4.1 导数的概念

一、基本方法

求函数$f(x)$在一点x_0处的导数主要有以下方法.

1. 按导数定义的定义求，即$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

2. 证明$f(x)$在点x_0处既有左导数$f'_-(x_0)$又有右导数$f'_+(x_0)$，且左右导数相等$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$，这种方法适合分段函数在分段点处的求导.

例 1 设$\varphi(x)$在$x=a$处连续，分别讨论下面函数在$x=a$处是否可导：

(1) $f(x)=(x-a)\varphi(x)$;

(2) $f(x)=|x-a|\varphi(x)$;

(3) $f(x)=(x-a)|\varphi(x)|$.

解 (1)

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(a+t)\cdot t}{t}=\lim_{t\to 0}\varphi(a+t)=\varphi(a),$$

故$f'(a)=\varphi(a)$.

(2)

$$f'_+(a)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\varphi(a+t)t}{t}=\varphi(a)$$
$$f'_-(a)=\lim_{t\to 0^-}\frac{\varphi(a+t)(-t)}{t}=-\varphi(a)$$

当$\varphi(a)\neq 0$时，f在$x=a$处不可导；当$\varphi(a)=0$时，$f(x)$在$x=a$处可导，且$f'(a)=0$.

(3)

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|\varphi(a+t)|\cdot t}{t}=\lim_{t\to 0}|\varphi(a+t)|=|\varphi(a)|.$$

故$f(x)$在$x=a$处可导，且$f'(a)=|\varphi(a)|$. □

例 2 设

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{\pi}{x}, & x<0,\\ A, & x=0,\\ ax^2+b, & x>0,\end{cases}$$

其中A,a,b为常数，试问A,a,b为何值时，$f(x)$在$x=0$处可导，并求$f'(0)$.

解 要使$f(x)$在$x=0$处可导, 则需$f(x)$在$x=0$处连续，即$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$. 而$f(0)=A$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x^2\sin\dfrac{\pi}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(ax^2+b)=b$, 故有$A=b=0$, 此时，$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2\sin\frac{\pi}{x}-A}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}x\sin\frac{\pi}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{ax^2-0}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}ax=0$. 所以，当$A=b=0$ ，a 取任意值时，$f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)=0$. □

点评 这里要注意可导的必要条件是连续，要函数可导，首先函数必须连续.

二、补充例题

例 3 求证黎曼函数$R(x)$处处不可导.

证 因为$R(x)$在有理点处不连续，所以$R(x)$在有理点处不可导. 又因为$R(x)$是周期为1的周期函数，所以只需任取$x_0\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$, 证明$R(x)$在点$x_0$不可导即可. 取无理数列$\{x_n\}$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$且$x_n\neq x_0$, $n=1,2,\cdots$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{R(x_n)-R(x_0)}{x_n-x_0}=0$; 取$y_n=\frac{[10^nx_0]}{10^n}$, $n=1,2,\cdots$, 则由$0<|y_n-x_0|<\frac{1}{10^n}$知$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$, 结合$|R(y_n)-R(x_0)|=R(y_n)\geqslant\frac{1}{10^n}$得$\left|\frac{R(y_n)-R(x_0)}{y_n-x_0}\right|>1$, 因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{R(y_n)-R(x_0)}{y_n-x_0}\neq0$. 根据海涅定理知$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R(x)-R(x_0)}{x-x_0}$不存在，即$R(x)$在点$x_0$不可导. □

例 4 设$f(x)$在$[-1,1]$上有定义，$f'(0)=a$, 求数列

$$x_n=f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdot+f\left(\frac{n}{n^2}\right)-nf(0),\qquad n=1,2,\cdots$$

的极限.

解 因为$f'(0)=a$, 所以对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得当$0<|x|<\delta$时，就有$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-a\right|<\varepsilon$. 又$f(0)=0$, 故当$0<|x|<\delta$时，就有$(a-\varepsilon)|x|<|f(x)-f(0)|<$

$(a+\varepsilon)|x|$. 对于上述$\delta>0$, 取正整数N_1, 使得$\frac{1}{N_1}<\delta$, 则当$n>N_1$ 时，就有$\frac{k}{n^2}<\delta$, $k=1,2,\cdots,n$. 于是当$n>N_1$ 时，有

$$(a-\varepsilon)\frac{n+1}{2n}=\sum_{k=1}^{n}(a-\varepsilon)\frac{k}{n^2}<x_n<\sum_{k=1}^{n}(a+\varepsilon)\frac{k}{n^2}=(a+\varepsilon)\frac{n+1}{2n}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}(a-\varepsilon)\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}(a-\varepsilon)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a+\varepsilon)\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}(a+\varepsilon)$, 所以存在$N>N_1$, 使得当$n>N$时，有$(a-\varepsilon)\frac{n+1}{2n}>\frac{a}{2}-\varepsilon$, $(a+\varepsilon)\frac{n+1}{2n}<\frac{a}{2}+\varepsilon$. 因此当$n>N$时，有$\frac{a}{2}-\varepsilon<x_n<\frac{a}{2}+\varepsilon$. 按极限定义知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{a}{2}$. □

注 特别地，若加上条件$f(0)=0$, 并设$x_n=f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)$, 同样也有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{a}{2}$.

例 5 已知函数$f(x)$在$x=0$处可导，且$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{\sin x}{x^2}\right)=2$, 试求$f(0)$和$f'(0)$.

解 由于$\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}+f(x)}{x}=2$，可知$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+f(x)\right)=0$，从而有

$$\lim_{x\to0}f(x)=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=-1,$$

又因为$f(x)$在$x=0$处可导, 从而$f(x)$在$x=0$处连续，因此

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=-1.$$

又因为

$$\begin{aligned}2&=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{\sin x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)+1}{x}+\frac{\sin x-x}{x^2}\right)\\&=f'(0)+\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2}=f'(0)+0\\&=f'(0),\end{aligned}$$

所以$f'(0)=2$. □

例 6 设$f(x)$连续，在$x=1$处可导，且满足

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x), \qquad (x\to 0)$$

求曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线方程.

解 方程两边同时令$x\to 0$ 取极限并注意到$f(x)$连续可得$f(1)-3f(0)=0$, 解得$f(1)=0$.

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{x}=8,$$

且

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x} \\
= & \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t} \\
= & \lim_{t\to 0}\frac{(f(1+t)-f(1))-3(f(1-t)-3f(1))}{t} \\
= & \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}-3\lim_{t\to 0}\frac{f(1-t)-f(1)}{t} \\
= & \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\lim_{t\to 0}\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}=4f'(1)
\end{aligned}$$

所以$f'(1)=2$. 因此切线方程为$y-0=2(x-1)$,即$y=2x-2$. □

例 7 已知曲线$y=f(x)$在点$(1,0)$处的切线在y轴上的截距为-1, 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n$

解 由题意，$f(1)=0$, $f(x)$在点$(1,0)$处的切线方程为

$$y-0=f'(1)(x-1),$$

又因为切线在y轴上的截距为-1, 即当$x=0$时, $y=-1$, 所以$f'(1)=1$, 于是，

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}}\right\}^{\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)}{\frac{1}{n}}}=\mathrm{e}^{f'(1)}=\mathrm{e}.$$

4.2 导函数的计算

一、基本方法

掌握导数的四则运算法则，复合函数、反函数、隐函数、参数函数求导法则的应用. 掌握对数求导法.

例 1 *(1)* 设$f(x)=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, 求$f'(x)$,

(2) 设$y=\tan\cos x^x$, 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,

(3) 设$y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$, 求$y'$.

解

$$(1)f'(x)=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{1-x^2}.$$

(2)令$u=x^x$, 先求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(e^{x\ln x})}{\mathrm{d}x}=e^{x\ln x}\frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}=x^x(1+\ln x),$$

或者可用对数求导法: $\ln u=x\ln x$, 于是$\frac{1}{u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(1+\ln x)$, 故有$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u(1+\ln x)=x^x(1+\ln x)$.

现对函数$y=\tan\cos x^x$，由复合函数求导法则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \sec^2(\cos x^x)\cdot(-\sin x^x)\cdot x^x(1+\ln x)\\ &= -\sin x^x\cdot\sec^2(\cos x^x)x^x(1+\ln x)\end{aligned}$$

(3)利用对数求导法有

$$\ln y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ln\ln y=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x)]$$

对上式两边求导得

$$\frac{1}{\ln y}\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{x^2-1},$$

即

$$y = y\ln y \cdot \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$$

□

二、补充例题

例 2 证明函数$x = y - \frac{1}{2}\sin y$一定存在反函数$y = f(x)$, 并求$f'(x)$.

解 由于

$$x'(y) = 1 - \frac{1}{2}\cos y > 0$$

因此函数$x = y - \frac{1}{2}\sin y$ 在$(-\infty, \infty)$内严格单调递增，故其反函数一定存在，且

$$f'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos y} = \frac{2}{2-\cos y}.$$

□

例 3 设$y = y(x)$为可微函数，求$y'(0)$，其中

$$y = -ye^x + 2e^y\sin x - 7x.$$

解 将$x = 0$代入等式可解得$y = 0$, 将y看成x的函数$y(x)$, 等式两边对x求导得

$$y' = -y'e^x - ye^x + 2e^y y'\sin x + 2e^y\cos x - 7$$

将$x = 0, y = 0$代入上式可得$y'(0) = -y'(0) + 2 - 7$, 即有$y'(0) = -\frac{5}{2}$. □

例 4 已知参数方程

$$x = \cos 3t + 12\cos t, \quad y = \sin 3t + 12\sin t, \qquad 0 < t < \pi,$$

求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 因为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3\sin 3t - 12\sin t, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3\cos t + 12\cos t,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = -\frac{\cos t + 4\cos t}{\sin 3t + 4\sin t}. \qquad \square$$

4.3 高阶导数

一、基本方法

求函数$f(x)$在一点x_0处的高阶导数主要有以下方法.

1. 按定义，用递归的方法计算

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

2. 设函数$u(x)$和$v(x)$都n次可导, 则可以按下列三个公式计算高阶导数:

(i) $[Cu(x)]^{(n)} = Cu^{(n)}(x)$, 其中$C$为常数;

(ii) $[u(x) \pm v(x)]^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x)$;

(iii) 莱布尼茨(Leibniz)公式

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

例 1 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

试求$f''(x)$, 讨论$f''(x)$的连续性.

解 当$x=0$时, 按导数定义有

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4\sin\dfrac{1}{x}}{x} = 0.$$

当$x \neq 0$时, 按求导公式有

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 \sin\frac{1}{x} + x^4 \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= 4x^3 \sin\frac{1}{x} - x^2 \cos\frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin\frac{1}{x} - x^2 \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}
$$

按导数定义, 又有

$$
\begin{aligned}
f''(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \left(4x^2 \sin\frac{1}{x} - x \cos\frac{1}{x}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

当$x \neq 0$时, 按求导公式，有

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 12x^2 \sin\frac{1}{x} + 4x^3 \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2x \cos\frac{1}{x} \\
&\quad -x^2\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= 12x^2 \sin\frac{1}{x} - 6x \cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
f''(x) = \begin{cases} 12x^2 \sin\frac{1}{x} - 6x \cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}
$$

当$x \neq 0$时，$f''(x)$为初等函数，故连续. 当$x \to 0$时, $f''(x)$ 表达式中前两项的极限都是0，而第三项的极限不存在, $\lim\limits_{x \to 0} f''(x)$不存, 故$f''(x)$ 在$x = 0$ 不连续. □

点评 求分段函数二阶导数时，和求一阶导数一样，在间断点需要利用导数的定义来求，在正常点则可以用别的各种求导方法.

例 2 设$y = x^2 e^x$, 求$y^{(2020)}$.

解　按莱布尼茨公式有

$$\begin{aligned} y^{(2020)} &= (x^2e^x)^{(2020)} \\ &= x^2(e^x)^{(2020)} + 4040x(e^x)^{(2019)} + 2020\times 2019(e^x)^{(2018)} \\ &= (x^2+4040x+2020\times 2019)e^x. \end{aligned}$$

□

点评　求$u(x)v(x)$的高阶导数，若$u(x)$为m阶多项式$p_m(x)$，则$u^{(k)}=0, k>m$，故可以方便地应用莱布尼茨公式，且只有$m+1$项相加.

例 3 求由方程$x^3+y^3-3axy=0(a>0)$所确定的隐函数$y=y(x)$的二阶导数.

解　将y视为x的函数, 将方程看作关于x的恒等式，在方程两边同时对x求导, 得到

$$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0.$$

由此解得

$$y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

上式两边同时对x求导, 得

$$y''=-\frac{(ay'-2x)(y^2-ax)-(ay-x^2)(2yy'-a)}{(y^2-ax)^2}.$$

将$y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$代入，整理得

$$y''=\frac{2xy(3axy-x^3-y^3)-2a^3xy}{(y^2-ax)^3}.$$

又因为$3axy-x^3-y^3=0$，所以

$$y''=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}.$$

□

例 4 求由参数方程

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t \qquad (a > 0)$$

给出的函数$y = y(x)$的二阶导数, 三阶导数.

解 因为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3a\cos^2 t\sin t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3a\sin^2\cos t,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\tan t,$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a}\cdot\frac{1}{\cos^4 t\sin t}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2})}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{3a}\cdot\frac{4\sin^2 t - \cos^2 t}{\cos^5 t\sin^2 t}\cdot\frac{1}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{1}{9a^2}\cdot\frac{4\sin^2 t - \cos^2 t}{\cos^7 t\sin^3 t}.$$

□

点评 求出参数方程$x = u(t), y = v(t)$的一阶导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v'(t)}{u'(t)}$后，即得到$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的参数方程$x = u(t), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v'(t)}{u'(t)} = v_1(t)$. 再次利用参数方程求导公式，可得二阶导数$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{v_1'(t)}{u'(t)}$. 这里两次用到参数方程求导公式，并不需要记住专门的计算公式

$$y''(x) = \frac{v''(t)u'(t) - v'(t)u''(t)}{[u'(t)]^3}.$$

二、补充例题

例 5 设$f''(u)$存在，$y = f(x+y)$, 求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 由$y = f(x+y)$, 令$u = x+y$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(u)\left(1 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \tag{1}$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f'(u)}{1-f'(u)}.$$

等式(1)两边再对x 求导，有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f''(u)\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+f'(u)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{f''(u)\left(1+\frac{f'(u)}{1-f'(u)}\right)^2}{1-f'(u)}\frac{f''(u)}{(1-f'(u))^3}.$$

□

例 6 已知函数$y=\frac{x^2}{1-x^2}$,求$y^{(n)}(0)$.

解 因为

$$y=\frac{x^2-1+1}{1-x^2}=-1+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}=-1+\frac{1}{2}(x+1)^{-1}-\frac{1}{2}(x-1)^{-1},$$

求各阶导数，得

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2}\cdot(-1)(x+1)^{-2}-\frac{1}{2}\cdot(-1)(x-1)^{-2},\\
y'' &= \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 2!(x+1)^{-3}-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2 2!(x-1)^{-3},\\
&\cdots\cdots\\
y^{(n)} &= \frac{1}{2}\cdot(-1)^n n!(x+1)^{-(n+1)}-\frac{1}{2}\cdot(-1)^n n!(x-1)^{-(n+1)},
\end{aligned}$$

所以

$$y^{(2m)}(0)=(2m)!,\qquad y^{(2m+1)}(0)=0.$$

□

点评 在以后要讲的泰勒级数中,会提供一种新的求高阶导数的方法，这里提前说明. 简单地说，这种方法如下：若$f(x)$ 可展成幂级数$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$,则有$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$，即

有$f^{(n)}(0)=a_n n!$. 本题中可用此方法，且会更简洁. 事实上，因为

$$y=\frac{x^2}{1-x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n},$$

所以

$$y^{(2m)}(0)=(2m)!,\quad y^{(2m+1)}(0)=0.$$

例 7 设$y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$,求$y^{(2020)}(0)$.

解 由题意，$y=(1+x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}$,令$u=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$,则

$$\begin{aligned}
u' &= (-1)\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\\
u'' &= (-1)^2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1-x)^{-\frac{5}{2}}=\frac{1\times 3}{2^2}(1-x)^{-\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots u^{(n)} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

莱布尼茨公式有

$$\begin{aligned}
y^{(2020)} &= (1+x)\cdot u^{(2020)}+C_{2020}^{1}u^{(2019)}\\
&= (1+x)\frac{4039!!}{2^{2020}}(1-x)^{-\frac{4041}{2}}+2020\cdot\frac{4037!!}{2^{2019}}(1-x)^{-\frac{4039}{2}}.
\end{aligned}$$

□

例 8 设$y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$,求$y^{(n)}(0)$.

解一 令$f(x)=(\arcsin x)^2$, 求导可得

$$f'(x)=2\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

则有$f'(0)=0$, 整理上式得

$$(1-x^2)f'^2(x)=4f(x),$$

上式两边求导可得

$$-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=2$$

由此可得$f''(0)=2$. 应用莱布尼茨公式，对上式两边同时求n阶导数有

$$-xf^{(n+1)}(x)-nf^{(n)}(x)+(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)=0,$$

令$x=0$可得$f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)$,再由$f'(0)=0, f''(0)=2$可得

$$f^{(2k+1)}(0)=0 \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

$$f^{(2k)}(0)=2\left((2k-2)!!\right)^2$$

注意到$y=\frac{1}{2}f'(x)$,故

$$y^{(n)}=\left[\frac{1}{2}f'(x)\right]^{(n)}=\frac{1}{2}f^{(n+1)}(x),$$

所以

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases} 0, & 当n=2k时, \\ \left((2k-2)!!\right)^2, & 当n=2k-1时 \end{cases}$$

解二 $y^2(1-x^2)=(\arcsin x)^2$ 两边对x 求导得

$$2yy'(1-x^2)-2xy^2=2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=2y,$$

整理得

$$y'(1-x^2)-xy=1(*)$$

令$x=0$, 得$y'(0)=1$, 对上式进一步求导得

$$y''(1-x^2)-3xy'-y=0,$$

可得$y''(0)=y(0)=0$. 对(*)两边同时求$n-1$阶导数得

$$y^{(n)}(1-x^2)+C_{n-1}^1y^{(n-1)}\cdot(-2x)+C_{n-1}^2y^{(n-2)}\cdot(-2)-xy^{(n-1)}-C_{n-1}^1y^{(n-2)}=0,$$

令$x=0$整理得

$$y^{(n)}=(n-1)^2y^{(n-2)},$$

注意到$y(0)=0,y'(0)=1$ 可得

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & 当n=2k时,\\ ((2k-2)!!)^2, & 当n=2k-1时\end{cases}$$

□

例 9 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微, 求证对$x\neq 0$,总有

$$\frac{1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

证 当$n=1$时，右式 $=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]=f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}=$ 左式, 命题成立. 设n时命题成立，则$n+1$时，

$$\begin{aligned}右式 &= (-1)^{n+1}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left[x^nf\left(\frac{1}{x}\right)\right]=(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left[x\cdot x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\
&= (-1)^{n+1}x\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left[x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]+(-1)^{n+1}(n+1)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\
&= -x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right]-\frac{n+1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{n+1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{1}{x^{n+1}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{n+1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{1}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)=左式,\end{aligned}$$

命题也成立. 由数学归纳法知对任意正整数n, 命题都成立. □

4.4 微分

一、基本方法

求函数$f(x)$的微分的主要有以下方法.

1. 按微分和导数的关系，先求导数再求微分. 当x是自变量时，

$$\mathrm{d}^nf(x)=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$$

2. 由微分形式不变性求一阶微分$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$，结合如下运算法则和公式:

1. $\mathrm{d}[u(x) \pm v(x)] = \mathrm{d}u(x) \pm \mathrm{d}v(x)$;
2. $\mathrm{d}[u(x)v(x)] = v(x)\mathrm{d}u(x) + u(x)\mathrm{d}v(x)$;
3. $\mathrm{d}\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right] = \dfrac{v(x)\mathrm{d}u(x) - u(x)\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0$;
4. $\mathrm{d}f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$.

例 1 设$y = f(\ln x)e^{f(x)}$,其中f可微，求$\mathrm{d}y$.

解一 先求y',

$$\begin{aligned} y' &= [f(\ln x)]'e^{f(x)} + f(\ln x)[e^{f(x)}]' = f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{f(x)} + f(\ln x) \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) \\ &= e^{f(x)} \left(\frac{1}{x} f'(\ln x) + f(\ln x) f'(x) \right) \end{aligned}$$

故，

$$\mathrm{d}y = e^{f(x)} \left(f(\ln x) f'(x) + \frac{1}{x} f'(\ln x) \right) \mathrm{d}x.$$

解二 由微分形式不变性有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= f(\ln x)\mathrm{d}(e^{f(x)}) + e^{f(x)}\mathrm{d}(f(\ln x)) \\ &= f(\ln x) \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x)\mathrm{d}x + e^{f(x)} f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= e^{f(x)} \left(f(\ln x) f'(x) + \frac{1}{x} f'(\ln x) \right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

□

二、补充例题

例 2 设方程$x = y^y$确定隐函数$y = y(x)$, 求$\mathrm{d}y$.

解一 将y看成x的函数，先求出y', 方程两边关于x求导，得

$$1 = e^{y \ln y} \left[y' \ln y + y \frac{1}{y} y' \right] = x(1 + \ln y) y',$$

整理得，

$$y' = \frac{1}{x(1+\ln y)},$$

于是，

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{x(\ln y + 1)}\mathrm{d}x$$

解二 由微分形式不变性有

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}(e^{y\ln y}) = e^{y\ln y}\mathrm{d}(y\ln y) = e^{y\ln y}(\ln y + 1)\mathrm{d}y = x(\ln y + 1)\mathrm{d}y.$$

整理得，

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{x(\ln y + 1)}\mathrm{d}x$$

□

例 3 求$\mathrm{d}^n(x^2\ln x)(x > 0)$.

解 令$y = x^2\ln x$ 依次求各阶导数，有

$$\begin{array}{rcl}
y' & = & 2x\ln x + x, \\
y'' & = & 2\ln x + 3, \\
y''' & = & 2x^{-1}, \\
y^{(4)} & = & 2\times(-1)x^{-2} \\
y^{(5)} & = & 2\times(-1)\times(-2)x^{-3} \\
 & & \cdots\cdots \\
y^{(n)} & = & 2\times(-1)\times(-2)\cdots\times[-(n-3)]x^{-(n-2)}
\end{array}$$

所以

$$\mathrm{d}^n(x^2\ln x) = \begin{cases} x(2\ln x + 1)\mathrm{d}x, & n = 1 \\ (2\ln x + 3)\mathrm{d}x^2, & n = 2 \\ (-1)^{n-3}2\cdot(n-3)!x^{2-n}\mathrm{d}x^n, & n \geq 3 \end{cases}$$

□