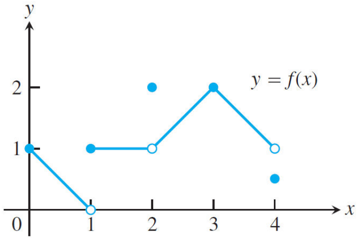
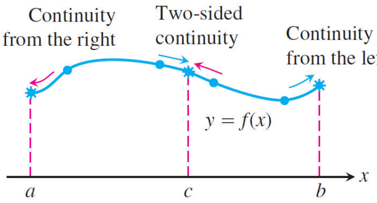
几何上的一条曲线具有连绵不断与断裂的不同形态, 如果将几何上的曲线看作函数的图像, 那么这种现象用函数的语言来描述, 就是函数的连续与间断. 曲线在某点处是否发生断裂, 要看曲线上该点能否与周围点衔接. 同样地, 函数在某点是否连续, 要看该点的函数值能否与其周围点函数值的变化趋势相一致.





（图片取自Thomas' Calculus）

函数在一点处连续的定义

定义 1

(i) 设$f(x)$在x_0的邻域有定义. 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 则称$f(x)$在点$x_0$连续.

(ii) 设$f(x)$在区间$(a,x_0]$有定义. 若$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$, 则称$f(x)$在点$x_0$左连续.

(iii) 设$f(x)$在区间$[x_0,b)$有定义. 若$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, 则称$f(x)$在点$x_0$右连续.

显然, 函数$f(x)$在点x_0连续的充分必要条件是$f(x)$在点x_0既左连续又右连续.

定义 2

(i) 设$f(x)$在点x_0的邻域有定义. 如果对于任何$\varepsilon>0$, 都存在$\delta>0$, 当$|x-x_0|<\delta$时, 有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 则称$f(x)$在点$x_0$连续且称点$x_0$是$f(x)$的连续点.

(ii) 设$f(x)$在区间$(a,x_0]$有定义. 如果对于任何$\varepsilon>0$, 都存在$\delta>0$, 当$x_0-\delta<x\leqslant x_0$时, 有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 则称$f(x)$在点$x_0$左连续.

(iii) 设$f(x)$在区间$[x_0,a)$有定义. 如果对于任何$\varepsilon>0$, 都存在$\delta>0$, 当$x_0\leqslant x<x_0+\delta$时, 有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 则称$f(x)$在点$x_0$右连续.

由数列极限与函数极限的关系可见下列命题成立.

设$f(x)$在点x_0的邻域有定义，则$f(x)$在点x_0连续当且仅当对该邻域中任何满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$的数列$\{x_n\}$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

设$f(x)$在区间$(a, x_0]$有定义，则$f(x)$在点x_0左连续当且仅当对$(a, x_0]$中任何满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$的数列$\{x_n\}$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

设$f(x)$在区间$[x_0, a)$有定义，则$f(x)$在点x_0右连续当且仅当对$[x_0, a)$中任何满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$的数列$\{x_n\}$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，对任意实数x_0, 都有$\lim\limits_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$, 则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

(A) 成立

(B) 不成立

函数的间断点

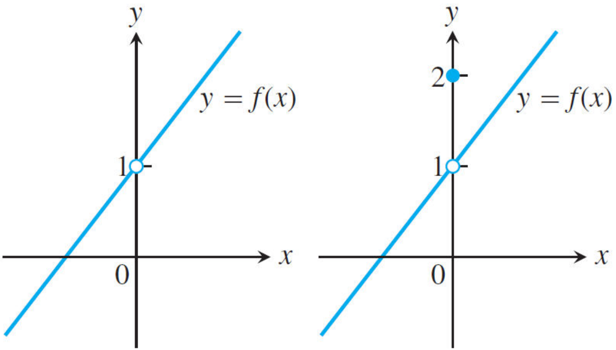
由定义可见, 函数$f(x)$在点x_0连续意味着下列三个条件同时成立: $f(x)$在点x_0有定义; $f(x)$在点x_0有极限; 极限值等于$f(x_0)$. 如果这三个条件至少有一个不成立, 则$f(x)$在点x_0不连续, 此时称点x_0为$f(x)$的不连续点或间断点. 它分为以下三种情形:

(i) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 但是它不等于$f(x_0)$, 或者$f(x_0)$在点$x_0$没有定义, 则称点$x_0$为$f(x)$的可去间断点.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在但是不相等, 则称点$x_0$为$f(x)$的第一类间断点或跳跃间断点.

若$f(x)$在点x_0的左、右极限至少有一个不存在, 则称点x_0为$f(x)$的第二类间断点.

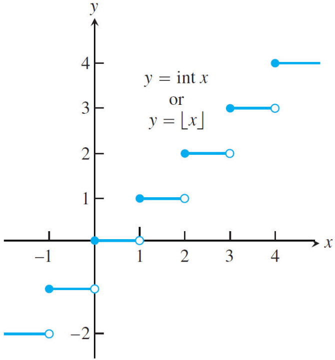
若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 但是它不等于$f(x_0)$, 或者$f(x_0)$在点$x_0$没有定义, 则称点$x_0$为$f(x)$的可去间断点.



（图片取自Thomas' Calculus）

第一类间断点（跳跃间断点）

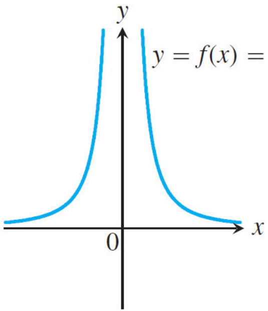
若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在但是不相等，则称点$x_0$为$f(x)$的第一类间断点或跳跃间断点.

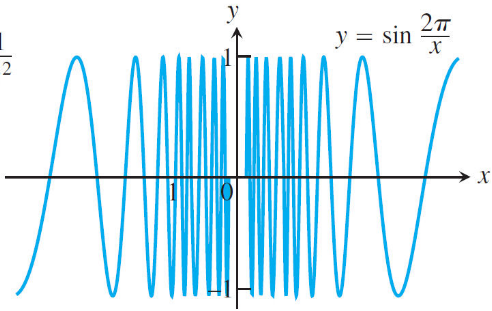


（图片取自Thomas' Calculus）

第二类间断点

若$f(x)$在点x_0的左、右极限至少有一个不存在, 则称点x_0为$f(x)$的第二类间断点.





（图片取自Thomas' Calculus）

例题

例 1

证明$\sin x$在任意点$x_0 \in \mathbb{R}$连续.

用函数在一点处连续的$\varepsilon - \delta$定义来证明即可.

证明

对于任意的$x_0 \in \mathbb{R}$, 我们有

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant |x-x_0|.$$

对于任给的$\varepsilon > 0$, 取$\delta = \varepsilon$, 于是当$|x - x_0| < \delta$时, 有

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

由定义知$\sin x$在点x_0连续.

例 2

证明$a^x(a>0, a\neq 1)$在任意点$x_0\in\mathbb{R}$连续.

用函数在一点处连续的$\varepsilon-\delta$定义来证明即可.

证明

对任意的$x_0\in\mathbb{R}$, 因为$|a^x-a^{x_0}|=a^{x_0}|a^{x-x_0}-1|$, 所以对任意给定的$\varepsilon>0$ (不妨设$\varepsilon<a^{x_0}$), 为使$|a^x-a^{x_0}|<\varepsilon$, 只要$|a^{x-x_0}-1|<\dfrac{\varepsilon}{a^{x_0}}$, 或等价地, $\ln\left(1-\dfrac{\varepsilon}{a^{x_0}}\right)<(x-x_0)\ln a<\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon}{a^{x_0}}\right)$. 令$s(\varepsilon)=\min\left\{\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon}{a^{x_0}}\right), -\ln\left(1-\dfrac{\varepsilon}{a^{x_0}}\right)\right\}$, 则$|x-x_0||\ln a|<s(\varepsilon)$, 即$|x-x_0|<\dfrac{s(\varepsilon)}{|\ln a|}$. 取$\delta=\dfrac{s(\varepsilon)}{|\ln a|}$, 则$|x-x_0|<\delta$时, 有$|a^x-a^{x_0}|<\varepsilon$. 由定义知函数$a^x$在点$x_0$连续.

例 3

试讨论函数$x\sin\frac{1}{x}$, $\sin\frac{1}{x}$, $e^{\frac{1}{x}}$在$x=0$间断的类型.

解答

(i) 对于函数$x\sin\frac{1}{x}$, 因为$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$. 函数$x\sin\frac{1}{x}$在$x=0$无定义, 所以$x=0$是函数$x\sin\frac{1}{x}$的可去间断点.

(ii) 对于函数$\sin\frac{1}{x}$, 因为极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}$不存在, 所以$x=0$是函数$\sin\frac{1}{x}$的第二类间断点.

(iii) 对于函数$e^{\frac{1}{x}}$, 因为$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$, 所以$x=0$是函数$e^{\frac{1}{x}}$的第二类间断点.

例 4

试指出取整函数$[x]$的连续点和间断点.

从函数图象就可以看出来，然后按定义来验证结论.

解答

按定义, 当$n \leqslant x < n+1$时, $[x] = n$, 即$[x]$在区间$[n, n+1)$上恒等于常数n. 可见, 当x_0不是整数点时, $[x]$在点x_0连续; 当$x_0 = n \in \mathbb{Z}$时, $[x]$的左右极限都存在,

$$\lim_{x \to n^-} [x] = n - 1, \quad \lim_{x \to n^+} [x] = n = [n],$$

二者不相等, 所以当x_0为整数点时, $[x]$在点x_0不连续, 且为右连续但不是左连续, 即整数点都是$[x]$的第一类间断点.

例题

例 5

试指出狄利克雷函数$D(x)$与黎曼函数$R(x)$的连续点和间断点.

解答

(i) 在2.6节例2中证明了$D(x)$在任何点x_0的极限都不存在, 所以$D(x)$在每点都不连续. 类似地还可证明, $D(x)$在点x_0的左右极限都不存在, 所以点x_0是第二类间断点, 即所有点都是$D(x)$的第二类间断点.

(ii) 按定义可以证明, 对于任意$x_0 \in \mathbb{R}$, 都有$\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0$(见第二章习题). 所以, 所有无理点都是连续点, 所有有理点都是间断点, 而且都是可去间断点.

例 6

试指出函数$f(x)=xD(x)$的连续点.

解答

按$D(x)$的定义有

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{当}x\text{为有理数}, \\ 0, & \text{当}x\text{为无理数}. \end{cases}$$

对于任何$x_0\in\mathbb{R}$, 当取有理数的数列$\{x_n\}:x_n\to x_0(n\to\infty)$且$x_n\neq x_0(\forall n\in\mathbb{N}^*)$时, 有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=x_0$; 当取无理数的数列$\{x_n'\}:x_n'\to x_0(n\to\infty)$且$x_n'\neq x_0(\forall n\in\mathbb{N}^*)$时, 又有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')=0$. 显然, 当$x_0\neq 0$时, $f(x)$在点x_0的极限不存在且左右极限也都不存在, 所以点$x_0\neq 0$是$f(x)$的第二类间断点.
对于任何x, 有$-|x|\leqslant f(x)\leqslant |x|$. 于是由两边夹定理有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$. 可见, 点$x=0$是函数$f(x)$的唯一连续点.

求作定义域为$\mathbb{R}$且分别满足下列条件的各函数：

(i) 间断点集为$\mathbb{R}\setminus\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$;

(ii) 间断点集为$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$;

(ii) 间断点集为$\mathbb{R}\setminus\left\{p\in\mathbb{N}^*\middle|p\text{为素数}\right\}$.

提示

设间断点集为S, 例6启发的一种思路是先构造$\mathbb{R}$上的连续函数$g(x)$, 使得$g(x)\neq 0$当且仅当$x\in S$, 然后令$f(x)=g(x)D(x)$, 则$f(x)$就是定义域为$\mathbb{R}$且间断点集为S的函数.

定义 3

如果函数$f(x)$在区间I内部的所有点都连续且当I含有左端点a时，$f(x)$在点a右连续，当I含有右端点b时，$f(x)$在点b左连续，则称函数$f(x)$在区间I上连续，或称$f(x)$为区间I上的连续函数.

对于这个定义还可以用$\varepsilon-\delta$语言给出等价定义如下.

定义 4

设$f(x)$在区间I有定义. 如果对于任意的$x_0\in I$与任意的$\varepsilon>0$, 都存在$\delta>0$, 当$x\in I$并且$|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 则称函数$f(x)$在区间$I$上连续.

需要注意的是，一般来说，这里的δ不仅依赖于ε, 而且可能也依赖于x_0.

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在(a, b)上单调，若$f(x)$的值域是$(-\infty, +\infty)$, 则$f(x)$在(a, b)上连续.

(A) 成立

(B) 不成立

由定义与上一节的例1和例2可知, 函数$\sin x$, x^2都是$\mathbb{R}$上的连续函数. 函数$f(x)$在x_0处是否连续, 仅依赖于$f(x)$在x_0附近的局部性质, 因此连续性是一个局部概念. 函数$f(x)$在给定点x_0连续, 意味着$f(x)$不仅在x_0有极限, 而且极限等于它的函数值, 因而根据函数极限的性质不难推出连续函数的下列性质.

定理 1 (局部有界性)

设函数$f(x)$在点x_0连续, 则函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有界.

定理 2 (局部保号性)

设函数$f(x)$在点x_0连续, 且$f(x_0) \neq 0$, 则函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内与$f(x_0)$同号, 并且存在$c > 0$, 使$|f(x)| \geqslant c$.

定理 3 (四则运算的连续性)

设函数$f(x)$和$g(x)$都在点x_0连续, 则函数$f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$都在点x_0连续. 如果还有$g(x_0) \neq 0$, 则$\dfrac{f(x)}{g(x)}$也在点x_0连续.

不难证明, 一个连续函数与一个不连续函数的和与差函数是不连续函数. 然而, 一个连续函数与一个不连续函数的乘积函数或者商函数就不一定了. 同样地, 两个不连续函数的和、差、积、商也未必不连续. 请读者自行举例验之.

判断题

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在点x_0处连续，$f(x_0) \neq 0$，函数$g(x)$在点x_0处不连续，则$f(x)g(x)$在点x_0处不连续.

(A) 成立

(B) 不成立

定理 4 (复合函数的连续性)

设函数$y=g(x)$在点x_0连续, $y_0=g(x_0)$, 函数$f(y)$在点y_0连续, 则复合函数$f(g(x))$在点x_0连续.

证明

对于任给的$\varepsilon>0$, 因为函数$f(y)$在点y_0连续, 故有$\eta>0$, 当$|y-y_0|<\eta$时, 就有$|f(y)-f(y_0)|<\varepsilon$. 对于上述的$\eta>0$, 因$y=g(x)$在点$x_0$连续, 故有$\delta>0$, 当$|x-x_0|<\delta$时, 就有

$$|y-y_0|=|g(x)-g(x_0)|<\eta.$$

由此当$|x-x_0|<\delta$时, 就有

$$|f(g(x))-f(g(x_0))|=|f(y)-f(y_0)|<\varepsilon.$$

由定义知复合函数$f(g(x))$在点x_0连续.

关于本定理需说明两点: 第一, 定理的证明不能简单地利用复合函数的极限法则通过求极限得到, 因为这里不能保证$x \neq x_0$时, $g(x) \neq g(x_0)$.

第二, 用极限的语言, 定理可以表述为$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) = f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$. 从定理的证明过程可以看出, 若不关心复合函数在点x_0是否连续, 而仅仅希望得到$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$, 即极限号与外层函数可以交换的结论, 则只要内层函数有极限, 外层函数连续即可. 这表明在这种情况下求复合函数的极限时, 就无需验证复合函数极限法则中其它更多的条件了.

判断下面的命题是否成立.

设函数$g(x)$在点x_0处连续，$y_0 = g(x_0)$，函数$f(y)$在点y_0处不连续，则$f(g(x))$在点x_0处不连续.

(A) 成立

(B) 不成立

例 7

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解答

因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$, $\sin x$在e连续, 因而

$$\lim_{x\to 0}\sin(1+x)^{\frac{1}{x}}=\sin\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\sin\mathrm{e}.$$

定理 5 (反函数的连续性)

设$f(x)$在$[a,b]$严格递增(或递减)且连续，令$f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$. 则
(i) $f(x)$的值域为$[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)，在$[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)上存在唯一的严格递增(或递减)的反函数$f^{-1}(y)$.
(ii) $f^{-1}(y)$在$[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)上连续.

注意这里要求$f(x)$在$[a,b]$连续. 如果将条件改为"$f(x)$在点x_0的某个邻域内严格单调，在点x_0处连续"，那么不能保证反函数$f^{-1}(y)$在$y_0=f(x_0)$的某空心邻域内处处有定义，无法得出"$f^{-1}(y)$在点y_0处连续"的结论.

更一般情形的表述如下. 设$f(x)$在区间I上严格递增(或递减)且连续. 则
(i) $f(x)$的值域为区间J，在区间J上存在唯一的严格递增(或递减)的反函数$f^{-1}(y)$.
(ii) $f^{-1}(y)$在区间J上连续.

定理 5 (反函数的连续性)

设$f(x)$在$[a, b]$严格递增(或递减)且连续, 令$f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. 则
(i) $f(x)$的值域为$[\alpha, \beta]$(或$[\beta, \alpha]$), 在$[\alpha, \beta]$(或$[\beta, \alpha]$)上存在唯一的严格递增(或递减)的反函数$f^{-1}(y)$.
(ii) $f^{-1}(y)$在$[\alpha, \beta]$(或$[\beta, \alpha]$)上连续.

(i)的证明

(i) 由连续函数介值定理的推论(见3.4节推论1)直接可得$f(x)$的值域为$[\alpha, \beta]$(或$[\beta, \alpha]$). 显然, f是$[a, b]$到$[\alpha, \beta]$(或$[\beta, \alpha]$)的一一对应, 所以在$[\alpha, \beta]$(或$[\beta, \alpha]$)上存在唯一的反函数f^{-1}, 并且反函数f^{-1}是严格递增(或递减)的.

(ii)的证明

(ii) 不妨设$f(x)$在$[a,b]$严格递增, 我们证明$f^{-1}(y)$的连续性.
任取$y_0 \in (\alpha,\beta)$, 记$x_0 = f^{-1}(y_0)$, 则$x_0 \in (a,b)$, $y_0 = f(x_0)$. 对于任给的$\varepsilon > 0$, 不妨假设ε充分小, 使得$x_0 \pm \varepsilon \in (a,b)$,于是$f(x_0 \pm \varepsilon) \in (\alpha,\beta)$.
现在要使$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$, 即要使$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$, 因为$f^{-1}(y)$ 严格递增, 所以这只需$x_0 \pm \varepsilon \in (a,b)$并且

$$f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon),$$

或

$$f(x_0 - \varepsilon) - f(x_0) < y - y_0 < f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0).$$

取$\delta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)\}$. 于是当$|y - y_0| < \delta$时, 就有$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$. 按定义知函数$f^{-1}(y)$在点$y_0$连续, 再由点$y_0$的任意性即知$f^{-1}(y)$在$(\alpha,\beta)$连续.
类似地可以证明$f^{-1}(y)$在α右连续, 在β左连续, 故而$f^{-1}(y)$在$[\alpha,\beta]$连续.