专稿

指数与对数函数*

——陈省身先生《微积分及其应用》之第二讲(2001.10.19)

编者按 本刊上两期(总第94,95期)刊出了白承铭同志"数学大师的风采——记陈省身先生讲授《微积分及其应用》"一文的最初部分:对这次系列演讲的简介,以及陈先生演讲的"第一讲"。应读者要求,本期继续刊出"第二讲",讲稿由白承铭、宋敏、云保奇、赵志根等同志记录整理,未经陈先生寓目。刊出时只个别作了文字性处理。

(Ⅰ)本课的计划和目的

还有几分钟,我想趁这个机会讲一讲我的计划和目的。我这个课的课时是8个小时,但微积分大得不得了,微积分的范围很广。不要说8个小时,就是80个小时也讲不完。所以我当然只能讲个大概,尤其是介绍整个的有一些意义的问题。至于详细的情形我没法去多讲。不详细的定义或者证明,我想你们回去看一看自己的书,大概在书里找得到。也有我讲的范围和内容是书中没有的。

我觉得应该提一提微积分整个的影响或者是在哪些方面向前发展。可以说,微积分向前发展大概有两个最重要的方面。一个是在几何的应用。微积分在微分几何的应用,最早是Gauss。Gauss也许不是最早的,应该还有别的人,如Euler,Monge等人。不过,我想Gauss是19世纪世界最伟大的数学家,数学在那时候,全世界也就数西欧了。因为这个原因,德国数学在19世纪是全世界最好的。那时,不但有Gauss,还有Gauss的影响及其学生。Gauss最要紧的学生就是Riemann。因为有Gauss和Riemann,德国的数学就领先,领先的意思就是大家跟着他的方向去发展。

在几何上应用的发展是很多的。当年Einstein曾说过物理现象就是几何现象,以此发展他的广义相对论。广义相对论然要用坐标,Einstein了解最初的坐标表示几何问题,希望坐标(x,y)有几何的意义。当一个物理学家觉得应该有几何的或物理的意义时,他做起来才比较合理。不过,Einstein慢慢了解这个做不到,因为空间呢,来得比较复杂,它允许任意坐标,允许坐标的任意选择,因此也允许坐标变换,这就是我们现在所叫的流形。流形的概念是空间概念的推广。本来用的是Euclid空间或者非欧空间等只有几个空间,现在推广的流形就整个推广了。推广了以后,整个的空间观念在物理上影响向前发展了。因此几何里头要描写物理现象就需要几何新的概念。除了流形之外,还有纤维丛的观念。在下面的课中,我想稍微跟大家讲一讲几何方面的发展。

微积分还有一个发展,最要紧的是复数。很奇怪的,普通的数目是实数,但在实数域上,$x^2+1=0$就没有解。在复数域上,我们不但使它有解,并且复数有非常巧妙的性质,有很多现象都被放在复数里头了。复数与实数一样,有运算的规律,你用这个规律之后,复数代表了很多现象。我们以后会看到在复数里头的这些内容。所以,数学要应用,我们这个课是应用数学,要学会应用。要应用的话,会发现复数很要紧。因此,复变函数论在19世纪的发展是数学里头最要紧的,是一个比其它方面的发展来得更要紧一些的发展。最后,我得留点时间讲讲在复数方面的应用。复数不只是使得对于任一个方程式有解,并且利用复数,很多数学问题来得简单。复变函数论比实变函数论简单多了。实变函数论有许多抽象的问题,其实与实际不大有关系,不过当时也需要罢了。

所以这是两个题目,我要在这个课程里头把它们想办法讲一点,使得大家能了解微积分在它们上的应用是最重要的两个方向。

* 收稿日期:2002-07-11

（Ⅱ）关于 Stokes 公式的补充

上次讲到了微积分的基本定理，有时候就写成这种形状：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mid_a^b \to L\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x), \tag{2.1}$$

即这两个式子相等。很惭愧地，当年我在南开思源堂念微积分，我自己就有一个问题，为什么这就是基本定理，始终不懂。很不幸地，你们大概现在也还有这个习惯，不敢问问题。我那时也不敢问问题，跟你们现在一样，始终不懂。过了很多年，才知道(2.1)的确是基本定理。这是因为(2.1)说明了微分与积分的关系。

这个式子的两端，一边是个定积分，是一个面积，右边是微分相反的运算，所以右边的积分是一个不定积分。换句话，是一个函数，它的微分是 $f(x)$。也就是说，它的左边是积分，右边是微分。那么这个基本定理就说明了微分与积分的基本关系。大致上说，微分是积分的一个反运算，就是要找一个函数，使得它作为已知函数的微分。

现在的问题是，到了高维怎么样？这个基本定理是一个变数的。现在假设多变数，会怎么样？这就是多变数的微积分。有一个 n 维的空间，n 维下来就有许多不同的维。多变数的微积分基本观念是个重积分，在平面上是一个二重积分，在高维的空间是多重积分。我上次讲了，积分有一个积分的区域，积分是在一个区域里求积分，然后还有一个算子，主要讨论积什么东西，这一个函数是什么东西。我上次讲这个算子是一个外微分，外微分就是 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 这些微分乘起来，不过这个乘法是反对称的。反对称妙极了，因为反对称之后，一个 $\mathrm{d}x$ 不能够存在两次，即 $(\mathrm{d}x)^2=0$。一个要紧的问题是什么叫 $\mathrm{d}x$，这个问题比较复杂，讲起来比较长。这个问题也就是什么是一个函数的微分。我们假定 $\mathrm{d}x$ 是确定的，有意义的。以 $\mathrm{d}x$ 为变数造一个多项式，这个多项式的乘法是反对称，这种反对称乘法的多项式叫外微分式，外微分式就是指积分的一个对象，在一个区域里积这个外微分。这也可以看作一种配偶(pair)，有一个区域，再有一个积分和，放在一起，积分有一个值，这个值是一个数，这两个是配合的结果。

有了这个多重积分的观念之后，多变数的微积分基本定理，就是所谓的 Stokes 定理。Stokes 定理是一个几何现象与一个分析现象联合的结果。在高维时候，例如在 n 维的空间，假使存在一个 k 维的区域，它可以是低维的任意区域。有这样一个 k 维区域，例如平面上一个二维区域，空间中一个曲面等，很明显，这个低维区域有一个边界。区域有边界的观念是代数拓扑一个基本观念，你要研究它的边界关系，一个深刻的研究就引到所谓(下)同调群(homolgy)。同调群是代数拓扑研究空间性质的最基本的一个观念。现在有一个 k 维区域 Δ，它的边界写成 $\partial\Delta$。另外有一个 $(k-1)$ 维外微分，外微分式子是 $k-1$ 次，微分以后为 k 次。所谓 Stokes 定理，就是说对于 ω 是一个 $k-1$ 维外微分式，它的外微分 $\mathrm{d}\omega$ 在 Δ 上积分等于把 ω 在 Δ 边界上求积分，即

$$\int_\Delta \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\Delta}\omega, \omega \text{ 是外微分式。} \tag{2.2}$$

这个就是所谓 Stokes 定理。这是多变数微积分的一个基本定理。在龚昇先生写的书中，也特别提出这个观点。这个基本定理的确包括我上面讲的那个基本定理作为特别情形。假使这个空间是 1 维的，在 1 维的情形，区域是线段，它的边界就是线段的两个端点，两个点。求 ω 在两端点的值(其中 ω 为那个不定积分)就是我在上面基本定理的公式的右边函数在 b 的值减去在 a 的值，就是在边界上 ω 的积分，而左边就是在这个线段的积分，就是从 a 到 b 的定积分。所以，不难看出来 Stokes 定理在直线(1 维)的情形就是微积分的基本定理。

那么 2 维的情形呢？2 维就是很有名的所谓 Green 定理：

$$\int (P_x - Q_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \tag{2.3}$$

2 维情形时，区域是 2 维的，它的边界是曲线。于是(2.3)就是平常的 Green 定理，你们都知道，都很熟悉。所以 Stokes 定理在平面上的特别情形就是 Green 定理。

Stokes 定理有不同的名字，看你用哪一本书。不过现在比较通行叫 Stokes 定理。那么还有另外的一个特别情形：在三维空间，假设有一个曲面，它是一个三维区域的边界，那么此时 Stokes 定理就写成

$$\int (P_x + Q_y + R_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y。\tag{2.4}$$

你们在学高等微积分已经碰到了，一个二次式在边界(曲面)上的重积分等于它的三次式在区域里头的三重积分。这是 Stokes 公式的另外一个情况。

整个的情况在高维都对。有一个基本性质，就是外微分 d 用两次一定等于 0。假使 ω 是一个外微分式，那么

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}(\omega)) = 0 \tag{2.5}$$

这个方程非常容易证明。对于 ω，外微分式显然是线性的，所以你只需要把 ω 当成一个单项来证明就行了，这是因为你每一项的 d^2 都等于 0。于是对于单项的情况，单项是一组 d 乘上一个函数。显然，只要证明一个函数用两次 d，它一定等于 0 就可以了。我底下算了一下，在一个 n 维的空间中，它的坐标是$(x_1,\cdots,x_n)$。有一个函数 f 是 x_i 的函数，d 一次的话，就是普通的偏微分，也就是 $\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$。再微分一次，得到二阶偏微分，再乘 $\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$。这个二阶偏微分 f_{ij}是对称的，这是因为求偏微分与次序无关。因此这个系数是对称的，而我们这两个 $\mathrm{d}x_i$，$\mathrm{d}x_j$ 的乘法是反对称的，显然两次微分之后就等于 0 了，即

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(f_i\mathrm{d}x_i) = f_{ij}\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i = 0 \tag{2.6}$$

这里，因为固定了 i 与 j，就得到 $\mathrm{d}f_{ij}-\mathrm{d}f_{ji}$，但是因为 f 是对于这个指标是对称的，所以就是 0 了。因此上面证明了对于函数的 $\mathrm{d}^2=0$，这就可以了。

Stokes 定理可以说区域与外微分是一个对偶，使得求边界跟算这个 d 这两个算子是 adjoint，是对偶的算子，这是个了不得的结果。因为求边界，是一个几何运算，其实求一个区域的边界是一个完全的几何运算，是整个的区域的一个性质。求外微分 d 是一个局部的分析的运算，是完全局部的，只与这一点的附近有关系，所以一个是整体的几何算子，一个是局部的分析算子，它们是对偶的。Stokes 定理说它们是对偶的，所以这是一个重要极了的定理。

我可以下面稍微讲得多一点。空间不一定是普通的 Euclid 空间，也许空间拿 x 做坐标为所谓的流形。假设空间是一个流形的话，也可以讨论它的外微分式，例如 k 次的外微分式。一个 k 次的外微分式加另外一个 k 次外微分式还是一个 k 次的外微分式，于是所有的 k 次的外微分式成为一个我们所谓的矢量空间(vector space)，在其中可以进行加减。现在我就讨论所有 d=0 的这种外微分式，即外微分为 0 的那些外微分式。在数学上，我们称这种外微分式是封闭(close)的。这些封闭的外微分式构成矢量空间，因为两个 close 外微分相加仍为封闭的。设

$$\Gamma^k = \{\omega \mid \omega 是 k 次外微分式\}, C^k = \{\omega \mid \omega \in \Gamma^k, \mathrm{d}\omega = 0\} \tag{2.7}$$

那么我取 ω，ω 是一个封闭的外微分式。现在我把 C^k 当成一个群，这个群有个子群，这个子群是什么呢？它就是所有的 $k-1$ 维的外微分式子用 d 来作用。因为 $\mathrm{d}^2=0$，所以它就一定是 close 的。因此在所有的封闭的 k 次外微分式构成的 C^k 中，所有 d 乘上一个 $k-1$ 次外微分式成为一个子群。于是整个群用子群一除，在群论里头说它是一个商群(quotient)。这个群有个名字叫 de Rham group：

$$H^k = C^k / d\Gamma^k \tag{2.8}$$

这在拓扑上非常重要。就是说，外微分式多得不得了，甚至于 close 的外微分式也多得不得了，而在你除 $d\beta$ 之后，在很多情形之下，就变成一个有限维的矢量空间。那么这个有限维空间的维数是这空间的一个重要的性质，通常叫做 Betti number，这是代数拓扑中最浅的一个基本观念，也就是我们讨论外微分式可以决定它的有些拓扑的不变式。

(Ⅲ)**指数和对数函数**

我现在讲另外一个问题。上次有人讲，对于跟这个课有些困难。我讲的这些题目不一定都有关系，你如果对某一个题目有困难的话，就听我讲一个别的题目，所以不一定受多少影响。现在我换个题目。微积分既然是研究函数的性质，用微积分来表示它的性质，那么函数是多得不得了的。函数有种种的性质，而有一些函数，比较简单，因此也比较重要，并且许多应用上总碰到。

有两个特别重要的函数是指数函数(exponetial function)与对数函数(logarithm function)。这两个函数有什么性质呢？这是非常重要的函数，我们都晓得头一个的微分式。而 x^{n+1} 的微分是等于 $(n+1)x^n$。因此 x^n 的积分是等于 $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，这里假设 $n+1\neq0$，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{n+1} = (n+1)x^n \to \int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, n+1 \neq 0 \tag{2.9}$$

如果 n 不等于 -1，普通人到这个时候就结束了。因为你知道这个公式是什么时候成立，这个公式在 $n=-1$ 时不对，这就够了。这是很自然的。不过，如果这时候要停止的话，你就没有用到函数积分的重要的定理，因为 $n=-1$ 时，这个积分才有意思！所以，假设 $n=-1$，我就取对 $\mathrm{d}x/x$ 的积分。因为我不取 $x=0$，所以我这个积分假定它从 1 积到 x，这个积分是要紧极了，有意义极了。这个积分，叫它 $\log x$：

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log x, \tag{2.10}$$

这就是对数函数。下面我讨论对数函数的最重要的性质。假使我把 x 乘常数 a 对 $\log ax$ 求微分。由于 $\log x$ 的微分等于 $1/x$，于是 $\log ax$ 也是等于 $1/x$，所以这两个函数差一个常数 C：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(ax) = \frac{1}{ax}a = \frac{1}{x} \Rightarrow \log ax = \log x + C. \tag{2.11}$$

假使我将 $x=1$ 代入(2.11)，此时 $\log 1=0$，这是因为积分是从 1 到 x 所以从 1 到 1 积分当然是 0。于是我就证到常数 C 就是 $\log a$，因此就得到 log 这个函数的基本性质：log 函数用到 ax 的话等于 $\log x+\log a$：

$$\log(ax) = \log a + \log x \tag{2.12}$$

换句话说，对数是使得乘法变为加法，这是从前用对数表计算的一个基本性质。现在因为有计算机了，大概不大用了。不过 log 这个函数非常要紧，因为用到了我们这个基本的性质(2.12)。

那么由这个对数的函数立刻就引进指数的函数，指数函数是对数函数的反函数。假使 $y=\log x$ 的话，就按定义，$x=e^y$，即

$$y = \log x \leftrightarrow x = e^y \tag{2.13}$$

因此它们互相是相反的函数，e^y 是个指数函数，其与 $\log x$ 一起有加法与乘法关系的公式：$\log x$ 把乘法变为加法，指数函数也就把加法变为乘法了。一个把乘法变为加法，一个倒了过来，它就把加法变为乘法，这是一个简单的公式：

$$e^{x+y} = e^x e^y \tag{2.14}$$

我这里有个证明：

$$e^{x+y} = e^{\log u+\log v} = e^{\log uv} = uv, u = e^x, v = e^y \tag{2.15}$$

这些都是很容易的计算。我现在要证明指数函数它的微分就是它自己，即 e^y 对 y 求微分就等于 e^y. 这个证明为

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}(\exp y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x = \exp y, \tag{2.16}$$

这里把指数函数写成 $\exp y$，当然也可写成 e^y. 这时假定所有的数都是正的，所以没有什么 log 存在与否的问题。于是，指数函数的微分就是它自己，上面就给出了一个证明。大家也许记得，两个函数的图是这个样子，一个是 log 在 x 的区域中在 $x=0$ 的附近越来越小起来，趋于负无穷。对数函数也是一个增长的函数(increasing function)，不过它增长得非常慢。指数函数就增长得很快，它永远是正的。这是我画的两个简单的图(graph)(略)，我想你们在任何微积分的书上都看到过这两个函数的图。

指数函数与对数函数是统一的函数，一个是另外一个的反函数，这个性质是非常要紧的，有奇妙的性质。第一，指数函数的微分是它自己，因此，它有一个很简单的无穷级数，这个无穷极数是用 Taylor 公式展开的。我把 Taylor 公式写一下：

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + R_n, \tag{2.17}$$

$$R_n = \int_a^b f^{(n)}(t)\,\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t. \tag{2.18}$$

我想这些你们都念过了。这个 Taylor 公式把任意的函数展成一个无穷级数，a 是一点，b 是另外一点，那么它可以展成$(b-a)$的一个多项式，后面有一个余项，这个余项是由积分(2.18)给出。Taylor 公式在一个余项的时候就是这个所谓中值定理(Mean Valne Theorem). Tayloy 公式就是中值定理的高次的一个推广。由 Taylor 公式，现在我们这个指数函数简单得不得了，因为微分下去都是它自己，所以有一个无穷级数，很简单，我写为

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \tag{2.19}$$

所以这个指数函数有一个很简单的展开，它有一个重要的性质，你这个数目当然是正数，至少是实数，我想有的时候你用一下复数的话，有很巧妙的性质！

同样的，我们知道 $\sin x$ 与 $\cos x$ 有另外这两个展开：

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots; \tag{2.20}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots; \tag{2.21}$$

你会发现，假使对 e^x，将 x 改为 ix，其中 $i^2=-1$。那么 e^{ix}就有个式子：

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \tag{2.22}$$

我想很容易由(2.19)—(2.21)看出来有这样的公式。允许变数取复数的值，那么假使你用这个公式的话，取 $x=\pi$，于是 $e^{i\pi}=-1$。你们都知道这个公式。不过这是个很有意思的式子。因为这里头有几个常数。大家注意的一个是 π，另外一个就是 e。

e 是因为 Euler。Euler 在 18 世纪的那个时候，时跟现在不太一样，那时世界就是西欧。世界有科学的发展，就是在西欧。大家承认有一个最伟大的数学家，Euler 是那时被承认的最伟大的数学家。所以有人做了国王之后，在他的朝廷里愿意有个伟大的数学家，于是 Euler 就被请到圣彼得堡。他就写了很多书。这个 Euler 是很有意思的，大概写的文章是没有人超过的。他写了几百本。他有

好多小孩，所以他是抱着小孩子，孩子坐在他腿上，做他的数学。我跟他曾经发生一个关系，就是我们这个南开图书馆要不要他的全集。他的全集要几千块美金，几百本，很抱歉的，后来我决定不买了，太贵了并且恐怕没有人看了，文章都是拉丁文的，结果我们图书馆没有 Euler 的全集，我们有很多其它人的全集，不过现在看来问题是有些文字的问题。比方说，你们如果有功夫的话，可以看看高斯的全集。Gauss 刚才我说是 19 世纪最伟大的数学家，大家都知道他的数学能力。所以说呢，如果人家过节请他，带着他一起去过节，那么过节时就问他小的几何问题，Gauss 当然就能解。那么 Gauss 的小的几何问题的解在他的论文集里，这是很有意思的。这些问题完全是初等几何的，有的就一页。做做他的小的几何定理，他的小定理都很有意思，我们可以偷他的来写一篇文章。很不幸的是他的文章不是拉丁文，就是德文，至少是德文。

Euler 写了很多东西。这个公式是其中之一，它把几个主要的数连起来。e,i,π 有这样的关系：$e^{i\pi}=-1$。这是非常有意思的。我再告诉你们另外一个公式，不知你们有无兴趣。同样用这个展开的话，可以用到 arctgx。arctgx 的微分是 $\frac{1}{1+x^2}$，所以 arctg 这个函数有一个性质，就是一直求它们微分的话，式子会比较简单。因此由这些就得 π 的一个式子，即 π 可以写成一个无穷级数

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots \tag{2.23}$$

这是一个漂亮极了的一个公式。它把一个 1,3,5,7,9 这么连在一起，加在一起是 $\pi/4$! 所以，这是漂亮极了的一个公式！近代的一个有名的数论家 Selberg，他是挪威的数学家，有一次他写一个文章，讲他对数论发生兴趣就因为他看到这个公式。他恐怕现在是岁数大了一点，我想他总有 80 多岁，人还在。

(Ⅳ)在几何上应用

还有几分钟，下一次我要讲一点几何。微积分在几何上的应用。几何上的应用，当然是空间几何，最有意思的是曲面的几何——二维曲面的几何。二维曲面有种种样子，有种种的形式，有种种不同的性质。在这方面有 Gauss 的工作，就是

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2, x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v) \tag{2.24}$$

这个曲面通常用参数表示，在这个三维空间中，坐标是 (x,y,z)，于是把三维空间的坐标表示为两个变数的函数，所以 x,y,z 是两个变数 u,v 的函数，我们称之为参数(parameter)。于是这个空间里头有一个短距离 ds^2，就是 $dx^2+dy^2+dz^2$。把 x,y,z 表示 u,v 的函数之后，dx^2 就变为一个二次的微分式，其中系数，一般就叫做 E,F,G。

我们晓得几何开始的时候有 Euclid 几何，Euclid 几何很伟大！它是头一本整个的几何，它看出来要有一种公理得到数学的结论是很重要的，因为数学结论是由一个公理经过一个逻辑的推理得来。因此，这个是很具体很坚决的一个结论。而且它其实不只是几何，Euclid 这个《几何原本》是整个的数学。它看出来由公理用逻辑方法推出结论的重要性。对于这方面我觉得很惭愧的是，中国没有。我们这个课是应用数学，对于应用数学，中国太注重应用了，任何东西都一定要有应用，而对于这样的一个数学大家以为没有什么应用。其实最初你要是做了一点的话，应用会来的，并且应用更重要，更深刻。

对于这个二次微分式(2.23)，Gauss 的工作就是可以根据这个二次微分式，发展一个几何，这个几何就大得不得了。Euclid 几何可以它的微分式就是 du^2+dv^2，这是一个最简单的情形。另外一个情况之下就可以发展非欧几何。现在 E,F,G 是任意函数，再加上一些适当条件，(下转第 21 页)

将方程化为常系数线性方程从而求得通解 的 $\ln x$ 是 $1/x$ 的一个原函数，而方程(13) 是方程(1) 当 $G(x)=1/x, b=a_1-1, c=a_2$ 时的特例(见文[1]$p.11$，那里将 $G(x)$ 误排为 $G(x)=-1/x$)，故令 t 为 $G(x)$ 的一个原函数 $\int G(x)\mathrm{d}x$，即作变换(11)，就有希望将方程(1)也化为常系数线性方程。作者就是通过这样的分析找到变换(11)从而得到解法三的。换句话说，可化欧拉方程(13)为常系数线性方程的自变量变换(14)是化方程(1)为常系数线性方程的变换(11)的特例。

我 们指出，本文所述的两种解法可用于求解几类 $n(\geqslant 3)$ 阶变系数线性微分方程，有兴趣的读者可查阅作者发表在《应用数学学报》上的文[2].

参考文献

[1]李鸿祥. 两类二阶变系数线性微分方程的求解．高等数学研究，2002，5(2)，10—13

[2]李鸿祥. 关于几类高阶变系数线性方程的求解．应用数学学报，1983，6(1)，29—33

[3]同济大学数学教研室．高等数学(第三版)，下册，北京：高等教育出版社，1988，*PP*. 406，409

[4]楼世博、李鸿祥. 怎样寻求解法．数学通报，1966，4，41—43

[5]*B. B.* 史捷班诺夫. 微分方程教程，卜元震译. 北京：高等教育出版社，1956，*P*. 202

(上接第 10 页)这个几何的观念广大得不得了。就是说，在三维空间可以有切面，即切面上的几何，可以不管这个曲面在三维空间里的位置，只考虑在曲面上的这个几何，它包括 Euclid、非 Euclid 几何等在内，广得了不得。于是，这样的一个发现使得几何有很多，欧氏几何的观念也就推广到一般的情况。所以，我下次要讲点微积分在几何上地应用。我想今天也许差不多，讲完了，谢谢！

(上接第 13 页)中的函数 $\tilde{u}(x,y,z,t)=u(x,y,t)$。由于 $\tilde{u}$ 实际上和自变量 z 无关，因此满足三维波动方程

$$\tilde{u}_{tt}=a^2(\tilde{u}_{xx}+\tilde{u}_{yy}+\tilde{u}_{zz})$$

及初始条件

$$\tilde{u}|_{t=0}=\varphi(x,y),\tilde{u}_t|_{t=0}=\psi(x,y),$$

其中 $\varphi(x,y)$，$\psi(x,y)$也已视为空间(x,y,z)中的函数。反之，如果三维波动方程的柯西问题的解 $\tilde{u}(x,y,z,t)$是一个与自变量 z 无关的函数，则它所满足的方程和初始条件就化为二维波动方程的柯西问题。所以，如果我们能解出三维波动方程的柯西问题，并能证明这问题的解 $\tilde{u}(x,y,z,t)$是与 z 无关的函数，那末它就是二维波动方程的柯西问题的解。这种利用高维波动方程柯西问题的解得出低维波动方程柯西问题的方法称为**降维法**。

利用降维法就进一步建立了高维波动方程柯西问题与低维波动方程柯西问题之联系。除了在教材中用降维法推导二维波动方程柯西问题求解公式外，还在习题中让学生由二维波动方程柯西问题的泊松公式推出一维波动方程的达朗贝尔公式，这对于学生融会贯通地理解这一段内容与加强记忆有很大的好处。

参考文献

[1]　Fritz, John, Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations, Interscience, Publishers, 1955.

[2]　谷超豪、李大潜、陈恕行、郑宋穆、谭永基．数学物理方程．北京：高等教育出版社，第一版，1979 年，第二版即将出版。