第九章 定积分的应用

9.1 在几何计算中的应用

例 1 计算由圆的渐开线$x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t), (a > 0, 0 \le t \le 2\pi)$和连接点$A(a,0), B(a, -2\pi a)$的直线段$AB$ 所围成的平面图形的面积.

解 首先将该平面图形剖分为两部分.一部分是直角三角形OAB，其面积记为S_1,则$S_1 = \pi a^2$；另一部分是由弧段AB和线段OA, OB所围成的封闭图形，其面积记为S_2. 设圆的渐开线的极坐标方程为$r = r(\theta)$，则$S_2 = \frac{1}{2}\int_0^\beta r^2(\theta)d\theta$，其中$\beta$为钝角$AOB$的弧度. 又因为$x(t) = r(\theta)\cos\theta, y(t) = r(\theta)\sin\theta$. 所以

$$r^2(\theta) = x^2(t) + y^2(t), d\theta = d\arctan\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t) + y^2(t)}dt.$$

注意到A, B两个点分别对应的是圆的渐近线方程在参数取$t = 0$和$t = 2\pi$时的值，所以

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_0^\beta r^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[x^2(t) + y^2(t)]\cdot\frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t) + y^2(t)}dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2t^2dt = \frac{4}{3}\pi^3a^2.$$

于是$S = S_1 + S_2 = \pi a^2 + \frac{4}{3}\pi^3a^2$. □

例 2 证明曲线$C: y = f(x)$绕直线$l: y = mx + k$旋转一周在区间$x \in [a,b]$上的旋转体体积为

$$V_l = \frac{\pi}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}\int_a^b [f(x) - mx - k]^2[1 + mf'(x)]dx.$$

证 在曲线C上任取一点$P(x, f(x))$，记P点到直线l的距离为$\overline{PQ} = h, Q \in l$，则$h = \frac{|mx+k-f(x)|}{\sqrt{1+m^2}}$. 记点$P$处曲线小段弧微分为$ds$，相应地在$l$上点$Q$处的弧微分记为$d\xi$，$x$轴上点$(x,0)$处的小段弧微分记为$dx$. 又记$l$与$x$轴正向夹角为$\alpha$，点$P$处曲线$C$的切线与$x$轴正向夹角为$\beta$，则

$$d\xi = ds\cdot\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cdot\cos\alpha(1 + \tan\alpha\cdot\tan\beta)ds$$

$$= \frac{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}\cdot\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\frac{ds}{dx}\cdot dx = \frac{1+mf'(x)}{\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}}\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = \frac{1+mf'(x)}{\sqrt{1+m^2}}dx.$$

设ξ_1,ξ_2是相应于x轴上的a,b的l上的位置，则

$$V_l = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\pi h^2 d\xi = \frac{\pi}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}\int_a^b [f(x)-mx-k]^2[1+mf'(x)]dx.$$
□

例 3 求曲线$y=x^2,(0\le x\le 1)$绕直线$y=x$旋转得到的旋转体的体积.

解 在曲线上任取两点$(x,x^2),(x+\Delta x,(x+\Delta x)^2)$，分别向$y=x$做垂线，得到一个小曲边梯形，可将其近似看做一个长宽分别为$\frac{x-x^2}{\sqrt{2}},\sqrt{2}(\frac{(x+\Delta x)+(x+\Delta x)^2}{2}-\frac{x+x^2}{2})$的小矩形. 该小矩形绕$y=x$ 旋转得到的圆柱体体积舍去Δx 的高阶无穷小量，就得到了ΔV的近似值

$$\Delta V \approx \pi(\tfrac{x-x^2}{\sqrt{2}})^2\cdot\tfrac{2x+1}{\sqrt{2}}\Delta x$$

因此，由微元法可知$V=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\int_0^1(x-x^2)^2(2x+1)dx=\frac{\sqrt{2}\pi}{60}$. □

例 4 设Γ为抛物线，P是与焦点位于抛物线同侧的一点. 过P的直线L与Γ围成的有界区域的面积记为$A(L)$. 证明：$A(L)$取最小值当且仅当P恰为L被Γ所截出的线段的中点.

证 不妨设抛物线方程为$y=x^2$, $P=(x_0,y_0)$. 因为P是与焦点位于抛物线同侧的一点，所以$y_0>x_0^2$. 设L的方程为$y=k(x-x_0)+y_0$, 则L与Γ的交点的x坐标满足$x^2=k(x-x_0)+y_0$, 有两个解$x_1<x_2$满足$x_1+x_2=k, x_1x_2=kx_0-y_0$. L与x轴，$x=x_1$, $x=x_2$构成的梯形面积$D=\dfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)(x_2-x_1)$, 抛物线与$x$轴，$x=x_1$, $x=x_2$构成的区域面积为$\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)$. 于是有

$$A(L)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)(x_2-x_1)-\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)=\frac{1}{6}(x_2-x_1)^3,$$

进而得到

$$\begin{aligned}36A(L)^2 &= (x_2-x_1)^6=[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]^3=(k^2-4kx_0+4y_0)^3\\ &= [(k-2x_0)^2+4(y_0-x_0^2)]^3 \geqslant 64(y_0-x_0^2)^3.\end{aligned}$$

等式成立当且仅当$A(L)$取最小值，当且仅当$k=2x_0$, 即$x_1+x_2=2x_0$, 也即P恰为L被Γ所截出的线段的中点. $\square$

例 5 设$f(x)$在$[0,1]$连续，$f(0)=1$, 且对任意$x\in[0,1]$, 都有$f(f(x))=x$, 求证：

$$\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x=2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为对任意$x\in[0,1]$, 都有$f(f(x))=x$, 所以$f(x)$是单射. 又$f(x)$在$[0,1]$连续，所以$f(x)$在$[0,1]$严格单调. 因为$f(0)=1$, $f(1)=f(f(0))=0$, 所以$f(x)$在$[0,1]$严格单调递减. 一方面，曲线$y=f(x)$ $(x\in[0,1])$与直线$y=0$, $x=0$围成的曲边梯形绕x轴旋转所得的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x;$$

另一方面，由$f(x)$在$[0,1]$严格单调且$f(f(x))=x$得$f^{-1}(x)=f(x)$, $x\in[0,1]$, 该旋转体还可以看成是曲线$x=f^{-1}(y)$ $(y\in[0,1])$与直线$x=0$, $y=0$围成的曲边梯形绕x轴旋转得到的，故

$$V=2\pi\int_0^1 yf^{-1}(y)\mathrm{d}y=2\pi\int_0^1 yf(y)\mathrm{d}y=2\pi\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x.$$

由上述两个关于V的表达式即得

$$\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x=2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x.$$

$\square$

9.2 在物理计算中的应用

例 1 求对数螺线$r=ae^{k\theta},(a>0,k>0)$上从点$(a,0)$到点(r,θ)均匀弧段的形心坐标.

解 设形心的直角坐标为$(\overline{x},\overline{y})$，则由形心坐标公式有

$$\overline{x}=\frac{\int_0^\theta ae^{kt}\cos t\sqrt{(ae^{kt})^2+(ake^{kt})^2}dt}{\int_0^\theta\sqrt{(ae^{kt})^2+(ake^{kt})^2}dt}=\frac{ak(2ke^{2k\theta}\cos\theta+e^{2k\theta}\sin\theta-2k)}{(4k^2+1)(e^{k\theta}-1)}.$$

$$\overline{y}=\frac{\int_0^\theta ae^{kt}\sin t\sqrt{(ae^{kt})^2+(ake^{kt})^2}dt}{\int_0^\theta\sqrt{(ae^{kt})^2+(ake^{kt})^2}dt}=\frac{ak(2ke^{2k\theta}\sin\theta-e^{2k\theta}\cos\theta+2k)}{(4k^2+1)(e^{k\theta}-1)}.$$

$\square$

例 2 直径为*20*厘米，长为*80*厘米的圆柱形气缸被压强为*100*牛/厘米^{2}的蒸汽充满着. 假定气体的温度不变，要使气体的体积减少一半，须做多少功？

解 气缸体积为$\pi \cdot 0.1^2 \cdot 0.8 = \frac{8\pi}{1000}m^3$，未压缩时压强为$10^6$牛/米^2，故活塞压缩了$h$米时的压力为

$$F = \pi \cdot 0.1^2 \cdot \frac{10^6 \cdot \frac{8\pi}{1000}}{\pi \cdot 0.1^2 \cdot (0.8-h)} = \frac{8000\pi}{0.8-h}$$

千克，从而要使气体的体积减少一半，须做的功为

$$W = \int_0^{0.4} \frac{8000\pi}{0.8-h} dh = 8000\pi \ln 2\text{焦耳}.$$

□

补充题9

1. 求抛物线$y = x^2 - 2$, $y = -x^2 + 2$, $x = y^2$所围区域的面积.
2. 求$y = \sin x$，$y = 0$ $(0 \le x \le \pi)$所围区域绕y轴旋转所得旋转体的体积；
3. 求球面$x^2 + y^2 + z^2 = 3$与抛物面$x^2 + y^2 = 2z$所围成的立体的体积.
4. 求闭曲线$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 2t^2 - t^3 \end{cases}$ $(0 \le t \le 2)$所围平面区域的面积.
5. 求双曲抛物面$z = x^2 - y^2$, 平面$z = 0$与$x = 1$所围立体的体积.
6. 求曲线$y^2 = 4(x+1)$, $y^2 = 4(1-x)$所围平面区域的面积.
7. 过点$(4,0)$向椭圆$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$作两条切线，求椭圆与两条切线围成的区域绕$y$轴旋转所得的旋转体的体积.
8. 过曲线$y = \sqrt[3]{x}$ $(x \geqslant 0)$上点$A(1,1)$作曲线的切线，求该切线与曲线以及x轴所围平面区域绕x轴一周所得旋转体的体积;
9. 求极坐标曲线$r = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$的弧长.
10. 求曲线$x = \mathrm{e}^t(\cos t + \sin t)$, $y = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$的弧长.
11. 求极坐标曲线$r = \sqrt{1-t^2}$, $\theta = \arcsin t + \sqrt{1-t^2}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$所围区域的面积.