10.3 连续函数的重要性质

紧集(即有界闭集)上连续函数的性质

定理 1

设$f(X)$是$\mathbb{R}^n$中有界闭集D上的连续函数, 则$f(X)$在D有界.

定理 2

设$f(X)$是$\mathbb{R}^n$中有界闭集D上的连续函数, 则$f(X)$在D有最大值和最小值.

定理 3

$\mathbb{R}^n$中有界闭集D上的连续函数$f(X)$必在D一致连续, 即任给$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得当$X_1, X_2 \in D$且$|X_1 - X_2| < \delta$时, 有

$$|f(X_1) - f(X_2)| < \varepsilon.$$

$\mathbb{R}^n$上的有界闭集是列紧集, 也是紧集. 以上性质的证明既可以从列紧性出发, 也可以从紧性出发. 为节省篇幅, 每个性质教材中仅给出了使用列紧性的证明, 用紧性性质的证明留作练习.

定理1“有界闭集上的连续函数必有界”的证明

用反证法，设$f(X)$在D上无界，则存在D上的点列$\{X_m\}$，使得$|f(X_m)| \to +\infty \quad (m \to \infty)$. 由于$D$是列紧集，从而存在子点列$\{X_{m_k}\}$和$X_0 \in D$，使得

$$\lim_{k\to\infty} X_{m_k} = X_0.$$

由$f(X)$的连续性可知

$$|f(X_0)| = \lim_{k\to\infty} |f(X_{m_k})| = +\infty,$$

矛盾!

定理2“有界闭集上的连续函数必取得最值”的证明

由定理1, $f(X)$在D上有界, 令

$$M=\sup_{X\in D} f(X),\ m=\inf_{X\in D} f(X).$$

由上确界的定义可知, 存在D上点列$\{X_i\}$, 使得$\lim\limits_{i\to\infty} f(X_i)=M$. 由于$D$是列紧集, 所以存在子点列$\{X_{i_k}\}$和$X_0\in D$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} X_{i_k}=X_0.$$

再由$f(X)$的连续性可知$f(X_0)=M$. 同理可证存在$Y_0\in D$, 使得$f(Y_0)=m$.

定理3“有界闭集上的连续函数必一致连续”的证明

用反证法, 设$f(X)$在D上不一致连续, 则存在$\varepsilon > 0$, 使得对任何正整数m, 存在$X'_m, X''_m \in D$, 满足

$$|X'_m - X''_m| < \frac{1}{m}, \ |f(X'_m) - f(X''_m)| \geqslant \varepsilon.$$

由D的列紧性可知存在$\{X'_m\}$的子点列$\{X'_{m_k}\}$ 和$X \in D$, 使得$\lim_{k\to\infty} X'_{m_k} = X$. 由于$\lim\limits_{k\to\infty} |X'_{m_k} - X''_{m_k}| = 0$, 所以$\lim_{k\to\infty} X''_{m_k} = X$. 由$f$的连续性可得

$$\lim_{k\to\infty} f(X'_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} f(X''_{m_k}) = f(X).$$

由此可知

$$\lim_{k\to\infty} |f(X'_{m_k}) - f(X''_{m_k})| = 0,$$

与$|f(X'_{m_k}) - f(X''_{m_k})| \geqslant \varepsilon, k = 1, 2, \cdots$矛盾!

思考题(较高要求)

设D是$\mathbb{R}^n$的非空子集, 如果D上的连续函数都有界，那么D是紧集.

设D是$\mathbb{R}^n$的非空子集, 如果D上的有界连续函数都有最大值和最小值，那么D是紧集.

设D是$\mathbb{R}^n$的非空子集, 如果D上连续函数的值域都是紧集，那么D是紧集.

区域上连续函数的性质

引理 1

设$f(X)$是$\mathbb{R}^n$的道路连通子集D上的连续函数，如果$X_1, X_2 \in D$且$f(X_1) < f(X_2)$，则对于任意实数c，只要$f(X_1) < c < f(X_2)$，就存在$X_0 \in D$，使得$f(X_0) = c$.

引理1的证明

因为D是道路连通集，所以存在连续道路$\gamma : [0, 1] \to D$使得$\gamma(0) = X_1$，$\gamma(1) = X_2$. 一元函数$g(t) = f(\gamma(t))$是$[0, 1]$上的连续函数，由一元函数的介值定理，可得所要的结论.

定理 4

设$f(X)$是(开或闭)区域$D \subseteq \mathbb{R}^n$上的连续函数，如果$X_1, X_2 \in D$且$f(X_1) < f(X_2)$，则对于任意实数c，只要$f(X_1) < c < f(X_2)$，就存在$X_0 \in D$，使得$f(X_0) = c$.

定理4“区域上的连续函数具有介值性”的证明

第一步，设D是开区域，则D是道路连通集, 由引理1即得所要的结论. 第二步, 若D是闭区域，则存在开区域U使得$D = \overline{U}$. 由连续性, 存在X_1的邻域$B(X_1)$和X_2的邻域$B(X_2)$, 使得$f(X) < c$ $(\forall X \in B(X_1))$且$f(X) > c$ $(\forall X \in B(X_2))$. 由$D = \overline{U}$知$B(X_1) \cap U \neq \emptyset$且$B(X_2) \cap U \neq \emptyset$. 取两点$P_1 \in B(X_1) \cap U, P_2 \in B(X_2) \cap U$, 则$f(P_1) < c < f(P_2)$，又$U$是开区域，由第一步，完成证明.

$\mathbb{R}^n$上的范数

一般来说, 如果对于每一个$X \in \mathbb{R}^n$, 能指定实数$N(X)$与之对应, 使得下列所谓范数公理成立:

(i) $\forall X \in \mathbb{R}^n, N(X) \geqslant 0$且$N(X) = 0 \iff X = O$;

(ii) $N(\lambda X) = |\lambda| N(X), \ \forall X \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$;

(iii) $N(X + Y) \leqslant N(X) + N(Y), \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$;

则称$N(X)$为$\mathbb{R}^n$上的范数.

赋范线性空间的概念

对于一般的线性空间, 如果它还有范数, 则称其为赋范线性空间. 一个向量X的范数, 通常记为$\|X\|$.

$\mathbb{R}^n$上的任意两个范数是等价的

$\mathbb{R}^n$上常用的一些范数

欧氏范数$|X| = \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$; $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$;

$\|X\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|$; $\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 < p < +\infty$.

例 1

$\mathbb{R}^n$上的任意两个范数$N_1(\cdot)$和$N_2(\cdot)$是等价的, 即存在常数$C > 0$, 使得

$$C^{-1}N_2(X) \leqslant N_1(X) \leqslant CN_2(X), \quad \forall X \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

为此只须证$\mathbb{R}^n$上的任一范数$N(\cdot)$与欧氏范数$|\cdot|$等价, 即存在常数$M > 0$, 使得

$$M^{-1}|X| \leqslant N(X) \leqslant M|X|, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

例1 “$\mathbb{R}^n$上的任意两个范数都等价”的证明

记

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0),$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\vec{e}_n = (0, \cdots, 0, 1).$$

对于任意$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 则

$$X = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

由范数公理可得

$$N(X) \leqslant |x_1|N(\vec{e}_1) + |x_2|N(\vec{e}_2) + \cdots + |x_n|N(\vec{e}_n).$$

例1 “$\mathbb{R}^n$上的任意两个范数都等价”的证明

记

$$M_1=\left(\sum_{i=1}^{n}N^2(\vec{e}_i)\right)^{\frac{1}{2}},$$

由柯西不等式得

$$N(X)\leqslant M_1|X|,\quad \forall X\in\mathbb{R}^n. \tag{3}$$

任取$X,Y\in\mathbb{R}^n$, 由范数公理(iii)和(3)可得

$$|N(X)-N(Y)|\leqslant N(X-Y)\leqslant M_1|X-Y|,$$

故$N(X)$在$\mathbb{R}^n$上利普希茨连续.

例1 “$\mathbb{R}^n$上的任意两个范数都等价”的证明

由定理2可知存在$X_0 \in \mathbb{R}^n$满足

$$|X_0| = 1 \text{ 且} N(X_0) = \inf_{|X|=1} N(X).$$

记$M_2 = N(X_0)$, 由范数公理(i)可知$M_2 > 0$. 对于任何$X \in \mathbb{R}^n$且$X \neq O$, 记$Y = \dfrac{1}{|X|}X$, 则$|Y| = 1$, 从而

$$N(Y) = \frac{1}{|X|}N(X) \geqslant M_2,$$

即

$$M_2|X| \leqslant N(X). \tag{4}$$

显然当$X = O$时, (4)也成立. 取$M = \max\{M_1, M_2^{-1}\}$, 则从(3)和(4)得(2)成立.

距离函数

$\mathbb{R}^n$上的距离函数

我们把满足下列三个条件的函数$\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$称为$\mathbb{R}^n$的距离函数:

(1) $\rho(X, Y) \geqslant 0$, 等号成立当且仅当$X = Y$;

(2) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$;

(3) $\rho(X, Z) \leqslant \rho(X, Y) + \rho(Y, Z)$.

这时称$\rho(X, Y)$为X, Y之间的ρ 距离.

范数诱导出的距离函数

$\mathbb{R}^n$的一个范数$N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$诱导出一个距离函数: $\rho_N(X, Y) = N(X - Y)$. 因此在欧氏空间$\mathbb{R}^n$中由范数所诱导的距离都是等价的, 即对于两个这样的距离函数ρ_1, ρ_2, 存在常数$M > 0$, 使得

$$M^{-1}\rho_2(X, Y) \leqslant \rho_1(X, Y) \leqslant M\rho_2(X, Y), \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

建立于等价范数(距离)的分析理论没有本质上的区别

建立于等价范数(距离)的分析理论, 例如极限理论和可微性理论, 没有本质上的区别. 以极限为例，设距离函数$\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是由一个$\mathbb{R}^n$上的范数所诱导的, 则点列$\{X_m\}$收敛于$X_0$可定义为：$\forall \varepsilon > 0$, 存在$M > 0$, 当$m \geqslant M$时，有$\rho(X_m, X_0) < \varepsilon$. 而$\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = a$可定义为：$\forall \varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$X \neq X_0$在定义域内，并且$\rho(X, X_0) < \delta$时, 有$|f(X) - a| < \varepsilon$.

应用介值性的例题

例 2

设$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上连续, 则对于任意$r \geqslant 0$, 存在$(x,y) \in \mathbb{R}^2$使得$x^2+y^2=r^2$, 且

$$f(x,y) = f(-x,-y).$$

证 若$r=0$显然要证的结论成立. 设$r>0$, 令$g(x,y)=f(x,y)-f(-x,-y)$, 则$g(r,0)=-g(-r,0)$. 如果$g(r,0)=0$, 显然$(r,0)$使得(5)成立. 若$g(r,0)\neq 0$, 不妨设$g(r,0)>0$. 则$g(-r,0)<0$. 在$\mathbb{R}^2$上考虑半圆周$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2=r^2, y\geqslant 0\}$. 显然$S$是$\mathbb{R}^2$上的道路连通集. 由$g$的连续性和引理1可知存在$(x,y)\in S$使得$g(x,y)=0$, 即

$$f(x,y) = f(-x,-y).$$

连通集上连续函数的性质

定理 5

设$f(X)$是$\mathbb{R}^n$的连通子集D上的连续函数，如果$X_1, X_2 \in D$且$f(X_1) < f(X_2)$，则对于任意实数c，只要$f(X_1) < c < f(X_2)$，就存在$X_0 \in D$，使得$f(X_0) = c$.

注

如果D不是连通集，则存在D上的连续函数，使得介值定理不成立．事实上，由于D不连通，所以存在开集O_1和O_2，使得$D \subseteq O_1 \cup O_2$，且$D \cap O_1 \neq \emptyset$, $D \cap O_2 \neq \emptyset$, $D \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$．定义

$$f(X) = \begin{cases} 1, & X \in O_1 \cap D \\ 0, & X \in O_2 \cap D. \end{cases}$$

易证$f(X)$在D上连续，显然介值定理不成立．于是不难看到：D不是连通集当且仅当存在D到$\{0, 1\}$的连续满射.

定理5“连通集上的连续函数具有介值性”的证明

反设$f(X) \neq c, \forall X \in D$. 令

$$A = \{X \in D |\ f(X) < c\}$$

$$B = \{X \in D |\ f(X) > c\}.$$

显然A, B非空, $A \cap B = \emptyset, A \cup B = D$. 由于$f(X)$在$D$上连续, 则$A, B$都是$D$的相对开子集. 事实上, 对任意$X \in A$, 则存在$X$ 的开邻域U_X, 使得当$Y \in U_X \cap D$时, 有$f(Y) < c$, 即

$$U_X \cap D \subseteq A.$$

同理对任意$X \in B$, 存在X的开邻域U_X, 使得

$$U_X \cap D \subseteq B.$$

从而D不连通, 矛盾!

定理5的注中充要条件的应用举例

连通集的闭包是连通集.

设A_λ $(\lambda \in \Lambda)$都是$\mathbb{R}^n$中的连通集，$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$, 则$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$是连通集.

例1的一个应用

第60届William Lowell Putnam Mathematical Competition, 1999, A-5题

求证：存在常数C, 使得对任何1999次的多项式$p(x)$, 有

$$|p(0)| \leqslant C \int_{-1}^{1} |p(x)| \mathrm{d}x.$$

定理5的注的一个应用

设A和B都是n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$的连通子集且$\overline{A} \cap B \neq \emptyset$，求证：$A \cup B$是连通集.

投票

设置

判断下面的命题是否成立.

$\mathbb{R}^n$中的闭凸集一定是闭区域.

A 成立

B 不成立

提交

投票

设置

判断下面的命题是否成立.

函数$f(x,y)=|x|^{-|y|}$在$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$一致连续.

A 成立

B 不成立

提交

投票

设置

判断下面的命题是否成立.

设$f(X)$是$\mathbb{R}^n$上的凸函数, 若$\lim\limits_{|X|\to+\infty} f(X)$存在, 则$f(X)$是$\mathbb{R}^n$上的常数函数.

A 成立

B 不成立

提交