3.1 连续与间断

一、基本方法

1. 证明函数$f(x)$在区间I连续主要有以下方法.

(1) 对任意$x_0 \in I$, 证明$f(x)$在点x_0处连续.

(2) 利用四则运算的连续性、复合函数的连续性、反函数的连续性和初等函数连续性的定理.

(3) 使用反证法.

例 1 设$f(x)$在(a,b)单调递减，$\mathrm{e}^x f(x)$在(a,b)单调递增，求证：$f(x)$在(a,b)连续.

证 对任意$x_0 \in (a,b)$, 当$x \in (a,x_0)$时，由$f(x)$在(a,b)单调递减，$\mathrm{e}^x f(x)$在(a,b)单调递增得$f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{x_0-x} f(x_0)$, 从而由两边夹定理得$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$; 当$x \in (x_0,b)$时，由$f(x)$在$(a,b)$单调递减，$\mathrm{e}^x f(x)$在$(a,b)$单调递增得$\mathrm{e}^{x_0-x} f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0)$, 从而由两边夹定理得$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. 因此，对任意$x_0 \in (a,b)$, 有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 即$f(x)$在点$x_0$处连续. 按定义知$f(x)$在$(a,b)$连续. □

2. 证明函数$f(x)$在区间I不连续主要有以下方法.

(1) 证明存在$x_0 \in I$, 使得$f(x)$在点x_0不连续(x_0为区间端点时，$f(x)$在点x_0单侧不连续).

(2) 使用反证法.

例 2 判断$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上是否连续.

解 由

$$\lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} \mathrm{e}^y \quad \left(y = -\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

知$f(x)$在0点不连续. 所以，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不连续. □

后面3.4节的例10和难题选解的例2都是用反证法来证明“$f(x)$不是连续函数”.

二、补充例题

区间I上的连续函数$f(x)$被其在I的一个稠密子集上的值所决定，这个性质在解决一些问题中是有用的.

例 3 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$R(x)$是黎曼函数，求证：若$f(x)R(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，则$f(x)\equiv 0$.

证 先证明引理：“若$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，数集A在$\mathbb{R}$中稠密，对任何$x\in A$, 有$f(x)=0$, 则$f(x)\equiv 0$”. 引理的证明如下: 对任何实数x, 若$x\in A$, 则已知$f(x)=0$; 若$x\in\mathbb{R}\setminus A$, 则由数集$A$在$\mathbb{R}$中稠密知存在$x_n\in\left(x-\dfrac{1}{n},x+\dfrac{1}{n}\right)\cap A$, $n=1,2,\cdots$, 由$|x_n-x|<\dfrac{1}{n}$知$x_n\to x\ (n\to\infty)$, 故由$f(x)$的连续性得$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$. 这就完成了引理的证明.

回到原问题，记$g(x)=f(x)R(x)$, 则对任何$x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 由$R(x)=0$得$g(x)=0$. 因为$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}$中稠密，所以由引理知$g(x)\equiv 0$. 对任何$x\in\mathbb{Q}$, 由$R(x)\neq 0$得$f(x)=\dfrac{g(x)}{R(x)}=0$. 因为$\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}$中稠密，所以由引理知$f(x)\equiv 0$. □

3.2 连续函数及其性质

一、基本方法

1. 证明函数$f(x)$在区间I连续主要有以下方法.

(1) 对任意$x_0\in I$, 证明$f(x)$在点x_0处连续.

(2) 利用四则运算的连续性、复合函数的连续性、反函数的连续性和初等函数连续性的定理.

(3) 使用反证法.

例 1 设$f(x)$在(a,b)单调递减，$\mathrm{e}^x f(x)$在(a,b)单调递增，求证：$f(x)$在(a,b)连续.

证 对任意$x_0\in(a,b)$, 当$x\in(a,x_0)$时，由$f(x)$在(a,b)单调递减，$\mathrm{e}^x f(x)$在(a,b)单调递增得$f(x_0)\leqslant f(x)\leqslant \mathrm{e}^{x_0-x}f(x_0)$, 从而由两边夹定理得$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$; 当$x\in(x_0,b)$时，由$f(x)$在$(a,b)$单调递减，$\mathrm{e}^x f(x)$在$(a,b)$单调递增得$\mathrm{e}^{x_0-x}f(x_0)\leqslant f(x)\leqslant f(x_0)$, 从而由两边夹定理得$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$. 因此，对任意$x_0\in(a,b)$, 有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 即$f(x)$在点$x_0$处连续. 按定义知$f(x)$在$(a,b)$连续. □

2. 证明函数$f(x)$在区间I不连续主要有以下方法.

(1) 证明存在$x_0\in I$, 使得$f(x)$在点x_0不连续(x_0为区间端点时，$f(x)$在点x_0单侧不连续).

(2) 使用反证法.

例 2 判断$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上是否连续.

解 由

$$\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+\infty}\mathrm{e}^y\quad\left(y=-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

知$f(x)$在0点不连续. 所以，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不连续. □

后面3.4节的例10和难题选讲的例2都是用反证法来证明“$f(x)$不是连续函数”.

二、补充例题

区间I上的连续函数$f(x)$被其在I的一个稠密子集上的值所决定，这个性质在解决一些问题中是有用的.

例 3 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$R(x)$是黎曼函数，求证：若$f(x)R(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，则$f(x)\equiv 0$.

证 先证明引理：“若$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，数集A在$\mathbb{R}$中稠密，对任何$x\in A$, 有$f(x)=0$, 则$f(x)\equiv 0$”. 引理的证明如下: 对任何实数x, 若$x\in A$, 则已知$f(x)=0$;

若$x \in \mathbb{R} \setminus A$, 则由数集$A$在$\mathbb{R}$中稠密知存在$x_n \in \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \cap A$, $n = 1, 2, \cdots$, 由$|x_n - x| < \frac{1}{n}$知$x_n \to x$ $(n \to \infty)$, 故由$f(x)$的连续性得$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. 这就完成了引理的证明.

回到原问题，记$g(x) = f(x)R(x)$, 则对任何$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 由$R(x) = 0$得$g(x) = 0$. 因为$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$在$\mathbb{R}$中稠密，所以由引理知$g(x) \equiv 0$. 对任何$x \in \mathbb{Q}$, 由$R(x) \neq 0$得$f(x) = \dfrac{g(x)}{R(x)} = 0$. 因为$\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}$中稠密，所以由引理知$f(x) \equiv 0$. □

3.3 初等函数的连续性

一、基本方法

1. 借助初等函数的连续性来讨论分段定义的函数的连续性.

例 1 证明：$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在$(-\infty, +\infty)$上连续.

证 由初等函数的连续性知$f(x)$在$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$上连续. 因为

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}} = 0 = f(0),$$

所以$f(x)$在0点处连续. 合起来即知$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续. □

点评 若分段定义的函数在每一段上是初等函数，由初等函数的连续性知在每一段区间内部是连续的，分段点处要按连续的定义或从两个单侧连续性来判断.

例 2 设$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$, 求$f(x)$的间断点并指出间断点的类型.

解 由复合函数的连续性知, 可能的间断点是使$\sin \dfrac{\pi}{x} = 0$的点与0点, 即$x = \dfrac{1}{k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$与$x = 0$.

由于$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$均不存在, 所以$x = 0$为第二类间断点.

由于$\lim\limits_{x\to \frac{1}{k}^+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to \frac{1}{k}^-} f(x)$均存在, 但是不相等(根据不同的$k$为1或$-1$), 所以$x = \dfrac{1}{k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$为跳跃间断点. □

2. 连续性在极限问题中的应用

如果$f(x)$在区间I连续，$\lim g(x) \in I$, 那么$\lim f(g(x)) = f(\lim g(x))$. 这个性质对于极限的计算很有用. 特别地，对于幂指函数$u(x)^{v(x)}$ $(u(x)>0)$的极限，有

$$\lim u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^{\lim[v(x)\ln u(x)]}.$$

在应用变量替换来计算极限时，若$f(x)$是连续函数，则用$y = g(x)$换元来求$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$时不需要"$g(x)\neq y_0$" (其中$y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$)的条件.

例 3 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(a+x)-\arctan a}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解 (1) 设$t = \arctan(a+x)-\arctan a$, 那么当$x\to 0$时, 有$t\to 0$而且$\tan t = \dfrac{a+x-a}{1+(a+x)a}$, 即$x = \dfrac{(1+a^2)\tan t}{1-a\tan t}$. 所以

$$\text{原式} = \lim_{t\to 0}\frac{t(1-a\tan t)}{(1+a^2)\tan t} = \frac{1}{1+a^2}.$$

(2) 记$y = \left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$, 那么$\ln y = x\ln\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)$, 所以有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x\cdot 2\sin\frac{1}{2x}\left(\cos\frac{1}{2x}-\sin\frac{1}{2x}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\cdot\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{2x}-\sin\frac{1}{2x}) = 1,\end{aligned}$$

所以原式等于e. □

二、补充例题

例 4 举出一个满足下面三个条件的函数$f(x)$的例子并验证$f(x)$满足条件.

(1) 函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续*; (2)* 对任意$x>0$, 都有$f(x)+f(2x)=0$*; (3)* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$不存在.

解 例如，$f(x)=\left(-\frac{1}{4}\right)^n(x-2^n)(x-2^{n+1})$, $x\in[2^n,2^{n+1})$, $n\in\mathbb{Z}$满足条件. 验证如下：由初等函数的连续性知$f(x)$在$[2^n,2^{n+1})$ $(n\in\mathbb{Z})$上连续. 对任意整数n, 由$\lim\limits_{x\to 2^{n-}} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^{n-}}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}(x-2^{n-1})(x-2^n)=0=f(2^n)$知$f(x)$在$2^n$处左连续，又前面已证$f(x)$在$2^n$处右连续，故$f(x)$在$2^n$处连续. 这就验证了$f(x)$满足条件(1). 对任意$x>0$, 存在唯一的整数$n$, 使得$x\in[2^n,2^{n+1})$, 从而$2x\in[2^{n+1},2^{n+2})$. 因此有

$$f(x)+f(2x)=\left(-\frac{1}{4}\right)^n(x-2^n)\left(x-2^{n+1}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}\left(2x-2^{n+1}\right)\left(2x-2^{n+2}\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{4}\right)^n(x-2^n)\left(x-2^{n+1}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)^n(x-2^n)\left(x-2^{n+1}\right)=0.$$

这就验证了$f(x)$满足条件(2). 取$x_n=\frac{3}{2^n}$, $n=1,2,\cdots$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 由$f(x_n)=\left(-\frac{1}{4}\right)^{1-n}(x_n-2^{1-n})(x_n-2^{2-n})=(-4)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{-1}{2^n}=\frac{(-1)^n}{4}$容易看到$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$不存在, 故根据海涅定理知$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$不存在. 这就验证了$f(x)$满足条件(3). □

注 一般地，任意取定$[1,2]$上满足$g(1)+g(2)=0$的连续函数$g(x)$, 令$f(x)=(-1)^n g(2^{-n}x)$, $x\in[2^n,2^{n+1})$, $n\in\mathbb{Z}$, 则可验证$f(x)$满足(1)和(2), 若还有$g(x)$不恒等于0, 则$f(x)$也满足(3).

3.4 闭区间上连续函数的性质

一、基本方法

1. 应用有界定理证明函数的有界性.

例 1 设函数$f(x)$在$(0,1)$上连续且$\lim\limits_{x\to 0^+}[f^2(x)+f^2(1-x)]$存在，求证$f(x)$在$(0,1)$上有界.

证 设$\lim\limits_{x\to 0^+}[f^2(x)+f^2(1-x)]=A$, 则存在$\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 使得当$0<x<\delta$时，有$|f^2(x)+f^2(1-x)-A|<1$, 从而$f^2(x)+f^2(1-x)<A+1$, 由此可见$f(x)$在$(0,\delta)\cup(1-\delta,1)$上有界.

又由连续函数的有界定理知$f(x)$在$[\delta,1-\delta]$有界，故合起来就可知$f(x)$在$(0,1)$上有界. $\square$

例 2 设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$连续且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A<+\infty.$$

证明: $f(x)$在$[a,+\infty)$有界.

证 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 所以对$\varepsilon=1$, $\exists X>0$, $\forall x>X$, 有$|f(x)-A|<1$ 或$|f(x)|<|A|+1$.

由$f(x)$在$[a,X]$连续, 所以存在$B>0$, 使$\forall x\in[a,X]$, 有$|\ f(x)\ |\leqslant B$. 取$M=\max\{B,|\ A\ |+1)\}$, 则$\forall x\in[a,+\infty)$, 有$|\ f(x)\ |\leqslant M$, 于是f在$[a,+\infty)$有界. $\square$

2. 应用最值定理来证明函数最值的存在性.

例 3 设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$连续且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A<+\infty.$$

证明: $f(x)$在$[a,+\infty)$至少存在最大值、最小值中的一个.

证 设$f(a)<A=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, 则$\exists X>0$, $\forall x>X$,有$f(x)>f(a)$. 由$f(x)$在$[a,X]$连续, 故有最小值m. 又$m\leqslant f(a)<f(x)$, $\forall x>X$. 所以m也是$f(x)$在$[a,+\infty)$的最小值.

同理可证若$f(a)>A$, 则$f(x)$在$[a,+\infty)$有最大值.

若$f(a)=A$且$f(x)$不是常值函数, 则$\exists x_0>a$, 使$f(x_0)\neq A$. 由上面的证明知：$f(x)$在$[x_0,+\infty)$至少存在最大值、最小值中的一个. 而$f(x)$在$[a,x_0]$连续, 既有最大值也有最小值, 故$f(x)$在$[a,+\infty)$至少存在最大值、最小值中的一个.

$f(x)$为常值函数, 结论显然成立. $\square$

3. 应用根的存在定理来证明方程的根的存在性.

函数$f(x)$的不动点的存在性等价于方程$f(x)-x=0$的根的存在性，从而可以借助根的存在定理来证明.

例 4 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续, 且$[a,b]\subseteq f([a,b])$. 证明存在$\xi\in[a,b]$, 使得$f(\xi)=\xi$.

证 令$F(x)=f(x)-x$, 取$x_1,x_2\in[a,b]$分别是$f(x)$在$[a,b]$的最小值点和最大值点，则由$[a,b]\subseteq f([a,b])$知$f(x_1)\leqslant a$, $f(x_2)\geqslant b$, 从而$F(x_1)=f(x_1)-x_1\leqslant 0$, $F(x_2)=f(x_2)-x_2\geqslant 0$. 由于$F(x)$在$[a,b]$连续, 故$\exists\xi\in[a,b]$使得$F(\xi)=0$, 即$f(\xi)=\xi$. □

例 5 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且单调递减. 证明：存在唯一的ξ, 使得$f(\xi)=\xi$.

证 令$h(x)=x-f(x)$, 则$h(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续. 令$a=|f(0)|+1$, 则

$$\begin{aligned} h(a) &= a-f(a)\geqslant a-f(0)=|f(0)|+1-f(0)\geqslant 1>0,\\ h(-a) &= -a-f(-a)\leqslant -a-f(0)=-|f(0)|-1-f(0)\leqslant -1<0. \end{aligned}$$

由根的存在定理知存在$\xi\in(-a,a)$, 使得$h(\xi)=0$, 即$f(\xi)=\xi$.

再证唯一性. 反证. 若还存在$\xi'\neq\xi$, 使得$f(\xi')=\xi'$, 则不妨设$\xi'<\xi$, 就有$\xi'=f(\xi')\geqslant f(\xi)=\xi$, 矛盾！因此，存在唯一的$\xi$, 使得$f(\xi)=\xi$. □

二、补充例题

例 6 设$f(x)$在$[a,b]$连续且对任何$x\in[a,b]$, 都存在$y\in[a,b]$, 使得$|f(y)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(x)|$. 证明存在点$\xi\in[a,b]$, 使得$f(\xi)=0$.

证 因为f在$[a,b]$连续, 所以$|f(x)|$在$[a,b]$连续. 于是$|f(x)|$在$[a,b]$有最小值m. 设$|f(\xi)|=m$, $\xi\in[a,b]$. 由已知得: $\exists y\in[a,b]$, 使$|f(y)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(\xi)|=\dfrac{m}{2}$. 若$m\neq 0$, 这与$m$为$|f(x)|$ 的最小值矛盾, 故$|f(\xi)|=m=0$. 于是$f(\xi)=0$. □

例 7 设$f(x)$在$[a,b]$连续, $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$. 证明存在点$\xi\in[x_1,x_n]$, 使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

证 对$n\in\mathbb{N}^*$, 令$F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$, $x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$, 则$F(x)$在$\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ 连续. 设m, M分别为$F(x)$在$\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$的最小值与最大值, 因为

$$m\leqslant\frac{1}{n}\left(F(0)+F(\frac{1}{n})+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)\leqslant M,$$

故$\exists x_n\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]\subseteq[0,1]$, 使

$$F(x_n)=\frac{1}{n}\left(F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)=\frac{1}{n}\left(f(0)-f(1)\right)=0,$$

即$f(x_n)=f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$. □

区间I上的连续函数$f(x)$被其在I的一个稠密子集上的值所决定，特别地，连续函数被其在有理点的取值决定. 下面的两个例题借助这个性质与介值定理来解决.

例 8 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续且任意有理数$r\in[a,b]$都是$f(x)$的最值点，证明：$f(x)$是$[a,b]$上的常数函数.

证 反证. 若$f(x)$不是$[a,b]$上的常数函数，则$f(x)$的最大值M大于$f(x)$的最小值m. 任取$x\in[a,b]$, 若x是有理数，则由题设知$f(x)=M$或m; 若x是无理数，则存在有理数列$\{r_n\}\subseteq[a,b]$, 使得$\lim_{n\to\infty}r_n=x$, 由$f(x)$的连续性知$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)$, 由$f(r_n)$等于$M$或者$m$, 可知$f(x)$也只能等于$M$或者$m$. 于是$f(x)$的值域为$\{m,M\}$, 因此$f(x)$取不到$(m,M)$ 中的值，与介值定理矛盾！ □

例 9 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$f(0)=0$, $f(1)=1$, 且对任意实数x和y, $x-y$是有理数当且仅当$f(x)-f(y)$是有理数, 证明：$f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

证 令$g(x)=f(x+1)-f(x)$, 则$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$g(0)=1$, 且$g(x)$恒为有理数. 根据连续函数的介值定理，$g(x)$只能是常数函数，故$g(x)\equiv 1$. 于是对任意整数n, 有$f(n)=n$. 同理可证，对任意正整数$m>1$, $f\left(x+\frac{1}{m}\right)-f(x)$恒为常数. 再由$\sum\limits_{k=1}^{m-1}\left[f\left(\frac{k+1}{m}\right)-f\left(\frac{k}{m}\right)\right]=f(1)-f(0)=1$知$f\left(x+\frac{1}{m}\right)-f(x)\equiv\frac{1}{m}$. 于是对任意正整数$m$和任意整数$n$, 有$f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}$, 即$f(x)=x$, $x\in\mathbb{Q}$. 对任意$x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 取一个收敛于$x$的有理数列$\{r_n\}$, 由$f(x)$的连续性得，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(r_n)=\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x$. 因此，$f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$. □

“连续单射必严格单调”的性质在解决一些问题中起着关键的作用.

例 10 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的函数且$f(f(x))$在$(-\infty,+\infty)$上严格递减. 证明$f(x)$不是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数.

证 反证. 若不然，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续. 由$f(x_1)=f(x_2)$得$f(f(x_1))=f(f(x_2))$, 再由$f(f(x))$在$(-\infty,+\infty)$上严格递减知$x_1=x_2$, 因此f是单射. 由3.4节的例2 知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调. 但是，无论$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格递增还是严格递减，都有$f(f(x))$在$(-\infty,+\infty)$上严格递增，与$f(f(x))$在$(-\infty,+\infty)$上严格递减矛盾！ □

例 11 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且存在常数$C>0$, 使得对任意实数x, y, $x\neq y$, 都有$|f(x)-f(y)|>C|x-y|$, 求证存在实数ξ, 使得$f(\xi)=0$.

证 因为存在常数$C>0$, 使得对任意实数x, y, $x\neq y$, 都有$|f(x)-f(y)|>C|x-y|$, 所以$f(x)$是单射. 又$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，故由3.4节例2知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调. 不妨设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调递增，则当$x>0$时，有$f(x)-f(0)>Cx$, 由此可见$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 从而有$x_1>0$, 使得$f(x_1)>0$; 类似可证$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, 从而有$x_2<0$, 使得$f(x_2)<0$. 根据根的存在定理知存在实数$\xi$, 使得$f(\xi)=0$. □

例 12 设$f(x)$在区间$[0,1]$连续，$f(0)=0$, $f(1)=1$, 对每个$x\in[0,1]$, 有$f(f(x))=x$. 证明对每个$x\in[0,1]$, 有$f(x)=x$.

证 首先，f必为单射. 若不然，则存在$x_1,x_2\in[0,1]$, $x_1\neq x_2$, 使得$f(x_1)=f(x_2)$. 于是$x_1=f(f(x_1))=f(f(x_2))=x_2$, 矛盾！其次，由$f$在$[0,1]$连续且是单射，根据3.5节的例2知$f$在[0,1]严格单调. 再由$f(0)=0$和$f(1)=1$可知$f$在$[0,1]$严格单增. 最后用反证法. 若结论不成立，则存在$x_0\in[0,1]$, 使得$f(x_0)\neq x_0$. 不妨设$f(x_0)<x_0$, 则$f(f(x_0))<f(x_0)<x_0$, 矛盾！这就证明了对每个$x\in[0,1]$, 有$f(x)=x$. $\square$