

曲面论(三): Gauss — Bonnet 公式(续)

陈省身《微积分及其应用》之第六讲(2001年11月23日)

编者按 本刊自总第94期刊出陈省身先生系列讲座《微积分及其应用》的首讲之后,曾引起读者极大兴趣,纷纷表示获益良多.应广大读者的强烈要发,本刊在总第95、96、99、102、105各期先后续载了陈先生的系列讲座.本期刊出最后一讲.此稿由白承铭、宋敏、云保奇、赵志根等同志记录整理,刊出时只作个别文字处理.大师仙逝,在本刊刊出的系列讲稿,已成绝响,特别是最后两讲已不能再呈先生寓目,我们不胜悲切,并表深深怀念.

(I) 微积分在复变函数论中应用简介

我还应该再讲两次.这两次我有个计划:预备讲一点复变函数论,因为在数学中,很要紧的一件事,同时在数学史上也是非常要紧的一件事情,就是有复数.这个复数使得数学简单,复函数有许多漂亮,有意思的性质,因此,这使得这些函数在应用上特别有用处.所以,我预备讲一讲,比如说,复变函数有一个很重要的性质:任意的代数方程在复变函数之中一定有解.这是一个不得了的事情,因为不管你怎么样写一个方程,你要是允许解是复数的话,它一定有解.例如, $x^2 + 1 = 0$,那么它有个解就是 $\sqrt{-1}$,所以 $\sqrt{-1}$ 就这么样子有用处.不但如此,复数在很多方面跟实数一样,可以加减,有类似的性质,所以,它可以运算.同时它包含了许多材料是实数不能包含的.

我想我的课在进行过程中一定会有个空挡,在空挡的时候,我想找两次讲复变函数.我预备讲:一个是我刚才讲的代数的基本定理,就是说任意的代数的方程在复数域中一定有解.这个是很难证明的,需要数学上新的观念.比方说,伟大数学家如 Euler,他想法子证明,但没有能成功.我想 Gauss 是我们近代最伟大的数学家,他很年轻的时候就有一个证明,也就是复数需要一些几何的性质,不完全是代数的问题.我预备下次讲复数的时候证明这个定理;同时,复变函数最主要的一个定理是 Picard 定理,就是说,假使对于一个复变函数,取它的函数值在复平面里头所取的位置,它把整个复平面都盖住了,其中也许可以去掉一点,两点.这是不得了的,就是说,函数如果是一个全纯函数的话,它分布得非常之均匀,可以说差不多把平面都盖住了.有意思的一件事情是这个定理是复变函数高峰的定理,可以利用我们现在要讲的 Gauss — Bonnet 公式来证明.这说明看起来没有关系的一些方法跟观念,结果是有关联的.这是数学上非常要紧,有意思的问题.

(II) 关于学习的自动性

这个课快结束了,你们得写个报告,最好是自动地来写.你能够自己找到一个问题,这是更要紧的.我想你们都是大学生,大学生受高等教育最后的一段,以后到社会上去,即使在学校,在学术单位里头,最要紧的一定要自动.不要是等老师叫你做什么,你再做什么,这个最坏.要自动,要自己能找问题,要自己能够答复自己找的问题.那么,当然你找的问题不一定合适,你暂时也不一定能够得到答案.不过,你中间经过一些弯路,经过一些错误,可以使得你的学问真正进步,而使得你真正进步的就是要经过这样的手续,所以我鼓励大家要自动.

多讲一点,你们甚至要能够组织一个团体,互相报告找问题,或者请校内校外老师,同学来做报告,这是很有好处的,自己要把数学想一想,或者对任意的学问,你自己有个思想,觉得有个什么样的活动,对于做这个学问的知识可以增加,同时你对学问的能力也可以增加.所以这是很值

得注意的一件事情, 希望你们考虑一下这个可能性.

(III) Gauss - Bonnet 公式的证明

上次, Gauss - Bonnet 公式我没有证明全, 所以我先把证明说全了. 我上次讲的 Gauss - Bonnet 公式就是: 假使在空间里头有一个曲面, 它是一个整个的曲面, 并且假使这个曲面是定向的, 即它的法线有一定的方向. 于是, Gauss 曲率 K 就是曲面上的一个函数, 我可以把这个函数对于曲面上的面积度量求积分, 这个积分是一个 2 重积分, 它等于一个常数 (2π) 乘以曲面的 Euler 示性数. 即

$$\iint K dA = 2\pi\chi(M)$$

Euler 示性数就是把曲面切成小块之后, 适于一点自然的条件, 把它切完之后, 其顶点个数减边的个数, 再加面的个数, 结果就叫做这个曲面的 Euler 示性数. 当曲面是球面的话, 它的 Euler 示性数为 2, 如果它是个环面, 它的 Euler 示性数是 0. 你们可以试一试, 就能得到这个.

如果曲面是个定向曲面, 这是它的唯一的拓扑不变式. 一般讲起来, 假使球上加几个环, 环的个数就跟 Euler 示性数有个关系: 这环的个数普通叫曲面的亏格 (genus), 这是曲面最重要的拓扑不变式. 有意思的是, 这曲面的性质, 曲面上头函数的性质跟亏格有密切的关系, 所以亏格是拓扑不变式, 它影响到曲面的几何性质和解析性质, 有非常之重要的影响. 所以整个这些关系是很深奥的, 相当深奥的. 因此, 也是非常要紧, 非常有意思的.

我上次证明 Gauss - Bonnet 公式, 最要紧的公式就是

$$d\omega_{12} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23} = -K\omega_1 \wedge \omega_2.$$

我现在重复一遍. 要研究曲面论的话, 一定要研究曲面上的标架. 假使取这个标架, 使标架的 3 个单位矢量互相垂直, 并且我们假定它是个右手系. 那么, 对于这样的标架, 假使你知道第一个矢量之后, 其它两个矢量就确定了. 因为我们假定第三个是曲面的单位法矢量, 那么第一个, 第三个定了的话, 第二个也就定了. 事实上, 我这是一个单位标架, 同时是右手系 (右手标架), 这就完全定了. 所以对于一个点的所有这种标架, 其单参数系 (One parameter family) 是根据了一个变数. 曲面是 2 维的, 再加上这点的标架有一个参数, 所以曲面所有标架是一个 3 维的空间. 3 维空间有 x 这个顶点, 定它在曲面的位置, 它去掉两个维, 然后再取一个切线方向, 又有一个维, 因为切线在切面里头可以转, 所以又多了一维. 这样子就得到所有标架系所成空间的 3 维的性质.

有了标架系, 有什么好处呢? 因为有了矢量, 你可以用公式来表示很多事情. 矢量有分量, 这分量就有数. 我们搞数学最要紧的要有数. 你要有数的话, 描写是准确的, 并且应用的时候你可以观察到的都是数. 在某种意义下为什么微积分要紧? 我想数学主要的目的是研究函数, 研究两个系统的关系. 现在这关系呢, 函数不好搞了, 所以微积分是把这个关系线性化, 因此可以用代数. 矢量可以加, 拿个数目来乘, 所以微积分主要的成就是把空间的理论, 把函数的理论线性化, 代数化. 有了代数以后, 你就可以算, 所以就有用, 因此也重要.

那么有了标架所得到的解析的事实是什么呢? 我把这个标架叫做 $xe_1e_2e_3$,

$$E = \{xe_1e_2e_3 \mid M \text{ 定向, } e_3 \text{ 是法矢量, } e_1 \text{ 是切矢量}\},$$

e_3 是单位法矢量. x, e_1, e_2, e_3 都是矢量, 它们的微分也是矢量. 微分之后是一次微分式矢量值, 因此, 它们可以表为 e_1, e_2, e_3 的一个线性组合. 把 dx 表为线性组合, 得到的系数叫做 ω_1, ω_2 :

$$dx = \omega_1e_1 + \omega_2e_2.$$

ω_1, ω_2 就是曲面的面积度量, 是一个 2 次微分式, 它当然可以用来做个重积分的积分函数 (integral), 所以把它积分的话, 就得到这个曲面的面积.

我讲的关于曲面的理论的这些结果,你在微分几何书上找不到. 如果你不能完全接受,不能完全懂的话,没有关系. 因为这些内容大概在普通微分几何中要讲一个月,而我讲一两次就把它讲完了. 这也证明这个方法的优点. 它的优点主要是我在研究 3 维空间的 Euclid 几何. Euclid 几何最好是用正交标架,因为正交性在 Euclid 几何中不变,是有意义的. 而一般微分几何书用到曲面论的时候,它不用正交标架,你要想别的法子. 比如说,平面解析几何,你不用正交标架,你的两个坐标不垂直,甚至于它走的方向不是单位的方向,你去试试看就知道难多了,麻烦多了. 不是不可能做,可以做到,就是麻烦多了. 有意思的一件事情,当然我们都知道,坐标系统是法国的哲学家,数学家笛卡尔发现的. 他头一次用坐标的时候不是正交标架,都是任意的标架. 他用任意的标架拿来处理这种几何的问题. 不知道是哪位先生放了个正交标架,以后你在书上看到的都是正交标架.

所以,我的标架是 $xe_1e_2e_3$,这 4 个都是矢量. 它们的微分也得到矢量值的一次微分,所以每一个可以表为 e_1, e_2, e_3 的线性组合. 由于我们是在一个 3 维的空间,那么这就是公式 $dx = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$ 和公式 $de_i = \omega_{ij} e_j$. 这时候,因为是一次微分式,所以这种线性组合是 e_1, e_2, e_3 的线性组合,它的系数是一次微分式,不再是函数了. 以前如果是函数的话,它线性组合的系数是函数,现在,系数是一次微分式,这些一次微分式重要得很. 因为它描写一个标架跟它临近标架的关系:它临近标架动一点点,跟原来相差多少?相差是一个微分,就是我们的 ω_i 跟 ω_{ij} .

这几个微分式有简单的关系,最要紧的是 ω_{ij} ,你看它很麻烦, i, j 从 1 到 3,但是因为标架是正交的单位矢量,所以 ω_{ij} 对于 i, j 是反对称的. 因此,你把 ω_{ij} 写成一个 3×3 方阵的话,它的对角线的元素都是 0,并且对于对角线它是反对称的,所以只有 3 个真正要处理的一次微分式.

你要用标架来研究几何的这种情况,在力学很自然. 力学讲一个物体在那儿移动,那么它的位置就是时间的函数,因此,这标架是时间的函数. 这种函数在力学上是一个变数的函数. 因为在力学上,在动力学上,真正的变数是时间,只有一个. 但是要研究几何的话,情况来得复杂,可能这个标架是跟多个变数有关,可以是多变数的函数. 因此这之间就有些关系,这关系就是你求 $d(de_i)$. 我讲过,你用上 d 的话, d 用两次是 0,所以你把这个关系写出来的话,就得到 $d\omega_{ij}$ 是一个式子,可以用其他的 ω 来表示,这式子是 $d\omega_{ij} = \omega_k \wedge \omega_{kj}$. 你得到这样一组方程,是有意义的. 因为 ω_{ij} 是一次微分式,你把它微分的话是 2 次微分式,而在右边是两个一次微分式相乘,所以也是 2 次微分式,因此这组方程不荒谬. 这组方程代表运动群整个的性质,看似复杂,其实非常简单,因为这些 ω_{ij} 是反对称的,所以如果 $i \neq j$ 的话,例如,如果 $i = 1, j = 2$,那么 $k = 3$. 这是因为 k 要是等于 1,于是有 $\omega_{11} = 0$,而要是 k 等于 2,那么有 $\omega_{22} = 0$. 所以这组方程式看着复杂,右边只有一项.

你还可以容易地得到一个特别情形,即 $d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = \omega_{13} \wedge \omega_{23}$. 这个公式要紧极了. 在此情形下有一个新的情况:你们念微积分的时候,一般只有一个空间,大概不是平面就是 3 维空间,可是我们现在有两个空间,一个是标架成的空间,是 3 维的;另一个是 2 维的曲面,所以我有一个 2 维曲面还有一个 3 维空间,这 3 维空间是个标架. 因此如果一个标架,你取它原点的话,我们说它就投影到曲面上去了,这样子就有个投影.

有个名词叫纤维丛,现在是圆周丛了. 纤维是圆周,有一把圆周,而整个的圆周所成的空间就是原来的曲面,我们叫原来的曲面为底空间. 拿同一个原点的所有单位切矢量就成纤维,于是构成纤维丛. 它就象我们衣服似的,有一条一条的线. 最简单的纤维丛是它的纤维是直线,那么它是直线丛. 我试着把它比方成一把筷子,你有好多筷子,每一根筷子是条直线,那么有好多筷子,整个筷子成一个空间,这就是我们的纤维丛,这是直线的情况.

我们现在做的情况是圆周丛. 这是微积分里一个新的观念,就是说,你不是讨论一个空间,而

是你在讨论两个空间, 并且这两个空间之间有密切的关系. 一个是圆周所成的空间, 一个是我们的底空间, 也就是原来的曲面. 这两个空间之间有所说的这个关系, 这个关系有意思极了, 重要极了, 因为有关系 $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$. 右边是曲面上的式子, 这是因为 K 是 Gauss 曲率, $\omega_1 \wedge \omega_2$ 是面积度量, 所以右边是曲面上的性质. 左边是一个东西的微分. ω_{12} 是在纤维丛 E 里头的一次微分式, 这个一次微分式的外微分等于右边的式子. 这个说明 Gauss 曲率只跟 Riemann 度量有关, 因为要是有了 Riemann 度量就有 ω_{12} . 那么右边的式子只跟 Riemann 度量有关, 这是 Gauss 当年很得意的一个结果. 有这样一个关系, 连 Gauss 都觉得很不得了.

Gauss - Bonnet 公式就是要求右边这个式子的积分. 我们现在有一个封闭的曲面, 它是定向的, 要求右边的积分, 求出它的值来. 当时我也有一种错误, 以为右边这个式子既然是 d 一个东西的话, 在一个封闭曲面上的积分应该是 0. 事实上, 它应该等于 ω_{12} 沿着这个曲面的边界的积分, 如果曲面是封闭的, 它没有边界, 所以应该是 0. 但这显然是错的. 我们虽然有 $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$, 但这个关系不是在一个 2 维空间上, 它是在 E 这个 3 维空间上. 所以我们只能够在 3 维空间利用 Stokes 定理. 而在 3 维空间的话, 这个曲面就有边界了. 你要把这个曲面升到 3 维空间去, 怎么升呢? 就是每点要给一个拿这点做原点的切矢量. 换句话说, 这就是所谓的矢量场. 所以这个曲面需要有个矢量场, 每点有个切矢量, 而这个切矢量是 E 里头的一个点, 就把这个曲面升到 E 里头去.

假使有一个曲面, 是不是一定有个矢量场? 这不简单了. 在局部的时候, 当然很简单. 你写下坐标, 随便写些矢量, 就有了. 是不是能够在整个曲面给一个矢量场, 这是几何里头所谓整体的问题, 普通拓扑就搞这个问题. 也就是说, 局部显然可以写矢量的, 你有局部坐标, 你把坐标分量写下来, 当然就有个矢量场, 但是这个局部的, 不一定能扩充到整个曲面. 我上次已经讲过, 要能的话, 必须允许这个矢量场有异点(singularity). 比方说, 在下面几个图里有几个矢量场的例子(图略):

最左边的例子, 它的异点就在原点, 经过这个原点, 向所有方向画矢量. 除了原点之外, 就定了一个矢量场, 但是原点是一个异点, 它是所有水流出来的出发点, 所以它是个异点. 第二个, 所有矢量都向原点走, 原点还是一个异点, 原点就变成一个沉下去的一个点, 英文叫 sink. 而左边的叫 source. 当然也有象最右边的例子.

从这些例子可以看出矢量场在异点有不同性质. 如何描写它的不同的性质, 就有一个叫做矢量场的指标(index). 假使有个孤立的异点, 那么围着这个异点做个小圆圈, 因为是孤立的异点, 所以在小圆圈上的点的矢量是完全确定的. 那么现在, 在小圆圈的点绕着异点转多少圈呢? 如果转一圈, 并且是在正的方转一圈, 它的指标是 1. 如果向负的方向就是 -1. 在上面例子中, 无论 sink 还是 source, 指标都是 1. 双曲线的现象指标为 -1. 异点很复杂, 因此指标可以取任何值.

假使我把曲面升到纤维丛里头, 升到圆周丛里头, 并且允许有异点, 那么这个上去的曲面就有边界, 这个边界就相当于这些异点. 所以根据公式 $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$, 我们关于 Gauss 曲率的积分就等于异点的指标和. 所以我们证明一个重要性质: 不论你取任何一个矢量场, 假使它只有有限个异点, 我们这个积分是指标和, 即是把每个异点的指标加起来就等于指标和.

这里很要紧, 因为这个积分是跟矢量场选择无关的. 所以这证明了一个曲面假使有一个有有限个异点的矢量场, 在异点的指标和与矢量场的选择无关. 它等于那个积分, 而那个积分里没有矢量场, 所以就得到这样一个结果. 我再说一遍, 现在有一个封闭的曲面, 取一个矢量场, 有有限个异点, 它的指标和与矢量场的选择无关, 这是因为它等于右边的积分, 而右边积分根本没有矢量场.

为什么这个数目等于 Euler 示性数呢? 现在既然它跟矢量场选择无关, 你就任取一个矢量场, 比方说, 假使有一个曲面, 你把曲面分割了, 分割成小块, 每个小块是三角形. 对于这三三角形, 每个边

取它的中点,三角形取它的重心,你就可以定一个矢量场.从顶点出去,然后到三角形的重心就进去.对于这样子定的矢量场很容易看出来,刚巧在边上的这种点的指标等于 -1 . 于是它在顶点的指标是 1 ,在三角形重心的指标都是 1 ,但是在边上每个点指标为 -1 ,所以把这指标加起来的话,就等于顶点的个数加面的个数,再减边的个数,因此就是 Euler 示性数.这就证明了 Gauss — Bonnet 公式.

(IV) Gauss — Bonnet 公式的推广及应用

Gauss — Bonnet 公式真正有用的时候是曲面有边界.此时,它是顶点加顶点的外角再加边的测地曲率(geodesic curvature),再加曲面的 Gauss 曲率.下面是一般的 Gauss — Bonnet 公式

$$\sum (\pi - \alpha)(\text{点}) + \sum \int k_g(s) ds(\text{边}) + \sum \iint K dA(\text{面}) = 2\pi\chi(M).$$

对于有边界的曲面,头一部分是边界顶点的点曲率,其次是边界的边的线曲率,然后整个的这个东西的面曲率,所以你要有一个有边界的曲面,你就取边界的点曲率加边界的线曲率再加面曲率,是 Euler 示性数.证明是一样的.

真正 Gauss — Bonnet 公式最有用的是有边界的情况.比方说,在一个 Euclid 平面,假使有一个三角形,这个三角形由直线所成.由于空间是 Euclid 空间, Gauss 曲率 $= 0$;假使边都是直线,所以测地曲率也是 0 . 因此这个就是说 $\sum (\pi - \alpha)$ 等于 2π . 这是因为要是三角形, Euler 示性数是 1 . 右边要等于 2π ,所以这就说明三角形三角之和在 Euclid 平面上等于 π . Gauss — Bonnet 公式是三角形三角和公式在一般情形的推广.这个观念重要极了,它就是整个纤维丛的观念.

我说,由这个纤维丛, Maxwell 方程就是这个情况的推广.你到物理上应用的时候,你的空间是 4 维,是 3 维空间加 1 维时间,是 4 维的洛伦兹流形.那么要表示 Maxwell 方程的话,你要用一个圆周丛,实际上是一个复的直线丛.它有个曲率,我们的曲率是 Gauss 曲率乘以面积元素,而这个曲率是个 2 次微分式,把表示这个曲率是封闭的条件写出来就是 Maxwell 方程.所以, Maxwell 方程的几何背景非常简单,就是因为世界是 4 维的空间,所以得从 2 维空间扩充到 4 维.那么这个曲率因为是一个 2 次微分式,还是反对称的,因此在 4 维空间里是一个 4×4 方阵:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_0 & B_2 \\ -E_2 & B_0 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

这个方阵里头 E_1, E_2, E_3 是 Electric Potential, B_0, B_1, B_2 是 Magnetic Potential,也就是电势跟磁势,这些都是方阵里头的函数.表示由这个方阵所表示的 2 次微分式是封闭的,即 d 这个式子的微分为 0 ,就是 Maxwell 方程

$$d(F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta) = 0.$$

Gauss — Bonnet 公式在历史上曾有很多演变.我写的公式既不由于 Gauss,也不由于 Bonnet.事实上, Gauss 仅由测地三角形做到三角形的情形. Bonnet 也没有做拓扑的应用. Bonnet 把三角形推广到任意曲线,他把任意曲线的测地曲率积分表为 Gauss — Bonnet 公式的积分.当年 Bonnet 是法国最要紧的几何学家,他在微分几何方面做了非常基本的贡献.

我不管你们了解多少,我希望你们了解这一部分的数学非常要紧. Maxwell 方程是它的特殊情况,这个非常有用处.我有一篇文章在今年的《科学》上发表,题目叫《Gauss — Bonnet 公式与 Maxwell 方程》,我讲的许多要点在这篇文章里头有.