泰勒公式

数学分析I

第20讲

November 21, 2022

高次多项式逼近

设函数$f(x)$在点x_0可导, 于是$f(x)$在点x_0可微，从而

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)),$$

即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)) \quad (x \to x_0).$$

这表明在点x_0附近, 可用一次多项式近似表达$f(x)$, 而误差是高于一阶的无穷小量.

从几何上看, 这就是用曲线$y = f(x)$在点x_0处的切线来近似曲线. 这个一次多项式在$x = x_0$处与$f(x)$ 有相同的函数值与一阶导数值. 无论是理论证明还是实际计算中, 许多情况下使用这种逼近是不够的, 这就需要寻求并建立具有更小误差的逼近. 自然想到用高次多项式去逼近.

定理 1

设函数$f(x)$满足

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\ \ (x\to x_0),\ (1)$$

则a_k $(k=0,1,\ldots,n)$是唯一决定的.

分析

(1)式两边令$x\to x_0$取极限，可知$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在且

$$a_0=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

由极限的唯一性知a_0是唯一决定的. 确定了a_0之后，(1)式可以改写为

$$\frac{f(x)-a_0}{x-x_0}=a_1+a_2(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^{n-1}+o((x-x_0)^{n-1})\ (x\to x_0).$$

分析

上式两边令$x \to x_0$取极限，可知$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-a_0}{x-x_0}$存在且

$$a_1 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-a_0}{x-x_0}.$$

由极限的唯一性知a_1是唯一决定的. 确定了a_0, a_1之后，(1)式可改写为

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)-a_0-a_1(x-x_0)}{(x-x_0)^2} \\ = \ & a_2 + a_3(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^{n-2} + o((x-x_0)^{n-2}) \ \ (x \to x_0). \end{aligned}$$

上式两边令$x \to x_0$取极限，可知$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-a_0-a_1(x-x_0)}{(x-x_0)^2}$存在且

$$a_2 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-a_0-a_1(x-x_0)}{(x-x_0)^2}.$$

分析

一直这样做下去，确定了$a_0, a_1, \cdots, a_k$之后，(1)式可改写为

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)-a_0-a_1(x-x_0)-\cdots-a_k(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{k+1}}\\ =\ & a_{k+1}+a_{k+2}(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^{n-k-1}+o((x-x_0)^{n-k-1}).\end{aligned}$$

令$x \to x_0$取极限，知$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-a_0-a_1(x-x_0)-\cdots-a_k(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{k+1}}$存在且

$$a_{k+1}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-a_0-a_1(x-x_0)-\cdots-a_k(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{k+1}}.$$

因此，$a_k\ (k=0,1,\ldots,n)$是唯一决定的.

定理1说明若$f(x)$在x_0邻近能用一个不超过n次的多项式在(1)式的意义下逼近，则这个多项式是唯一的. 那么$f(x)$满足什么条件才能使得(1)式成立呢？下面的定理2说明$f(x)$在x_0处n次可导是(1)式成立的充分条件. 这时，这个唯一的多项式就是$f(x)$在x_0处的n阶泰勒(Taylor)多项式.

设$f(x)$在x_0处n次可导且(1)式成立，则

$$\begin{aligned}
a_0 &= \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),\\
a_1 &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-a_0}{x-x_0} = f'(x_0),\\
a_2 &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-a_0-a_1(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2},
\end{aligned}$$

一般地，有

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ k=0,1,2,\cdots,n.$$

判断下面的命题是否成立.

设$f(x)$在x_0的某邻域中可导,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \quad (x \to x_0),$$

则$f(x)$在x_0处两次可导且$a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$, $a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2}$.

(A) 成立

(B) 不成立

泰勒多项式

设$f(x)$在x_0处n次可导，我们找一个不超过n次的多项式$P_n(x)$使得$P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)$, $k=0,1,2,\cdots,n$. 容易验证该多项式为:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

$P_n(x)$称为$f(x)$在x_0处的n阶泰勒多项式.

直接计算可知：

$$P_n^{(k)}(x_0)=\sum_{m=k}^{n}\frac{f^{(m)}(x_0)}{(m-k)!}(x-x_0)^{m-k}\Bigg|_{x=x_0}=f^{(k)}(x_0),$$

$k=0,1,2,\cdots,n.$

设$f(x)=P_n(x)+R_n(x-x_0)$，即

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x-x_0), \tag{2}$$

其中的$R_n(x-x_0)$称为余项, 它表示用n阶泰勒多项式逼近$f(x)$时的误差. 我们首先证明$f(x)$在x_0处n次可导时，有

$$R_n(x-x_0)=o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0), \tag{3}$$

即(1)式成立.

定理 2

设函数$f(x)$在点x_0处n次可导, 则当$x\to x_0$时，*(2)*式中的余项满足*(3)*式.

以后, 我们称(2)式为函数$f(x)$在点x_0的泰勒公式, 当其中的余项由(3)给出时, 称之为带有佩亚诺(Peano)余项的泰勒公式.

定理 3

设$f(x)$在$[a,b]$上n次连续可导且在(a,b)内$n+1$次可导，则对任何x，$x_0\in[a,b]$，都有*(2)*式成立，且

$$R_n(x-x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{4}$$

其中ξ介于x和x_0之间.

公式(4)所表示的$R_n(x-x_0)$称为拉格朗日余项，当(2)式中的$R_n(x-x_0)$由(4)式表示时，称为带拉格朗日余项的泰勒公式.

习题5(A)第22题

设$f(x)$在$[a,b]$上n次连续可导且在(a,b)内$n+1$次可导. 证明对任何x, $x_0 \in [a,b]$, 都有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x-x_0),$$

其中

$$R_n(x-x_0)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},$$

$0<\theta<1$.

本题中的$R_n(x-x_0)$称为柯西余项，相应的泰勒公式称为带柯西余项的泰勒公式.

佩亚诺余项与拉格朗日余项都简单易记，是泰勒公式使用最多的两种余项形式。佩亚诺余项的要求较低，只要求在x_0处n次可导，从而在x_0的某邻域中$n-1$次可导，而拉格朗日余项的要求较高，要求在x_0的某邻域中$n+1$次可导；佩亚诺余项的精度较低，只反映x_0邻近误差的无穷小阶数，一般用于函数极限，而拉格朗日余项可以精确估计误差.

特别地，当$x_0=0$时，定理2和定理3的结论，即两种余项的泰勒公式分别化为

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \\
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0<\theta<1.
\end{aligned}
$$

这两个公式称为马克劳林(Maclaurin)公式.

例 1

求下列各函数的马克劳林公式:

(i) $f(x)=\mathrm{e}^x$; (ii) $f(x)=\ln(1+x)$;

(iii) $f(x)=\sin x$; (iv) $f(x)=\cos x$;

(v) $f(x)=(1+x)^\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$.

在4.3节的例6中，对函数$f(x)=\arctan x$，得到

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{为偶数}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

因此，

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+o(x^{2n+2}),$$

例 2

求函数$e^{\sin x}$带皮亚诺余项的马克劳林公式(到x^3项).

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在0点可导，在$(0, a)$两次可导，则对任意$x \in (0, a)$, 存在$\xi \in (0, x)$, 使得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2.$$

(A) 成立

(B) 不成立

例 3

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}$.

例 4

计算$\sin 1^\circ$的近似值(误差小于10^{-7}).

例 5

设$f(x)$在$(a,+\infty)$上两次可导且对所有$x\in(a,+\infty)$, 有

$$|f(x)|\leqslant M_0,\quad |f''(x)|\leqslant M_2,$$

其中M_0和M_2都是常数. 求证对任意$x\in(a,+\infty)$, 有

$$|f'(x)|\leqslant 2M_0^{\frac{1}{2}}M_2^{\frac{1}{2}}.$$

在第六章中我们将引进确界的概念. 设M_0, M_1, M_2分别是$|f(x)|$, $|f'(x)|$, $|f''(x)|$在$(a,+\infty)$的上确界（即最小上界），则例5表明，当$M_0,M_2\in\mathbb{R}$时，有$M_1\leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$. 对于4.2节例9中的$f(x)$, 有$M_0=1$, $M_1=M_2=4$, 由此可见这里不等号右边的“2”是最佳常数.

习题5(A)第26题

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$两次可导且对所有$x\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$|f(x)|\leqslant M_0,\quad |f''(x)|\leqslant M_2,$$

其中M_0和M_2都是常数. 证明：对任意实数x, 有

$$|f'(x)|\leqslant\sqrt{2}M_0^{\frac{1}{2}}M_2^{\frac{1}{2}}.$$

上题的一种推广

设n是大于1的整数，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上n次可导，记$M_k=\sup\left\{|f^{(k)}(x)|\,\middle|\,x\in\mathbb{R}\right\}$, $k=0,1,\cdots,n$. 证明：若$f(x)$和$f^{(n)}(x)$都在$(-\infty,+\infty)$上有界，则有

$$M_k\leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{n}}M_n^{\frac{k}{n}},\quad k=1,2,\cdots,n-1.$$

设 f 是一定义在 R 上的有界实函数，并且有 n 阶导数．设对于 $k=0,1,\cdots,n$，

$$M_k=\sup|f^k(x)|\quad(x\in R).$$

1914 年，G. H. Hardy 和 J. E. Littlewood 开始研究对一般的 n，如何确定在不等式

(1) $$M_k^n\leqslant C_{n,k}^n M_0^{n-k}M_n^k$$

中常数 $C_{n,k}$ 的问题．

A. Kolmogoroff 在 [6]和[7]中给出了问题的完整解答，他证明了

$$C_{n,k}=K_{n-k}/K_n^{(n-k)/n},$$

其中

$$K_n=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}},\text{当 } n \text{ 是偶数时},$$

$$K_n=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^{n+1}},\text{当 } n \text{ 是奇数时}.$$