数学文化

见面课（六）

联系方式

李军　数学科学学院416办公室

邮箱：lijun@nankai.edu.cn

鼓励师生课下的联系和交流。上周已经建立了课程的飞书群，教学通知会发到飞书群。大家在学习中遇到问题，就及时通过飞书联系我。

- 说明：做平台上“测验题”和参与“讨论题”讨论的情况，均会被平台记录，作为慕课成绩的组成部分。
- 千万不要错过平台上做题的截止时间！

即：每周日的晚上23点30分。

第6讲测验题的截止时间是10月30日（周日）的晚上23点30分，第7讲测验题和第1次作业互评的截止时间都是11月6日（周日）的晚上23点30分。

本课程的教材请自己去买，有用！

问题请事先准备，提得具体、明确；

问题小一点，集中一点，才便于讨论。

下面是一些“不好”的问题：

- 如何证明一个数是无理数?
- 有关数学发展史或发展转折点的问题。
- 线性代数怎么与编程联系在一起?
- 数列特征方程的原理。
- 泰勒公式，线性代数的一些变形问题。

主观题 10分

设置

说说你在数学文化的学习中感到困惑的问题或很有兴趣的问题。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

多选题 2分

设置

数学发展史上共有三次数学危机，下列关于数学危机的说法中，哪些是正确的?

A 数学危机阻碍了数学科学的发展

B 三次数学危机都与无穷有关

C 三次数学危机都是对当时数学基础的质疑

D 三次数学危机都是数学家群体内部提出的

E 三次数学危机都已经彻底解决了

提交

平台上慕课内容的拓展

猜帽子颜色问题1

甲乙两人闭上眼后每人被戴上了一顶帽子，颜色为黑或红，然后睁开眼，每人只能看到对方的帽子。要求每人猜自己帽子的颜色，要甲乙两人同时说出来，至少有一人猜对的话他们就获得奖励。

甲乙两人可以在游戏开始前商量策略。

请你来设计一个一定能获得奖励的策略。

猜帽子颜色问题2

甲乙丙三人闭上眼后每人被戴上了一顶帽子，颜色为黑或红或白，然后睁开眼，每人只能看到其他两人的帽子。要求每人猜自己帽子的颜色，要甲乙丙三人同时说出来，至少有一人猜对的话他们就获得奖励。

甲乙丙三人可以在游戏开始前商量策略。

请你来设计一个一定能获得奖励的策略。

适当的问题对科学发展的价值

1． 有问题的学科才有生命力

问题，在学科进展中的意义是不可否认的。一门学科充满问题，它就充满生命力；而如果缺乏问题，则预示着该学科的衰落。正是通过解决问题，人们才能够发现学科的新方法、新观点和新方向，达到更为广阔和高级的新境界。

提出数学问题的动力，不仅来自数学以外的客观世界，也来自数学内部的逻辑发展。例如：素数的理论；非欧几何；伽罗瓦理论；代数不变量理论。

2． 提出一个“好的问题”是不容易的

这是因为在解决问题前，要想预先判断一个问题的价值是困难的，问题的价值最终取决于科学从该问题得到的收益。因此，只有对该学科的知识有广泛而深入了解的学者，对该学科的发展有清醒的认识和深刻洞察力的学者，才能提出有较大价值的“好的问题”。

3． “好的问题”的标准

尽管有困难，人们仍希望给出“好的问题”的一般标准。希尔伯特在他的演讲中就提出了这样的标准。我们把它归纳叙述如下：

1）清晰易懂

即，问题本身应很容易解释清楚，让别人听懂。希尔伯特说：“一个清晰易懂的问题会引起人们的兴趣，而复杂的问题使人们望而生畏。”

2）难而又可解决

希尔伯特说：“为了具有吸引力，一个数学问题应该是困难的，但又不应是完全不可解决，而使我们劳而无功。”

3）对学科发展有重大推动意义

问题解决的意义，不是局限于问题本身，而是波及整个学科，推动整个学科的发展。

“好的问题” 举例

- 费马大定理
- 五次方程根式解
- 最速降线问题
- 三体问题

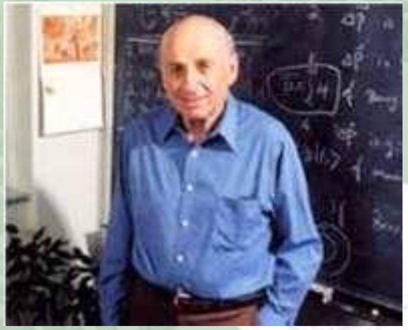
“希尔伯特问题”解决的现状

经过整整一个世纪，希尔伯特的**23**个问题中，将近一半已经解决或基本解决。有些问题虽未解决，但也取得了重要进展。

能够解决一个或基本解决一个希尔伯特问题的数学家，就自然地被公认为世界一流水平的数学家，由此也可见希尔伯特问题的特殊地位。

希尔伯特第1问题：连续统假设

1938年，奥地利数理逻辑学家哥德尔证明了连续统假设与ZF集合论公理系统的无矛盾性。1963年，美国数学家科恩（P.Cohen）证明了连续统假设与ZF公理彼此独立。因而连续统假设不能用ZF公理加以证明。在这个意义下，问题已获解决。



科恩1966年获得了菲尔兹奖。

希尔伯特第2问题：算术的无矛盾性

欧氏几何的无矛盾性可以归结为算术公理的无矛盾性。希尔伯特曾提出用形式主义计划的证明论方法加以证明，哥德尔1931年发表不完全性定理作出否定。根茨1936年使用超限归纳法证明了算术公理系统的无矛盾性。

库尔特·哥德尔（Kurt Godel）（1906年4月28日—1978年1月14日）是上个世纪最著名的数理逻辑学家之一。其最杰出的贡献是哥德尔不完全性定理和连续统假设的相对协调性证明。

希尔伯特第10问题：丢番图方程的可解性

能否通过有限步骤来判定整系数不定方程是否存在有理数解？

1970年，苏联数学家马蒂塞维奇最终证明：在一般情况答案是否定的。

尽管得出了否定的结果，却产生了一系列很有价值的副产品，其中不少和计算机科学有密切联系。

希尔伯特问题的研究与解决，大大推动了许多数学分支的发展，这些分支包括：数理逻辑、几何基础、李群、数学物理、概率论、数论、函数论、代数几何、常微分方程、偏微分方程、黎曼曲面论、变分法等。第二问题和第十问题的研究，还促进了现代计算机理论的成长。

重要的“问题”，历来是推动科学前进的杠杆。但一位科学家，如此自觉、如此集中地提出如此一整批问题，并且如此持久地影响了一门学科的发展，这在科学史上是仅有的。

2000年5月24日， Clay数学促进会在巴黎法兰西学院宣布了七个数学问题，并允诺对每个问题的解决者给予100万美元的奖励。

1．P与NP问题

2．Riemann假设

3．Poincare猜想

4．Hodge猜想

5．Birch及Swinnerton－Dyer猜想

6．Navier－Stokes方程组

7．Yang—Mills理论

当然，希尔伯特当年也不是尽善尽美的。一些评论者认为，其局限性是，希尔伯特问题未包括拓扑学和微分几何，而这两者在20世纪也成了数学的前沿和热点，这是希尔伯特没有预见到的。此外，希尔伯特问题除数学物理外，很少涉及应用数学。

用反证法证明无理性

应用反证法的一个典型例子是证明“$\sqrt{2}$是一个无理数”。

学习数学要能举一反三，请你应用反证法来证明“$\log_2 3$是一个无理数”。

这种方法还可以用于证明“$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是一个无理数”。

构造性证明与存在性证明

在数学中，时常需要讨论一些“存在性命题”，去证明存在具有某些性质的数学对象.

对于存在性命题，通常有两类证明方法：一类是构造性的证明方法，即把需要证明存在的数学对象构造出来，便完成了证明；

一类是存在性证明，并不具体给出存在的事物，而是完全依靠逻辑的力量，证明事物的存在.

这两种数学方法都有各自的魅力.

一个经典的例子

证明：存在无理数a和b，使得a^b是有理数.

一种构造性证明的思路：取$a=\sqrt{2}, b=\log_{\sqrt{2}} 3$，则$a^b$=3是有理数.

一种存在性证明的思路：考虑$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. 若$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$是有理数，则取$a=b=\sqrt{2}$；若$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$是无理数，则取$a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b=\sqrt{2}$.

代数数与超越数

一个复数，如果它是某个整系数代数方程的根，则称之为代数数，否则就称之为超越数.

显然，所有有理数和用有理数开方表示的无理数都是代数数.

然而，指出一个数是超越数的事就没有这么简单.

超越数的例子

1844年法国数学家刘维尔最早证明了超越数的存在性，他构造了下面的超越数：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0.1100010000000000000000010\cdots$$

1873年，厄尔米特证明了自然对数的底数e是超越数.

随后在1882年，林德曼证明了圆周率π的超越性.

存在超越数的存在性证明

要证明某个特定的数是超越数，一般来说难度较高. 康托尔建立集合论之后，给出了存在超越数的存在性证明，指出超越数不仅存在，实际上超越数比代数数多.

不难证明对于任意正整数n，n次整系数代数方程是可数多个，由此可知n次整系数代数方程的根组成的集合是可数无穷集. 进而可得全体代数数组成的集合是可数无穷集. 实数集是不可数无穷集，因此，一定存在实超越数.

实代数数集是可数无穷集，实超越数集是不可数无穷集，因此，实超越数集比实代数数集“大”.

猜帽子颜色问题3

100个人排成1列，闭上眼后每人被戴上了一顶帽子，颜色为黑或红，然后睁开眼，每人只能看到在他前面的所有人的帽子。从最后面的人开始（他能看到前面99个人的帽子），依次向前每人猜自己帽子的颜色，猜对的话有一份奖励。

这100个人可以在游戏开始前商量策略，目标是使得整体获得的奖励最多。

请你来设计一个策略。

视频：帽子谜题

- https://www.bilibili.com/video/BV17h41127dQ?from=search&seid=16439926650525170386&spm_id_from=333.337.0.0

三角决斗

在一个小镇上，有三个枪手正在进行着殊死搏斗。枪手A的枪法最为准确，命中率高达100%；枪手B枪法不错，命中率为80%；枪手C枪法欠佳，命中率仅为50%。

如果这三人站成一个等边三角形，每人每次只开一枪，抽签决定开枪顺序，以相同顺序循环往复，中枪则死，直至其中两人死亡。设三人都采取最佳策略，那么他们中谁活下的几率大呢？

三角决斗的解答

在枪手A和B都活着的情况下，轮到枪手C开枪，他的最佳策略是放空枪. 等到枪手A和枪手B分出生死，枪手C再与生存者决斗，这时枪手C先开枪，这使得枪手C在三角决斗中占据有利地位，存活机会最大.

计算概率的结果如下：枪手A活下来的概率是30%；枪手B活下来的概率约为18%；枪手C活下来的概率约为52%.

C、B、A次序下的三角决斗

《数学文化》期刊2013年第2期中“枪打出头鸟——三人决斗问题趣谈”一文讨论了C、B、A次序下的三角决斗，假设A的命中率是1，B和C的命中率分别是b和c，这里1>b>c>0. 在A、B都存活时，按C放空枪，A和B相互射击的策略，可以得到A、B、C的存活率分别为

A：$(1-b)(1-c)$；　B：$b-\frac{bc}{b+c-bc}$；

C：$c+\frac{bc}{b+c-bc}-bc$。

C、B、A次序下的三角决斗

当$b=\frac{2}{3}$时，A、B、C的存活率分别为

A：$\frac{1-c}{3}$；　B：$\frac{4(1-c)}{3(2+c)}$；　C：$\frac{c(8+c)}{3(2+c)}$。

这时，B的存活率始终大于A的存活率。

当$2\sqrt{10}-6<c<\frac{2}{3}$时，C的存活率大于B的存活率，当$\frac{\sqrt{97}-9}{4}<c<2\sqrt{10}-6$时，C的存活率大于A的存活率，但小于B的存活率。

一个取石子游戏

一块长为n、高为m的长方形地面分为m×n个单位正方形格子，每个格子中放有一粒石子。我们把位于第i行第j列的格子记为(i，j)。甲乙两人轮流取石子，甲先取。每次取的时候，选择一个有石子的格子(i_1, j_1)，然后把所有满足$i \geq i_1$和$j \geq j_1$的格子(i，j)中的石子取走。规定谁抓到最后一把谁输，因此这个游戏的目的是迫使对手捡起(1，1)格子中的石子。

一个取石子游戏

例如，m=2，n=3时，甲第一次选(2,2)，他取走了(2,2)和(2,3)的石子，乙这时选(1,3)，他取走了(1,3)的石子（此时(2,3)格是空的），还留下(2,1)、(1,2)和(1,1)格有石子。不难看到乙确保了自己可以取胜，甲再取只好选择(1,2)和(2,1)中的一个，乙就选择另一个，最后甲被迫选择(1,1)。

一个取石子游戏

(1) 问：当$m=2$，$n=2022$时，谁有取胜策略？

(2) 问：当$m=n=2022$时，谁有取胜策略？

(3) 问：对于$m>1$和$n>1$的一般情形，谁有取胜策略的一般结论是什么？

一个取石子游戏

(1) 当m=2， n=2022时， 甲有取胜策略。甲第一次选(2, 2022)可以确保取胜。

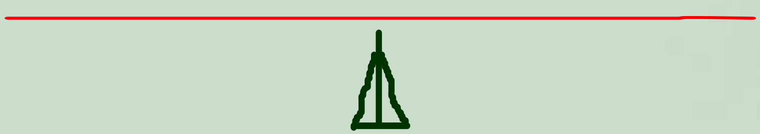
(2) 当m=n=2022时， 甲有取胜策略。甲第一次选(2, 2)可以确保取胜。

(3) 对于任意的m>1和任意的n>1， 甲都有取胜策略。

趣题：找次品1

1）有27个外形相同的乒乓球，其中只有1个“过重”的次品乒乓球。

请用一架不带砝码的天平，最多三次使用该天平，找出上述次品乒乓球。



提示思考一：运筹的思想，最优化思想

- 如何用最少次数完成预定任务？
- 该天平有何特点，能做什么？
- 如何最大限度地发挥该天平的作用？

提示思考二（不答）

- 分成几堆？
- 每堆几个？
- 如何分情况讨论？

课堂讨论提示三

- 天平的“平”与“不平”，提供了什么信息？

- 天平如果倾斜为“左低右高”，提供了什么信息？

解决问题的思路

第一次：将27个球分为三组，将其中两组分别放在天平两边称，就能确定次品究竟在三组中的哪一组，从而问题归为从该组的9个球中找次品；

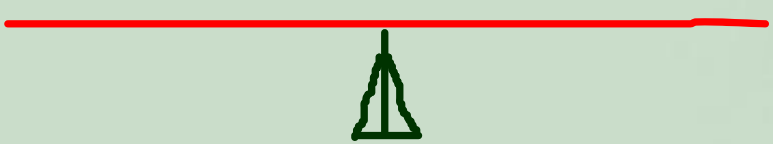
第二次：将9个球分为三组，将其中两组分别放在天平两边称，就能确定次品究竟在三组中的哪一组，从而问题归为从该组的3个球中找次品；

第三次：从3个球取两个分别放在天平两边称，就能确定次品究竟是3个球中的哪一个，从而问题就解决了。

趣题——找次品2

2）有5个外形相同的乒乓球，其中只有1个重量不标准的次品乒乓球。

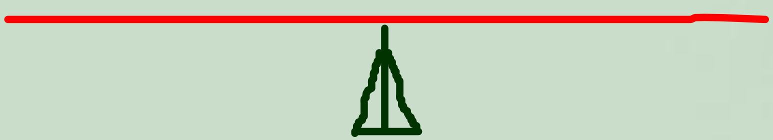
现再给你一个标准球，请用一架不带砝码的天平，最多两次使用该天平，找出上述次品乒乓球。



趣题——找次品3

3）有4个外形相同的乒乓球，其中只有1个重量不标准的次品乒乓球。

现再给你一个标准球，请用一架不带砝码的天平，最多两次使用该天平，找出上述次品乒乓球,并判断它是重于标准球,还是轻于标准球。



趣题——找次品4

4） 有7个外形相同的乒乓球，其中5个是标准球，另外2个是次品乒乓球，它们重量相同且比标准球轻。

请你给出一种方案，用一架不带砝码的天平，最多三次使用该天平，找出上述两个次品乒乓球。

投票(匿名) 最多可选1项

设置

有7个外形相同的乒乓球，其中5个是标准球，另外2个是次品乒乓球，它们重量相同且比标准球轻。第一次称的时候，你打算在天平的每边各放几个乒乓球？

A 1个

B 2个

C 3个

提交

下次“见面课”

2022年11月10日

（周四）

本次“见面课”结束

谢谢！