数学文化

见面课（四）

联系方式

李军　数学科学学院**416**办公室

邮箱：lijun@nankai.edu.cn

鼓励师生课下的联系和交流。上周已经建立了课程的飞书群，教学通知会发到飞书群。大家在学习中遇到问题，就及时通过飞书联系我。

本课程的教材请自己去买，有用！

- 说明：做平台上“测验题”和参与“讨论题”讨论的情况，均会被平台记录，作为慕课成绩的组成部分。
- 千万不要错过平台上做题的截止时间！

即：每周日的晚上23点30分。

前3讲的测验题的截止时间都是10月16日（周日）的晚上23点30分。

平台上慕课内容的拓展

一个难题

我取定0到15中的一个整数，请你用回答为“是”或“否”的问题提问来确定这个数。我允许说一次谎（但也可以不说谎），你能用七个问题来确定这个数吗？

有兴趣的同学可以在课后思考和讨论一下这个问题。

一种解答

先用三个问题来问该数二进制表示的前三位，再问“你在前三个问题的回答中是否说谎了？”若回答“否”，则前三个问题的回答都是真话，很容易用三个问题来确定该数二进制的最后一位；若回答“是”，则前四个问题的回答中恰有一个是谎话，于是再用一个问题确定该数二进制的最后一位，用两个问题确定前四个问题的回答中哪个是谎话，从而就知道了该数。

中央电视台《大家》栏目：《吴文俊·我的不等式》片断

再如：欧拉公式

无论你用什么绳索织一片网，它的结点数(V)，网眼数(F)，边数(E)都必须适合公式:

$$V + F - E = 1$$

(这是二维情况, 三维情况是

$V + F - E = 2$,可以考虑一个正方体为例)

任何两个顶点之间都有棱相连的凸多面体只能是四面体

设一个凸多面体有n个顶点，任何两个顶点之间都有棱相连，则在欧拉公式中，$V=n$, $E=\frac{1}{2}n(n-1)$. 注意到每条棱恰属于两个面，每个面至少有三条棱，就有$F\leq \frac{1}{3}n(n-1)$. 由欧拉公式$V+F-E=2$得$n+\frac{1}{3}n(n-1)-\frac{1}{2}n(n-1)\geq 2$, 解得$3\leq n\leq 4$. 因此，只能$n=4$, 故该多面体是四面体。

用变中有不变的思想解决问题的例子

取定一个正奇数n. 首先在黑板上写下1, 2, …, 2n 共2n个数，然后每次随意选两个数a，b，擦去它们，在黑板上写下|a-b|，重复这种操作，2n-1次操作后黑板上只剩下一个数。

证明：剩下的这个数一定是奇数。

解决问题的关键是发现上面的操作中不变的是什么？

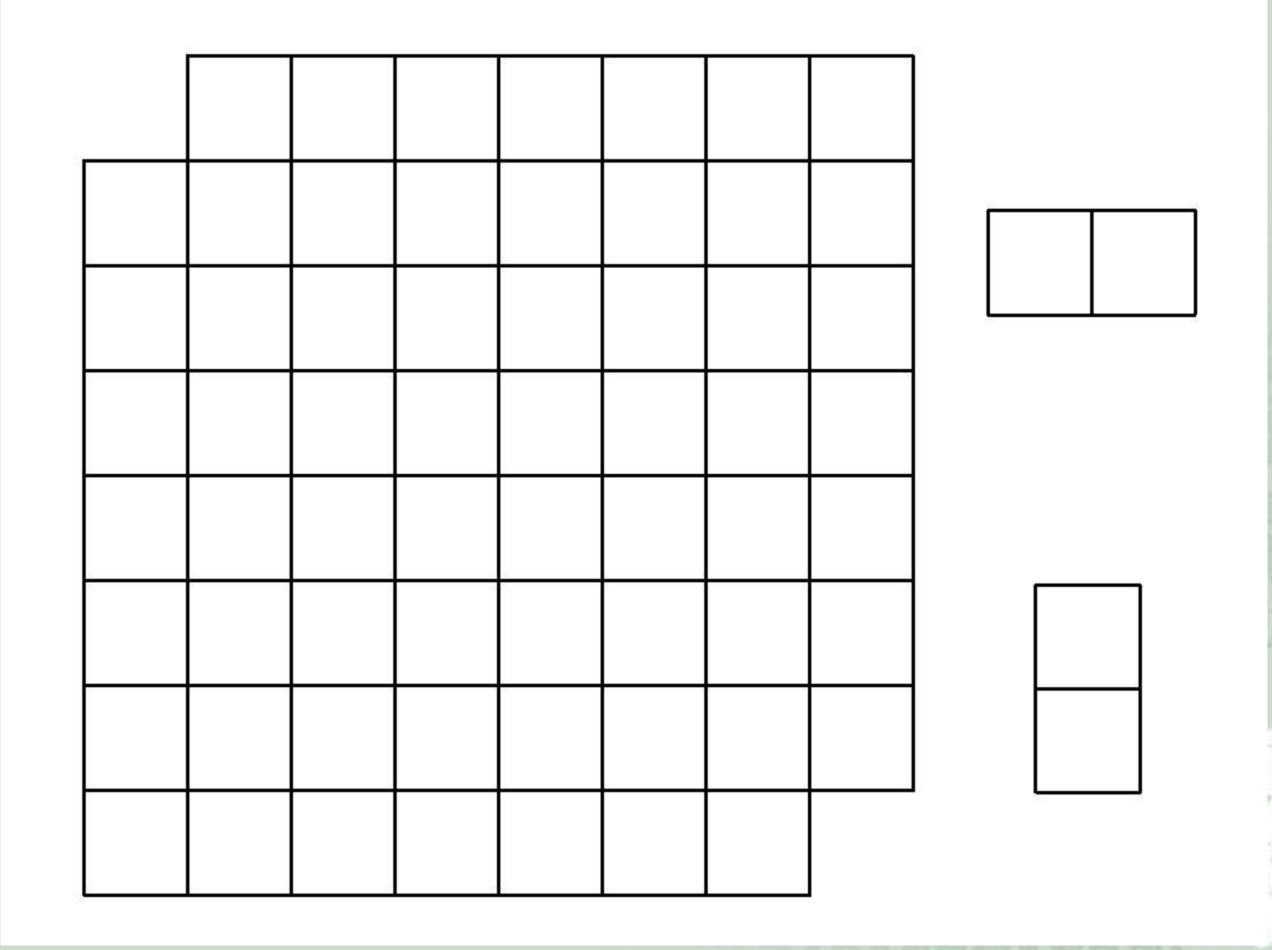
不变的量其值是多少？

任意取定一个大于1的正整数n，随意把它拆成两个正整数之和，在n的下面写下这两个数，同时记下这两个数的乘积。若这两个数中还有大于1的数，就重复上面的操作，将大于1的数随意拆成两个正整数之和，把拆成的两个数写在其下面，同时记下这两个数的乘积。直到分出n个1，不能再分为止。多试几次，会发现给定n之后，无论怎么分，记下的乘积之和是个不变的量。这个不变量的值是多少？

问题赏析：铺砖问题

证明8×8的正方形地面去掉左上角和右下角的两个1×1的小正方形后不能用31块1×2的长方形瓷砖铺盖。这里1×2的长方形瓷砖可以横着放，也可以竖着放，铺满即可。

铺砖问题

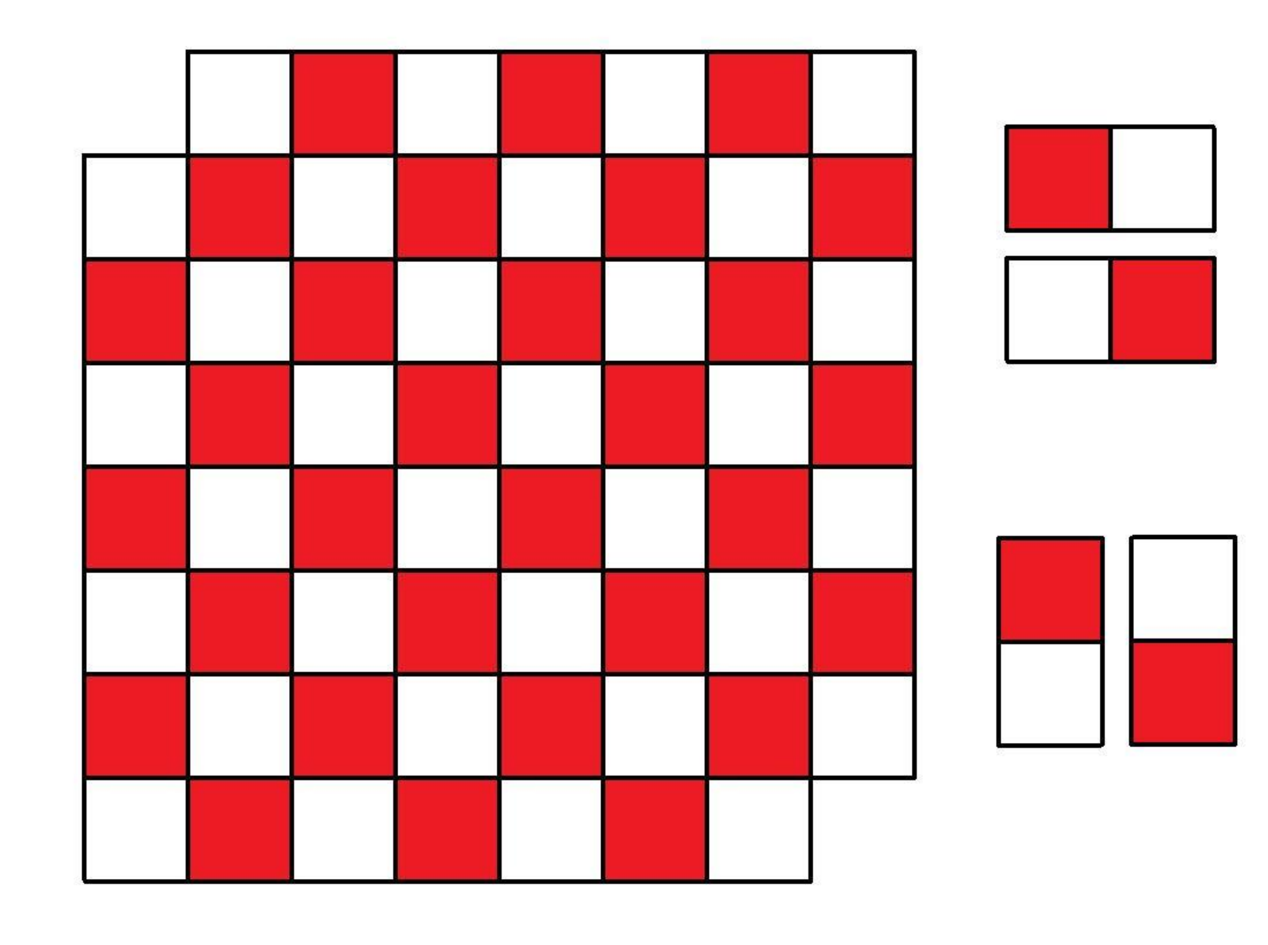


铺砖问题

考虑4×4的正方形地面去掉左上角和右下角的两个1×1的小正方形后能不能用1块1×2的长方形瓷砖铺盖。

由此猜测：8×8的正方形地面，相关结论也是“不能”。

问题的解决思路



变中有不变：若能铺满，则红格数 - 白格数 = 0.

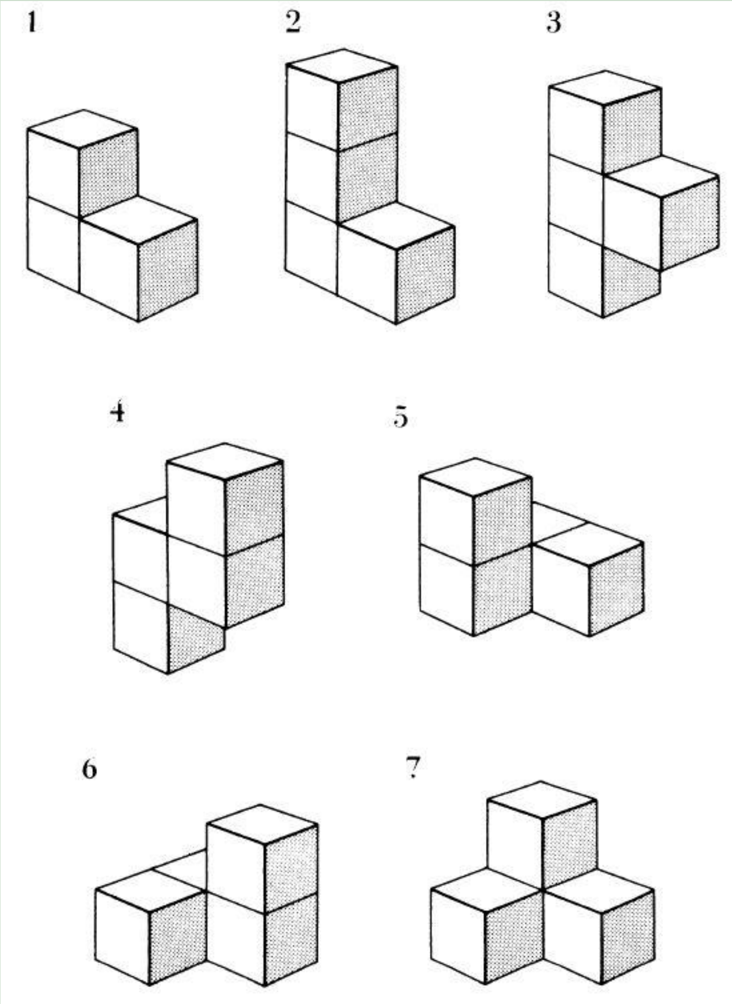
索玛立方块

下面的例子引自Martin Gardner的《The second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions》。

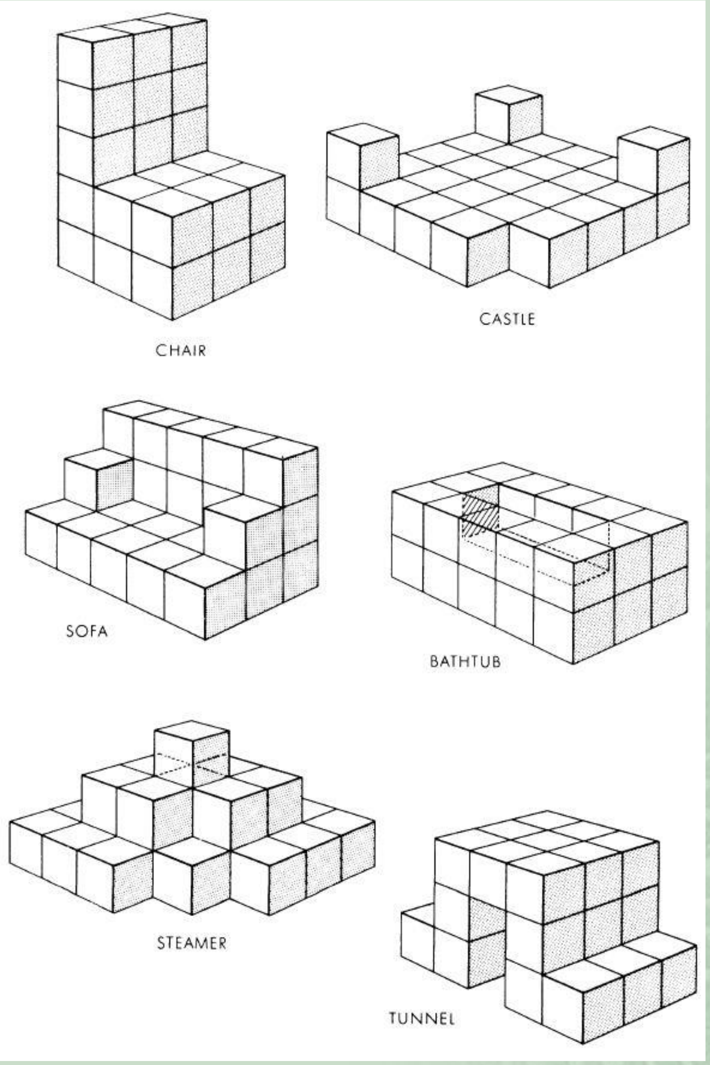
Piet Hein发明的索玛(Soma)立方块由后图所示的七个组件组成，这七个组件共有27个立方块。

七个索玛立方块可以拼成一个大立方体，这是所有索玛结构中最好拼的之一。

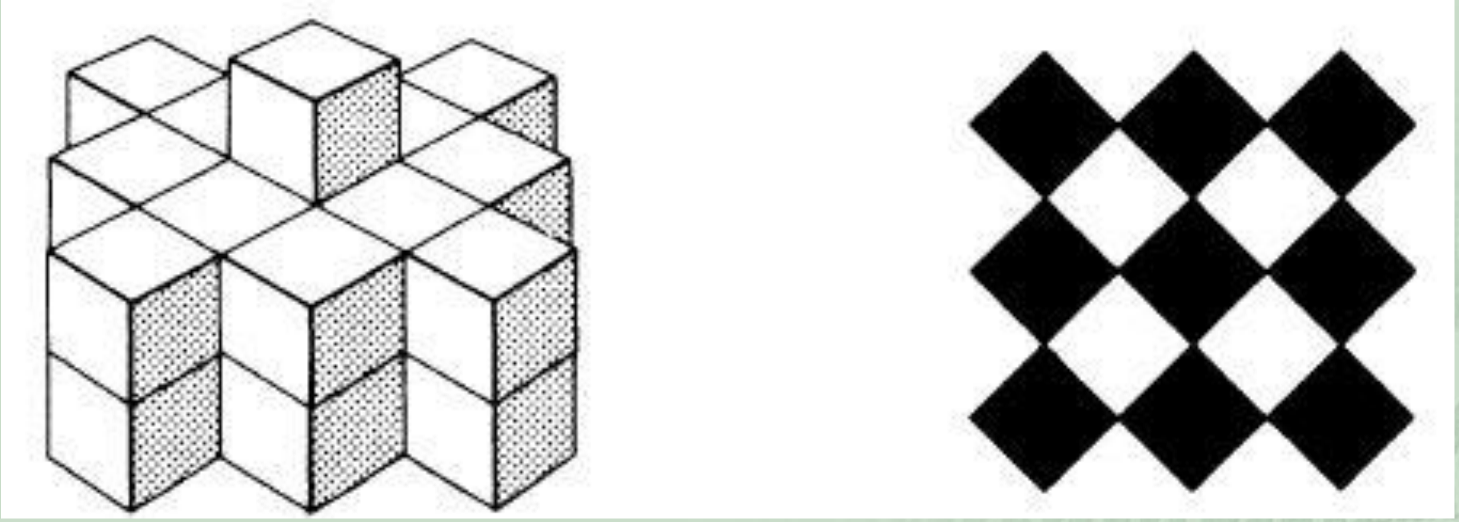
七个索玛立方块



索玛立方块拼成的图形



索玛立方块无法拼出的一种形状



索玛立方块无法拼出该形状的一个证明

如前面右图那样俯视，该形状一共有19个黑色立方块，8个白色立方块。

下面检查七个索玛立方块在前面右图的棋盘结构上黑色立方块的最大数量。

索玛立方块	1	2	3	4	5	6	7
最大黑色立方块数	2	3	3	2	3	3	2

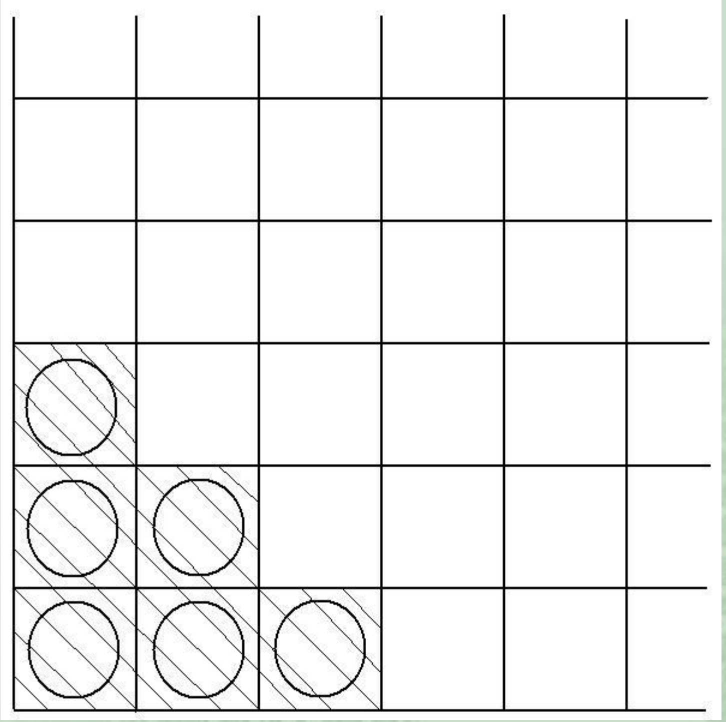
七个索玛立方块最多只能有18个黑色立方块，因此无法拼出该图形。

一道难题

如右图所示，第一象限的平面划分成棋盘格，其中左下角的六个阴影标出的格子中各放有一块石头，其余格子为空.

当一个放有石子的格子上方和右方紧邻的两个格子为空时，可以取走这块石头，同时在其上方和右方紧邻的两个格子中各放入一块石头.

问能在有限步上述操作之后，将所有石头都移出阴影标出的格子吗?



不可能性的证明

答案是不可能将六块石头都移出阴影标出的格子.

证明的想法是用不变量.

如右图将格子标上数,对于上述操作，石子所在格子中的数的总和保持不变.

…	…	…	…	…	…
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	…
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	…
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	…
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	…
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	…

不可能性的证明（续）

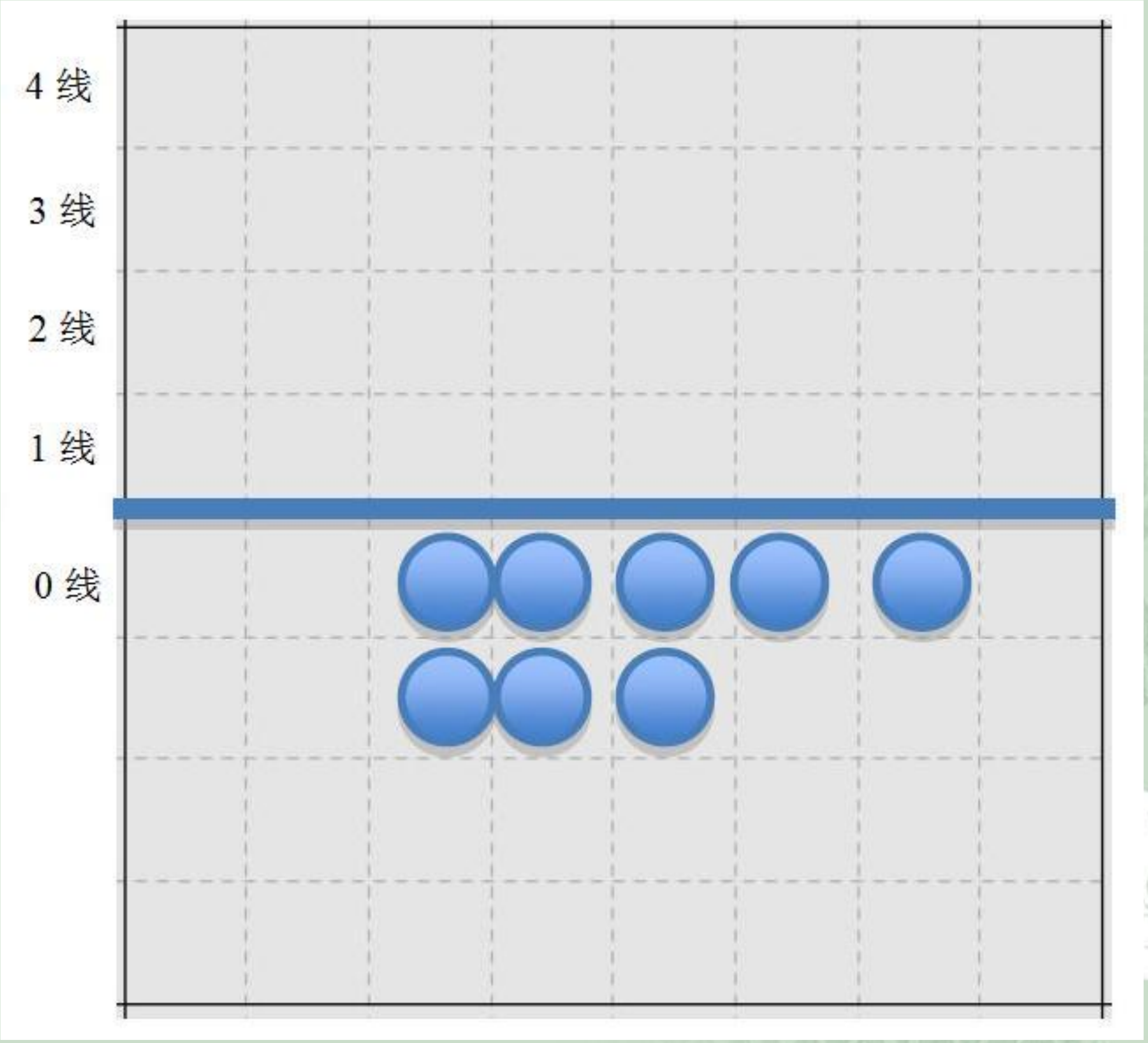
六个阴影的格子中的数的总和是$2\frac{3}{4}$，除此之外的所有格子中的数的总和(这是一个无穷和)是$1\frac{1}{4}$. 因为石子所在格子中的数的总和保持不变，所以不可能将所有石头都移出阴影标出的格子.

思考题：如果最初只在最左下角的格子中有一块石子，其余格子为空. 问能在有限步上述操作之后，使得六个阴影的格子中没有石子吗?

趣题推荐：Conway’s soldiers

有一个向四个方向都无限延伸的正方格棋盘，取定横行方格作为0线，在0线上面依次是1线，2线，3线，…。只允许在0线以及0线下面的横线的方格中放棋子。棋子放好后，每枚棋子可以沿横线或竖线跳过相邻的一个棋子到空格处，每跳一次被跳过的那个棋子立即取走。容易看出，放2枚棋子就可以跳到1线。可以证明：至少要放4枚棋子才能保证有棋子跳到2线，至少要放8枚棋子才能保证有棋子跳到3线，至少要放20枚棋子才能保证有棋子跳到4线。问至少要放多少枚棋子才能保证有棋子跳到5线？

8个棋子可以跳到3线



Conway’s soldiers

答案是无论初始怎么放，都不能使得有棋子跳到第5线。

解决问题的想法是适当地给每个方格赋值，考虑所有棋子所在方格的值的总和(可能是个无穷和),这个和数是单调不增的．借助这个变中有不变的规律就可以证明无论初始怎么放，都不能使得有棋子跳到第5线。对这个问题有兴趣的话，可以在网上寻找到相关材料，例如，搜索“Conway’s soldiers”.

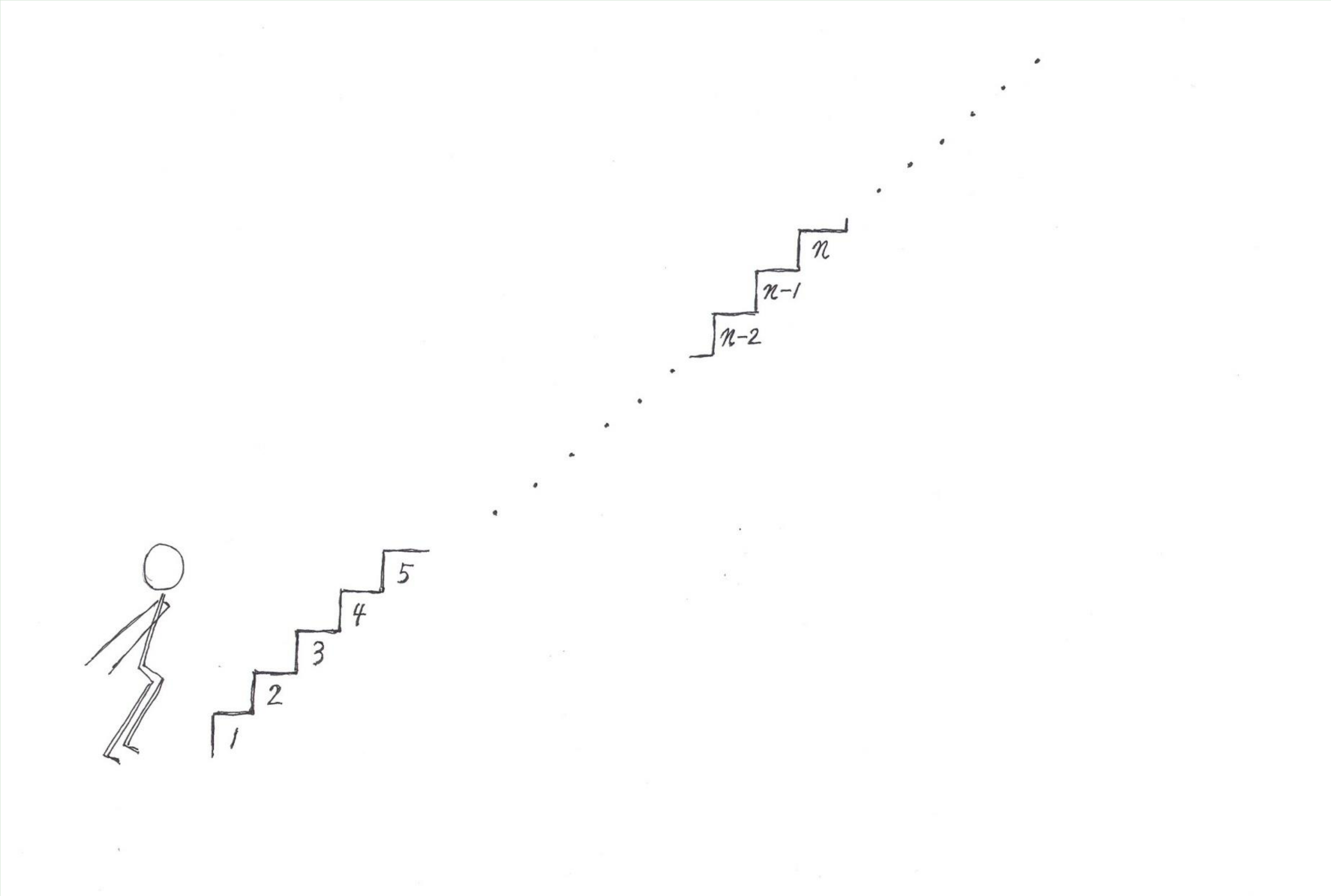
给每个方格赋值的图示

在右图中，从下到上的各行依次是第0行到第5行.

这里$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，从第5行开始往下，一个格子与x^0所在格子的曼哈顿距离为k，则该格子赋值为x^k.

x^2	x^1	x^0	x^1	x^2	x^3
x^3	x^2	x^1	x^2	x^3	x^4
x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5
x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6
x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7
x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8

跳格游戏



如图，一个人站在“梯子格”的起点处向上跳，从格外只能进入第1格，从格中，每次可向上跳一格或两格，问：可以用多少种方法，跳到第n格?

解：设跳到第n格的方法有 t_n 种。

由于他跳入第1格，只有一种方法；跳入第2格，必须先跳入第1格，所以也只有一种方法，从而 $t_1 = t_2 = 1$

而能一次跳入第n格的，只有第 $n-1$ 和第 $n-2$ 两格，因此，跳入第 n 格的方法数，是跳入第$n-1$格的方法数t_{n-1}，加上跳入第 $n-2$ 格的方法数 t_{n-2}之和。

即 $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$ 。综合得递推公式

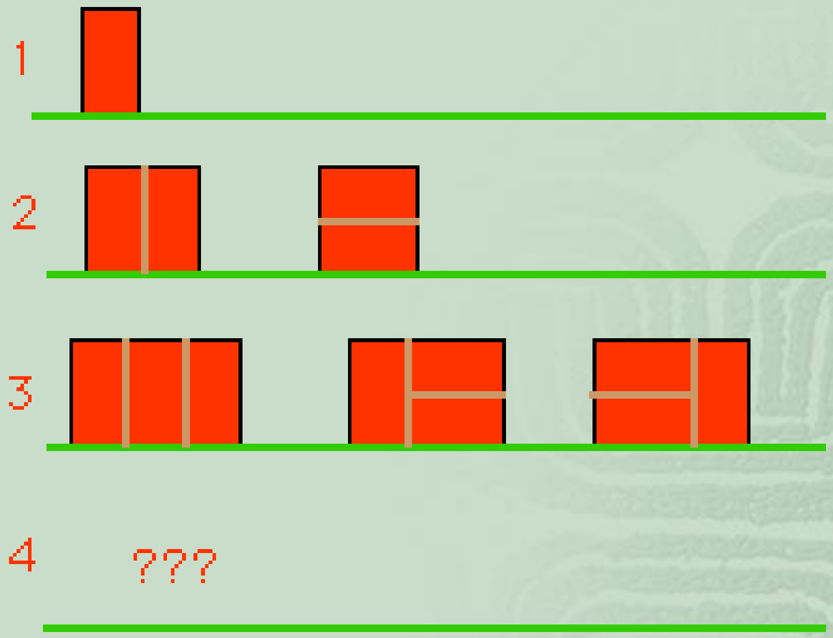
$$\begin{cases} t_1 = t_2 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \qquad (n = 3, 4, 5, \cdots) \end{cases}$$

容易算出，跳格数列$\{t_n\}$就是斐波那契数列

1，1，2，3，5，8，13，21，34，…

筑墙

以长×高为2×1的砖块为基本素材，组合成高度为2，长度为n的墙。请问：砖块的组合方式有多少种可能？



杨辉三角形与斐波那契数

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
1	7	……				

杨辉三角形与斐波那契数

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 ……

参考题：取石头（Fibonacci Nim）

有一堆石头共20块，两人轮流取，先取的一方第一次可任意取，但不可全取；以后双方每次所取的石头数不得超过对方刚取石头数目的2倍；而且，我们规定取得最后一块石头者获胜。试问：先取者较有利，还是后取者较有利？有没有必胜的策略？

(1) 设一共有n(>1)块石头，依次讨论了n等于2,3,4,5,6,7,8的情形后就可能会大胆猜测：n是斐波那契数时后取者胜，n不是斐波那契数时先取者胜。

(2) 小于20的最大的斐波那契数是13，但第一次取时不能取7块（否则乙将剩下的全取走）。看看n等于9,10,11,12的情形，请指出n等于20时第一次取几块？

(3) 本问题的一般取胜策略及其证明较复杂，有兴趣的同学可以课下思考。

参考题：威索夫(Wythoff)游戏

有两堆石头，两人轮流取，每次可以从一堆中取任意多块或者从两堆中取相同的块数；而且，我们规定取得最后一块石头者获胜。试问：哪些局面下后取者有获胜的策略？

参考题：威索夫(Wythoff)游戏

用“问题一般化、问题特殊化”的方法可以得到：（1，2），（3，5），（4，7），（6，10），（8，13），…等局面下，后取者有获胜的策略。这些数字的规律是什么？

参考题：威索夫(Wythoff)游戏

取 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（黄金比），则第n个后取者获胜的局面可以写成

$$\left(\left[\frac{n}{x}\right],\left[\frac{n}{x}\right]+n\right)\text{或}\left(\left[\frac{n}{x}\right],\left[\frac{n}{x^2}\right]\right),$$

其中[ ]是取整函数。

数论中的Hurwitz定理

对任意无理数x，存在无穷多个有理数$\frac{p}{q}$，使得

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q^2},$$

其中p是整数，q是正整数，p和q互素。

常数$\sqrt{5}$是最佳的。对任意$A>\sqrt{5}$，取$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（黄金比），则只有有限多个有理数$\frac{p}{q}$满足$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{Aq^2}$.

下次“见面课”

2022年10月20日

（周四）

本次“见面课”结束

谢谢！