第二次数学分析考前辅导讲义

时间：2022 年 11 月 29 日 18:30 开始

地点：数院第一报告厅（线下）；腾讯会议：725-388-508（线上同步）

第一部分 连续函数的基本概念和基本性质

例1. 设定义在$\mathbb{R}$上的正值连续函数满足$f(x+y)=f(x)f(y)$,试证明$f(x)$一定形如$f(x)=a^x$(a为正常数)

例2. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,对任意$x\in\mathbb{R}$,有$f(x)=f\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)$

证明：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是常数.

例3. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\ (A\in\mathbb{R})$ 证明：

(1) $f(x)$在$[a,+\infty)$上有界.

(2) $f(x)$在$[a,+\infty)$上要么有最大值，要么有最小值.

例4. *设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续,$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0$

求证：
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

△注：在证明此题之外，我们还希望对此题的一种“错误解答”进行一定讨论，详见文档最后的附加部分。

第二部分 导数的概念和计算

例1. 已知$y=(\arcsin x)^2$ 求$y^{(n)}(0)$.

例2. 已知$y=\sin ax\cos bx$ 求$y^{(n)}$.

例3. 已知$e^y+xy=e$ 求$\dfrac{dy}{dx}$与$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

例4. 设$\alpha>0$，$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

(1)函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，求α的取值范围.

(2)函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导，求α的取值范围.

例5. 设$f(x)$在$[a,b]$连续，$f'_+(a)$存在，且$f'_+(a)>\lambda>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

求证:存在$\xi\in(a,b)$使得$\lambda=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$.

例6.* 设函数$f(x)$在$x=0$处连续，并且有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=A\ (A\in\mathbb{R})$.

求证：$f'(0)$存在且等于A

△注：在裴礼文《数学分析中的典型问题与方法》中，有一道有关于此题的一个证明过程的思考题，由于篇幅较长，放到文档最后的附加部分。

第三部分 微分中值定理及其简单应用

例1. 求$f(x)=x^2-4x\sin x-4\cos x$在$(-\pi,\pi)$中的极值点.

例2.* 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，常数c使得$a<c<b$.
证明存在$\xi\in(a,b)$与$\eta\in(a,c)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ ,\ f'(\eta)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\ \text{且}\ \eta<\xi$$

例3.(1)设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，且至少有2个不同零点，证明对于任何$\lambda\in\mathbb{R}$,都存在$\xi\in\mathbb{R}$使得$\lambda f(\xi)+f'(\xi)=0$

(2)**设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上三次可导，且至少有5个不同零点，证明$h=f+6f'+12f''+8f'''$在$(-\infty,+\infty)$上至少有2个不同零点.

例4. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.证明存在实数$\xi$,使得

$$f(\xi)f'(\xi)=\xi$$

例5．设函数f,g,h均在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，证明存在$\xi \in (a,b)$

使得 $$\begin{vmatrix} f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix} = 0$$

第四部分 洛必达法则与泰勒公式

例1．计算极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x) + e^{-x} - 1}{(1-\cos x)(1-\cos 2x)}$

例2．设$f(x)$在$[a,b]$上二次可导，$f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$.

(1)证明存在$\xi \in (a,b)$，使得$|f''(\xi)| \geqslant \dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|$

(2)*如果再设$f(x)$在(a,b)上非常数，证明存在$\xi \in (a,b)$使得(1)中的不等式取得严格的大于号.

例3．设$f(x)$在$[a,b]$两次可导，且$f'(a) = f'(b) = 0$，证明存在$\xi \in (a,b)$,使得 $$|f''(\xi)| \geqslant \frac{4|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}$$

例4．设$f(x)$在$(0,\delta)$上可导，常数$\lambda > 0$

(1)若$\lim\limits_{x \to 0^+}(f(x) - \lambda x f'(x)) = 0$,证明$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$;

(2)若$\lim\limits_{x \to 0^+}(f(x) + \lambda x f'(x)) = 0$,是否一定有$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$?证明你的结论.

例5.* 设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上三次可导，且$f(x)$与$f'''(x)$均有界，证明：$f''(x)$在$(-\infty, +\infty)$上也有界.

例6．设函数$f(x)$在$[a,b]$两次连续可导，记M_0为$|f(x)|$在$[a,b]$上的最大值，M_1为$|f'(x)|$在$[a,b]$上的最大值，M_2为$|f''(x)|$在$[a,b]$上的最大值.

(1)证明：$\forall x \in [a,b]$,成立$|f'(x)| \leqslant \dfrac{2}{b-a} M_0 + \dfrac{(x-a)^2 + (x-b)^2}{2(b-a)} M_2$

(2)***证明：若$(b-a)^2 M_2 \geqslant 4M_0$,则$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$

例7．记$P_n(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}$，证明对于$\forall x\in\mathbb{R}$,

有$\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=e^x$.

第五部分 函数的凹凸性

例1．设$x_i\in\left(0,\dfrac{2}{\pi}\right)$ $(1\le i\le n)$, $x=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, 证明$\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin x_i}{x_i}\le\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^n$

例2．设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上凸，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在，证明$f(x)\equiv$常数.

例3．设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$是下凸且可导的，证明$f(x+f'(x))\geqslant f(x)$.

附加部分 一些思考

1．实际上，第一部分的例1是21级的一道月考题，当时有一些同学给出了以下的证明过程:

证明：由$Stolz$定理得对任意$x\in(0,1]$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+n)}{x+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+n)-f(x+n-1)}{(x+n)-(x+n-1)}=0$$

于是$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ □

上述证明是有问题的，这是因为过程中从“$\forall x\in(0,1],\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x+n)}{x+n}=0$”

到“$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$”的推导并不合理。

换句话说，对于$[0,+\infty)$上的连续函数$g(x)$,

如果对于任意$x\in(0,1]$,都有 $\lim\limits_{n\to\infty}g(x+n)=0$ ①

不一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ ②

现在，请试着举出一个满足①但不满足②的连续函数$g(x)$.

2.(来源于裴礼文《数学分析中的典型问题与方法》)对**第二部分例1**的如下证法给出评论，认为正确请说明理由，认为不正确也说明理由.

证明： 由条件知$f(2x)-f(x)=Ax+o(x)$

$\Rightarrow$ 对于$\forall k\in\mathbb{N}$, 成立$f\left(\dfrac{x}{2^k}\right)-f\left(\dfrac{x}{2^{k+1}}\right)=A\dfrac{x}{2^{k+1}}+o\left(\dfrac{x}{2^{k+1}}\right)$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{x}{2^k}\right)-f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right)=A\sum_{k=0}^{n}\frac{x}{2^{k+1}}+o\left(o\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow f(x)-f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)=Ax\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+o\left(x\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)$$

$$\xRightarrow{\text{令}n\to\infty} f(x)-f(0)=Ax+o(x)$$

$\Rightarrow f'(0)=A$ $\square$