数理科学与大数据本科生2020 — 2021学年第二学期“数学分析II”月考3试卷

草 稿 区

任课教师: **学号:** **姓名:** **成绩:**

一	二	三	四	五	六

得 分

一、(15分) 写出函数$f(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos y}$在$(0,0)$点邻近的二阶泰勒展开式.

解

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{e}^x}{\cos y}\\=\;&\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1-\frac{y^2}{2}+o(y^2)}\\=\;&\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)\\=\;&1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+o(x^2+y^2).\end{aligned}$$

□

另解 对$f(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos y}$求偏导，得$f'_x=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos y}$, $f'_y=\dfrac{\mathrm{e}^x\sin y}{\cos^2 y}$, $f''_{xx}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos y}$, $f''_{xy}=f''_{yx}=\dfrac{\mathrm{e}^x\sin y}{\cos^2 y}$, $f''_{yy}=\dfrac{2\mathrm{e}^x\sin^2 y}{\cos^3 y}+\dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos y}$. 由此知$f(0,0)=1$, $f'_x(0,0)=1$, $f'_y(0,0)=0$, $f''_{xx}(0,0)=1$, $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)=0$, $f''_{yy}(0,0)=1$. 因此有

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\cos y}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+o(x^2+y^2).$$

□

草 稿 区

得 分

二、(30分) 求下列方向导数和偏导数.

(1) 设$f(x,y)=\ln(\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^y)$, $\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$, 其中$\theta\in[0,2\pi)$, 求$\dfrac{\partial f}{\partial\vec{l}}(0,0)$;

(2) 设z为由方程$z^3-xz-y=0$确定的x,y的隐函数，求z''_{xy}.

解 (1) 由$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^y}$和$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{2\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^y}$都在$\mathbb{R}^2$上连续知$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上连续可微. 于是有

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}(0,0)=\langle\nabla f(0,0),\vec{l}\rangle=\left\langle\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),(\cos\theta,\sin\theta)\right\rangle=\frac{1}{3}\cos\theta+\frac{2}{3}\sin\theta.$$

(2) 方程$z^3-xz-y=0$两边对x求导，得$3z^2z'_x-z-xz'_x=0$, 解得

$$z'_x=\frac{z}{3z^2-x}.$$

上式两边对y求导，得

$$z''_{xy}=\frac{z'_y(3z^2-x)-z\cdot 6zz'_y}{(3z^2-x)^2}=-\frac{(3z^2+x)z'_y}{(3z^2-x)^2}.$$

方程$z^3-xz-y=0$两边对y求导，得$3z^2z'_y-xz'_y-1=0$, 解得

$$z'_y=\frac{1}{3z^2-x}.$$

于是有

$$z''_{xy}=-\frac{3z^2+x}{(3z^2-x)^3}.$$

□

草 稿 区

得 分

三、(15分) 在曲线$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \mathrm{e}^t$上求一点，使得该曲线在此点的切线平行于平面$\sqrt{3}x + y - 4 = 0$.

解 在点$(\cos t, \sin t, \mathrm{e}^t)$处，曲线$x = \cos t, y = \sin t, z = \mathrm{e}^t$的切向量是$(-\sin t, \cos t, \mathrm{e}^t)$, 平面$\sqrt{3}x+y-4 = 0$的法向量是$(\sqrt{3}, 1, 0)$. 切线平行于平面当且仅当这两个向量正交，于是有

$$-\sqrt{3}\sin t + \cos t = 0.$$

因为

$$-\sqrt{3}\sin t + \cos t = -2\left(\sin t\cos\frac{\pi}{6} - \cos t\sin\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right),$$

所以由$-\sqrt{3}\sin t + \cos t = 0$解得$t = k\pi + \dfrac{\pi}{6}$, 对应的切点为

$$\left((-1)^k\frac{\sqrt{3}}{2}, (-1)^k\frac{1}{2}, \mathrm{e}^{k\pi+\frac{\pi}{6}}\right),$$

其中$k \in \mathbb{Z}$. $\square$

草 稿 区

得 分

四、(15分) 求函数$f(x,y,z)=xyz$在条件$x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$下的极值.

解 由拉格朗日乘子法，解方程组$\begin{cases} yz+2\lambda x+\mu=0, \\ xz+2\lambda y+\mu=0, \\ xy+2\lambda z+\mu=0, \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0. \end{cases}$ 由前三个方程，根据齐次线性方程组有非零解的充要条件得$\begin{vmatrix} yz & x & 1 \\ xz & y & 1 \\ xy & z & 1 \end{vmatrix}=0$, 故$(x-y)(y-z)(z-x)=0$, 从而$x=y$或$y=z$或$z=x$. 再结合后两个方程解得条件临界点$\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

因为圆S: $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$是有界闭集，所以$f(x,y,z)$在约束条件S下取得最小值和最大值. 因为条件最值点都是条件极值点，现只有两个不同的条件临界值$-\dfrac{\sqrt{6}}{18}$和$\dfrac{\sqrt{6}}{18}$，所以$f(x,y,z)$在约束条件S下最小值为$-\dfrac{\sqrt{6}}{18}$, 最大值为$\dfrac{\sqrt{6}}{18}$. 于是6个条件临界点全是条件最值点，从而全是条件极值点. $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$是条件极小点，条件极小值为$-\dfrac{\sqrt{6}}{18}$, $\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$是条件极大点，条件极大值为$\dfrac{\sqrt{6}}{18}$. □

草 稿 区

得 分

五、(15分) 设n元函数$f(X)$在$X_0 \in \mathbb{R}^n$的一个邻域内所有二阶偏导数都连续, 且$\nabla f(X_0) = 0$, $f(X)$在X_0的黑塞矩阵$H_f(X_0)$为正定矩阵. 证明：存在$\delta > 0$和$\lambda > 0$, 使得当$\Delta X \in \mathbb{R}^n$且$0 < |\Delta X| < \delta$时，就有$f(X_0 + \Delta X) - f(X_0) > \lambda|\Delta X|^2$.

证 由$\nabla f(X_0) = 0$知X_0是$f(X)$的临界点, 故有

$$f(X_0 + \Delta X) = f(X_0) + \frac{1}{2}\Delta X \cdot H_f(X_0) \cdot \Delta X^T + o\left(|\Delta X|^2\right),$$

其中$\Delta X \in \mathbb{R}^n$.
因为$H_f(X_0) > 0$, 所以存在常数$c > 0$使得

$$\Delta X \cdot H_f(X_0) \cdot \Delta X^T \geqslant c|\Delta X|^2, \quad \forall\, \Delta X \in \mathbb{R}^n.$$

事实上, 可设$|\Delta X| \neq 0$. 记$S^{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^n | \; |X| = 1\}$, 它是$\mathbb{R}^n$中的单位球面, 这是一个有界闭集从而为紧集, 在其上定义的函数

$$g(X) = X \cdot H_f(X_0) \cdot X^T,\ X \in S^{n-1}$$

是连续函数, 从而有最小值$c > 0$, 取$X = \frac{1}{|\Delta X|}\Delta X \in S^{n-1}$, 可得所要的结论.
由于

$$\lim_{|\Delta X| \to 0} \frac{o\left(|\Delta X|^2\right)}{|\Delta X|^2} = 0,$$

从而存在$\delta > 0$, 使得

$$\left|o\left(|\Delta X|^2\right)\right| < \frac{c}{4}|\Delta X|^2,\ \ \Delta X \in \mathbb{R}^n,\ \ |\Delta X| < \delta.$$

取$\lambda = \dfrac{c}{4} > 0$, 则当$\Delta X \in \mathbb{R}^n$且$0 < |\Delta X| < \delta$时，就有

$$\begin{aligned}
& f(X_0 + \Delta X) - f(X_0) \\
= & \frac{1}{2}\Delta X \cdot H_f(X_0) \cdot \Delta X^T + o\left(|\Delta X|^2\right) \\
> & \frac{c}{2}|\Delta X|^2 - \frac{c}{4}|\Delta X|^2 \\
= & \frac{c}{4}|\Delta X|^2 \\
= & \lambda|\Delta X|^2.
\end{aligned}$$

□

草 稿 区

得 分

六、(10分) 设D是$\mathbb{R}^n$中的凸开区域，$F:D\to\mathbb{R}^n$是可微映射，对任意$X\in D$, 雅可比矩阵$J_F(X)$都是正定矩阵，证明：F是单射.

证 反证. 若F不是单射，则存在$X_0\in D$, $X_1\in D$, $X_0\neq X_1$, 使得$F(X_0)=F(X_1)$. 由D是$\mathbb{R}^n$中的凸开区域知以X_0,X_1为端点的线段在D中. 以X_0,X_1为端点的线段可表示为

$$X=(1-t)X_0+tX_1,\ t\in[0,1].$$

令

$$\varphi(t)=\langle X_1-X_0,F((1-t)X_0+tX_1)\rangle,\ t\in[0,1],$$

则$\varphi(t)$在$[0,1]$可微，

$$\varphi(0)=\langle X_1-X_0,F(X_0)\rangle=\langle X_1-X_0,F(X_1)\rangle=\varphi(1).$$

根据罗尔定理知存在$t_0\in(0,1)$, 使得$\varphi'(t_0)=0$. 记$\xi=(1-t_0)X_0+t_0X_1$, 则

$$\varphi'(t_0)=(X_1-X_0)\cdot J_F(\xi)\cdot(X_1-X_0)^T.$$

因为雅可比矩阵$J_F(\xi)$是正定矩阵，$X_1-X_0\neq O$, 所以

$$(X_1-X_0)\cdot J_F(\xi)\cdot(X_1-X_0)^T>0,$$

这与$\varphi'(t_0)=0$矛盾! $\square$