### 강의 계획 및 평가 방법

주차	날짜	강의 내용	과제 주제	대면/비대면	평가
1	03/06	강의 소개		Online	
2	03/13	데이터 마이닝 절차		A704	
3	03/20	데이터 탐색 및 시각화		B224	
4	03/27	차원 축소	과제 1	Online	
5	04/03	예측성능 평가	피제 1	Online	과제 1 (10%)
6	04/10	다중 선형 회귀분석		A704	
7	04/17	중간 프로젝트 발표		A704	30%
8	04/24	k-최근접이웃 알고리즘 나이브 베이즈 분류		Online	
9	05/01 보강: 06/15(목)	휴업일(근로자의 날) 동영상 강의		Online	
10	05/08	분류와 회귀 나무	과제 2	Online	
11	05/15	로지스틱 회귀분석		A704	과제 2 (10%)
12	05/22	신경망 판별 분석		Online	
13	05/29 보강: 06/02(금) 19시	대체 공휴일(부처님 오신 날) 연관 규칙		Online	
14	06/05	군집 분석		A704	
15	06/12	기말 프로젝트 발표		B224	40%



# Data Mining for Business Analytics Ch. 12 Discriminant Analysis

2023.05.22.





#### Contents

- 12.1 Introduction
- 12.2 Distance of a Record from a Class
- 12.3 Fisher's Linear Classification Functions
- 12.4 Classification Performance of Discriminant Analysis
- 12.5 Prior Probabilities
- 12.6 Unequal Misclassification Costs
- 12.7 Classifying More Than Two Classes
- 12.8 Advantages and Weaknesses



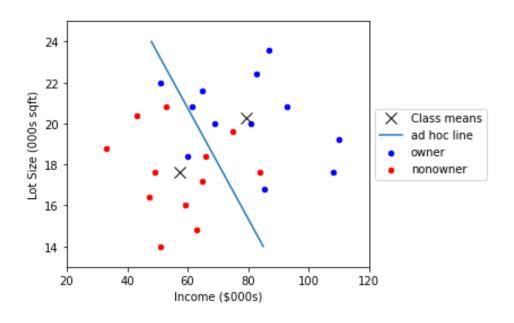
#### 12.1 Introduction

- 판별 분석
- 분류기법. 로지스틱 회귀분석과 같이 분류와 프로파일링에 사용되는 전통적인 통계 기법
- 여러 클래스의 측정값을 활용하여 새로운 항목을 이들 클래스 중의 하나로 분류
- ex) 동물과 식물을 서로 다른 종과 그 하위 종으로 분류
   대출, 신용카드, 보험가입 신청자들을 저위험군, 고위험군으로 분류
   신제품이 출시되었을 때, 제품에 대한 수용시기에 따라 고객 그룹을 나누는데 사용



#### Example 1: Riding Mowers(승차식 잔디깎는 기계)

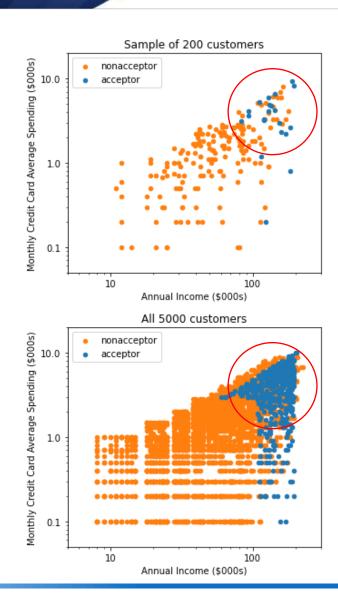
- 한 도시의 가구들을 대상을 승차식 잔디깎는 기계를 구입할 가구와 구입하지 않을 가구에 대한 분류
- 소유 가구: 12개 / 비소유 가구: 12개
- 선형 분류규칙: 24가구 중 4개 가구 오분류





#### Example 2: Personal Loan Acceptance(개인대출 수락)

- 유니버셜(Universal) 은행은 채무가 있는 고객들을 개인대출 고객으로 전환하는 방법을 찾고자 함.
- 목적: 은행은 대출 제안을 받아들일 가능성이 높은 새로운 고객 파악
- 예제) 입력변수: 고객의 연간 소득(Income, 1000달러 단위), 월별
   신용카드 평균사용액(CCAVG, 1000달러 단위)
- Income, CCAVG → 개인대출수락 여부
  - ✓ [위 그림, 200명 샘플] 소득이 높고 CCAVG가 많은 영역에 많은 데이터가 조밀하게 분포 → 대출 제안을 수락한 사람과 거절한 사람들 사이의 분리가 모호
  - ✓ [아래 그림, 5000명 전체 고객] 데이터가 많을 경우 적은 수의 데이터를 다룰 때에 비해 상대적으로 문제의 복잡성 증가





#### 12.2 Distance of a Record from a Class

- 분류에 대한 일반적인 개념: 데이터를 그와 가장 가까운 클래스 속하게 하는 것 → 클래스와 관측값 사이의 거리 측정 필요
- Assume: 신규 고객의 연간 소득(Income: x )을 기반으로 개인대출 제안에 대한 고객의 수락 여부 결정
  - ✓ 수락자들의 평균 연간소득: \$144.75K / 비수락자들의 평균 연간소득: \$66.24K
- 유클리드 거리 법칙(Euclidean distance rule)
  - $\checkmark$  x 가 비수락자 클래스의 평균 연간소득보다 수락자 클래스의 평균 연간 소득에 더 가까우면 → 수락자로 분류
  - ✓ if |x 144.75| < |x 66.24| then class = acceptor otherwise nonacceptor
  - ✓ 예측변수가 2개 이상으로 증가하게 되면, 클래스의 중심(centroid) 사용
  - $\checkmark$  클래스의 평균 벡터:  $\bar{X} = \left[\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_p\right]$
  - $\checkmark$  p 개의 입력변수를 갖는 관측값  $X=\left[x_1,\cdots,x_p\right]$  와 클래스의 중심  $\bar{X}$  사이의 유클리드 거리

$$D_{Euclidean}(X, \bar{X}) = \sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \dots + (x_p - \bar{x}_p)^2}$$



#### 12.2 Distance of a Record from a Class

- 유클리드 거리 사용의 단점
- 1. 입력변수들에 대한 측정 단위 선택에 따라 거리 측정이 달라짐
  - ✓ 연간 소득을 1000달러 기준이 아닌 달러 기준으로 측정한다면 산출된 유클리드 거리가 달라짐
- 2. 변수의 변동성을 반영하지 못 함
  - ✓ 두 클래스의 연간 소득의 변동성 비교: 수락자들의 표준편차(31.6K) 〈 비수락자들의 표준편차(40.6K) → 신규고객의 연간소득이 수락자들의 평균소득에 더 가깝게 측정될 수 있음. 하지만 비수락자들 연간소득의 변동성이 크기 때문에, 이 고객은 비수락자로 분류하는 것이 타당할 수 있음
  - $\checkmark$  표준편차를 고려한 측정 필요 → 표준화된 값인 z 값(z-score)을 사용한 거리 측정
- 3. 변수들 간의 상관관계 무시
  - ✓ 분류하는 데 유용한 변수들이라고 할지라도 이들 간에 상관관계가 있다면, 한 변수가 갖는 효과를 다른 변수들이 포함하기 때문에 실질적으로는 그 변수가 중요하지 않을 수 있음 → 통계적 거리(Statistical distance) 또는 마할라노비스 거리(Mahalanobis distance) 사용



#### 12.2 Distance of a Record from a Class

- 통계적 거리(Statistical distance) 또는 마할라노비스 거리(Mahalanobis distance)
  - $\checkmark$  p: 예측변수의 개수

S: 공분산 행렬

- $\checkmark$  [ ]<sup>T</sup>: transpose operation, 열벡터를 행벡터로 변환
- $\checkmark$   $S^{-1}$ : S 의 역행렬, 일차원에서의 나눗셈이 p 차원으로 확장된 것을 의미

$$D_{Statistical}(X, \bar{X}) = ([X - \bar{X}]^T S^{-1} [X - \bar{X}])^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left( [(x_1 - \bar{x}_1), (x_2 - \bar{x}_2), \cdots, (x_p - \bar{x}_p)] S^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ \dots \\ x_p - \bar{x}_p \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- ✓ If p=1 (1개 예측변수), 예측변수에서 평균을 빼고, 이를 표준편차로 나누기 때문에  $\rightarrow z$  값(z-score)
- ✓ If S = I (모든 예측변수가 서로 상관관계 없음),  $D_{Statistical}(X, \bar{X}) = D_{Euclidian}(X, \bar{X})$
- ✓ 통계적 거리는 예측변수의 평균값, 값의 퍼짐 정도, 변수들 간의 상관관계 고려
- 판별분석: 분류 함수(Classification Function) 사용
  - ✓ 통계적 거리를 기반으로 분리선(예측변수가 3개 이상인 경우에는 분리 초평면(hyperplane))을 찾음
  - ✓ 분리선은 모든 클래스들의 평균들로부터 동일 거리에 위치하게 됨



■ 선형 분류 함수(Linear Classification Function)의 기본 개념 [R. A. Fisher(1936)]

 $Maximize: \frac{between - class\ variability\ (클래스\ 사이의\ 변동성)}{within-class\ variability\ (클래스\ 내\ 변동성)}$ 

- 각 클래스 내의 관측값들은 매우 동질적이나 다른 클래스들과 비교했을 때는 서로 이질적인 클래스들을 얻고자 함
- 선형 분류 함수는 각 클래스 별 1개 씩 생성
- 관측값이 주어졌을 때, 각 클래스까지의 근접성을 선형 분류 함수의 점수로 계산 → 이들 중 가장 높은 분류 점수(가장 가까운 통계적 거리)를 주는 클래스로 관측값 분류

#### 잔디 깎는 기계에 대한 판별 분석 결과 (선형 분류 함수 추정)

Coefficients [[0.1002303 0.78518471]] Intercept [-21.73876167] Decision function = 0.10\*Income + 0.79\*Lot\_Size + -21.74

Example Income=\$60K Lot\_Size=18.4Kft2 0.10\*60 + 0.79\*18.4 + -21.74 = -1.28 negative => nonowner

- 분류 함수 Score
  - ✓ If 'owner(1)' 분류 함수 score > 'nonowner(0)' score → 'owner'
  - ✓ Decision Function( = 클래스 '1' 점수 클래스 '0' 점수) : (-) → "0" class / (+) → "1" class
- 레코드 #1: Income=60K, Lot size=18.4K
- Decision Function = (0.1)(60) + (0.79)(18.4) + (-21.74) =
   -1.28 → 'nonowner(0)'로 분류
- Scikit-learn's Function: "LinearDiscrimitiveAnalysis()"
- 2개의 클래스에 대한 분류 함수의 차이 반환: Decision Function



#### 12.3 Fisher's Linear Classification Functions

- 분류의 다른 방법: 관측값이 각 클래스에 속할 확률을 계산하고, 이 중에서 가장 높은 확률을 갖는 클래스로 관측 값 할당
- 장점: 데이터에 대해 랭킹을 매길 수 있음 → 관측값을 확률값에 따라 내림차순으로 정렬하여 향상 곡선(lift curve)을 그릴 수 있음
- 클래스 개수: m, 분류 점수:  $c_1(i)$ ,  $c_2(i)$ ,  $\cdots$ ,  $c_m(i)$
- 관측값 *i* 가 클래스 *k* 에 속할 확률

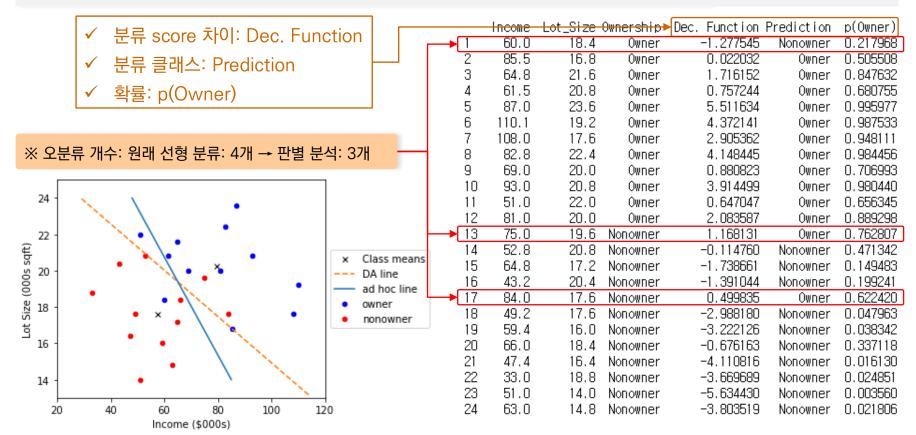
$$= \frac{e^{c_k(i)}}{e^{c_1(i)} + e^{c_2(i)} + \dots + e^{c_m(i)}}$$



#### 12.3 Fisher's Linear Classification Functions

- 클래스 개수: m, 분류 점수:  $c_1(i)$ ,  $c_2(i)$ ,  $\cdots$ ,  $c_m(i)$
- 관측값 *i* 가 클래스 *k* 에 속할 확률

$$P[\text{record } i \text{ (측정값 } x_1, x_2, \cdots, x_p \text{ 을 가짐)}$$
가 클래스  $k$ 에 속할 경우] = 
$$\frac{e^{c_k(i)}}{e^{c_1(i)} + e^{c_2(i)} + \cdots + e^{c_m(i)}}$$





# 12.4 Classification Performance of Discriminant Analysis

- 판별 분석 방법에서 분류 점수(classification score)에 이르는 2가지 가정
- 1. 모든 클래스의 측정값들은 다변량 정규분포로부터 얻어진다고 가정
  - ✓ 이 가정이 만족된다면, 다른 분류 방법들보다 더 효과적인 분류 방법
  - ✓ 로지스틱 회귀에 비해 30% 정도 더 효과적인 성능을 보임[Efron(1975)] → 동일한 결과를 도출하는데 있어서 로지스틱 회귀에 비해 30% 정도 적은 데이터 만을 필요로 함
  - ✓ 예측변수들이 정규분포를 따르지 않고 더미변수를 포함하더라도 비교적 강건한 결과를 보임(가장 작은 클래스의 데이터 수가 충분히 크다면(대략 20개 이상))
  - ✓ 단변량 공간(단일 예측 변수 사용)이나 다변량 공간 모두에서 이상치에 민감함 → 탐색적 분석을 통해 이상치를 찾고 이를 제거할지를 미리 결정하는게 좋음
- 2. 예측변수들 간의 상관관계는 특정 클래스 내에서나 다른 클래스들 내에서 동일하다고 가정
  - ✓ 각 클래스 내에서 예측변수들 간의 상관관계 행렬(correlation matrix)을 통해 확인 가능
  - ✓ 만약, 클래스 별로 상관관계가 상당히 다르다면, 분류기는 변동이 큰 클래스로 분류하는 경향을 가짐 → 이차 판별분석(quadratic discriminant analysis) 사용 추천
- 분류 정확도 평가
  - ✓ 검증 데이터에 대해 Confusion matrix와 Lift curve 활용



#### 12.5 Prior Probabilities

- 지금까지는 각 클래스들이 특정한 레코드를 만나게 될 확률이 클래스 별로 동일하다고 가정 (즉, 각 클래스 별로 제시되는 관측값의 빈도가 동일하다고 가정)
- 만약, 어떤 한 레코드를 만날 확률이 클래스 별로 다르다면? → 분류 함수의 수정 필요
  - $\checkmark$   $p_j$ : 클래스 j 에 속할 사전확률(Prior or future probability)
  - ✓ 각 클래스 별 분류 함수에  $\log(p_i)$  를 더해 줌
- ex) Assume: 전체 모집단에서 소유자 비율: 15% (표본에서는 50%였음)
  - ✓ 좀 더 적은 수의 가구를 소유자 클래스로 분류해야 함
  - $\checkmark$  분류 함수의 상수 조정( 원래 값 +  $\log(p_1)$   $\log(p_0)$ )

$$(-21.74) + \log(0.15) - \log(0.85) = -22.4933$$

$$\log(0.15) - \log(0.85) = -0.75333$$

17 84.0

17.6 Nonowner

0.499835

Owner 0.622420

- √ #17: 0.622420 + (-0.75333) = -0.13091
- ✓ Owner (오분류) → Nonowner (정분류)

※ Decision Function = 클래스 '1' 점수 - 클래스 '0' 점수

Coefficients [[0.1002303 0.78518471]] Intercept [-21.73876167]

Decision function

= 0.10\*Income + 0.79\*Lot\_Size + -21.74

Example Income=\$60K Lot\_Size=18.4Kft2 0.10\*60 + 0.79\*18.4 + -21.74 = -1.28 negative => nonowner



#### 12.5 Prior Probabilities

- ex) Assume: 전체 모집단에서 소유자 비율: 15% (표본에서는 50%였음)
  - ✓ 좀 더 적은 수의 가구를 소유자 클래스로 분류해야 함
  - $\checkmark$  분류 함수의 상수 조정( 원래 값 +  $\log(p_1)$   $\log(p_0)$ )

$$(-21.74) + \log(0.15) - \log(0.85) = -22.4933$$

$$\log(0.15) - \log(0.85) = -0.75333$$

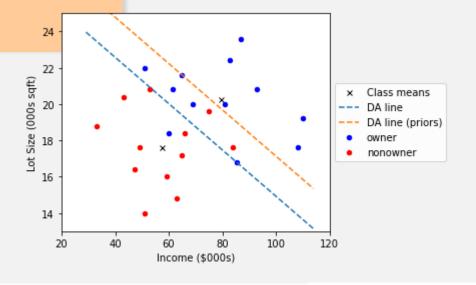
17 84.0 17.6 Nonowner 0.499835 Owner 0.622420

- $\checkmark$  #17: 0.622420 + (-0.75333) = -0.13091
- ✓ Owner (오분류) → Nonowner (정분류)

#### ※ Decision Function = 클래스 '1' 점수 - 클래스 '0' 점수

= 0.10\*Income + 0.79\*Lot\_Size + -21.74

Example Income=\$60K Lot\_Size=18.4Kft2 0.10\*60 + 0.79\*18.4 + -21.74 = -1.28 negative => nonowner





#### 12.6 Unequal Misclassification Costs

- 오분류 비용이 클래스 별로 현저하게 다르다면, 단순 오차율 보다는 오분류의 기대비용을 최소화시켜야 함
- 2개의 클래스로 분류하는 경우 → 분류 함수의 수정 필요
  - $√ q_1$ : 클래스 '1'에 속한 레코드를 클래스 '2'로 오분류한 비용

  - ✓ 이 비용들을 각 클래스 별 분류 함수의 상수에 각각  $\log(q_1)$ ,  $\log(q_2)$ 를 더해 줌
  - ✓ 사전 확률과 오분류 비용 함께 반영: 각 클래스 별 분류 함수의 상수에 각각  $\log(p_1q_1)$ ,  $\log(p_2q_2)$ 를 더해 줌
- 각각의 클래스에 오분류 비용  $q_1$ ,  $q_2$  를 함께 다루기 어려움 ightarrow 오분류 비율  $\dfrac{q_2}{q_1}$  추정
  - ✓ ex) 채무 불이행자를 오분류하는 비율은 채무 이행자를 오분류하는 비용보다 10배 더 크다
  - ✓ 분류 함수의 조정:  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = ratio$  로 설정하고, 클래스 '2'의 상수에  $\log(q_2/q_1)$ 를 더해 줌



#### 12.7 Classifying More Than Two Classes

#### Example 3: Medical Dispatch to Accident Scenes (사고현장으로 의료진 파견)

- 119 응급 구조대에서는 신고를 통해 주어진 대략적인 정보를 바탕으로 어떤 팀을 보내야 할 지 결정해야 함
- 데이터: 11개 예측 변수 (사고 정도(무상해, 중상, 사망 등), 요일, 기상 상태, 도로 유형 등)
- 목적: 예측 변수들이 부상 유형을 분류하는데 얼마나 유용하게 사용될 수 있는가 검토

Accident #	RushHour	WRK_ZO NE	WKDY	INT_HWY	LGTCON	LEVEL	SPD_LIM	SUR_CO ND	TRAF_WAY	WEATHER	MAX_SEV
1	1	0	1	1	dark_light	1	70	ice	one_way	adverse	no-injury
2	1	0	1	0	dark_light	0	70	ice	divided	adverse	no-injury
3	1	0	1	0	dark_light	0	65	ice	divided	adverse	non-fatal
4	1	0	1	0	dark_light	0	55	ice	two_way	not_adverse	non-fatal
5	1	0	0	0	dark_light	0	35	snow	one_way	adverse	no-injury
6	1	0	1	0	dark_light	1	35	Wet	divided	adverse	no-injury
7	0	0	1	1	dark_light	1	70	wet	divided	adverse	non-fatal
8	0	0	1	0	dark_light	1	35	wet	two_way	adverse	no-injury
9	1	0	1	0	dark_light	0	25	wet	one_way	adverse	non-fatal
10	1	0	1	0	dark_light	0	35	wet	divided	adverse	non-fatal



#### Example 3: Medical Dispatch to Accident Scenes (사고현장으로 의료진 파견)

- 데이터: 600개 (학습 데이터와 검증 데이터 분류)
- 결과 변수: 3개의 클래스 (fatal, no-injury, non-fatal)
- 학습 데이터에 대한 판별 분석 수행
- 분류 함수: 각 3개의 클래스 별로 존재
- Confusion matrix: 3x3 구조를 갖는 행렬
- 분류 규칙: 가장 높은 분류 점수를 주는 클래스로 분류
- ex) #1의 각 클래스 별 분류 점수

'no-injury': 
$$-0.89 + (0.03)(1) + (0.22)(0) + \cdots + (0.08)(1) = -0.46$$

'non-fatal' = 
$$-0.96$$

'fatal' = 
$$-5.94$$

Accident #	RushHour	WRK_ZONE	•••	WEATHER	
1	1	0		adverse	

Coefficients	and	intercept
--------------	-----	-----------

over i rerence an	a incoroope	$\overline{}$	
	fatal	no-injury	non-fatal
constant	-1.972659	-0.891172	-0.610471
RushHour	-0.996411	0.033430	-0.015774
WRK_ZONE	-0.457188	0.220012	-0.204480
₩KDY	-1.471777	0.165707	-0.135404
INT_HWY	0.755344	-0.075816	0.060599
LGTCON_day	0.009515	-0.031421	0.030124
LEVEL	0.976626	-0.082717	0.063598
SPD_LIM	0.048033	0.004381	-0.005014
SUR_COND_dry	-5.999809	-0.164874	0.257895
TRAF_two_way	0.752985	-0.012844	-0.000048
WEATHER_adverse	-6.596690	0.079166	0.032564
		$\overline{}$	

Confusion Matrix (Accuracy 0.5283)

#### Prediction

	rieulction	I	
Actual	fatal	no-injury	non-fatal
fatal	1	1	3
no-injury	6	114	172
non-fatal	6	95	202



#### Example 3: Medical Dispatch to Accident Scenes (사고현장으로 의료진 파견)

• ex) #0의 각 클래스 별 분류 점수

'fatal' = 
$$-5.94$$

'no-injury': -0.46

'non-fatal' = -0.96

→ 'no-injury'로 분류

_	Classification	Actual	Score fatal	Score no-iniury	Score non-fatal
0	no−injury	no-injury	-5.94	-0.46	-0.96
1	no−injury	non-fatal	-1.05	-0.46	-1.04
2	no-injury	no-injury	-7.88	-0.63	-0.77
3	no-injury	no-injury	-8.38	-0.54	-0.84
4	no-injury	non-fatal	-9.84	-0.50	-0.85

	Propensity fatal	Propensity no-iniury	Propensity non-fatal	
0	0.00e+00	0.62	0.38	
1	2.63e-01	0.47	0.27	
2	0.00e+00	0.54	0.46	
3	0.00e+00	0.57	0.43	
4	0.00e+00	0.59	0.41	

Remind

- 각 교통사고가 3개의 클래스에 속할 확률 계산
- ex) #0의 'non-fatal'에 속할 확률

$$\frac{e^{-0.96}}{e^{-5.94} + e^{-0.46} + e^{-0.96}} = 0.38$$

'no-injury'에 속할 확률 = 0.62

→ 'no-injury'로 분류

## 분류 점수: $c_1(i), c_2(i), \cdots, c_m(i)$ P[record i 가 클래스 k 에 속할 경우]

$$= \frac{e^{c_k(i)}}{e^{c_1(i)} + e^{c_2(i)} + \dots + e^{c_m(i)}}$$



#### 12.8 Advantages and Weaknesses

- 판별 분석은 데이터 마이닝 방법이라기 보다는 통계적 분류 방법
- 사회과학 분야에서 유용하게 사용되고 있음
- 판별 분석과 다중선형 회귀분석의 장점
  - ✓ 예측변수의 최적 가중치를 찾는 과정을 포함하고 있음
    - 선형 회귀분석에서의 가중치: 종속변수와 관련이 있음
    - 판별 분석에서의 가중치: 클래스들을 분리시키는 것과 관련이 있음
  - ✓ 두 분석 모두 최소제곱법(least square) 사용 → 결과로 얻은 추정값들은 국소 최적값(local optima)에 영향을 받지 않고 강건함(robustness)
  - ✓ 두 방법의 기본 가정: 정규성(normality)
    - 판별분석: 예측변수들이 다변량 정규분포를 따른다고 가정 → 현실적 상황에서는 많은 경우 지켜지지 못 함에도 불구하고 이 문제에 대해 강건함 → 그 이유는 판별분석이 데이터를 선형 분리선, 즉 단순한 형태의 분리 경계를 찾는 데에만 사용하기 때문[Hastie(2001)]
- 분류 방법으로서의 장점 (다중 선형 회귀 분석과 함께)
  - ✓ 단일 예측변수의 기여도에 대한 추정치 제공 → 예측변수의 중요도에 대한 순위를 정할 수 있으므로 변수 선택에 유용하게 활용 가능
  - ✓ 계산과정이 단순하고 간결한(parsimonious) 모델
  - ✓ 데이터를 최대한 이용하여 패러미터를 추정하므로 데이터의 개수가 작을 때 유용

