第十二章 重积分

12.1 重积分的概念与性质

例 1 设$f(x)$在(x_0, y_0)点的某邻域内连续,

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r^2\right\},$$

求证:

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D f(x, y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(x_0, y_0).$$

证 设$f(x)$在(x_0, y_0)点的半径为r的邻域D内连续，由积分的中值定理，存在$(\xi_r, \eta_r) \in D$使

$$\iint_D f(x, y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi_r, \eta_r) \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi r^2 f(\xi_r, \eta_r).$$

易见$r \to 0$时$(\xi_r, \eta_r) \to (x_0, y_0)$. 再由连续性

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D f(x, y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(x_0, y_0).$$

□

例 2 设D是xy平面上的有界闭区域, D在x轴和y轴上投影的长度分别记为u和v, 求证:

$$\left|\iint_D (x-a)(y-b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant uv|D|,$$
$$\left|\iint_D (x-a)(y-b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{1}{4}u^2v^2,$$

其中(a, b)是D内任意一点, $|D|$表示D的面积.

证 显然有$|x - a| \leqslant u$, $|y - b| \leqslant v$.

$$\left|\iint_D (x-a)(y-b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint_D uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y = uv|D|.$$

可取长宽分别为u, v的长方形$[s.t] \times [c, d]$盖住D.

$$\left|\iint_D (x-a)(y-b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_s^t |x-a|dx \int_c^d |y-b|dy$$
$$= \tfrac{1}{2}\left((a-s)^2 + (t-a)^2\right) \cdot \tfrac{1}{2}\left((b-c)^2 + (d-b)^2\right) \leqslant \tfrac{1}{4}(t-s)^2(d-c)^2 = \tfrac{1}{4}u^2v^2.$$

□

例 3 设A是$\mathbb{R}^n$中的有界集, 任取标准长方体H使得$\overline{A} \subseteq H^\circ$, 令

$$f(X)=\begin{cases}1, & X\in A,\\ 0, & X\in H\backslash A,\end{cases}$$

求证: A是$\mathbb{R}^n$中J可测集的充要条件是$f(X)$在H上可积.

证 必要性. 设A是$\mathbb{R}^n$中的有界J可测集，下面用可积的充要条件证明$f(X)$在H上可积. 对于H的任意方体分割$\{V_i \big| i\in S\}$, 小长方体分为三类，第一类$\{V_i \big| i\in S_1\}$满足$V_i \subseteq A^\circ$, 第二类$\{V_i \big| i\in S_2\}$满足$V_i\cap \overline{A}=\emptyset$, 其余的为第三类，这类$\{V_i \big| i\in S_3\}$满足$V_i\cap\partial A\neq\emptyset$. 因为$A$是$\mathbb{R}^n$中的有界J可测集，所以$\partial A$是J零测集，从而对任意$\varepsilon>0$, 存在$H$的一个方体分割$\{V_i \big| i\in S\}$, 使得$\sum\limits_{i\in S_3}\Delta V_i<\varepsilon$. 令$M_i=\max\limits_{X\in V_i}f(X)$, $m_i=\min\limits_{X\in V_i}f(X)$, $\omega_i=M_i-m_i$. 则$\omega_i=0,\ i\in S_1\cup S_2$, $\omega_i=1,\ i\in S_3$, 从而

$$\sum_{i\in S}\omega_i\Delta V_i=\sum_{i\in S_3}\Delta V_i<\varepsilon.$$

因此由可积的充要条件知$f(X)$在H上可积.

充分性. 设$f(X)$在H上可积，则由可积的充要条件知对任意$\varepsilon>0$, 存在H的一个方体分割$\{V_i \big| i\in S\}$, 使得

$$\sum_{i\in S}\omega_i\Delta V_i<\varepsilon.$$

用上面的记号，$\partial A\subseteq\bigcup\limits_{i\in S_3}V_i$, 且

$$\sum_{i\in S_3}\Delta V_i=\sum_{i\in S}\omega_i\Delta V_i<\varepsilon.$$

按定义知∂A是J零测集，从而A在$\mathbb{R}^n$中是J可测集. □

例 4 设$I=\iiint_V\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$, 其中$V:\ x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, $|A|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>R>0$, 求证:

$$\frac{4\pi}{3}\ \frac{R^3}{|A|+R}\leqslant I\leqslant\frac{4\pi}{3}\ \frac{R^3}{|A|-R}.$$

证 当$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$时,

$$\frac{1}{|A|+R}\leqslant\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\leqslant\frac{1}{|A|-R}.$$

两边积分即得结论. □

例 5 (切比雪夫不等式) 设$p(x)$在$[a,b]$上非负连续, $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续、单增, 求证:

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\right)\\ \leqslant&\left(\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

证 由$f(x),g(x)$在$[a,b]$上单增且$p(x)\geqslant 0$，有$p(x)p(y)[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\geqslant 0$. 即

$$p(x)p(y)f(x)g(x)+p(x)p(y)f(y)g(y)-p(x)p(y)f(x)g(y)-p(x)p(y)f(y)g(x)\geqslant 0.$$

关于(x,y)在区域$D=[a,b]\times[a,b]$积分，化为累次积分后，将积分变量y换成x, 就得证了. □

12.2 二重积分的计算

例 1 计算二重积分$\iint_D(x^2-3xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D: $1\leqslant x\leqslant 2$, $\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant 2$.

解

$$\begin{aligned}\iint_D(x^2-3xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^2(x^2-3xy)\mathrm{d}y\\&=\int_1^2(2x^2-7x+\frac{3}{2x})\mathrm{d}x=-\frac{35}{6}+\frac{3}{2}\ln 2.\end{aligned}$$ □

例 2 计算二重积分$\iint_D\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D: $\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2$.

解 $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r=\pi(\mathrm{e}^{-\pi^2}-\mathrm{e}^{-4\pi^2})$. □

例 3 求证:

$$\iint_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\ln 2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u,$$

其中D为$xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$在第一象限所围的范围.

证 作变量变换：$xy=u,\ \frac{y}{x}=v$, 则$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=\frac{1}{2v}$, $1\leqslant u\leqslant 2,\ 1\leqslant v\leqslant 4.$

$$\iint_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}u\int_1^4 f(u)\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}v=\ln 2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u.$$

□

例 4 交换累次积分的次序: $\displaystyle\int_0^a\mathrm{d}x\int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+2a}f(x,y)\mathrm{d}y.$

解

$$\begin{aligned}&\int_0^a\mathrm{d}x\int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+2a}f(x,y)\mathrm{d}y\\=&\int_0^a\mathrm{d}y\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{a}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_0^a f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{2a}^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-2a}^{a}f(x,y)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

例 5 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且

$$f(x)=1+\lambda\int_x^1 f(t)f(t-x)\mathrm{d}t,$$

其中λ是常数. 证明: $\lambda\leqslant\dfrac{1}{2}$.

证 对$f(x)$在$[0,1]$上积分，得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1+\lambda\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(t)f(t-x)\mathrm{d}t.$$

改变积分次序并利用对称性得

$$\begin{aligned}&\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(t)f(t-x)\mathrm{d}t=\int_0^1\mathrm{d}t\int_0^t f(t)f(t-x)\mathrm{d}x\\=&\int_0^1\mathrm{d}t\int_0^t f(t)f(y)\mathrm{d}y\ (y=t-x)=\frac{1}{2}\iint_D f(t)f(y)\mathrm{d}t\mathrm{d}y\ (D=[0,1]\times[0,1])\\=&\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^2.\end{aligned}$$

记$s=\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, 就有$s=1+\dfrac{\lambda}{2}s^2$, 由二次函数的判别式$\Delta=1-2\lambda\geqslant 0$得$\lambda\leqslant\dfrac{1}{2}$. □

例 6 求$\displaystyle\iint_D\sqrt{\big|x-|y|\big|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D=[0,2]\times[-1,1]$.

解　记$D_1=[0,2]\times[0,1]$, 则由对称性知$\iint_D\sqrt{\big||x-|y|\big|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\sqrt{\big|x-|y|\big|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 记$D_2=\big\{(x,y)\in D_1\big|x\leqslant y\big\}$, $D_3=\big\{(x,y)\in D_1\big|x\geqslant y\big\}$, 则由重积分的区域可加性得

$$
\begin{aligned}
&\iint_{D_1}\sqrt{\big|x-|y|\big|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iint_{D_2}\sqrt{\big|x-|y|\big|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\sqrt{\big|x-|y|\big|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\sqrt{y-x}\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^2\sqrt{x-y}\mathrm{d}x\\
=&\frac{2}{3}\int_0^1y^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y+\frac{2}{3}\int_0^1(2-y)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y\\
=&\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(2-y)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1\\
=&\frac{16\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}
$$

于是$\iint_D\sqrt{\big|x-|y|\big|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{32\sqrt{2}}{15}$. □

例 7 计算二重积分$\iint_D|\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由$0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\pi$所确定的闭区域.

解　注意到$|\cos x|$是周期为π的函数，就有

$$原式=\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_0^\pi|\cos(x+y)|\mathrm{d}y=\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_0^\pi|\cos y|\mathrm{d}y=\int_0^\pi2\mathrm{d}x=2\pi.$$

□

例 8 设$D=\big\{(x,y)\big|x^2+y^2\leqslant1\big\}$, 求证：

$$\frac{61}{165}\pi<\iint_D\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{2}{5}\pi.$$

证　记$I=\iint_D\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$由极坐标变换得

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sin(r^3)r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1r\sin(r^3)\mathrm{d}r.$$

当$x>0$时，有$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$, 故而

$$\frac{61}{165}\pi=2\pi\int_0^1r\left(r^3-\frac{x^9}{6}\right)\mathrm{d}r<I<2\pi\int_0^1r\cdot r^3\mathrm{d}r=\frac{2}{5}\pi.$$

□

例 9 求曲面$z=x^2+y^2$与$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$所围成的空间区域的体积.

解 由$\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=2-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 得$z=(2-z)^2$, 解得$z=1$, $z=4$(舍去). 由此知该空间区域在xy平面的投影区域为$D=\big\{(x,y)\big|x^2+y^2\leqslant 1\big\}$, 于是该空间区域的体积为

$$V=\iint_D\left[2-\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(2-r-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{5}{6}\pi.$$

□

例 10 求$\displaystyle\iint_D\frac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D=\left\{(x,y)\left|2\leqslant\frac{x}{x^2+y^2}\leqslant 4, 2\leqslant\frac{y}{x^2+y^2}\leqslant 4\right.\right\}$.

解 记$f(x,y)=\dfrac{1}{xy}$, 则$f(x,y)=f(y,x)$. 令$D_1=\big\{(x,y)\in D\big|x\geqslant y\big\}$, 则由$D$关于直线$y=x$对称知

$$\iint_D\frac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\frac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解$\begin{cases} 4(x^2+y^2)-x=0, \\ 2(x^2+y^2)-y=0 \end{cases}$ 得交点$(0,0)$, $\big(\frac{1}{5},\frac{1}{10}\big)$, 由此可见在极坐标系中,

$$D_1=\left\{(r,\theta)\left|\arctan\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\frac{\cos\theta}{4}\leqslant r\leqslant\frac{\sin\theta}{2}\right.\right\}.$$

故

$$\begin{aligned}&\iint_D\frac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\frac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\cos\theta}{4}}^{\frac{\sin\theta}{2}}\frac{1}{r^2\sin\theta\cos\theta}r\mathrm{d}r\\ =&\ 2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(2\tan\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}\theta=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln 2+\ln\tan\theta}{\tan\theta}\mathrm{d}(\tan\theta)\\ =&\ \left(2\ln 2\cdot\ln\tan\theta+\ln^2\tan\theta\right)\Big|_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}=\ln^2 2.\end{aligned}$$

□

例 11 求曲线$xy=4$, $xy=8$, $xy^3=5$, $xy^3=15$在第一象限所围区域的面积.

解 作变量变换：$u=xy$, $v=xy^3$, 则

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ y^3 & 3xy^2 \end{vmatrix}=2xy^3=2v,$$

从而$\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=\left|\dfrac{1}{2v}\right|=\dfrac{1}{2v}$, 故

$$S=\int_4^8\mathrm{d}u\int_5^{15}\frac{1}{2v}\mathrm{d}v=2\ln 3.$$

□

例 12 设$f(x)$是$[-2,2]$上的连续偶函数，$D=[-1,1]\times[-1,1]$, 求证：

$$\iint_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^2(2-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

解 作变量变换：$s=x+y,\ t=x-y$, 则积分区域变为$D_1=\big\{(s,t)\big||s|+|t|\leqslant 2\big\}$,

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$$

于是

$$\iint_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}f(t)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

记$D_2=\big\{(s,t)\in D_1\big|s\geqslant 0,t\geqslant 0\big\}$, 则由$f(x)$是$[-2,2]$上的偶函数以及积分区域关于$s$轴，$t$轴对称得

$$\begin{aligned}&\iint_{D_1}f(t)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=4\iint_{D_2}f(t)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\=\ &2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\int_0^{2-t}\mathrm{d}s=2\int_0^2(2-t)f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

12.3 三重积分的计算

例 1 计算三重积分$\iiint_V\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x+y+z+1)^3},\ V:x+y+z\leqslant 1,\ x,y,z\geqslant 0.$

解

$$\iiint_V\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x+y+z+1)^3}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(x+y+z+1)^3}=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$$

□

例 2 设$V=\big\{(x,y,z)\big|x^2+y^2\leqslant 2az,\ x^2+y^2+z^2\leqslant 3a^2\big\}$, 其中$a>0$, 计算三重积分

$$\iiint_V(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

解 使用柱坐标变换：$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z$, 注意到曲面$x^2+y^2=2az$ 与$x^2+y^2+z^2=3a^2$的交线在xy平面的投影为$x^2+y^2=2a^2$, 即知$0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}a$, 于是$V$对应于

$$V'=\left\{(r,\theta,z)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}a,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\frac{r^2}{2a}\leqslant z\leqslant\sqrt{3a^2-r^2}\right\}.$$

记$D=\left\{(r,z)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}a,\frac{r^2}{2a}\leqslant z\leqslant\sqrt{3a^2-r^2}\right\}$, 就有

$$\begin{aligned}
&\iiint_V (x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{V'}(r\cos\theta+r\sin\theta+z)^2\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\\
=\;&\iint_D r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}(r\cos\theta+r\sin\theta+z)^2\mathrm{d}\theta\\
=\;&\iint_D r\cdot 2\pi(r^2+z^2)\mathrm{d}r\mathrm{d}z\\
=\;&2\pi\int_0^{\sqrt{2}a}\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}}r(r^2+z^2)\mathrm{d}z\\
=\;&2\pi\left(\frac{9\sqrt{3}}{5}-\frac{97}{60}\right)a^5.
\end{aligned}$$

□

例 3 计算三重积分$\displaystyle\iiint_V\frac{b-x}{[(b-x)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V:\ x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\ (0<a<b).$

解 令$x=r\cos\varphi,\ y=r\cos\theta\sin\varphi,\ z=r\sin\theta\sin\varphi.$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\mathrm{d}r\int_0^\pi\frac{(b-r\cos\varphi)r^2\sin\varphi}{(r^2+b^2-2br\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^3}{3b^2}.$$

□

例 4 计算三重积分$\displaystyle\iiint_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ V:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\ (a,b,c>0).$

解 令$x=ar\cos\theta\sin\varphi,\ y=br\sin\theta\sin\varphi,\ z=cr\cos\varphi,\ J=abcr^2\sin\varphi.$

$$I=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi^2abc}{4}.$$

□

例 5 设V是以$(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$, $(0,0,2)$, $(0,2,2)$, $(2,2,2)$为顶点的棱台，计算三重积分$\displaystyle\iiint_V\frac{1}{y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

解 z的取值范围是$[1,2]$, 对任何$z\in[1,2]$, 过点$(0,0,z)$垂直于z轴的平面截棱台得到的截面是以$(0,0,z)$, $(0,z,z)$, (z,z,z) 为顶点的三角形，截面在xy平面的投影区域为$D(z)=$

$\{(x,y)\big|0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\}$. 于是

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \frac{1}{y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_1^2\mathrm{d}z\iint_{D(z)}\frac{1}{y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=\ &\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}y\int_0^y\frac{1}{y^2+z^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^z\frac{y}{y^2+z^2}\mathrm{d}y\\
=\ &\int_1^2\frac{1}{2}\ln(y^2+z^2)\Big|_0^z\mathrm{d}z=\int_1^2\frac{1}{2}\ln 2\,\mathrm{d}z\\
=\ &\frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

□

例 6 将累次积分$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$改为先$y$后$z$再$x$的积分次序.

解 记$D(x)=\{(y,z)\big|0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant z\leqslant x+y\}$, 则

$$D(x)=\{(y,z)\big|0\leqslant z\leqslant x,0\leqslant y\leqslant 1-x\}\cup\{(y,z)\big|x\leqslant z\leqslant 1,z-x\leqslant y\leqslant 1-x\},$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z\\
=\ &\int_0^1\mathrm{d}x\iint_{D(x)}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=\ &\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}z\int_0^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}z\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

□

例 7 设$V=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right.\right\}$, 其中$a>0$, $b>0$, $c>0$, 计算三重积分

$$\iiint_V(px^2+qy^2+rz^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中p, q, r是实数.

解 令$x=au$, $y=bv$, $z=cw$, 则V对应于$V'=\{(u,v,w)\big|u^2+v^2+w^2\leqslant 1\}$, $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=abc$, 于是

$$\iiint_V(px^2+qy^2+rz^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{V'}(pa^2u^2+qb^2v^2+rc^2w^2)\cdot abc\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

由对称性，有

$$\iiint_{V'} u^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\iiint_{V'} v^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\iiint_{V'} w^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

故而

$$\begin{aligned}
&\iiint_{V'}(pa^2u^2+qb^2v^2+rc^2w^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\
=\ &\frac{pa^2+qb^2+rc^2}{3}\iiint_{V'}(u^2+v^2+w^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\
=\ &\frac{pa^2+qb^2+rc^2}{3}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\\
=\ &\frac{4\pi}{15}(pa^2+qb^2+rc^2),
\end{aligned}$$

进一步得到

$$\begin{aligned}
&\iiint_{V}(px^2+qy^2+rz^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=\ &abc\iiint_{V'}(pa^2u^2+qb^2v^2+rc^2w^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\
=\ &\frac{4\pi}{15}abc(pa^2+qb^2+rc^2).
\end{aligned}$$

□

例 8 设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续且恒大于0, 对任意$t>0$, 令$V(t)=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\right\}$, $D(t)=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant t^2\right\}$,

$$F(t)=\frac{\iiint_{V(t)}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iint_{D(t)}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y},$$

$$G(t)=\frac{\iint_{D(t)}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{-t}^{t}f(x^2)\mathrm{d}x},$$

求证：对任意$t>0$, 有

$$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t).$$

证 由极坐标变换与球坐标变换得

$$F(t)=\frac{\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r},$$

$$G(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{2\int_0^t f(x^2)\mathrm{d}x}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r}.$$

因此，要证的不等式等价于

$$\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\cdot\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r-\left(\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right)^2>0.$$

这可以由柯西-施瓦茨不等式得到：

$$\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\cdot\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r>\left(\int_0^t \sqrt{f(r^2)r^2}\cdot\sqrt{f(r^2)}\mathrm{d}r\right)^2=\left(\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right)^2.$$

这就完成了证明. □

12.4 重积分的应用

例 1 求由曲面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\ln\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$, $x=0$, $z=0$, $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$所围立体的体积.

解 令$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=u$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=v$, $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=w$, 则$\left|\frac{D(x,y.z)}{D(u,v,w)}\right|=abc$.

$V=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^u\mathrm{d}w\int_{u\mathrm{e}^{-u}}^u abc\mathrm{d}v=abc\left(\frac{5}{\mathrm{e}}-\frac{5}{3}\right)$. □

例 2 求三个圆柱面$x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 所围立体的表面积.

解 $S=24\iint_\Omega\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=24(2-\sqrt{2})a^2$, $\Omega=\{x^2+y^2\leqslant a^2,x\geqslant 0,0\leqslant y\leqslant x\}$. □

例 3 设$D=\big\{(x_1,x_2\cdots,x_n)\big|x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1,x_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n\big\}$, 计算$n$重积分

$$\int_D\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\;\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

解 化n重积分为累次积分，借助12.4节例1的结果，有

$$
\begin{aligned}
&\int_D \sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\
=\ &\int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}}\mathrm{d}x_{n-1}\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,\mathrm{d}x_n\\
=\ &\int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}}\frac{2}{3}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x_n=0}^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}}\mathrm{d}x_{n-1}\\
=\ &\frac{2}{3}\int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}}\mathrm{d}x_{n-1}\\
&-\frac{2}{3}\int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}}(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x_{n-1}\\
=\ &\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(n-1)!}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-3}}\mathrm{d}x_{n-2}\\
&+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-3}}(x_1+x_2+\cdots+x_{n-2})^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x_{n-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=\ &\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(n-1)!}-\frac{2^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{(n-2)!}\\
&+\frac{2^2}{3\cdot 5}\int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-3}}(x_1+x_2+\cdots+x_{n-2})^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x_{n-2}\\
=\ &\cdots\\
=\ &\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}2^k}{(2k+1)!!(n-k)!}+\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{(2n-1)!!}\int_0^1 x_1^{\frac{2n-1}{2}}\mathrm{d}x_1\\
=\ &\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}2^k}{(2k+1)!!(n-k)!}+\frac{(-1)^{n-1}2^n}{(2n+1)!!}\\
=\ &\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}2^k}{(2k+1)!!(n-k)!}\ (\text{约定}0!=1).
\end{aligned}
$$

□

例 4 求由曲面$x^2+y^2+az=4a^2$将球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$分成两部分的体积之比$(a>0)$.

解 曲面$x^2+y^2+az=4a^2$与$x^2+y^2+z^2=4az$的交线在xy平面的投影为$x^2+y^2=3a^2$, 于是含在曲面之下部分的体积为

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 3a^2}\left(4a-\frac{x^2+y^2}{a}-2a+\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}a}\left(2a-\frac{r^2}{a}+\sqrt{4a^2-r^2}\right)r\mathrm{d}r=\frac{37}{6}\pi a^3.
\end{aligned}
$$

球$x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$的体积为$V=\dfrac{32}{3}\pi a^3$, 于是曲面之上部分的体积为$V_2=V-V_1=\dfrac{27}{6}\pi a^3$, 体积之比为$V_1:V_2=37:27$. □

例 5 设$\Omega=\left\{(x,y,z)\Big|x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}\leqslant 1\right\}$, 求区域$\Omega$的体积$V$.

解 星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$所围区域的面积为$\dfrac{3}{8}\pi a^2$, 令$D(z)=\left\{(x,y)\Big|x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leqslant 1-z^{\frac{2}{3}}\right\}$, 则$D(z)$的面积为$\dfrac{3}{8}\pi\left(1-z^{\frac{2}{3}}\right)^3$, 于是

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\iint_{D(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{3}{8}\pi\left(1-z^{\frac{2}{3}}\right)^3\mathrm{d}z \\ &= \frac{3\pi}{4}\int_0^1\left(1-z^{\frac{2}{3}}\right)^3\mathrm{d}z=\frac{4}{35}\pi. \end{aligned}$$

□

例 6 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$都是正数，求$\mathbb{R}^n$中曲面$\dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\dfrac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\dfrac{x_n^2}{a_n^2}$和$x_n=a_n$所围$\mathbb{R}^n$中区域的体积.

解 记$B_{n-1}(1)=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\left|\dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\dfrac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}\leqslant 1\right.\right\}$,
$S_n=a_n\sqrt{\dfrac{x_1^2}{a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\dfrac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}}$, 就有

$$\begin{aligned} V &= \int_{B_{n-1}(1)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\int_{S_n}^{a_n}\mathrm{d}x_n \\ &= \int_{B_{n-1}(1)}\left(a_n-a_n\sqrt{\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}. \end{aligned}$$

令$x_i=a_iy_i$, $i=1,2,\cdots,n-1$, 得

$$V=a_n\int_{B_{n-1}(1)}\left(1-\sqrt{\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}$$
$$= a_1a_2\cdots a_n\int_B\left(1-\sqrt{y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2}\right)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{n-1},$$

这里$B=\left\{(y_1,\cdots,y_{n-1})\big|y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2\leqslant 1\right\}$是单位球体. 由12.4节例2知

$$\int_B\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{n-1}=\frac{2^{n-1}}{(n-1)!!}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}.$$

由球坐标变换计算得到

$$\int_B \sqrt{y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{n-1}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2^{n-1}}{(n-1)!!}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}.$$

于是所求体积为

$$V=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n}\cdot\frac{2^{n-1}}{(n-1)!!}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}.$$

□

例 7 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$都是正数，

$$D=\left\{(x_1,x_2\cdots,x_n)\left|\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant 1,x_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n\right.\right\},$$

求区域D的n维体积.

解 作变量替换$x_i=a_iy_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 则D对应于

$$\Omega=\left\{(y_1,y_2\cdots,y_n)\middle|y_1+y_2+\cdots+y_n\leqslant 1,y_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n\right\}.$$

由12.4节的例1知$V_J(\Omega)=\dfrac{1}{n!}$, 故

$$V_J(D)=\int_D\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\int_\Omega a_1a_2\cdots a_n\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n=a_1a_2\cdots a_nV_J(\Omega)=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}.$$

□