

1、无向图 G 的顶点覆盖是指顶点集合 U ， G 中每条边都至少有一个顶点在此集合中。设计线性时间算法为树寻找一个顶点覆盖，并且使该点集的规模尽量小。

解：考虑每次从 G 中选取一条边 (u, v) ，将 u 和 v 两个节点都选入集合 U 中，并从图中删去所有与 u 、 v 相连的边。对于得到的图 G' ，反复执行上述操作。

为了使得点集规模尽量小，最开始选取度数最大的点 u ，在与其相邻的点中选取度数最大的作为 v 。删边的过程中，在 u 和 v 的相邻边中再找度数较大的点做候选点，作为下一次的点 u 。反复执行上述操作，直至边集为空，即可得点集规模尽量小的顶点集合 U 。

考虑时间复杂性：对图 G 进行 DFS 遍历会访问到每一个点，之后删边的过程对于每条边访问两次，故总复杂性为 $O(|V| + |E|)$ 。

伪代码如下：

```
Algorithm:Min_cover
Input:  $G=(V, E)$  (an undirected graph)
Output:  $U$  (node set)
begin
    DFS

     $a :=$  the vertex with biggest degree
    while  $E$  is not empty do
        for all edges  $(a, b)$  do
            find  $b$  with biggest degree and second biggest degree  $d$ 
        for all edges  $(b, c)$  do
            find  $c$  with biggest degree

        remove  $(a, b)$  from  $C$ 

        for all edges  $(a, i)$  do
            remove  $(a, i)$ ;
             $i.degree := i.degree - 1$ 
        for all edges  $(b, j)$  do
            remove  $(b, j)$ 
             $j.degree := j.degree - 1$ 

        if  $c.degree \neq 0$  or  $d.degree \neq 0$  then
            if  $c.degree > d.degree$ 
                 $v := c$ ;
            else
                 $v := d$ ;
        else if  $E$  is not empty
            find a vertex  $t$  whose degree is not 0
             $v := t$ 

    end
```

2、设计算法判定平面上 n 个点是否在一条直线上

解：先用两个点的坐标求出直线的表达式，然后代入剩下的 $n-2$ 个点的坐标，检验是否在这条直线上即可。

时间复杂性： $O(n)$

伪代码如下：

```
Algorithm: is_line
Input: P (  $P_i=(x_i,y_i)$  )
Output: flag
begin

    if  $n == 2$  then
        flag := true;

    else if  $P[0].x == P[1].x$  then
        for  $i:=3$  to  $n-1$  do
            if  $P[i].x != P[0].x$  then
                flag := false;

    else then
        A :=  $P[1].y - P[0].y$ ;
        B :=  $P[0].x - P[1].x$ ;
        C :=  $P[0].y * P[1].x - P[1].y * P[0].x$ ;
        flag := true;
        for  $i:=3$  to  $n-1$  do
            if  $A * P[i].x + B * P[i].y + C != 0$  then
                flag := false;

    output flag;
end
```

黎锦灏 518021910771 0408作业

1、设 P 是包围在给定矩形 R 中的一个简单多边形， q 为 R 中任意一点，设计高效算法寻找连接 q 和 R 外部一点的线段，使得该线段与 P 相交的边的数量最少。

解：考虑以 q 为起点，另一个端点为多边形的端点，求出每个线段关于 q 的角度。

对于 P 中每一条边，两个端点关于 q 的角度已知，不妨设为 θ_1 和 θ_2 ($\theta_1 < \theta_2$)；若线段 $q-R$ 与多边形的边相交，且 R 关于 q 的角度为 θ ，则需满足 $\theta_1 < \theta < \theta_2$ 。

题目转换为：多边形的每条边表示为 $[\theta_1, \theta_2]$ ，多边形的所有边即若干个区间，此时需要在数轴上取一个点，使得覆盖这个点的区间个数最少。这个问题只需在数轴上从左向右扫描考察每个端点即可。即时间复杂性： $O(N)$ ，其中 N 为多边形点数。