积分不等式的若干证明方法

一般来说，计算或估计积分的方法都可以用于证明积分不等式. 下面通过例子来展示证明积分不等式的一些方法，证明积分不等式常常需要综合运用多种方法.

一、利用黎曼积分的定义

这种方法是先证明积分和的离散形式的不等式，再由黎曼积分的定义得到积分不等式. 一些经典不等式都可以用这种方法由离散形式的不等式得到积分形式的不等式.

例 1 设函数$f(x)$和$g(x)$都在$[a,b]$上可积. 证明施瓦兹*(Schwarz)*不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right].$$

证 设$T=\{x_k|k=0,1,\cdots,n\}$是$[a,b]$作n等分得到的分割，$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,\cdots,n$, 则由柯西(Cauchy)不等式得

$$\left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)g(\xi_k)\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n f^2(\xi_k)\right)\left(\sum_{k=1}^n g^2(\xi_k)\right).$$

注意到Δx_k都等于$\dfrac{b-a}{n}$, 就有

$$\left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)g(\xi_k)\Delta x_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n f^2(\xi_k)\Delta x_k\right)\left(\sum_{k=1}^n g^2(\xi_k)\Delta x_k\right).$$

令$n\to\infty$取极限即得

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right].$$

□

赫尔德(Hölder)不等式(离散形式) 设$a_k,b_k\geqslant 0$, $k=1,2,\ldots,n$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$, 则

$$\sum_{k=1}^n a_kb_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

赫尔德不等式(积分形式) 设函数$f(x)$和$g(x)$都在$[a,b]$上可积，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$, 则

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

闵科夫斯基(Minkowski)不等式(离散形式) 设$p \geqslant 1$, 则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

闵科夫斯基不等式(积分形式) 设函数$f(x)$和$g(x)$都在$[a,b]$上可积，$p \geqslant 1$, 则

$$\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}.$$

切比雪夫(Chebyshev)不等式(离散形式) 设$p_k \geqslant 0$, $k=1,2,\cdots,n$, $a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$同时递增或同时递减，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}p_k a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}p_k b_k\right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}p_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}p_k a_k b_k\right).$$

切比雪夫不等式(积分形式) 设函数$p(x)$在$[a,b]$上非负可积，$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上同时递增或同时递减，则

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

詹森(Jensen)不等式(离散形式) 设$p_i \geqslant 0$, $i=1,\cdots,n$且$\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$, $f(x)$下凸，则

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}p_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}p_i f(x_i).$$

詹森不等式(积分形式) 设$f(x)$, $p(x)$在$[a,b]$上可积，$m \leqslant f(x) \leqslant M$, $p(x)$非负且$\int_a^b p(x)\mathrm{d}x > 0$, $\varphi(x)$是$[m,M]$上的连续下凸函数，则

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right) \leqslant \frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}.$$

二、利用非负性

这种方法是应用“若非负函数$f(x)$在$[a,b]$上可积, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$”的性质.

例 2 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，m, M分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最小值和最大值，$0<m\leqslant M$. 证明

$$\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

证 由$\dfrac{[f(x)-m][M-f(x)]}{f(x)}\geqslant 0$得

$$\int_a^b \frac{[f(x)-m][M-f(x)]}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

整理得

$$mM\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant (m+M)(b-a).$$

因此

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\\
\leqslant\ & \frac{\left[mM\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2}{4mM}\\
\leqslant\ & \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.
\end{aligned}$$

□

三、放缩法

这种方法通过适当放缩被积函数来证明积分不等式.

例 3 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续, 证明:

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 x[f(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant \frac{1}{16}.$$

证

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 x[f(x)]^2\mathrm{d}x\\
=\ & \int_0^1 \left[\frac{x^3}{4}-x\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}x\\
\leqslant\ & \int_0^1 \frac{x^3}{4}\mathrm{d}x\\
=\ & \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

□

四、“分段估计”的方法

当被积函数在积分区间上整体放缩会导致较大误差的情形，可以考虑用“分段估计”的方法.

例 4 设n是正整数，证明：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x < \frac{1}{4}n^2\pi^2.$$

证 当$n=1$时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\pi^2 < \frac{1}{4}\pi^2$, 命题成立. 下设$n>1$, 任意固定$\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则由$|\sin nx| \leqslant n|\sin x|$得

$$\int_0^{\delta} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\delta} xn^4\mathrm{d}x = \frac{1}{2}n^4\delta^2,$$

由$\sin x > \frac{2x}{\pi}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$得

$$\begin{aligned} & \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x < \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{1}{\frac{2x}{\pi}}\right)^4 \mathrm{d}x \\ = & \frac{\pi^4}{16}\int_\delta^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{32}\left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{4}{\pi^2}\right) \\ < & \frac{\pi^4}{32\delta^2}. \end{aligned}$$

合起来就得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x < \frac{1}{2}n^4\delta^2 + \frac{\pi^4}{32\delta^2}.$$

因为$\frac{1}{2}n^4\delta^2 + \frac{\pi^4}{32\delta^2}$在$\delta = \frac{\pi}{2n}$时取得最小值$\frac{1}{4}n^2\pi^2$, 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x < \frac{1}{4}n^2\pi^2. \qquad \square$$

五、应用施瓦兹不等式等经典不等式

例 5 设l是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的周长，其中$a>0$, $b>0$, 求证：

$$\pi(a+b) \leqslant l \leqslant \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

证 椭圆的参数方程为$x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in[0,2\pi]$, 由弧长公式得

$$l = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t.$$

一方面，由施瓦兹不等式得

$$l^2 \leqslant \int_0^{2\pi} 1^2\mathrm{d}t \int_0^{2\pi} (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)\mathrm{d}t = 2\pi^2(a^2+b^2),$$

故$l \leqslant \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$; 另一方面，由柯西不等式得

$$a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t = (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)(\sin^2 t + \cos^2 t) \geqslant (a\sin^2 t + b\cos^2 t)^2,$$

故$\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} \geqslant a\sin^2 t + b\cos^2 t$, 从而有

$$l \geqslant \int_0^{2\pi} (a\sin^2 t + b\cos^2 t)\mathrm{d}t = \pi(a+b).$$

□

六、借助微积分基本定理，用微分学方法来证明

可以借助变上限积分引进辅助函数，用微分学方法来证明积分不等式.

例 6 设函数$f(x)$在$[0,a]$上非负连续，最大值为M, 证明：

$$\left(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_0^a f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_0^a f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{M^2}{12}a^4.$$

证 令

$$\varphi(t) = \left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_0^t f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_0^t f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2 - \frac{M^2}{12}t^4, \quad t\in[0,a],$$

则$\varphi(0)=0$,

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= 2f(t)\int_0^t f(x)\mathrm{d}x - 2f(t)\sin t\int_0^t f(x)\sin x\mathrm{d}x - 2f(t)\cos t\int_0^t f(x)\cos x\mathrm{d}x - \frac{M^2t^3}{3}\\
&= 2f(t)\int_0^t f(x)[1-\cos(x-t)]\mathrm{d}x - \frac{M^2t^3}{3}\\
&\leqslant 2M^2\int_0^t [1-\cos(x-t)]\mathrm{d}x - \frac{M^2t^3}{3}\\
&= 2M^2[x-\sin(x-t)]\Big|_0^t - \frac{M^2t^3}{3}\\
&= 2M^2\left(t-\sin t-\frac{t^3}{6}\right)\\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

因此$\varphi(t)$在$[0,a]$上单调递减，从而$\varphi(a)\leqslant\varphi(0)=0$, 由此即得要证的不等式. □

七、利用牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式

例 7 设$S=\left\{f\in C^1[0,1]\,\middle|\,f(0)=0, f(1)=1\right\}$, 令$I(f)=\displaystyle\int_0^1(1+x^2)[f'(x)]^2\mathrm{d}x$, $\forall f\in S$, 求证：$I(f)$在S上取得最小值.

证 对任意$f\in S$, 由牛顿-莱布尼茨公式与施瓦兹不等式得

$$\begin{aligned}1 &= f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+x^2}f'(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\\ &\leqslant \left(\int_0^1(1+x^2)[f'(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)^{\frac12}=[I(f)]^{\frac12}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

因此，对任意$f\in S$, 有$I(f)\geqslant\dfrac{4}{\pi}$. 另一方面，不难看到$f(x)=\dfrac{4}{\pi}\arctan x\in S$，且

$$I(f)=\int_0^1(1+x^2)\cdot\frac{16}{\pi^2(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{16}{\pi^2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{4}{\pi}.$$

因此$I(f)$在S上取得最小值$\dfrac{4}{\pi}$. □

八、利用分部积分法

例 8 证明：当$x>0$时，有

$$\left|\int_x^{x+1}\sin(t^2)\mathrm{d}t\right|<\frac{1}{x}.$$

证

$$\begin{aligned}&\left|\int_x^{x+1}\sin(t^2)\mathrm{d}t\right|\\ =&\left|\int_x^{x+1}-\frac{\mathrm{d}(\cos(t^2))}{2t}\right|\\ =&\left|-\frac{\cos(t^2)}{2t}\Big|_x^{x+1}-\int_x^{x+1}\frac{\cos(t^2)}{2t^2}\mathrm{d}t\right|\\ <&\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x+2}+\frac12\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\\ =&\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x+2}+\frac{-1}{2t}\Big|_x^{x+1}\\ =&\frac{1}{x}\end{aligned}$$

□

九、利用换元积分法

例 9 (József Wildt International Mathematical Competition, 2009年第14题) 设$f(x)$在$[0,1]$上递增且连续，$f(0)>0$, 求证：对任何$a\geqslant 0$, 有

$$\int_0^1\frac{x^{a+1}}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{a+1}{a+2}\int_0^1\frac{x^a}{f(x)}\mathrm{d}x.$$

证 令$x=t^{\frac{a+1}{a+2}}$换元，得

$$\int_0^1 \frac{x^{a+1}}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{t^{\frac{(a+1)^2}{a+2}}}{f\left(t^{\frac{a+1}{a+2}}\right)}\cdot\frac{a+1}{a+2}t^{-\frac{1}{a+2}}\mathrm{d}t=\frac{a+1}{a+2}\int_0^1 \frac{t^a}{f\left(t^{\frac{a+1}{a+2}}\right)}\mathrm{d}t.$$

将最右边式子中的积分变量t改为x, 就得到

$$\int_0^1 \frac{x^{a+1}}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{a+1}{a+2}\int_0^1 \frac{x^a}{f\left(x^{\frac{a+1}{a+2}}\right)}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

由$f(x)$在$[0,1]$上递增得$f\left(x^{\frac{a+1}{a+2}}\right)\geqslant f(x)$, $x\in[0,1]$, 故

$$\int_0^1 \frac{x^a}{f\left(x^{\frac{a+1}{a+2}}\right)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 \frac{x^a}{f(x)}\mathrm{d}x. \tag{2}$$

由(1)式和(2)式就得到了要证的不等式. □

十、函数逼近的方法

有些时候可以先证明积分不等式在一类简单的情形下成立，再借助函数逼近的方法证明积分不等式在一般情形下也成立.

例 10 设$f(x)$和$g(x)$都是$[a,b]$上的单调递增函数. 证明：

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证 记$J=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 则问题归为证明$\displaystyle\int_a^b[f(x)-J]g(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$. 先证明$f(x)$在$[a,b]$上连续的情形. 这时，由积分第一中值定理，存在$\xi\in[a,b]$, 使得$J=f(\xi)$. 由$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上递增知对任意$x\in[a,b]$, 有$[f(x)-f(\xi)][g(x)-g(\xi)]\geqslant 0$, 故$\displaystyle\int_a^b[f(x)-f(\xi)][g(x)-g(\xi)]\mathrm{d}x\geqslant 0$. 又因为$\displaystyle\int_a^b[f(x)-f(\xi)]\mathrm{d}x=(b-a)J-(b-a)f(\xi)=0$, 所以$\displaystyle\int_a^b[f(x)-J]g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b[f(x)-f(\xi)][g(x)-g(\xi)]\mathrm{d}x\geqslant 0$.

再证明一般情形. 这时，存在$[a,b]$上的连续函数序列$\{\varphi_n(x)\}$, 使得$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f(x)-\varphi_n(x)|\mathrm{d}x=0$. 于是

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)g(x)\mathrm{d}x\\ \geqslant\ &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

注　该不等式是切比雪夫不等式的一个特殊情形.

十一、利用微分中值定理或泰勒公式

例 11 (The 68th William Lowell Putnam Mathematical Competition, 2007, B2题) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续可微，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 求证：对任何$\alpha\in(0,1)$, 有

$$\left|\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{8}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|.$$

证　令$M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$, $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则$F(0)=F(1)=0$. 进而由连续函数的最值定理知$|F(x)|$在$(0,1)$中一点$c$处取得最大值，根据费马定理知$f(c)=F'(c)=0$. 因为$\int_0^c f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{1-c} f(1-x)\mathrm{d}x$, 所以不妨设$c\leqslant\frac{1}{2}$. 此外，不妨设$\int_0^c f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$(否则用$-f(x)$代替$f(x)$进行讨论). 对任意$x\in[0,c)$, 由微分中值定理得

$$f(x)=f(x)-f(c)=f'(\xi)(x-c)\leqslant M(c-x),\ \xi\in(0,c).$$

于是对任何$\alpha\in(0,1)$, 有

$$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^c f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^c M(c-x)\mathrm{d}x=\frac{Mc^2}{2}\leqslant\frac{M}{8}.$$

这就完成了证明. □

十二、利用积分中值定理

例 12 (第三届中国大学生数学竞赛预赛, 数学类第二题) 设$f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_n(x)$都是$[0,1]$上的非负连续函数，求证：存在$\xi\in[0,1]$, 使得

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi)\leqslant\prod_{k=1}^n\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x.$$

证　记$I_k=\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x$, $k=1,2,\cdots,n$, 若某个I_k等于0, 则结合$f_k(x)$在$[0,1]$上非负连续即知$f_k(x)$在$[0,1]$上恒等于0, 结论是平凡的，故下设$I_k>0$, $k=1,2,\cdots,n$. 由均值不等式得$\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^n\frac{f_k(x)}{I_k}}\leqslant\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n\frac{f_k(x)}{I_k}$, 从而有

$$\int_0^1\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n\frac{f_k(x)}{I_k}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{f_k(x)}{I_k}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{I_k}{I_k}=1.$$

由积分第一中值定理知存在$\xi \in [0,1]$, 使得

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(\xi)}{I_k}} = \int_0^1 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{I_k}} \mathrm{d}x \leqslant 1,$$

整理即得

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi) \leqslant \prod_{k=1}^{n} I_k = \prod_{k=1}^{n} \int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

十三、利用几何意义

例 13 (第11届IMC, 2004年第2天第2题) 设f和g都是$[a,b]$上非负递增的连续函数，对任意$x \in [a,b]$, 有$\int_a^x \sqrt{f(t)}\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x \sqrt{g(t)}\mathrm{d}t$, 且$\int_a^b \sqrt{f(t)}\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{g(t)}\mathrm{d}t$, 证明：

$$\int_a^b \sqrt{1+f(t)}\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b \sqrt{1+g(t)}\mathrm{d}t.$$

证 令$F(x) = \int_a^x \sqrt{f(t)}\mathrm{d}t$, $G(x) = \int_a^x \sqrt{g(t)}\mathrm{d}t$, $t \in [a,b]$, 则$F(a) = G(a) = 0$, 由f和g的连续性知$F(x)$和$G(x)$分别是$\sqrt{f(x)}$和$\sqrt{g(x)}$在$[a,b]$ 上的原函数，由题设知$F(x) \leqslant G(x)$, $F(b) = G(b)$. 此外，由f和g在$[a,b]$上非负递增知$\sqrt{f}$和$\sqrt{g}$在$[a,b]$上递增，故F和G在$[a,b]$下凸. 利用性质“若一个凸多边形P_1包含在另一个凸多边形P_2中，则P_1的周长小于等于P_2的周长”(这是初等数学的一个结果)，通过弧长的定义即可证得$y = F(x)$的弧长大于等于$y = G(x)$的弧长，即

$$\int_a^b \sqrt{1+f(t)}\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b \sqrt{1+g(t)}\mathrm{d}t. \qquad \square$$

十四、利用代数思想

例如，可以借助二次三项式的判别式来证明施瓦兹不等式. 下面的例子借助二次型来证明积分不等式.

例 14 设$f(x)$在$[0,1]$连续可导且非负递增，$f(1) > 0$, 证明：对任何满足$0 < a < b$的实数a和b, 有

$$\frac{\left(\int_0^1 x^{a+b} f(x)\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 x^{2a} f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 x^{2b} f(x)\mathrm{d}x} \geqslant \frac{(2a+1)(2b+1)}{(a+b+1)^2},$$

其中等式成立的充分必要条件是$f(x)$在$[0,1]$上恒为常数.

证 若$f(x)$在$[0,1]$上恒为常数，则

$$\frac{\left(\int_0^1 x^{a+b}f(x)\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 x^{2a}f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 x^{2b}f(x)\mathrm{d}x}=\frac{\left(\int_0^1 x^{a+b}\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 x^{2a}\mathrm{d}x\int_0^1 x^{2b}\mathrm{d}x}=\frac{(2a+1)(2b+1)}{(a+b+1)^2},$$

这时，等式成立；记$A=(2a+1)\displaystyle\int_0^1 t^{2a}\mathrm{d}t$, $B=(a+b+1)\displaystyle\int_0^1 t^{a+b}\mathrm{d}t$, $C=(2b+1)\displaystyle\int_0^1 t^{2b}\mathrm{d}t$, 下设$f(x)$在$[0,1]$上不恒为常数，去证明严格不等式成立，即去证明$AC-B^2<0$. 令$Q(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$, 下面我们证明二次型$Q(x,y)$不定，从而就得到$AC-B^2<0$. 对任意$k>0$, 由分部积分法得

$$\int_0^1 t^k f(t)\mathrm{d}t=\frac{t^{k+1}}{k+1}f(t)\bigg|_0^1-\int_0^1\frac{t^{k+1}}{k+1}f'(t)\mathrm{d}t=\frac{f(1)}{k+1}-\int_0^1\frac{t^{k+1}}{k+1}f'(t)\mathrm{d}t.$$

于是

$$\begin{aligned}Q(x,y)&=\left[f(1)-\int_0^1\frac{t^{2a+1}}{k+1}f'(t)\mathrm{d}t\right]x^2+2\left[f(1)-\int_0^1\frac{t^{a+b+1}}{k+1}f'(t)\mathrm{d}t\right]xy\\&\quad+\left[f(1)-\int_0^1\frac{t^{2b+1}}{k+1}f'(t)\mathrm{d}t\right]y^2\\&=f(1)(x+y)^2-\int_0^1\left(t^ax+t^by\right)^2tf'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由$f(x)$在$[0,1]$递增知$f'(x)$在$[0,1]$非负，由$f(x)$在$[0,1]$上不恒为常数知$f'(x)$在$[0,1]$上不恒为0, 从而有

$$\begin{aligned}Q(1,1)&=4f(1)-\int_0^1\left(t^a+t^b\right)^2tf'(t)\mathrm{d}t>4f(1)-\int_0^1 4f'(t)\mathrm{d}t=4f(0)\geqslant 0,\\Q(1,-1)&=-\int_0^1\left(t^a-t^b\right)^2tf'(t)\mathrm{d}t<0.\end{aligned}$$

由$Q(1,1)>0$与$Q(1,-1)<0$即知二次型$Q(x,y)$不定，从而$AC-B^2<0$. 这就完成了证明. □

下面的问题供大家练习，后面有练习题的参考解答.

练习(A)

练习题 1 (The 75th William Lowell Putnam Mathematical Competition, 2014年，B2题) 设函数$f(x)$在$[1,3]$上黎曼可积，对任意$x\in[1,3]$, 有$|f(x)|\leqslant 1$, 且$\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=0$, 问：对于满足上述条件的$f(x)$, $\displaystyle\int_1^3\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$能取到的最大值是多少？证明你的结论.

练习题 2 证明对任意$a>0$，有$\left|\int_0^a \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|<3.$

练习题 3 设$f(x)$为$[0,+\infty)$上递减的连续函数. 证明对任意$a>0$，有

$$\int_0^a (a^2-3x^2)f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

练习题 4 设函数$f(x)$在$[a,b]$上可微，对任意$x\in[a,b]$, 有$0<f(x)\leqslant f'(x)$, 求证：$\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{f(a)}-\frac{1}{f(b)}$.

练习题 5 证明：$\int_{\mathrm{e}}^{\frac{8\sqrt{3}}{9}\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\ln x}} > \frac{\mathrm{e}}{2}$.

练习题 6 (第5届IMC, 1998, 第1天第6题) 设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数，对任意$x,y\in[0,1]$, 有$xf(y)+yf(x)\leqslant 1$, 求证：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{4},$$

并求一满足题设的函数$f(x)$使得上式中等式成立.

练习(B)

练习题 1 设函数$f(x)$在$[a,b]$上$2n$次连续可导, 且$|f^{(2n)(x)}|\leqslant M$, $f^{(m)}(a)=f^{(m)}(b)=0$, $m=0,1,\cdots,n-1$. 证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(n!)^2 M}{(2n)!(2n+1)!}(b-a)^{2n+1}.$$

练习题 2 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续可微，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 求证：

$$\int_0^1 [f(x)]^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

练习题 3 设$f(x)$在$[0,1]$可积，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$, $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$, 证明：

$$\int_0^1 [f(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant 4.$$

练习题 4 设$f(x)$在$[0,1]$上两次连续可微，$f(0)=f(1)=0$, $f'(0)=1$, 求$\int_0^1 \left[f''(x)\right]^2\mathrm{d}x$的最小值, 并求使得$\int_0^1 \left[f''(x)\right]^2\mathrm{d}x$最小的$f(x)$.

练习题 5 设函数$f(x)$和$g(x)$都在$[0,1]$上可积，$f(x)$和$g(x)$在$[0,1]$上的振幅分别是Ω_1和Ω_2. 求证：

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\Omega_1\cdot\Omega_2}{4}.$$

练习题 6 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上以$T>0$为周期的连续周期函数，且$f(x)$恒大于0. 证明：对任意实数α, 都有$\displaystyle\int_0^T\frac{f(x+\alpha)}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant T$.

练习题 7 设函数$f(x)$是$[0,1]$上连续的上凸函数，$f(0)=1$. 证明：

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

练习题 8 设$u(t)$是$[0,1]$上的连续函数，对任意$t\in[0,1]$, 有

$$[u(t)]^2\leqslant 1+4\int_0^t s|u(s)|\mathrm{d}s,$$

求证：

$$\left|\int_0^1 u(t)[u(t)-1]\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{16}{5}.$$

练习题 9 设$f(x)$在$[0,1]$连续可微、单调递增且下凸，证明：

$$\frac{1}{3}\int_0^1(1-x)^3[f'(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{3}\int_0^1 x^3[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

练习题 10 (第12届IMC, 2005, 第1天第3题) 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上非负的连续可微函数，求证：

$$\left|\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x-f^2(0)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

练习题 11 (第五届中国大学生数学竞赛预赛, 数学类第五题) 设$f(x)$是$[-1,1]$上的偶函数，$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，$g(x)$是$[-1,1]$上的下凸函数，证明

$$2\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

练习(A)参考解答

练习题 1 (The 75th William Lowell Putnam Mathematical Competition, 2014年，B2题) 设函数$f(x)$在$[1,3]$上黎曼可积，对任意$x\in[1,3]$, 有$|f(x)|\leqslant 1$, 且$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=0$, 问：对于满足上述条件的$f(x)$, $\int_1^3 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$能取到的最大值是多少？证明你的结论.

解 $\int_1^3 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$能取到的最大值是$\ln\frac{4}{3}$, 当$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[1,2],\\ -1, & x\in(2,3]\end{cases}$时，$\int_1^3 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$取到最大值. 证明如下. 记$g(x)=\begin{cases}1, & x\in[1,2],\\ -1, & x\in(2,3]\end{cases}$, 容易看到$|g(x)|\leqslant 1$且$\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=0$, 故$g(x)$满足条件. 对任意满足条件的$f(x)$, 有$g(x)-f(x)\begin{cases}\geqslant 0, & x\in[1,2],\\ \leqslant 0, & x\in(2,3],\end{cases}$ 故

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{g(x)-f(x)}{x}\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{g(x)-f(x)}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3 \frac{g(x)-f(x)}{x}\mathrm{d}x\\ \geqslant\ & \int_1^2 \frac{g(x)-f(x)}{2}+\int_2^3 \frac{g(x)-f(x)}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

因此，

$$\int_1^3 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\leqslant\int_1^3 \frac{g(x)}{x}\mathrm{d}x=\ln\frac{4}{3}.$$

这就完成了证明. □

练习题 2 证明对任意$a>0$，有$\left|\int_0^a \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|<3$.

证 因为$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，有$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant 1$，所以当$0<a\leqslant 1$时，有$\left|\int_0^a \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant \int_0^a\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^a \mathrm{d}x\leqslant 1$.

由分部积分公式，有

$$\int_1^a \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\left.\frac{-\cos x}{x}\right|_1^a-\int_1^a(-\cos x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\cos 1-\frac{\cos a}{a}-\int_1^a\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

因此，当$a>1$时，

$$\left|\int_1^a \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|<1+\frac{1}{a}+\int_1^a\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=1+\frac{1}{a}+\left.\left(-\frac{1}{x}\right)\right|_1^a=1+\frac{1}{a}+1-\frac{1}{a}=2.$$

于是

$$\left|\int_0^a \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|+\left|\int_1^a \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|<1+2=3.$$ □

练习题 3 设$f(x)$为$[0,+\infty)$上递减的连续函数. 证明对任意$a>0$，有

$$\int_0^a (a^2-3x^2)f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

证 令$F(t)=\displaystyle\int_0^t (t^2-3x^2)f(x)\mathrm{d}x$，$t\geqslant 0$，则$F(0)=0$，

$$\begin{aligned} F'(t) &= t^2 f(t)+2t\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-3t^2f(t)\\ &= 2t\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-2t^2f(t)\\ &= 2t^2\cdot f(\xi)-2t^2f(t)\quad (\text{其中}\xi\in[0,t])\\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

所以$F(t)$在$[0,+\infty)$上递增，故对任意$a>0$，有$F(a)\geqslant F(0)=0$. □

练习题 4 设函数$f(x)$在$[a,b]$上可微，对任意$x\in[a,b]$, 有$0<f(x)\leqslant f'(x)$, 求证：$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant \frac{1}{f(a)}-\frac{1}{f(b)}$.

证 令$\varphi(t)=\displaystyle\int_a^t \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x-\frac{1}{f(a)}+\frac{1}{f(t)}$, $t\in[a,b]$, 则$\varphi(a)=0$,

$$\varphi'(t)=\frac{1}{f(t)}-\frac{f'(t)}{f^2(t)}=\frac{f(t)-f'(t)}{f^2(t)}.$$

因为对任意$x\in[a,b]$, 有$0<f(x)\leqslant f'(x)$, 所以$\varphi'(t)\leqslant 0$. 于是$\varphi(t)$在$[a,b]$上单调递减，故$\varphi(b)\leqslant\varphi(a)=0$, 即$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x-\frac{1}{f(a)}+\frac{1}{f(b)}\leqslant 0$, 也即

$$\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant \frac{1}{f(a)}-\frac{1}{f(b)}.$$ □

练习题 5 证明：$\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\frac{8\sqrt{3}}{9}\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\ln x}}>\frac{\mathrm{e}}{2}$.

证 令$x=\mathrm{e}t$换元，得

$$\int_{\mathrm{e}}^{\frac{8\sqrt{3}}{9}\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\ln x}}=\mathrm{e}\int_1^{\frac{8\sqrt{3}}{9}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{1+\ln t}}.$$

因为当$t>1$时，有$0<\ln t<t-1$, 所以

$$\int_1^{\frac{8\sqrt{3}}{9}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{1+\ln t}}>\int_1^{\frac{8\sqrt{3}}{9}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t}}=\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}\Big|_1^{\frac{8\sqrt{3}}{9}}=\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}-1\right)=\frac{1}{2},$$

从而

$$\int_{\mathrm{e}}^{\frac{8\sqrt{3}}{9}\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\ln x}}>\frac{\mathrm{e}}{2}.$$ □

练习题 6 (第5届IMC, 1998, 第1天第6题) 设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数，对任意$x,y\in[0,1]$，有$xf(y)+yf(x)\leqslant 1$, 求证：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{4},$$

并求一满足题设的函数$f(x)$使得上式中等式成立.

证 由换元积分法得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

从而有

$$2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(\sin\theta)\cos\theta+f(\cos\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2},$$

故有$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{4}$. 令$f(x)=\sqrt{1-x^2}$, 对任意$x,y\in[0,1]$, 设$x=\sin\varphi$, $y=\sin\psi$, 其中$\varphi,\psi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 就有

$$xf(y)+yf(x)=\sin\varphi\cos\psi+\sin\psi\cos\varphi=\sin(\varphi+\psi)\leqslant 1,$$

故$f(x)$满足题设. 不难得到$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$, 即$f(x)$使得等式成立. □

练习(B)参考解答

练习题 1 设函数$f(x)$在$[a,b]$上$2n$次连续可导, 且$|f^{(2n)(x)}|\leqslant M$, $f^{(m)}(a)=f^{(m)}(b)=0$, $m=0,1,\cdots,n-1$. 证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(n!)^2M}{(2n)!(2n+1)!}(b-a)^{2n+1}.$$

证 令$g(x)=(x-a)^n(b-x)^n$, 反复使用分部积分公式，得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)(2n)!\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)g^{(2n)}(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f'(x)g^{(2n-1)}(x)\mathrm{d}x=\cdots\\ &= \int_a^b f^{(2n)}(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f^{(2n)}(x)(x-a)^n(b-x)^n\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \frac{M}{(2n)!}\int_a^b(x-a)^n(b-x)^n\mathrm{d}x\\ &= \frac{M}{(2n)!}(b-a)^{2n+1}\int_a^b t^n(1-t)^n\mathrm{d}t\\ &= \frac{(n!)^2M}{(2n)!(2n+1)!}(b-a)^{2n+1}.\end{aligned}$$

□

练习题 2 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续可微，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 求证：

$$\int_0^1 [f(x)]^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

证 由$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=0$和牛顿-莱布尼茨公式得

$$f(x)=\int_0^1 [f(x)-f(t)]\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\int_t^x f'(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

于是由施瓦茨不等式得

$$\begin{aligned}
[f(x)]^2 &\leqslant \int_0^1\left(\int_t^x f'(u)\mathrm{d}u\right)^2\mathrm{d}t\\
&\leqslant \int_0^1\left(\left|\int_t^x 1^2\mathrm{d}u\right|\cdot\left|\int_t^x [f'(u)]^2\mathrm{d}u\right|\right)\mathrm{d}t\\
&\leqslant \int_0^1\left(|x-t|\cdot\int_0^1 [f'(u)]^2\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 |x-t|\mathrm{d}t\cdot\int_0^1 [f'(u)]^2\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2}[x^2+(1-x)^2]\cdot\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 [f(x)]^2\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2}[x^2+(1-x)^2]\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

□

练习题 3 设$f(x)$在$[0,1]$可积，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$, $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$, 证明：

$$\int_0^1 [f(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant 4.$$

证 对任意实数t, 有$\int_0^1 (x+t)f(x)\mathrm{d}x=1+t$. 由施瓦兹不等式，有

$$\int_0^1 (x+t)^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 [f(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 (x+t)f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

因此由$\int_0^1 (x+t)^2\mathrm{d}x=t^2+t+\frac{1}{3}$和$\int_0^1 (x+t)f(x)\mathrm{d}x=t+1$得

$$\int_0^1 [f(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{(t+1)^2}{t^2+t+\frac{1}{3}}.$$

令$\varphi(t)=\dfrac{(t+1)^2}{t^2+t+\frac{1}{3}}=1+\dfrac{3t+2}{3t^2+3t+1}$, 则$\varphi'(t)=-\dfrac{3(3t+1)(t+1)}{(3t^2+3t+1)}$. 由此可见$\varphi(t)$在$(-\infty,-1]$和$\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$递减，在$\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$递增. 因为$\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t)=1$, $\varphi\left(-\frac{1}{3}\right)=4$, 所以$\varphi(t)$在$t=-\frac{1}{3}$处取得最大值4. 于是取$t_0=-\frac{1}{3}$, 就有

$$\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{(t_0+1)^2}{t_0^2+t_0+\frac{1}{3}}=4.$$

□

注 等式可以成立，实际上，$f(x)=6x-2$就使得等式成立.

练习题 4 设$f(x)$在$[0,1]$上两次连续可微，$f(0)=f(1)=0$, $f'(0)=1$, 求$\displaystyle\int_0^1\left[f''(x)\right]^2\mathrm{d}x$的最小值, 并求使得$\displaystyle\int_0^1\left[f''(x)\right]^2\mathrm{d}x$最小的$f(x)$.

证 因为$f(x)$在$[0,1]$上两次连续可微，$f(0)=f(1)=0$, $f'(0)=1$, 所以

$$\int_0^1(1-x)f''(x)\mathrm{d}x=(1-x)f'(x)\Big|_0^1-\int_0^1f'(x)\cdot(-1)\mathrm{d}x=-1+f(x)\Big|_0^1=-1+0=-1.$$

再由施瓦茨不等式得

$$\int_0^1(1-x)^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\left[f''(x)\right]^2\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1(1-x)f''(x)\mathrm{d}x\right)^2=1.$$

因为$\displaystyle\int_0^1(1-x)^2\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}(1-x)^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$, 所以

$$\int_0^1\left[f''(x)\right]^2\mathrm{d}x\geqslant 3.$$

当$\displaystyle\int_0^1\left[f''(x)\right]^2\mathrm{d}x$取得最小值3时，由施瓦茨不等式等号成立的条件得$f''(x)=\lambda(x-1)$, 结合$f(0)=f(1)=0$, $f'(0)=1$得$f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^3-\dfrac{1}{2}(x-1)$. □

练习题 5 设函数$f(x)$和$g(x)$都在$[0,1]$上可积，$f(x)$和$g(x)$在$[0,1]$上的振幅分别是Ω_1和Ω_2. 求证：

$$\left|\int_0^1f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\Omega_1\cdot\Omega_2}{4}.$$

证 记$A=\displaystyle\int_0^1f(x)\mathrm{d}x$, $B=\displaystyle\int_0^1g(x)\mathrm{d}x$, 则

$$\int_0^1f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^1f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1g(x)\mathrm{d}x=\int_0^1f(x)g(x)\mathrm{d}x-AB=\int_0^1[f(x)-A][g(x)-B]\mathrm{d}x.$$

由施瓦茨不等式，有

$$\left|\int_0^1 [f(x)-A][g(x)-B]\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_0^1 [f(x)-A]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 [g(x)-B]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是有

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_0^1 [f(x)-A]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 [g(x)-B]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

用M_1和m_1分别记$f(x)$在$[0,1]$上的上确界和下确界，M_2和m_2分别记$g(x)$在$[0,1]$上的上确界和下确界，则$\Omega_1 = M_1 - m_1$, $\Omega_2 = M_2 - m_2$, $A \in [m_1, M_1]$, $B \in [m_2, M_2]$, 且

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [f(x)-A]^2\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x)]^2\mathrm{d}x - A^2 \\ = \ & (M_1 - A)(A - m_1) - \int_0^1 [M_1 - f(x)][f(x) - m_1]\mathrm{d}x \\ \leqslant \ & (M_1 - A)(A - m_1) \leqslant \frac{(M_1 - A + A - m_1)^2}{4} = \frac{\Omega_1^2}{4}, \end{aligned}$$

同理可得

$$\int_0^1 [g(x)-B]^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{\Omega_2^2}{4}.$$

因此

$$\begin{aligned} & \left|\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right| \\ \leqslant \ & \left(\int_0^1 [f(x)-A]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 [g(x)-B]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ \leqslant \ & \frac{\Omega_1 \cdot \Omega_2}{4}. \end{aligned}$$

□

练习题 6 设$f(x)$是$(-\infty, +\infty)$上以$T > 0$为周期的连续周期函数，且$f(x)$恒大于0. 证明：对任意实数α, 都有$\displaystyle\int_0^T \frac{f(x+\alpha)}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant T$.

证 不妨设$T = 1$. 先证明α是有理数的情形. 设$\alpha = \dfrac{q}{p}$, 其中p, q是互素的正整数. 将$[0,1]$作np等分，记分点$x_k = \dfrac{k}{np}$, $k = 0, 1, \cdots, np$. 当$k = 1, 2, \cdots, np - nq$时，$f(x_k + \alpha) = f(x_{k+nq})$, 由周期性，当$k = np - nq + 1, \cdots, np$时，有$f(x_k + \alpha) = f(x_k + \alpha - 1) = f(x_{k+nq-np})$. 于是

$$\prod_{k=1}^{np} f(x_k) = \prod_{k=1}^{np} f(x_k + \alpha),$$

故

$$\sum_{k=1}^{np}\frac{f(x_k+\alpha)}{f(x_k)}\cdot\frac{1}{np}\geqslant\sqrt[np]{\prod_{k=1}^{n}\frac{f(x_k+\alpha)}{f(x_k)}}=1.$$

令$n\to\infty$取极限就得到$\displaystyle\int_0^1\frac{f(x+\alpha)}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 1.$

再证明α是无理数的情形. 取一个有理数列$\{\alpha_n\}\subseteq(0,1)$使得$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$. 设$f(x)$在$[0,1]$的最小值是$m>0$, 由$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上恒大于0的以1为周期的连续周期函数知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，故对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$|x-y|<\delta$时，就有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 对上述$\delta>0$, 存在正整数$N$, 当$n>N$时，有$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$. 于是$n>N$时，有

$$\left|\int_0^1\frac{f(x+\alpha_n)}{f(x)}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{f(x+\alpha)}{f(x)}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1\frac{|f(x+\alpha_n)-f(x+\alpha)|}{f(x)}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{\varepsilon}{m}\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon}{m}.$$

从而

$$\int_0^1\frac{f(x+\alpha)}{f(x)}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+\alpha_n)}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 1.$$

□

练习题 7 设函数$f(x)$是$[0,1]$上连续的上凸函数，$f(0)=1$. 证明：

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

证 记$A=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, $B=\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则$A=F(1)$, 由分部积分法得

$$B=xF(x)\Big|_0^1-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=A-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x.$$

因为$f(x)$是$[0,1]$上连续的上凸函数，$f(0)=1$, 故对$t\in[0,x]$, 有

$$f(t)\geqslant\frac{f(x)-1}{x}\cdot t+1.$$

从而

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^x\left[\frac{f(x)-1}{x}\cdot t+1\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}xf(x)+\frac{1}{2}x.$$

因此

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\left[\frac{1}{2}xf(x)+\frac{1}{2}x\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B+\frac{1}{4}.$$

由此得

$$B=A-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x\leqslant A-\frac{1}{2}B-\frac{1}{4},$$

从而

$$B \leqslant \frac{2}{3}\left(A - \frac{1}{4}\right) \leqslant \frac{2}{3}A^2.$$

□

练习题 8 设$u(t)$是$[0,1]$上的连续函数，对任意$t \in [0,1]$, 有

$$[u(t)]^2 \leqslant 1 + 4\int_0^t s|u(s)|\mathrm{d}s,$$

求证：

$$\left|\int_0^1 u(t)[u(t)-1]\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{16}{5}.$$

证 令

$$v(t) = 1 + 4\int_0^t s|u(s)|\mathrm{d}s,\ t \in [0,1],$$

则有

$$v'(t) = 4t|u(t)| \leqslant 4t\sqrt{v(t)},\ t \in [0,1].$$

于是

$$\sqrt{v(t)} = 1 + \int_0^t \frac{v'(s)}{2\sqrt{v(s)}}\mathrm{d}s \leqslant 1 + \int_0^t 2s\mathrm{d}s = 1 + t^2,$$

故

$$|u(t)| \leqslant \sqrt{v(t)} \leqslant t^2 + 1.$$

因此有

$$\left|\int_0^1 u(t)[u(t)-1]\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |u(t)|\left(|u(t)|+1\right)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (t^2+1)(t^2+2)\mathrm{d}t = \frac{16}{5}.$$

□

练习题 9 设$f(x)$在$[0,1]$连续可微、单调递增且下凸，证明：

$$\frac{1}{3}\int_0^1 (1-x)^3[f'(x)]^2\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 [f(x)]^2\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 x^3[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

证 将$[0,1]$作n等分，记$x_k = \dfrac{k}{n}$, $a_k = f(x_k)$, $n = 0,1,\cdots,n$, 先证明离散情形的不等式：

$$\frac{1}{3n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^3(a_{k+1}-a_k)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant \frac{1}{3n^2}\sum_{j=2}^{n} j^3(a_j - a_{j-1})^2. \qquad (1)$$

(1)式证明如下：在拉格朗日恒等式$\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2\right)=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2+\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant n}(a_jb_k-a_kb_j)^2$中令$b_1=b_2=\cdots=b_n=1$, 整理得到

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}(a_j-a_k)^2.$$

因为$f(x)$在$[0,1]$单调递增且下凸，所以有$0\leqslant a_2-a_1\leqslant a_3-a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n-a_{n-1}$. 于是对$1\leqslant k<j\leqslant n$, 有$0\leqslant(j-k)(a_{k+1}-a_k)\leqslant a_j-a_k\leqslant(j-k)(a_j-a_{j-1})$, 故

$$\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}(j-k)^2(a_{k+1}-a_k)^2\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}(j-k)^2(a_j-a_{j-1})^2.$$

再结合

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}(j-k)^2(a_j-a_{j-1})^2=\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=1}^{j-1}(j-k)^2(a_j-a_{j-1})^2\\=\ &\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{6}(j-1)j(2j-1)(a_j-a_{j-1})^2\leqslant\frac{1}{3}\sum_{j=2}^{n}j^3(a_j-a_{j-1})^2,\\&\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}(j-k)^2(a_{k+1}-a_k)^2=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}(j-k)^2(a_{k+1}-a_k)^2\\=\ &\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{6}(n-k)(n-k+1)(2(n-k)+1)(a_{k+1}-a_k)^2\geqslant\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^3(a_{k+1}-a_k)^2\end{aligned}$$

就证明了(1)式. 由微分中值定理，有$a_j-a_{j-1}=f(x_j)-f(x_{j-1})=\dfrac{1}{n}f'(\xi_{j-1})$, 其中$\xi_{j-1}\in(x_{j-1},x_j)$, 从而

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=2}^{n}j^3(a_j-a_{j-1})^2=\sum_{j=2}^{n}x_j^3[f'(\xi_{j-1})]^2\cdot\frac{1}{n},$$

由习题8(A)第3题的结论可知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=2}^{n}x_j^3[f'(\xi_{j-1})]^2\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1x^3[f'(x)]^2\mathrm{d}x,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n^2}\sum_{j=2}^{n}j^3(a_j-a_{j-1})^2=\frac{1}{3}\int_0^1x^3[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

同理有

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^3(a_{k+1}-a_k)^2=\sum_{k=1}^{n-1}(1-x_k)^3[f'(\xi_k)]^2\cdot\frac{1}{n},$$

由习题8(A)第3题的结论可知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}(1-x_k)^3[f'(\xi_k)]^2\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1(1-x)^3[f'(x)]^2\mathrm{d}x,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^3(a_{k+1}-a_k)^2=\frac{1}{3}\int_0^1(1-x)^3[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

因此在(1)式中令$n\to\infty$取极限，就得到

$$\frac{1}{3}\int_0^1(1-x)^3[f'(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{3}\int_0^1 x^3[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

□

练习题 10 (第12届IMC, 2005, 第1天第3题) 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上非负的连续可微函数，求证：

$$\left|\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x-f^2(0)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

证 记$M=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|f'(t)|$, 则$-Mf(t)\leqslant f(t)f'(t)\leqslant Mf(t)$, 再对于$t$在$[0,x]$上积分，得

$$-MF(x)\leqslant\frac{1}{2}f^2(x)-\frac{1}{2}f^2(0)\leqslant MF(x),$$

其中$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 进而得到

$$-Mf(x)F(x)\leqslant\frac{1}{2}f^3(x)-\frac{1}{2}f^2(0)f(x)\leqslant Mf(x)F(x),$$

再对于x在$[0,1]$上积分，注意到$\displaystyle\int_0^1 f(x)F(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$, 就有

$$-\frac{M}{2}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}f^2(0)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

由此即得要证明的不等式成立. □

另证 令$F(x)=-\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}F(x)=f^2(x)F(x)\Big|_0^1-2\int_0^1 f(x)f'(x)F(x)\mathrm{d}x\\&=f^2(0)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1 f(x)f'(x)F(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

记$M = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f'(t)|$, 就有

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x - f^2(0) \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \right| = 2 \left| \int_0^1 f(x)f'(x)F(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant 2M \int_0^1 [-f(x)F(x)]\mathrm{d}x \\ = & -MF^2(x)\Big|_0^1 = M \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \right)^2. \end{aligned}$$

这就完成了证明. □

练习题 11 (第五届中国大学生数学竞赛预赛, 数学类第五题) 设$f(x)$是$[-1,1]$上的偶函数，$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，$g(x)$是$[-1,1]$上的下凸函数，证明

$$2\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为$f(x)$是$[-1,1]$上的偶函数，所以

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_1^{-1} f(-t)g(-t)(-\mathrm{d}t)\ (x=-t) = \int_{-1}^1 f(t)g(-t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 f(x)g(-x)\mathrm{d}x.$$

令$h(x) = g(x) + g(-x)$, 则$h(x)$是$[-1,1]$上的偶函数，从而由上式得

$$2\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x)h(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)h(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

由$f(x)$是$[-1,1]$上的偶函数得$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 由$\int_{-1}^1 g(-x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x$以及$h(x)$是$[-1,1]$上的偶函数得$\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 h(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$, 从而有

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

由(1)式与(2)式知要证的不等式等价于

$$\int_0^1 f(x)h(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

因为$g(x)$是$[-1,1]$上的下凸函数，所以$h(x)$在$[0,1]$上单调递增. 又$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，故(3)式是切比雪夫不等式的一个特殊情形. 这就完成了证明. □