17. 求最大的α和最小的β, 使对所有正整数n, 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}.$$

解 最大的α是$\frac{1}{\ln 2}-1$, 最小的β是$\frac{1}{2}$. 证明如下：对上面的不等式取对数，整理后可见最大的α等于$\inf\{f(n)|n\in\mathbb{N}^*\}$, 最小的$\beta$等于$\sup\{f(n)|n\in\mathbb{N}^*\}$, 其中$f(x)=\dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x$. 因为

$$f'(x)=\frac{1}{x(x+1)\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1>0,\quad x>0,$$

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$严格递增. 因此$\inf\{f(n)|n\in\mathbb{N}^*\}=f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$, 从而最大的$\alpha$等于$\frac{1}{\ln 2}-1$.

另一方面，

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2},$$

故$\sup\{f(n)|n\in\mathbb{N}^*\}=\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{1}{2}$, 从而最小的$\beta$是$\frac{1}{2}$. □

CS 扫描全能王

18. 设$0 < x < \frac{\pi}{2}$. 证明$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x$.

CS 扫描全能王

证 要证的不等式等价于 $\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x > 0$. 令 $g(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $g(0) = 0$,

$$g'(x) = \cos^{\frac{2}{3}} x + \frac{1}{3}\sin^2 x \cos^{-\frac{4}{3}} x - 1,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

于是 $g'(0) = 0$, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时,

$$g''(x) = -\frac{4}{9}\cos^{-\frac{1}{3}} x \sin x + \frac{4}{9}\sin x \cos^{-\frac{7}{3}} x = \frac{4}{9}\sin^3 x \cos^{-\frac{7}{3}} x > 0.$$

故 $g'(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上严格递增，从而当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $g'(x) > g'(0) = 0$. 由此知 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上严格递增，从而当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $g(x) > g(0) = 0$, 即 $\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x > 0$. □

CS 扫描全能王

19. 设$x > 0$. 证明$2^{-x} + 2^{-\frac{1}{x}} \leqslant 1$.

证　记$f(x) = 2^{-x} + 2^{-\frac{1}{x}}$, $x > 0$, 注意到$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, 只需证明$f(x)$在$(0,1]$上的最大值为1. 反证. 若不然，则由$f(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$知$f(x)$在$(0,1)$中一点$x_0$处取得最大值$f(x_0) > 1$. 由费马定理知$f'(x_0) = 0$, 结合$f'(x) = -2^{-x}\ln 2 + 2^{-\frac{1}{x}}\ln 2 \cdot \frac{1}{x^2}$得$2^{-x_0}x_0^2 - 2^{-\frac{1}{x_0}} = 0$. 再结合$f(x_0) > 1$得$2^{-x_0} + 2^{-x_0}x_0^2 > 1$, 即$2^{x_0} < x_0^2 + 1$. 记$g(x) = 2^x - x^2 - 1$, 则$g'(x) = 2^x\ln 2 - 2x$, 进而$g''(x) = 2^x(\ln 2)^2 - 2 < 0$, $x \in [0,1]$. 因此$g(x)$在$[0,1]$严格上凸，结合$g(0) = g(1) = 0$得$g(x) > 0$, $x \in (0,1)$. 由$g(x_0) > 0$得$2^{x_0} > x_0^2 + 1$, 矛盾！ $\square$

CS 扫描全能王