确界原理及其应用

数学分析I

第22讲

November 24, 2022

戴德金特(Dedekind)分割

设A和B是$\mathbb{R}$的两个子集, 满足条件$A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$且对任何$a \in A$, $b \in B$, 都有$a < b$, 则称(A, B)为$\mathbb{R}$的一个分割.

戴德金特连续性公理

对于$\mathbb{R}$的任何分割, 都存在唯一的$x^* \in \mathbb{R}$, 使对所有$a \in A$和$b \in B$, 都有$a \leqslant x^* \leqslant b$. 这个性质称为戴德金特连续性公理.

这条公理说的是“实数没有空隙”. 有理数不具备这种性质.

有理数集的分割

我们来分析一下，完全类似地可以定义$\mathbb{Q}$的分割:设A和B是$\mathbb{Q}$的两个子集, 满足条件$A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$且对任何$a \in A$, $b \in B$, 都有$a < b$, 则称(A, B)为$\mathbb{Q}$的一个分割.

首先，A中有最大数a_0, B中有最小数b_0的分割(A, B)是不存在的．若不然，由有理数的稠密性，存在有理数c满足$a_0 < c < b_0$. 这样c既不属于A, 又不属于B，与分割的定义矛盾.

有理数集不满足戴德金特连续性公理

$\mathbb{Q}$的分割仅能有三种类型：

1) A中无最大数，B中有最小数r.

例. $A=\{x|x\in\mathbb{Q},x<1\}$, $B=\{x|x\in\mathbb{Q},x\geqslant 1\}$.

2) A中有最大数r，B中无最小数.

例. $A=\{x|x\in\mathbb{Q},x\leqslant 1\}$, $B=\{x|x\in\mathbb{Q},x>1\}$.

3) A中无最大数，B中无最小数.

例. $A=\{x\in\mathbb{Q}|x\leqslant 0或x^2<2\}$, $B=\{x\in\mathbb{Q}|x>0且x^2>2\}$.

由3)可见有理数不具备戴德金特连续性公理这种性质. 实际上，戴德金特就是用有理数的分割来从有理数构造实数. 1)型的分割定义有理数r, 3)型的分割定义无理数，3)所给的分割定义了无理数$\sqrt{2}$.

上界集

一个数集S可以是有穷集, 也可以是无穷集. 我们知道, 当S是有穷集时, 它一定有最大元和最小元. 但是一个无穷数集却不一定有最大元和最小元. 例如, $\min\left\{\dfrac{n}{n+1}\,\middle|\, n=1,2,3,\dots\right\}=\dfrac{1}{2}$, 而$\max\left\{\dfrac{n}{n+1}\,\middle|\, n=1,2,3,\dots\right\}$不存在.

现在我们考虑一种特殊的无穷数集. 对于一个有上界的数集S, 我们知道此时S的上界有无穷多个, 所有上界构成的无穷集称为S的上界集. 我们关心的是S的上界集是否有最小元. 直观的经验告诉我们, 这个最小元是存在的.

定义 1

(1) 如果数集S的上界集中有最小元, 则称之为S的上确界, 记为$\sup S$;
(2) 如果数集S的下界集中有最大元, 则称之为S的下确界, 记为$\inf S$.

从定义1容易看到, 如果数集S有上(下)确界, 则它的上(下)确界是唯一的. 以上定义中sup是supremum的简写, 而inf是infimum的简写. 设$\beta = \sup S$, 这包含两层意义: 一、β是S的上界, 即对任意$x \in S$, 都成立$x \leqslant \beta$; 二、β是S的所有上界中最小的, 即对任意$\varepsilon > 0$, $\beta - \varepsilon$都不是S的上界, 亦即对任意$\varepsilon > 0$, 都存在$x_0 \in S$, 使得$x_0 > \beta - \varepsilon$.

定理 1

β是数集S的上确界的充分必要条件是:
(1) 对任意$x \in S$, 都成立$x \leqslant \beta$;
(2) 对任意$\varepsilon > 0$, 都存在$x_0 \in S$, 使得$x_0 > \beta - \varepsilon$.

定理 2

α是数集S的下确界的充分必要条件是:
(1) 对任意$x \in S$, 都成立$x \geqslant \alpha$;
(2) 对任意$\varepsilon > 0$, 都存在$x_0 \in S$, 使得$x_0 < \alpha + \varepsilon$.

命题1

β是数集S的上确界的充分必要条件是:
(1) 对任意$x \in S$, 都成立$x \leqslant \beta$;
(2) 存在数列$\{x_n\} \subseteq S$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$.

上(下)确界与最大(小)元的区别

我们容易看出, 如果S的最大(小)元存在, 则它就是S的上(下)确界; 但是, 当最大(小)元不存在时, 上(下)确界仍可能存在. 例如, 对于区间$(0,1]$, $\sup(0,1] = \max(0,1] = 1$; $\min(0,1]$不存在, 而$\inf(0,1] = 0$. 因此, 上(下)确界这个概念是对最大(小)元概念的推广.

再如，对于$S = \left\{\sin n \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$, 这个集合不存在最大元和最小元，$\sup S = 1$, $\inf S = -1$.

公理

(确界原理) 有上界的非空数集必有上确界.

确界原理从直观上看并不难接受, 或者说它在直观上是“自明的”. 确界原理表达的是实数的连续性, 我们很容易看到, 有理数并不具有这样的性质. 在数学中, 几乎每一个命题的证明都会依赖于其它更基本的命题, 这种命题之间的依赖关系最终会回溯到某一个或某一些最基本的命题, 它们被不加证明地接受下来, 作为研究的出发点, 称为公理.

换句话说, 就象中学的“平面几何”和“立体几何”, 是建立在一组公理(例如, 过直线外一点, 必存在唯一的一条平行线)之上那样, 实数的理论也有它的公理. 我们将在本章中陆续地介绍若干个和确界原理等价的定理以及它们的应用. 它们之中, 有几个也具有直观上的“自明性”, 因此也可能被选择作为公理. 例如, 在有些教材中就选择“单调有界数列必有极限”作为公理. 而本书的选择是“确界原理”.

推论

(确界原理) 有下界的非空数集必有下确界.

推论的证明

设S是一个有下界的非空数集. 于是$T = \{-x | x \in S\}$非空有上界, 因而有上确界, 设$\beta = \sup T$. 记$\alpha = -\beta$, 于是$\alpha = \inf S$.

约定

若数集S无上界, 我们形式上记$\sup S = +\infty$; 若数集S无下界, 则记为$\inf S = -\infty$. 这只是形式上的记号, 并不适用于前面的定理1和定理2.

几个例子

我们还注意到: 如果一个数集S的上确界$\sup S=\beta$, 则$\beta\in S$的充分必要条件是$\beta=\max S$. 下确界亦然.

下面看几个例子:

(1) $S_1=\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dots,\dfrac{1}{n},\dots\right\}$, $\inf S_1=0,\sup S_1=\max S_1=1$;

(2) $S_2=\mathbb{N}$, $\inf S_2=\min S_2=0,\sup S_2=+\infty$;

(3) $S_3=\{n^{(-1)^n}|n=1,2,3,\dots\}$, $\inf S_3=0,\sup S_3=+\infty$.

判断下面的命题是否成立.

若S为有界集，则

$$\sup\left\{|x-y|\,\middle|\,x,y\in S\right\}=\sup S-\inf S.$$

(A) 成立

(B) 不成立

判断下面的命题是否成立.

若S为有界集，$A=\left\{\lim\limits_{n\to\infty} x_n \middle| \{x_n\}\subseteq S\text{是收敛数列}\right\}$, 则$A$有最大元和最小元.

(A) 成立

(B) 不成立

戴德金特连续性公理蕴涵确界原理

设非空数集S有上界M, B为S的上界集, 于是$B \neq \emptyset$. 再令$A = \mathbb{R} \setminus B$, 于是$A \neq \emptyset$且$(A, B)$为$\mathbb{R}$的一个分割. 从而由戴德金特连续性公理知有唯一的$x^*$, 使对任何$a \in A$和$b \in B$, 都有

$$a \leqslant x^* \leqslant b. \tag{1}$$

往证x^*为S的上界. 若不然, 则存在$x_0 \in S$使得$x^* < x_0$. 于是有

$$x^* < \frac{x^* + x_0}{2} < x_0. \tag{2}$$

按定义知$\frac{x^* + x_0}{2}$不是S的上界, 所以$\frac{x^* + x_0}{2} \in A$. 由(1)又有$\frac{x^* + x_0}{2} \leqslant x^*$, 此与(2)矛盾. 从而$x^*$为$S$的上界，即有$x^* \in B$.
因为$x^* \in B$, 且由(1)知于任何$b \in B$, 都有$x^* \leqslant b$, 故x^*为B中的最小元, 即x^*为S的上确界.

确界原理蕴涵戴德金特连续性公理

设(A, B)为$\mathbb{R}$的任一分割，由确界原理知A有上确界x^*． 按定义知于任何$a \in A$，都有$a \leqslant x^*$．又按分割定义知于任何$b \in B$，b都是A的上界，从而$x^* \leqslant b$.

若还有$x_0 \in \mathbb{R}$，$x_0 \neq x^*$，使对任何$a \in A$和$b \in B$，都有$a \leqslant x_0 \leqslant b$. 不妨设$x_0 > x^*$，于是

$$x^* < \frac{x^* + x_0}{2} < x_0.$$

从而$\frac{x^* + x_0}{2} \in \mathbb{R}$既不能属于$A$也不能属于$B$，矛盾．这就证明了满足要求的$x^*$的唯一性.

用有理数集$\mathbb{Q}$的分割来构造实数集

实数集

$$\mathbb{R}=\big\{(A,A')\big|(A,A')\text{是}\mathbb{Q}\text{的分割且}A\text{中无最大数}\big\}.$$

规定$\mathbb{R}$上的序关系

规定“$(A,A')<(B,B')$”当且仅当“A是B的真子集”.

定义加法

对任意给定的$(A,A'),(B,B')$, 令$C=\big\{a+b\big|a\in A,b\in B\big\}$, $C'=\mathbb{Q}\setminus C$, 则不难验证(C,C')是$\mathbb{Q}$的分割且C中无最大数. 定义

$$(A,A')+(B,B')=(C,C').$$

定义乘法

设$D=\{r\in\mathbb{Q}|r<0\}$, $D'=\{r\in\mathbb{Q}|r\geqslant 0\}$, 记$0^*=(D,D')$.
当$0^*<(A,A')$, $0^*<(B,B')$时，令

$$C=\left\{r\in\mathbb{Q}\middle|\text{存在}a\in A,b\in B,a>0,b>0,\text{使得}r<ab\right\},$$

$C'=\mathbb{Q}\setminus C$, 则不难验证(C,C')是$\mathbb{Q}$的分割且C中无最大数. 定义

$$(A,A')\cdot(B,B')=(C,C').$$

用α来简记(A,A'), 用β来简记(B,B'), 其余情形的乘法定义如下.

$$\alpha\cdot\beta=\begin{cases}0^*, & \alpha=0^*\text{或}\beta=0^*,\\ (-\alpha)\cdot(-\beta), & \alpha<0^*\text{且}\beta<0^*,\\ -[(-\alpha)\cdot\beta], & \alpha<0^*\text{且}\beta>0^*,\\ -[\alpha\cdot(-\beta)], & \alpha>0^*\text{且}\beta<0^*.\end{cases}$$

可以验证如上定义的$\mathbb{R}$, 连同其上的加法、乘法和序，满足实数系的所有公理. 有兴趣的同学可以自行验证.

此外，还可以证明：实数系公理的模型在同构意义下是唯一的.

康托尔从$\mathbb{Q}$用柯西列来构造实数集. 限于课时，这种方法就不介绍了，有兴趣的同学可以看看陶哲轩的《实分析》.

有了域的公理、序的性质和确界原理作为实数理论的公理，阿基米德公理实际上是一个定理.

定理(阿基米德公理) 若a和b都是正实数, 则必存在$n \in \mathbb{N}^*$, 使得$na > b$.

由阿基米德公理可知，既没有最大的正有理数，也没有最小的正有理数.

阿基米德公理的证明

反证. 若阿基米德公理不成立，则存在$a > 0$, $b > 0$, 使得对任何正整数n, 有$na \leqslant b$. 令$A = \{na | n \in \mathbb{N}^*\}$, 则$A$非空有上界，从而有上确界，记$\alpha = \sup A$. 因为$a > 0$, 所以$\alpha - a < \alpha$. 由于$\alpha - a$不是$A$的上界，故存在正整数$m$, 使得$\alpha - a < ma$, 于是$\alpha < (m+1)a$, 这与$\alpha$是$A$的上界矛盾!

确界原理蕴涵单调收敛定理

单调收敛定理

单调有界数列必收敛. 具体地说

(1) 若数列$\{x_n\}$递增且有上界, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}^*\}$;

(2) 若数列$\{x_n\}$递减且有下界, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n | n \in \mathbb{N}^*\}$.

证明

(1) 设数列$\{x_n\}$递增且有上界, 则集合$\{x_n | n \in \mathbb{N}^*\}$有上界, 因而有上确界. 记$\beta = \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}^*\}$, 于是由定理1, 对任意$n \in \mathbb{N}^*$, 有$x_n \leqslant \beta$; 并且, 对任意$\varepsilon > 0$, 都存在$N$, 使得$x_N > \beta - \varepsilon$. 由于$\{x_n\}$递增, 当$n > N$时, 成立

$$\beta - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant \beta.$$

因而$|x_n - \beta| < \varepsilon$. 从极限定义知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$.

(2) 同理可证.

定理 3 (区间套定理)

设$\{[a_n, b_n]\}$是一列闭区间, 满足:
(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], n = 1, 2, 3, \ldots;$
(ii) 区间长度收敛于0 *(结合(i), 这相当于：对任给的$\varepsilon > 0$, 存在正整数n, 使得$b_n - a_n < \varepsilon$).*
则存在唯一的实数ξ, 使得ξ是区间列$\{[a_n, b_n]\}$的唯一公共点.

注意, 若把区间套定理中的闭区间改成一列开区间$\{(a_n, b_n)\}$或无界区间$\{[a_n, +\infty)\}$, 定理将不再成立. 例如$\left\{\left(0, \dfrac{1}{n}\right)\right\}$或$\{[n, +\infty)\}$, 公共点$\xi$都不存在.

区间套定理在直观上也是“自明的”, 并且它和“确界原理”也是可以互相证明的. 事实上, 历史上曾把它做为“几何学”的公理, 用来刻划直线的完备性.

区间套定理蕴涵确界原理

设S是有上界的非空数集，不妨设S无最大元.
任取一个$a_1 \in S$，又设b_1是S的一个上界. 把闭区间$[a_1, b_1]$等分成两个区间$\left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. 若$\dfrac{a_1+b_1}{2}$是$S$的一个上界，记$[a_2, b_2] = \left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$；否则，记$[a_2, b_2] = \left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. 无论哪种情况，都满足：$b_2$是$S$的上界，而$a_2$不是. 再把$[a_2, b_2]$等分成两个区间，选择其中一个记为$[a_3, b_3]$，满足：$b_3$是$S$的上界，而$a_3$不是.
依此类推，得到一列闭区间$\{[a_n, b_n]\}$，使得每一个b_n都是S的上界，而每一个a_n都不是. 并且该区间列还满足：
(i) $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$;
(ii) 对任给的$\varepsilon > 0$，由阿基米德公理知存在正整数n，使得$n\varepsilon > b_1 - a_1$，从而$b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \leqslant \dfrac{b_1 - a_1}{n} < \varepsilon$，故区间长度收敛于0.

区间套定理蕴涵确界原理（续）

由区间套定理, 有唯一的ξ是区间列$\{[a_n, b_n]\}$的公共点.
先证明ξ是S的一个上界. 对任给的$\varepsilon > 0$, 存在正整数n, 使得$b_n - a_n < \varepsilon$, 从而$\xi + \varepsilon \geqslant a_n + \varepsilon > b_n$, 故$\xi + \varepsilon$是$S$的一个上界, 即对任意$x \in S$, 有$x \leqslant \xi + \varepsilon$, 由$\varepsilon > 0$的任意性知$x \leqslant \xi$, 因此, ξ是S的一个上界.
再证明$\xi - \varepsilon$不是S的上界. 对任给的$\varepsilon > 0$, 存在正整数n, 使得$b_n - a_n < \varepsilon$, 从而$a_n > b_n - \varepsilon \geqslant \xi - \varepsilon$. 由于$a_n$不是$S$的上界, 故有$x_0 \in S$使得$x_0 > a_n > \xi - \varepsilon$. 因此, $\xi - \varepsilon$不是S的上界.
综上所述, $\xi = \sup S$.

思考题

如何证明无理数集在实数集中稠密？

如何用确界原理证明区间套定理（不经过单调收敛定理）？

如何用区间套定理证明$[0,1]$是不可数无限集？