8.5 换元积分法

定积分的换元积分法

定理 1

设函数$f(x)$在区间I上连续, 变换$x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续可导，$\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$，且$\varphi([\alpha,\beta])\subseteq I$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{$*$}$$

注

$(*)$式中a, b, α, β谁大谁小并不关键，重要的是$\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$的对应. 如果函数$f(x)$在$[a,b]$上只是可积, 则要求变换$x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续可导且严格单调，这时换元积分的结论仍成立.

投票 最多可选1项

设置

判断下面的计算过程是否正确.

设$f(x)$在$[-1,1]$连续，令$t=\sin x$, 就有

$$\int_0^{100\pi} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t=0.$$

A 正确

B 不正确

提交

投票 最多可选1项

设置

判断下面的计算过程是否正确.

设$f(x)$在$[-1,1]$可积，令$t=\sin x$，就有

$$\int_0^{100\pi} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t=0.$$

A 正确

B 不正确

提交

由定积分得到圆面积公式

例 1

求 $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x, r > 0.$

令 $x = r\sin t, 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, 于是 $\mathrm{d}x = r\cos t\mathrm{d}t$, $\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos t$. 从而有

$$\begin{aligned}\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{r^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}.\end{aligned}$$

注意, 这个例子事实上证明了圆面积公式.

对称性在定积分计算中的体现

例 2

若$f(x)$在区间$[-a,a]$可积, 则
(i) 当$f(x)$为偶函数时, 有$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.
(ii) 当$f(x)$为奇函数时, 有$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

例 3

若$f(x)$是周期函数, 周期为T, 且在任何有限区间上可积, 则对任意实数a，有

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x.$$

这个结果说明周期函数在一个长为周期T的区间上的积分, 与区间的位置无关.

对称性在定积分计算中的应用

求 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x(x-\cos x)}{x^2+1}\mathrm{d}x.$

由例2的结果不难计算上面的积分.

练习

求 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x \cdot \ln \frac{\pi - x}{x\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x.$

一道较难的定积分计算题

例 4

求 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

这是一道较难的定积分计算题. 解法一中通过换元导出(1)式, 其中右端后两项积分可以互相抵消; 解法二中通过换元导出(2)式, 其中右端第2项的积分与左端的积分相同而符号相反, 可以移项合并而得到结论. 在不定积分中已经见过后一种情形但未见过前一种情形. 类似的情况今后还会遇到而且在广义积分中也会遇到. 这是计算定积分的一种技巧.

应用泰勒公式的积分型余项解决问题

例 5

设$f(x)$在$[0,+\infty)$上无穷次可导且$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=\cdots=0$, 对任意$x>0$和任意自然数$n$, 都有$f^{(n)}(x)\geqslant 0$. 证明：$f(x)$在$[0,+\infty)$上恒等于0.

由带积分余项的泰勒公式知对任何$x>0$和任何正整数n, 有

$$f(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

令$u=1-\dfrac{t}{x}$换元，得$f(x)=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u))\mathrm{d}u$. 因为对任意$x>0$和任意自然数$n$, 都有$f^{(n)}(x)\geqslant 0$, 所以对任何正整数$n$, $f^{(n)}(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增. 于是可得$\frac{f(x)}{x^{n+1}}\leqslant\frac{f(2x)}{(2x)^{n+1}}$, 故$0\leqslant f(x)\leqslant\frac{f(2x)}{2^{n+1}}$, $n=1,2,\cdots$, 由两边夹定理得$f(x)=0$.

泊松积分 $\int_0^\pi \ln(1-2r\cos x+r^2)\mathrm{d}x\ (|r|\neq 1)$

记$I(r)=\int_0^\pi \ln(1-2r\cos x+r^2)\mathrm{d}x$, 按下面的步骤就可以得出泊松积分的值.

(1) 证明$2\pi\ln(1-|r|)\leqslant I(r)\leqslant 2\pi\ln(1+|r|)$, 由此可知 $\lim\limits_{r\to 0^+} I(r)=0$.

(2) 证明$I(-r)=I(r)$.

(3) 证明$I(r)=\dfrac{1}{2}I(r^2)$.

(4) 由(1)和(3)得到$I(r)=0$ (当$|r|<1$), 进而得到$I(r)=2\pi\ln|r|$ (当$|r|>1$).

课下练习

利用泊松积分计算$\int_0^\pi \ln(3+2\cos x)\mathrm{d}x$.