1. $A\in M_n(\mathbb{F})$. 设存在 $\xi\in\mathbb{F}^{n\times 1}$ 使得 $A^{n-1}\xi\neq 0$ 且 $A^n\xi=0$.

证明：① $\xi, A\xi, \cdots, A^{n-1}\xi$ 线性无关.

② 记矩阵 $P=(\xi, A\xi, \cdots, A^{n-1}\xi)$ 求方阵 T, 使得

$AP=PT$.

③ 利用①.② . 证明： $A^n=0$.

2. A 为二阶方阵. 若 $A=BC-CB$

证明： $A^2=kI_2$. （提示：利用 trA）

3. 利用 2. 证明：若 $A=AB-BA$. A. 二阶方阵. 则 $A^2=0$

4. 利用 2. 证明：对任何方阵 $A.B.C\in M_n(\mathbb{F})$.

则 $A(BC-CB)^2-(BC-CB)^2A=0$

5. $S=\{S_1, S_2, \cdots, S_k\}\subseteq M_n(\mathbb{F})$ 中的一个有限子集. S_i 互不相同. 且可逆.

$\forall S_i. S_j\in S$. 均有 $S_iS_j\in S$.

记 $P\doteq S_1+S_2+\cdots+S_k$. 问：$P^2$ 与 P 是否线性相关

证明：$tr(P)=0$ 当且仅当 $P=0$

6. 设 $AX=XB$ $\quad A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1\end{pmatrix}_{m\times m}$ $\quad B=\begin{pmatrix}\lambda_2 & 1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_2\end{pmatrix}_{n\times n}$

X 为 $m\times n$ 矩阵.

证明：若 $X\neq 0$, 则 $\lambda_1=\lambda_2$.

7. ① 矩阵 $A_{m\times n}$. 行满秩. $r(A)=m$.

证明：存在矩阵 $B_{n\times m}$. 使得 $AB=I_m$.

② 矩阵 $A_{m\times n}$. 列满秩 $r(A)=n$.

证明：存在矩阵 $B_{n\times m}$. 使得 $BA=I_n$.

8. AB 分别实数域上 3×4, 4×3 矩阵.

满足：$AB=\begin{pmatrix}-9 & 2 & 2\\ -20 & 5 & 4\\ -35 & 7 & 8\end{pmatrix}$. $\quad BA=\begin{pmatrix}-14 & 2t-3 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -15 & 3t & 3 & 6\\ -32 & 6t-1 & 4 & 14\end{pmatrix}$

求 t 的值.

9. $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$. $AC = CB$. $\operatorname{rank}(C) = r$.

证明：存在可逆矩阵 P, Q，使得：

PAP^{-1}，QBQ^{-1} 有相同的 r 阶顺序主子式.

进一步证明，A, B 至少有 r 个相同的特征值.

参考习题课.

10-1 $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. 证明：

$$\operatorname{rank}(A - ABA) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I_n - BA) - n.$$

10-2 令 $C = A + B$. $A, B \in M_n(\mathbb{F})$

则 $C^2 = C$ 且 $\operatorname{rank}(C) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$

的充要条件为：$A^2 = A$. $B^2 = B$. $AB = BA = 0$.

10-3 一般地，$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_s$. $A_i \in M_n(\mathbb{F})$.

则 $A^2 = A$，$r(A) = \sum_{i=1}^{s} r(A_i)$ 的充要条件

$A_i^2 = A_i$. 且 $A_i A_j = 0$ $(i \neq j)$

11. $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

则 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leq n$ 当且仅当存在可逆矩阵 $X \in M_n(\mathbb{R})$ 使得：$AXB = 0$.

12. A 为 $m\times n$ 矩阵.（数域 $\mathbb{F}$ 上）.

证明：存在数域 $\mathbb{F}$ 上 $n\times m$ 矩阵 B 使得

$$ABA = A, \quad BAB = B.$$

13. 设 $\{A_i\}_{i\in I}$. $\{B_i\}_{i\in I}$. 为数域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵集合.

若存在可逆复矩阵 P 满足 $PA_iP^{-1}=B_i$ $\forall i\in I$.（P与i无关）.

证明：存在实数域上可逆矩阵 $\tilde{P}$ 满足：$\tilde{P}A_i\tilde{P}^{-1}=B_i$ $\forall i\in I$.

14. $A\in M_n(\mathbb{C})$. $p(x)$ 为 $I_n-A\bar{A}$ 的特征多项式.

证明: $p(x)$ 必为实系数多项式.