黎锦灏　518021910771　0429作业

1、输入是由数轴上的区间所组成的集合，这些区间由它们的两个端点表示。设计 O(nlogn)算法识别所有包含在集合中其它某个区间的区间。这个问题与二维平面极大点问题有什么关系。例如输入：（1，3），（2，8），（4，6），（5，7），（7，9），则输出为（4，6）和（5，7）

解：本问题与二维平面极大点问题非常相似，扫描和记录过程几乎一致。

将所有区间看作二维平面上的点，左端点作为 x ，右端点作为 y，按 x 坐标排序后，从左向右扫描。若当前遇到的点的 x、y 坐标都小于之前的 Max ，则说明被另一个区间完全包含。

排序复杂度 $O(nlogn)$ ，扫描复杂度 $O(n)$，故总复杂度 $O(nlogn)$

伪代码如下：

```
Algorithm:Intervals
Input: S {a set of intervals represented by (a, b)}
Output: a set of intervals which is included by other intervals
begin
    Sort the intervals by their x-coordinates in a non-decreasing order
    Max := S[0].y
    for i:=1 to n do
        if S[i].x <= Max and S[i].y <= Max then
            output S[i]
        else
            Max := S[i].y
end
```

2、证明如果存在时间复杂度为 $O(T(n))$的两个 n×n 下三角矩阵的乘法，则存在时间复杂度为 $O(T(n)+n^2)$的任意两个 n×n 矩阵相乘的算法 。

解：下三角矩阵即对角线的右上方均为 0 ，而一个矩阵可拆为两个三角矩阵，即：

$$A \times B=(A+A') \times (B+B')=A \times B+A \times B'+A' \times B+A' \times B'$$

由题意计算下三角矩阵复杂度为 $O(T(n))$，则乘积计算需要 $4T(n)$ 的时间，同时为了拆分矩阵需要遍历矩阵的每个元素，故复杂度为 $O(n^2)$。

综上所述，任意两个矩阵相乘的时间复杂度为 $O(T(n)+n^2)$ 。

3、如果在序列 x1,x2,...,xn中，存在某个 i 使 xi是序列中的最小者，且序列 xi,xi+1,...,xn,x1,...xi-1是递增的，则称序列 x1,x2,...,xn是循环序列。设计算法找出循环序列中最小元素的位置。为简单起见，假设该位置是唯一的。证明你的算法是最优的。

解：考虑初始区间为 $[1,n]$，则取 $mid=\frac{1+n}{2}$ ，考虑此时 x_{mid} 的情况：

若 $x_{mid}<x_1$，则说明最小元素在 $[mid+1,n]$ 中；

若 $x_{mid} > x_1$，则说明最小元素在 $[1, mid]$ 中；

递归完成搜索，每次可以减半查找区间，故总复杂度为 $O(logn)$ 。

由决策树分析可知：因为基于比较的查找问题是 $\Omega(logn)$ 的，故当前算法是最优算法。

黎锦灏　518021910771　0506 作业

1、证明最小公倍数问题属于 P 类

证明：求 a、b 的最小公倍数一般采用 $\frac{a*b}{gcd(a,b)}$ 的方式，其中 $gcd(a,b)$ 是 a 和 b 的最大公因数。

不失一般性，不妨设 $a < b$ ，通过辗转相除法我们可以在 $O(loga)$ 的时间内求出最大公因数，即最小公倍数的复杂度也为 $O(loga)$.

综上可知，输入规模 $loga + logb$ 的情况下，算法运行时间为 $O(loga)$ ，所以运行时间与输入规模的某个多项式函数相关，最小公倍数问题属于 P 类。

2、设计一个非确定性算法求解旅行商问题

解：考虑一个贪心的确定性算法，从起点出发，每次选择一个距离最近且未访问过的点作为路径的下一个节点，依次选择遍历全图，最后返回起点。由于贪心只能保证局部最优，且每一步的选择唯一确定，得到的最终结果可能不是最优值，考虑引入遗传算法优化决策过程：

$Step1$: 给定群体规模n，交配概率 p_c 和变异概率 p_m ，城市数量 n_city 和城市间距离 $dist$（二维矩阵），最大迭代次数 MAX_T；

$Step2$:采用整数编码，随机生成由 n 个初始解组成的群体，由 $n * n_{city}$ 的二维向量 x 存储；
$Step3$:计算当前群体各染色体 x_i 的适应度函数值 $INF - totalDist(Xi)$；
$Step4$:如果迭代次数达到MAX_T，则转 $Step10$；
$Step5$:计算当前群体各染色体 x_i 被选择的概率 $p(x_i)$；
$Step6$:依据 5 从群体中随机选择 n 个染色体，得到新种群，选择方式为轮盘赌或确定性选择法；
$Step7$:依交配概率 p_c 进行交配，交配算子为多点交配，其子代进入新的群体，未交配的染色体直接复制到新群体中；
$Step8$:依变异概率 p_m 从种群中选择染色体进行变异，变异算子为随机单点交换，用变异后的染色体代替原染色体留在新群体中；
$Step9$:迭代次数加 1 ，转 $Step3$；
$Step10$:选出最终群体中适应度最高的染色体，解码后输出得到的最短路径及其路径长度；
$Step11$:结束。

最后得到的结果即为旅行商问题的近似最优解，该算法为非确定性算法。