$\mathbb{F}$域 $f: M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ $\quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$

$f(A+B) = f(A) + f(B)$ $\quad \forall k \in \mathbb{F}, A \in M_n(\mathbb{F})$

$f(kA) = kf(A)$

$f(AB) = f(BA)$

证明: $\exists c \in \mathbb{F}$ s.t. $f = c\,tr$

证明: (上次黄老师的课讲了这个)

- V为数域$\mathbb{F}$上的线性空间, $\dim V = n$

① $f \in V^*$, $f \neq 0$, 问 $\ker f$ 的维数 $(n-1)$?

② 设 $f, g \in V^*$, $\ker f = \ker g$ 则 $f = cg$

③ 设 $V = M_K(\mathbb{F})$ $f \in V^*$且 $f(AB) = f(BA)$ 则 $\exists c \in \mathbb{F}$ s.t. $f = c\,tr$

证明:

② 由①知 对于 $\ker f = \ker g \neq V$, $\dim f = \dim g = n-1$ 故记 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}$为 $\ker f = \ker g$的一组基, 再将 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}$扩充至 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为V的一组基, 则对于 $\forall \alpha = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n$ $\quad f(\alpha) = \sum$

③ $\ker(tr)$ 的维数为n^2-1, 基 e_{ij} $i \neq j$ 和 $e_{ii} - e_{i+1,j+1}$ $(i = 1, \cdots, n)$ $\quad f(e_{ij}) = 0$ 且 $f(e_{ii}) = f(e_{i+1,j+1})$

$e_{ij} = e_{ik}e_{kj}$ $\quad 0 = e_{kj}e_{ik}$ $\quad i \neq j$ $\quad \Rightarrow f(e_{ij}) = 0$ $\quad e_{i,i+1}e_{i+1,i} = e_{ii}$

$e_{i+1,i}e_{i,j+1} = e_{i+1,j+1} \Rightarrow f(e_{ii}) = f(e_{i+1,j+1})$

由②√

1• $f_1, \cdots, f_s$为线性空间V上的s个非零线性函数, 证明: 存在$\alpha \in V$, s.t. $f_i(\alpha) \neq 0$, $\forall i = 1, \cdots, s$

2• $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$为$V$上的$s$个非零向量, 证明存在 $f \in V^*$, s.t. $f(\alpha_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, s$

3• $A \in M_n(\mathbb{F})$, $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A+I_n) + \operatorname{rank}(A-I_n) = 2n$ 当且仅当 $A^3 = A$

证明: 1• 令 $V_i = \ker f_i(\alpha)$ 为V的真子空间, 故 $V \neq \bigcup_{i=1}^{s} V_i$ 因此存在 $\alpha \in V$ $\alpha \notin V_i$ 满足$f_i(\alpha) \neq 0$

2•

3• 想到一个旧题: 若$A^3 = I_n$ 证 $\operatorname{rank}(A - I_n) + \operatorname{rank}(A^2 + A + I_n) = n$

$$\operatorname{rank}(f(A)) + \operatorname{rank}(g(A)) = n$$
$$\Updownarrow$$
$$fg = 0$$

3. 令 $V_1=\{x\mid Ax=0\}$ $V_2=\{x\mid (A+I_n)x=0\}$ $V_3=\{x\mid (A-I_n)x=0\}$

"⇒" $\dim V_1+\dim V_2+\dim V_3=n$ 且 $V_i\cap V_j=\{0\}$ $\Rightarrow$ $V=V_1\oplus V_2\oplus V_3$

$A^3-A=A(A-I_n)(A+I_n)$，对 $\forall\alpha\in V$ $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ $\alpha_i\in V_i$

$(A^3-A)(\alpha)=0$ $\Rightarrow$ $A^3-A=0$

"⇐" $A^3=A$ $x^3-x=x(x-1)(x+1)$

$f(x)=x(x-1)$ $g(x)=(x-1)(x+1)$ $h(x)=x(x+1)$

$(f,g,h)=1$ $\Rightarrow$ $\exists\, u(x), v(x), m(x)\in F[x]$ s.t. $u(x)f(x)+v(x)g(x)+m(x)h(x)=1$

$\Rightarrow u(A)f(A)+v(A)g(A)+m(A)h(A)=I_n$

$\forall\alpha\in V$ $\underbrace{u(A)f(A)\alpha}_{\in V_1}+\underbrace{v(A)g(A)\alpha}_{\in V_2}+\underbrace{m(A)h(A)\alpha}_{\in V_3}=\alpha$

$\Rightarrow V=V_1+V_2+V_3$

✓

4. X，B_0 为n阶实方阵，$B_i=B_{i-1}X-XB_{i-1}$ 证明 $X=B_{n^2}$，则 $X=0$

$B_i=B_{i-1}X-XB_{i-1}$

$B_{i+1}=B_iX-XB_i$

$=(B_{i-1}X-XB_{i-1})X-X(B_{i-1}X-XB_{i-1})$

$=B_{i-1}X^2-XB_{i-1}X-XB_{i-1}X+X^2B_{i-1}$

$=B_{i-1}X^2+X^2B_{i-1}-2XB_{i-1}X$

$B_{i+2}=B_{i-1}X^3+3X^2B_{i-1}X-3XB_{i-1}X^2$ $-X^3B_{i-1}$

不断地去代换

$B_{n^2}=\sum(\quad)X^kB_0X^{n^2-k}$ 若 $X=B_{n^2}$ $\Rightarrow X=0$