

数学文化十讲

见面课（二）



联系方式

李军 数学科学学院416办公室

邮箱: lijun@nankai.edu.cn

鼓励师生课下的联系和交流。上周已经建立了课程的飞书群，教学通知会发到飞书群。大家在学习中遇到问题，就及时通过飞书联系我。



“数学文化十讲”慕课的前两讲你学习了多少？

- A 已学完前两讲**
- B 已学完第一讲但没学完第二讲**
- C 已开始学习但还没学完第一讲**
- D 还没开始慕课的学习**



提交

本课程的教材请自己去买，有用！



平台上慕课内容的拓展



某外企招考员工的一道题

老师让**6**名学生围坐成一圈，另让一名学生坐在中央，并拿出七顶帽子，其中四顶白色，三顶黑色。然后让七名学生都戴上眼罩，并给每个学生戴一顶帽子；再只解开坐在圈上的六名学生的眼罩。这时，由于坐在中央的学生的阻挡，每个人只能看到五个人的帽子。老师说：“现在，你们七人猜一猜自己戴的帽子颜色。”**大家静静地思索了好大一会**。最后，坐在中央的、被蒙住双眼的学生说：“我猜到了。”

问：中央的被蒙住双眼的学生带的是什么颜色的帽子？
他是怎样猜到的？

提示：遮挡



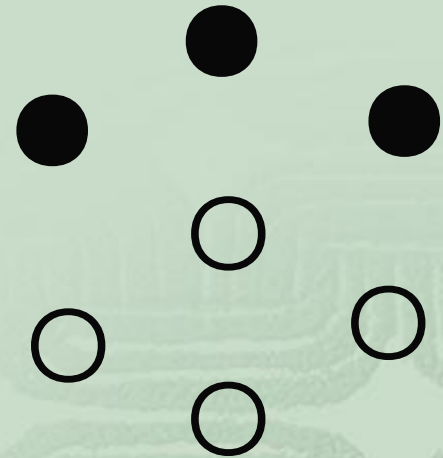
某外企招考员工的一道题

老师让6名学生围坐成一圈，另让一名学生坐在中央，并拿出七顶帽子，其中四顶白色，三顶黑色。然后让七名学生都戴上眼罩，并给每个学生戴一顶帽子；再只解开坐在圈上的六名学生的眼罩。这时，由于坐在中央的学生的阻挡，每个人只能看到五个人的帽子。老师说：“现在，你们七人猜一猜自己戴的帽子颜色。”大家静静地思索了好大一会。最后，坐在中央的、被蒙住双眼的学生说：“我猜到了。”

问：中央的被蒙住双眼的学生带的是什么颜色的帽子？他是怎样猜到的？

（答：中央的学生戴的是白色帽子；

右侧是其中一种情况；另外的情况是什么）

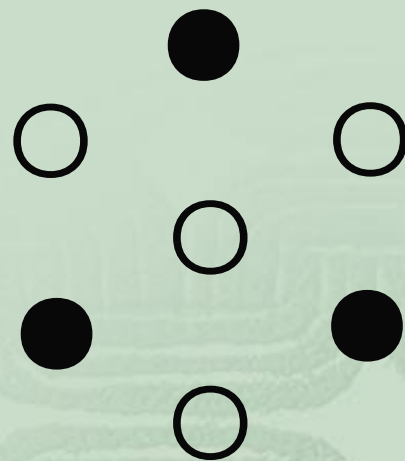


老师让6名学生围坐成一圈，另让一名学生坐在中央，并拿出七顶帽子，其中四顶白色，三顶黑色。然后让七名学生都戴上眼罩，并给每个学生戴一顶帽子；再只解开坐在圈上的六名学生的眼罩。这时，由于坐在中央的学生的阻挡，每个人只能看到五个人的帽子。老师说：“现在，你们七人猜一猜自己戴的帽子颜色。”大家静静地思索了好大一会。最后，坐在中央的、被蒙住双眼的学生说：“我猜到了。”

问：中央的被蒙住双眼的学生带的是什么颜色的帽子？他是怎样猜到的？

（答：中央的学生戴的是白色帽子；

右侧是另外的一种情况如右）



推断帽子颜色（三人情形）

三个人闭上眼后，每人被戴上一顶帽子，颜色为黑或红。然后三个人同时睁开眼，每人只能看到其他两人的帽子，看到有红帽子的话就举起手。

要求每人推断自己戴的帽子的颜色，怎样推断呢？



推断帽子颜色（三人情形）

- (1) 没人举手的情形。这时，自己戴的是黑帽子。
- (2) 两个人举手的情形。这时，若自己举手，则自己戴的是黑帽子；若自己没举手，则自己戴的是红帽子。
- (3) 三个人举手的情形。这时，若看到了黑帽子，则自己戴的是红帽子；若看到的都是红帽子，不能立刻下结论，当另两人说自己戴的是红帽子，则自己戴的是黑帽子，若另两人不能很快说出帽子颜色，则自己戴的是红帽子。



一个逻辑推理题

下面的问题取自皮埃尔·贝洛坎的《训练逻辑思维的100道趣题》一书。5位运动员在某个项目中排名第一到第五，他们说了下面这些话：

A：“我不是最后一名。”

B：“**C**是第三名。”

C：“**A**的排名紧跟在**E**后面。”

D：“**E**是第二名。”

E：“**D**不是第一名。”

出于谦虚或其他什么原因，金牌和银牌的得主都说了谎，那三个成绩相对较差的运动员倒说了真话。他们的排名到底怎样？

提示

A：“我不是最后一名。”

B：“**C**是第三名。”

C：“**A**的排名紧跟在**E**后面。”

D：“**E**是第二名。”

E：“**D**不是第一名。”

A说的是真话（若**A**说谎，则**A**是最后一名，与**A**说谎矛盾），故**A**是第三名或第四名。**D**说的是谎话（若**D**说的是真话，则**E**说谎，从而**D**是第一名，与**D**说真话矛盾）。



在这个逻辑推理题中，谁是最后一名？

A **B**

B **C**

C **E**



提交

数学方法

至2000年，中华人民共和国教育部制定的《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲（试验修订版）》中的表述，数学“**基础知识**是指：数学中的**概念、法则、性质、公式、公理、定理**以及由其内容所反映出来的数学思想和方法。

在用数学思想解决具体问题时，对某一类问题反复推敲，会逐渐形成某一类程序化的操作，就构成了“**数学方法**”。



不同层次的数学方法

数学方法也是具有层次的。

- 处于较高层次的，例如有：逻辑推理的方法，合情推理的方法，变量替换的方法，等价变形的方法，分情况讨论的方法，等等。
- 低一些层次的数学方法，还有很多。例如有：分析法，综合法，穷举法，反证法，抽样法，构造法，待定系数法，数学归纳法，递推法，消元法，降幂法，换元法，坐标法，配方法，列表法，图像法，等等。



数学方法与数学思想的区别

数学方法不同于数学思想。

- ◆ “数学思想”往往是观念的、全面的、普遍的、深刻的、一般的、内在的、概括的；
- ◆ 而“数学方法”往往是操作的、局部的、特殊的、表象的、具体的、程序的、技巧的。



数学方法与数学思想的联系

- ◆ 数学思想常常通过数学方法去体现；数学方法又常常反映了某种数学思想。
- ◆ 数学思想是数学教学的核心和精髓。教师在讲授数学方法时应该努力反映和体现数学思想，学生在学习数学知识和数学方法的过程中要体会和领悟数学思想，从而提高自身的数学素养。



趣味题：抓堆

抓堆： 有一堆谷粒（例如100粒），甲、乙轮流抓，每次可抓1—5粒，甲先抓，规定谁抓到最后一把谁赢。问：甲应该如何抓？为什么？



数学思想：

问题一般化；

问题特殊化；

归纳总结，找出规律；

证明规律，得到结论。



课堂讨论：解决关于自然数的问题的一般思路、方法

问题一般化；

问题特殊化；

猜测规律；

证明结论。

上述思想方法在解决问题中有着广泛的应用，请你结合自己大学或中学数学课程的学习，举一个应用上述思想方法的例子。

立方和公式

$$1^3 = 1 = 1^2,$$

$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2,$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2,$$

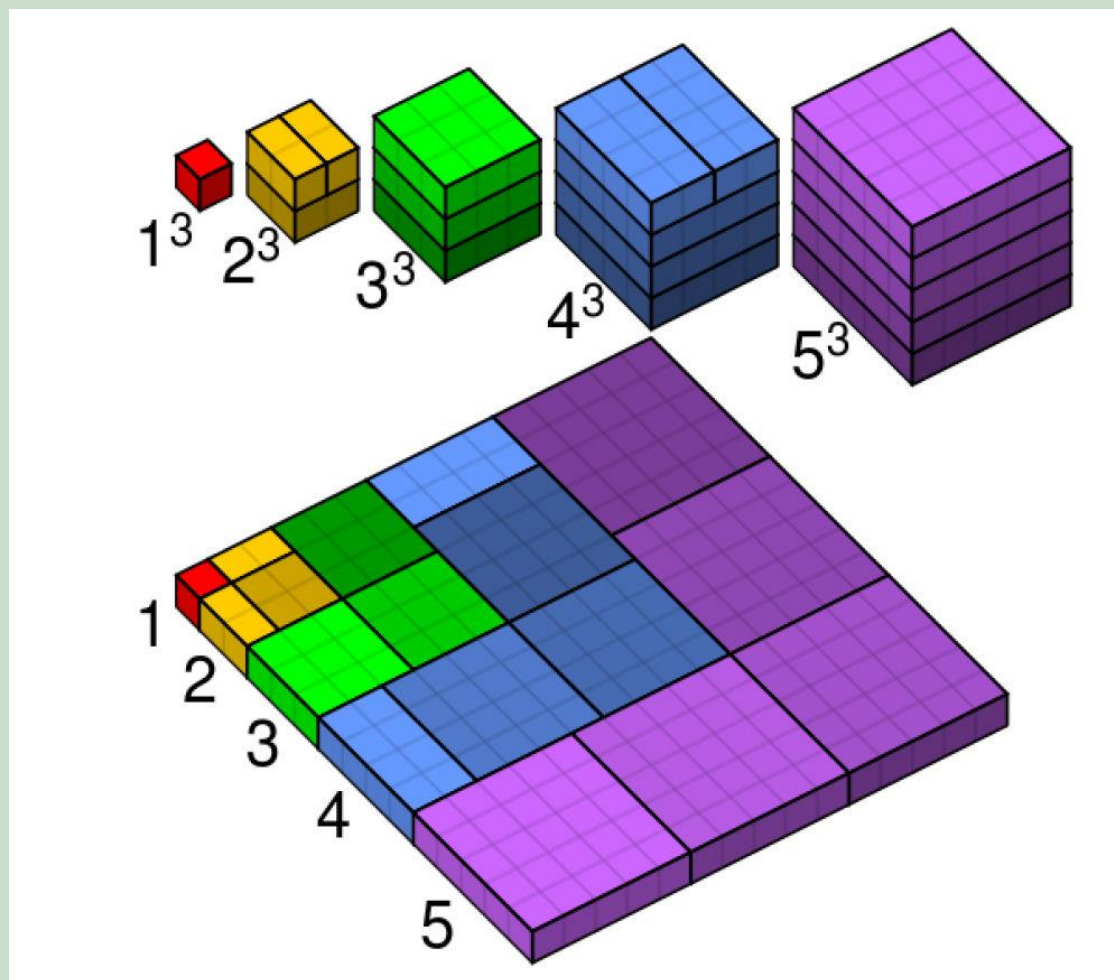
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2, \dots$$

猜测规律:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$



立方和公式的图示



微软公司招考员工的一道面试题

一个屋子里面有五十个人，每个人领着一一条狗，而这些狗中有一部分病狗。

假定有如下条件：**1**、狗的病不会传染，也不会不治而愈；**2**、狗的主人不能直接看出自己的狗是否有病，只能靠看别人的狗和推理，来发现自己的狗是否有病；**3**、一旦主人发现自己的狗是一只病狗，就会在当天开枪打死这条狗；**4**、狗只能由他的主人开枪打死。

如果他们在一起，第一天没有枪声、第二天没有枪声……第九天没有枪声，第十天发出了一片枪声，问有几条狗被打死？

（不是“脑筋急转弯”！）

《美国数学月刊》上的一道题

一辆载有 n ($n > 2$) 个不同的思维反应速度的旅客通过一隧道，且每一个旅客都不觉得他自己前额上有了一个煤烟黑点，假定每个旅客

- 1) 当他一看到且他只在看到一个旅伴额上有黑点时，便笑起来且笑到黑点给抹去为止。
- 2) 能够看到他所有旅伴的前额。
- 3) 能正确地推论。
- 4) 当且仅当他的推断使他得出本人有黑点的结论时，会抹去他本人前额上的黑点。
- 5) 他知道对他的每一个旅伴 (1)、(2)、(3)、(4) 均适用。

证明：每一个旅客最终会擦抹他自己的前额。



红眼岛民自杀事件

- 有一个孤岛，那里生活着多于100位岛民。他们有着几种不同颜色的眼睛。他们信奉一种宗教，教规是①每个人都不可以知道自己眼睛的颜色，也不可以讨论这个话题②如果有人知道了自己眼睛的颜色，他就必须第二天自杀。
- 一天，一位探险家来到这个岛，临走的时候，他说：“这个岛上竟然有红色眼睛的人。”一百天之后，岛上有100个人一起自杀了。这是为什么呢？
- 让我们以一位岛民的视角来简单推理一下：
- 假设岛上只有我一个人是红眼睛
- 假设岛上有两个红眼人（包含我）
- 假设岛上有三个红眼人（包含我）
- 假设岛上有N个红眼人（包含我）——每个红眼人都会在第N天发现自己的身份，然后在第N+1天集体自杀

[【原创】红眼岛民集体自杀事件 哔哩哔哩\(°-°\)つロ 干杯~ bilibili](#)

抓堆问题的一个变式

有一堆谷粒，共2022粒，甲、乙轮流抓，每次可以抓1粒或4粒或7粒，甲先抓，规定谁抓到最后一把谁赢。

问：谁有必胜策略？

如果你判断一方有取胜策略，请给出具体的取胜策略。

有一堆谷粒，共**2022**粒，甲、乙轮流抓，每次可以抓**1粒或4粒或7粒**，甲先抓，规定谁抓到最后一把谁赢。

问：谁有必胜策略？

- ☐ **A 甲有取胜策略**
- ☐ **B 乙有取胜策略**
- ☐ **C 甲和乙都没有取胜策略**



提交

分析过程

先把问题一般化，考虑 n 粒谷粒的情形，再把问题特殊化，依次讨论 $n=1, 2, 3, \dots$ 时分别有什么结论，然后从中猜测出规律。

$n=1$ 时，显然甲赢； $n=2$ 时，甲只能抓1粒，故乙赢； $n=3$ 时，甲只能抓1粒，然后乙也只能抓1粒，故甲赢； $n=4$ 时，甲可抓4粒，故甲赢； $n=5$ 时，甲只能抓1粒或4粒，可知乙赢； $n=6$ 时，甲可抓1粒，再由 $n=5$ 情形的讨论知甲赢； $n=7$ 时，甲可抓7粒，故甲赢； $n=8$ 时，甲无论怎么抓，乙可以把剩下的全抓走，故乙赢； $n=9$ 时，甲可抓1粒，再由 $n=8$ 情形的讨论知甲赢； $n=10$ 时，由 $n=3, 6, 9$ 情形的讨论知乙赢， \dots 。

由上述讨论可以总结规律：初始谷粒数除以8的余数为1, 3, 4, 6, 7时，甲能赢；初始谷粒数除以8的余数为0, 2, 5时，乙能赢。取胜策略是把除以8余数为0, 2, 5的情形留给对手。

提出抓堆问题的变式

数学研究是从问题开始的，不仅要会解决问题，而且要会提出问题。

请你给出抓堆问题的一些变式。可以从不同角度来变化抓堆问题，不需要理会问题的难易，也不需要给出问题的解答。



问题： 哪些正整数能表为若干个（至少2个）连续的正整数之和？

这个问题，归纳总结，大胆猜测出结果并不难。

但是，数学上严格证明自己的猜测，就不是很容易了。

$$3=1+2;$$

$$5=2+3;$$

$$6=1+2+3;$$

$$7=3+4;$$

$$9=4+5;$$

$$10=1+2+3+4;$$

$$11=5+6;$$

$$12=3+4+5;$$

$$13=6+7;$$

$$14=2+3+4+5;$$

$$15=1+2+3+4+5; \dots$$



课下思考

问题一般化；

问题特殊化；

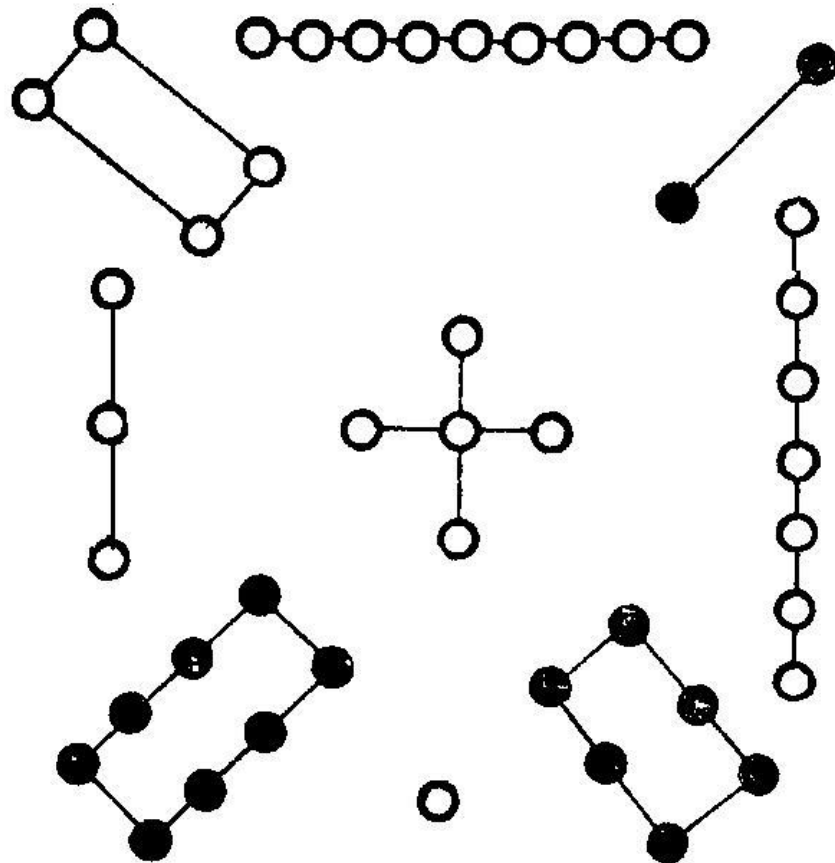
猜测规律；

证明结论。

这样的思路是否仅限于用在解决关于自然数的问题上？请详细说明理由。



三阶幻方



| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

乘法幻方

构造一个由9个不同的正整数组成的方阵，使得每一行，每一列和对角线上的积都相等。这种方阵就是乘法幻方。



四阶完全幻方

除了任一横行或纵列或对角线上四个数字之和都等于**34**，符合幻方的传统定义之外，还包括泛对角线，例如：
 $14+12+3+5=34$;
 $5+9+12+8=34$ 等等。具有这种性质的幻方称为“完全幻方”。

| | | | |
|----|----|----|----|
| 8 | 11 | 14 | 1 |
| 13 | 2 | 7 | 12 |
| 3 | 16 | 9 | 6 |
| 10 | 5 | 4 | 15 |

考古对数学史研究的推进

1986年上海陆家咀发现元朝玉挂，谈祥柏教授研究后发现，它是一个四阶完全幻方。过去以为只有印度历史上才有这种“完全幻方”。



一个数学游戏

有九张牌，每张牌上有一个数，分别是-4，
-3， -2， -1， 0， 1， 2， 3， 4. 甲乙两人轮流取牌，每次取一张牌，谁先取得的牌里有三张牌的和为零就获胜. 先取的人有取胜策略吗？



有九张牌，每张牌上有一个数，分别是-4，-3，-2，-1，0，1，2，3，4. 甲乙两人轮流取，甲先取，每次取一张牌，谁先取得的牌里有三张牌的和为零就获胜.

A

甲有取胜策略

B

乙有取胜策略

C

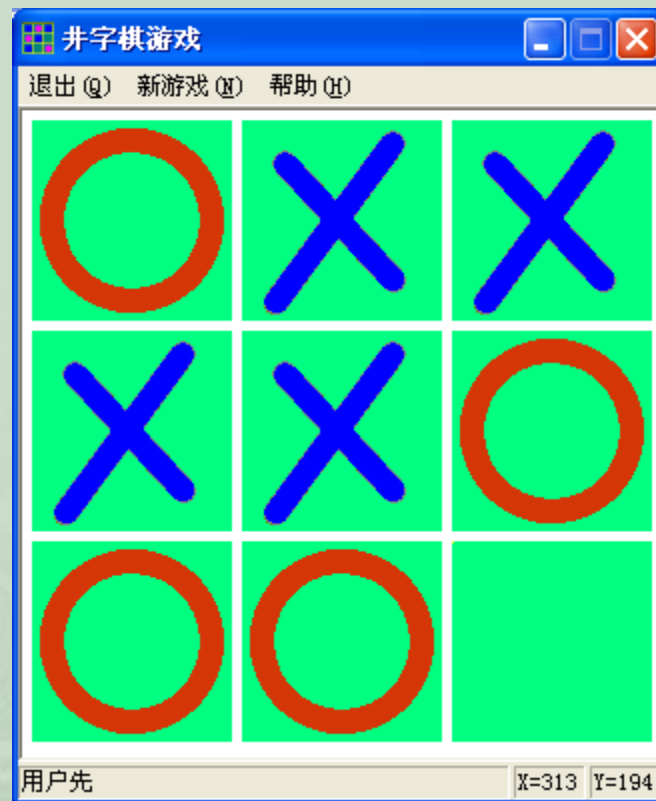
甲和乙都没有取胜策略



提交

井字棋

井字棋(Tic-Tac-Toe), 是一种在3*3格子上的连珠游戏, 由于棋盘格线排成井字故得名。如果两个玩家都作出最好的选择, 这个游戏是一定会平局的。所以, 井字棋最常使用是作为儿童游戏。



这个数学游戏本质上就是井字棋

借助下面的三阶幻方，可以看出这个数学游戏本质上就是井字棋。

| | | |
|----|----|----|
| -3 | 4 | -1 |
| 2 | 0 | -2 |
| 1 | -4 | 3 |



下次“见面课”

2022年9月29日

（周四）



本次“见面课”结束

谢谢！

