原函数的一些补充材料

一、“存在原函数”的充分条件的应用

微积分基本定理的一个推论是“任一区间上的连续函数都有原函数”，这个推论给出了“存在原函数”的充分条件. 可以应用这个结论去证明某些不连续的函数存在原函数.

命题 1 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 求证：$g(x)=\begin{cases} f'\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上有原函数.

分析 令$H(x)=\begin{cases} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则由$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$知$H'(0)=\lim\limits_{x\to 0}xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{f(y)}{y}=0$, 从而$H'(x)=\begin{cases} 2xf\left(\frac{1}{x}\right)-f'\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 因此，为证明$g(x)$有原函数，只需证明$\varphi(x)=\begin{cases} xf\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有原函数. 因为$\lim\limits_{x\to 0}xf\left(\frac{1}{x}\right)=0$, 所以$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，从而$\varphi(x)$有原函数$\Phi(x)$. 令$G(x)=2\Phi(x)-H(x)$, 则$G(x)$是$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的一个原函数. □

由命题1可知，函数$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上有原函数. 后面的讨论中会用到这个例子，学习了定积分理论之后，也可以用定积分的方法来证明这个例子的结论.

二、“存在原函数”的必要条件的应用

达布定理指出“若函数$f(x)$在区间I上有原函数，则$f(x)$在区间I上具有介值性，即对任意$a,b\in I$, $a<b$, 当$f(a)\neq f(b)$时，对介于$f(a)$与$f(b)$之间的任何实数λ, 存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f(\xi)=\lambda$”. 这给出了“存在原函数”的必要条件，可以应用这个必要条件去讨论关于原函数的一些问题.

问题 1 是否存在函数$f(x)$, 使得$f(x)$在区间I上具有介值性但$f(x)$在区间I上没有原函数？

答 存在. 例如，取$I=(-\infty,+\infty)$, 则$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$在区间$I$上具有介值性当且仅当$a\in[-1,1]$, 而$f(x)$在区间$I$上有原函数当且仅当$a=0$, 因此当$a\in[-1,0)\cup(0,1]$时，$f(x)$在区间$I$上具有介值性但$f(x)$在区间$I$上没有原函数. □

注 也可以从函数运算封闭性的角度来看. 区间I上有原函数的函数的全体组成的集合对加法封闭，而区间I上有介值性的函数的全体组成的集合对加法不封闭. 因此，存在函数$f(x)$, 使得$f(x)$在区间I上具有介值性但$f(x)$在区间I上没有原函数.

练习题 1 设$f(x)$是$[0,+\infty)$上的函数，对任意$x>0$, 有$xf(x)>1$. 证明：$f(x)$在$[0,+\infty)$上没有原函数.

分析 由$xf(x)>1$可知$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, 于是存在$\delta>0$, 使得$f(x)$在$[0,\delta]$上不具有介值性，故由达布定理知$f(x)$在$[0,+\infty)$上没有原函数. $\square$

练习题 2 设$F(x)$是$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的一个原函数，$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有下界. 证明：$\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|=0$.

分析 反证. 若不然，则存在$\varepsilon_0>0$, 使得对任意实数x, 都有$|f(x)|\geqslant\varepsilon_0$. 由达布定理知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有介值性，从而$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上恒大于$\varepsilon_0$或恒小于$-\varepsilon_0$. 不妨设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上恒大于$\varepsilon_0$, 则可以证明$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$, 与$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有下界矛盾. $\square$

练习题 3 设函数$f(x)$和$g(x)$都在$(-\infty,+\infty)$上有原函数，$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上恒不为0, 则函数$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在$(-\infty,+\infty)$上具有介值性，即对任意实数$a<b$, 当$\dfrac{f(a)}{g(a)}\neq\dfrac{f(b)}{g(b)}$时，对介于$\dfrac{f(a)}{g(a)}$与$\dfrac{f(b)}{g(b)}$之间的任何实数$\eta$, 存在$\xi\in(a,b)$, 使得$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\eta$.

分析 令$h(x)=f(x)-\eta g(x)$, 则由题设条件知$h(x)$也在$(-\infty,+\infty)$上有原函数，于是由达布定理知$h(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有介值性. 由$g(x)$连续及$g(x)$恒不为0知$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上恒大于0或恒小于0, 结合η介于$\dfrac{f(a)}{g(a)}$与$\dfrac{f(b)}{g(b)}$之间知$h(a)h(b)<0$. 故存在$\xi\in(a,b)$, 使得$h(\xi)=0$, 从而$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\eta$. $\square$

三、通过函数延拓构造原函数

练习题 4 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的函数，对任意正整数n, 令$f_n(x)$是$f(x)$在$(-n,+\infty)$上的限制. 证明：若对任意正整数n, $f_n(x)$在$(-n,+\infty)$上有原函数，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有原函数.

分析 令$F_n(x)$是$f_n(x)$在$(-n,+\infty)$上满足$F_n(1)=0$的原函数，则$F_n(x)$是$F_{n+1}(x)$在$(-n,+\infty)$上的限制，$n=1,2,\cdots$. 令

$$F(x)=F_n(x),\quad x>-n,$$

则不难验证这样定义$(-\infty,+\infty)$上的函数$F(x)$是合理的，且$F(x)$是$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的一个原函数. $\square$

思考 设$f(x)$是$[0,2]$上的函数，对任意正整数n, 令$f_n(x)$是$f(x)$在$\left[\frac{1}{n},2\right]$上的限制. 对任意正整数$n$, $f_n(x)$在$\left[\frac{1}{n},2\right]$上有原函数. 是否$f(x)$在$[0,2]$上一定有原函数？

四、"函数$f(x)g(x)$存在原函数"的一些充分条件

问题 2 函数$f(x)$和$g(x)$都在区间I上有原函数，是否$f(x)g(x)$在区间I上必有原函数？

答 否. 下面的例子取自周民强《数学分析》（第二册）. 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin(x^{-3}), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad G(x)=\begin{cases}x^2\cos(x^{-3}), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

$$f(x)G'(x)=\begin{cases}2x^3\sin(x^{-3})\cos(x^{-3})+3\sin^2(x^{-3}), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$f'(x)G(x)=\begin{cases}2x^3\sin(x^{-3})\cos(x^{-3})-3\cos^2(x^{-3}), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

从而

$$\varphi(x)=f(x)G'(x)-f'(x)G(x)=\begin{cases}3, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

由达布定理知$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上没有原函数. 由$f(x)G'(x)+f'(x)G(x)$有原函数$f(x)G(x)$可见，要么$f(x)G'(x)$和$f'(x)G(x)$都有原函数，要么$f(x)G'(x)$和$f'(x)G(x)$都没有原函数. 结合$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上没有原函数知$f(x)G'(x)$和$f'(x)G(x)$都没有原函数. 记$g(x)=G'(x)$, 则$f(x)$和$g(x)$都在$(-\infty,+\infty)$上有原函数，但$f(x)g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上没有原函数. $\square$

由分部积分法可以得到下面的"函数$f(x)g(x)$存在原函数"的充分条件.

命题 2 设函数$f(x)$在区间I上有原函数，$g(x)$在区间I上连续可导，则$f(x)g(x)$在区间I上有原函数.

练习题 5 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义. 证明：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有原函数当且仅当$f(x)\sin x$和$f(x)\cos x$都在$(-\infty,+\infty)$上有原函数.

分析　“$\Rightarrow$”. 由$\sin x$和$\cos x$都在$(-\infty,+\infty)$上连续可导，根据命题2就得证了.

“$\Leftarrow$”. 注意到

$$f(x)=f(x)\sin x\cdot\sin x+f(x)\cos x\cdot\cos x,$$

由命题2和不定积分的线性性质就得证了. □

命题 3 若$f(x)$在区间I上有下界（或有上界）且有原函数，$g(x)$在区间I上连续，则$f(x)g(x)$在区间I上有原函数.

分析　先证明$f(x)$在区间I上恒大于0且有原函数的情形. 设$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数，则由$F'(x)=f(x)>0$知F在区间I有反函数，且F^{-1}在区间$F(I)$可导. 因为$h=g\circ F^{-1}:F(I)\to\mathbb{R}$是连续函数，所以$h$在区间$F(I)$上有原函数$H$. 令$\varphi=H\circ F:I\to\mathbb{R}$, 则对任意$x\in I$, 有

$$\varphi'(x)=H'(F(x))\cdot F'(x)=h(F(x))\cdot f(x)=(g\circ F^{-1}\circ F)(x)\cdot f(x)=f(x)g(x),$$

即$\varphi(x)$是$f(x)g(x)$在区间I上的一个原函数.

回到原问题，不妨设$f(x)$在区间I上有下界，于是存在常数C, 使得$f(x)+C$在区间I上恒大于0. 由上面的讨论知$[f(x)+C]g(x)$在区间I上有原函数$\Phi(x)$. 设$G(x)$是$g(x)$在区间I上的一个原函数，则$\Phi(x)-C\cdot G(x)$是$f(x)g(x)$在区间I上的一个原函数. □

由命题3可知：设$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，则$h(x)=\begin{cases} g(x)\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上有原函数.

学习了定积分理论之后，周民强《数学分析》（第二册）中给出了下面的充分条件.

命题 4 设$f(x)$在$[a,b]$上有原函数，$g(x)$在$[a,b]$上可导，且$g'(x)$在$[a,b]$可积，则$f(x)g(x)$在$[a,b]$上有原函数.

证　设$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，令

$$\Phi(x)=F(x)g(x)-\int_a^x F(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

下面验证$\Phi(x)$是$f(x)g(x)$在$[a,b]$上的一个原函数. 任取$x \in [a,b]$, 则对满足$h \neq 0$且$x+h \in [a,b]$的h, 注意到$g(x+h)-g(x)=\displaystyle\int_x^{x+h} g'(t)\mathrm{d}t$, 有

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} \\ = & \frac{F(x+h)g(x+h)-F(x)g(x)}{h} - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(t)g'(t)\mathrm{d}t \\ = & \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \cdot g(x+h) - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [F(t)-F(x)]g'(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

一方面，有

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \cdot g(x+h) = F'(x)g(x) = f(x)g(x).$$

另一方面，可以证明

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [F(t)-F(x)]g'(t)\mathrm{d}t = 0.$$

证明如下. 由$g'(x)$在$[a,b]$可积知$g'(x)$在$[a,b]$有界，于是存在$M>0$, 使得$|g'(x)| \leqslant M$, $x \in [a,b]$. 由$F(x)$在$[a,b]$上一致连续知，对任给的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$x,y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta$时，有$|F(x)-F(y)| < \varepsilon$. 因此，当$0 < |h| < \delta$时，就有

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} [F(t)-F(x)]g'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} |F(t)-F(x)| \cdot |g'(t)|\mathrm{d}t\right| < \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} \varepsilon \cdot M\mathrm{d}t\right| = M\varepsilon.$$

按极限定义即证.

合起来，就有

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} = f(x)g(x),$$

即$\Phi'(x) = f(x)g(x)$. 这说明$\Phi(x)$是$f(x)g(x)$在$[a,b]$上的一个原函数. □