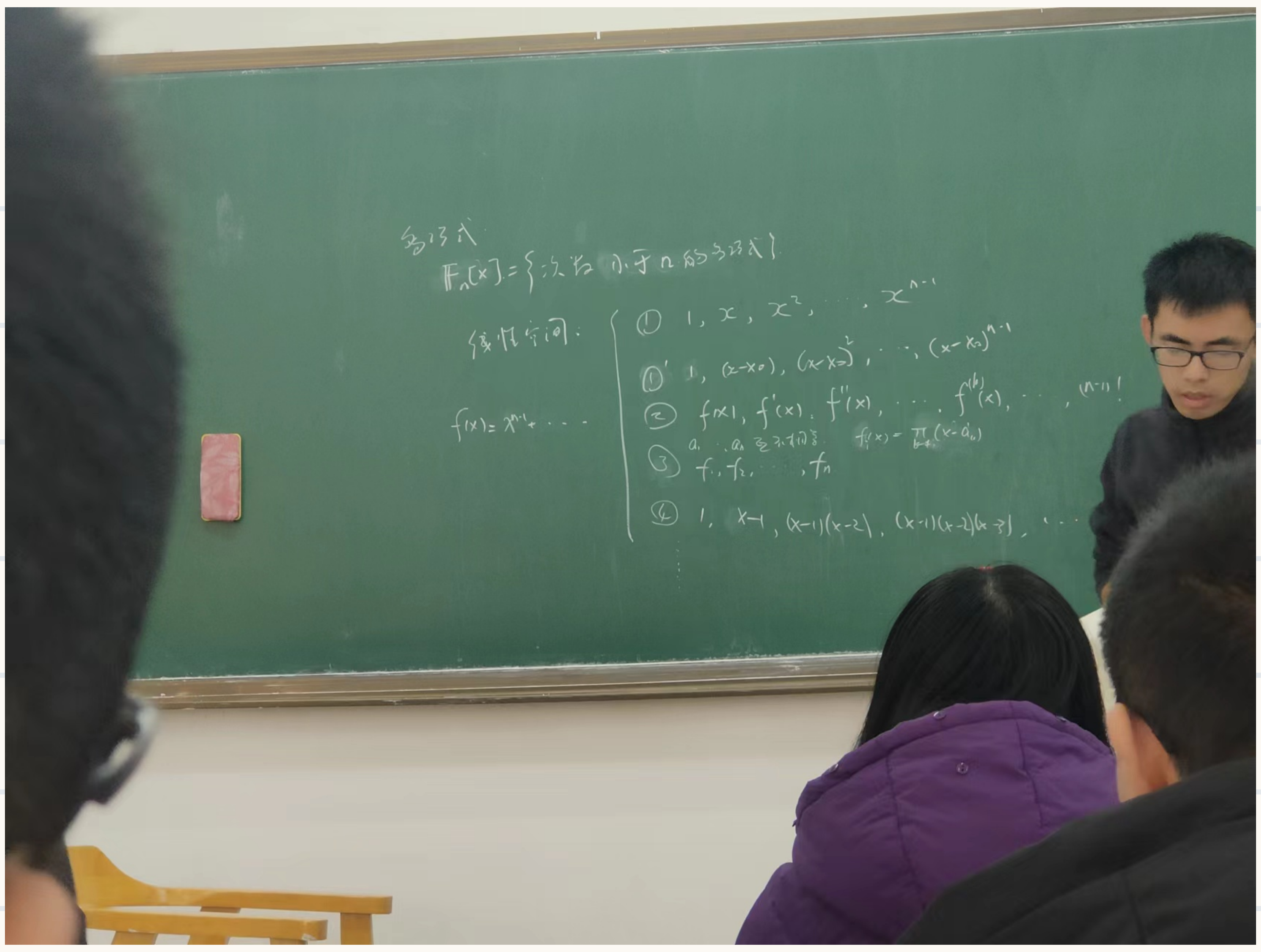

0、A正定，问 a_{ij} 中最大元素在什么位置

对角线！

1. $Q(\sqrt[3]{2})$ 作为Q上的线性空间，求一组基、维数

1 $\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{4}$ 3维

拓：$f(x)$ n次 在 $Q(x)$ 上不可约 $f(w)=0$，则 $Q(w) \Rightarrow (1, w, \dots, w^{n-1})$ n维

2、$K \subseteq F$ 数域，V是F域上的线性空间，设维数为n，设F作为K上线性空间维数为m，

证明：V是K上线性空间且维数为mn

3、A正定，B正定，A−B正定，问：A^2-B^2 正定吗？

问：若 $AB=BA$，A^2-B^2 正定吗？

思考题：① A正定，问 $x^2=A$ 是否有解

② 正定阵X，满足 $X^2=A$，是否有解

③ 解是否唯一

去年的一个T：$p_1, p_2, \dots, p_n$ 为素数

证明 $\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n}$ 线性无关 在Q上

解：2、首先，因为V是F域上的线性空间，F是K上的线性空间

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是V在F上的一组基

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是F在K上的一组基

故对于 $\forall v \in V$

$$v = f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2 + \cdots + f_n\varepsilon_n$$
$$= f_1\sum_{i=1}^{m} g_{1i}\alpha_i + f_2\sum_{i=1}^{m} g_{2i}\alpha_i + \cdots + f_n\sum_{i=1}^{m} g_{mi}\alpha_i$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f_j g_{ji}\alpha_i$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} f_j g_{ji}\right)\alpha_i$$

$f_1 g_{i1}$ $f_2 g_{i2}$ $\cdots$ $f_n g_{in}$

因此V是K上的线性空间

3、A正定，B正定，A−B正定，问：A^2-B^2正定吗？

问：若$AB=BA$，A^2-B^2正定吗？

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$=(A+B)\cdot C\cdot C^T$

$=C(C^{-1}(A+B)C)C^T$

故只需探究 $C^{-1}(A+B)C$ 是否正定 [这里用到了特征值的知识！到时候记得看

4. V是F上的n维线性空间，存在一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ $(m\geqslant n)$，使得$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$中任取n个向量构成V中的一组基

⇓

V为__维空间，$V_1,V_2,\cdots V_s$为V的真子空间，$V\neq V_1\cup V_2\cdots V_s$

证

5、M为$F^{n\times n}$的一个子集，满足：(1) $\forall A,B\in M$，则$A-B\in M$

(2) $\forall A\in M$，$T\in F^{n\times n}$，则$TA\in M$

证明：① M是子空间　② 存在$B\in M$满足$B^2=B$ 且 $M=\{TB\mid T\in F^{n\times n}\}$

解：4、考虑 $\alpha_1=(1,t_1,t_1^2,t_1^3,\cdots,t_1^{n-1})$

$\alpha_2=(1,t_2,t_2^2,t_2^3,\cdots,t_2^{n-1})$

$\vdots$

$\alpha_m=(1,t_m,t_m^2,t_m^3,\cdots,t_m^{n-1})$

且令t_i互不相等，$i=1,2,\cdots,m$，任取n个 $|\quad|\neq0$ ✓

5、① 由T入手

② $A\in M$　$R(A)$最大$=r$

$r=n\to$ 此时 M包含所有矩阵

$r<n\to$ 此时 $A=P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$　P、Q可逆　$\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}\in MQ^{-1}$

$\dim f(V) + \dim f^{-1}(0) = \dim V$

证明：已知 $A \in P^{m\times n}$，$B \in P^{n\times k}$，证明 $r(AB) \geq r(A)+r(B)-n$

$P^{n\times 1} \xrightarrow{A} P^{m\times 1}$　　$P^{k\times 1} \xrightarrow{B} P^{n\times 1}$

$\alpha \longrightarrow A\alpha$　　$\beta \longrightarrow B\beta$

记 V 为线性映射 $P^{k\times 1} \to P^{n\times 1}$ 的像

$\dim(V) = r(B)$　　V是线性映射B的个像

则 $r(AB) = r(ABP^{k\times 1})$　　$V \xrightarrow{\tilde{A}} P^{n\times 1}$

$= r(AV)$

$= \dim V - \dim \tilde{A}^{-1}(0)$

$\geq \dim V - \dim A^{-1}(0)$

$= \dim B - (n - \dim A) = \dim A + \dim B - n$

$V^* = \{$线性函数 $f: V \to P\}$

命题：上述 $f_1, \cdots, f_n$ 为对偶空间 V^* 的一组基，称为 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 的对偶基

证明：记有 $(a_1f_1 + a_2f_2 + \cdots + a_nf_n) = 0$

即 $(a_1f_1 + \cdots + a_nf_n)(\varepsilon_i) = 0$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$

下证任意函数 f 可经 f_i 线性表出

即证 f 与 $a_if_i + \cdots + a_nf_n$ 在 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 值相同

事实上，

例：$P[x]_n$，$a_1, \cdots, a_n \in P$ 互不同，$EVa_1, \cdots, EVa_n$ 为 $P[x]_n^*$ 中的元素，下证线性无关

$k_1EVa_1 + \cdots + k_nEVa_n = 0$，分别作用到 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 得 $\begin{cases} k_1 + \cdots + k_n = 0 \\ k_1a_1 + \cdots + k_na_n = 0 \\ \vdots \\ k_1a_1^n + \cdots + k_na_n^n = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow k_i = 0$

对偶基

$EVa_i(g_j(x)) = \delta_{ij}$　　$g(x) = \prod_{j=2} \frac{(x-a_j)}{(a_i-a_j)}$

坐标 $f = (k_1, \cdots, k_n)\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$　　$f(\alpha) = (k_1f_1 + \cdots + k_nf_n)(a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n) = k_1a_1 + \cdots + k_na_n$

$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = E_n$

设线性空间 V 的基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 到另一组基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵为 T，设它们的对偶基分别为 $f_1,\cdots,f_n$ 和 $g_1,\cdots,g_n$

那么从基 $g_1,\cdots,$

3.3.

1. $\mathbb{F}$ 为数域，M 为 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子集，$\forall A,B\in M \Rightarrow A-B\in M$，$\forall A\in M$，$T\in\mathbb{F}^{n\times n}\Rightarrow TA\in M$

证明：① M 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间，求 $\dim_{\mathbb{F}} M$

② 证明存在 $B\in M$，满足 $B^2=B$，且 $M=\{TB \mid T\in\mathbb{F}^{n\times n}\}$

③ $\exists\, \mathbb{F}^{n\times n}$ 的一个子集 N，N 满足

有那么多人都拿你当榜样的不是吗？

诗一样的文女

"我想找个有灵性的姑娘"

2. 若 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 为 n 阶幻方，如果 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{n-j+1,j}=\operatorname{tr}A$

① 证明所有的 n 阶幻方全体 V_n 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间（略）

② 求 V_3 的维数和一组基

③ 求 V_n 的维数和一组基

解：②

$$A=\begin{pmatrix}\frac{x}{3}+y & \frac{x}{3}-y-z & \frac{x}{3}+z\\ \frac{x}{3}+z-y & \frac{x}{3} & \frac{x}{3}+y-z\\ \frac{x}{3}-z & \frac{x}{3}+y+z & \frac{x}{3}-y\end{pmatrix}=\frac{x}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

这三个矩阵线性无关，是一组基，维数为3

• $\mathbb{F}^{n\times n}$, $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$

$C(A)=\{T\mid TA=AT,\ T=\mathbb{F}^{n\times n}\}$

⓪. 证明 $C(A)$是$\mathbb{F}$上或上的线性子空间

①. 若存在P可逆，$PAP^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$，$\lambda_i$互不相同

求 $C(A)$的一组基和组数

② $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 1 & & 0 & 0\end{pmatrix}$ 问$C(A)$的一组基和维数

③ $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}$ 求$C(A)$的一组基和维数

④ $A=\begin{pmatrix}0 & & & a_{n-1}\\ 1 & \ddots & & \vdots\\ & \ddots & & a_1\\ & & 1 & a_0\end{pmatrix}$ 求$C(A)$的一组基和维数

证明: 0.

1. $TA=AT$ $\quad PTP^{-1}($

$PTP^{-1}PAP^{-1}=PAP^{-1}PTP^{-1}$

$PTP^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}PTP^{-1}$

$\Rightarrow PTP^{-1}=\begin{pmatrix}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n\end{pmatrix}$ $\quad T=P^{-1}\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}P$

$A_0=\begin{pmatrix}0 & 1 & & 0\\ & & \ddots & \\ & & & 1\\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$

• $\mathbb{F}^{n\times n}$, $T\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $f(x),g(x)\in\mathbb{F}(x)$, $(f(x),g(x))=1$ 证 $A=f(T)$ $B=g(T)$

证 $W=\{Z\mid ABZ=0\}$ $\quad W_1=\{Z\mid AZ=0\}$ $\quad W_2=\{Z\mid BZ=0\}$ $\quad Z\in\mathbb{F}^{n\times 1}$

证 $W=W_1\oplus W_2$

① W_1, W_2是W的子空间

② $W_1+W_2\subseteq W$

③ $W\subseteq W_1+W_2$

④ $W_1\cap W_2=\{0\}$

证明: 因为 $(f(x),g(x))=1$

故存在 $u(x)$ 和 $v(x)$

$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$

$u(T)A+v(T)B=I$