

数学文化

见面课（五）



联系方式

李军 数学科学学院416办公室

邮箱: lijun@nankai.edu.cn

鼓励师生课下的联系和交流。上周已经建立了课程的飞书群，教学通知会发到飞书群。大家在学习中遇到问题，就及时通过飞书联系我。



- 千万不要错过平台上做题的截止时间！
即：每周日的晚上**23点30分**。

第4讲、第5讲测验题和第1次作业的截止时间都是10月23日（周日）的晚上23点30分。



下列集合中，哪些集合是可数无穷的集合？

A

整数集合

B

有理数集合

C

无理数集合

D

$\{(m, n) | m, n \in \mathbb{N}\}$

E

$[0, 1]$ 上可微函数全体组成的集合

F

整系数多项式全体组成的集合



提交

下面两个命题中哪个是真的？

- A 无穷多个无穷小量的乘积一定是无穷小量**
- B 无穷多个无穷小量的乘积未必是无穷小量**



提交

**说说你在数学文化的学习中感到困惑的问题
或很有兴趣的问题。**

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

平台上慕课内容的拓展



课堂讨论

- 对于预先给定的正整数 n ，“全体正实数”的集合与“全体正实数中去掉1、2、3、……、 n ”的集合之间，能否建立一一对应？



课堂讨论提示一

- 对于预先给定的正整数 n ，“全体正整数”的集合与“全体正整数中去掉1、2、3、……、 n ”的集合之间，能否建立一一对应？



课堂讨论提示二

- 正整数以外的数，自己对应到自己。



该命题如何推广？

- 定理：， 。



该命题如何推广？

- 定理：任意无限集中， $\dots\dots$ ， $\dots\dots$ 。



该命题如何推广？

- 定理：任意无限集中， \dots ，能够一一对应。



该命题如何推广？

- 定理：任意无限集中， \dots ，仍然与原集合能够一一对应。



该命题的推广

- 定理：任意无限集中，去掉有限个元素后，仍然与原集合能够一一对应。



在下面的希尔伯特旅馆场景中，时间长度是无限的，客人的生命也是无限的。希尔伯特旅馆第一天恰有一位客人，第二天这位客人离开，又来了两位客人，以后每天都有一位客人离开，又来了两位客人。在无穷多天之后，旅馆里一个客人都不在了，这种情况可能发生吗？

- ☐ A 可能发生
- ☐ B 不可能发生



提交

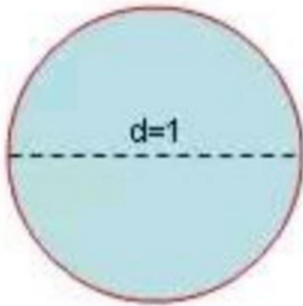
说谎者悖论

说谎者悖论的一种重新表述如下。
“这句话是假话”这句话对不对？

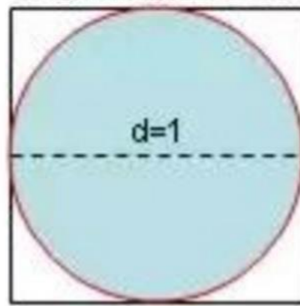
如果说这句话对，那么就得承认这句话是假话，因为这是这句话本来的意思；如果说这句话不对，那么就得承认这句话不是假话，可这样就承认这句话是对的。不管怎么回答，都会导致矛盾。

$\pi = 4$ 悖论

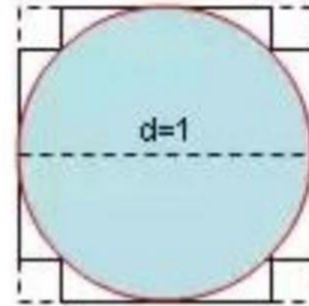
Draw a circle



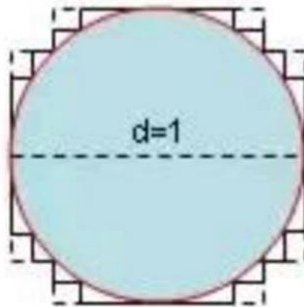
Draw a square around it
Perimeter = 4



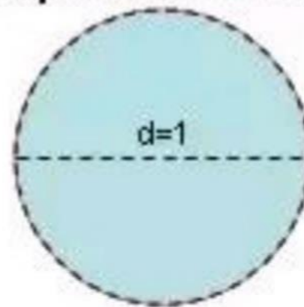
Remove corners.
Perimeter is still 4



Remove more corners.
Perimeter is still 4



Repeat to infinity



$$\pi = 4$$

汤姆森灯悖论

汤姆森灯悖论由哲学家詹姆斯·汤姆森提出，
陈述为：令一盏灯最初是亮着的，过 $1/2$ 分钟时
灯灭；再过 $1/4$ 分钟时灯亮；再过 $1/8$ 分钟时灯灭；
再过 $1/16$ 分钟时灯亮……如此地循环往复。注意
到无穷级数 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$ ，可知这一开灯关
灯序列的时长恰好是1分钟。问：到1分钟时，这
盏灯是亮着的还是灭着的？



视频：芝诺悖论、汤姆森灯悖论

- https://www.bilibili.com/video/BV1R5411x75C?from=search&seid=11323843004904357101&spm_id_from=333.337.0.0



视频：数学之外的悖论

- https://www.bilibili.com/video/BV1Hh411U7dk?from=search&seid=11323843004904357101&spm_id_from=333.337.0.0



逻辑智力题：真话村与谎话村

一个小岛上有两个村子，分别在小岛东侧与西侧，其中一个村子名叫“真话村”，真话村的居民永远说真话，另一个村子名叫“谎话村”，谎话村的居民永远说谎话。

一个外乡人到达了这个小岛，他知道这两个村子名字的由来，但不知道哪个村子是真话村。他找到一个村民，用一个“是”或“否”回答的问题就知道了哪个村子是真话村。怎么提问呢？

一道有挑战性的逻辑题

你驾驶的飞船在降落外星的时候坏了。幸好碰上可以可以帮助你修复飞船的三个外星人，不过他们要跟你玩儿一个游戏。

这三个外星人中有一个始终只说真话的诚实人，一个始终只说假话的骗子，还有一个有时真话有时假话的正常人。你可以提三个是或否的问题来确定三人的身份。

他们可以听懂你说的所有问题，并用“呼啦啦”或者“哇哈哈”来回答。你知道这两个单词意为“是”和“否”，但你并不知道哪个代表是，哪个代表否。同一个问题只能向一个外星人提问，你可以向一个外星人提多个问题，三个问题不一定需要同时提问。



视频：三王难题

- https://www.bilibili.com/video/BV1sx411S74S?from=search&seid=4580738638427738385&spm_id_from=333.337.0.0



希尔伯特

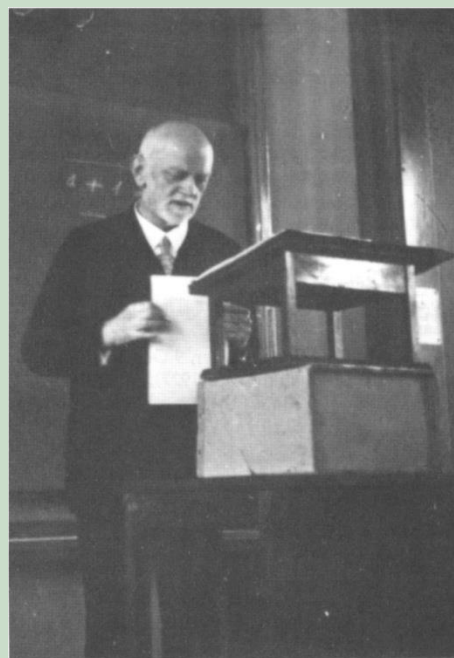
希尔伯特（德国，1862—1943年）是19世纪末和20世纪上半叶最伟大的数学家之一。他提出的23个问题更是功勋卓著、影响深远。

那是1900年8月在巴黎召开的国际数学家大会上，年仅38岁的希尔伯特做了题为《数学问题》的著名讲演，根据19世纪数学研究的成果和发展趋势提出23个问题，成为数学史上的一个重要里程碑。





希尔伯特。D.



Hilbert



在世纪之交提出的这**23**个问题，涉及现代数学的许多领域。一个世纪以来，这些问题激发着数学家们浓厚的研究兴趣，对**20**世纪数学的发展起着巨大的推动作用。



希尔伯特的23个问题

- 1.证明“连续统假设”，即证明“可数基数”与“连续统基数”之间不存在任何基数。
- 2.研究算术公理的相容性。
- 3.两个等底等高的四面体的体积相等。
- 4.直线作为两点间最短距离的问题。



5.李（**S.Lie**）的连续变换群概念，但不要定义群的函数的可微性假设。

6.物理学的公理化。

7.某些数的无理性和超越性。

8.素数问题。

9.在任意数域中证明最一般的互反定律。

10.丢番图方程的可解性。

11.系数为任意代数数的二次型。



12.阿贝尔域上的克罗内克定理在任意代数有理域上的推广。

13.不可能用仅有两个变数的函数解一般的七次方程。

14.证明某类完全函数系的有限性。

15.舒伯特(**Schubert**)计数演算的严格基础。

16.代数曲线与代数曲面的拓扑问题。



- 17.正定形式的平方和表示。**
- 18.用全等多面体构造空间。**
- 19.正则变分问题的解一定是解析的吗？**
- 20.一般边值问题。**
- 21.具有指定单值群的线性微分方程解的存在性证明。**
- 22.通过自守函数使解析关系单值化。**
- 23.变分法的进一步发展。**



本课程的教材请自己去买，有用！



下次“见面课”

2022年10月27日

（周四）



本次“见面课”结束

谢谢！

