# 线性变换 复习题

黄利兵

数学科学学院

2023 年 3 月 31 日

# 本章总结

- 主要概念: 线性变换, 可逆线性变换, 值域 (像), 核, 零化多项式, 最小多项式, 不变子空间, 特征值, 特征向量, 特征多项式.
- 基本结论: 线性变换与矩阵的对应; 相似矩阵的不变量; 零度秩定理; Hamilton-Cayley 定理; 可对角化的判别; Jordan 标准形.
- 常用算法: 计算矩阵的特征值和特征向量; 计算矩阵的 Jordan 标准形.
- 主要方法: 回到定义; 运用基本结论; 利用 Jordan 标准形.

# 判断题

(1) 如果 $T$ 是有限维线性空间 $V$ 上的线性变换, 则 $\dim V = \dim \ker T + \dim TV$.

(2) 如果 $T$ 是有限维线性空间 $V$ 上的线性变换, 则 $V = \ker T + TV$.

(3) 如果 $n$ 阶矩阵 $A$ 与 $B$ 有相同的特征值, 则它们相似.

(4) $\mathbb{R}^3$ 的线性变换一定有特征向量.

(5) 如果 $n$ 阶方阵 $A$ 满足 $A^3 = A$, 则 $A$ 可对角化.

(6) 如果 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 都是线性空间 $V$ 上的线性变换, 则 $(\mathcal{A}+\mathcal{B})V = \mathcal{A}V + \mathcal{B}V$.

# 填空题

(1) 如果 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换 $T$ 满足 $T(1,1)=(2,1)$, $T(0,1)=(1,3)$, 则 $T(3,2)$ 等于____________.

(2) 设 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ 是线性空间 $V$ 的一组基, 线性变换 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathcal{A}(\alpha_i)=\alpha_1$, $1\le i\le 3$, $\mathcal{A}(\alpha_4)=\alpha_2$. 则 $\mathcal{A}$ 的像空间的一组基是____________, 核空间的一组基是____________, 核空间与像空间的交是____________.

(3) 若 3 阶矩阵 $A$ 的特征值为 2, $-1$, $-2$, 则 $A$ 的行列式是____________.

(4) 若 $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}1&k&0\\-1&0&-1\\0&k&1\end{bmatrix}$ 相似, 则 $k$ 的值是____________.

(5) 已知三阶矩阵 $A$ 的特征值为 2, 1, $-1$, 且 $(1,0,-1)'$, $(1,-1,0)'$, $(1,-1,1)'$ 分别是相应的特征向量. 则 $A$ 的第三行是____________.

# 计算题

(1) 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$ 的最小多项式, 并判断 $A$ 是否可对角化.

(2) 对于矩阵 $B=\begin{bmatrix}3&1&-2\\6&4&-6\\4&2&-3\end{bmatrix}$, 求可逆矩阵 $T$, 使得 $T^{-1}BT$ 为对角矩阵.

# 证明题 (一)

设 $T: P[x]_4 \to P[x]_4$ 定义为

$$T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a+b)x^3 + (b-a)x^2 + (a+b+d)x + (a-b+2c+d).$$

(1) 求 $T$ 在基 $1, x-1, x^2-x, x^3-x^2$ 下的矩阵.

(2) 证明 $V = \{p(x) \in P[x]_4 \mid p(1) = 0\}$ 是 $T$ 的不变子空间.

(3) 证明存在 $T$ 的不变子空间 $W$, 使得 $P[x]_4 = P[x]_1 \oplus W$.

# 证明题 (二)

给定 $A \in P^{n\times n}$. 定义线性变换 $L_A : P^{n\times n} \to P^{n\times n}$ 和 $R_A : P^{n\times n} \to P^{n\times n}$ 如下

$$L_A(B) = AB, \quad R_A(B) = BA, \quad \forall B \in P^{n\times n}.$$

(1) 如果 $v$ 是 $A$ 的特征向量, 证明 $(v, 0, \cdots, 0) \in P^{n\times n}$ 是 $L_A$ 的特征向量;
(2) 证明 $L_A$ 可对角化当且仅当 $A$ 可对角化;
(3) 如果 $A$ 可对角化, 证明 $L_A - R_A$ 可对角化.

# 证明题 (三)

设 $T:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 定义为 $T(A)=A^{\mathsf{T}}$.

(1) 求 $T$ 的特征值;

(2) 证明 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 可分解为 $T$ 的特征子空间的直和.

# 证明题 (四)

设 $T: V \to V$ 为线性变换, $W \subset V$ 为它的不变子空间. 设 $v_1, v_2, \cdots, v_s$ 分别是属于不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 的特征向量. 如果 $v_1 + v_2 + \cdots + v_s \in W$, 证明: $v_i \in W, 1 \leq i \leq s$.

# 证明题 (五)

设 $T$ 是有限维线性空间 $V$ 上的线性变换. 令

$$U = \bigcap_{m=1}^{\infty} T^m V, \quad W = \sum_{m=1}^{\infty} \ker T^m.$$

证明: $U$ 和 $W$ 都是 $T$ 的不变子空间, 且 $V = U \oplus W$.

# 证明题 (六)

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $|A| \neq 0$, 证明存在 $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使得 $A = B^2$.