1. $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j)^2$ $\boxed{R(A)=R(A^TA)}$

证明 f 的秩等于A的秩

记 $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

故 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}y_i^2=(y_1,y_2,\cdots y_m)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$

2. $A=(a_{ij})$ $B=(b_{ij})$ 正定

① A^{-1}是否正定

② $A+B$是否正定

③ $C=(c_{ij})$ $c_{ij}=a_{ij}b_{ij}$ 是否正定

3. $B=(b_{ij})$ 正定，$a_1,\cdots,a_n$是互不相同的正数，$A=\left(\frac{b_{ij}}{a_i+a_j}\right)$ 是否正定

4. A是n阶实对称矩阵

① 存在 $t_0\in\mathbb{R}$，使得当$t>t_0$时 tI_n+A均正定

tI_n+A 均为正定矩阵

② B为任意正定矩阵，存在$t_0\in\mathbb{R}$，当$t>t_0$时

思考题： A, S为实方阵，S对称，

$AS+SA$正定

问：S是否可逆，A是否可逆

5. $P、Q、R\in\mathbb{R}^{n\times n}$，P, Q正定

证明：$P-B^TQ^{-1}B$正定当且仅当$Q-BP^{-1}B^T$正定

6. X^TAX为实二次型，且存在$X_1,X_2\in\mathbb{R}^{n\times1}$满足$X_1^TAX_1>0$

$X_2^TAX_2<0$，证明：存在非零X_0使得 $X_0^TAX_0=0$

思考题：$A=(a_{ij})$正定，每一行最大的元素是谁？

$\begin{pmatrix}1&x\\y&z\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$ad-cb>0$ $a>0$

解：2. ① $A=PP^T$ $A^{-1}=(P^T)^{-1}P^{-1}=(P^{-1})^TP^{-1}$

② 定义

③ way1:

目标：证$|C|>0$

" 1) $|C|\geq|A|b_{11}\cdots b_{nn}$ "

2) $|C|\geq|A||B|$

(思路)

way2: $B=PP^T$ $P=(P_{ij})$可逆

则 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}P_{ik}P_{jk}$

$\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\sum_{k=1}^{n}P_{ik}P_{jk}x_ix_j$

$=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}P_{ik}a_{ij}P_{jk}x_ix_j$

$=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}P_{ik}x_ia_{ij}P_{jk}x_j$

令$Y_k=P_{ik}x_i$ 则 $\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}x_ix_j=\sum_{k=1}^{n}Y_k^TAY_k$

5. $\begin{pmatrix}P&B^T\\B&Q^{-1}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}P&0\\0&Q-BP^{-1}\end{pmatrix}$

$P=U^TU$ $Q=V^TV$

$P-B^TQ^{-1}B$

$=U^TU-B^T(V^TV)^{-1}B$

$=U^TU-B^TV^{-1}(V^T)^{-1}B$

$=U^TU-B^TV^{-1}(V^{-1})^TB$

令$K=B^TV^{-1}$

则 $P-B^TQ^{-1}B=U^TU-KK^T$

$3^{T})$