

1 证明下面的算法能够以 80%以上的概率正确判断一个给定的正整数 n 是否为素数,

算法: Primality

输入: 正整数 n

输出: n 是否为素数 (True 为素数, False 为合数)

1 如果 n 与 30030 的最大公约数为 1, 则返回 True

2 否则返回 False

显然, 算法对于素数能够给出正确解答, 而对于合数, 由于 $30030=2*3*5*7*11*13$ 为前 6 个素数乘积, 因此, 当合数 n 也含有这 6 个数之一时, 算法能够给出正确解, 否则就会出错。

由于全体正整数集合中含有因子 p 的整数的比例为 $1/p$, 不含因子 p 的比例为 $1-1/p$, 因此

至少含素因子 p_1, p_2, \dots, p_m 之一的整数的比例为 $1 - \prod_{i=1}^m (1 - \frac{1}{p_i})$, 所以算法能够正确判断一

个整数的概率为 $1-(1-1/2)(1-1/3)(1-1/5)(1-1/7)(1-1/11)(1-1/13)=0.8082$