第六章 实数理论及其应用

难题选解

例 1 设$\{a_n\}$是一个非负数列且对任何自然数n, 有$a_{n+2} \leqslant \sqrt{a_n a_{n+1}}$. 证明数列$\{a_n\}$收敛.

证 对任何自然数n,有

$$a_{n+2} \leqslant \sqrt{a_n a_{n+1}} \leqslant \frac{a_n + a_{n+1}}{2}.$$

令$b_n = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{2}$.则上式就是

$$b_{n+1} \leqslant b_n.$$

即$\{b_n\}$单减,又$\{b_n\}$有下界0,故由单调收敛定理,$\{b_n\}$收敛.

对一切$n \in \mathbb{N}$,$0 \leqslant a_n \leqslant \max\{a_1, a_2\}$,故$\{a_n\}$有界. 记$\alpha = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 在$a_{n+1} = b_n - \dfrac{a_n}{2}$两边取下极限,得

$$\alpha = B - \frac{\beta}{2}.$$

在$a_{n+1} = b_n - \dfrac{a_n}{2}$两边取上极限,得

$$\beta = B - \frac{\alpha}{2}.$$

两式相减得

$$\alpha - \beta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

故

$$\alpha = \beta$$

即$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$,于是$\{a_n\}$收敛. □

例 2 设x_1和x_2都是正数，$x_{n+2} = \dfrac{2}{x_n + x_{n+1}}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, 求证：数列$\{x_n\}$收敛.

证 令$M = \max\left\{x_1, x_2, \dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}\right\}$, 则用数学归纳法不难证明$\dfrac{1}{M} \leqslant x_n \leqslant M$, $n = 1, 2, \cdots$, 故数列$\{x_n\}$有界. 令$h = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $H = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, 则对任意$\varepsilon > 0$, 存在正整数$N$, 当$n > N$时，

有$x_n < H+\varepsilon$. 于是当$n>N$时，有

$$x_{n+2}=\frac{2}{x_n+x_{n+1}}>\frac{1}{H+\varepsilon},$$

故$h\geqslant\dfrac{1}{H+\varepsilon}$, 由$\varepsilon$的任意性知$h\geqslant\dfrac{1}{H}$. 类似可证$H\leqslant\dfrac{1}{h}$. 因此有$h=\dfrac{1}{H}$. 取子列$\{x_{n_k+2}\}$收敛于$H$, 由致密性定理，不妨设$\{x_{n_k+1}\}$, $\{x_{n_k}\}$, $\{x_{n_k-1}\}$分别收敛于a, b, c. 由$x_n+x_{n+1}=\dfrac{2}{x_{n+2}}$得$a+b=\dfrac{2}{H}=2h$, $b+c=\dfrac{2}{a}$. 因为$a,b,c\in[h,H]$, 所以

$$a=b=h,\quad b=c=H.$$

于是$h=H$, 故数列$\{x_n\}$收敛. □

例 3 设$\{a_n\}$是一个正数数列. 证明:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{a_n}\geqslant 4.$$

证 记$b_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{a_n}$, 若$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$, 则由$b_n>\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$知$\varlimsup\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, 故这种情形下命题成立. 下设$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha<+\infty$, 这时对任何$\varepsilon>0$, 存在正整数$N$，当$n\geqslant N$时，就有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<\alpha+\varepsilon$, 即$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>\dfrac{1}{\alpha+\varepsilon}$. 于是当$n>N$时，就有

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{a_n}\geqslant\frac{a_N+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n+a_{n+1}}{a_n}\\
&= \frac{a_N}{a_{N+1}}\cdot\frac{a_{N+1}}{a_{N+2}}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n}+\cdots+\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_{n-1}}{a_n}+1+\frac{a_{n+1}}{a_n}\\
&\geqslant \left(\frac{1}{\alpha+\varepsilon}\right)^{n-N}+\cdots+\left(\frac{1}{\alpha+\varepsilon}\right)^2+\frac{1}{\alpha+\varepsilon}+1+\frac{a_{n+1}}{a_n}.
\end{aligned}$$

若$0\leqslant\alpha<1$, 则取$\varepsilon>0$使得$\dfrac{1}{\alpha+\varepsilon}>1$, 由$b_n>\left(\dfrac{1}{\alpha+\varepsilon}\right)^{n-N}+\cdots+\left(\dfrac{1}{\alpha+\varepsilon}\right)^2+\dfrac{1}{\alpha+\varepsilon}$可见$\varlimsup\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, 故这种情形下命题成立. 若$\alpha\geqslant 1$, 则对任何$\varepsilon>0$, 有

$$\varlimsup_{n\to\infty}b_n\geqslant\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}+\alpha=\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha+\varepsilon-1}+\alpha.$$

若$\alpha=1$, 则由ε的任意性得$\varlimsup\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, 故这种情形下命题成立；若$\alpha>1$, 则由$\varepsilon$的任意性得

$$\varlimsup_{n\to\infty}b_n\geqslant\alpha+\frac{\alpha}{\alpha-1}=2+(\alpha-1)+\frac{1}{\alpha-1}\geqslant 4,$$

故这种情形下命题也成立. 这就完成了证明. □

例 4 设$f(x)$在$[0,1]$上有定义且处处有极限. 证明: 对任何$\varepsilon>0$, 在$[0,1]$中使

$$\left|\lim_{t\to x} f(t)-f(x)\right|>\varepsilon$$

的点x至多只有有限个.

证 反证.若存在$\varepsilon_0>0$,使$\left|\lim\limits_{t\to x} f(t)-f(x)\right|>\varepsilon_0$的点$x$有无穷多个.由聚点定则,有聚点$x^*\in[0,1]$.由聚点定则的证明,有一列互不相同的$\{x_n\}$,$x_n\to x^*(n\to\infty)$,在$x_n$处有$\left|\lim\limits_{t\to x_n} f(t)-f(x_n)\right|>\varepsilon_0$. 由极限定义,对每个$x_n$,存在$t_n\in[0,1]$满足$t_n\neq x^*$,

$$0<|t_n-x_n|<\frac{1}{n}\text{且}\left|f(t_n)-\lim_{t\to x_n} f(t)\right|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

由

$$|t_n-x^*|\leqslant|t_n-x_n|+|x_n-x^*|<\frac{1}{n}+|x_n-x^*|$$

可得$\lim\limits_{n\to\infty} t_n=x^*$.而另一方面

$$|f(t_n)-f(x_n)|\geqslant\left|\lim_{t\to x_n} f(t)-f(x_n)\right|-\left|f(t_n)-\lim_{t\to x_n} f(t)\right|>\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

上式令$n\to\infty$取极限,由于$\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)=\lim\limits_{t\to x^*} f(t)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$,有

$$0\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

矛盾! □

例 5 证明任何数列必有单调子列.

证 分两种情形讨论.

情形1. 有无穷多个n, 使得$x_n\geqslant x_m$, $m=n+1,n+2,\cdots$的情形.

这时，将这无穷多个n按从小到大的次序排为$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$, 则$\{x_{n_k}\}$就是$\{x_n\}$的一个单调递减的子列.

情形2. 只有有限多个n, 使得$x_n \geqslant x_m$, $m=n+1,n+2,\cdots$的情形.

这时，存在正整数N, 当$n>N$时，存在$m>n$, 使得$x_n<x_m$. 取$n_1=N+1$, 存在$n_2>n_1$, 使得$x_{n_1}<x_{n_2}$, 同理，存在$n_3>n_2$, 使得$x_{n_2}<x_{n_3}$, 一直这样做下去就得到$\{x_n\}$的一个严格单调递增的子列$\{x_{n_k}\}$. □

例 6 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$一致连续. 证明存在非负常数a和b, 使得成立$|f(x)|\leqslant a|x|+b$.

证 因为$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$一致连续，所以对$\varepsilon=1$, 存在$\delta>0$, 使得对任意实数x, y, 只要$|x-y|\leqslant\delta$, 就有$|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon=1$. 令$a=\dfrac{1}{\delta}$, $b=|f(0)|+1$, $k=\left[\dfrac{|x|}{\delta}\right]$, 则$k\leqslant a|x|$. 由

$$|f(x)-f(0)|\leqslant|f(x)-f(k\delta)|+\sum_{i=0}^{k-1}|f((i+1)\delta)-f(i\delta)|\leqslant\varepsilon+k\varepsilon=k+1,\ \text{当}x\geqslant 0,$$

$$|f(x)-f(0)|\leqslant|f(x)-f(-k\delta)|+\sum_{i=0}^{k-1}|f(-(i+1)\delta)-f(-i\delta)|\leqslant\varepsilon+k\varepsilon=k+1,\ \text{当}x<0,$$

知总有

$$|f(x)|\leqslant k+1+|f(0)|\leqslant a|x|+b.$$ □

例 7 数列$\{x_n\}$满足条件: 对任何$m,n\in\mathbb{N}^*$, 都有$0\leqslant x_{m+n}\leqslant x_m+x_n$. 证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$存在.

证 用数学归纳法易证$0\leqslant x_n\leqslant nx_1$, 故$\{\frac{a_n}{n}\}$有界. 设$\inf\limits_{n}\frac{x_n}{n}=\alpha$, 则对任意$\varepsilon>0$, 存在正整数$m$, 使得$\alpha\leqslant\frac{a_m}{m}<\alpha+\varepsilon$. 当$n>m$时，由带余除法，有$n=q_nm+r_n$, 其中$r_n\in\{0,1,\cdots,m-1\}$. 约定$x_0=0$, 就有

$$\begin{aligned}\alpha &\leqslant \frac{x_n}{n}\leqslant\frac{q_nx_m+x_{r_n}}{q_nm+r_n}=\frac{x_m}{m}\cdot\frac{q_nm}{q_nm+r_n}+\frac{x_{r_n}}{q_nm+r_n}\\ &< (\alpha+\varepsilon)\cdot\frac{q_nm}{q_nm+r_n}+\frac{x_{r_n}}{q_nm+r_n}.\end{aligned}$$

因为r_n, x_{r_n}都是有界量，当$n\to\infty$时有$q_n\to\infty$, 所以令$n\to\infty$取上下极限，得

$$\alpha\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}\leqslant\alpha+\varepsilon.$$

由ε的任意性知上下极限都等于α, 故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$存在且等于$\alpha$. □

例 8 设$a_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, 证明$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geqslant \mathrm{e}$.

证 反证. 设$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \alpha < \mathrm{e}$, 则存在正整数$N_1$, 使得当$n \geqslant N_1$时，有

$$\left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n < \frac{\alpha + \mathrm{e}}{2}.$$

因为$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} > \frac{\alpha+\mathrm{e}}{2}$, 所以存在正整数$N_2$, 使得当$n \geqslant N_2$时，有

$$\frac{\alpha + \mathrm{e}}{2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

令$N = \max\{N_1, N_2\}$, 则$n \geqslant N$时，有

$$\left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

从而有

$$\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} < 1 + \frac{1}{n},$$

由此即知当$n \geqslant N$时，有

$$\frac{a_n}{n} > \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{a_1}{n+1}.$$

因此对任意正整数p, 有

$$\begin{aligned} \frac{a_N}{N} &> \frac{a_{N+1}}{N+1} + \frac{a_1}{N+1} > \frac{a_{N+2}}{N+2} + a_1\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) > \cdots \\ &> \frac{a_{N+p}}{N+p} + a_1 \cdot \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{N+j} > a_1 \cdot \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{N+j}. \end{aligned}$$

令$p \to \infty$, 由$\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{N+j} \to +\infty$知$\lim_{n\to\infty} \frac{a_N}{N} = +\infty$, 与$\frac{a_N}{N}$为常数矛盾！ □

例 9 设数列$\{a_n\}$满足$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$且$\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - 2a_n) = 0$. 证明：$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

证 因为$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, 所以由Stolz定理知$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$. 由$\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - 2a_n) =$

0知$\{a_{2n}-2a_n\}$有界，记$M=\sup\{a_{2n}-2a_n \big| n=1,2,\cdots\}$, 则对任何正整数$m$, 有

$$\begin{aligned}|a_n| &= \left|\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{a_{n\cdot 2^k}}{2^k}-\frac{a_{n\cdot 2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)+\frac{a_{n\cdot 2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{m}\left|\frac{a_{n\cdot 2^k}}{2^k}-\frac{a_{n\cdot 2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right|+\left|\frac{a_{n\cdot 2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{m}\frac{M}{2^{k+1}}+\left|\frac{a_{n\cdot 2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right| \leqslant M+\left|\frac{a_{n\cdot 2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right|.\end{aligned}$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$知对任意固定的$n$, 有

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_{n\cdot 2^{m+1}}}{2^{m+1}}=n\lim_{m\to\infty}\frac{a_{n\cdot 2^{m+1}}}{n\cdot 2^{m+1}}=0.$$

在$|a_n|\leqslant M+\left|\dfrac{a_{n\cdot 2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right|$中令$m\to\infty$取极限，得$|a_n|\leqslant M$. 因此$\{a_n\}$有界. 反证. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, 则$\{a_n\}$的上极限与下极限至少有一个不是0, 从而$\{a_n\}$有一个收敛于$a\neq 0$的子列$\{a_{n_k}\}$. 再结合$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n}-2a_n)=0$得$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2n_k}=2a$, $\lim\limits_{k\to\infty}a_{4n_k}=4a$, $\cdots$, 一般地，$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2^j n_k}=2^j a$, $j=1,2,\cdots$, 从而$\{a_n\}$无界，矛盾！ □

例 10 设函数$f(x)$和$g(x)$都是$(-\infty,+\infty)$上的连续周期函数，并且它们都不是常数函数，证明：$f(xg(x))$不是周期函数.

证 记$h(x)=f(xg(x))$, 因为$(-\infty,+\infty)$上的连续周期函数是一致连续函数，所以只需证明$h(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续. 反证. 若$h(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，则对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$|x-y|<\delta$时，就有$|h(x)-h(y)|<\varepsilon$. 连续周期函数$f(x)$有最小值m和最大值M，由$f(x)$不是常数函数知$m<M$. 取$\varepsilon_0=\dfrac{M-m}{2}>0$, 则存在$\delta_0>0$, 当$|x-y|<\delta_0$时，就有$|h(x)-h(y)|<\varepsilon_0$. 因为连续周期函数$g(x)$不是常数函数，所以不失一般性，可以设$g(x)$有取正值的区间($g(x)$恒小于0的情形可以类似证明). 于是存在实数$a$, b满足$a<b<a+\delta_0$且$0<g(a)<g(b)$. 设$T_f>0$和$T_g>0$分别是$f(x)$和$g(x)$的周期，令$a_n=a+nT_g$, $b_n=b+nT_g$, $n=1,2,\cdots$, 则$0<b_n-a_n=b-a<\delta_0$, $g(a_n)=g(a)$, $g(b_n)=g(b)$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 所以可以取正整数$n$充分大使得$a_n[g(b)-g(a)]>T_f$, 从而有

$$b_ng(b_n)-a_ng(a_n)=b_ng(b)-a_ng(a)>a_n[g(b)-g(a)]>T_f.$$

于是$h(x)$在$[a_n,b_n]$上的最大值为M, 最小值为m，故存在$x_0,y_0\in[a_n,b_n]$使得$h(x_0)=M$, $h(y_0)=m$. 但是，由$0<b_n-a_n<\delta_0$知对任何$x,y\in[a_n,b_n]$, 都有$|h(x)-h(y)|<\varepsilon_0=\dfrac{M-m}{2}$. 与$|h(x_0)-h(y_0)|=M-m>\varepsilon_0$矛盾！ □

补充题6

(A)

1. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上严格递增，又设对数列$\{a_n\}\subseteq[a,b]$, $f(a_n)$收敛. 证明数列$\{a_n\}$收敛.

2. 设$\{x_n\}$是一个有界数列，$x_n\neq 0$, $n=1,2,\cdots$. 证明：存在数列$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$, 使得$\left\{\dfrac{x_{n_{k+1}}}{x_{n_k}}\right\}$收敛.

3. 设函数$f(x)$在$[a,b]$单调递减，$g(x)$在$[a,b]$连续，$f(a)<g(a)$, $f(b)>g(b)$, 证明：存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f(\xi)=g(\xi)$.

4. 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$连续，且有数列$\{x_n\}\subseteq[a,b]$, 使得$g(x_n)=f(x_{n+1})$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. 证明：存在$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=g(\xi)$.

5. 设函数$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导，$f'(x)$在$(a,+\infty)$上一致连续. 证明：如果$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，那么$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

6. 函数$f(x)=x(\arctan x+\arcsin\frac{1}{x})$在$[1,+\infty)$上是否一致连续？证明你的结论.

7. 已知$f(x)=\begin{cases}(ax+\frac{b}{x})\sin x, & \text{当}x>0,\\ a\cos x+b\sin x+1, & \text{当}x\leqslant 0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，求a, b.

8. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，求证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k f(\frac{k}{n})}{n}=0$.

9. 设数列$\{a_n\}$有界且$\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n>\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n\geqslant 1$, 证明：数列$\left\{a_n+\dfrac{1}{a_n}\right\}$发散.

(B)

1. 设$p>0$, $q>0$, $p+q=1$, 非负数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}\leqslant pa_{n+1}+qa_n$ $(n\in\mathbf{N})$. 证明数列$\{a_n\}$收敛.

2. 已知常数$\beta\in(0,1)$，问：是否存在集合$S\subseteq(0,1)$, 使得S是无限集，$\sup S=\beta$, 且对任意$x,y\in S$, $x<y$, 都有$\dfrac{x}{y}\in S$? 若存在，求出满足条件的所有的S; 若不存在，说明理由.

3. 设$0<\alpha<\beta<1$. 证明：存在实数x, 使得对任意正整数n, 都有$\{x^n\}\in[\alpha,\beta]$, 其中$\{x^n\}=x^n-[x^n]$是x^n的小数部分.

4. 设$f(x)$是$[a,b]$上的函数且$f(x)$在$[a,b]$上没有第二类间断点，令$\varphi(x)=\left|\lim\limits_{t\to x^+}f(t)-\lim\limits_{t\to x^-}f(t)\right|$, $x\in(a,b)$, 证明：对任何$\varepsilon>0$, 至多只有有限多个$x\in(a,b)$使得$\varphi(x)>\varepsilon$.

5. 设α是实数，讨论函数$f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$在$(0, +\infty)$上的一致连续性.

6. 设函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续，$\sin f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上一致连续，问$f(x)$是否一定在$(-\infty, +\infty)$上一致连续？证明你的结论.

7. 设$f(x)$和$g(x)$都是$(-\infty, +\infty)$上的函数，对任意实数x, y, 都有

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y),$$

求证：如果$f(x)$不恒等于0, 且对任意实数x, 有$|f(x)| \leqslant 1$, 则对任意实数x, 有$|g(x)| \leqslant 1$.

8. 设正数数列$\{a_n\}$满足$\varliminf_{n\to\infty} a_n = 1$, $\varlimsup_{n\to\infty} a_n < +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 1$, 求证：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 1.$$