子列

数学分析I

第23讲

November 28, 2022

在一个数列

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

中按它原有的顺序任意选取出无穷多项, 构成一个新的数列, 称为原数列$\{x_n\}$的一个子列. 假如子列的第k项是原数列的第n_k项, 即组成该子列的项是

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots,$$

我们就把该子列记为$\{x_{n_k}\}$. 例如:

$$\begin{aligned} &\{x_{2k-1}\}: &&x_1, x_3, x_5, \ldots; \\ &\{x_{2k}\}: &&x_2, x_4, x_6 \ldots; \\ &\{x_{k^2}\}: &&x_1, x_4, x_9, \ldots. \end{aligned}$$

注意, (1) 子列$\{x_{n_k}\}$的下标是k而不是n_k. 因此, 当我们说$\{x_{n_k}\}$收敛到a时, 是指 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. (2) 由于子列的排列顺序和原数列相同, 因此, 把k映到n_k的映射是$\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$的严格递增的映射. 于是对任意$k$, 有$n_k \geqslant k$.

子列是研究数列收敛性的一个重要工具. 下面的定理给出了子列极限和原数列极限之间的关系.

定理 1

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则$\{x_n\}$的任意子列$\{x_{n_k}\}$都收敛, 并且极限也是$a$.

证明

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在正整数$N$, 当$n > N$时,

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

由于$n_k \geqslant k$, 可取$K = N$, 则当$k > K$时, $n_k \geqslant k > K = N$. 这时就有

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

完成证明.

令$x_n = \begin{cases} 1, & n\text{是素数}, \\ 0, & n\text{不是素数}, \end{cases}$ 则对任意大于1的整数m，都有$\lim\limits_{k\to\infty} x_{mk} = 0$，但$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在.

练习6.2第1题

证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$.

思考题

如何推广上面练习题的结论？

判断下面的命题是否成立.

设对于$\{x_n\}$的无穷多个子列$a_{n_k}, a_{m_k}, \cdots$, 每个子列的极限都是0, 且对任意正整数n, x_n恰是其中一个子列的项，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(A) 成立

(B) 不成立

我们可以看出, 定理1与2.6节的海涅定理是很相似的. 这个定理经常被用来证明一个数列$\{x_n\}$不收敛. 如果一个数列的两个子列收敛到不同的值, 从上面的定理就可以断言$\{x_n\}$不收敛.

例 1

设$x_n = \sin \frac{n\pi}{8}$, 求证$\{x_n\}$发散.

证明

取$\{x_n\}$的两个子列$\{x_{8k}\}$和$\{x_{16k+4}\}$, 则

$$x_{8k} = \sin \frac{8k\pi}{8} = \sin k\pi = 0;$$

$$x_{16k+4} = \sin \frac{16k\pi + 4\pi}{8} = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$\{x_{8k}\}$收敛到0, 而$\{x_{16k+4}\}$收敛到1, 因此$\{x_n\}$发散.

无界数列必有无穷大子列

定理 2

若$\{x_n\}$是一个无界数列, 则存在子列$x_{n_k} \to \infty$.

下面是一个构造性证明，逐项来构造满足要求的子列.

证明

由$\{x_n\}$无界, 对任意$M > 0$, 都存在n使$|x_n| > M$.

特殊地, 取$M_1 = 1$, 存在n_1使$|x_{n_1}| > 1$.

再取$M_2 = \max\{2, |x_1|, \ldots, |x_{n_1}|\}$, 存在$n_2$使$|x_{n_2}| > M_2$. 于是有$|x_{n_2}| > 2$, $x_{n_2} \neq x_1, \cdots, x_{n_2} \neq x_{n_1}$, 这时显然有$n_2 > n_1$.

依此类推, 得到一列正整数$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, 满足$|x_{n_k}| > k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. 因此, 子列$x_{n_k} \to \infty$ $(k \to \infty)$.

定理 3

设$\{x_n\}$是一个数列, A是一个实数. 则以下两个条件等价:

(1) 存在$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$收敛到A;

(2) A的任意邻域都含有$\{x_n\}$的无穷多项.

这里(2)⇒(1)的证明也是逐项来构造满足要求的子列.

可以证明, 数列$\{\sin n\}$在$[-1, 1]$中稠密. 由定理3知$[-1, 1]$的每个点都是$\{\sin n\}$收敛子列的极限点.

证明

(1)⇒(2). 由子列$\{x_{n_k}\}$收敛到A, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在正整数K, 当$k > K$时成立$x_{n_k} \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. 因而在邻域$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$内含有$\{x_n\}$的无穷多项.

(2)⇒(1). 依题意, 对任意$\varepsilon > 0$, 在区间$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$中都含有$\{x_n\}$的无穷多项.

特殊地, 取$\varepsilon = 1$, 存在n_1使得$|x_{n_1} - A| < 1$. 取$\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2}$, 由于在$\left(A-\dfrac{1}{2}, A+\dfrac{1}{2}\right)$中含有$\{x_n\}$的无穷多项, 因而可取到$n_2 > n_1$, 使$|x_{n_2} - A| < \dfrac{1}{2}$. 依此类推, 可取到$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, 使得$|x_{n_k} - A| < \dfrac{1}{k}$. 于是子列$\{x_{n_k}\}$收敛到$A$.

我们知道, 收敛的数列一定是有界的, 但反过来, 我们很容易找到有界数列不收敛的例子. 另一方面, 如果进一步考虑子列, 上面的定理表明: 无界的数列一定有发散到∞的子列. 那么, 有界数列是否有收敛的子列呢? 下面的"致密性定理"给出了肯定地回答. 该定理又称为"波尔查诺-外尔斯特拉斯(Bolzano-Weierstrass)定理".

定理 4 (致密性定理)

任一有界数列必有收敛子列.

习题6(B)第1题

证明任何数列必有单调子列.

用单调收敛定理证明致密性定理

因为任何数列必有单调子列，所以任一有界数列必有单调有界子列，根据单调收敛定理知该子列收敛.

我们用区间套定理来证明.

设$\{x_n\}$是一个有界数列, 即有实数a, b使$a \leqslant x_n \leqslant b$. 把$[a, b]$等分成两个区间$\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$. 这两个区间中至少有一个含有$\{x_n\}$中的无穷多项, 把这一区间记为$[a_1, b_1]$, 如果两个区间都含有$\{x_n\}$中的无穷多项, 则任取一个记为$[a_1, b_1]$. 再等分$[a_1, b_1]$为两个区间, 选其中含有$\{x_n\}$中无穷多项的记为$[a_2, b_2]$. 重复以上过程, 得到一列闭区间$\{[a_n, b_n]\}$, 满足: 每个$[a_n, b_n]$都含有$\{x_n\}$中的无穷多项, 并且

(i) $[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$;

(ii) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0\ (n \to \infty)$.

由区间套定理, 有唯一的$\xi \in [a, b]$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$.

用区间套定理证明致密性定理（续完）

下面在$\{x_n\}$中选取出一个子列$\{x_{n_k}\}$收敛到ξ.

在$[a_1, b_1]$中任取$\{x_n\}$中的一项，记为x_{n_1}. 由于$[a_2, b_2]$中含有$\{x_n\}$中无穷多项，因此可找到$n_2 > n_1$使$x_{n_2} \in [a_2, b_2]$. 依此类推，可以找到一列正整数$n_1 < n_2 \cdots < n_k < \cdots$，使$x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. 即$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

令$k \to \infty$，由于$a_k \to \xi$, $b_k \to \xi$，由两边夹定理知，$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$收敛到ξ.

思考题

如何用致密性定理证明区间套定理？

判断下面的命题是否成立.

若数列$\{x_n\}$的任何子列都不收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

(A) 成立

(B) 不成立

设点集$S \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 如果α的任何空心邻域中都含有点集S中的点, 则称α为集S的聚点.

例如，0是$\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$的聚点，$[0,1]$的每个点都是$\mathbb{Q} \cap (0,1)$的聚点.

设点集$S \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 则以下各命题彼此等价.

(1) α为集S的聚点.

(2) α的任何空心邻域中都含有点集S中无穷多个点.

(3) 存在$\{x_n\} \subseteq S$, 使得$x_n \neq \alpha$, $n = 1, 2, \cdots$, 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

(4) 存在$\{x_n\} \subseteq S$, 使得对任何两个不同的正整数i和j, 有$x_i \neq x_j$, 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

聚点定则

有界无穷点集必有聚点.

用致密性定理证明聚点定则

设S为有界无穷点集. 从S中依次取出互不相同的点$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$排成一列,于是得到有界数列$\{x_n\}$. 由致密性定理知其中必有收敛子列, 不妨设数列$\{x_n\}$本身收敛于$\alpha$, 亦即有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

往证α即为S的聚点. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, 故对任何$\varepsilon > 0$, 都存在$N$, 使当$n > N$时, 就有

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon,$$

亦即$x_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$. 因诸$x_n$互不相同, 故知$\alpha$为$S$的聚点.

用聚点定则证明致密性定理

证明

设$\{x_n\}$为有界数列. 若有某数α在数列$\{x_n\}$中无穷次出现, 亦即有无穷多项的值都是α, 则这些项按原次序排列就构成$\{x_n\}$的一个收敛子列. 致密性定理当然成立.

否则, 任何一个数在$\{x_n\}$中都至多出现有限多次, 于是$\{x_n\}$有无穷多个互不相同的项，从而相应的集合是有界无穷点集. 由聚点定则知这个点集必有聚点α. 于是由定理3知$\{x_n\}$有收敛于α的子列. 这就证明了致密性定理.

证明

必要性在第二章已经证明, 只须证充分性.

首先证明$\{x_n\}$是一个有界数列. 依题意, 取$\varepsilon = 1$, 则存在正整数N_0, 使当$m, n > N_0$时, 成立

$$|x_n - x_m| < 1.$$

特殊地, 取$m = N_0 + 1$, 则$|x_n - x_{N_0+1}| < 1$, 于是有

$$|x_n| < |x_{N_0+1}| + 1, \forall n > N_0.$$

这表明$\{x_n\}$有界. 由致密性定理, $\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, 以下证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

用致密性定理证明柯西收敛原理（续完）

对任意$\varepsilon > 0$, 存在正整数K, 当$k > K$时, 成立

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

依题意, 对于以上$\varepsilon > 0$, 存在正整数N, 当$m, n > N$时, 成立

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

记$k_0 = \max\{K+1, N+1\}$, 则$k_0 > K$而$n_{k_0} \geqslant k_0 > N$. 因而, 当$n > N$时, 成立

$$|x_n - a| \leqslant |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 完成证明.

证明

设闭区间列$\{[a_n, b_n]\}$满足:

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], n = 1, 2, 3, \ldots;$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$

于是, 对任意$\varepsilon > 0$, 存在正整数N, 当$n > N$时, 成立$|b_n - a_n| < \varepsilon$. 此时, 对任意$m, n > N$, 我们不妨设$m > n$, 于是有$a_n \leqslant a_m \leqslant b_m \leqslant b_n$, 所以

$$|a_n - a_m| \leqslant |b_n - a_n| < \varepsilon; \quad |b_n - b_m| \leqslant |b_n - a_n| < \varepsilon.$$

由柯西收敛原理, 知$\{a_n\}, \{b_n\}$都收敛. 又因为$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) \to 0$, 所以存在一个实数$\xi$满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi \in [a_k, b_k], \ (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

最后, ξ的唯一性是显然的.