第一章 预备知识

难题选解

例 1 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$都是非负实数，求证：

$$\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{k=1}^{n}b_k\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

证 若某个$a_k=0$或某个$b_k=0$, 则不等式显然成立. 故下设$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$都是正数，由均值不等式得

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k+y_k}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y_k}{x_k+y_k}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k+y_k}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{x_k+y_k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k+y_k}{x_k+y_k}=1,$$

两边同乘以$\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(x_k+y_k)\right)^{\frac{1}{n}}$即得

$$\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{k=1}^{n}b_k\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

□

例 2 设$p_1,p_2,\cdots,p_n$都是正数，$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$, 求证：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(p_k+\frac{1}{p_k}\right)^2\geqslant n^3+2n+\frac{1}{n}.$$

证 由题设和柯西不等式得$\sum\limits_{k=1}^{n}p_k^2\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}1^2\geqslant\left(\sum\limits_{k=1}^{n}p_k\right)^2=1$, 从而

$$\sum_{k=1}^{n}p_k^2\geqslant\frac{1}{n}.$$

由题设和柯西不等式得$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}p_k\geqslant\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p_k}}\cdot\sqrt{p_k}\right)^2=n^2$, 从而

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}\geqslant n^2.$$

再由柯西不等式得$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k^2}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}1^2\geq\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}\right)^2\geqslant n^4$, 从而

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k^2}\geqslant n^3.$$

因此，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(p_k+\frac{1}{p_k}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}p_k^2+2n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k^2}\geqslant n^3+2n+\frac{1}{n}.$$

□

例 3 给定m个正数$a_1,a_2,\cdots,a_m$，令

$$x_n=\sqrt[n]{\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}{m}},\quad n=1,2,\cdots,$$

证明：对任意正整数n, 有$x_n\leqslant x_{n+1}$.

证 由柯西不等式，对任意正整数n, 有

$$\left(\sum_{k=1}^{m}a_k^{n+1}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^{\frac{n}{2}}\cdot a_k^{\frac{n+2}{2}}\right)\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{m}a_k^{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}a_k^{n+2}\right).$$

记$\sigma_n=\dfrac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}{m}$, $n=1,2,\cdots$, 由上面的不等式就得到

$$\sigma_{n+1}^2\leqslant\sigma_n\sigma_{n+2},\quad n=1,2,\cdots.$$

当$n=1$时，由柯西不等式得$\left(\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\right)^2\leqslant m\left(\sum\limits_{k=1}^{m}a_k^2\right)$, 由此可知$x_1\leqslant x_2$成立. 设当$n$时，$x_n\leqslant x_{n+1}$成立，则$\sigma_n\leqslant\sigma_{n+1}^{\frac{n}{n+1}}$. 于是当$n+1$时，有

$$x_{n+2}=\sqrt[n+2]{\sigma_{n+2}}\geqslant\sqrt[n+2]{\frac{\sigma_{n+1}^2}{\sigma_n}}\geqslant\sqrt[n+2]{\frac{\sigma_{n+1}^2}{\sigma_{n+1}^{\frac{n}{n+1}}}}=\sqrt[n+1]{\sigma_{n+1}}=x_{n+1}.$$

因此由数学归纳法原理知对任意正整数n, 有$x_n\leqslant x_{n+1}$. □

另证 设$p>1$, 令$f(x)=x^p$, $x>0$, 则$f''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0$, 故$f(x)$在$(0,+\infty)$严格下凸. 于是由Jensen不等式知对任意$t_1,t_2,\cdots,t_m$, 有

$$f\left(\frac{t_1+t_2+\cdots+t_m}{m}\right)\leqslant\frac{f(t_1)+f(t_2)+\cdots+f(t_m)}{m}.$$

取$p=\frac{n+1}{n}$, $t_i=a_i^n$, $i=1,2,\cdots,m$, 就得到

$$\left(\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}{m}\right)^{\frac{n+1}{n}}\leqslant\frac{a_1^{n+1}+a_2^{n+1}+\cdots+a_m^{n+1}}{m},$$

两边开$n+1$次方得

$$\left(\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}{m}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\frac{a_1^{n+1}+a_2^{n+1}+\cdots+a_m^{n+1}}{m}\right)^{\frac{1}{n+1}},$$

即$x_n\leqslant x_{n+1}$. □

另证 令$f(x)=\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}\right)^{\frac{1}{x}}$, $x>0$, 则由对数求导法得

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x^2}\cdot\left[x\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_m^x\ln a_m}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}-\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}\right],\quad x>0.$$

令$\varphi(x)=x\ln x$, 则由$\varphi''(x)=\dfrac{1}{x}>0$ (当$x>0$)知$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$严格下凸，于是由Jensen不等式知

$$\varphi\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}\right)\leqslant\frac{\varphi(a_1^x)+\varphi(a_2^x)+\cdots+\varphi(a_m^x)}{m},$$

即

$$\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}\leqslant\frac{a_1^x\ln a_1^x+a_2^x\ln a_2^x+\cdots+a_m^x\ln a_m^x}{m}.$$

变形整理即得

$$x\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_m^x\ln a_m}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}\geqslant\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}.$$

因此对任何$x>0$, 有$f'(x)\geqslant0$, 从而$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增. 由此即知对任意正整数n, 有$x_n=f(n)\leqslant f(n+1)=x_{n+1}$. □

例 4 设$a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$, $n=1,2,\cdots$, 证明：对任意大于1的正整数n, 有

$$\sqrt{2n}\leqslant a_n\leqslant\frac{\sqrt{32n-15}+1}{4}.$$

证 由数学归纳法容易证明$a_n>0, n=1,2,\cdots$. 由$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$得$a_{n+1}^2=a_n^2+2+\dfrac{1}{a_n^2}>a_n^2+2$, $n=1,2,\cdots$, 于是对任意大于1的正整数n, 有

$$a_n^2\geqslant a_2^2+2(n-2)=2^2+2(n-2)=2n,$$

故$a_n \geqslant \sqrt{2n}$, $n=2,3,\cdots$. 另一方面，当$n=2$时，有$a_n = 2 = \dfrac{\sqrt{32n-15}+1}{4}$; 当$n>2$时，由$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \dfrac{1}{a_n^2}$得

$$a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} = a_{n-2}^2 + 4 + \frac{1}{a_{n-1}^2} + \frac{1}{a_{n-2}^2} = \cdots = a_2^2 + 2(n-2) + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{a_k^2} = 2n + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{a_k^2}.$$

再结合

$$\frac{1}{a_k^2} = \frac{a_{k+1}-a_k}{a_k} = a_{k+1}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \leqslant a_n\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right),\ n = 2,3,\cdots,n-1$$

得

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{a_k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} a_n\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) = a_n\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{a_n}{2} - 1.$$

因而有

$$a_n^2 \leqslant 2n + \frac{a_n}{2} - 1,\ 即2a_n^2 - a_n - (4n-2) \leqslant 0,\ n = 3,4,\cdots,$$

解得$a_n \leqslant \dfrac{\sqrt{32n-15}+1}{4}$, $n = 3,4,\cdots$. □

例 5 设$f: X \to Y$, $g: Y \to X$都是单射，记$R = X \setminus g(Y)$, 用$\mathfrak{B}$来记集合族$\{B|B \subseteq X, R \cup g(f(B)) \subseteq B\}$, 令$A$是集合族$\mathfrak{B}$中所有集合的交集，证明：

(1) $A = R \cup g(f(A))$;

(2) $g(Y \setminus f(A)) = X \setminus A$.

证 (1) 对任意$B \in \mathfrak{B}$, 有$A \subseteq B$, 于是$g(f(A)) \subseteq g(f(B))$, 故$R \cup g(f(A)) \subseteq R \cup g(f(B)) \subseteq B$. 由$B \in \mathfrak{B}$的任意性知$R \cup g(f(A)) \subseteq A$, 这说明$A \in \mathfrak{B}$. 反证. 设$A = R \cup g(f(A))$不成立，则存在$x_0 \in A$但$x_0 \notin R \cup g(f(A))$. 令$\widetilde{A} = A \setminus \{x_0\}$, 则$R \cup g(f(A)) \subseteq \widetilde{A}$. 故$R \cup g(f(\widetilde{A})) \subseteq R \cup g(f(A)) \subseteq \widetilde{A}$, 这说明$\widetilde{A} \in \mathfrak{B}$. 但$\widetilde{A} \subsetneqq A$, 与$A$是集合族$\mathfrak{B}$中所有集合的交集矛盾！这就证明了(1).

(2) 由g是单射以及(1)的结论得

$$g(Y \setminus f(A)) = g(Y) \setminus g(f(A)) = (X \setminus R) \setminus g(f(A)) = X \setminus (R \cup g(f(A))) = X \setminus A.$$

□

例 6 设h和k都是正整数，求证：对任意$\varepsilon>0$, 存在正整数m和n, 使得

$$\varepsilon<|h\sqrt{m}-k\sqrt{n}|<2\varepsilon.$$

证 由有理数在实数中的稠密性知存在正整数a和b, 使得$\dfrac{3\varepsilon}{hk}<\dfrac{b}{a}<\dfrac{4\varepsilon}{hk}$. 由于$\dfrac{b}{a}$的分子与分母同乘以一个正整数后不改变分数的值，不妨设$3a^2>b$, 从而有

$$\frac{\varepsilon}{hk}<\frac{b}{3a}<\frac{b}{\sqrt{a^2+b}+a}<\frac{b}{2a}<\frac{2\varepsilon}{hk}.$$

又$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b}+a}=\sqrt{a^2+b}-a$, 故由上式得到

$$\varepsilon<hk\left(\sqrt{a^2+b}-a\right)<2\varepsilon.$$

因此取$m=k^2(a^2+b)$, $n=h^2a^2$, 就有

$$\varepsilon<|h\sqrt{m}-k\sqrt{n}|<2\varepsilon.$$

□

补充题1

(A)

1. 设映射$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, $h:Z\to W$满足$g\circ f$和$h\circ g$都是双射，证明：f, g和h都是双射.

2. 对于映射$f:X\to Y$, 证明以下命题彼此等价.

(1) f是单射.

(2) 对任何X的子集A, 都有$f^{-1}(f(A))=A$.

(3) 对任何X的子集A和B, 都有$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

(4) 对任何X的子集A和B, $A\cap B=\emptyset$, 都有$f(A)\cap f(B)=\emptyset$.

(5) 对任何X的子集A和B, $B\subseteq A$, 都有$f(A\setminus B)=f(A)\setminus f(B)$.

3. 设$f:X\to Y$是一个映射. 证明：对任意Y的子集V都有$f\left(f^{-1}(V)\right)=V$的充分必要条件是$f$是满射.

4. 用微分学的方法容易证明“对任意$x > -1$, 有$\ln(1+x) \leqslant x$”，借助这个不等式可以证明下面的不等式（在信息论中有用）. 设$p_1, p_2, \cdots, p_n$和$q_1, q_2, \cdots, q_n$都是正数，$\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k$, 证明：

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \ln p_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} p_k \ln q_k.$$

5. 设n是正整数，求证：对任意$x > 0$, 有$\dfrac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n}} \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$.

6. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$都是实数，$b_1, b_2, \cdots, b_n$都是正数，记$m = \min\left\{ \dfrac{a_k}{b_k} \middle| k = 1, 2, \cdots, n \right\}$, $M = \max\left\{ \dfrac{a_k}{b_k} \middle| k = 1, 2, \cdots, n \right\}$, 求证：

$$m \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leqslant M.$$

7. 设非负数列$\{a_n\}$满足$a_n \leqslant \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{n^2}$, $n = 3, 4, \cdots$, 证明存在常数C, 使得对任意正整数n, 有$a_n \leqslant \dfrac{C}{n!}$.

8. 设$a_k > -1$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 并且$a_1, a_2, \cdots, a_n$都同号，求证：

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

9. 设n是一个正整数，证明

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mathrm{C}_n^k} \leqslant \sqrt{n\left(2^n - 1\right)}.$$

10. 设$p_1, p_2, \cdots, p_n$和$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$都是非负实数，$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, 令$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k \cos(\beta_k x)$, 求证：对任意实数$x$, 有$[f(x)]^2 \leqslant \dfrac{1 + f(2x)}{2}$.

(B)

1. 设n是大于1的整数，求证：对任意非负实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$, 有

$$a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \right)^{n-1} \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^n.$$

2. 设n是大于1的整数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$都是非负实数，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a$, 求证：$\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1} \leqslant \dfrac{a^2}{4}$.

3. 设$0 < a_k < 1$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 且$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a < 1$, 求证：

$$1 + a < \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) < \frac{1}{1-a}, \quad 1 - a < \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) < \frac{1}{1+a}.$$

4. 设$a_k > -1$, $k=1,2,\cdots,n$, 并且$S=a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant 0$, 求证：

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \leqslant 1+\frac{S}{1!}+\frac{S^2}{2!}+\cdots+\frac{S^n}{n!}.$$

5. 设n是一个大于1的正整数，证明

$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right) < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right).$$

6. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$都是实数，求证：对任意$\alpha>0$, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right| \leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\frac{\alpha}{4}\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

7. 设$x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$, $n=1,2,\cdots$, 证明：对任意正整数n, 有

$$0<2-x_n<\frac{\pi^2}{2^{2n+2}}.$$

8. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$都是正数，记$m=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, $M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 求证：

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}n^2.$$

9. 设n是大于1的整数，$0<a_k\leqslant 1$, $k=1,2,\cdots,n$, 记$S=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $P=\prod\limits_{k=1}^{n}a_k$, 求证：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k} \leqslant \frac{nS}{S+nP}.$$

10. 设n是大于1的整数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$都是实数，令$\Delta=\max\left\{|a_k-a_{k+1}|\,\middle|\,k=1,2,\cdots,n-1\right\}$, 求证：

$$0 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2 \leqslant \frac{\Delta^2}{12}(n^2-1).$$