专稿

数学大师的风采*

——记陈省身先生讲授《微积分及其应用》(续一)

白承铭 (南开数学研究所 天津 300071)

(Ⅳ)外微分

上面讲了这么样一种关系,甚至这关系还更要好,我们讲高等微积分的时候,一个重要的定理是格林定理(Green's Theorem)。就是说,假使你有个区域,在边界上的微分是可以变为区域上的微分,是一个一重积分和二重积分的关系,这是个非常重要的关系。比方龚昇教授有一本小书,讲到这个关系,他认为这是整个微积分的基本定理,我是同意的。这样的关系现在通常写格林定理的时候,往往是写成有积分,

$$\int_\gamma A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y = (\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.9}$$

如果有一个问题,有时候你可以只管 Integral,不要管其它,那么 Integral 就是把一个一次微分式变为两次微分式,这怎么变呢?公式定理是这样子:我就引入一个外微分,我们刚才讲 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 是一个多项式,是一个外代数的一个式子,就象我们普通多项式一样,不但如此,对于这样的式子,我们还可以定义它一个微分,

$$\mathrm{d}(A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y) = \mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}B \wedge \mathrm{d}y = A_y\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + B_x\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{1.10}$$

叫外微分(Exterior differential calculus)。外微分很简单,假设有 $A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y$,它的微分就是微分它的系数,也就是微分函数。$A$ 与 B 是 x,y 的函数,所以就微分 A,B。A 的微分就是 $A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y$,$B$ 的微分就是 $B_x\mathrm{d}x+B_y\mathrm{d}y$,可是 $A_x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x=0$ 就得到 $A_y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x$,第二项就得 $B_x\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$。但是因为乘法是反对称的,所以就得($B_x-A_y$),这是格林定理里头 2 重积分的系数,所以格林定理把单次积分变成两次积分,它的 Integral 实际上是个外微分。可以看出外微分是很妙的东西,因此你可以把积分号丢掉,就说我们拿 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 造一个外代数,对这个外代数有个外微分,外微分很简单,就是假使微分各项的时候,其实是对每项系数微分,结果我得到一个多项式,这个多项式的次数高一个。作为函数就变为一次微分式了,所以次数高一个,因此就作为原来是 k 次的话,得到一个 $k+1$ 次的微分式了。这个格林定理中如何把曲线微分的微分式变为区域微分式,一重微分变为二重微分的公式。这个就很好了,因为这里面有一个外代数,所以把这个微分式乘起来,用一个外乘法,微分的乘法是反对称。然后呢,现在我有一个微分,它把 k 次的外微分式变为 $k+1$ 次的外微分式,这样子就把这个外微分式中间给了一个新的结构,可以微分,这个微分跟普通的微分不一样,它是把 k 次变为 $k+1$ 次,微分一般地总是加一次。

这个外微分是最早时候 Frobenius,Dauboux 和我的老师 Elie Cartan 引进来的。他们最初引进这个观念是对于一次微分式,是 Frobenius,Dauboux 引入的一次微分式。而 Elie Cartan 是法国的教授,是我的老师,他恐怕是二十世纪,也就是上个世纪最伟大的几何学家,法国巴黎大学的教授。

* 收稿日期:2002-07-11

我想这种教授很是模范,他不做别的活动,专做数学,时常功课是完全新的。有一年,他给了一门课,是《解析力学》(Analytical Mechanics),他把外微分的观念从 Frobenius,Dauboux 从一次式的定义推广到高次式,所以整个的外微分是 Elie Cartan 引进来的,这是有用的东西。

这个外微分有奇怪的现象:是用两次之后等于 0。

$$d^2 = 0 \tag{1.11}$$

即这个外微分用两次等于 0。我们要证明(1.11),就是对无论一个 k 次微分式,微分一次就变为 $k+1$ 次,两次就变为 $k+2$ 次微分式,它一定是 0。要证明这一点,我证明对于函数对了,就行了。所以我要证明对于任意的函数 f,把这个 d,外微分用两次,就等于 0,即 $d^2f=0$ 就行了。那么为什么呢?因为显然我要证明 $d^2=0$,只要证明 d^2 作用在只有一项上对就行了,这是因为它是线性的,所以如果线性一项有这个性质,那么整个的和就等于 0。那么一项的话,都是一个函数乘上一组 dx,我现在选 dx_i,就是假定在高维,在 n 维,x_i 就是 x_1 到 x_n,在高维时,如果有一个函数 f,f 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的一个函数,对于这个函数,用外微分两次,一定等于 0。事实上,因为外微分一次就得到 a_i 是 f_i 对 x_i 的一个偏微分,那么再用一次呢,它的系数就是从 x_i 到 x_j 微分 a_i,a_i 是 f 的对 x_i 的微分,所以这是 f 对从 x_i 到 x_j 的二阶微分:

$$d(a_i dx_i) = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i \tag{1.12}$$

这个函数对于 i,j 是对称的。事实上我们知道一个函数微分两次的话跟次序没有关系,是对称的。如果一个对称的函数是 $dx \wedge dy$ 的系数,而 $dx \wedge dy$ 是反对称的,那么它就等于 0 了。

d 是一个外微分,是对外代数的多项式的一个运算,这个运算运用两次就等于 0 了,这是一个了不得的关系。因为几何上讲,假使你有一个区域,你取这个区域的边界,再取这个边界的边界,就没有边界了。假使你取的边界是整个球,那么球没有边界。所以几何上讲有一个运算求边界,求边界的话,用两次,就等于 0。有一个区域的求一次边界是一个很好的区域,即不再有边界了,这个几何的性质跟外微分的性质是对偶的。求两次边界一定等于 0,这是个几何的性质;求外微分两次等于 0,是个分析的性质。这两个东西不是两个互不相关的东西,是完全对偶的,是一回事。一个边界通常用符号 ∂ 表示,边界两次等于 0,即 $\partial^2=0$。它跟外微分是对偶的。这是一个了不得的几何关系,了不得的数学上的关系,妙得不得了,因为求边界是一个几何的问题,更是一个整体的问题,一定要拿整个区域乘上边界,但是求外微分是个分析的问题,是个局部的问题。要外微分只要知道这个微分式在一点附近的性质就有了。这一个局部的运算跟一个整体的运算有这样对偶的关系是很难得的事情,是一个重要的几何现象,是重要的数学现象。

为什么对偶呢?其实这就是格林定理的推广,就是 Stokes 定理。Stokes 定理讲,假使有一个区域,把它封闭上,Δ^k 是这样一个 k 维的区域,所以它的边界就是边界 $\partial\Delta^k$。那么假使有一个微分式叫做 α,它的次数是 $k-1(\deg\alpha=k-1)$,于是我们就有这么一个关系:α 在边界的积分等于 $d\alpha$ 在 Δ^k 的积分,

$$\int_{\partial\Delta^k} \alpha = \int_{\Delta^k} d\alpha \tag{1.13}$$

这是重要极了的定理,通常用 Stokes 名义。Stokes 是英国的应用数学家,你们大概在这个课中已经听到 Stokes 定理。Stokes 定理就把两个普通的运算,一个是等于区域的边界的运算,一个是等于外微分的积分,这两个有简单的关系。假使我们把外微分的积分写成这个关系,

$$(\partial\Delta, \alpha) = (\Delta, d\alpha) \tag{1.14}$$

这个外微分成一个矢量空间(Vector Space),可以加减,这个区域也是另外一个矢量空间,也可以

加减。假使这两个矢量空间经过积分，因此就有一个所谓的"对"(pair)，这个矢量空间的一点和那个矢量空间一点连在一起是得到一个正数，得到一个数，那么 Stokes 定理就是说这个 paring 使得对 Δ 的作用的算子与外微分 d 是伴随的(adjoint)，是对偶的"对"，这就是 Stokes 定理的意义。高维时，及任意维时都是对的。龚昇教授在他的小书里说，这个是微积分的基本定理。

从它就给出我们普通微积分的基本定理。因为假使 $k=1$，那么我们的区域是一个线段，从 a 到 b 的线段，这个线段就是 Δ，它的边界呢，是 b 点减 a 点。α 在这里是一个函数，上次讲的 $\mathrm{d}\alpha$ 是个积分，在一维的情形就是用到直线上。因此在一维的情形 Δ 是个线段，它的边界是 $b-a$，α 是一个函数 f，所以 $\mathrm{d}\alpha$ 是 $\mathrm{d}f$，于是

$$(b-a,f)=(\Delta,\mathrm{d}f)\Rightarrow f(b)-f(a)=\int_a^b \mathrm{d}f \tag{1.15}$$

这就是说函数在 b 点的值减去函数在 a 点的值等于 $\mathrm{d}f$ 在这线段上的积分，这个就是所谓微积分的基本定理。也就是说右边是从 a 到 b 积分 $\mathrm{d}f$，左边就是 $f(b)-f(a)$，这就是我们的基本定理，所以 Stokes 定理是微积分的基本定理在高维的推广。因此在多元的微积分里头也是个进步，非常有用，因为外微分包含很多材料。

有一个公式很容易证明的，就是你把两个外微分的式子 α 跟 β 相乘，而求这个的外微分，

$$\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=\mathrm{d}\alpha\wedge\beta+(-1)^{\deg\alpha}\alpha\wedge\mathrm{d}\beta, \tag{1.16}$$

这个公式很容易证明，因为简单地只要假定 α 和 β 都单项就行了。这是由于对于 α 和 β 都是线性的。假定它们都是单项的，就可以写成 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_k,\cdots,\mathrm{d}x_n$，前头乘个函数一算就可以得到了。所以它们这个乘法之间和外微分有这样一种简单的关系。

这个关系不但如此，还可以更远的，因为假使有一个运算，它的平方等于 0，这是很不得了的，这个就可以造一个除法，有个商(quotient)。这样得到一个除法，现在叫做同调(homology)。现在许多数学的发展都是有个运算，加两次等于 0，你就能造一个 quotient，怎么样呢，什么叫 quotient 呢？就是你把所有的满足 $\mathrm{d}\alpha=0$ 的 α，被所有 $\mathrm{d}\beta A\&B$ 来除，即

$$\{\alpha|\mathrm{d}\alpha=0\}/\mathrm{d}\beta \tag{1.17}$$

要是 $\alpha=\mathrm{d}\beta$ 的话，因为 $\mathrm{d}^2=0$，所以 $\mathrm{d}\alpha=0$。因此你取所有的所谓的闭形式(close form)，被可以写成 d 什么的东西来除，就得到在数学里头用一个唬人的名字叫 homology。也就是取所有的 k 次的微分式，它们是封闭的(被 d 作用为 0)，被所有的 $\mathrm{d}\beta$ 的除，造一个商结构，这个商结构就叫做 homology。

你可以用到这个 d，也可以用到这个边界。用到边界的，历史上，是在拓扑里头，先有用边界的，因为用的是 ∂ 的 homology 叫上同调(cohomology)。这是由于历史的关系，名字用掉了，所以叫 cohomology. 这个很厉害，假使你有一个流形，它是紧致的，它的 cohomolgy form 是有限维的，这个有限维的维数叫这个空间的 Betti 数(Betti Number)。这是拓扑的内容，单学微积分，可以不必去管，不过这个领域整个的有重要的发展，是近来数学的发展基本内容，当然很要紧了。你有一个很大的空间，所有微分式组成的空间大得不得了，它有结构，你可以加减，也可以求外微分，大得不得了，然后呢，它有些几何的性质，取 quotient，这个 quotient 是有限的，这个有限有个好处，得到数目有限，是说有限维的维数是多少。得到一组数，这组数目就是这个空间的重要性质，因为得知 Betti 数是一个整数，有一群整数很要紧，比方说，球面，球面有这种 Betti 数，环面也有 Betti 数，它们是不一样，下面搞拓扑的人想法要证明这种 Betti 数是拓扑不变量，因此拓扑在数学的运用中就要紧了。(本讲完)