# 第二章 极限

## 难题选解

**例 1** 求下列各极限.

*(1)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^n}{n!}$;

*(2)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$;

*(3)* 设$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1}$, $y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k}$, $n=1,2,\cdots$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)^{\ln n}$.

**解** (1) 由于$n!\geqslant n^{\frac{n}{2}}$,故对一切$n\in\mathbb{N}$,有

$$0<\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^n}{n!}\leqslant\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

由Stolz定理,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1}\\=&0.\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}\right)^n=0.$$

由两边夹定理,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^n}{n!}=0.$$

(2)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}(2n^{-\frac{1}{n}}-n^{-\frac{2}{n}})^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[1-(1-n^{-\frac{1}{n}})\right]^n\\
&=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left[1-\left(1-n^{-\frac{1}{n}}\right)^2\right]}\\
&=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left[-\left(1-n^{-\frac{1}{n}}\right)^2\right]}(\text{由}x\to 0,\ln(1+x)\sim x)\\
&=e^{\lim\limits_{n\to\infty} -n\cdot\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2}(\text{利用}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1)\\
&=e^{\lim\limits_{n\to\infty} -n\cdot\frac{\ln^2 n}{n^2}}(\text{由}n\to\infty,\sqrt[n]{n}-1\sim\frac{\ln n}{n})\\
&=e^{\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{\ln^2 n}{n}}\\
&=e^0\\
&=1.
\end{aligned}$$

(3) 记$H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, 令$\alpha_n=H_n-\ln n-\gamma$(其中$\gamma$是欧拉常数)，$n=1,2,\cdots$, 则由$\lim\limits_{n\to\infty}(H_n-\ln n)=\gamma$知$\{\alpha_n\}$是无穷小量. 因为

$$\begin{aligned}
y_n &= \frac{1}{2}H_n=\frac{1}{2}(\ln n+\gamma+\alpha_n),\\
x_n &= H_{2n}-y_n=(\ln(2n)+\gamma+\alpha_{2n})-\frac{1}{2}(\ln n+\gamma+\alpha_n)=\frac{1}{2}(\ln n+\gamma+2\ln 2+2\alpha_{2n}-\alpha_n),
\end{aligned}$$

所以当$n\to\infty$时，$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都是与$\frac{1}{2}\ln n$等价的无穷大量，且

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}(\ln 2+\alpha_{2n}-\alpha_n)=\ln 2.$$

由等价量替换的方法得

$$\lim_{n\to\infty}\ln n\cdot\ln\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\lim_{n\to\infty}2y_n\cdot\left(\frac{x_n}{y_n}-1\right)=2\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=2\ln 2,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln n\cdot\ln\left(\frac{x_n}{y_n}\right)}=\mathrm{e}^{2\ln 2}=4.$$

□

**例 2** 证明数列$\{\sin n^2\}$发散.

**证** 命题1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2\neq 0$.

命题1证明如下. 反证. 若不然，则对任何$\varepsilon>0$, 存在正整数$N$, 使得当$n>N$时，就有$|\sin n^2|<\varepsilon$. 特别地，取$\varepsilon=\sin\frac{1}{8}$, 任意取定一个$n>N$, 则存在正整数$k_1$和$k_2$, 使得$|n^2-k_1\pi|<\frac{1}{8}$, $|(n+1)^2-k_2\pi|<\frac{1}{8}$, 从而

$$|(2n+1)-(k_2-k_1)\pi|\leqslant|(n+1)^2-k_2\pi|+|n^2-k_1\pi|<\frac{1}{4}.$$

于是

$$|(n+2)^2-(2k_2-k_1)\pi-2|\leqslant|(n+1)^2-k_2\pi|+|(2n+1)-(k_2-k_1)\pi|<\frac{3}{8},$$

由此可见$|\sin(n+2)^2|>\sin 2\frac{3}{8}>\sin\frac{1}{8}=\varepsilon$, 矛盾！

命题2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n+1)\neq 0$.

命题2证明如下. 由$\{n+m\pi|n,m\in\mathbb{Z}\}$在$\mathbb{R}$中稠密知存在无穷多对正整数$(n,m)$, 使得$|n-m\pi|<\frac{1}{4}$. 于是$2m\pi+\frac{1}{2}<2n+1<2m\pi+\frac{3}{2}$, 由此可见有无穷多个$n$使得$\sin(2n+1)>\sin\frac{1}{2}$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n+1)\neq 0$.

下面我们用反证法证明数列$\{\sin n^2\}$发散. 反证. 若不然，则数列$\{\sin n^2\}$收敛. 由命题1知$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2=a\neq 0$, 于是由$\cos 2x=1-2\sin^2 x$可见$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n^2)=1-2a^2$，再由$\sin 4x=4\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x$以及$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(4n^2)=a\neq 0$知$\lim\limits_{n\to\infty}4\cos n^2\cdot\cos(2n^2)=1$, 从而$\lim\limits_{n\to\infty}\cos n^2=\frac{1}{4(1-2a^2)}$. 于是

$$\sin(2n+1)=\sin((n+1)^2-n^2)=\sin(n+1)^2\cdot\cos n^2-\cos(n+1)^2\cdot\sin n^2\to 0\quad(n\to\infty),$$

与命题2矛盾！ □

**例 3** 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ 且$|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|\leqslant C$ ($C$ 为常数, $n=1,2,\cdots$), 求证

$$\lim_{n\to\infty}(x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1)=0.$$

**证** 根据$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 可以推出存在$M > 0$, 使得$|x_n| \leqslant M$, $n = 1, 2, \cdots$. 由极限定义, 任取$\varepsilon > 0$, 存在自然数$N_1$,当$n > N_1$时,有

$$|x_n| < \varepsilon.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$,对上述的$\varepsilon$ 和$N_1$, 存在自然数$N_2$, 当$n > N_2$ 时, 有

$$|y_n| < \frac{\varepsilon}{N_1}.$$

令$N = N_1 + N_2$, 则$n > N$,有

$$\begin{aligned}
&|x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1| \\
\leqslant &|x_1|\,|y_n| + \cdots + |x_{N_1}|\,|y_{n-N_1+1}| + |x_{N_1+1}|\,|y_{n-N_1}| + \cdots + |x_n|\,|y_1| \\
< &M \cdot \frac{\varepsilon}{N_1} + \cdots + M \cdot \frac{\varepsilon}{N_1} + \varepsilon\,|y_{n-N_1}| + \cdots + \varepsilon\,|y_1| \\
\leqslant &(M + C)\varepsilon + C\varepsilon.
\end{aligned}$$

由极限定义, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1) = 0$. □

**例 4** 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!} = \mathrm{e}$.

**证** 记$a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$, 则数列$\{a_n\}$严格递增且由2.3节例5的解答过程知

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant a_n < 3.$$

由单调收敛定理知$\{a_n\}$ 收敛. 在$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant a_n$两边令$n \to \infty$取极限便得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant \mathrm{e}$. 另一方面, 任意固定$m$ , 则当$n > m$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\
&\geqslant \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

注意上式右端的$m$是固定的, 故可令$n \to \infty$在上式两边取极限而得到

$$\mathrm{e} \geqslant \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} = a_m.$$

又因$m$是任意固定的, 故上式对所有$m$都成立. 令$m \to \infty$ 取极限即得

$$\lim_{m\to\infty} a_m \leqslant \mathrm{e}.$$

故得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}. \qquad \square$$

**例 5** 证明$\mathrm{e} - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} < \dfrac{1}{n!n}$.

**证** 记$a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$, 则对任意正整数$n$和$p$, 有

$$\begin{aligned} a_{n+p} - a_n &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+p)}\right] \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{p-1}}\right] < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

固定$n$, 令$p \to \infty$, 就有

$$\mathrm{e} - a_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n!n}. \qquad \square$$

**例 6** 设$f\colon [a,b] \to [a,b]$是*Lipschitz*连续映射, 即存在常数$L$, 使得对任意$x, y \in [a,b]$, 都有$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|$. 任意取定$x_1 \in [a,b]$, 令$x_{n+1} = \dfrac{Lx_n + f(x_n)}{L+1}$, $n = 1, 2, \cdots$, 求证: 数列$\{x_n\}$收敛.

**证** 由题设知$x_1 \in [a,b]$. 设$x_n \in [a,b]$, 则由$f(x_n) \in [a,b]$知$x_{n+1} = \dfrac{Lx_n + f(x_n)}{L+1} \in [a,b]$. 因此, 由数学归纳法知, 对任意正整数$n$, 都有$x_n \in [a,b]$. 当$x_1 \geqslant f(x_1)$时, 有$x_2 = \dfrac{Lx_1 + f(x_1)}{L+1} \leqslant x_1$. 设$x_{n+1} \leqslant x_n$, 则

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \leqslant |f(x_n) - f(x_{n+1})| \leqslant L|x_n - x_{n+1}| = L(x_n - x_{n+1}),$$

于是

$$x_{n+2}=\frac{Lx_{n+1}+f(x_{n+1})}{L+1}\leqslant\frac{Lx_n+f(x_n)}{L+1}=x_{n+1}.$$

因此，由数学归纳法知，对任意正整数$n$, 有$x_{n+1}\leqslant x_n$, 即$\{x_n\}$为单减数列. 由单调收敛定理知数列$\{x_n\}$收敛. 当$x_1\leqslant f(x_1)$时, 类似可证$\{x_n\}$为单增数列，同样由单调收敛定理知数列$\{x_n\}$收敛. □

**例 7** 设$a_1$, $a_2$是正数，$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}$, $n=1,2\ldots.$ 证明数列$\{a_n\}$收敛.

**证** 对任意正整数$n$, 令$b_n=\min\{a_n,a_{n+1},4\}$, $c_n=\max\{a_n,a_{n+1},4\}$, 则由$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}$, 有

$$b_n\leqslant 2\sqrt{b_n}\leqslant a_{n+2}\leqslant 2\sqrt{c_n}\leqslant c_n.$$

于是$b_{n+1}=\min\{a_{n+1},a_{n+2},4\}\geqslant b_n$, $c_{n+1}=\max\{a_{n+1},a_{n+2},4\}\leqslant c_n$. 因为$\{b_n\}$单增有上界4, $\{c_n\}$单减有下界4, 所以由单调收敛定理，$\{b_n\}$和$\{c_n\}$都收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$, 则$0<b\leqslant 4$, $c\geqslant 4$. 因为

$$2\sqrt{b_n}\leqslant\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_{n+2}}\leqslant 2\sqrt{c_n},\quad \text{即}2\sqrt{b_n}\leqslant a_{n+3}\leqslant 2\sqrt{c_n},$$

所以有

$$b_{n+2}=\min\{a_{n+2},a_{n+3},4\}\geqslant 2\sqrt{b_n},\quad c_{n+2}=\max\{a_{n+2},a_{n+3},4\}\leqslant 2\sqrt{c_n}.$$

令$n\to\infty$取极限，得$b\geqslant 2\sqrt{b}$, $c\leqslant 2\sqrt{c}$. 又$b>0$, $c>0$, 故$b\geqslant 4$, $c\leqslant 4$. 因此$b=c=4$. 由$b_n\leqslant a_n\leqslant c_n$, 根据两边夹定理知$\{a_n\}$收敛且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$. □

**例 8** *(1)* 数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=x_n\cos x_n$, $n=1,2,\cdots$, 是否对任意的初值$x_1$, 数列$\{x_n\}$都收敛？

*(2)* 数列$\{y_n\}$满足$y_{n+1}=y_n\sin y_n$, $n=1,2,\cdots$, 是否对任意的初值$y_1$, 数列$\{y_n\}$都收敛？

**解** (1) 否. 取$x_1=\pi$, 则$x_n=(-1)^{n-1}\pi$, 数列$\{x_n\}$发散.

(2) 是. 由$\{|y_n|\}$单调递减有下界0知$\{|y_n|\}$收敛，记$a=\lim\limits_{n\to\infty}|y_n|$. 若$a=0$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 命题成立. 若$a>0$, 则在$|y_{n+1}|=|y_n\sin y_n|$两边令$n\to\infty$取极限，得$a=a|\sin a|$, 由此知$\sin a=1$或$\sin a=-1$, 从而$a=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, 其中$k$是自然数. 由$a=\lim\limits_{n\to\infty}|y_n|$知存在正整数$N$，使得当$n\geqslant N$时，有$k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant|y_n|\leqslant(k+1)\pi$. 若$k$为偶数，则当$y_n\in\left[k\pi+\dfrac{\pi}{2},(k+1)\pi\right]$时，有$y_{n+1}=y_n\sin y_n\in\left[k\pi+\dfrac{\pi}{2},(k+1)\pi\right]$, 当$y_n\in\left[-(k+1)\pi,-k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right]$时，也有$y_{n+1}=y_n\sin y_n\in\left[k\pi+\dfrac{\pi}{2},(k+1)\pi\right]$, 故当$n>N$时，总有$y_n\in\left[k\pi+\dfrac{\pi}{2},(k+1)\pi\right]$, 从而$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$. 若$k$为奇数，则类似讨论即知当$n>N$时，总有$y_n\in\left[-(k+1)\pi,-k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right]$, 从而$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-a$. □

**例 9** 设$\{a_n\}$是一个正数数列，$\sqrt{a_2}\geqslant\sqrt{a_1}+1$, $\left|a_{n+1}-\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\right|\leqslant1$, $n=2,3,\cdots$, 求证：

*(1)* 数列$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$收敛；

*(2)* 记$\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, 则数列$\left\{\frac{a_n}{\lambda^n}\right\}$收敛.

**证** (1) 记$\alpha=1+\dfrac{1}{\sqrt{a_1}}$, 则$\dfrac{a_2}{a_1}\geqslant\dfrac{(\sqrt{a_1}+1)^2}{a_1}>\alpha$. 下面用数学归纳法证明“对任意正整数$n$, 都有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>\alpha$”. 已经证明了当$n=1$时命题成立，假设当$n\leqslant k$时命题成立，则$a_n>\alpha^{n-1}a_1$, $n=2,3,\cdots,k+1$, 于是当$n=k+1$时，有

$$\left|\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}-\frac{a_2}{a_1}\right|\leqslant\sum_{n=2}^{k+1}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|\leqslant\sum_{n=2}^{k+1}\frac{1}{a_n}<\sum_{n=2}^{k+1}\frac{1}{\alpha^{n-1}a_1}<\frac{1}{(\alpha-1)a_1}=\frac{1}{\sqrt{a_1}}.$$

故

$$\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}>\frac{a_2}{a_1}-\frac{1}{\sqrt{a_1}}>\frac{(\sqrt{a_1}+1)^2}{a_1}-\frac{1}{\sqrt{a_1}}>\alpha,$$

从而由数学归纳法知“对任意正整数$n$, 都有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>\alpha$”. 任取正整数$m>n$, 则有

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leqslant\sum_{i=n+1}^{m}\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}-\frac{a_i}{a_{i-1}}\right|\leqslant\sum_{i=n+1}^{m}\frac{1}{a_i}<\sum_{i=n+1}^{m}\frac{1}{\alpha^{i-n}a_n}<\frac{\frac{1}{\alpha a_n}}{1-\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{(\alpha-1)a_n}=\frac{\sqrt{a_1}}{a_n}.$$

由$a_n>\alpha^{n-1}a_1$知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{a_1}}{a_n}=0$, 故由柯西收敛原理知数列$\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$收敛.

(2) 在$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{\sqrt{a_1}}{a_n}$中令$m\to\infty$取极限，得$\left|\lambda-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leqslant\frac{\sqrt{a_1}}{a_n}$. 于是有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{\lambda^{n+1}}-\frac{a_n}{\lambda^n}\right|=\frac{a_n}{\lambda^{n+1}}\cdot\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\lambda\right|\leqslant\frac{a_n}{\lambda^{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{a_1}}{a_n}=\frac{\sqrt{a_1}}{\lambda^{n+1}}.$$

注意到$\lambda\geqslant\alpha>1$, 类似于(1), 由上式出发用柯西收敛原理即可证明数列$\left\{\frac{a_n}{\lambda^n}\right\}$收敛. □

**例 10** 设$x>0$, 令$a_1=\sqrt{1+x}$, $a_2=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)}}$, $a_3=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)}}}$, $\cdots$, 一般地，

$$a_n=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\cdots+(x+n-2)\sqrt{1+(x+n-1)}}}}}$$

证明数列$\{a_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$的值.

**证** 由于$\sqrt{1+(x+n-1)}>1(n=1,2,\cdots)$,可见

$$a_n>a_{n-1}(n=2,3,\cdots).$$

即$\{a_n\}$严格递增.

由$\sqrt{1+(x+n-1)}=\sqrt{x+n}<x+n$得

$$\begin{aligned}
a_n&=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\cdots+(x+n-3)\sqrt{1+(x+n-2)\sqrt{1+(x+n-1)}}}}}}\\
&<\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\cdots+(x+n-3)\sqrt{1+(x+n-2)(x+n)}}}}}\\
&=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\cdots+(x+n-4)\sqrt{1+(x+n-3)(x+n-1)}}}}}\\
&=\cdots\\
&=\sqrt{1+x(x+2)}\\
&=x+1.
\end{aligned}$$

所以由单调收敛定理知$\{a_n\}$收敛.

另一方面,由上面可以看到

$$x+1=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\cdots+(x+n-3)\sqrt{1+(x+n-2)(x+n)}}}}}$$

$\lambda>1$时,有不等式

$$\sqrt{1+n\lambda}<\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{1+n}.$$

反复使用这个不等式,得

$$\begin{aligned}
x+1&<\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+\cdots+\sqrt{x+n}(x+n-3)\sqrt{1+(x+n-2)}}}}\\
&<\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+\cdots+(x+n)^{\frac{1}{4}}(x+n-4)\sqrt{1+(x+n-3)\sqrt{1+(x+n-2)}}}}}\\
&<\cdots\\
&<(x+n)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+\cdots+(x+n-3)\sqrt{1+(x+n-2)}}}}\\
&=(x+n)^{\frac{1}{2^{n-1}}}a_{n-1}.
\end{aligned}$$

故有

$$(x+n)^{-\frac{1}{2^{n-1}}}(x+1)<a_{n-1}<x+1.$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}(x+n)^{-\frac{1}{2^{n-1}}}=1$,由两边夹定理,

$$\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=x+1.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x+1$. □

# 补充题2

## (A)

1. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\arcsin\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)\left(\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdots\left(\arcsin\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}}{n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{nk}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x\cos x}-\mathrm{e}^{x}}{x\ln\cos x}$;

2. 设$a>0$, $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{x_n+a}$, $n=1,2,\cdots$, 证明：数列$\{x_n\}$收敛.

3. 设$a\in\mathbb{R}$, 令$x_1=a$,

$$x_{n+1}=\frac{x_1}{2^1}+\frac{x_2}{2^2}+\cdots+\frac{x_n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明数列$\{x_n\}$收敛.

4. 设$x_1=0$, $y_1=1$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$, $y_{n+1}=\dfrac{x_n+2y_n}{3}$, $n=1,2,\cdots$.

(1) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$;

(2) 证明$\{x_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

5. 设$\theta\in[0,2\pi)$, 已知数列$\{\cos n\theta\}$收敛，证明：$\theta=0$.

6. 设常数$L>0$, $f(x)$是$(a,b)$上的函数，满足$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$, $\forall x,y\in(a,b)$, 证明：$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在.

7. 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，对任意实数$a$, 都有$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(a+x)-2f(a)+f(a-x)]=0$, 证明函数$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的常数函数.

8. 设$f(x)$, $g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，若$\lim\limits_{x\to\infty}g(f(x))=-\infty$, 证明$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$.

9. 设$f(x)$是$(a,+\infty)$上的函数，$A\in\mathbb{R}$, 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$的充分必要条件是对$(a,+\infty)$中任意严格递增的正无穷大数列$\{x_n\}$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=A$.

10. 设$f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$在点0的某空心邻域中有定义，$0<f_1(x)<1$, $0<f_2(x)<1$, $g_1(x)>0$, $g_2(x)>0$, 且有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}f_1(x)^{g_1(x)}=A>0$, 是否必有$\lim\limits_{x\to 0}f_2(x)^{g_2(x)}=A$? 证明你的结论.

## (B)

1. 求下列各极限：

(1) 设$0<\alpha<1$, $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k^\alpha}$, $n=1,2,\cdots$, 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(2) 设$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1}$, $n=1,2,\cdots$, 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{e}^{2x_{n+1}}-\mathrm{e}^{2x_n})$.

2. 设$a_1>2$, $a_{n+1}=a_n^2-2$, $n=1,2,\cdots$, 令$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_k}$, $n=1,2,\cdots$, 求证：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1-\sqrt{a_1^2-4}}{2}.$$

3. 判断数列$\left\{\dfrac{1}{n\sin n}\right\}$是否收敛并证明你的结论.

4. 设$a_1\in(-1,2)$, $a_{n+1}=a_n^2-a_n$, $n=1,2,\cdots$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

5. 设正整数$m>1$, $a_1,a_2,\cdots,a_m$是$m$个实数，$p_1,p_2,\cdots,p_m$是$m$个正数且$p_1+p_2+\cdots+p_m=1$. 令$x_1=a_1$, $x_2=a_2$, $\cdots$, $x_m=a_m$, $x_{n+m}=\sum\limits_{k=0}^{m-1}p_kx_{n+k}$, $n=1,2,\cdots$, 问数列$\{x_n\}$是否必收敛？证明你的结论.

6. 设$\{a_n\}$为正数数列且$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda$ $(\lambda\in\mathbb{R})$. 证明对任意$\varepsilon>0$, 有$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\lambda-\varepsilon}a_n=0$.

7. 设$\{a_n\}$是正数数列，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=a>0$. 证明对任意$p>1$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p}{n^p}=0.$$

8. 证明对任意实数$a$, 存在数列$\{x_n\}$, 使得$x_n=-1$或$1$, $n=1,2,\cdots$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{n}\right)=a.$$

9. 设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$, 且对任意实数$\lambda>1$, 都有$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(\lambda x)}{f(x)}=1$.

(1) 给出一个满足上述条件的$f(x)$的例子.

(2) 证明：对任意满足上述条件的$f(x)$, 存在$X$, 使得$f(x)$在$(X,+\infty)$上不改变符号.

10. 设数列$\{a_n\}$是严格递增的正数数列, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_n}=+\infty$. 又设$N(x)=\sum\limits_{a_n<x}1$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{N(x)}{\ln x}=+\infty$.