关于周期函数之和的周期性

赵显曾

(东南大学数学力学系,南京 210018)

摘要 本文用数学分析的方法,证明了定理:设 $f(x)$,$g(x)$ 是定义于 R 上的周期函数,它们的最小正周期分别为 T_1,T_2. 如果 $f(x)$,$g(x)$ 至少有一个是连续的,且 T_1,T_2 不可公度,则 $f(x)+g(x)$ 是非周期函数. 在某种意义下,这个定理是"最佳可能"的.

关键词 函数空间;周期函数;非周期函数

中图法分类号 O 174.1

所谓周期函数,此处均指定义在 R 上的实值周期函数,与人们对周期函数的直观认识一致. 有关周期函数的重要意义是众所周知的. 至于两个周期函数迭加的周期性,是一个古老而且十分有趣的问题,但作为周期函数论尚处于研究与发展之中.

两个周期函数的周期对它们迭加后的周期性有着重大的影响. 文[1]正确地指出:定义域相同的两个周期函数,如果它们的周期是可公度的,则其和仍为周期函数. 当两个周期函数的周期不可公度时,情况就复杂得多了. 文[2]曾指出:两个连续周期函数,如果周期是不可公度的,那么这两个函数的和不是周期函数. 但是,有关此论断的证明至今尚未见公开报道. 事实上,仅有"周期是不可公度的"条件,该结论欠妥当,应改为"最小正周期是不可公度的",结论才正确. 文[3]中证明了:周期函数 $\sin x$ 与 $\sin \alpha x$ 之和为非周期函数,其中 α 为无理数. 文[4]中指出:周期函数

$$f(x)=x-[x], \qquad g(x)=\sin x, \qquad \forall x \in R$$

的和 $f(x)+g(x)$ 为非周期函数,但是没有证明. 本文的主要目的是证明下面的一般化定理:

定理 设 $f(x)$,$g(x)$ 是定义于 R 上的周期函数,它们的最小正周期分别为 T_1,T_2. 如果 $f(x)$,$g(x)$ 至少有一个是连续的,且 T_1,T_2 不可公度,则 $f(x)+g(x)$ 为非周期函数.

如果去掉定理中"$f(x)$,$g(x)$ 至少有一个是连续的"条件,结论未必成立. 因此,在某种意义下,这个定理是"最佳可能"的. 在以下的证明中,仅用到数学分析的典型方法,因此,本文证明较为简单. 在证明定理之前,首先证明一个引理.

引理 设 a,b 是不可公度的两个正数,则存在数偶序列 (m_k, n_k),$k=1,2,3,\cdots$,使得

收稿日期:1994-02-25;修改稿收到日期:1994-04-09.

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\lim_{k\to\infty}(m_k a + n_k b) = 0$$

其中 m_k,n_k 都是整数.

证 不妨设 $0 < a < b$,且记 $b = a_0, a = a_1$. 根据辗转相除的方法,存在唯一的正整数 i_1 及 $a_2 \in (0,a_1)$,使得

$$a_0 = i_1 a_1 + a_2$$

且 a_1,a_2 不可公度. 同理,存在唯一的正整数 i_2 及 $a_3 \in (0,a_2)$,使得

$$a_1 = i_2 a_2 + a_3$$

且 a_2,a_3 不可公度. 依此类推,存在唯一的正整数 i_k 及 $a_{k+1} \in (0,a_k)$,使得

$$a_{k-1} = i_k a_k + a_{k+1}$$

且 a_k,a_{k+1} 不可公度($k = 3,4,5,\cdots$).

因为 $a_3 < a_2$ 及 $a_3 \leqslant a_1 - a_2$,有

$$a_3 < \{a_2 + (a_1 - a_2)\}/2 = a_1/2 = a/2$$

又由 $a_{2l+1} < a_{2l}$ 及 $a_{2l+1} \leqslant a_{2l-1} - a_{2l}$,有

$$a_{2l+1} < a_{2l-1}/2 < a_{2l-3}/2^2 < \cdots < a_1/2^l \quad (l = 2,3,4,\cdots)$$

考虑到 $a_{k+1}<a_k \quad (k=1,2,3,\cdots)$,所以有

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

但是 $\quad a_2 = a_0 - i_1 a_1 = - i_1 a + b = m_1 a + n_1 b$

其中,$m_1 = - i_1 < 0, n_1 = 1 > 0$.

$$a_3 = a_1 - i_2 a_2 = (1 - i_2 m_1)a - i_2 n_1 b = m_2 a + n_2 b$$

其中,$m_2 = 1 - i_2 m_1 > 0, n_2 = - i_2 n_1 < 0$,即 m_1 与 m_2,n_1 与 n_2 均异号,且 $|m_2| > |m_1|, |n_2| \geqslant |n_1|$.

一般,由数学归纳法可得

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_{k-1} - i_k a_k = (m_{k-2}a + n_{k-2}b) - i_k(m_{k-1}a + n_{k-1}b) \\ &= (m_{k-2} - i_k m_{k-1})a + (n_{k-2} - i_k n_{k-1})b = m_k a + n_k b, \quad (k = 3,4,5,\cdots) \end{aligned}$$

其中,整数 m_{k-1} 与 m_k,n_{k-1} 与 n_k 均异号,且当 $k\to\infty$ 时,有

$$|m_{k-1}| < |m_k| \to \infty, \qquad |n_{k-1}| < |n_k| \to \infty$$

综上,引理得证.

定理的证明:为了确定起见,假设周期函数 $f(x)$ 在 R 上连续,以证明 $f(x) + g(x)$ 不是周期函数. 假若不然,即 $f(x) + g(x)$ 是周期函数,那么必定存在一个正数 T,$\forall x \in R$,都有

$$f(x + T) + g(x + T) = f(x) + g(x)$$

即 $\quad f(x + T) - f(x) = g(x) - g(x + T) \equiv \varphi(x)$

以下,首先证明 $\varphi(x)$ 以 $mT_1 + nT_2$ 为周期,其中 m,n 为两个任意的整数. 事实上,由于 $f(x)$,$g(x)$ 分别以 T_1,T_2 为周期,所以 $\varphi(x)$ 既以 T_1 为周期又以 T_2 为周期,从而可知 $\varphi(x)$ 必以 $mT_1 + nT_2$ 为周期(其中 m,n 为任意整数). 于是,$\forall x \in R$,有

$$f(x + T + mT_1 + nT_2) - f(x + mT_1 + nT_2) = f(x + T) - f(x)$$

其次证明 $\varphi(x) = c$(常数),$\forall x \in R$. 用反证法. 假设存在 $x_1 \neq x_2$,使 $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. 由 $f(x)$ 的连续性,可知 $\varphi(x)$ 连续,因此,存在 $\delta > 0$,使当 $|x - x_2| < \delta$ 时,有

$$\varphi(x) \neq \varphi(x_1)$$

因为 T_1 与 T_2 不可公度,由引理可知,存在整数偶 (m_0,n_0),使

$$0 < |m_0 T_1 + n_0 T_2| < \delta$$

又存在整数 k,使

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$x_1 + k(m_0T_1 + n_0T_2) \in (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$$

由于 $\varphi(x)$ 以 $mT_1 + nT_2$ 为周期(m,n 为任意整数)，所以

$$\varphi(x_1 + k(m_0T_1 + n_0T_2)) = \varphi(x_1)$$

而这与 $x \in (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$ 时 $\varphi(x) \neq \varphi(x_1)$ 相矛盾. 因此有

$$\varphi(x) = c, \quad \forall\, x \in R$$

最后证明 $c=0$，由于

$$f(x+T) - f(x) = c, \quad \forall\, x \in R$$

所以对任意正整数 n，都有

$$f(x+nT) - f(x) = \sum_{k=1}^{n}\{f(x+kT) - f(x+(k-1)T)\} = nc$$

考虑到 $f(x)$ 是 R 上的连续的周期函数，在一个周期上的振幅为定值，故必有 $c=0$，即 $\forall\, x \in R$

$$f(x+T) - f(x) = 0, \qquad g(x+T) - g(x) = 0$$

从而 T 既是 $f(x)$ 的周期又是 $g(x)$ 的周期. 利用 T_1 与 T_2 分别为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小正周期，必存在两个正整数 p 与 q，使

$$pT_1 = T = qT_2$$

因而 T_1 与 T_2 可公度，这与已知条件相矛盾.

综上，定理得证.

作为定理证明方法的一个应用，可以证明：设 $f(x)$，$g(x)$ 是定义于 R 上的周期函数，它们的最小正周期分别为 T_1，T_2. 如果 $f(x)$，$g(x)$ 至少有一个是连续的，且 T_1，T_2 不可公度，对任意 $x \in R$ 都有 $f(x)g(x) \neq 0$，则乘积 $f(x)g(x)$ 不是周期函数.

参 考 文 献

1　吉米多维奇 Б П 著. 数学分析习题集. 李荣涷译. 上海：人民教育出版社，1958. 28

2　列维坦 Б М 著. 概周期函数. 余家荣，张延昌译. 上海：高等教育出版社，1956. 9

3　盖尔鲍姆 B R，奥姆斯特德 J M H 著. 分析中的反例. 高　枚译. 上海：科学技术出版社. 1980. 191

4　李运樵，敖武峰，裘兆泰. 微积分标准化试题集. 长沙：国防科技大学出版社，1993. 186

On Periodicity of The Sum of Periodic Functions

Zhao Xianzeng

(Department of Mathematics and Mechanics, Southeast University, Nanjing 210018)

Abstract: The following theorem is proved: let T_1, T_2 be two least positive periods of two periodic functions $f(x)$ and $g(x)$, respectively, which defined on the real line. If (1) T_1 and T_2 are non-commensurable, (2) one of $f(x)$ and $g(x)$ is a continuous function, then $f(x)+g(x)$ is aperiodic function. This theorem is optimally possible, in a manner.

Key words: function spaces; periodic functions; aperiodic functions

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net