如何定义a^x $(a>0,\ x\in\mathbb{R})$?

如何证明$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$ (其中$a>0$)?

定义 1 (实数的自然数次幂) 设a是实数，定义$a^0=1,\ a^{n+1}=a^n\cdot a,\ n=0,1,2,\cdots$.

性质 1 设$a,\ b$是实数，$n,\ m$是自然数.

(1) 我们有$a^n\cdot a^m=a^{n+m},\ (a^n)^m=a^{nm},\ (ab)^n=a^nb^n$.

(2) 当$n>0$时，我们有$a^n=0$当且仅当$a=0$.

(3) 当$n>0$时，若$a\geqslant b\geqslant 0$, 则$a^n\geqslant b^n\geqslant 0$; 若$a>b\geqslant 0$, 则$a^n>b^n\geqslant 0$.

(4) 我们有$|a^n|=|a|^n$.

定义 2 (实数的整数次幂) 设a是非零实数，对任意负整数$-n$, 定义$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$.

性质 2 设$a,\ b$是非零实数，$n,\ m$是整数.

(1) 我们有$a^n\cdot a^m=a^{n+m},\ (a^n)^m=a^{nm},\ (ab)^n=a^nb^n$.

(2) 若$a>0,\ b>0,\ n\neq 0$, 则有$a^n=b^n$当且仅当$a=b$.

(3) 若$a>b>0$, 则当$n>0$时有$a^n>b^n>0$, 当$n<0$时有$b^n>a^n>0$.

(4) 我们有$|a^n|=|a|^n$.

定义 3 (正数的$\boldsymbol{n}$次根) 设a是正数，n是正整数，则集合$S=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x\geqslant 0\text{且}x^n\leqslant a\right\}$非空有上界，定义$a$的$n$次根$a^{\frac{1}{n}}$为$\sup S$.

性质 3 设$a,\ b$是正数，$n,\ m$是正整数.

(1) $a^{\frac{1}{n}}$是正数.

(2) $b=a^{\frac{1}{n}}$当且仅当$b^n=a$.

(3) $a>b$当且仅当$a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$.

(4) 若$a=1$, 则对任意正整数n, 都有$a^{\frac{1}{n}}=1$; 若$a>1$, 则$a^{\frac{1}{n}}$是n的严格递减函数；若$a<1$, 则$a^{\frac{1}{n}}$是n的严格递增函数.

(5) 我们有$(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}},\ \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{nm}}$.

定义 4 (正数的有理次幂) 设a是正数，r是有理数，$r=\dfrac{m}{n}$, 其中n是正整数，m是整数，定义$a^r=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

注. $r=\dfrac{m}{n}$的表示不唯一，需证明a^r的值与$r=\dfrac{m}{n}$的表示无关.

性质 4 设a, b是正数，r, q是有理数.

(1) a^r是正数.

(2) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$.

(3) 若$r > 0$, 则$a > b$当且仅当$a^r > b^r$.

(4) 若$a = 1$, 则对任意有理数r, 都有$a^r = 1$; 若$a > 1$, 则a^r是r的严格递增函数；若$a < 1$, 则a^r是r的严格递减函数.

(5) 我们有$a^r \cdot a^q = a^{r+q}$, $(ab)^r = a^r b^r$, $(a^r)^q = a^{rq}$.

定义 5 (a^x的定义) 设a是正数，x是实数，若$a \geqslant 1$, 定义$a^x = \sup\left\{a^r \middle| r \in \mathbb{Q}, r < x\right\}$. 若$a < 1$, 定义$a^x = \inf\left\{a^r \middle| r \in \mathbb{Q}, r < x\right\}$.

性质 5 设a, b是正数，x, y是实数.

(1) a^x是正数.

(2) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

(3) 若$x > 0$, 则$a > b$当且仅当$a^x > b^x$.

(4) 若$a = 1$, 则对任意实数x, 都有$a^x = 1$; 若$a > 1$, 则a^x是x的严格递增函数；若$a < 1$, 则a^x是x的严格递减函数.

(5) 我们有$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $(ab)^x = a^x b^x$, $(a^x)^y = a^{xy}$.