对Δy的分析

设函数$y = f(x)$在点x可导, 由4.1节的讨论知

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

其中$\alpha(\Delta x)$满足$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. 使用无穷小量的记号, 即得

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

上式表明, 在使$f(x)$可导的点x处, 函数的改变量Δy可以分成两项: 第一项是Δx的线性函数, 而导数$f'(x)$为其比例系数; 第二项是一个比Δx高阶的无穷小量. 当Δx充分小时, 可以将第一项即线性部分作为Δy的近似值, 这时误差是比Δx高阶的无穷小量.

微分的概念

定义 1

设函数$y = f(x)$在点x_0的某邻域有定义. 如果对应于自变量在点x_0的改变量Δx, 函数的改变量$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中A是一个与Δx无关的常数, 则称函数$y = f(x)$在点x_0可微, 并称上式右端第一项$A\Delta x$为$y = f(x)$在点x_0的微分, 记为$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}$或$\mathrm{d}f(x_0)$, 亦即有

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = A\Delta x.$$

注意, 对于每个固定的点x_0, 函数的微分是Δx的线性函数, 而常数A与x_0有关. 例如, 当$f(x)$在点x_0可导时, 由$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$得$A = f'(x_0)$. 微分体现的是"局部线性化"的思想.

对于一元函数来说，可微当且仅当可导

当$f(x)$在点x_0可导时，由$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$得$A = f'(x_0)$，因此若$f(x)$在点$x_0$可导, 则$f(x)$在点$x_0$可微. 事实上, 反之亦然.

定理 1

函数$y = f(x)$在点x_0可微的充分必要条件是$f(x)$在点x_0可导.

这个定理表明, 函数的可导性与可微性是一回事. 因此今后在表述函数的性质时, 对可导与可微将不再区分.

自变量x的微分$\mathrm{d}x$就是Δx

若$y=f(x)$在区间I处处可微，则有$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\Delta x$. 值得注意的是，这里$x$与$\Delta x$ 是两个独立变量. x是函数的自变量，Δx是在x处自变量的改变量. 因此，从函数的观点看，$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\Delta x$ 是x的函数，Δx是常数，从微分的观点看，$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\Delta x$ 是Δx的函数，x是常数.

约定自变量x的微分$\mathrm{d}x$就是Δx. 当$y=f(x)=x$时, $f'(x)=1$, 从而$\mathrm{d}y=\mathrm{d}x=1\cdot\Delta x=\Delta x$，由此可以看到这个约定的合理性. 所以

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x.$$

上式两端同除以$\mathrm{d}x$, 便得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$. 这就是我们有时把导数又称为微商并记为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的原因. 原来$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$表示导数, 是一个整体记号，现在分子与分母都具有独立的意义了.

由公式$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$可知求微分主要是求导数, 不难由求导的法则和公式得出计算微分的法则和公式，例如:

1. $\mathrm{d}[u(x) \pm v(x)] = \mathrm{d}u(x) \pm \mathrm{d}v(x)$;
2. $\mathrm{d}[u(x)v(x)] = v(x)\mathrm{d}u(x) + u(x)\mathrm{d}v(x)$;
3. $\mathrm{d}\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right] = \dfrac{v(x)\mathrm{d}u(x) - u(x)\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0$;
4. $\mathrm{d}f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$.

计算微分的公式与求导公式完全平行, 这里不再一一列出.

设$y=f(u)$, 当u是自变量时，有

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u;$$

当$u=\varphi(x)$是中间变量, x是自变量，则由复合函数的微分公式，有

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(\varphi(x))=f'(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x,$$

因为$\mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x$, 所以也有

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u.$$

无论u是自变量还是中间变量，都有$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$.

尽管公式在形式上完全一样, 但要注意u是自变量时，$\mathrm{d}u$表示自变量的微分， 就是Δu; 而u是中间变量时，$\mathrm{d}u$作为函数的微分，与Δu可能相差一个Δx的高阶无穷小量. 无论u是自变量还是中间变量, 公式$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$在形式上一样的性质称为一阶微分的形式不变性. 这使得我们在计算微分时不必顾及一个变量是自变量还是因变量.

判断下面的命题是否成立.

设$y = f(u)$, 其中$u = \varphi(x)$是中间变量, 这里f和φ都是可微函数，则有

$$\Delta y = f'(u)\mathrm{d}u + o(\Delta u) \quad (\Delta u \to 0).$$

(A) 成立

(B) 不成立

计算微分的例题

例 1

求函数$y = \mathrm{e}^{ax} \sin bx$的微分.

例 2

设u和v都是x的可微函数且$v \neq 0$, 求函数$y = \arctan \dfrac{u}{v}$的微分.

函数$f(x)$的微分$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$还是$x$的函数, 这里把$\mathrm{d}x$视为常数. 如果$\mathrm{d}y$仍然可微, 即$f'(x)$是可微的, 则$\mathrm{d}y$的微分就称为函数$y=f(x)$的二阶微分, 记为$\mathrm{d}^2y$. 于是有

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}(f'(x)\mathrm{d}x)=\mathrm{d}(f'(x))\mathrm{d}x=f''(x)\mathrm{d}x^2,$$

其中用$\mathrm{d}x^2$记$(\mathrm{d}x)^2$.

类似地可以定义三阶, 四阶以至n阶微分, 分别记为$\mathrm{d}^3y, \mathrm{d}^4y$和$\mathrm{d}^ny$且有

$$\mathrm{d}^ny=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n,$$

其中$\mathrm{d}x^n=(\mathrm{d}x)^n$.

计算高阶微分时，可以用微分的公式依次求$\mathrm{d}y$, d^2y, d^3y等等，也可以先算高阶导数，再由上式求得高阶微分.

例 3

求函数$y = x\sin x$的三阶微分.

设$y = 2x$, $x = \mathrm{e}^t$. 当x为自变量时, 有

$$\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}^2 y = 0.$$

当x为中间变量时, $y = 2\mathrm{e}^t$, 于是有

$$\mathrm{d}^2 y = 2\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t^2 = 2\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t)^2 = \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x^2.$$

由此可见二阶微分不具有形式不变性. 一般地，高阶微分不具有形式不变性.

下面我们分析二阶微分不具有形式不变性的原因. 设函数$y = f(x)$两次可微，由一阶微分的形式不变性，无论x是自变量还是中间变量，总有

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x.$$

于是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2y &= \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f'(x)\mathrm{d}x) = \mathrm{d}(f'(x))\mathrm{d}x + f'(x)\mathrm{d}(\mathrm{d}x) \\ &= f''(x)\mathrm{d}x^2 + f'(x)\mathrm{d}^2x. \end{aligned}$$

上式无论x是自变量还是中间变量都成立.

当x是自变量时，$\mathrm{d}^2x = 0$, 从而$\mathrm{d}^2y = f''(x)\mathrm{d}x^2$；但当$x$不是自变量时，$\mathrm{d}^2x$未必为0，从而$\mathrm{d}^2y = f''(x)\mathrm{d}x^2$未必成立. 因此，二阶微分不具有形式不变性.

定义 2

如果函数$f(x)$的n阶导数在区间I连续，则称$f(x)$在区间I上n次连续可导或n次连续可微. 记号：$f \in C^n(I)$, 这里$C^n(I)$是区间I上n次连续可导函数的全体组成的集合.

特别地，当$n = 1$时，就说$f(x)$在区间I连续可导或连续可微.

如果函数$f(x)$在区间I有任意阶的导数，则称$f(x)$在I无穷次可导或无穷次可微. 记号：$f \in C^\infty(I)$, 这里$C^\infty(I)$是区间I上无穷次可导函数的全体组成的集合.

例如，上一节例4中给出的函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$两次连续可导. 若将其中的幂指数5改为4，则不难证明所得的函数在$(-\infty, +\infty)$两次可导但不是两次连续可导.