第十章 多元函数的极限与连续

难题选解

例 1 *(1)* 证明：在$\mathbb{R}^n$中，从一个给定的子集A出发，仅用取余集与取闭包两种运算至多可得*14*个不同的子集*;*

(2) 在$\mathbb{R}$中给出一个子集A*,* 使得经上述运算恰好得到*14*个不同的子集*.*

证 因为$(A^c)^c = A$, $\overline{(\overline{A})} = A$, 所以只需证明交替使用取余集与取闭包两种运算至多可得13个不同的子集. 若A是开集的闭包，则$A = \overline{A^\circ}$. 验证如下：设U是开集，$A = \overline{U}$, 则由$U \subseteq A^\circ \subseteq A$得$A = \overline{U} \subseteq \overline{A^\circ} \subseteq \overline{A} = A$, 故$A = \overline{A^\circ}$. 由此可见，若$A$是开集的闭包，则$A = \overline{A^\circ} = \overline{\left(\overline{A^c}\right)^c}$, 这说明从一个开集$U$出发，先使用取闭包运算，交替使用取余集与取闭包两种运算至多可得4个不同的子集：$\overline{U}$, $\left(\overline{U}\right)^c$, $\overline{\left(\overline{U}\right)^c}$, $\left(\overline{\left(\overline{U}\right)^c}\right)^c$ (再取闭包就又得到$\overline{U}$了). 从A出发，先使用取余集运算，交替使用取余集与取闭包两种运算，注意到$\left(\overline{A^c}\right)^c$是开集，根据上面的结论知至多可得7个不同的子集；从A出发，先使用取闭包运算，交替使用取余集与取闭包两种运算，注意到$\left(\overline{A}\right)^c$是开集，根据上面的结论知至多可得6个不同的子集. 因此，从A出发，交替使用取余集与取闭包两种运算至多可得13个不同的子集，从而加上A自身至多14个不同的子集.

(2) **解** 例如，$A = \left\{x \in (0,1) | x \neq \frac{1}{n}, n = 2, 3, \cdots\right\} \cup ([1,2] \cap \mathbb{Q}) \cup \left\{\frac{3n-1}{n} | n = 2, 3, \cdots\right\} \cup (4,5)$满足要求，请自行验证. □

注 该命题称为Kuratowski 14集定理，该定理是点集拓扑的一个定理，(1)的结论在拓扑空间中成立.

例 2 对任何实数x, y, 令$d(x,y) = \left|\dfrac{x}{1+|x|} - \dfrac{y}{1+|y|}\right|$, 求证：

(1) d是实数集$\mathbb{R}$上的一个距离函数*;*

(2) 对任何数集A*,* A是度量空间$(\mathbb{R}, d)$中的开集当且仅当A是欧氏空间$(\mathbb{R}, |\cdot|)$中的开集*;*

(3) 度量空间$(\mathbb{R},d)$不完备.

证 (1) $d(x,y)\geqslant 0$与$d(x,y)=d(y,x)$是显然的. 记$f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$, 则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$严格递增. 于是可见$d(x,y)=0$当且仅当$f(x)-f(y)=0$当且仅当$x=y$. 对任何实数x, y, z, 有

$$d(x,y)+d(y,z)=|f(x)-f(y)|+|f(y)-f(z)|\leqslant|f(x)-f(y)+f(y)-f(z)|=|f(x)-f(z)|=d(x,z).$$

这就验证了$d(x,y)$满足距离公理，故d是实数集$\mathbb{R}$上的一个距离函数.

(2) 一方面，设A是度量空间$(\mathbb{R},d)$中的开集，则对任何$x\in A$, 存在$r>0$, 使得$\{y\in\mathbb{R}|d(x,y)<r\}\subseteq A$. 由$f(x)$的连续性知对上述的$r>0$, 存在$\delta>0$, 当$y\in(x-\delta,x+\delta)$时，有$|f(y)-f(x)|<r$, 即$d(x,y)<r$. 于是$(x-\delta,x+\delta)\subseteq\{y\in\mathbb{R}|d(x,y)<r\}\subseteq A$, 故$A$是欧氏空间$(\mathbb{R},|\cdot|)$中的开集；另一方面，设$A$是欧氏空间$(\mathbb{R},|\cdot|)$中的开集，则对任何$x\in A$, 存在$\delta>0$, 使得$(x-\delta,x+\delta)\subseteq A$. 令$r=\min\{f(x)-f(x-\delta),f(x+\delta)-f(x)\}>0$, 则

$$\{y\in\mathbb{R}|d(x,y)<r\}=\{y\in\mathbb{R}||f(y)-f(x)|<r\}\subseteq(x-\delta,x+\delta)\subseteq A,$$

故A是度量空间$(\mathbb{R},d)$中的开集.

(3) 令$x_n=n$, $n=1,2,\cdots$, 则由$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1$知$\{f(x_n)\}$是$(\mathbb{R},|\cdot|)$中的柯西列. 于是对任意$\varepsilon>0$, 存在正整数$N$, 当$m>N$, $n>N$时，就有$d(x_m,x_n)=|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$, 故$\{x_n\}$是度量空间$(\mathbb{R},d)$中的柯西列. 由(2)知数列$\{x_n\}$在度量空间$(\mathbb{R},d)$中收敛当且仅当$\{x_n\}$在欧氏空间$(\mathbb{R},|\cdot|)$中收敛，故由$\{x_n\}$在欧氏空间$(\mathbb{R},|\cdot|)$中发散知$\{x_n\}$在度量空间$(\mathbb{R},d)$中发散. 因此度量空间$(\mathbb{R},d)$不完备. □

注 这个例子说明度量空间的完备性不是拓扑性质.

例 3 设K是n维欧氏空间的一个子集，K满足以下四个条件：

(i) K是紧集；

(ii) K是凸集；

(iii) K关于原点O对称；

(iv) K包含原点O的一个邻域，即存在$r>0$, 使得$B_r(O)\subseteq K$,

求证：

(1) 对任何$X\in\mathbb{R}^n$, $X\neq O$, 集合$\{t\in\mathbb{R}|tX\in K\}$有正的最大元；

(2) 令$\|O\|=0$, 对任何$X\in\mathbb{R}^n$, $X\neq O$, 令$\|X\|=\dfrac{1}{\max\{t\in\mathbb{R}|tX\in K\}}$, 则$\|\ \|$是$\mathbb{R}^n$上的一个范数且$K=\{X\big|\|X\|\leqslant 1\}$.

证 由(i)与(iv)知存在$r>0$与$r'>0$, 使得当$|Y|<r$时，有$Y\in K$, 当$|Y|>r'$时，有$Y\notin K$. 因此，对任何$X\in\mathbb{R}^n$, $X\neq O$, 当$|t|<\dfrac{r}{|X|}$时，有$tX\in K$, 当$|t|>\dfrac{r'}{|X|}$时，有$tX\notin K$. 记$S_X=\{t\in\mathbb{R}|tX\in K\}$, 则$S_X$是有界集，令$\xi=\sup S_X$, 就有$\xi\geqslant\dfrac{r}{|X|}>0$. 由上确界的性质知存在$\{t_m\}\subseteq S_X$, 使得$\lim\limits_{m\to\infty}t_m=\xi$. 因为$K$是闭集，所以由$\xi X=\lim\limits_{m\to\infty}t_mX$知$\xi X\in K$. 于是$\xi\in S_X$, 这就证明了$S_X$有正的最大元$\xi$.

(2) $\|X\|\geqslant 0$和$\|X\|=0$当且仅当$X=O$是显然的. 对任何$X\in\mathbb{R}^n$, $X\neq O$, 当$\lambda>0$时，由$S_{\lambda X}=\{t\in\mathbb{R}|t\lambda X\in K\}=\left\{\frac{t'}{\lambda}\in\mathbb{R}\middle|t'X\in K\right\}$可见$\max S_{\lambda X}=\dfrac{1}{\lambda}\max S_X$, 从而$\|\lambda X\|=\dfrac{1}{\max S_{\lambda X}}=\dfrac{\lambda}{\max S_X}=\lambda\|X\|$; 当$\lambda<0$时，由(iii)知$-X\in K$且$\|-X\|=\|X\|$，于是$\|\lambda X\|=\|-\lambda(-X)\|=-\lambda\|-X\|=-\lambda\|X\|$. 因此，对任何$X\in\mathbb{R}^n$与任何实数$\lambda$, 有$\|\lambda X\|=|\lambda|\|X\|$. 对任意$X\neq O$与$Y\neq O$, 记$p=\max S_X$, $q=\max S_Y$, 令$u=\dfrac{q}{p+q}$, 则$0<u<1$. 注意到$pu=(1-u)q$, 就有$pu(X+Y)=u(pX)+(1-u)(qY)$, 由(ii)知$pu(X+Y)\in K$, 故$pu\leqslant\max S_{X+Y}$. 因此，$\|X\|+\|Y\|=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{pu}\geqslant\|X+Y\|$. 于是对任何$X,Y\in\mathbb{R}^n$, 有$\|X\|+\|Y\|\geqslant\|X+Y\|$. 这就证明了$\|\ \|$是$\mathbb{R}^n$上的一个范数.

由(iv)知$O\in K$, 这时有$\|O\|=0\leqslant 1$; 若$X\in K$, $X\neq O$, 则$1\in S_X$, 从而$\max S_X\geqslant 1$, 由此得$\|X\|\leqslant 1$. 反过来，若$\|X\|\leqslant 1$, 则当$\|X\|=0$时，有$X=O\in K$; 当$\|X\|>0$时，根据(ii)由$O\in K$以及$\dfrac{X}{\|X\|}\in K$知$X\in K$. 这就证明了$K=\{X\big|\|X\|\leqslant 1\}$. $\square$

例 4 设$n>1$, F是$\mathbb{R}^n$的真子集，F是闭集且F的内部F°非空，求证：F的边界∂F是无穷集合.

证 取定点$X \in F^{\circ}$, 点$Y \in F^{c}$, 因为F°与F^{c}都是开集，所以存在$\delta > 0$与$\eta > 0$, 使得$B(X,\delta) \subseteq F^{\circ}$, $B(Y,\eta) \subseteq F^{c}$. 对任意$Z \in B(Y,\eta)$, 令$S = \{t \in [0,1] \big| (1-t)X + tZ \in F\}$, $s = \sup S$, 则由$B(X,\delta) \subseteq F^{\circ} \subseteq F$与$B(Y,\eta) \subseteq F^{c}$知$s \in (0,1)$. 令$W = (1-s)X + sZ$, 一方面，存在数列$\{t_m\} \subseteq S$使得$s = \lim\limits_{m\to\infty} t_m$, 从而由$F$的列闭性知$W = \lim\limits_{m\to\infty} [(1-t_m)X + t_m Z] \in F$; 另一方面，当$t \in (s,1]$时，有$(1-t)X + tZ \in F^{c}$, 从而$W$的任何邻域中都有$F^{c}$中的点. 合起来即得$W \in \partial F$. 令$E$是过点$Y$与直线$XY$垂直的超平面与$B(Y,\eta)$的交集，则对任意$Z_1, Z_2 \in E$, $Z_1 \neq Z_2$, 线段XZ_1与线段XZ_2只有X一个公共点. 因此，Z在E上变化时，得到的点$W \in \partial F$彼此不同，从而∂F是无穷集合. □

例 5 设D是n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$的非空子集，求证：若D上的任何连续函数都能取到最大值，则D是紧集.

证 反证. 若D不是紧集，则D不是列紧集. 于是存在D中点列$\{X_m\}$, 使得$\{X_m\}$没有收敛于D中点的子列. 不妨设X_m是D中互不相同的点，则任何一个X_m都不是点集$E = \{X_m | m = 1, 2, \cdots\}$的聚点. 令$r_m = \min\left\{\dfrac{1}{m}, \dfrac{d(X_m, E \setminus \{X_m\})}{2}\right\} > 0$, 则开球$B(X_m, r_m)$, $m = 1, 2, \cdots$彼此不交，且任取$Y_m \in B(X_m, r_m)$, 点列$\{Y_m\}$也没有收敛于D中点的子列. 对任何$X \in D$, 若X属于某个$B(X_m, r_m)$, 则令

$$f(X) = \frac{r_m - d(X, X_m)}{\frac{m+1}{m} r_m + d(X, X_m)};$$

若X不属于任何一个$B(X_m, r_m)$, 则令$f(X) = 0$. 任取$X \in D$, 若X属于某个$B(X_m, r_m)$, 则由$d(X, X_m)$的连续性不难看到f在点X处连续; 若X不属于任何一个$B(X_m, r_m)$, 下面用反证法证明f在点X处连续. 若f在点X处不连续，则存在$\varepsilon_0 > 0$和点列$\{P_k\} \subseteq D$, 使得$\lim\limits_{k\to\infty} P_k = X$且$f(P_k) \geqslant \varepsilon_0$. 由任取$Y_m \in B(X_m, r_m)$, 点列$\{Y_m\}$也没有收敛于$D$中点的子列知$P_k$只能是有限多个$B(X_m, r_m)$中的点，从而存在一个$m$使得$B(X_m, r_m)$中有$\{P_k\}$的一个子列. 再由$f(P_k) \geqslant \varepsilon_0$可得$X \in B(X_m, r_m)$. 矛盾！这就证明了$f$的连续性. 因

为f在$D\setminus\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}B(X_m,r_m)\right)$上恒为0, 在$B(X_m,r_m)\cap D$中的最大值为$f(X_m)=\dfrac{m}{m+1}$, $m=1,2,\cdots$, 所以f在D上的上确界为1, 但取不到最大值. 矛盾！ $\square$

例 6 设$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是连续映射，满足

$$\sup_{X,Y\in\mathbb{R}^n}|F(X+Y)-F(X)-F(Y)|<+\infty,$$

求证：存在唯一的线性映射$G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 使得

$$\sup_{X\in\mathbb{R}^n}|F(X)-G(X)|<+\infty.$$

证 记$\beta=\sup\limits_{X,Y\in\mathbb{R}^n}|F(X+Y)-F(X)-F(Y)|$, 则对任意正整数$k>1$和任意$X\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\begin{aligned}|F(kX)-kF(X)|&=\left|\sum_{i=1}^{k-1}[F((i+1)X)-F(iX)-F(X)]\right|\\ &\leqslant\sum_{i=1}^{k-1}|F((i+1)X)-F(iX)-F(X)|\leqslant(k-1)\beta\leqslant k\beta.\end{aligned}$$

当$k=1$时，上面的不等式显然成立. 由$|F(jkX)-jF(kX)|\leqslant j\beta$与$|F(jkX)-kF(jX)|\leqslant k\beta$得$|jF(kX)-kF(jX)|\leqslant(j+k)\beta$, 即

$$\left|\frac{F(kX)}{k}-\frac{F(jX)}{j}\right|\leqslant\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{j}\right)\beta. \tag{1}$$

于是对任意$\varepsilon>0$, 取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则$j>N$且$k>N$时，有$\left|\dfrac{F(kX)}{k}-\dfrac{F(jX)}{j}\right|<2\beta\varepsilon$. 因此$\left\{\dfrac{F(kX)}{k}\right\}$是$\mathbb{R}^m$中的柯西列，从而由$\mathbb{R}^m$的完备性知$\left\{\dfrac{F(kX)}{k}\right\}$为收敛点列. 记$G(X)=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{F(kX)}{k}$, 则由$|F(kX)-kF(X)|\leqslant k\beta$得$\left|\dfrac{F(kX)}{k}-F(X)\right|\leqslant\beta$, 令$k\to\infty$取极限，得$|F(X)-G(X)|\leqslant\beta$, 这就证明了$\sup\limits_{X\in\mathbb{R}^n}|F(X)-G(X)|\leqslant\beta<+\infty$. 在(1)式中令$j\to\infty$取极限，得$\left|\dfrac{F(kX)}{k}-G(X)\right|\leqslant\dfrac{\beta}{k}$. 任取$X_0\in\mathbb{R}^n$, 对任何$\varepsilon>0$, 存在正整数$k$, 使得$\dfrac{\beta}{k}<\varepsilon$. 由$F(kX)$的连续性，存在$\delta>0$, 使得当$X\in B(X_0,\delta)$时，有$|F(kX)-F(kX_0)|<\varepsilon$, 于是当$X\in B(X_0,\delta)$时，有

$$|G(X)-G(X_0)|\leqslant\left|G(X)-\frac{F(kX)}{k}\right|+\left|\frac{F(kX)}{k}-\frac{F(kX_0)}{k}\right|+\left|\frac{F(kX_0)}{k}-G(X_0)\right|<3\varepsilon,$$

故G在X_0处连续. 由X_0的任意性知G是连续映射. 由

$$|G(X+Y)-G(X)-G(Y)|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{F(k(X+Y))}{k}-\frac{F(kX)}{k}-\frac{F(kY)}{k}\right|\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{\beta}{k}=0$$

知对任意$X,Y\in\mathbb{R}^n$, 有$G(X+Y)=G(X)+G(Y)$. 结合G的连续性不难验证对任何实数λ, 有$G(\lambda X)=\lambda G(X)$, 故$G$是线性映射. 由两个线性映射的差是无界的就得到$G$的唯一性. □

例 7 求证：存在常数C, 使得对任何1999次的多项式$p(x)$, 有

$$|p(0)|\leqslant C\int_{-1}^{1}|p(x)|\mathrm{d}x.$$

证 令$n=1999$, 对任意$T=(t_0,t_1,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$，令$p(x)=t_0x^n+t_1x^{n-1}+\cdots+t_{n-1}x+t_n$,

$$N_1(T)=\sup_{x\in[-1,1]}|p(x)|,\quad N_2(T)=\int_{-1}^{1}|p(x)|\mathrm{d}x,$$

则不难验证$N_1(T)$与$N_2(T)$都是$\mathbb{R}^{n+1}$上的范数（请自行验证）. 因为有限维赋范线性空间上的范数是等价的，所以存在常数C, 使得对任意$T=(t_0,t_1,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$，有$N_1(T)\leqslant CN_2(T)$, 从而

$$|p(0)|\leqslant\sup_{x\in[-1,1]}|p(x)|=N_1(T)\leqslant CN_2(T)=C\int_{-1}^{1}|p(x)|\mathrm{d}x.$$ □

例 8 设n为正整数, 求证存在n阶多项式$p(x)$使得

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p(x)|=\inf_{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n}\{\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n|\}.$$

证 记$T=(t_1,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^n$, $T'=(t_0,t_1,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, 考虑函数

$$g(T')=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|t_0x^n+t_1x^{n-1}+\cdots+t_{n-1}x+t_n|.$$

易证：(1) $g(T')\geqslant 0,\forall T'\in\mathbb{R}^{n+1}$, 且$g(T')=0$当且仅当$T'=O$.

(2) $g(\lambda T')=|\lambda|g(T'),\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall T'\in\mathbb{R}^{n+1}$.

(3) $g(S'+T')\leqslant g(S')+g(T'),\forall S'\in\mathbb{R}^{n+1},\forall T'\in\mathbb{R}^{n+1}$.

由10.3的例1知$g(T')$在$\mathbb{R}^{n+1}$上连续且存在常数$c>0$, 使得$g(T')\geqslant c|T'|$, $\forall T'\in\mathbb{R}^{n+1}$. 对于$T=(t_1,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^n$, 记$T'=(t_0,T)$, 其中$t_0\in\mathbb{R}$, 令$f(T)=g((1,T))$, 则$f(T)$在$\mathbb{R}^n$上连续且$f(T)\geqslant c\sqrt{1+|T|^2}>c|T|$. 于是由练习10.3的第1题知存在$T_0=(b_1,\cdots,b_n)$, 使得$f(T_0)=\inf\limits_{T\in\mathbb{R}^n}f(T)$, 即$p(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$为所求. □

例 9 设C是$\mathbb{R}$的非空有界闭子集，$f:C\to C$是单调递增连续函数，求证：存在$\xi\in C$, 使得$f(\xi)=\xi$.

证 反证. 若不然，则对任何$x\in C$, 都有$f(x)\neq x$. 令$a=\inf C$, $b=\sup C$, 则由C是$\mathbb{R}$的非空有界闭子集知$a,b\in C$. 于是由$f(C)\subseteq C$与$f(x)\neq x$得$f(a)>a$, $f(b)<b$. 令$p=\sup\{x\in C\big|f(x)>x\}$, 则存在$\{x_n\}\subseteq C$, 满足$f(x_n)>x_n$ $(n=1,2,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=p$. 由$C$闭知$p=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$属于$C$, 由$f(x)$连续知$f(p)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}x_n=p$, 因此结合$f(x)\neq x$得$f(p)>p$. 对于$C$中任何大于$p$的元素$x$, 都有$f(x)<x$, 故$f(f(p))<f(p)$. 与$f:C\to C$单调递增矛盾！□

例 10 设K是$\mathbb{R}^n$的非空有界闭子集，映射$F:K\to K$满足：对任意$X,Y\in K$, 有$|F(X)-F(Y)|\geqslant|X-Y|$, 求证：$F$是双射，且对任意$X,Y\in K$, 有$|F(X)-F(Y)|=|X-Y|$.

证 对任意$X,Y\in K$, 令$X_0=X$, $Y_0=Y$, $X_m=F(X_{m-1})$, $Y_m=F(Y_{m-1})$, $m=1,2,\cdots$. 由K是列紧集知$\{X_m\}$有收敛于K中点的子列$\{X_{m_k}\}$, 记$l_k=m_{k+1}-m_k$, $k=1,2,\cdots$, 不失一般性，可以设$\{l_k\}$严格递增(若不满足，可以取$\{X_{m_k}\}$的子列，仍记作$\{X_{m_k}\}$使其满足). 再由题设得

$$0\leqslant|X-X_{l_k}|=|X_0-X_{m_{k+1}-m_k}|\leqslant|X_1-X_{m_{k+1}-m_k+1}|\leqslant\cdots\leqslant|X_{m_k}-X_{m_{k+1}}|.$$

因为$\{X_{m_k}\}$收敛，所以$\lim\limits_{k\to\infty}|X_{m_k}-X_{m_{k+1}}|=0$. 于是由两边夹定理知$\lim\limits_{k\to\infty}|X-X_{l_k}|=0$, 故$\lim\limits_{k\to\infty}X_{l_k}=X$. 由$K$是列紧集知$\{Y_{l_k}\}$有收敛于$K$中点的子列, 不妨设$\{Y_{l_k}\}$本身就是收敛的. 类似于上可以证明$\lim\limits_{k\to\infty}X_{l_{k+1}-l_k}=X$且$\lim\limits_{k\to\infty}Y_{l_{k+1}-l_k}=Y$. 因此在

$$|X-Y|\leqslant|F(X)-F(Y)|=|X_1-Y_1|\leqslant\cdots\leqslant|X_{l_{k+1}-l_k}-Y_{l_{k+1}-l_k}|$$

两边令$k\to\infty$取极限，就得到$|X-Y|\leqslant|F(X)-F(Y)|\leqslant|X-Y|$, 故对任意$X,Y\in K$, 都有$|F(X)-F(Y)|=|X-Y|$.

因为F是保距映射，所以F是单射. 下证F是满射. 反证. 若不然，则$K\setminus F(K)\neq\emptyset$. 取定一点$P_0\in K\setminus F(K)$, 则由$F$是保距映射知$F$连续，再由$K$紧知$F(K)$紧，从而$d(P_0,F(K))>0$. 记$\delta=d(P_0,F(K))$, 令$P_m=F(P_{m-1})$, $m=1,2,\cdots$, 则$\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$是$F(K)$中的点列. 一方面，由$F(K)$紧知$\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$有收敛于$F(K)$中点的子列；另一方面，对任意正整数k和m, $k<m$, 有

$$|P_m-P_k|=|F(P_{m-1})-F(P_{k-1})|=|P_{m-1}-P_{k-1}|=\cdots=|P_{m-k}-P_0|\geqslant\delta>0,$$

故$\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$的任何子列都不收敛. 矛盾！这就证明了F是满射，从而是双射. □

例 11 设$f(X)$是$\mathbb{R}^n$上的*Lipschitz*连续函数，对任何$X\in\mathbb{R}^n$, 极限$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(tX)-f(O)}{t}$都存在，将极限值记为$V(X)$, 对任何$X,Y\in\mathbb{R}^n$和任何实数$\alpha$, β, 有$V(\alpha X+\beta Y)=\alpha V(X)+\beta V(Y)$, 求证：当$X\to O$时，有

$$f(X)=f(O)+V(X)+o(|X|).$$

证 因为$f(X)$是$\mathbb{R}^n$上的Lipschitz连续函数，所以存在$M>0$, 使得对任何$X,Y\in\mathbb{R}^n$, 有$|f(X)-f(Y)|\leqslant M|X-Y|$. 记$S=\big\{X\in\mathbb{R}^n\big||X|=1\big\}$, $N=\max\limits_{X\in S}|V(X)|$, 令$c=\max\{M,N\}$. 对任意$\varepsilon>0$, 可以在$S$中选取有限多个点$X_1,X_2,\cdots,X_m$, 使得对任何$X\in S$, 存在$X_j$, 满足$|X-X_j|<\dfrac{\varepsilon}{3c}$. 因为对任何$X\in\mathbb{R}^n$, 极限$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(tX)-f(O)}{t}$都存在，极限值为$V(X)$, 所以对上述的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得当$0<t<\delta$时，有

$$|f(tX_i)-f(O)-V(tX_i)|<\frac{\varepsilon}{3}t,\ i=1,2,\cdots,m.$$

当$0<|X|<\delta$时，存在X_j, 使得$\left|\dfrac{X}{|X|}-X_j\right|<\dfrac{\varepsilon}{3c}$, 从而$\big|X-|X|X_j\big|<\dfrac{\varepsilon|X|}{3c}$, 故有

$$\big|f(X)-f\left(|X|X_j\right)\big|\leqslant M\big|X-|X|X_j\big|<\frac{M\varepsilon|X|}{3c}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}|X|. \tag{1}$$

由上面选取δ的方法知

$$\big|f(|X|X_j)-f(O)-V(|X|X_j)\big|<\frac{\varepsilon}{3}|X|. \tag{2}$$

由V的线性性质知

$$\left|V(X)-V(|X|X_j)\right|=\left|V(X-|X|X_j)\right|=\left|X-|X|X_j\right|V\left(\frac{X-|X|X_j}{\left|X-|X|X_j\right|}\right)\leqslant\frac{\varepsilon|X|}{3c}N\leqslant\frac{\varepsilon}{3}|X|. \tag{3}$$

(1), (2), (3)三式相加，即知当$0<|X|<\delta$时，有

$$\begin{aligned}&\left|f(X)-f(O)-V(X)\right|\\ \leqslant\ &\left|f(X)-f\left(|X|X_j\right)\right|+\left|f(|X|X_j)-f(O)-V(|X|X_j)\right|+\left|V(X)-V(|X|X_j)\right|\\ <\ &\frac{\varepsilon}{3}|X|+\frac{\varepsilon}{3}|X|+\frac{\varepsilon}{3}|X|=\varepsilon|X|.\end{aligned}$$

即当$X\to O$时，有$f(X)=f(O)+V(X)+o(|X|)$. □

例 12 设$f:[a,b]\to[a,b]$是连续函数，$p\in[a,b]$, 令$p_1=p$, $p_{n+1}=f(p_n)$, $n=1,2,\cdots$, 求证：如果集合$T_p=\{p_n|n=1,2,\cdots\}$是闭集，那么T_p只有有限多个元素.

证 若存在正整数$m<n$，使得$p_m=p_n$, 则有$p_{m+i}=p_{j(n-m)+m+i}$, $i=0,1,\cdots,n-m-1$, $j=1,2,\cdots$, 从而T_p只有有限多个元素. 因此不妨设所有的点p_1, p_2, $\cdots$互不相同. 由致密性定理，$\{p_n\}$有收敛子列$\{p_{n_k}\}$, 设$\lim\limits_{k\to\infty}p_{n_k}=q$, 则由$T_p$是闭集知$q\in T_p$, 于是有正整数$n_0$使得$q=p_{n_0}$. 由$f$的连续性得$\lim\limits_{k\to\infty}p_{n_k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}f(p_{n_k})=f(q)=p_{n_0+1}$, 依次类推，可见对任何$n\geqslant n_0$, p_n都是T_p的聚点. 因此不妨设所有的点p_1, p_2, $\cdots$都是T_p的聚点. 记$d=\sup\left\{|p_m-p_n|\big|m,n\in\mathbb{N}^*\right\}$, 对于点$p_1$, 由所有的点$p_1$, p_2, $\cdots$都是T_p的聚点知存在$\delta_1>0$, 使得$\delta_1<\dfrac{d}{8}$且有无穷多个k使得$p_k\notin I_1=(p_1-\delta_1,p_1+\delta_1)$; 对于点$p_2$, 由所有的点$p_1$, p_2, $\cdots$都是T_p的聚点以及I_1的长度小于$\dfrac{d}{4}$知存在$\delta_2>0$, 使得$\delta_2<\dfrac{d}{16}$且有无穷多个k使得$p_k\notin I_1\cup I_2$, 其中$I_2=(p_2-\delta_2,p_2+\delta_2)$; 一直这样做下去，一般地，设$\delta_1$, $\cdots$, δ_{n-1}已取好，对于点p_n, 由所有的点p_1, p_2, $\cdots$都是T_p的聚点以及区间I_1, $\cdots$, I_{n-1}的长度总和小于$\dfrac{d}{2}-\dfrac{d}{2^n}$知存在$\delta_n>0$, 使得$\delta_n<\dfrac{d}{2^{n+2}}$且有无穷多个$k$使得$p_k\notin\bigcup\limits_{j=1}^{n}I_j$, 其中$I_j=(p_j-\delta_j,p_j+\delta_j)$. 设$n_1=1$, n_{m+1}为最小的正整数$k>n_m$, 使得$p_k\notin\bigcup\limits_{j=1}^{n_m}I_j$. 由致密性定理知$\{p_{n_m}\}$有收敛子列，不妨设$\{p_{n_m}\}$本身就是

收敛的，其极限为ξ. 一方面，由T_p是闭集知$\xi \in T_p$; 另一方面，由$p_{n_{m+1}} \notin \bigcup\limits_{j=1}^{n_m} I_j$知对任何正整数$j$, 都有$\xi \notin I_j$，从而$\xi \neq p_j$, $j = 1, 2, \cdots$, 与$\xi \in T_p$矛盾！ $\square$

补充题10

(A)

1. 判断下列极限是否存在，如果存在并求其值.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y}$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^6}$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-xy}{x^2+y^2}$.

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$.

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$.

2. 设$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^6}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$ 问函数$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上是否连续？证明你的结论.

3. 设A和B是$\mathbb{R}^n$中两个不相交的闭集, 并且A有界, 令$d(A,B) = \inf\limits_{X\in A, Y\in B} |X-Y|$. 证明: 存在点$P \in A$, 点$Q \in B$, 使得$|P-Q| = d(A,B)$.

4. 设$f(X)$是$\mathbb{R}^n$中有界集D上的一致连续函数. 证明：$f(X)$在D上有界.

5. 设A是R^n的非空闭子集，$x \in R^n$，令$d(x,A) = \inf\limits_{y\in A} |x-y|$，求证存在$y \in A$使得

$$d(x,A) = |x-y|.$$

6. 设$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，令$f(x,y) = g(xy)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$. 证明：若$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上一致连续，则$g(x)$是常数函数.

7. 设常数$\lambda < 0$, $f(X)$是$\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$上的连续函数，对任意$X \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$和任意$t > 0$, 有$f(tX) = t^\lambda f(X)$. 证明：若$f(X)$可以延拓成$\mathbb{R}^n$上的连续函数，则$f(X) \equiv 0$.

8. 设A和B都是$\mathbb{R}$的非空子集. 证明：如果$A \times B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in A, y \in B\}$是$\mathbb{R}^2$中的紧集，那么$A$和$B$都是紧集.

(B)

1. 设A和B都是n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$的连通子集且$\overline{A} \cap B \neq \emptyset$，求证：$A \cup B$是连通集.

2. 设A是$\mathbb{R}^n$的闭子集，B是$\mathbb{R}^n$中一切满足以下条件的点b组成的集合：恰存在一个点$a_0 \in A$, 使得$|a_0 - b| = \inf\limits_{a \in A} |a - b|$, 求证：$B$在$\mathbb{R}^n$中稠密，即$B$的闭包是$\mathbb{R}^n$.

3. 设A是$\mathbb{R}^n$的闭子集，B是$\mathbb{R}^n$的紧子集，定义$A + B = \{P + Q | P \in A, Q \in B\}$, 求证：$A + B$是$\mathbb{R}^n$的闭子集.

4. 构造$[0, 1] \times [0, 1]$的一个子集A, 使得A在$[0, 1] \times [0, 1]$中稠密，并且A与任何一条平行于坐标轴的直线至多只有一个交点.

5. 设$f(x)$是区间I上具有介值性的函数，对任意实数y, 集合$f^{-1}(\{y\})$都是闭集，求证：$f(x)$在区间I上连续.

6. 设U是$\mathbb{R}^n$中的开集, $A \subseteq U$, A是$\mathbb{R}^n$中的紧集. 证明存在紧集$B \subseteq U$, 使得$A \subseteq B^\circ$.

7. 设A_1, A_2是R^n中两个不相交的闭集，求证存在R^n上的连续函数$f(X)$, 使得对任意$X \in A_1$，有$f(X) = 0$，对任意$X \in A_2$，有$f(X) = 1$.