集合与映射

数学分析I

第1讲

September 22, 2022

中学教材中集合的含义

一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫做集合（简称为集）.

给定的集合，它的元素必须是确定的. 也就是说，给定一个集合，那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了.

一个给定集合中的元素是互不相同的. 也就是说集合中的元素是不重复出现的.

只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是相等的.

中学教材中集合的含义

一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫做集合（简称为集）.

给定的集合，它的元素必须是确定的. 也就是说，给定一个集合，那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了.

一个给定集合中的元素是互不相同的. 也就是说集合中的元素是不重复出现的.

只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是相等的.

注意，这不是集合的定义，仅仅是对集合的一个描述.

集合论已有一百多年的历史

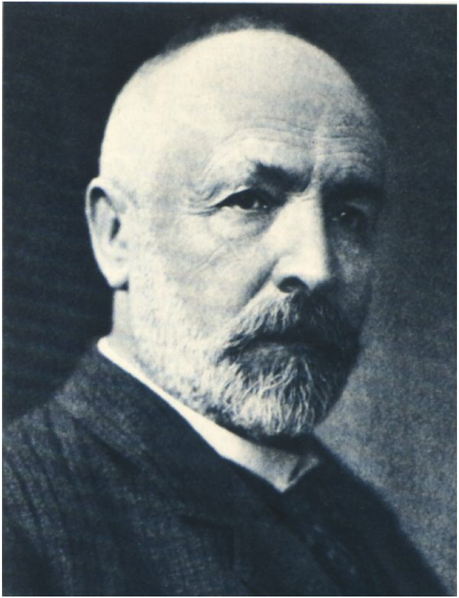
集合论是研究集合的数学理论，从康托尔创立集合论至今，集合论已经有一百多年的历史了，目前集合论已发展成为一个内容丰富的数学分支.

集合论是研究集合的数学理论，从康托尔创立集合论至今，集合论已经有一百多年的历史了，目前集合论已发展成为一个内容丰富的数学分支.

集合论是G. 康托尔于19世纪末创立的. 它的发展经历两个阶段：1908年以前称为朴素集合论；1908年以后又产生了所谓公理集合论. 后者不外乎是前者的严格处理；由于广泛使用数理逻辑的工具，它又逐渐成为数理逻辑的一个分支，并从60年代以来获得迅速的发展.

（取自《中国大百科全书》（数学卷）集合论词条）

集合论的奠基人— 康托尔



对无穷的认识

集合论里的中心难点是无穷集合这个概念本身. 从希腊时代以来，这样的集合很自然地引起数学家们与哲学家们的注意，而这种集合的本质以及看来是矛盾的性质，使得对这种集合的理解，没有任何进展.

对无穷的认识

集合论里的中心难点是无穷集合这个概念本身. 从希腊时代以来，这样的集合很自然地引起数学家们与哲学家们的注意，而这种集合的本质以及看来是矛盾的性质，使得对这种集合的理解，没有任何进展.

亚里士多德考虑过无穷集合，例如整数集合，但他不承认一个无穷的集合可以作为固定的整体而存在. 对他来说，集合只能是潜在地无穷的.

对无穷的认识

集合论里的中心难点是无穷集合这个概念本身. 从希腊时代以来，这样的集合很自然地引起数学家们与哲学家们的注意，而这种集合的本质以及看来是矛盾的性质，使得对这种集合的理解，没有任何进展.

亚里士多德考虑过无穷集合，例如整数集合，但他不承认一个无穷的集合可以作为固定的整体而存在. 对他来说，集合只能是潜在地无穷的.

高斯于1831年7月12日给Schumacher的信中说：“我反对把一个无穷量当作实体，这在数学中是从来不允许的. 无穷只是一种说话的方式，当人们确切地说到极限时，是指某些比值可以任意近地趋近它，而另一些则允许没有界限地增加.” 柯西，如他的前人一样，不承认无穷集合的存在，因为部分能够同整体构成一一对应这件事，在他看来是矛盾的.

（这里和后面关于集合论历史的一些介绍取自《古今数学思想》）

康托尔的研究

分析的严密化揭示人们有必要去理解实数集合的结构. 为了处理这个问题，康托尔早曾引进关于无穷点集的一些概念，特别是第一型的集合（第40章第6节）. 康托尔认为无穷集合的研究是如此重要，以致他就为此而承担起无穷集合的研究. 他期望这个研究能使他清楚地区分不同的不连续点的无穷集合.

康托尔的研究

分析的严密化揭示人们有必要去理解实数集合的结构. 为了处理这个问题，康托尔早曾引进关于无穷点集的一些概念，特别是第一型的集合（第40章第6节）. 康托尔认为无穷集合的研究是如此重要，以致他就为此而承担起无穷集合的研究. 他期望这个研究能使他清楚地区分不同的不连续点的无穷集合.

康托尔的集合理论分散在许多文章中，所以我们不具体指出他的每一个概念和定理在哪篇文章中. 他的这些文章是从1874年开始（分载在《数学年鉴》和《数学杂志》）两杂志上. 康托尔称集合为一些确定的、不同的东西的总体，这些东西人们能意识到，并且能判断一个给定的东西是否属于这个总体. 他说，那些认为只有潜无穷集合的人是错误的，并且驳斥了数学家们和哲学家们反对实无穷集合的早期论点.

康托尔（1845-1918）的生平

康托尔出生于俄国的一个丹麦-犹太血统的家庭，和他的父母一起迁到德国. 他的父亲力促他学工，因而Cantor在1863年带着这个目的进了柏林大学. 在那里他受了Weierstrass的影响而转到纯粹数学. 他在1869年成为Halle大学的讲师，1879年成为教授. 当他二十九岁时，他在《数学杂志》上发表了关于无穷集合理论的第一篇革命性文章. 虽然有些命题为老一些的数学家们指出是错的，但这篇文章总体上的创造性与光彩引起了注意. 他继续在集合论与超限数方面发表论文直到1897年.

康托尔（1845-1918）的生平

康托尔出生于俄国的一个丹麦-犹太血统的家庭，和他的父母一起迁到德国. 他的父亲力促他学工，因而Cantor在1863年带着这个目的进了柏林大学. 在那里他受了Weierstrass的影响而转到纯粹数学. 他在1869年成为Halle大学的讲师，1879年成为教授. 当他二十九岁时，他在《数学杂志》上发表了关于无穷集合理论的第一篇革命性文章. 虽然有些命题为老一些的数学家们指出是错的，但这篇文章总体上的创造性与光彩引起了注意. 他继续在集合论与超限数方面发表论文直到1897年.

康托尔的工作解决了不少经久未解决的问题，并且颠倒了许多前人的想法，自然很难就被立刻接受. 他关于超限序数与基数的思想，引起了权威Kronecker的敌视，粗暴地攻击他的思想达十年以上之久. 康托尔曾一度患精神崩溃，但他在1887年又恢复了工作. 虽然Kronecker死于1891年，但是他的攻击使数学家们对康托尔的工作抱着怀疑态度.

数学基础的曙光— 集合论

19世纪末，集合论出现了．人们感觉到，集合论有可能成为整个数学的基础．（这里和后面关于第三次数学危机的一些介绍取自顾沛老师的《数学文化》）

19世纪末，集合论出现了. 人们感觉到，集合论有可能成为整个数学的基础. （这里和后面关于第三次数学危机的一些介绍取自顾沛老师的《数学文化》）

数学家的想法和理由是：算术以整数、分数等为研究对象，微积分以变数、函数为研究对象，几何以点、线、面及其组成的图形为研究对象；另一方面，用集合论的语言，算术的研究对象可说成是“以整数、分数等组成的集合”，微积分的研究对象可说成是“以函数等组成的集合”，几何的研究对象可说成是“以点、线、面等组成的集合”，这样一来，都是以集合为研究对象了，集合成了更基本的概念.

数学基础的曙光— 集合论

19世纪末，集合论出现了. 人们感觉到，集合论有可能成为整个数学的基础. （这里和后面关于第三次数学危机的一些介绍取自顾沛老师的《数学文化》）

数学家的想法和理由是：算术以整数、分数等为研究对象，微积分以变数、函数为研究对象，几何以点、线、面及其组成的图形为研究对象；另一方面，用集合论的语言，算术的研究对象可说成是“以整数、分数等组成的集合”，微积分的研究对象可说成是“以函数等组成的集合”，几何的研究对象可说成是“以点、线、面等组成的集合”，这样一来，都是以集合为研究对象了，集合成了更基本的概念.

于是，集合论似乎给数学家带来了曙光：可能会一劳永逸地解除“数学基础”的危机. 尽管集合论自身的相容性尚未证明，但许多人认为这只是时间问题. 庞加莱甚至在1900年巴黎国际数学家大会上宣称：“现在我们可以说，完全的严格性已经达到了！”

数学家认为，全部数学似乎都可归结为非负整数了，或者说，全部数学都可以归结为算术了. 这样，如果能把算术建立在集合论的基础上，就相当于解决了整个“数学基础”的问题. 法国数学家、数理逻辑先驱弗雷格（G. Frege,1848－1925）就做了这样的工作. 他写了一本名叫《算术基础》的书. 弗雷格就从空集出发，仅仅用到集合及集合等价的概念，就把全部非负整数定义出来了.

罗素悖论引发危机

数学家认为，全部数学似乎都可归结为非负整数了，或者说，全部数学都可以归结为算术了. 这样，如果能把算术建立在集合论的基础上，就相当于解决了整个“数学基础”的问题. 法国数学家、数理逻辑先驱弗雷格（G. Frege,1848－1925）就做了这样的工作. 他写了一本名叫《算术基础》的书. 弗雷格就从空集出发，仅仅用到集合及集合等价的概念，就把全部非负整数定义出来了.

正当弗雷格即将出版他的《算术基础》一书的时候，出现了罗素的集合论悖论，形势突然发生变化. 这也是庞加莱宣布“完全严格的数学已经建立起来！”之后刚刚两年，即1902年. 罗素的集合论悖论表明，集合论中居然有逻辑上的矛盾！

数学家认为，全部数学似乎都可归结为非负整数了，或者说，全部数学都可以归结为算术了. 这样，如果能把算术建立在集合论的基础上，就相当于解决了整个“数学基础”的问题. 法国数学家、数理逻辑先驱弗雷格（G. Frege,1848－1925）就做了这样的工作. 他写了一本名叫《算术基础》的书. 弗雷格就从空集出发，仅仅用到集合及集合等价的概念，就把全部非负整数定义出来了.

正当弗雷格即将出版他的《算术基础》一书的时候，出现了罗素的集合论悖论，形势突然发生变化. 这也是庞加莱宣布“完全严格的数学已经建立起来！”之后刚刚两年，即1902年. 罗素的集合论悖论表明，集合论中居然有逻辑上的矛盾！

倾刻之间，算术的基础动摇了，整个数学的基础似乎也动摇了. 这一动摇所带来的震憾是空前的. 许多原先为集合论兴高采烈的数学家发出哀叹：我们的数学就是建立在这样的基础上的吗？罗素悖论引发的危机，就称为第三次数学危机.

正常集合与异常集合

在叙述罗素悖论之前，我们先注意到下边的事实：一个集合或者是它本身的成员，或者不是它本身的成员，两者必居其一．罗素把前者称为“异常集合”，把后者称为“正常集合”．

在叙述罗素悖论之前, 我们先注意到下边的事实：一个集合或者是它本身的成员, 或者不是它本身的成员，两者必居其一. 罗素把前者称为“异常集合”，把后者称为“正常集合”.

例如, 所有抽象概念的集合，本身还是抽象概念. 即，它是这一集合本身的成员，所以是“异常集合”. 但是，所有人的集合，不是人，即，它不是这一集合本身的成员，所以是“正常集合”.

正常集合与异常集合

在叙述罗素悖论之前, 我们先注意到下边的事实：一个集合或者是它本身的成员, 或者不是它本身的成员，两者必居其一. 罗素把前者称为“异常集合”，把后者称为“正常集合”.

例如, 所有抽象概念的集合，本身还是抽象概念. 即，它是这一集合本身的成员，所以是“异常集合”. 但是，所有人的集合，不是人，即，它不是这一集合本身的成员，所以是“正常集合”.

再例如，所有集合的集合，本身还是集合，即，它是这一集合本身的成员，所以是“异常集合”. 但是，所有星星的集合不是星星，即，它不是这一集合本身的成员，所以是“正常集合”.

罗素悖论

罗素悖论是：以M表示“是其本身成员的所有集合的集合”（即“所有异常集合的集合”），而以N表示“不是它本身成员的所有集合的集合”（即“所有正常集合的集合”），于是任一集合或者属于M，或者属于N，两者必居其一，且只居其一. 然后问：集合N是否是它本身的成员？（即问：集合N是否是异常集合？）

罗素悖论是：以M表示“是其本身成员的所有集合的集合”（即“所有异常集合的集合”），而以N表示“不是它本身成员的所有集合的集合”（即“所有正常集合的集合”），于是任一集合或者属于M，或者属于N，两者必居其一，且只居其一. 然后问：集合N是否是它本身的成员？（即问：集合N是否是异常集合？）

按M及N的定义，有

$$N \in N \Rightarrow N \in M \Rightarrow N \notin N,$$

以及

$$N \in M \Rightarrow N \notin N \Rightarrow N \in N.$$

悖论在于：无论哪一种情况，都得出矛盾.

理发师悖论

罗素悖论的通俗的解释，叫作“理发师悖论”：某村的一个理发师宣称，他给且只给村里自己不给自己刮脸的人刮脸. 问：理发师是否给自己刮脸？

理发师悖论

罗素悖论的通俗的解释，叫作“理发师悖论”：某村的一个理发师宣称，他给且只给村里自己不给自己刮脸的人刮脸. 问：理发师是否给自己刮脸？

如果他给自己刮脸，他就属于自己给自己刮脸的人，按宣称的原则，理发师不应该给他自己刮脸，这产生矛盾. 如果他不给自己刮脸，他就属于自己不给自己刮脸的人，按宣称的原则，理发师应该给他自己刮脸，这又产生矛盾. 于是，无论哪一种情况，都得出矛盾.

消除悖论的努力

康托尔的集合论有一条基本原则，被称为概括原则. 概括原则是说：把所有满足某种性质$P(x)$的对象x放在一起就构成一个集合，记作$\{x \,|\, P(x)\}$. 罗素悖论指出，概括原则看似自然，实际上在严格性上有问题.

消除悖论的努力

康托尔的集合论有一条基本原则，被称为概括原则. 概括原则是说：把所有满足某种性质$P(x)$的对象x放在一起就构成一个集合，记作$\{x|P(x)\}$. 罗素悖论指出，概括原则看似自然，实际上在严格性上有问题.

危机出现以后，包括罗素本人在内的许多数学家做了巨大的努力来消除悖论. 当时消除悖论的选择有两种，一种是抛弃集合论，再寻找新的理论基础；另一种是分析悖论产生的原因，改造集合论，探讨消除悖论的可能.

消除悖论的努力

康托尔的集合论有一条基本原则，被称为概括原则. 概括原则是说：把所有满足某种性质$P(x)$的对象x放在一起就构成一个集合，记作$\{x|P(x)\}$. 罗素悖论指出，概括原则看似自然，实际上在严格性上有问题.

危机出现以后，包括罗素本人在内的许多数学家做了巨大的努力来消除悖论. 当时消除悖论的选择有两种，一种是抛弃集合论，再寻找新的理论基础；另一种是分析悖论产生的原因，改造集合论，探讨消除悖论的可能.

人们选择了后一条路，希望在消除悖论的同时，尽量把原有理论中有价值的东西保留下来. 这种选择的理由是，原有的康托尔集合论虽然简明，但并不是建立在明晰的公理基础之上的，这就留下了解决问题的余地.

为了消除悖论，数学家们要将康托尔的“朴素集合论”加以公理化；并且规定构造集合的原则，例如，不允许出现“所有集合的集合”、“一切属于自身的集合”这样的集合.

为了消除悖论，数学家们要将康托尔的“朴素集合论”加以公理化；并且规定构造集合的原则，例如，不允许出现“所有集合的集合”、“一切属于自身的集合”这样的集合.

1908年，策梅洛（E.F.F. Zermelo, 1871－1953）提出了由7条公理组成的集合论体系，称为Z-系统. 1922年，弗兰克尔（A.A. Fraenkel，1891－1965）又加进一条公理，还把公理用符号逻辑表示出来，形成了集合论的ZF-系统. 再后来，还有改进的ZFC-系统.

集合论的公理化

为了消除悖论，数学家们要将康托尔的“朴素集合论”加以公理化；并且规定构造集合的原则，例如，不允许出现“所有集合的集合”、“一切属于自身的集合”这样的集合.

1908年，策梅洛（E.F.F. Zermelo，1871－1953）提出了由7条公理组成的集合论体系，称为Z-系统. 1922年，弗兰克尔（A.A. Fraenkel，1891－1965）又加进一条公理，还把公理用符号逻辑表示出来，形成了集合论的ZF-系统. 再后来，还有改进的ZFC-系统.

这样，大体完成了由朴素集合论到公理集合论的发展过程，悖论消除了.

在本课程中我们不使用集合的补集的记号, 作为替代, 我们引进差集的概念和记号.

差集的定义

设A, B是两个集合, 我们定义A与B的差集$A \setminus B$如下:

$$x \in A \setminus B \text{ 当且仅当} x \in A \text{ 但} x \notin B.$$

在本课程中我们不使用集合的补集的记号, 作为替代, 我们引进差集的概念和记号.

差集的定义

设A, B是两个集合, 我们定义A与B的差集$A \setminus B$如下:

$$x \in A \setminus B \text{ 当且仅当} x \in A \text{ 但} x \notin B.$$

注意到在上面的定义中并不要求B是A的子集, 例如, $\mathbb{Z} \setminus (-\infty, 0] = \mathbb{N}^*$. 当我们需要用到补集时, 我们也利用差集来写. 例如, $(0, 1)$在$\mathbb{R}$中的补集$(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$记为$\mathbb{R} \setminus (0, 1)$.

设Λ是一个非空集合，A_λ $(\lambda \in \Lambda)$都是集合，称Λ是一个指标集，称$\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$是一个集合族． 集合族$\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$的交与并分别记为$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$和$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$，定义如下．

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x | \text{对任意}\lambda \in \Lambda，\text{都有}x \in A_\lambda\},$$

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x | \text{存在}\lambda \in \Lambda，\text{使得}x \in A_\lambda\},$$

设Λ是一个非空集合，A_λ ($\lambda \in \Lambda$)都是集合，称Λ是一个指标集，称$\{A_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$是一个集合族. 集合族$\{A_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$的交与并分别记为$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$和$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, 定义如下.

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x|\text{对任意}\lambda \in \Lambda,\ \text{都有}x \in A_\lambda\},$$

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x|\text{存在}\lambda \in \Lambda,\ \text{使得}x \in A_\lambda\},$$

集合族$\{A_n|n \in \mathbb{N}^*\}$的交与并常记为$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$和$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$; 集合族$\{A_n|n \in \mathbb{Z}\}$的交与并也可记为$\bigcap\limits_{n=-\infty}^{+\infty} A_n$和$\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} A_n$.

任意多个集合的交与并的例子

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}[n,n+1)=\mathbb{R};$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)=[0,1],\quad \bigcup_{n=3}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]=(0,1);$$

$$\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(r-\delta,r+\delta)=\mathbb{R},\ \text{其中}\delta>0;$$

$$\bigcup_{x\in\mathbb{R}}(x-\delta_x,x+\delta_x)=\mathbb{R},\ \text{其中对每个}x\in\mathbb{R},\ \text{有}\delta_x>0.$$

任意多个集合的交与并的例子

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}[n,n+1)=\mathbb{R};$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)=[0,1],\quad \bigcup_{n=3}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]=(0,1);$$

$$\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(r-\delta,r+\delta)=\mathbb{R},\ \text{其中}\delta>0;$$

$$\bigcup_{x\in\mathbb{R}}(x-\delta_x,x+\delta_x)=\mathbb{R},\ \text{其中对每个}x\in\mathbb{R},\ \text{有}\delta_x>0.$$

思考题

设对每个$r\in\mathbb{Q}$, 有$\delta_r>0$, 问$\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}}(r-\delta_r,r+\delta_r)$一定等于$\mathbb{R}$吗?

设Λ是一个非空集合，A_λ $(\lambda \in \Lambda)$都是非空集合X的子集．将X的子集A在X中的补集$X \setminus A$记为A^c, 则有下面的德・摩根(De Morgan)律：

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c,$$

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.$$

设Λ是一个非空集合，A_λ $(\lambda \in \Lambda)$都是非空集合X的子集. 将X的子集A在X中的补集$X \setminus A$记为A^c, 则有下面的德·摩根(De Morgan)律：

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c,$$

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.$$

课外练习题

证明德·摩根律.

无限集的本质

无限集的本质就是：在它里面可以找到一个真子集，与全集一一对应. 也就是说，“部分可以等于整体”是无限集的充分必要条件，反映了无限集的本质. 这个“等于”，是在“能够建立一一对应关系”的意义上说的. 并且，凡是出现“部分可以等于整体”的集合，一定是无限集.

无限集的本质

无限集的本质就是：在它里面可以找到一个真子集，与全集一一对应. 也就是说，“部分可以等于整体”是无限集的充分必要条件，反映了无限集的本质. 这个“等于”，是在“能够建立一一对应关系”的意义上说的. 并且，凡是出现“部分可以等于整体”的集合，一定是无限集.

正整数集、整数集、有理数集、实数集、复数集等等，都是无限集. 欧几里得证明了“有无穷多个素数”，因此，所有素数组成的集合也是无限集.

可数无限集与不可数无限集

可以和正整数集建立起一一对应的无限集合就是可数无限集，不能和正整数集建立起一一对应的无限集合就是不可数无限集.

可以和正整数集建立起一一对应的无限集合就是可数无限集，不能和正整数集建立起一一对应的无限集合就是不可数无限集.

构造一个从整数集$\mathbb{Z}$到正整数集$\mathbb{N}^*$的一一对应.

可以和正整数集建立起一一对应的无限集合就是可数无限集，不能和正整数集建立起一一对应的无限集合就是不可数无限集.

构造一个从整数集$\mathbb{Z}$到正整数集$\mathbb{N}^*$的一一对应.

一种构造是令$f(n) = 2n$, 当整数$n > 0$; $f(n) = -2n + 1$, 当整数$n \leqslant 0$.

可以和正整数集建立起一一对应的无限集合就是可数无限集，不能和正整数集建立起一一对应的无限集合就是不可数无限集.

构造一个从整数集$\mathbb{Z}$到正整数集$\mathbb{N}^*$的一一对应.

一种构造是令$f(n) = 2n$, 当整数$n > 0$; $f(n) = -2n + 1$, 当整数$n \leqslant 0$.

因此，整数集是可数无限集. 可以证明：有理数集是可数无限集，实数集是不可数无限集. 由此可知无理数集是不可数无限集.

“集合的势”的概念是“有限集合中元素的个数”概念在任意集合中的推广. 根据“有一一对应的两个集合中元素个数相等”的原则，规定：凡是可以建立一一对应的两个集合，就认为这两个集合的“势”相等；凡是不能建立一一对应的两个集合，就认为这两个集合的“势”不相等. 由前面的讨论可以知道，正整数集、整数集和有理数集有相同的“势”.

集合的“势”（基数）

“集合的势”的概念是“有限集合中元素的个数”概念在任意集合中的推广. 根据“有一一对应的两个集合中元素个数相等”的原则，规定：凡是可以建立一一对应的两个集合，就认为这两个集合的“势”相等；凡是不能建立一一对应的两个集合，就认为这两个集合的“势”不相等. 由前面的讨论可以知道，正整数集、整数集和有理数集有相同的“势”.

如果集合A与集合B的“势”不相等，但集合A能够与集合B的某个真子集合建立一一对应，就认为集合A的“势”小于集合B的“势”. 对集合的“势”进一步研究还让我们知道，正整数集合是最“小”的无限集合；实数集合比正整数集“大”；实数集合上全体实函数的集合又比实数集合更“大”.

集合的“势”（基数）

“集合的势”的概念是“有限集合中元素的个数”概念在任意集合中的推广. 根据“有一一对应的两个集合中元素个数相等”的原则，规定：凡是可以建立一一对应的两个集合，就认为这两个集合的“势”相等；凡是不能建立一一对应的两个集合，就认为这两个集合的“势”不相等. 由前面的讨论可以知道，正整数集、整数集和有理数集有相同的“势”.

如果集合A与集合B的“势”不相等，但集合A能够与集合B的某个真子集合建立一一对应，就认为集合A的“势”小于集合B的“势”. 对集合的“势”进一步研究还让我们知道，正整数集合是最“小”的无限集合；实数集合比正整数集“大”；实数集合上全体实函数的集合又比实数集合更“大”.

一个有趣的结果是不存在最“大”的无限集合. 康托尔证明了：对于任何无限集合，该集合的幂集合（即所有子集的集合）都更“大”.

代数数与超越数

一个复数, 如果它是某个整系数代数方程的根, 则称之为代数数, 否则就称之为超越数.

代数数与超越数

一个复数, 如果它是某个整系数代数方程的根, 则称之为代数数, 否则就称之为超越数.

显然, 所有有理数和用有理数开方表示的无理数都是代数数.

一个复数, 如果它是某个整系数代数方程的根, 则称之为代数数, 否则就称之为超越数.

显然, 所有有理数和用有理数开方表示的无理数都是代数数.

然而, 指出一个数是超越数的事就没有这么简单. 1844年法国数学家刘维尔最早证明了超越数的存在性，他构造了下面的超越数：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0.110001000000000000000000010\cdots$$

1873年, 厄尔米特证明了自然对数的底数e是超越数. 随后在1882年, 林德曼证明了圆周率π的超越性.

存在超越数的存在性证明

要证明某个特定的数是超越数，一般来说难度较高. 康托尔建立集合论之后，给出了存在超越数的存在性证明，指出超越数不仅存在，实际上超越数比代数数多.

要证明某个特定的数是超越数，一般来说难度较高. 康托尔建立集合论之后，给出了存在超越数的存在性证明，指出超越数不仅存在，实际上超越数比代数数多.

证明思路

不难证明对于任意正整数n, n次整系数代数方程是可数多个，由此可知n次整系数代数方程的根组成的集合是可数无穷集. 进而可得全体代数数组成的集合是可数无穷集. 实数集是不可数无穷集，因此，一定存在实超越数.

存在超越数的存在性证明

要证明某个特定的数是超越数，一般来说难度较高. 康托尔建立集合论之后，给出了存在超越数的存在性证明，指出超越数不仅存在，实际上超越数比代数数多.

证明思路

不难证明对于任意正整数n, n次整系数代数方程是可数多个，由此可知n次整系数代数方程的根组成的集合是可数无穷集. 进而可得全体代数数组成的集合是可数无穷集. 实数集是不可数无穷集，因此，一定存在实超越数.

实代数数集是可数无穷集，实超越数集是不可数无穷集，因此，实超越数集比实代数数集“大”.

康托尔的对角线法

在证明“实数集是不可数无穷集”时，康托尔使用了对角线法.

在证明“实数集是不可数无穷集”时，康托尔使用了对角线法.

从本质上来说，对角线法是去构造与一类对象都不同的一个对象，不同之处体现在对角线上. 在证明“幂集的基数大于原集合的基数”时，也是用的对角线法的思想.

康托尔的对角线法

在证明"实数集是不可数无穷集"时，康托尔使用了对角线法.

从本质上来说，对角线法是去构造与一类对象都不同的一个对象，不同之处体现在对角线上. 在证明"幂集的基数大于原集合的基数"时，也是用的对角线法的思想.

设A是一个集合，$U\subseteq A\times A$是A上的一个二元关系. 对任意$a\in A$, 令$U_a=\{b\in A\big|(a,b)\in U\}$. 设$D_U=\{a\in A\big|(a,a)\in U\}$, 则$A\setminus D_U$与所有的$U_a$都不同.

定义 1

设X和Y都是非空集合, 对任意$x \in X$, 按照确定的法则f, 都有唯一确定的$y \in Y$与它对应, 则该对应关系叫做从集合X到集合Y的一个映射. 从X到Y的映射常用以下两个记法:

$$f\colon X \to Y, \quad f\colon x \mapsto y$$

或

$$y = f(x), \quad x \in X.$$

集合X称为映射的定义域, X中的元x称为自变量, Y中的元$y = f(x)$称为因变量.

映射下的象

设$f: X \to Y$是一个映射，U是X的一个子集. 令$f(U) = \{f(x) | x \in U\}$, 称$f(U)$是$U$在映射$f$下的象. 特别地，集合$f(X)$是映射$f$的值域.

设$f:X\to Y$是一个映射，U是X的一个子集. 令$f(U)=\{f(x)|x\in U\}$，称$f(U)$是U在映射f下的象. 特别地，集合$f(X)$是映射f的值域.

设$f:X\to Y$是一个映射，A和B都是X的子集, 则$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$, $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$, $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$.

映射下的象

设$f : X \to Y$是一个映射，U是X的一个子集．令$f(U) = \{f(x) | x \in U\}$，称$f(U)$是$U$在映射$f$下的象．特别地，集合$f(X)$是映射$f$的值域．

设$f : X \to Y$是一个映射，A和B都是X的子集，则$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$，$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$，$f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$．

课外练习题

给出上面所述性质的证明，并分别给出$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$和$f(A) \setminus f(B) \neq f(A \setminus B)$的例子．

映射下的象

设$f: X \to Y$是一个映射，U是X的一个子集. 令$f(U) = \{f(x) | x \in U\}$，称$f(U)$是$U$在映射$f$下的象. 特别地，集合$f(X)$是映射$f$的值域.

设$f: X \to Y$是一个映射，A和B都是X的子集, 则$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.

课外练习题

给出上面所述性质的证明，并分别给出$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$和$f(A) \setminus f(B) \neq f(A \setminus B)$的例子.

思考题

分别给出$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$和$f(A) \setminus f(B) \neq f(A \setminus B)$的例子.

原象（逆象）

设$f: X \to Y$是一个映射，V是Y的一个子集. 令$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\}$, 称$f^{-1}(V)$是$V$的原象(也称逆象).

原象（逆象）

设$f: X \to Y$是一个映射，V是Y的一个子集. 令$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\}$, 称$f^{-1}(V)$是$V$的原象(也称逆象).

设$f: X \to Y$是一个映射，A和B都是Y的子集, 则$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

设$f: X \to Y$是一个映射，V是Y的一个子集. 令$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\}$, 称$f^{-1}(V)$是$V$的原象(也称逆象).

设$f: X \to Y$是一个映射，A和B都是Y的子集, 则$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

课外练习题

给出上面所述性质的证明.

设$f: X \to Y$是一个映射，V是Y的一个子集. 令$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\}$, 称$f^{-1}(V)$是$V$的原象(也称逆象).

设$f: X \to Y$是一个映射，A和B都是Y的子集, 则$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

课外练习题

给出上面所述性质的证明.

思考题

对于任意映射$f: X \to Y$，任意X的子集A和任意Y的子集B，总有$f(f^{-1}(B)) = B$和$f^{-1}(f(A)) = A$吗？

设函数$f(x)$在数集X上有定义. 如果对于X中的任意两个不同的数x_1, x_2, 都成立$f(x_1) \neq f(x_2)$, 我们称函数f在X上是一个**单射**.

单射

设函数$f(x)$在数集X上有定义. 如果对于X中的任意两个不同的数x_1, x_2, 都成立$f(x_1) \neq f(x_2)$, 我们称函数f在X上是一个单射.

例如，令$f(n) = n - (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, 那么函数f在$\mathbb{N}^*$上是一个单射. $g(x) = x^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$在$\mathbb{R}$上是一个单射当且仅当m是奇数.

设函数$f(x)$在数集X上有定义. 如果对于X中的任意两个不同的数x_1, x_2, 都成立$f(x_1) \neq f(x_2)$, 我们称函数f在X上是一个单射.

例如, 令$f(n) = n - (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, 那么函数f在$\mathbb{N}^*$上是一个单射. $g(x) = x^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$在$\mathbb{R}$上是一个单射当且仅当m是奇数.

课外练习题

对于映射$f: X \to Y$, 证明以下命题彼此等价.
(1) f是单射.
(2) 对任何X的子集A, 都有$f^{-1}(f(A)) = A$.
(3) 对任何X的子集A和B, 都有$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
(4) 对任何X的子集A和B, $A \cap B = \emptyset$, 都有$f(A) \cap f(B) = \emptyset$.
(5) 对任何X的子集A和B, $B \subseteq A$, 都有$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

满射

对于映射$f : X \to Y$, 如果$f(X) = Y$, 则称映射f是一个满射.

满射

对于映射$f : X \to Y$, 如果$f(X) = Y$, 则称映射f是一个满射.

对于映射$f : X \to Y$, 如果把它看作从X到$f(X)$的一个映射，那么这个从X到$f(X)$的映射是满射. 例如，$f(x) = \sin x$是从$\mathbb{R}$到$[-1, 1]$的满射.

满射

对于映射$f: X \to Y$, 如果$f(X) = Y$, 则称映射f是一个满射.

对于映射$f: X \to Y$, 如果把它看作从X到$f(X)$的一个映射，那么这个从X到$f(X)$的映射是满射. 例如，$f(x) = \sin x$是从$\mathbb{R}$到$[-1, 1]$的满射.

思考题

给出一个从$[0, 1]$到$\mathbb{R}$的满射的例子.

如果$f: X \to Y$既是单射，又是满射，则称映射f是一个双射，或者说，f是从X到Y的一个一一对应.

如果$f: X \to Y$既是单射，又是满射，则称映射f是一个双射，或者说，f是从X到Y的一个一一对应.

若映射$f: X \to Y$是一个双射, 则可以定义一个从Y到X的映射f^{-1}为: 对任意$y \in Y$,

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

称f^{-1}是f的逆映射. 显然, f也是f^{-1}的逆映射, 或者说, f和f^{-1}互为逆映射.

如果$f: X \to Y$既是单射，又是满射，则称映射f是一个双射，或者说，f是从X到Y的一个一一对应.

若映射$f: X \to Y$是一个双射, 则可以定义一个从Y到X的映射f^{-1}为: 对任意$y \in Y$,

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

称f^{-1}是f的逆映射. 显然, f也是f^{-1}的逆映射, 或者说, f和f^{-1}互为逆映射.

课外练习题

设映射$f: X \to Y$, $g: Y \to X$满足对任意$x \in X$, 都有$g(f(x)) = x$, 对任意$y \in Y$, 都有$f(g(y)) = y$, 则f和g互为逆映射.

设$f: X \to Y$和$g: U \to V$是两个映射，令$D = X \cap f^{-1}(U) = \{x \in X \big| f(x) \in U\}$, 当$D$非空时，对于每个$x \in D$, 我们可以按如下对应法则确定唯一的实数$v \in V$:

$$v = g(f(x)).$$

我们称这个对应关系是映射g和f的复合, 记为$g \circ f$, 它是从D到V的一个映射.

映射的复合

设$f\colon X \to Y$和$g\colon U \to V$是两个映射，令$D = X \cap f^{-1}(U) = \{x \in X \,|\, f(x) \in U\}$, 当$D$非空时，对于每个$x \in D$, 我们可以按如下对应法则确定唯一的实数$v \in V$:

$$v = g(f(x)).$$

我们称这个对应关系是映射g和f的复合, 记为$g \circ f$, 它是从D到V的一个映射.

课外练习题

若映射$f : X \to Y$和映射$g : Y \to Z$都是单射(满射，双射)，则$g \circ f : X \to Z$是单射(满射，双射).

映射的复合

设$f: X \to Y$和$g: U \to V$是两个映射，令$D = X \cap f^{-1}(U) = \{x \in X | f(x) \in U\}$, 当$D$非空时，对于每个$x \in D$, 我们可以按如下对应法则确定唯一的实数$v \in V$:

$$v = g(f(x)).$$

我们称这个对应关系是映射g和f的复合, 记为$g \circ f$, 它是从D到V的一个映射.

课外练习题

若映射$f : X \to Y$和映射$g : Y \to Z$都是单射(满射，双射)，则$g \circ f : X \to Z$是单射(满射，双射).

课外练习题

(1) 若映射$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$满足$g \circ f : X \to Z$是单射，则f是单射.
(2) 若映射$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$满足$g \circ f : X \to Z$是满射，则g是满射.