§1 $\mathbf{R}^n$ 中的 Jordan 测度

首先由直观定义 $\mathbf{R}^n$ 中标准长方体

$$H=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n; a_i\le x_i\le b_i, i=1,\cdots,n\}$$

的体积 (或测度) 为 $V(H)=\prod\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$. 设 $Q\subseteq R^n$, 如果 Q 是 R^n 中的有限个标准长方体的体积的并集, 则称 Q 为 R^n 中的简单集. 易知, 若 Q 是 R^n 中的简单集, 则存在 R^n 中有限个标准长方体 $H_1,\cdots,H_m$, 使得

$$H_i^0\bigcap H_j^0=\phi, i\ne j,\quad Q=\bigcup_{i=1}^{m}H_i,$$

其中 H_i^0 表示集合 H_i 的内部. 可以证明 $\sum\limits_{i=1}^{m}V(H_i)$ 与 Q 的上述表示方法无关. 从而可定义 $\sum\limits_{i=1}^{m}V(H_i)$ 为 Q 的体积 (或测度). 约定空集为简单集, 其测度为 0.

设 Ω 是 R^n 中的有界集, 定义

$$V^-(\Omega)=\sup\{V(Q); Q\text{为简单集且}Q\subseteq\Omega\},$$
$$V^+(\Omega)=\inf\{V(Q); Q\text{为简单集且}Q\supseteq\Omega\}.$$

分别称 $V^-(\Omega)$ 和 $V^+(\Omega)$ 为 Ω 的 Jordan 内测度和外测度, 显然 $V^-(\Omega)\le V^+(\Omega)$. 若 $V^-(\Omega)=V^+(\Omega)$, 则称 Ω 在 R^n 中 Jordan 可测, 且称 $V^-(\Omega)=V^+(\Omega)$ 为 Ω 在 R^n 中的 Jordan 测度, 记为 $V(\Omega)$. 显然简单集 Jordan 可测且它的 Jordan 测度就是由直观定义的体积. 以下简称 Jordan 可测为 J 可测, Jordan 测度为 J 测度. J 可测有以下性质.

(i) 若 Ω J 可测, 则 $\Omega^0,\overline{\Omega}$ 都 J 可测, 且

$$V(\Omega^0)=V(\Omega)=V(\overline{\Omega}).$$

证 记 $V = V(\Omega)$. 由于 $\Omega^0 \subseteq \Omega$, 所以由定义易知

$$V^-(\Omega^0) \le V^-(\Omega) = V(\Omega) = V,$$
$$V^+(\Omega^0) \le V^+(\Omega) = V(\Omega) = V.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 存在简单集 Q_1 使得 $Q_1 \subseteq \Omega$, 且

$$V(Q_1) > V^-(\Omega) - \frac{\varepsilon}{2} = V - \frac{\varepsilon}{2}.$$

由简单集的定义易知对于 Q_1 存在简单集 Q_2 使得 $Q_2 \subseteq Q_1^0$, 且

$$V(Q_2) > V(Q_1) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $Q_2 \subseteq Q_1^0 \subseteq \Omega^0$, 从而

$$V^-(\Omega^0) \ge V(Q_2) > V(Q_1) - \frac{\varepsilon}{2} > V - \varepsilon.$$

于是有

$$V - \varepsilon < V^-(\Omega^0) \le V.$$

由 ε 之任意性得 $V^-(\Omega^0) = V$. 再由

$$V = V^-(\Omega^0) \le V^+(\Omega^0) \le V$$

可得

$$V^-(\Omega^0) = V^+(\Omega^0) = V,$$

即 Ω_J^0 可测且其 J 测度为 V. 同理可证

$$V^-(\overline{\Omega}) = V^+(\overline{\Omega}) = V.$$

注 此性质的逆不真, 即 Ω^0 J 可测, $\overline{\Omega}$ J 可测, Ω 未必 J 可测. 例如在 R^1 中记 [0,1] 中的所有有理数组成的集合为 M, 则易知 $V^-(M) = 0, V^+(M) = 1$, 从而 M 在 R^1 中不是 J 可测. 但 $M^0 = \phi$, $\overline{M} = [0,1]$, 显然均在 R^1 中 J 可测.

(ii) 若 Ω_1 和 Ω_2 都 J 可测，则 $\Omega_1\bigcup\Omega_2$, $\Omega_1\bigcap\Omega_2$ 和 $\Omega_1\backslash\Omega_2$ 也都 J 可测，且

$$V(\Omega_1\cup\Omega_2)\le V(\Omega_1)+V(\Omega_2),$$

其中等号成立的充要条件是 $V(\Omega_1\bigcap\Omega_2)=0$.

证 首先容易证明当 Ω_1 和 Ω_2 都是简单集时，此性质成立，且

$$V(\Omega_1\cup\Omega_2)=V(\Omega_1)+V(\Omega_2)-V(\Omega_1\cap\Omega_2). \tag{1}$$

设 Ω_1 和 Ω_2 都是 J 可测集. 任给 $\varepsilon>0$, 存在简单集 Q_1 和 Q_2, 使得 $Q_1\supseteq\Omega_1$, $Q_2\supseteq\Omega_2$, 且

$$V(Q_1)<V(\Omega_1)+\frac{\varepsilon}{2},\quad V(Q_2)<V(\Omega_2)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $\Omega_1\bigcup\Omega_2\subseteq Q_1\bigcup Q_2$, 从而由 (1) 得

$$\begin{aligned}V^+(\Omega_1\cup\Omega_2)&\le V(Q_1\cup Q_2)=V(Q_1)+V(Q_2)-V(Q_1\cap Q_2)\\&<V(\Omega_1)+V(\Omega_2)+\varepsilon-V(Q_1\cap Q_2).\end{aligned}$$

再由 $Q_1\cap Q_2\supseteq\Omega_1\cap\Omega_2$, 可知 $V(Q_1\cap Q_2)\ge V^+(\Omega_1\cap\Omega_2)$, 于是有

$$V^+(\Omega_1\cup\Omega_2)<V(\Omega_1)+V(\Omega_2)-V^+(\Omega_1\cap\Omega_2)+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可得

$$V^+(\Omega_1\cup\Omega_2)\le V(\Omega_1)+V(\Omega_2)-V^+(\Omega_1\cap\Omega_2). \tag{2}$$

另一方面，对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在简单集 Q_3 和 Q_4, 使得 $Q_3\subseteq\Omega_1$, $Q_4\subseteq\Omega_2$ 且

$$V(Q_3)>V(\Omega_1)-\frac{\varepsilon}{2},\ \ V(Q_4)>V(\Omega_2)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $Q_3\cup Q_4\subseteq\Omega_1\cup\Omega_2$, 从而由 (1) 得

$$\begin{aligned}V^-(\Omega_1\cup\Omega_2)&\ge V(Q_3\cup Q_4)=V(Q_3)+V(Q_4)-V(Q_3\cap Q_4)\\&>V(\Omega_1)+V(\Omega_2)-\varepsilon-V(Q_3\cap Q_4).\end{aligned}$$

显然 $Q_3 \cap Q_4 \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$, 所以

$$V(Q_3 \cap Q_4) \le V^-(\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

于是可得

$$V^-(\Omega_1 \cup \Omega_2) > V(\Omega_1) + V(\Omega_2) - V^-(\Omega_1 \cap \Omega_2) - \varepsilon.$$

由 ε 的任意性，则

$$V^-(\Omega_1 \cup \Omega_2) \ge V(\Omega_1) + V(\Omega_2) - V^-(\Omega_1 \cap \Omega_2). \tag{3}$$

比较 (2) 和 (3), 再由 $V^-(\Omega_1 \cup \Omega_2) \le V^+(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, $V^-(\Omega_1 \cap \Omega_2) \le V^+(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, 立即可得

$$V^-(\Omega_1 \cup \Omega_2) = V^+(\Omega_1 \cup \Omega_2),$$
$$V^-(\Omega_1 \cap \Omega_2) = V^+(\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

由此可知 $\Omega_1 \cup \Omega_2$ 和 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 都 J 可测，且 (1) 对任何 J 可测集 Ω_1 和 Ω_2 都成立.

余下来仅证明 $\Omega_1 \backslash \Omega_2$ 的 J 可测性. 事实上，由 Ω_1 和 Ω_2 的 J 可测性可推出 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ J 可测. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在简单集 Q_1 和 Q_2, 使得 $Q_1 \supseteq \Omega_1$, $Q_2 \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$, 且

$$V(Q_1) < V(\Omega_1) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad V(Q_2) > V(\Omega_1 \cap \Omega_2) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

显然 $Q_1 \backslash Q_2 \supseteq \Omega_1 \backslash \Omega_2$. 易知性质 (ii) 对于简单集成立，所以 $Q_1 \backslash Q_2$ J 可测. 再由

$$Q_1 = (Q_1 \backslash Q_2) \cup (Q_1 \cap Q_2),$$

且 $(Q_1 \backslash Q_2) \cap (Q_1 \cap Q_2) = \phi$, 从而由 (1) 得

$$V(Q_1) = V(Q_1 \backslash Q_2) + V(Q_1 \cap Q_2).$$

于是

$$V^+(\Omega_1 \backslash \Omega_2) \le V(Q_1 \backslash Q_2) = V(Q_1) - V(Q_1 \cap Q_2).$$

由于 $Q_1 \cap Q_2 = Q_2$, 则

$$V^+(\Omega_1 \backslash \Omega_2) \leq V(Q_1) - V(Q_2) < V(\Omega_1) - V(\Omega_1 \cap \Omega_2) + \varepsilon.$$

由 ε 之任意性可得

$$V^+(\Omega_1 \backslash \Omega_2) \leq V(\Omega_1) - V(\Omega_1 \cap \Omega_2). \tag{4}$$

另一方面，对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在简单集 Q_3 和 Q_4 使得 $Q_3 \subseteq \Omega_1$, $Q_4 \supseteq \Omega_1 \cap \Omega_2$, 且

$$V(Q_3) > V(\Omega_1) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad V(Q_4) < V(\Omega_1 \cap \Omega_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

显然 $Q_3 \backslash Q_4 \subseteq \Omega_1 \backslash \Omega_2$, 则

$$\begin{aligned} V^-(\Omega_1 \backslash \Omega_2) & \geq V(Q_3 \backslash Q_4) = V(Q_3) - V(Q_3 \cap Q_4) \\ & \geq V(Q_3) - V(Q_4) > V(\Omega_1) - V(\Omega_1 \cap \Omega_2) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由 ε 之任意性可得

$$V^-(\Omega_1 \backslash \Omega_2) \geq V(\Omega_1) - V(\Omega_1 \cap \Omega_2), \tag{5}$$

比较 (4) 和 (5) 可知 $\Omega_1 \backslash \Omega_2$ J 可测，且

$$V(\Omega_1 \backslash \Omega_2) = V(\Omega_1) - V(\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

由性质 (ii) 可知任意有限多个 J 可测集 $\Omega_1, \cdots, \Omega_m$ 其并集和交集都 J 可测，且

$$V(\bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i) \leq \sum_{i=1}^{m} V(\Omega_i),$$

其中等号成立的充要条件是

$$V(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i, j = 1, \cdots, m, i \neq j.$$

上述性质一般称为 Jordan 测度的有限可加性． Jordan 测度没有所谓完全可加性，即可数无穷多个 J 可测集其并集和交集都未必 J

可测．例如在 R^n 中 $[0,1]$ 上的所有有理数有无穷多个，即它们可排为 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$. 显然 R^n 中任意单点集都 J 可测且其 J 测度为 0, 但 $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} r_i$ 不 J 可测.

R^n 中的一个 J 可测集，如果它的 J 测度为 0, 则称其为 R^n 中的 Jordan 零测集，简称为 R^n 中的 J 零集．显然 R^n 中的有界集 A 是 J 零集 $\Longleftrightarrow V^+(A)=0$, 即任给 $\varepsilon>0$, 存在 R^n 中的有限个标准长方体 $H_1,\cdots,H_m$, 使得 $A\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i$, 且

$$\sum_{i=1}^{m} V(H_i) < \epsilon.$$

例 1　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界，令

$$A=\{(x,y)\in R^2; a\le x\le b, y=f(x)\},$$

则 A 是 R^2 中的 J 零集的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证　必要性．设 A 是 R^2 中的 J 零集，则任给 $\varepsilon>0$, 存在 R^2 中有限个标准长方形

$$H_i=\{(x,y)\in R^2; x_{i-1}\le x\le x_i, y_{i-1}\le y\le y_i\},$$

其中 $i=1,\cdots,m$, 使得 $A\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i$, 且

$$\sum_{i=1}^{m} V(H_i) = \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i \Delta y_i < \varepsilon, \tag{6}$$

这里 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. 不妨设

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,$$

且对于 $i=1,\cdots,m$ 有

$$y_{i-1}\le f(x)\le y_i, \quad \forall x\in[x_{i-1},x_i]. \tag{7}$$

$x_0, x_1, \cdots, x_m$ 对应 $[a,b]$ 的一个分割 T, 设 $f(x)$ 关于 T 的积分大和与小和分别为 $S(T)$ 和 $s(T)$. 由 (6) 与 (7) 可得

$$0 \le S(T) - s(T) \le \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i \Delta y_i < \varepsilon.$$

从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

充分性. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 任给 $\varepsilon > 0$, 则存在 $[a,b]$ 的分割

$$T : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

使得 $f(x)$ 相应的 T 的大和 $S(T)$ 与小和 $s(T)$ 满足

$$0 \le S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

令

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x),$$

则

$$S(T) - s(T) = \sum_{i=1}^{m} (M_i - m_i) \Delta x_i,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 设

$$H_i = \{(x,y) \in R^2;\ x_{i-1} \le x \le x_i,\ m_i + \delta \le y \le M_i\},$$

其中 $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, 则 H_i 为 R^2 中的标准长方形. 显然 $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i$ 且由 (8) 可知

$$\sum_{i=1}^{m} V(H_i) = \sum_{i=1}^{m} (M_i - m_i + \delta) \Delta x_i < \varepsilon.$$

从而 A 是 R^2 中的 J 零集.

例 2 设 D 是 R^n 中的有界闭集，$f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 D 上连续，则

$$A=\Big\{(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\in R^{n+1};$$
$$(x_1,\cdots,x_n)\in D, x_{n+1}=f(x_1,\cdots,x_n)\Big\}$$

是 R^{n+1} 中的 J 零集.

证明留作练习.

为了后面的需要，我们顺便介绍 Lebesgue 零测集 (简称 L 零集) 的概念. 设 A 是 R^n 中的有界集，A 称为 R^n 中的 Lebesque 零测集，如果任给 $\varepsilon>0$, 存在至多可数多个 R^n 中的标准长方体 $H_1,H_2,\cdots$, 使得 $A\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}H_i$, 且

$$\sum_{i=1}^{m}V(H_i)<\varepsilon$$

显然若 A 是 R^n 中的 J 零集，则 A 必是 R^n 中的 L 零集. 反之，若 A 是 R^n 中的 L 零集，则 A 未必是 R^n 中的 J 零集，请读者给出例子说明.

对于判断 R^n 中的有界集是否 J 可测的问题，我们有以下结果：

定理 设 Ω 是 R^n 中的有界集，则 Ω J 可测的充要条件是 Ω 的边界点集 $\partial\Omega$ 是 J 零集.

证 必要性. 设 Ω J 可测，记 $V(\Omega)=V^+(\Omega)=V^-(\Omega)$. 任给 $\varepsilon>0$, 则存在简单集 Q_1' 和 Q_2 使得 $Q_1'\subseteq\Omega$, $Q_2\supseteq\Omega$, 且

$$V(Q_2\backslash Q_1')<\frac{\varepsilon}{2}.$$

适当缩小组成 Q_1' 的每个标准长方体得简单集 Q_1 使得 $Q_1\subseteq(Q_1')^0\subseteq\Omega^0$, 且

$$V(Q_2\backslash Q_1)<\varepsilon. \tag{9}$$

由于简单集均为闭集，所以 $Q_2 \supseteq \overline{\Omega}$. 于是有

$$\partial\Omega \subseteq \overline{\Omega}\backslash\Omega^0 \subseteq Q_2\backslash Q_1.$$

由 (9) 可得

$$V^+(\partial\Omega) \leq V^+(Q_2\backslash Q_1) = V(Q_2\backslash Q_1) < \varepsilon.$$

由 ε 的任意性得 $V^+(\partial\Omega) = 0$, 即 $\partial\Omega$ 是 J 零集.

充分性. 设 $\partial\Omega$ 是 J 零集. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在简单集 Q_2' 使得 $\partial\Omega \subseteq Q'$, 且 $V(Q_2') < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 适当扩大组成 Q_2' 的每一个标准长方体可得简单集 Q 满足 $\partial\Omega \subseteq Q^0$, 且 $V(Q) < \varepsilon$. 由于 $\partial\Omega$ 是有界闭集，从而存在 $\delta > 0$ 使得

$$\mathrm{dis}(\partial\Omega, \partial Q) = \inf_{x\in\partial\Omega, y\in\partial Q} |x - y| = 2\delta. \tag{10}$$

记

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega; \mathrm{dis}(x, \partial\Omega) \geq \delta\},$$

其中 $\mathrm{dis}(x, \partial\Omega) = \inf\limits_{y\in\partial\Omega} |x - y|$. 若 $\Omega_\delta = \phi$, 则 $\Omega \subseteq Q$, 从而可得

$$V^+(\Omega) - V^-(\Omega) \leq V(Q) < \varepsilon. \tag{11}$$

若 $\Omega_\delta \neq \phi$, 则 $\Omega_\delta \subseteq \Omega^0$ 且 Ω_δ 是有界闭集. 任取 $x \in \Omega_\delta$, 以 x 为中心做标准长方体 $H(x)$ 使得

$$d_x = \sup_{y,z\in H(x)} |y - z| = \delta.$$

显然

$$|y - x| \leq \frac{\delta}{2}, \quad \forall y \in H(x).$$

由于 $x \in \Omega$, $\mathrm{dis}(x, \partial\Omega) \geq \delta$, 从而 $H(x) \subseteq \Omega^\circ$. 因为

$$\Omega_\delta \subseteq \bigcup_{x\in\Omega_\delta} (H(x))^\circ,$$

由 Borel 定理可知存在有限个点 $P_1,\cdots,P_m\in\Omega_\delta$ 使得

$$\Omega_\delta\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}(H(P_i))^\circ\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}H(P_i)\subseteq\Omega^\circ.$$

记 $Q'=\bigcup\limits_{i=1}^{m}H(P_i)$, 则 $V(Q')\le V^-(\Omega)$. 如果 $x\in\Omega\backslash\Omega_\delta$, 则 $x\in\Omega$, $\mathrm{dis}(x,\partial\Omega)<\delta$ 由 (10) 得 $x\in Q$, 于是 $\Omega\subseteq Q\cup Q'$. 由此可得

$$V^+(\Omega)\le V(Q\cup Q')\le V(Q)+V(Q')<V^-(\Omega)-\varepsilon,$$

即 (11) 也成立. 由 ε 之任意性得 $V^+(\Omega)=V^-(\Omega)$, 即 Ω J 可测.

从这一定理与前面的例 1 和例 2 可知通常遇到的有界区域一般是 J 可测的. 以后本课程所提到的有界区域均假设为 J 可测.

§2 重积分的概念与性质

一、重积分的定义

设 D 是 R^n 中的有界闭区域, $f(x)$ 为定义在 D 上的函数, 有限集 $T=\{\Delta\sigma_1,\cdots,\Delta\sigma_l\}$ 称为 D 的一个分割, 如果

(i) 每一个 $\Delta\sigma_i$ $(i=1,\cdots,l)$ 均是 D 的闭 J 可测子集.

(ii) $\Delta\sigma_1,\cdots,\Delta\sigma_l$ 两两无相交内部, 即

$$(\Delta\sigma_i)^\circ\bigcap(\Delta\sigma_j)^\circ=\phi,\qquad i\ne j.$$

(iii) $D=\bigcup\limits_{i=1}^{l}\Delta\sigma_i$.

有时称 T 为布在 D 上的一个网, 每一个 $\Delta\sigma_i$ 为一个网眼. 以后我们用 $\Delta\sigma_i$ 既表示这个点集又表示它的 J 测度. 称 $d(T)=\max\limits_{1\le i\le l}d(\Delta\sigma_i)$ 为分割 T 的直径, 其中 $d(\Delta\sigma_i)=\sup\limits_{x,y\in\Delta\sigma_i}|x-y|$ 为 $\Delta\sigma_i$ 的直径. 任取 $\xi^i\in\Delta\sigma_i$, 则 $\sum\limits_{\Delta\sigma_i\in T}f(\xi^i)\Delta\sigma_i$ 称为 $f(x)$ 在 D 上关于 T 的一个积分和.