无理函数的积分

数学分析I

第32讲

December 22, 2022

7.6节的学习要点

- 无理函数的积分一般是通过变量代换将其化为有理函数的积分. 实际中，很多无理函数的原函数不是初等函数，即“积不出来”，本节只是总结一些“积得出来”的无理函数积分的规律.
- 例1有多种解法，试用其他解法做一下.
- 例7和例8属于二项式微分式的积分，下面给出了二项式微分式的积分的一般性结论.

无理函数积分的思路

无理函数的积分, 通常是经过适当的变量代换, 使之有理化, 也就是化为有理函数的积分. 能够这样处理的问题并不多, 希望读者从下面几个例子中进行总结.

例 1

求

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}.$$

无理函数的积分, 通常是经过适当的变量代换, 使之有理化, 也就是化为有理函数的积分. 能够这样处理的问题并不多, 希望读者从下面几个例子中进行总结.

例 1

求

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}.$$

令 $\sqrt{x}+\sqrt{1+x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}=t$, 有

$$\begin{aligned} & \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} \\ = & \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{t^4-1}{2t^3}\mathrm{d}t = \int \frac{(t-1)(t^2+1)}{2t^3}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

例1的另解

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} \overset{x=\tan^2 t}{=\!=\!=} \int \frac{d\tan^2 t}{1+\tan t+\sec t} = \int \frac{2\tan t\sec^2 t}{1+\tan t+\sec t}\,dt$$

$$= \int \left(\tan t\sec^2 t + \sec^2 t - \frac{1}{2}\left(\sec t + \sec t\tan^2 t + \sec^3 t\right)\right) dt$$

$$= \frac{x^2}{2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right) - \frac{1}{2}\ln\sqrt{x(1+x)} + C$$

这是三角函数换元的一种解法，结果的第一项应为$\dfrac{x}{2}$.

例1的另解

例1 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} = \int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{(1+\sqrt{x})^2-(1+x)}\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}}$

$\displaystyle = \sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}\,dx$

$\displaystyle \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}\,dx \xlongequal{x=\sinh^2 t,\ t>0} \int \frac{\cosh t}{\sinh t}\,d\sinh^2 t = \int 2\cosh^2 t\,dt = \int 1+\cosh 2t\,dt = t+\frac{\sinh 2t}{2}+C_1$

故 $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{2}+\sqrt{x}-\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sinh t\cosh t + C$

$\displaystyle = \frac{x}{2}+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})-\frac{1}{2}\sqrt{x(1+x)}+C$

一上来不换元，先把被积函数恒等变形进行简化.

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx + \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \int (1-\sqrt{x+1})\,d\sqrt{x} \overset{u=\sqrt{x}}{=\!=\!=} \frac{1}{2}x + \sqrt{x} - \int \sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}x + \sqrt{x} - \frac{u}{2}\sqrt{u^2+1} - \frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right) + C = \frac{1}{2}x + \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x^2+x}}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) + C$$

开始部分与上一解法相同，后面用换元化为补充积分表中的积分.

$\int R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$ 型积分(其中$m \geqslant 2$, $ad - bc \neq 0$)

对于这种类型的无理函数积分, 令$t = \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$而使被积函数有理化.

对于这种类型的无理函数积分, 令$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$而使被积函数有理化.

例 2

求$\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\mathrm{d}x$.

对于这种类型的无理函数积分, 令$t = \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$而使被积函数有理化.

例 2

求$\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\mathrm{d}x$.

令$t = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$, 则$x = \dfrac{2(t^2+1)}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{-8t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$. 于是有

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\mathrm{d}x = \int \frac{-4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}\mathrm{d}t.$$

例 3

求 $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(x+1)(1+\sqrt[3]{x+1})}\mathrm{d}x.$

例 3

求$\displaystyle\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{(x+1)(1+\sqrt[3]{x+1})}\mathrm{d}x$.

为了使两个根式$\sqrt{x+1}$, $\sqrt[3]{x+1}$同时有理化, 可令$t=\sqrt[6]{x+1}$, 于是$x=t^6-1$, $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$. 从而有

$$\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{(x+1)(1+\sqrt[3]{x+1})}\mathrm{d}x=\int\frac{(1-t^3)6t^5}{t^6(1+t^2)}\mathrm{d}t=6\int\frac{1-t^3}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

例 4

求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(1+x)}}$.

例 4

求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(1+x)}}$.

设$x>0$. 我们改写

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(1+x)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{x}}}.$$

令$t=\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{x}}$, 于是$x=\dfrac{1}{t^4-1}$, $\mathrm{d}x=(t^4-1)^{-2}(-4t^3)\mathrm{d}t$. 从而有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(1+x)}} = \int \frac{(t^4-1)^{-2}(-4t^3)}{(t^4-1)^{-1}t}\mathrm{d}t = -\int \frac{4t^2}{t^4-1}\mathrm{d}t.$$

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$型积分

对于这种类型的无理函数积分, 若$b^2-4ac>0$, 可把根号内分解因式, 再用与例4类似的方法处理. 对于一般情况, 也可以先配方, 再线性变换将$\sqrt{ax^2+bx+c}$化为$\sqrt{u^2\pm k^2}$或$\sqrt{k^2-u^2}$的形式，然后分别作三角代换

$$u=k\tan t,\ u=k\sec t,\ u=k\sin t$$

等等, 从而化为三角函数有理式的积分.

对于这种类型的无理函数积分, 若$b^2-4ac>0$, 可把根号内分解因式, 再用与例4类似的方法处理. 对于一般情况, 也可以先配方, 再线性变换将$\sqrt{ax^2+bx+c}$化为$\sqrt{u^2\pm k^2}$或$\sqrt{k^2-u^2}$的形式，然后分别作三角代换

$$u=k\tan t,\ u=k\sec t,\ u=k\sin t$$

等等, 从而化为三角函数有理式的积分.

例 5

求$\displaystyle\int\frac{4x-3}{\sqrt{x^2-2x}}\mathrm{d}x$.

对于这种类型的无理函数积分，若$b^2-4ac>0$，可把根号内分解因式，再用与例4类似的方法处理．对于一般情况，也可以先配方，再线性变换将$\sqrt{ax^2+bx+c}$化为$\sqrt{u^2\pm k^2}$或$\sqrt{k^2-u^2}$的形式，然后分别作三角代换

$$u=k\tan t,\ u=k\sec t,\ u=k\sin t$$

等等，从而化为三角函数有理式的积分．

例 5

求$\displaystyle\int\frac{4x-3}{\sqrt{x^2-2x}}\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int\frac{4x-3}{\sqrt{x^2-2x}}\mathrm{d}x&=2\int\frac{\mathrm{d}(x^2-2x)}{\sqrt{x^2-2x}}\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)^2-1}}\mathrm{d}x\\&=4\sqrt{x^2-2x}+\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}\right|+C.\end{aligned}$$

欧拉变换

欧拉变换也可以用来把这类积分有理化. 欧拉变换有三种情况.

- 第一种欧拉变换 设$a > 0$. 令
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x,$$
便可将这类积分表示为t的有理函数的积分.
- 第二种欧拉变换 设$c \geqslant 0$. 令
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c},$$
便可将积分表示为t的有理函数的积分.
- 第三种欧拉变换 设二次三项式ax^2+bx+c有两个不同的实根λ与μ. 令
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$$
即可.

使用欧拉变换的例题

例 6

求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

例 6

求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

用第一种欧拉变换. 令$\sqrt{x^2-x+1}=t-x$, 于是$x^2-x+1=t^2-2tx+x^2$, $x=\frac{t^2-1}{2t-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\mathrm{d}t$. 从而有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}\mathrm{d}t.$$

例 6

求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

用第一种欧拉变换. 令$\sqrt{x^2-x+1}=t-x$, 于是$x^2-x+1=t^2-2tx+x^2$, $x=\frac{t^2-1}{2t-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\mathrm{d}t$. 从而有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}\mathrm{d}t.$$

用第二种欧拉变换. 令$\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$, 于是$x^2-x+1=t^2x^2-2tx+1$, $x=\dfrac{2t-1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=-2\dfrac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$. 从而有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t+1)^2(t-1)}\mathrm{d}t.$$

练习题

用欧拉变换$\sqrt{7x-10-x^2}=(x-2)t$将$\displaystyle\int\frac{x}{\left(7x-10-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$化为有理函数的积分.

用欧拉变换$\sqrt{7x-10-x^2}=(x-2)t$将$\int \frac{x}{(7x-10-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$化为有理函数的积分.

令$\sqrt{7x-10-x^2}=(x-2)t$, 可得$x=\frac{2t^2+5}{t^2+1}$. 因此

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{x}{(7x-10-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \\
=\ &\int \frac{\frac{2t^2+5}{t^2+1}}{\left(\frac{3t}{t^2+1}\right)^3}\cdot\left(-\frac{6t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t\right) \\
=\ &-\frac{2}{9}\int \frac{2t^2+5}{t^2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

首先, 令$t=x^n$,于是$x=t^{\frac{1}{n}}$,$dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$. 从而积分变为

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\int t^{\frac{m}{n}}(a+bt)^p\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$$

$$=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt.$$

首先, 令$t=x^n$,于是$x=t^{\frac{1}{n}}$,$dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$. 从而积分变为

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\int t^{\frac{m}{n}}(a+bt)^p\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$$

$$=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt.$$

若记$q=\frac{m+1}{n}-1$, 则又有

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{1}{n}\int t^q(a+bt)^p dt$$

$$=\frac{1}{n}\int t^{p+q}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt.$$

- 当p为整数时，只有t^q可能是根式，所以能有理化；这时，用λ表示m和n的分母的最小公倍数，令$t=\sqrt[\lambda]{x}$换元.
- 当q为整数时，只有$(a+bt)^p$可能是根式，也可以进行有理化；这时，用ν表示p的分母，令$t=\sqrt[\nu]{a+bx^n}$换元.
- 当$p+q$为整数时，只有$\left(\dfrac{a+bt}{t}\right)^p$可能是根式，也可以进行有理化；这时，用$\nu$表示$p$的分母，令$t=\sqrt[\nu]{ax^{-n}+b}$换元.

切比雪夫证明了这种类型的积分除上述三种情形之外都积不出来，即其原函数都不能是初等函数.

例 7

求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

例 7

求$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

令$t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$, 于是$\sqrt{x}=(t^3-1)^2$, $x=(t^3-1)^4$, $\mathrm{d}x=12t^2(t^3-1)^3\mathrm{d}t$. 从而有

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=12\int t^3(t^3-1)\mathrm{d}t.$$

例 8

求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

例 8

求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

先令$x^4=u$, 若$x>0$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{4}u^{-3/4}\mathrm{d}u$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt[4]{\frac{1+u}{u}}}.$$

类似于例2, 令$\sqrt[4]{\dfrac{1+u}{u}}=t$, $u=\dfrac{1}{t^4-1}$, $\mathrm{d}u=-\dfrac{4t^3}{(t^4-1)^2}$. 从而有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{t^4-1}.$$

对于 $\int \sin^\nu x \cos^\mu x \mathrm{d}x$, 其中$\nu$和$\mu$是有理数, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 令$t = \sin^2 x$, 则

$$\int \sin^\nu x \cos^\mu x = \frac{1}{2} \int t^{\frac{\nu-1}{2}} (1-t)^{\frac{\mu-1}{2}} \mathrm{d}t,$$

从而化为了二项式微分式的积分. 当ν是奇数, μ是奇数, $\nu+\mu$是偶数这三种情形有一种成立时, 就可以积得出来.

积不出来的积分的一些例子

虽然在一个区间上每一个连续函数存在原函数, 但是, 并不是每一个初等函数的积分都能用初等函数表示, 例如这样的积分有

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx,$$

$$\int \frac{e^x}{x}dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}.$$