第四章矩阵

典型例题

1、设V_1, V_2是线性空间V的两个非平凡的子空间。证明：在V中存在α, 使得$\alpha \notin V_1$, $\alpha \notin V_2$同时成立。

证明：

方法一、因为V_1为非平凡的子空间，故存在$\beta \notin V_1$.

(1) 当$\beta \notin V_2$, 则命题成立，取$\alpha = \beta$即可。

(2) 当$\beta \in V_2$时。由V_2为非平凡的子空间，存在$\gamma \notin V_2$.

若$\gamma \notin V_1$时，命题成立，取$\alpha = \gamma$即可。

若$\gamma \in V_1$, 此时$\beta \notin V_1, \beta \in V_2, \gamma \in V_1, \gamma \notin V_2$. 则$\beta + \gamma \notin V_1$, 且$\beta + \gamma \notin V_2$, 取$\alpha = \beta + \gamma$即可。

若$\beta + \gamma \in V_1$, 由$\gamma \in V_1$可推知$\beta \in V_1$, 矛盾。

若$\beta + \gamma \in V_2$, 由$\beta \in V_2$ 可推知$\gamma \in V_2$, 矛盾。

方法二、由于V_1, V_2为V的两个非平凡的子空间，故存在V中的向量α, β, 使得$\alpha \notin V_1, \beta \notin V_2$. 若$\alpha \notin V_2$, 则$\alpha$即为所求，命题成立。

若$\alpha \in V_2$, 则对于任意的数k,

$$k\alpha + \beta \notin V_2.$$

若否，由于$\alpha \in V_2, k\alpha \in V_2$, 从而$(k\alpha+\beta)-k\alpha = \beta \in V_2$, 矛盾。设$k_1 \neq k_2$, 则$k_1\alpha+\beta \notin V_1$,与$k_2\alpha+\beta \notin V_1$至少有一个城成立。若否，$(k_1\alpha+\beta)-(k_2\alpha+\beta) = (k_1-k_2)\alpha \in V_1$,

从而$\alpha \in V_1$, 矛盾。不妨设$k_1\alpha+\beta \notin V_1$, 又$k_1\alpha+\beta \notin V_2$,
因此$k_1\alpha+\beta$即为所求。

2、设$V_1, V_2, \cdots, V_s$为线性空间V的s个非平凡的子空间，证明：V中至少存在一个向量α, 使得$\alpha \in V_i, i = 1, 2, \cdots, s$.

证明：利用数学归纳法。当$s = 2$时，已证明。

假设当$s - 1$时命题成立，现在考虑s时的情况。由归纳假设，在V中至少存在一个向量α, 使得$\alpha \notin V_i, i = 1, 2, \cdots, s - 1$.

当$\alpha \notin V_s$, 则命题成立。

当$\alpha \in V_s$时，取$\beta \notin V_s$. 则有：

（1）$\forall k \in P, k\alpha + \beta \notin V_s$. 若否，$(k\alpha + \beta) - k\alpha = \beta \in V_s$, 矛盾。

（2）设$k_1 \neq k_2$, 则$k_1\alpha + \beta$与$k_2\alpha + \beta$ 中至少有一个不属于$V_i, i = 1, 2, \cdots, s - 1$. 若否，$(k_1\alpha + \beta) - (k_2\alpha + \beta) = (k_1 - k_2)\alpha \in V_i$, $i = 1, 2, \cdots, s - 1$. 换句话说，所有形如$k\alpha + \beta$的向量中，至多有一个属于$V_i, (i = 1, 2, \cdots, s - 1)$. 取$s$个不同的数$l_1, \cdots, l_s$, 则至少有一个向量$l_j\alpha + \beta$不属于$V_i (i = 1, 2, \cdots, s - 1)$.

又$l_j\alpha + \beta \notin V_s$, 故$V$中至少存在一个向量$l_j\alpha + \beta$不属于$V_1, V_2, \cdots, V_s$中的任何一个。

命题成立。

典型例题

1、设在向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$中，$\alpha_1 \neq 0$, 且每个$\alpha_i (i \geq 2)$都不能被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$线性表出。证明：这个向量组线性无关。

证明：假如$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关，则存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

设$k_1, \cdots, k_m$中最后一个不为零的为k_i, 则$i > 1$。否则，则有$k_1\alpha_1 = 0$, 从而$\alpha_1 = 0$, 矛盾。从而，有

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_i\alpha_i = 0.$$

由$k_i \neq 0$, 可得出

$$\alpha_i = \frac{-k_1}{k_i}\alpha_1 + \frac{-k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}, (i \geq 2).$$

与每个$\alpha_i (i \geq 2)$都不能由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$线性表出矛盾，故线性无关。

2、初等行变换不改变列向量之间的线性关系。

利用

$$col_j(PA) = Pcol_jA.$$

设$A \in P^{m\times n}$,P为m阶的可逆矩阵。则

$$\sum_{i=1}^{n} k_{j_i} col_{j_i}(PA) = P(\sum_{i=1}^{n} k_{j_i} col_{j_i}(A)) = 0$$

当且仅当

$$P^{-1}P(\sum_{i=1}^{n} k_{j_i} col_{j_i}(A)) = \sum_{i=1}^{n} k_{j_i} col_{j_i}(A) = P^{-1}0 = \underline{0}.$$

应用：将$\beta = (1,2,1,1)$表成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合，其中$\alpha_1 = (1,1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,1,-1,-1)$, $\alpha_3 = (1,-1,1,-1)$, $\alpha_4 = (1,-1,-1,1)$.

解：对$(\alpha_1'\ \alpha_2'\ \alpha_3'\ \alpha_4'\ \beta')$进行初等行变换，可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{pmatrix}$$

故$\beta = 5/4\alpha_1 + 1/4\alpha_2 - 1/4\alpha_3 - 1/4\alpha_4$.

3、向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$线性无关，且$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\alpha_s,\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$. 试讨论：$\beta_1,\beta_2,\beta_s$的线性相关性。

解：设$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0$. 则有$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_{s-1}(\alpha_{s-1}+\alpha_s)+k_s(\alpha_s+\alpha_1)=0$, 即$(k_1+k_s)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\cdots+(k_{s-1}+k_s)\alpha_s=0$. 由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，故有

$$\begin{cases} k_1+k_s=0 \\ k_1+k_2=0 \\ \vdots \\ k_{s-2}+k_{s-1}=0 \\ k_{s-1}+k_s=0 \end{cases}$$

上式方程组的系数矩阵的行列式为：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+(-1)^{s+1}.$$

故当s为奇数时，行列式的值为2，方程组只有零解，从而$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性无关。当s为偶数时，行列式的值为0，方程组有非零解，从而$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性相关。

典型例题

1、（sylvester不等式–西尔维斯特不等式）设$A \in P^{m\times n}, B \in P^{n\times s}$. 证明：

$$R(AB) \geq R(A) + R(B) - n.$$

证明：构造一个分块矩阵

因为

$$R(\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix}) = R(\begin{pmatrix} A & -AB \\ I_n & 0 \end{pmatrix}) = R(\begin{pmatrix} 0 & -AB \\ I_n & 0 \end{pmatrix})$$

$$= R(\begin{pmatrix} -AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}) = R(AB) + n,$$

故

$$R(AB) \geq R(A) + R(B) - n.$$

2、设$A, B \in P^{n\times n}, AB = BA$, 则

$$R(AB) \leq R(A) + R(B) - R(A+B).$$

典型例题

1、设A, B分别为$s\times n, n\times m$矩阵。证明：如果$AB=0$, 那么$R(A)+R(B)\leq n$。

证明：如果$A=0$, 则结果显然成立。下面设$A\neq 0$.

设B的列向量组是$\beta_1,\cdots,\beta_m$。由于$AB=0$, 因此β_j属于$AX=0$的解子空间W, $j=1,2,3,\cdots,m$。于是有

$$R(B)=dimL(\beta_1,\cdots,\beta_m)\leq dimW=n-R(A).$$

即

$$R(A)+R(B)\leq n.$$

2、（sylvester不等式–西尔维斯特不等式）设$A \in P^{m\times n}, B \in P^{n\times s}$. 证明：

$$R(AB) \geq R(A) + R(B) - n.$$

证明：若$AB = 0$, 则$R(A) + R(B) \leq n$，命题为真。下面设$AB \neq 0$, 从而$A \neq 0, B \neq 0$。设B的列向量组是$\beta_1, \cdots, \beta_m$。则

$$AB = (A\beta_1 \ \cdots \ A\beta_m).$$

设AB的列向量组的一个极大线性无关部分组为$A\beta_{i_1}, \cdots, A\beta_{i_t}$, 其中$t = R(AB)$。则

$$A\beta_j = b_1 A\beta_{i_1} + \cdots + b_t A\beta_{i_t} = A(b_1\beta_{i_1} + b_t\beta_{i_t}).$$

从而

$$A[\beta_j - (b_1\beta_{i_1} + b_t\beta_{i_t})] = 0, j = 1, 2, \cdots, m.$$

设齐次线性方程组$AX = 0$的一个基础解系为$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$, 其中$r = R(A)$。则对于$j = 1, 2, \cdots, m$, 有

$$\beta_j - (b_1\beta_{i_1} + b_t\beta_{i_t})) = k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}.$$

由此得出，向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$可以由向量组$\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_t}, \eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$线性表出，因此

$$R(\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}) \leq R(\{\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_t}, \eta_1, \cdots, \eta_{n-r}\}) \leq t+n-r.$$

即

$$R(AB) \geq R(A) + R(B) - n.$$

3、设A为$n(\geq 2)$阶方阵。证明：

$$rank(A^*)=\begin{cases} n, & rank(A)=n; \\ 1, & rank(A)=n-1; \\ 0, & rank(A)<n-1. \end{cases}$$

证明：当$rank(A)=n$, $|A|\neq 0$. 故$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$, 从而$rank(A^*)=n$.

当$rank(A)=n-1$时，有$|A|=0$。于是，$AA^*=|A|I_n=0$, 从而$rank(A)+rank(A^*)\leq n$, 故$rank(A^*)\leq 1$. 另一方面，因为$rank(A)=n-1$, 所以至少有一个代数余子式$A_{ij}\neq 0$, 从而又有$rank(A^*)\geq 1$. 于是$rank(A^*)=1$.

当$rank(A)<n-1$时，$A^*=0$, 即此时$rank(A^*)=0$.

4、设A为$n(\geq 2)$阶方阵。证明：

$$(A^*)^* = |A|^{n-2}A.$$

证明：当$|A| = 0$时，由上题知，

$$rank(A^*) \leq 1.$$

如果$n > 2$, 则$(A^*)^* = 0$. 因此，

$$(A^*)^* = |A|^{n-2}A.$$

如果$n = 2$, 令$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则$A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $(A^*)^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A = |A|^{n-2}A.$

当$|A| \neq 0$, 则也有$|A^*| \neq 0$, 且$A^* = |A|.A^{-1}$. 又知道$|A^*| = |A|^{n-1}$, 于是，

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1} = |A|^{n-2}A.$$

5、设A,B分别是数域K上的$s\times n,n\times m$矩阵。证明：$rank(AB)=rank(B)$当且仅当齐次线性方程组$(AB)X=0$的每个解都是$BX=0$的一个解。

证明 必要性 设$rank(AB)=rank(B)$。由于线性方程组$BX=0$的每一个解都是$(AB)X=0$的一个解，因此$BX=0$的解空间W_1都是$(AB)X=0$的解空间W_2的子集，又由已知条件得

$$dimW_2=m-rank(AB)=m-rank(B)=dimW_1.$$

因此$W_2=W_1$. 从而$(AB)X=0$的解都是$BX=0$的解。

充分性 设齐次线性方程组$(AB)X=0$的每个解都是$BX=0$的一个解,则$W_2\subseteq W_1$。显然，$W_1\subseteq W_2$, 因此$W_2=W_1$。由齐次线性方程组的维数公式立即得到

$$R(AB)=R(B).$$

6、设A, B分别是数域K上的$s \times n, n \times m$矩阵。证明：如果$R(AB) = R(B)$, 那么，对于数域K上的任意$m \times r$矩阵C, 都有

$$R(ABC) = R(BC).$$

证明 利用3题的结论。只要证明齐次线性方程组$(ABC)X = 0$的解η都是$(BC)X = 0$的一个解。由于$R(AB) = R(B)$, 且$ABC\eta = 0$, 因此$(AB)Y = 0$的一个解$C\eta$也是$BY = 0$的一个解，即$BC\eta = 0$。从而η是$(BC)X = 0$的一个解。因此，$R(ABC) = R(BC)$。

7、设A是数域K上的n阶方阵，证明：如果存在正整数m, 使得$rank(A^m)=rank(A^{m+1})$, 那么对一切正整数k, 有$rank(A^m)=rank(A^{m+k})$.

解 对k做数学归纳法。当$k=1$时，由已知条件，命题为真。假设当$k-1$时，有$R(A^m)=R(A^{m+(k-1)})=R(A^{k-1}A^m)$。利用上题的结论得，$R(A^mA)=R(A^{k-1}A^mA)=R(A^{m+k})$. 根据数学归纳法源里，对一切正整数$k$, 命题为真。

8、设$A \in P^{n\times n}$, 则$R(A^n)=R(A^{n+1})$。从而用数学归纳法，可以证明：$R(A^n)=R(A^{n+1})=R(A^{n+2})=\cdots=R(A^{n+k})$。

证明 只需要证明$A^nX=0$与$A^{n+1}X=0$同解即可。若$A^nX_1=0$, 则有$A^{n+1}X_1=A0=0$, 即$A^nX=0$的解都是$A^{n+1}X_1=0$的解。

若$A^{n+1}X_2=0$, 则必有$A^nX_2=0$。若否，$A^nX_2\neq 0$。设

$$k_0X_2+k_1AX_2+\cdots+k^nA^nX_2=0.$$

两边同时左乘A^n, 则有

$$k_0A^nX_2+\cdots+k_nA^{2n}X_2=0,$$

从而$k_0=0$.

在

$$k_1AX_2+\cdots+k^nA^nX_2=0$$

两边同时左乘A^{n-1}, 则可得

$$k_1=0.$$

同理可得

$$k_2=k_3=\cdots=k_n=0.$$

故$X_2,AX_2,A^2X_2,\cdots,A^nX_2$线性无关。而$P^{n\times 1}$是$n$维的，这是不可能的，故$A^nX_1=0$。即$A^{n+1}X=0$的解也为$A^nX=0$的解。故

$$R(A^{n+1})=R(A^n).$$

9、设A是数域P上的n阶方阵，证明：对于任意的正整数k, 有

$$rank(A^{n+k}) = rank(A^n).$$

证明：如果A可逆，那么A^{n+k}, A^n都可逆，从而$rank(A^{n+k}) = n = rank(A^n)$。

下面设A不可逆，则$rank(A) < n$。由于

$$rank(A) \geq rank(A^2) \geq \cdots \geq rank(A^n) \geq rank(A^{n+1}),$$

并且小于n的自然数只有n个，因此上述n个"$\geq$"号至少有一个取"$=$"号。即存在正整数$m \leq n$, 使得

$$rank(A^m) = rank(A^{m+1}).$$

根据上题结论，对一切正整数k, 有

$$R(A^m) = R(A^{m+k}).$$

由于$m \leq n$, 因此有

$$R(A^n) = R(A^{n+k}).$$

10、设$A \in R^{s\times n}$, 则

$$R(A'A) = R(AA') = R(A).$$

证明 如果能够证明n元齐次线性方程组$(A'A)X = 0$与$AX = 0$同解，那么他们的解空间一致，从而由解空间的维数公式，得

$$n - R(A'A) = n - R(A),$$

由此得出，$R(A'A) = R(A)$。现在来证明n元齐次线性方程组$(A'A)X = 0$与$AX = 0$同解。设η是$AX = 0$的任意一个解，则$A\eta = 0$。从而$(A'A)\eta = 0$, 因此η是$(A'A)X = 0$的一个解。

反之，设δ是$(A'A)X = 0$的任意一个解，则

$$(A'A)\delta = 0.$$

上式两端左乘δ', 得

$$\delta' A' A\delta = 0,$$

$$(A\delta)'(A\delta) = 0.$$

设

$$(A\delta)' = (c_1, c_2, \cdots, c_s).$$

由于A是实数域上的矩阵，因此$c_1, c_2, \cdots, c_s$都是实数，从而有

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_s^2 = 0.$$

由此推出，$c_1 = c_2 = \cdots = c_s = 0$。从而$A\delta = 0$。即$\delta$是$AX = 0$的一个解。因此$(A'A)X = 0$与$AX = 0$同解。于是

$$R(A'A) = R(A).$$

由这个结论可得

$$R(AA') = R[(A')'(A')] = R(A') = R(A).$$

典型例题：

1、设$A,B,C,D\in P^{n\times n}$且关于乘法两两可交换，同时满足$AC+BD=I_n$. 设方程组$ABX=0$的解空间为W, 方程组$BX=0$与$AX=0$的解空间分别为V_1和V_2。

证明：$W=V_1\oplus V_2$.

首先证明$W=V_1+V_2$. 任意$\alpha\in V_1$, 则$B\alpha=0$, 从而$AB\alpha=0$, 即$\alpha\in W$, 故$V_1\subseteq W$. 同理，可证明$V_2\subseteq W$. 从而$V_1+V_2\subseteq W$.

$\forall\delta\in W$, 则$AB\delta=0$. 因为$AC+BD=I_n$, 故

$$\delta=AC\delta+BD\delta=CA\delta+DB\delta=\delta_1+\delta_2,$$

其中

$$\delta_1=AC\delta,\delta_2=DB\delta.$$

又$B\delta_1=CAB\delta=0$, 故$\delta_1\in V_1$. 又$A\delta_2=DAB\delta=0$, 故$\delta_2\in V_2$. 故$W\subseteq V_1+V_2$. 综上，$W=V_1+V_2$.

设$\gamma\in V_1\cap V_2$, 则$B\gamma=A\gamma=0$. 从而$BD\gamma=0,AC\gamma=0$, 故$(BD+AC)\gamma=0$. 又$BD+AC=I_n$, 从而$\gamma=0$. 故

$$V_1\bigcap V_2=\{0\}.$$

综上可知，$W=V_1\oplus V_2$.

典型例题

1、设$f(x) \in P[x], \deg f(x) = n \geq 1$. 令$W = \langle f(x) \rangle = \{g(x) \in P[x] | f(x) | g(x)\}$.

试证：$\dim P[x]/W = n$.

证明 对任意多项式$g(x) \in P[x]$, 我们以$\overline{g(x)}$ 表示$g(x)$模W的同余类. 显然，$\bar{1}, \bar{x}, \cdots, \overline{x^{n-1}} \in P[x]/W$.

设$\overline{h(x)} \in P[x]/W$，则$h(x) \in P[x]$. 设

$$h(x) = q(x)f(x) + r(x),$$

其中$r(x) = 0$或者$\deg r(x) < n$. 于是，

$$\overline{h(x)} = \overline{q(x)f(x) + r(x)} = \overline{r(x)}.$$

又$\overline{r(x)}$可被$\bar{1}, \bar{x}, \cdots, \overline{x^{n-1}}$线性表出(??)，故$h\bar{(}x)$可被$\bar{1}, \bar{x}, \cdots, \overline{x^{n-1}}$线性表出.

设

$$a_0\bar{1} + a_1\bar{x} + \cdots + a_{n-1}\overline{x^{n-1}} = \bar{0}.$$

从而

$$\overline{a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}} = \bar{0},$$

故

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \in W = \langle f(x) \rangle.$$

因而

$$a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0,$$

$\bar{1}, \bar{x}, \cdots, \overline{x^{n-1}}$线性无关.

综上可知：$\bar{1}, \bar{x}, \cdots, \overline{x^{n-1}}$为$V/W$的一组基.