1. 如果Ⅰ、Ⅱ是$\mathbb{R}^2$的两组基，从Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵为$\begin{pmatrix}1&2\\4&7\end{pmatrix}$，且Ⅰ*，Ⅱ

解: $(\eta_1,\eta_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{pmatrix}1&2\\4&7\end{pmatrix}$

(3) 取 $p(t)=\dfrac{\overbrace{(t+\frac{1}{2})t(t-\frac{1}{2})(t-1)}^{(t^3-\frac{t}{4})(t-1)}}{(-1+\frac{1}{2})(-1)(-1-\frac{1}{2})(-1-1)} = \frac{2}{3}\left(t^4-\frac{t^2}{4}-t^3+\frac{t}{4}\right)$

$\Rightarrow c_1=\int_{-1}^{1}p(t)\,dt=$

(4) 取 $A=E_{ij}$ $B=E_{jk}$ 则 $f(E_{ij}E_{jk})=f(E_{jk}E_{ij})$

$f(E_{ij}E_{jk})=f(E_{ik})=f(E_{jk}E_{ij})=\begin{cases}f(E_{jj}) & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases}$

故 $f(E_{11})=\cdots=f(E_{nn})=a$

且 $f(E_n)=f(E_{11}+\cdots+E_{nn})=n \Rightarrow f(A)=tr(A)$

$f(x_{11}E_{11}+x_{12}E_{12}+\cdots+x_{nn}E_{nn})=f(x_{11}E_{11}+\cdots+x_{nn}E_{nn})=a(x_{11}+\cdots+x_{nn})$

因为 $Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$ $Q^2=Q$ $rank(Q)=3$ $\quad Q:\mathbb{C}^{n\times 1}\to\mathbb{C}^{n\times 1}$

$\alpha\longmapsto Q\alpha$

$\Rightarrow \mathbb{C}^{n\times 1}=Q^{-1}(0)\oplus Q(\mathbb{C}^{n\times 1})$

$\alpha=(\alpha-Q\alpha)+Q\alpha$

$\Rightarrow \mathbb{C}^{n\times 1}=Q^{-1}(0)+Q(\mathbb{C}^{n\times 1})$

下证 $Q^{-1}(0)$ 和 $Q(\mathbb{C}^{n\times 1})$ 为直和

若 $\beta\in Q^{-1}(0)\cap Q(\mathbb{C}^{n\times 1})$

$\Rightarrow Q\beta=0 \quad \beta=Q\gamma$

$\Rightarrow Q^2\gamma=0 \Rightarrow Q\gamma=0 \Rightarrow \beta=0$

取 $Q^{-1}(0)$ 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ $\quad Q(\mathbb{C}^{n\times 1})$ 的一组基 $Q\eta_1,\cdots,Q\eta_r$

$\Rightarrow \varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,Q\eta_1,\cdots,Q\eta_r$ 是 $\mathbb{C}^{n\times 1}$ 的一组基

$Q(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,Q\eta_1,\cdots,Q\eta_r)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,Q\eta_1,\cdots,Q\eta_r)\left(\begin{array}{c|c}0\ddots0 & 0\\ \hline 0 & 1\ddots1\end{array}\right)$ 故 $tr(Q)=rank(Q)=3$

解答题

设 $W=\{B\in P^{n\times n} \mid B^T=-B\}$，$V=\{A\in P^{n\times n} \mid AB=BA,\ \forall B\in W\}$，证 V 是 $P^{n\times n}$ 的子空间，并求 A 维数

解：W 有一组基 $E_{ij}-E_{ji}$　　$A=(a_{ij})_{n\times n}$

则有　$A(E_{ij}-E_{ji})=(E_{ij}-E_{ji})A$

$$AE_{ij}-AE_{ji}=E_{ij}A-E_{ji}A$$

已知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 $P^{n\times 1}$ 的一组基，$u_1,\cdots,u_m$ 是 $P^{1\times m}$ 的一组基，证 $\alpha_i u_j\ (1\le i\le n,\ 1\le j\le m)$ 是 $P^{n\times m}$ 的一组基

证明线性无关

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\alpha_i u_j = O_{n\times m}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}_{\text{可逆}}\underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}}_{\text{必为}0}\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m\end{pmatrix}}_{\text{可逆}} = O_{n\times m}$$

设 $n\ge 2$. 在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上定义二元函数 $f(A,B)=\mathrm{tr}(AB)-\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.
(1) 证明 f 是对称的双线性函数;
(2) 设 Q 是与 f 对应的二次型，求 Q 的正惯性指数和负惯性指数.
(3) 如果 W 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间，且 $Q(A)=0,\ \forall A\in W$，求 $\dim W$ 的最大可能值.

$\mathbb{R}^{n\times n}=S\oplus D\oplus U$

S：所有对角元全为0的对称矩阵

D：对角

U：反称矩阵

$Q|_S(A)=\mathrm{tr}(A^2)=\mathrm{tr}(AA^T)\geqslant 0$

$Q|_U(A)=\mathrm{tr}(A^2)=-\mathrm{tr}(AA^T)\leqslant 0$

$$Q|_D\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n\end{pmatrix}=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}_{\text{可直接算}}\quad(\text{正}p,\text{负}q)$$

正 $p+\dim S$

$q+\dim U$