是逆时针. 计算第二型曲线积分

$$\int_{\Gamma} z dx + x dy + y dz.$$

2. 设  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上可导, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ , 证明  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上不一致连续.

3. 设  $\{a_n\}$  为非负递减的数列, 如果级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  收敛, 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ .

4. 设  $a, b > 0$ ,  $f \in C[0, +\infty)$ , 证明:

(1) 如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$  存在, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}.$$

(2) 如果无穷积分  $\int_1^{+\infty} f(x)/x dx$  收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

(3) 如果  $f(+\infty)$  存在, 且积分  $\int_0^1 f(x)/x dx$  收敛, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}.$$

5. 计算积分

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx, \quad |r| < 1.$$

6. 设  $p > 0$ , 讨论积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^p} dx$$

的敛散性.

7. 求积分  $\int_0^{+\infty} \sin(x)/x dx$ .

8. 设  $f(x) \in C[0, 1]$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

9. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin(t) dt, \quad \alpha > 0$$

关于  $u$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

10. 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t} \sin(t) du, \quad \alpha > 0$$

关于  $t$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

11. 计算 Fresnel 积分  $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ .

12. 计算积分  $\int_0^{+\infty} \exp(-ax^2) \cos(bx) dx$ , 其中  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

13. 计算积分  $\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha(x) dx$ , 其中  $|\alpha| < 1$ .
14. 设  $\mathbb{K}$  是数域,  $A \in M_m(\mathbb{K})$ ,  $B \in M_n(\mathbb{K})$ , 且  $A, B$  没有相同的特征值, 证明矩阵方程  $AX = XB$  只有零解.
15. 设  $A$  是 4 阶方阵, 满足  $\text{tr}(A^i) = i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), 求  $|A|$ .
16.  $n$  阶方阵可对角化的充分必要条件.
17. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可积, 在  $x = 1$  处左连续, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 x^n f(x) dx}{\int_0^1 x^n dx} = f(1).$$

18. 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , 若  $A^2 = AA'$ , 证明  $A$  为实对称阵.
19. 设  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , 若  $A^2 = A$ ,  $B^2 = B$  以及  $(A+B)^2 = A+B$ , 证明  $AB = BA = 0$ .
20. 设  $A, B$  都是  $n$  阶矩阵, 若  $A^k = 0$ , 且  $AB + BA = B$ , 证明  $B = 0$ .
21.  $A, B$  是  $n$  阶方阵,  $A+B = AB$ , 求证
- (1)  $AB = BA$ ,
  - (2)  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ ,
  - (3)  $A$  可对角化当且仅当  $B$  可对角化.
22. 设  $f(x), g(x)$  为多项式, 且  $(f(x), g(x)) = 1$ ,  $A$  是  $n$  阶方阵, 求证:  $f(A)g(A) = 0$  的充分必要条件为  $\text{rank}(f(A)) + \text{rank}(g(A)) = n$ .
23. 设  $A, B$  为实对称阵, 求证:
- (1) 若  $A$  正定, 则存在实可逆阵  $P$  使得  $P'AP$  和  $P'BP$  同时为对角阵;
  - (2) 若  $A, B$  半正定, 则  $\text{tr}(AB) \geq 0$ , 并且等号成立当且仅当  $AB = 0$ .
24.  $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ , 并且  $A = B + C$ , 其中  $B$  为对称阵,  $C$  为反对称阵, 证明: 若  $A^2 = 0$ , 则  $A = 0$ .
25. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$ .
26.  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi),$$

27. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 证明对每个  $x \in (a, b)$ , 都存在对应的  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

28. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上三阶可导, 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi).$$

29.  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  非负连续, 单调递减, 求证  $\{a_n\}$  极限存在, 其中

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_0^n f(x) dx.$$

30. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\pi/4 - x_n)$ , 其中:

$$x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}.$$

31. 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$ , 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n}{p_n} = 0.$$

32. 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n! a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} = 0.$$

33. 面积原理

(1) 设  $x \geq m \in \mathbb{N}^*$ ,  $f$  是一个非负的递增函数, 则当  $\xi \geq m$  时有

$$\left| \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx \right| \leq f(\xi).$$

(2) 设  $x \geq m \in \mathbb{N}^*$ ,  $f$  是一个非负的递减函数, 则极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx \right) = \alpha$$

存在, 且  $0 \leq \alpha \leq f(m)$ . 更进一步, 如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 那么

$$\left| \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x) dx - \alpha \right| \leq f(\xi - 1),$$

这里  $\xi \geq m + 1$ .

34. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二次可微, 且  $f(a)f(b) < 0$ , 对任意  $x \in [a, b]$  都有  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$ . 证明序列  $\{x_n\}$  极限存在, 其中  $x_1 \in [a, b]$ ,  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 进而可以证明此极限为方程  $f(x) = 0$  的根.

35. 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 数列  $\{y_n\}: y_1 = 1, 2y_{n+1} = y_n + \sqrt{y_n^2 + a_n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). 证明  $\{y_n\}$  是单调递增的收敛数列.

36. 设数列  $\{x_n\}$  满足: 当  $n < m$  时,  $|x_n - x_m| > 1/n$ . 证明数列  $\{x_n\}$  无界.

37. 设  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上具有二阶导数, 且  $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\xi) = f(\xi)$ .

38.  $n$  阶方阵的每行之和与每列之和均为 0, 证明其所有代数余子式全相等.

39. 设函数  $f(x)$  定义在  $(a, +\infty)$ , 且  $f(x)$  在每个有限区间  $(a, b)$  内都有界, 并满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = A.$$

证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)/x) = A$ .

40. 证明: (1) 关于  $x$  的方程  $\sum_{k=1}^n e^{kx} = n+1$  在  $(0, 1)$  上存在唯一的实根  $a_n$ ; (2) 数列  $\{a_n\}$  收敛, 并求其极限.

41. 设  $a > 0$ , 求积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\pi/2}} \frac{1}{1 + \tan^a y^2} dy$$

42.  $\alpha, \beta$  是  $n$  维列向量,  $A$  是  $n$  阶方阵, 求证:  $|A + \alpha\beta'| = |A| + \beta'A^*\alpha$ .

43. 设  $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ , 且

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

求证  $BA = 9I$ .

44.  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $A^2 = A$ , 若对任意列向量  $x$ , 都有  $x'A'Ax \leq x'x$ , 证明  $A' = A$ .
45. 证明对任意  $m \times n$  矩阵  $A$ , 都有  $\text{rank}(AA') = \text{rank}(A)$ .
46. (极分解) 对可逆阵  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , 证明
- (1) 存在正交阵  $P$ , 正定阵  $B$ , 满足  $A = PB$ .
  - (2) 存在正交阵  $Q_1, Q_2$ , 使得  $Q_1AQ_2 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , 并且  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$  是  $A'A$  的特征值.
47.  $f(x) \in C[a, b]$ , 证明函数  $m(x) = \min_{a \leq \xi \leq x} f(\xi)$  在  $[a, b]$  连续.
48.  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上二阶可导, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在,  $f''(x)$  有界, 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .
49.  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上三阶连续可导, 且对任意的  $h > 0$ , 有

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

求证:  $f(x)$  为次数至多为 2 的多项式.

50. 设  $A' = A$ , 证明  $A$  可逆当且仅当存在矩阵  $B$  使得  $AB + B'A$  正定.
51. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可微,  $f(a) = 0$ , 并且存在实数  $A > 0$ , 使得对任意  $x \in [a, b]$ , 都有  $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ , 证明在  $[a, b]$  上,  $f(x) \equiv 0$ .
52. 设  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上一阶连续可导, 且

$$f'(x) = \frac{1}{1 + f^2(x)} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right)$$

证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在.

53. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续, 若对于任意  $x \in \mathbb{R}$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x+n) = 0$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
54. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续, 且对任意  $\delta > 0$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n\delta) = 0$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
55. 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上一致连续, 则存在正实数  $a, b$ , 使得  $|f(x)| \leq a|x| + b$ .
56. 设  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上一致连续, 证明  $|f(x)/x|$  在  $[1, +\infty)$  有界.
57. 证明欧式空间中两标准正交基的过渡矩阵为正交阵.
58. 设  $\alpha$  是欧式空间  $V$  中的一个非零向量,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  是  $V$  中的  $p$  个向量, 满足

$$(a_i, a_j) \leq 0, (\alpha_i, \alpha) > 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, p, i \neq j$$

证明

- (1)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  线性无关;
  - (2)  $n$  维欧式空间中最多有  $n+1$  个向量, 使其两两互成钝角;
  - (3)  $n$  维欧式空间中一定存在  $n+1$  个向量, 使其两两互为钝角.
59. 设  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ , 且  $AB = BA$ , 利用线性方程组的知识证明

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \text{rank}(AB)$$

60. 设  $B \in M_{n \times 2}(\mathbb{C})$ ,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

若  $A = BC$ , 且  $CB$  的特征多项式为  $x^2 - 2x + 1$ , 求  $A$  的特征值, 并求  $AX = 0$  的基础解系.

61. 计算  $n$  阶  $b$ -循环行列式:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ ba_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ ba_{n-1} & ba_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ba_2 & ba_3 & ba_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

62. 设  $A$  是  $n$  阶实反对称阵,  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  是同阶的对角阵, 且  $d_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ . 求证  $|A + D| > 0$ , 特别地,  $I_n + A$  与  $I_n - A$  都是非异阵.

63. 如果  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  适合条件:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则称  $A$  为**严格对角占优阵**, 求证, 严格对角占优阵必是满秩阵, 若上述条件改为:

$$a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

求证  $|A| > 0$ .

64. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有定义, 对  $[a, b]$  上任意一个闭区间  $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ , 对介于  $f(x_1)$  与  $f(x_2)$  之间的任一常数  $l$ , 方程

$$f(x) = l$$

在  $[x_1, x_2]$  上有且仅有有限个解, 证明  $f(x) \in C[a, b]$ .

65. 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上可导, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = A$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 其中  $A \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ .

66. 已知  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , 且  $\text{tr}(A) = 0$ , 证明

(1) 存在数域  $\mathbb{K}$  上的可逆阵  $C$ , 使得  $C^{-1}AC$  为主对角元全为 0 的矩阵.

(2) 存在  $X, Y \in M_n(\mathbb{K})$ , 使得  $XY - YX = A$ .

(3) 令  $U$  为  $M_n(\mathbb{K})$  中所有形如  $XY - YX$  的矩阵组成的集合, 证明  $U$  是  $M_n(\mathbb{K})$  的一个线性子空间.

67. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)^n$$

68. 设  $\varphi$  为  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换,  $W$  是  $\varphi$  的不变子空间, 且  $V = \text{Im } \varphi \oplus W$ , 证明

$$V = \text{Im } \varphi \oplus \text{Ker } \varphi.$$

69. 设  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ , 且  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 1$ ,  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ , 证明  $A$  相似于  $B$ .

70. 设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换, 求证: 必存在正整数  $m$ , 使得

$$\text{Im } \varphi^m = \text{Im } \varphi^{m+1}, \quad \text{Ker } \varphi^m = \text{Ker } \varphi^{m+1}, \quad V = \text{Im } \varphi^m \oplus \text{Ker } \varphi^{m+1}.$$

71. 使用 Jordan 标准型证明迹非 0 的秩 1 矩阵可对角化.

72. 设  $A$  是  $n$  阶实对称阵, 证明:  $A$  可逆的充分必要条件为存在矩阵  $B$ , 使得  $AB + B'A$  正定.