

专稿

数学大师的风采^{*}

——记陈省身先生讲授《微积分及其应用》

白承铭 (南开数学研究所 天津 300071)

2001年10月11日下午,南开数学研究所大讲演厅内座无虚席,世界著名数学家陈省身先生要给大家来上基础课了.4时整,我们尊敬的陈先生不顾已经九十高龄,坐着轮椅准时来到讲演厅,开始给大家讲授《微积分及其应用》的第一讲.

这次活动是在陈先生本人倡导下,由南开大学、天津大学“刘徽应用数学中心”举办的《应用数学》系列课程的第一门课程,并由陈先生亲自主讲.陈先生要给大学本科生上基础课的消息传开后,不仅在南开大学和天津大学,而且在整个天津地区的高校都产生了很大的震动,许多学校的学生甚至很多教师纷纷要求听课.但是由于演讲厅条件所限,所以只能采取限制名额的办法,最终听众是以南开大学和天津大学两校的大二、大三学生为主,并有少量天津市其他高校的学生和青年教师.即使这样,每次仍然有很多没有报上名的学生站在过道和走廊里听陈先生的演讲,大家的热情可见一斑.同时,陈先生的报告也吸引了很多教师参加,甚至还有在南开大学访问的外籍学者,如美国Brown大学的Bwuno Harris教授就一次不落地听完了全部演讲.

陈先生曾经计划讲《微积分及其应用》八次,但是期间因身体不适住院两周,到11月30日的最后一次(12月初已经先期安排了其他课程),共讲了六次.陈先生在住院期间仍然念念不忘他的课程和学生,他一出院,就赶快备课并准时出现在讲台上,他的这种敬业精神使所有人都非常感动,并且也给年轻人树立了良好的榜样.大师给学生们上基础课,不仅仅为学生们带去了对基础知识更为深刻的理解,更为我们的大学教育带来了新鲜风气,教师们也从中学到如何真正地为人师表.

微积分课程本身作为大学生基础课并不是很难,难的是如何看待微积分里众多的命题和定理,以及为什么要有它们.想弄懂这些,就必须站在一定的高度来观察分析,这不仅要对本课程本身有很深的理解,还需要对更深一步的知识有很好的把握,陈先生就是这样的一位数学老师.陈先生讲得深入浅出,引人入胜,他用非常简洁的语言,形象的说明给大家讲授了微积分学的基本定理以及在微分几何上的应用.同时他那严谨却不枯燥、风趣中又一丝不苟的讲课风格,更告诉我们数学大师是如何授课的.听过陈先生课的人,都领悟到他在谈笑风生之间已经将深奥的数学知识中精辟的传授给了大家,所有人都感到获益匪浅,这可以从听课的学生们交上来的读书报告中清楚地看出来.有学生说:“大师就是大师,讲得就是好”,“很通俗,很好懂”.

为了使更多的人能够了解陈先生演讲的内容,我作为陈先生的助教,根据陈先生演讲录音进行了整理,在下面简要地作一介绍.由于本人水平有限,错误在所难免,仅供大家参考.陈先生认为“微积分的范围很广”,因为时间关系,这个课程“只能讲个大概,尤其是介绍整个的有一些意义的问题”.“应该提一提微积分整个的影响或者是在哪些方面向前发展了.可以说,微积分向前发展大概有两个最重要的方面:一个是在几何的应用”,另一个是复数.陈先生着重讲的是微积分学的基本定理以及在微分几何上的应用.他的演讲主要包括“微分和积分”(1讲),“指数与对数函数”(1讲),

* 收稿日期:2002-07-11.

“曲线论”(1讲)和“曲面论与 Gauss—Bonnet 公式”(3讲). 以下介绍的第一讲“微分和积分”, 是陈先生演讲的记录稿.

微分与积分

(I) 微积分的起源: 牛顿与莱布尼兹

讲到微积分, 最要紧的两个人是牛顿(Issac Newton, 1642—1727)跟莱布尼兹(Gottfried Leibniz, 1646—1716), 微积分就是他们发现的. 关于牛顿, 有兴趣的是他做这个工作是在学生的时候, 也许比你们的岁数还要小, 那个时候, 也就是 17 世纪那个时候, 欧洲瘟疫很厉害, 欧洲死了很多人. 他在英国剑桥大学, 因为瘟疫的关系, 学校放假了, 他就回家在家里做关于微积分的这些工作. 莱布尼兹是一个各方面都非常优秀的人, 数学是他的兴趣的一部分, 他的兴趣到宗教、法律各方面都有. 他们两人之间有点争论, 是因为争论谁是微积分的发现者. 这个争论是不幸的, 也没有什么意义. 实质上是莱布尼兹头一个发表关于微积分论文的人, 他的论文在 1684 年发表. 牛顿做这个工作早于莱布尼兹. 而莱布尼兹发表论文早于牛顿, 牛顿有了这个工作后没有发表什么任何的东西. 而莱布尼兹不但发表了这些东西, 同时还引用了一些符号, 也许我们现在还在用. 那么后来两个人有一个争论, 大概都是跟数学没有关系的人在那里造成的情况, 这不是一个什么有意思的事情.

(I) 微积分基本定理

微积分是数学里头很重要的方面, 至于什么是微积分呢? 我想微分的发现跟笛卡儿发现坐标非常有关系, 因为笛卡儿发现坐标之后, 数学主要的目的就是研究函数, 研究两组数的关系, 有种种的关系. 我们知道, 函数有种种, 有线性的, 非线性的, 三角函数等种种函数, 那么要怎样地研究函数的性质? 我们都知道, 函数可以用曲线来表示, 如 $y=f(x)$ 这条曲线. 在这条曲线的每点, 如果它是可以微分的话, 那么它在每点有个切线. 微分就是把这个曲线用它的切线来研究它的性质. 所以也等于说它是把函数线性化, 线性化之后, 可以加、减、乘除, 可以计算, 因此可以得到数出来. 数学要是能够得到数出来, 总是很要紧的. 所以微分大概是说用曲线的切线来研究曲线的性质.

积分来得早了, 因为积分实际上大致讲起来, 它是要计算面积. 那么假使平面上有一个区域, 由曲线来做为边界, 它的面积有多大, 圆周的面积有多大, 这里的问题是积分的开始, 也是积分重要的目的. 因此, 实际上, 积分的发展在微分之前. 积分当时也没有一定的定义, 积分就是有个极限的观念. 曲线所围成的区域一般想法子用直线来逼近, 使得逼近的曲线趋于你的边界的时候, 就有个极限, 就是这个区域的面积. 所以, 总而言之, 积分的发展在微分之前, 中间这两个问题好象没有关系, 但是其实这关系非常的密切. 积分差不多是微分的反运算. 比方说, 假使你求这条直线跟两条垂线所成区域的面积, 这两条垂线, 一个是 $s=a$, 一个是 $s=x$, 你要去算这个区域的面积, 是个定积分 $\int_a^x f(x)dx$, (读作 $f(x)$ 定积分从 $a \rightarrow x$). 这是当年莱布尼兹的符号, 这个积分的符号记成这样, 因为

积分总是代表一个和, \int 代表和(sum). 假设面积一边由 $s=a$ 的直线作边界, 另一边是任意的 x , 你把 x 这条直线移动的话, 就得到一个 x 的函数, 这个函数, 我叫它 $A(x)$, 就是我图上的面积(图从略), 是个积分, 所以它是一个数目, 与 x 有关, 所以是 x 的函数. 这个函数跟曲线方程 $y=f(x)$ 这个函数有密切关系. 为什么有密切的关系呢? 很简单地看看, 假如求 $A(x) = \int_a^x f(x)dx$ 的微分, 求它的微分嘛, 就是说, 求 $s=x, x+\delta x$ 所围成的这个小区域的面积. 现在如果你拿 δx 除的话, 我想很容易看出来了, 这个极限就是 $f(x)$. 所以很容易看出来 $A(x)$ 这个函数的微分就是 $f(x)$, 因此

$$\frac{dA(x)}{dx} = f(x). \quad (1.1)$$

这就是微分同积分的基本的关系. 这个关系说 $A(x)$ 是一个积分, 求它的微分时候, 就得 $f(x)$. 这个一般地, 叫做微积分的基本定理. 我从前在南开念微积分的时候, 始终不懂为什么这是一个微积分的基本定理, 因为一般地把这个关系式写成

$$\int f(x) dx \Big|_a^b = \int_a^b f(x) dx \quad (1.2)$$

形状. 左边积分是个不定积分(indefinite integral), 不定积分是个函数, 左式是函数在 b 的值减去函数在 a 的值, 等于这个定积分(definite integral). 所以从这个关系知道要求积分的话, 只要求一个函数, 它的微分是已知的, 就是 $f(x)$, 即微分是已知的. 所以这样微分跟积分连起来了. 互相的, 积分等于微分的反运算, 有了 $f(x)$, 要找一个函数, 它的微分等于 $f(x)$, 是个反运算. 因此微、积分有密切的关系.

(II) 多元微积分

上面讲的是一个变数的微积分. 下面要讲高维的, 多变数的. 多变数的话, 有新的现象, 是什么样的呢? 我想对于多变数的, 我们先不看别的, 先看两个变数的情形, x 跟 y , 那么我们知道这个时候微分的观念的推广是偏微分, 等于 x 跟 y 分开求微分. 积分的观念推广是重积分. 二重积分(double integral)是在 2 维的情形, 在高维的情形是多重的. 先看 2 维, 2 维的情形就有了区域, 我们叫它 Δ , 那么它的边界叫它 γ . 所以积分的一个自然推广是一个 2 重积分, 普通积分把 x 分成小段, 然后取小段再乘上这个函数, 求一个和. 在 2 重积分的时候, 方法也是把区域分成小块, 然后取每一小块的面积, 在其上函数值乘上它的面积, 然后求它的和. 很不得了了, 假使函数好的话, 无论如何圈你的区域, 极限是一样的, 所以这极限就是 2 重积分

$$I = \iint f(x, y) dx dy. \quad (1.3)$$

在 2 维的时候, 甚至高维的时候, 一个重要的现象是, 我们现在有 2 个变数 x, y , 换变数怎么样? 所以我现在换变数, 换变数当然是在微积分里是很重要的一个办法, 因为很多的问题是看你的变数是否选择得当, 有时换变数, 问题就立刻简单化了, 就可以解决了. 现在我换变数:

$$\begin{cases} x = x(x', y') \\ y = y(x', y') \end{cases} \quad (1.4)$$

其中, (x', y') 是另外一组坐标. 我们发现一个事实, 在高维的时候, 微分的乘法, 我们写成 $dx \wedge dy$, 这是一个乘法, 怎么乘呢? $dx \wedge dy$ 在微积分上是最微妙的观点. 什么叫微分? 什么是 dx ? 这个困扰了数学家几百年的事. 怎么样定微分的定义跟究竟什么是 dx , 这个很麻烦, 可以做到很满意, 不过把它讲清楚需要有一定的时间. 所以我马马虎虎说有一个 dx . 在 dx, dy 这种微分之间要建立乘法 \wedge . 什么叫 $dx \wedge dy$? 这个问题更复杂了, 你如果 dx, dy 本身是什么都不清楚, 乘了以后是什么东西更是一个很微妙困难的问题. 在这方面有一个大的进步, 就是引进外代数和外微分. 假定 $dx \wedge dy$ 这个乘法是反对称,

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx \quad (1.5)$$

这个问题就清楚简单了. 因为乘法如果是反对称的话, 当然 $dx \wedge dx = 0$. 事实上, 因为 $dx \wedge dx = -dx \wedge dx$, 所以 $dx \wedge dx = 0$. 在反对称的乘法之下, 把 $dx \wedge dy$ 看成变数, 因为乘法是反对称的, $dx^2 = 0$, 所以就没有高次的东西了. 这样得到的代数叫做外代数. 这个代数很妙的. 有一个立刻的结论: 换变数公式为

$$dx \wedge dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} dx' \wedge dy' \quad (1.6)$$

假使我们的微分用的是偏微分, 所以

(下转第 8 页)

数问题的需要,更重要的是它的几何背景的需要.

(5)加强几何变换和变换群理论的教学.

空间的变换的概念在射影几何学中体现得最显著.射影几何学应该说起源于绘画和建筑学中的透视学,是人类在观察世界时把3维的物体用平面图形表示的经验和规律的总结.这里面蕴涵着图形的变换理论.后来,欧拉首先注意到仿射变换的意义.克莱因在1872年提出了著名的“爱尔兰根纲领”.他认为每一种几何都由一种变换群所刻画,每一种几何学要做的实际上就是寻求图形在该变换群的作用下保持不变的性质,一个几何的子几何是在原变换群的子群作用下的不变量.例如:射影几何学(射影变换群) \rightarrow 仿射几何学(仿射变换群) \rightarrow 欧氏几何学(刚体运动群).在这里,箭头所指的是前者的子几何.虽然并不是所有的几何学都能够纳入克莱因的分类方案之中,例如现代的代数几何学和微分几何学,但是克莱因的观点给大部分几何学提供了一个系统的分类方法,而且提示了许多可供研究的问题.尤其是在当代,李群的理论已经广泛地用于几何学和物理学乃至工程科学的研究.许多几何空间的结构都容许一定的变换群的作用,它们的变换理论是重要的研究课题,这些问题的提出与克莱因的思想有关.

群及其子群的结构和分类是代数学中的问题,而几何学中的变换群为抽象的群论提供了重要的例证,并且为群论的抽象研究提出不少课题.另外,几何变换理论与日常生活、生产、科研都有密切的关系.因此,在学几何的时候,必须把几何变换理论作为重要的内容之一.(未完,待续)

(上接第4页)

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x'} dx' + \frac{\partial x}{\partial y'} dy', dy = \frac{\partial y}{\partial x'} dx' + \frac{\partial y}{\partial y'} dy' \quad (1.7)$$

现在用外乘法一乘, $dx' \wedge dx' = dy' \wedge dy' = 0$. 而 $dx' \wedge dy'$ 因为乘法是反对称的, 所以是刚好乘以 $x = x(x', y'), y = y(x', y')$ 的雅可比 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')}$, 这个符号是雅可比, 是四个偏微分所成的行列式, 所以

$$dx \wedge dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} dx' \wedge dy' \quad (1.8)$$

这个刚巧是我们重积分换变数的一个关系. 我们知道重积分要是换变数的话, 它应该乘上雅可比. 所以这个结论就是, 对重积分的 Integral, 即积分下的式子, 把积分号丢掉, Integral 是一个微分多项式, 乘法是反对称的. 所以假使多重积分有3维, 4维到n维的空间, 多重积分的 Integral 可看成是外代数的多项式, 那么换变数就自然对了. 这里头有一点微妙的地方, 因为通常, 你要证明换变数的公式的时候, 假定雅可比是正的, 不然的话, 乘上雅可比的绝对值, 使它是正的. 这个是高维几何微妙的东西, 就是空间有个向(Orietaion), 你转的时候, 有2个相反转的方向. 转的时候, 假使改了方向的话, 雅可比是负值, 因此我们一个结论是多重积分的 Integral 应该是一个外代数多项式, 是 dx, dy 的多项式, 乘法是反对称, 这样换变数完全可以对的, 当然我只做了2维的例子. 高维是很明显的, 同样的. 外乘法是妙得很呐, 是不会有高次的, 所以比较简单, 平方一下, 就是0.(未完, 待续)

本刊加入“万方数据—数字化期刊群”和 “中文科技期刊数据库”的声明

我刊现已入网“万方数据—数字化期刊群”和“中文科技期刊数据库”, 凡向本刊投稿并录用的稿件文章, 将一律由编辑部统一纳入“万方数据—数字化期刊群”和“中文科技期刊数据库”, 进入因特网提供信息服务. 凡有不同意见者, 请别投它刊, 本刊所付稿酬包含刊物内容上网服务报酬, 不再别付报酬.

高等数学研究编辑部 2002 年 8 月