# 数分第一次月考拯救计划

笔者注：带星号（**）的题可能略高于月考难度，是否讲解将视情况而定.

例1. 按函数极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}=1$

例2. 设数列$\{a_n+a_{n+1}\}$和$\{a_n+a_{n+2}\}$都收敛, 证明数列$\{a_n\}$收敛.

例3. 设$x_1\in[2,3]$ , $x_{n+1}=\sqrt{5x_n-6}$ , $n=1,2,\ldots$证明数列$\{x_n\}$收敛, 并求数列$\{x_n\}$的极限

例4. 给定数列$\{a_n\}$, 记$A_n=\sum_{k=1}^{n-1}|a_{k+1}-a_k|$

(1) 证明：如果数列$\{A_n\}$有界，那么数列$\{a_n\}$收敛.

(2) 如果数列$\{a_n\}$有界，那么数列$\{A_n\}$一定有界吗?

例5. 如果数列$\{n^2(a_{n+1}-a_n)\}$有界，证明$\{a_n\}$收敛.

例6. (1) 设存在常数$r\in(0,1)$, 使得对任意正整数$n$, 成立$|x_{n+2}-x_{n+1}|\le r|x_{n+1}-x_n|$证明数列$\{x_n\}$收敛.

(2) 设函数$f(x)$是从$[a,b]$到$[a,b]$的映射，且存在常数$r\in(0,1)$, 使得对任意$x,y\epsilon[a,b]$，都有$|f(x)-f(y)|\le r|x-y|$, 证明存在唯一的$\theta\epsilon[a,b]$，使得$f(\theta)=\theta$.

例7. 已知数列$\{a_n\}$满足：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$

(1) 数列$\{a_n\}$是否一定收敛？如果收敛，它一定收敛到$A$吗？

(2) 如果数列$\{a_n\}$单调递减，试证明它一定收敛到$A$.

($3^{**}$) 如果数列$\{n(a_{n+1}-a_n)\}$收敛到 0，试证明$\{a_n\}$收敛到$A$.

例8. 已知$a_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ ，试用柯西收敛准则判断数列$\{a_n\}$是否收敛

例9. 已知有数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$和$\{c_n\}$, 满足对于任意正整数$n$, 成立$a_n\le b_n\le c_n$. 分别用$A_n,B_n$和$C_n$来表示数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$和$\{c_n\}$的前$n$项和. 已知数列$\{A_n\}$和$\{C_n\}$都收敛，求证数列$\{B_n\}$也收敛.

例10. 定义函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(x+2)-x^{2n}sinx}{x^{2n}+1}$ 求$f(1)$和函数在$x=1$处的左右极限.

例11. 设$f(x)$在$(x_0,x_0+\delta)$上有定义，试证明$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$的充分必要条件是对于$(x_0,x_0+\delta)$中任何严格递减的以$x_0$为极限的数列$\{a_n\}$，都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=A$

例12. 证明：如果函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上严格递增，且存在数列$\{a_n\}$使得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=A$，那么$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

例13. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3+2sinx)^x-3^x}{\tan^2 x}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin(\pi\sqrt{n^2+n})|$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{arctanx-\frac{\pi}{4}}{x-1}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[p]{1+x}-1}{x}$（$p$为常数）

(6**) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(sinx)-\tan(tanx)}{x^3}$

(7**) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(\pi\sqrt{4n^2+1})$

(8**) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{C_n^0}+\frac{1}{C_n^1}+\cdots+\frac{1}{C_n^n}\right)$

(9**) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{x^x}-x^x}{x^x-x}$

例14. (**)已知函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}x\right)}{x}=0$

试证明：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$

例15. 设函数$f$在$(0,+\infty)$上单调递增，且有$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$，证明对于一切实数$a>0$，都有$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=1$

例16. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$

（1）证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

（2**）如果$\{a_n\}$是正数数列，求证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n^2}=0$