# 两边夹定理

## 定理 1 (两边夹定理)

设$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$是三个数列, 满足下列条件:

*(i)* 存在一个正整数$N$, 当$n>N$时, 总有$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$,

*(ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$,

则$\{y_n\}$也收敛且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

数列$\{y_n\}$的收敛性是要证明的结论的一部分，因此，不能用极限的保序性来证明两边夹定理.

# 应用两边夹定理的例子

**例 1**

设$a_i > 0, \quad i = 1, \cdots, m$, 求证

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

观察要讨论的数列的特点，进行适当的放缩，然后用两边夹定理.

**例 2**

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 求证 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

也可以用不等式

$$0 \leqslant |\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| \leqslant \sqrt{|x_n - a|},$$

根据极限定义来证明.

**例 3**

求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

有一些$n$项和的极限可以如本题一样用两边夹定理来计算，但也有一些$n$项和的极限，如

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n},$$

不能用两边夹定理来计算.

**判断下面的命题是否成立.**

设$\{y_n\}$是一个数列，$m$是大于1的整数，令

$$x_n = \min\{y_n, y_{n+1}, \cdots, y_{n+m-1}\},$$
$$z_n = \max\{y_n, y_{n+1}, \cdots, y_{n+m-1}\},$$

则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

(A) 成立

(B) 不成立

**定义 1**

设有一个数列$\{x_n\}$, 则

(i) 若$x_{n+1} \geqslant x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, 称数列$\{x_n\}$递增; 若不等号改为"$>$", 称数列$\{x_n\}$严格递增;

(ii) 若$x_{n+1} \leqslant x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, 称数列$\{x_n\}$递减; 若不等号改为"$<$", 称数列$\{x_n\}$严格递减;

(iii) 递增与递减数列统称为单调数列, 严格递增与严格递减数列统称为严格单调数列.

**定理 2 (单调收敛定理)**

单调有界数列必收敛. 并且

*(i)* 若数列$\{x_n\}$递增且有上界, 则

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geqslant x_k, \quad k \in \mathbb{N}^*;$$

*(ii)* 若数列$\{x_n\}$递减且有下界, 则

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant x_k, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

这个定理的证明将放在第六章介绍. 需注意的是“单调有界”只是数列收敛的一个充分条件, 而非必要的条件. 由于数列的收敛性与任何有限项无关, 所以如果数列在有限多项之后如$n > N$时, 才具有单调性, 定理结论依旧成立.

**例 4**

设$a>0$, $x_1=\sqrt{a}$, $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$, $n=1,2,\cdots$. 求数列$\{x_n\}$的极限.

“数列$\{x_n\}$单调递增”等价于“$x_{n+1}-x_n\geqslant 0$”，当$x_n$恒大于0时，又等价于“$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant 1$”.

**例 5**

研究数列$x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$的收敛性.

将上述数列的极限值用e来表示, 可以计算出e的前15位小数是

$$\mathrm{e} = 2.718281828459045\cdots,$$

这是个无理数. 这里的数e就是自然对数的底数, 它在数学中占有极为重要的地位. 而极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$也是一个重要极限, 据此可以求一些更复杂数列的极限.

证明： $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}.$

**证** 记$a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, 则数列$\{a_n\}$严格递增且由2.3节例5的解答过程知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant a_n<3.$$

由单调收敛定理知$\{a_n\}$ 收敛. 在$(1+\frac{1}{n})^n\leqslant a_n$两边令$n\to\infty$取极限便得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geqslant \mathrm{e}.$

# e的级数表示的证明（续）

另一方面, 任意固定$m$, 则当$n > m$时, 有

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\ &\geqslant \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).\end{aligned}$$

注意上式右端的$m$是固定的, 故可令$n \to \infty$在上式两边取极限而得到

$$\mathrm{e} \geqslant \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} = a_m.$$

又因$m$是任意固定的, 故上式对所有$m$都成立. 令$m \to \infty$取极限即得$\lim\limits_{m\to\infty} a_m \leqslant \mathrm{e}$. 故得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$. □

**例 6**

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

观察要计算的数列的特点，不难想到可以适当放缩，用两边夹定理来计算.

前面介绍的两边夹定理与单调收敛定理, 定理的条件都只是充分的, 这意味着通过定理只能判别数列的收敛性, 而不能判别数列的发散性. 下面的柯西收敛原理给出的是数列收敛的充分必要条件, 既可以用来证明数列收敛, 也可以用来证明数列发散.

**定理 3 (柯西收敛原理)**

数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件为: 对于任何$\varepsilon > 0$, 都存在正整数$N$, 当$m > N$, $n > N$时, 就有$|x_m - x_n| < \varepsilon$.

柯西收敛原理反映了数列收敛的本质, 形象地说, 收敛数列的通项随着$n$的增大, 越到后面越"挤"在一起. 与$\varepsilon - N$定义相比, 柯西收敛原理将原来$x_n$与$a$的关系换成了$x_n$与$x_m$的关系. 其好处在于无需知道极限值$a$, 只要根据数列通项本身的特征, 就可以鉴别它的敛散性. 在此只证明定理的必要性, 充分性的证明将留在第六章进行.

# 柯西收敛原理的等价陈述

(1) 数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件为: 对于任何$\varepsilon > 0$, 都存在正整数$N$, 当$m \geqslant N$, $n \geqslant N$时, 就有$|x_m - x_n| \leqslant \varepsilon$.

(2) 数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件为: 对于任何$\varepsilon > 0$, 都存在正整数$N$, 当$m > n > N$时, 就有$|x_m - x_n| < \varepsilon$.

(3) 数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件为: 对于任何$\varepsilon > 0$, 都存在正整数$N$, 当$n > N$时, 对任意正整数$p$, 都有$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

**注**

在应用柯西收敛原理时，等价陈述(3)也是常用的. 适当放大$|x_{n+p} - x_n|$到$y_n$, 这里$y_n$与$p$无关，$y_n$是无穷小量，由$y_n < \varepsilon$容易解得$N$.

## 应用柯西收敛定理的例子

**例 7**

求证数列$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin i}{i^2}$收敛.

证明$n$项和的极限存在，柯西收敛原理是可以考虑的一种方法.

**判断下面的命题是否成立.**

数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是：对任意正整数$p$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+p}-x_n)=0$.

(A) 成立

(B) 不成立

# 数列发散的充分必要条件

在柯西收敛原理中对于数列收敛的充分必要条件进行逻辑否定, 就可以得到数列发散的充分必要条件, 利用它可以方便地证明数列是发散的.

**定理 4**

数列$\{x_n\}$发散的充分必要条件为: 存在$\varepsilon_0 > 0$, 对于任何正整数$N$, 存在$n_0, m_0 > N$, 使得$|x_{m_0} - x_{n_0}| \geqslant \varepsilon_0$.

**等价陈述**

数列$\{x_n\}$发散的充分必要条件为: 存在$\varepsilon_0 > 0$, 对于任何正整数$N$, 存在$n_0 > N$, 存在正整数$p_0$, 使得$|x_{n_0+p_0} - x_{n_0}| \geqslant \varepsilon_0$.

# 应用数列发散的充分必要条件的例子

**例 8**

求证数列$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$发散.

本题中的数列是严格递增数列，也可以通过证明该数列无上界来得到发散性.