不定积分的概念

数学分析I

第27讲

December 8, 2022

定义 1

设函数$F(x)$和$f(x)$都在区间I有定义. 如果在区间I上总有$F'(x) = f(x)$, 则称$F(x)$是$f(x)$在区间I的一个原函数.

例如，$(\sin x)' = \cos x$，所以按定义知, $\sin x$是$\cos x$在$\mathbb{R}$上的一个原函数.

5.1节例1

设$a_1, a_2, \ldots, a_n$为实数，求证函数$f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx$ 在$(0, \pi)$内必有零点.

应用罗尔定理，要找$F(x)$, 使得$F'(x) = f(x)$.

练习5.1第7题

已知$f'(x) = k$(常数). 证明$f(x) = kx + b$, 其中b为常数.

不是每一个函数都有原函数, 由达布定理, 若一个函数在区间I不具备介值性, 例如一个严格单调的间断函数, 就没有原函数.

根据达布定理知，符号函数$\operatorname{sgn} x$, 取整函数$[x]$, 黎曼函数$R(x)$, 狄利克雷函数$D(x)$在$(-\infty, +\infty)$上没有原函数.

下一章将证明, 每一个连续函数一定有原函数. 易见, 在上面的例子中, 对任意常数C, $\sin x + C$ 都是$\cos x$在$\mathbb{R}$上的原函数. 一般地, 若$f(x)$在区间I上有一个原函数$F(x)$, 则它的原函数有无穷多个.

判断下面的命题是否成立.

设$f(x)$是$[0,+\infty)$上的函数，对任意$x > 0$, 有$xf(x) > 1$, 则$f(x)$在$[0,+\infty)$上没有原函数.

(A) 成立

(B) 不成立

设$c \in \mathbb{R}$, 令函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ c, & x = 0. \end{cases}$$

函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上具备介值性的充分必要条件是$c \in [-1, 1]$.

应用达布定理和“每一个连续函数一定有原函数”, 可以证明函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上有原函数的充分必要条件是$c = 0$.

借助“每一个连续函数一定有原函数”这个性质，我们可以证明一些原函数的存在性. 有兴趣的同学可以尝试下面的问题.

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$，求证：$g(x)=\begin{cases} f'\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$上有原函数.

设$f(x)$在区间I恒大于0且有原函数，$g(x)$在区间I连续，证明：$f(x)g(x)$在区间I有原函数. 进而得到：若$f(x)$在区间I有下界（或者有上界）且有原函数，$g(x)$在区间I连续，则$f(x)g(x)$在区间I有原函数.

定理 1

设$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数, 则$f(x)$在区间I上的所有原函数的集合是$\{F(x)+C|C\in\mathbb{R}\}$.

定理1的证明

因为常数C的导数为0, 故有

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x),$$

所以$F(x)+C$也是$f(x)$在区间I上的一个原函数.

另一方面, 设$G(x)$也是$f(x)$在区间I上的原函数, 于是有

$$(G(x)-F(x))'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

所以在区间I上有$G(x)-F(x)\equiv C$, 其中C为常数, 即在区间I上有$G(x)=F(x)+C$.

定义 2

设函数$f(x)$在区间I上有原函数，则$f(x)$在I上的原函数的集合称为$f(x)$在I上的**不定积分**, 记为$\int f(x)\mathrm{d}x$.

若$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数, 则由定理1知

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \{F(x) + C | C \in \mathbb{R}\},\ x \in I.$$

习惯上简写如下

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

其中C是任意常数, 这里我们把定义的区间信息也略去. 例如

$$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1,\quad \int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C.$$

还有一点需要指出的是, 如果在一个区间上, $F'(x)=f(x)$ 除去一些孤立点之外成立, 而在这些孤立点处或者$F(x)$没有定义, 或者$f(x)$没有定义, 习惯上仍然写成$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$, 只是自变量$x$不取这些孤立点的值, 而常数$C$可能在不同的子区间上取不同的值.

例如, 由求导公式知

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x},\quad x\neq 0,$$

$$(\tan\, x)'=\sec^2 x,\quad x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z},$$

所以有

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C,\quad x\neq 0,$$

$$\int\sec^2 x\mathrm{d}x=\tan\, x+C,\quad x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

精确地说，

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln(-x) + C_1, & x < 0, \\ \ln x + C_2, & x > 0, \end{cases}$$

$$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan\, x + C_k, \quad x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

我们常常在这种情况下略去等式成立的条件, 例如

$$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan\, x + C.$$

对于分段定义的函数，由于原函数可导必连续，应注意不同的子区间上常数C的取值要满足原函数的连续性.

例 1

设$f(x)=|\mathrm{e}^x-1|$, 求$\int f(x)\mathrm{d}x$.

由$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x-1, & x\geqslant 0\\ 1-\mathrm{e}^x, & x<0\end{cases}$ 可知$f(x)$的原函数$F(x)$形如

$$F(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x-x+C_1, & x\geqslant 0,\\ x-\mathrm{e}^x+C_2, & x<0.\end{cases}$$

若$F(0)=0$，则由$F(x)$的连续性得$C_1=-1$，$C_2=1$，故$f(x)$满足$F(0)=0$的原函数是$F(x)=\operatorname{sgn}x\cdot(\mathrm{e}^x-x-1)$. 从而由定理1得

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\operatorname{sgn}x\cdot(\mathrm{e}^x-x-1)+C.$$

判断下面的命题是否成立.

设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的函数，对任意正整数n，令$f_n(x)$是$f(x)$在$(-n,+\infty)$上的限制. 若对任意正整数n，$f_n(x)$在$(-n,+\infty)$上有原函数，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有原函数.

(A) 成立

(B) 不成立

基本积分表

- $\int 0 \mathrm{d}x = C;$
- $\int x^{\alpha} \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1;$
- $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + C;$
- $\int a^{x} \mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, \ a > 0, a \neq 1;$
- $\int \mathrm{e}^{x} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C;$
- $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C;$
- $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C;$
- $\int \sec^{2} x \mathrm{d}x = \tan x + C;$
- $\int \csc^{2} x \mathrm{d}x = -\cot x + C;$

基本积分表

- $\displaystyle\int \sinh x\mathrm{d}x = \cosh x + C$;
- $\displaystyle\int \cosh x\mathrm{d}x = \sinh x + C$;
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\mathrm{d}x = \tanh x + C$;
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$.

定理 2

若$f(x)$和$g(x)$在实数集X上存在原函数, 则有

(i) $\displaystyle\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$, 其中$k$为非零常数;

(ii) $\displaystyle\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$.

对于上面两个公式, 要从两个集合相等这一角度去理解. 其证明是简单的, 只要证明等式两边的导数相等即可.

设A和B都是实函数的集合，k是实数，则规定$kA=\{kf \mid f\in A\}$, $A+B=\{f+g \mid f\in A, g\in B\}$, $A-B=\{f-g \mid f\in A, g\in B\}$. 这样，等式右边的意义就明确了. 一个特殊情形是: $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x - \int f(x)\mathrm{d}x = C$.

例题

例 2

求不定积分 $\int (x^2 + \sin x - \cos x)\mathrm{d}x$.

因为 $\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$, $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$, $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$, 所以

$$\int (x^2 + \sin x - \cos x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \cos x - \sin x + C.$$

例 3

求不定积分$\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

由于

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2},$$

所以由定理2有

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = x - \arctan x + C.$$

例 4

求不定积分$\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x$.

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos x}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C.$$

求导和求不定积分互为逆运算的具体体现

最后, 我们指出, 求导和求不定积分互为逆运算的具体体现是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x),$$

$$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int \mathrm{d}f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C.$$