

专稿

曲面论(二): Gauss-Bonnet 公式

陈省身《微积分及其应用》之第五讲(2001 年 11 月 23 日)

编者按 本刊先后在总第 94、95、96、99、102 期刊出了陈省身先生的系列讲座《微积分及其应用》,引起读者极大兴趣,纷纷表示获益颇多,要求续载其后各讲,以能从中感知大师风采。本期继续刊出第五讲,以飨广大读者。此稿由白承铭、宋敏、云保奇、赵志根等同志记录整理,刊出时只作个别文字处理。此稿发排之际,陈先生不幸仙逝,噩耗传来,举世同悲,在此深表怀念之情。

(I) 曲面论发展的简介

很高兴又与大家见面了,我在医院里住了几天,你们可以看出来我还没有完全好,不过我觉得我还是应该来跟大家讲讲这些东西。我今天要讲的是 Gauss-Bonnet 公式。这个公式有相当的意义和历史,尤其跟我个人的工作也有关系,所以我要提一提我跟这个问题是怎么样的关系。

我们上次讲到曲面论,曲面论是微分几何里头最重要的一部分,因为许多微分几何的现象在 3 维空间里的 2 维曲面的情况已经产生了。同时,因为它是在 3 维空间里头,这个几何的情况是可以看见的,不是完全用代数来表示。

曲面论有很长的历史。最早要追溯到 Monge。Monge 是法国的大数学家,他老先生对政治有些活动,所以除了做大学教授之外,他对法国的教育也有很多影响。他是拿破仑手下的一个雇员,帮助拿破仑做事。他是拿破仑政府的海军部长,甚至还跟着拿破仑去埃及打仗。因为他的影响,法国的高工学校(Polytechnique)就建立起来了。很长一段时期,法国最好的学生都在高工学校。我想高工学校也许象现在的清华,有许多好的学生,例如说,法国一个最大的数学家 Poincare 就是 Polytechnique 的学生,Monge 是第一个写关于微分几何书的人,他的书就叫做《微积分在几何上的应用》,这也是我要讲的题目。因此,法国的教育在微分几何有一个相当的传统。除了 Monge 本人之外,由于他在高工的影响,他有很多学生,都是在微分几何方面有相当贡献的人。

然后在微分几何逐渐发展之中,比较晚一些的是法国另外一个大数学家 Darboux。Darboux 是法国科学院的秘书长,所以在他的时期,他是在科技界有很多影响的一个人。他不仅是秘书长,也是巴黎大学理学院的院长。他的最大的工作是四本《曲面论》。我想,这四大本是数学里头一个永远的文献。现在可惜由于它是法文的,很多人不看这个书,我想这些人对微分几何缺少一点了解,他们应该看这个书。Darboux 的书讲得非常好,包括了很多材料。

在 1941 年,我在西南联大教书,教《微分几何》,也讲到曲面论。讲到曲面论时,当然就看 Darboux 的书,就想到 Darboux 的书里头,一个主要的方法是用活动标架,也就是采用活动标架法。他用得非常彻底,做得非常漂亮。Darboux 稍微不用的一点是外微分。我想,我的课是讲微积分,而微积分你要讲到多元,多变数的时候,这个外微分不能避免。这是因为在多变数的时候,最有效的工具是外微分。外微分可以加、减,可以乘,可以微分。所以有很多代数的运算可以用到外微分,同时,一个外微分也是一个式子。这个式子给予很多数学问题,不管是它的几何,还是它的分析,都给你很多材料,因此是非常有用的。

Darboux 的缺点是他没有用外微分。他用活动标架法,但是没有外微分。因此,有很多工作,不用外微分,怎么分呢?他也是还要用微积分的,不用外微分,他用偏微分,用偏微分比外微分差得多

了。因为你的曲面是 2 维的空间,所以对于两个变数,即曲面的参数 u, v ,你要对 u 求偏微分,对 v 求偏微分,这里头有很多偏微分,而用外微分就简单多了。但是他不采用外微分,这是很奇怪的事情。Darboux 是发现一次外微分式的第一人,另一个是 Frobenius。他们两人最早发现这个东西,但是等到应用到曲面研究的时候,不知道为什么,他没有用。也许是由于传统的关系,他写了外微分之后,谁都不懂,所以他也就不用外微分了。

我刚才讲了,在 1941 年,我刚巧在昆明教这个课。我很自然地想,为什么不用外微分呢?所以,我就用外微分想法做 Darboux 所做的工作,或者说至少做曲面论和一些几何的讨论。我采用外微分,因此我得到了一个很好的了解。

(II) 曲面论基本内容的回顾

什么叫外微分呢?你发现曲面是一个 2 维的流形,它在普通空间里是 2 维的,所以其上任意一个点有两个变数,通常就叫做参数。但是现在呢,我们就叫它局部坐标 u, v 。因此它的坐标是 2 个变数的函数,所以是这个条件使它在每一点有一个切平面。这个切平面当然很要紧,因为我们没有法子研究复杂的图形。我们只能研究最简单的如直线,平面这些东西。切平面跟曲面有最密切的关系。那么,单说密切的关系不够,一定要解析地解决更深刻的一些问题。有一个切平面。这个切平面上是 2 维的,于是其上每一点都有许多矢量,也就是切矢量,切矢量就是跟这个曲面相切的矢量。因为这个曲面是在 Euclid 空间里头,所以我可以讲这个矢量的长度。为简单起见,我限于讨论长度等于 1 的矢量,即单位矢量,所以有一圈单位切矢量。跟这些单位切矢量垂直的有另外一个矢量,我们假定它是取成单位的,那么这个矢量我们叫做单位法矢量。要注意的是这里就有一个几何现象发生了,因为假使这个曲面弄平了的话,单位法矢量可以向上走,也可以向下走,换句话说,这个曲面除了是一个 2 维的流形之外,它还有一个定向:在曲面上你是顺方向转,还是跟逆方向转,这个转动是很不一样的。所以,你要定怎么样子转动是顺方向,这就是要给曲面一个定向,定向有了之后,它的单位法矢量就定了,单位法矢量在这个方向可以向上走,也可以向下走。定了一个之后,这个曲面也就定向了。这是很重要的一个观念。虽然相差的只是一个符号,但是这是一个很重要的观念。

Mobius 是德国伟大的几何学家。因为你要定向, Mobius 发现有一些曲面不能定向,这当然是很有意思的一件事情。你们大家都知道的这个图形,就是拿一张纸,把它转一圈连起来的话,就得到所谓的 Mobius 曲面,它没法子定向,这是几何上很有意思的一件事情。

那么我们假定曲面已经确定了一个方向。有了这样定向的曲面后,几何情况是怎么样的呢?由单位法矢量 e_3 , 其中 e_3 是在 3 维空间,你发现有一件事情,就是说你单独讨论曲面不够,你一定要利用曲面上的单位切矢量,我称之为 e_1 。这样我就有了一个标架,它有了第一个单位矢量和第三个单位矢量。如果空间是定向的,第二个单位矢量 $e_2 = e_3 \times e_1$ 也就完全确定了。所以我就有个单位标架,单位标架就是具有一定次序的三个单位矢量,且它们之间是互相垂直的。

单位标架在几何研究中很重要,因为几何是根据运动群研究空间在运动之下不变的几何性质,而这运动群就是标架所成的空间。有一个并且只有一个运动把一个标架变为其它的标架。至于全体的单位标架跟这个运动群的元素成一一对应,而且对应保持拓扑和一切的性质,所以运动群很要紧。空间的运动在解析的情况之下难以处理,而有了标架之后,就可以处理了。标架就是矢量,而矢量一般是有 3 个分量的矢量,而每一个分量是函数,就可以把它微分、加、减什么的。矢量有加、减的运算,也有微分的运算。在某种意义下,还可以有积分的运算。所以我现在就可以微分。

我研究曲面的时候,不只一个标架,那么在曲面的每点,这样的标架有多少呢?假使你晓得 e_1 的话,同时这个曲面是定向的,这个标架就完全定了。 e_1 是什么呢?是这个曲面在这一点单位切矢量,那么这个曲面有多少单位切矢量呢?每点有一圈在切平面上头等于单位矢量,而曲面是 2 维的,

所以它们所成的空间是 3 维流形, 这是因为这个点是在曲面上移动, 是 2 维的, 现在在点定了之后, 单位切矢量可以绕着它转一圈, 成一个圆周, 所以它是又加一维, 是 3 维。这个 3 维空间非常要紧。

我想现在实际上, 你们要了解微积分或者了解跟微积分下去的数学或者在数学中的应用, 这个情况是最简单的, 同时是最有用的。所以我有一个 3 维空间, 由于每一点有个圆周, 现在有个名字叫做圆丛, 或者圆周丛。讨论了圆丛之后, 一切都简单了。因为一切都是矢量, 而是矢量的话, 它有分量, 就可以微分, 就可以用代数或者微分的运算。

我们是在讨论微积分, 我们假定碰到什么函数都可以微分。我叫在这个平面上的点为 x , 那么 dx 是一个矢量, 就是从原点连着这个点的矢量。 x 是 u, v 的函数, 而 u, v 是平面上的局部坐标, 所以你可以写出 dx 。假使 x 限制在曲面上, 那么 dx 一定是 e_1 与 e_2 的线性组合, 所以在这个地方, 我就充分利用外微分的观念。实际上 dx 是一个矢量值的一次微分式, 所以它是 e_1 与 e_2 的线性组合, 它的组合系数是一次微分式, 所以 dx 可以写为 $dx = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$ 。而 (dx, dx) 就是我们曲面的黎曼度量。因为 e_1 与 e_2 是互相垂直的单位矢量, 所以 $\omega_1^2 + \omega_2^2 = ds^2$ 就是黎曼度量。如果这个清楚了, 对于普通地讲微分几何就简单多了。因为普通微分几何中黎曼度量要写成 $g_{ij} dx_i dx_j$, 这是因为在切空间里所利用的坐标是任意的 Cartesian 坐标, 它不一定垂直, 也不一定是单位。

dx 等于 $\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$, 但是我们外微分有个基本的性质, 就是再用一次的话, 它等于 0。这就是普通说的偏微分可以是交换的条件, 一样的, 也就是得到的偏微分与微分的次序无关。所以你就把 d 用到 dx 上头, 一定等于 0。你把右边展开的话, 就得到 $d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12}; d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}; 0 = d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23}$ 。我会在下面给出 $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$ 。

既然用微积分了, 所以可以把 $(xe_1 e_2, e_3)$ 的微分表为 e_1, e_2, e_3 的线性组合。这个线性组合把 de_i 写成 $\omega_{ij} e_j$ 。现在我用微分几何普通的符号: 假使有一个指数要重复的话, 就表示相加, i, j, k 从 1 到 3。你把 de_i 写成 $\omega_{ij} e_j$, ω_{ij} 的几何意义很明显: 你现在有一组标架, 它跟一组参数有关系, 而对于这组标架, 就有一个邻近标架, 该邻近标架跟原标架的关系就是 ω_{ij} 。这关系是由一次微分式来表示的。因此就有 $de_i = \omega_{ij} e_j$ 。这组方程式很要紧, 它就表示两个邻近标架互相的关系。

在这个情况之下, 微分几何跟力学不大一样, 力学往往变数是时间, 所以一个标架跟着时间在移动, 因此你整个标架只有一个变数, 都是时间 t 的函数。现在我们是一个曲面, 每点有许多标架, 所以我这标架的参数是 3。这是因为有切面的局部坐标, 又有切矢量在平面里头变换的坐标, 所以我现在这个自变数是 3。还因为 E 这空间是 3 维的, 自变数高了, 所以这是有原因使得外微分有效。

我们已将 de_i 写成 $de_i = \omega_{ij} e_j$, ω_{ij} 对于 i, j 是反对称的, 这是因为我的标架是单位标架, 即因为 $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, 所以它是反对称的。因此 ω_{ij} 实际上很简单: 你把 (ω_{ij}) 写出来, 它是一个方阵。这个方阵是反对称的, 所以在对角线的 ω 等于 0。其余的对角线是反对称的, 因此实际上只有 3 个一次微分式: $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$ 。

我想我上次证明了 ω_{12} 由 $d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12}$ 和 $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}$ 完全确定, 这是一个重要的定理, 这是使得 Levi-Civita 出名的重要定理。

我现在把 $de_i = \omega_{ij} e_j$ 求外微分。因为 $d(de_i) = 0$, 所以右边的话, 我就得求 $d\omega_{ij}$, 结果是 $d\omega_{ij} = \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$ 。因此这些 ω 之间有很简单的关系。因为什么呢? 因为对于 $d\omega_{ij} = \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$, i, j 是不相等的。如果相等的话, ω_{ii} 是 0, 这是因为 ω 是反对称的, 所以你取 $i \neq j$ 。如果 k 等于 i , 则 $\omega_{ii} = 0$; 如果 k 等于 j , 则 $\omega_{jj} = 0$ 。所以 k 不等于 i , 也不等于 j 。因为我们是在 3 维空间, k 只有一个可能性。因此这个看着很神奇的方程式, 它的右边只有一项, 我上次把它写下来了, 就是

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}; d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}; d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}。$$

尤其是得到 $d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}$ 这个公式, 但是 ω 是反对称的, 所以就得到 $d\omega_{12} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23}$ 。而 ω_{13} ,

ω_{23} 都是 ω_1, ω_2 的线性组合: $\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2; \omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2$ 。这刚巧就得到下面这个公式: $d\omega_{12} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$ 。其中 K 是 Gauss 曲率, Gauss 曲率就是 $K = ac - b^2$ 。这个公式不得了。当年 Gauss 不是这样得到这个公式, 而是使用其他方法。它叫做 Theorem Egregium。意思是它是一个奇妙的定理。细细看看, 它是很妙的。因为 E 是单位矢量丛, 这个圆周丛对于曲面 M 有一个投影: 对于圆周丛, 有这个单位矢量, 我取它的原点就是它的投影。因此我们现在的几何比从前观念上比较复杂了, 就是说, 不只是有一个曲面或者有一个曲线, 现在有两个空间: 有 E 这个空间和曲面 M 。事实上, 有了曲面 M , 然后有由它的所有单位矢量所成的空间 E , 它是曲面的圆周丛。现在通常叫这个曲面底空间, 它是在底上的一个空间, 所以就有一个 3 维圆周丛, 它的底空间是我们的曲面。

在这个情况之下, 我们有几个一次微分式: 在空间里头有一次微分式 ω_1, ω_2 , 然后有 $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$, 一共 5 个, 其中 ω_{13}, ω_{23} 是 ω_1, ω_2 的线性组合, 它表示曲面的几何性质。我们有

$$\text{第一基本式} \quad I = ds^2 = (dx, dx) = \omega_1^2 + \omega_2^2;$$

$$\text{第二基本式} \quad II = (-dx, de_3) = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = a\omega_1^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2$$

第二基本式对于第一基本式有特征值, 特征值的代数和一般叫做中曲率 $H = (a + c)/2$, 特征值的积就是 Gauss 曲率, 所以 Gauss 曲率是 $ac - b^2$ 。

而我们现在有一个奇妙的公式就是 $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$ 。在这个公式右边, $\omega_1 \wedge \omega_2$ 就是曲面的面积元素, 它当然只跟曲面的度量有关, 与它的位置没有关系, 只跟曲面的第一基本式有关。在它的左边, ω_{12} 是我们的 Levi-Civita 联络, 由于右边由第一基本式完全确定, 所以左边也是只与第一基本式有关, 因此我们知道 Gauss 曲率只跟第一基本式有关。这是 Gauss 非常得意的结果。

(III) Gauss-Bonnet 公式

我们可以由 $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$ 得出来 Gauss 有名的这个定理。我现在说, Gauss-Bonnet 公式也立刻就由这个公式得出来。那么, 当年我也这么想, 因为假使你有一个封闭的曲面, 有了这个 Gauss 曲率乘以面积元素, 你当然很自然地问它的积分是什么: 有一个面积元素乘以一个函数 (Gauss 曲率), 把它在曲面上积一遍得出的数是不是跟这个曲面的几何有关? 那么, 这个就是 Gauss-Bonnet 公式: M 是封闭的定向曲面, 则 $\iint K dA = \frac{1}{2\pi} \chi(M)$ 。

在我们这个公式中, 我们把 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 叫面积元素, 我们也可以叫它做 dA , KdA 就是这个积分。你立刻就想: 我们在封闭的曲面, 所以如果有一个积分, 它可以写成 d 什么的, 那么它的积分应该是在曲面的边界上, 可以变为一个边界积分, 这是我开始讲的 Stokes 定理主要的部分。所以会不会由这个得到 Gauss 曲率的积分是 0。这显然是错误的, Gauss 曲率积分不会等于 0, 这是因为你取一个 2 维的球面, 它可以取一般的度量使它的 Gauss 曲率等于 1, 那么在曲面上的积分当然不会等于 0。所以这个道理是错误的。

当年因此我想错在什么地方。错在我们这个公式 $d\omega_{12} = -KdA$ 不是在曲面上, 是在圆周丛上。这个曲面是在圆周丛上, 所以我需要把这个曲面提高到圆周丛上头, 提高是什么意思呢? 就是在每一点你取这个点作为原点的单位切矢量, 我们一般叫这个为矢量场。因此你在一个 2 维流形上面要取一个矢量场, 这个矢量是单位矢量跟曲面相切, 即为单位矢量场, 这是不是可能? 随便任给你一个曲面, 你能不能每点指定一个单位切矢量, 或者切矢量, 使得它是连续的, 甚至是可以微分的。这样的矢量场不一定有, 这是一个拓扑的定理。整个的这一段的发展是曲面论, 或者是整体曲面论跟曲面的度量这种种的关系在差不多 100 年前最主要的问题。那个时候最主要的杂志是 Mathematische Annalen, 全世界数学的中心是在德国, Mathematische Annalen 上关于这个问题有很多文章。那时候, Einstein 是 Mathematische Annalen 的一个编辑。把这个问题完全搞清楚需要一些时间。

那么其中有一个因素是假使你有一个封闭的曲面,你取每点的并且定向的单位法矢量,即取每点确定的单位法矢量,把它映射到单位球上去,这个通常叫做 Gauss 映射。它把你的曲面映射到单位球上去,这样就把一个 2 维曲面映射到另一个 2 维曲面,两个都是定向的,于是这里就有一个拓扑不变式,叫做 Mapping Degree,即映射的次数。在平面的情形,你有一条曲线,所以单位球就是单位圆,那么你把这条封闭的曲线映射到单位圆上头,究竟它转了多少圈呢? 这就是 Mapping Degree。这个定义在高维,甚至是 2 维就不这么简单了。显然,我们把曲面映射到单位球上头,然后取单位球上头的面积元素,这就是 Gauss 曲率,所以这个映射就等于 Gauss 曲率的积分,把这个对面空间的面积元素用映射拉回来之后和原来曲面的面积元素一除,即为求它的整个的积分,就得到映射的 Degree。可以证明这个 Degree 在可以定向的曲面的情况下,它是曲面的 Euler 数的 $1/(2\pi)$ 。

很可惜的,我大概没有时间把这个完全讲完。我想我下次再详细讲讲。我现在大致讲讲这个证明是怎么样的。显然我们已有基本公式 $d\omega_{12} = -KdA$ 。我们还要把曲面放到 E 上去,所以要定一个单位矢量场,这不一定可能。这样的单位矢量场要有异点,也就是说如果你允许整体单位矢量场有异点的话,它那是可能的。这也需要证明。

有了异点之后,就看这个异点的性质,比如说,你看看这些单位矢量场,画这几个图(图略)。这是矢量场的异点的可能性,可能矢量场有许多不同的方向,但是在异点有时候这个矢量向外走,也有时候矢量向里走,也有时候就象第三个图,它是跟一族双曲线相切。所以讨论矢量场的异点的性质是非常有意思的问题。

那么我在任何曲面一定有一个,并且不只一个,而是有许多有异点的单位矢量场。在这个情形之下,你要把曲面切成小块,切成一个所谓 complex(复形)。你先定它在顶点,因为所谓的 complex,就是说,有些顶点,有些边,有些面。在顶点,定一个任何的矢量,那么第二步把这个矢量场延到整个的边。现在是面了:假使是面的话,比方说有个三角形,现在矢量场已经在边上都定了,是不是能够延长到它的内部,这就不明显了。当然这是一定可以的。假使你允许它有异点,比方说是一个三角形,那么你就在三角形中间取一点,然后从这点连到边上,那么这个矢量场就把它延到内部,但是这样定的矢量场在中间的那点一定是异点,因为中间的那点没法子定一个可以连续的矢量场,使得每点只有一个矢量。在这一点就没法子定。

所以刚才这个理由可以证明:假使你允许这矢量场有异点,这样的矢量场是存在的。普通一定有异点,在地球上,要刮风的话,这风跟地球相切的时候,它的方向是个矢量场,一定有一点没有风,至少有一点。而这一点就很复杂了,对这种点的研究很有意思,也是很要紧的问题。

区别矢量在异点的性质,很简单的一个方法是我们可以异点定一个整数。这一般就叫做它的指标: $I(s) = \lim_{2\pi} \int \omega_1$ 。就是说,中间有异点,异点附近的矢量场是完全确定的,你在这点画个小圆周,那么圆周的边界矢量场已经有了,所以你在这一点把它映射到一个圆周。局部的时候,假定是 Euclid 几何且用平行线,你就把它映到圆周,那么绕圆周是多少次呢? 这就是矢量场的指标。下次我证明假使你有了这些,你就取单位矢量的矢量场,并且把这个曲面提高到 E 里,即提高到圆周丛里,它就变这个曲面为有尖点的。既有尖点,又有异点,这个异点弄上去就是尖点。那么这些尖点的指标加在一起就是 Euler 常数,就等于这个积分,即这个积分有意义,它是 Euler 常数。

我想微积分有一个重要的应用是在复变函数论。你要讲数,最有意思的数就是复数。很惭愧,我看中国数学史,中国人太实际了,中国人没有复数。复数要紧得不得了。我要讲一点复变函数,我要证代数基本定理。复变函数之后,任何代数方程式都有解,这是不得了的一个结果。这个结果,当年 Euler 不会讲,很多人都证不出来。Gauss 能证明,他是近代最伟大的数学家。