南开大学数学系10-11学年第二学期《高等代数与解析几何(II)》期中试题

学号：　　　　姓名：　　　　成绩：

1. (15分) 设矩阵$A=\begin{bmatrix}2&1&-2\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix}0\\6\\12\end{bmatrix}$.

   (1). (10分) 计算A的特征值和特征向量;

   (2). (5分) 计算$A^{10}\cdot x$.

2. (30分) 设矩阵$A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$.

   (1). (15分) 求A的Jordan标准形J, 并求出可逆矩阵T，使得$T^{-1}AT=J$.

   (2). (15分) A的行列式因子、不变因子、初等因子和最低多项式.

3. (10分) 设V是数域P上的n维线性空间, σ是V的可逆的线性变换, W是σ的不变子空间.

   证明：W也是σ^{-1}的不变子空间.

4. (10分) 设V是n维线性空间, $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathrm{End}\,V$. 证明: $\mathrm{rank}(\mathcal{A}\mathcal{B})\geq\mathrm{rank}(\mathcal{A})+\mathrm{rank}(\mathcal{B})-\dim(V)$.

5. (10分) 设V是奇数维的实线性空间, $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathrm{End}\,V$满足$\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$.

   证明: $\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$有公共的特征向量.

6. (10分) 设V是n维线性空间, $\sigma\in\mathrm{End}\,V$. 令

$$V_0=\sum_{i=1}^{n}\ker(\sigma^i),\quad V_1=\bigcap_{i=1}^{n}\sigma^i(V).$$

   证明: V_0和V_1都是σ的不变子空间, 且$V=V_0\oplus V_1$.

7. (15分) 设A是一个$n\times n$阶复矩阵, a是A的任意特征值, 重数为k.

   证明：A相似于一个对角矩阵的充分必要条件是秩(aI_n-A)=$n-k$.