专 稿

曲面论（一）

——陈省身先生《微积分及其应用》之第四讲（2001．11．02）

编者按 陈省身先生《微积分及其应用》之前三讲分别在本刊总第94、95、96、99期刊出后，受到广大读者的热烈欢迎，应他们的要求，本刊将对陈先生的系列讲座作连续刊载。此稿由白承铭、宋敏、云保奇、赵志根等同志记录整理，未经陈先生寓目。刊出时只作个别文字性处理。

1．曲面的标架

今天我们讲一点曲面论。微积分在曲面上应用的研究在整个数学里头是很要紧的。这是因为在曲面论中，曲面的这些性质往往扩充到其他更广的情形，而这些更广的情形变化到曲面的时候也有很多性质，在曲面的情形已经发生了。那么，曲面有个优点，就是我们假定它是在3维空间里头，所以你看得见，你可以画图，可以看得见它上头的曲线里的性质及其他什么的。一到高维以后，就看不见。我的讲法跟书本不一样，所以我想大家把这几页材料复印一下，这个材料大概应该在普通微分几何书上找不到的，它有个优点，就是快得很而且方法来得简单。

那么什么是曲面呢?曲面就是图上一个扭曲的东西，我把它的点的坐标表为两个变数的函数，这两个变数我叫做 u, v。u, v 一般叫做参数(parameter)，假使 u, v 变化的时候，这些点的轨迹就成了一个2维的曲面 $\boldsymbol{x}(u,v)=(x^1(u,v),x^2(u,v),x^3(u,v))$。于是因为有 u, v 所以你可以使得一个参数的值是常数，然后使得另一个参数变化。设 v 是常数，令 u 变化，所以就有一条曲线，它的参数是 u。同样，你可以使得 u 不变，而 v 变化，因此在曲面里头，有两组曲线，它的参数一组是 v 等于常数，一组是 u 等于常数。

对于这两组曲线，每一条曲线在每一点都有一条切线。所以在一个点 $\boldsymbol{x}$，我们就有两条直线。我假定这两条直线不重合，换句话说，解析地讲，$\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v$ 不是同一个方向，不平直(线性) 相关，其中 $\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v$ 就是 $\boldsymbol{x}$ 的矢量分别对 u, v 求偏微分。或者我说，它的矢量积 $\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v\neq 0$。假使这两个方向不重合，所以它们就张成一个平面，这个平面我叫做曲面在这一点的切面。

这个切面在 $\boldsymbol{x}$ 这一点有个垂直的方向，这个方向的直线一般叫做法线。沿着法线的方向有一个单位矢量，因此也叫做法矢量。这个法矢量有两个选择，它可以向上走，也可以向下走，有两个方向刚好相反的选择。我选择它使得 $\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v$ 跟法矢量是一个右手的坐标标架，是一个右手系。换句话说，我叫这个法矢量 $\boldsymbol{e}_3$，并假设 $\boldsymbol{e}_3$ 是个单位矢量，于是 $\boldsymbol{e}_3$ 就满足条件

$$(\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_3)=1\ (\text{单位矢量}),\ \boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|^2}。\tag{4.1}$$

这时，行列式 $\det(\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{x}_v,\boldsymbol{e}_3)$ 是正的，即 $\det(\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{x}_v,\boldsymbol{e}_3)>0$，所以是右手系。

现在，我的这个方法跟一般的方法不同。一般书上往往用 u, v 参数发展整个的曲面的微分几何，因此就比较长了。他们这里有一个缺点：因为 $\boldsymbol{x}_u$ 跟 $\boldsymbol{x}_v$ 不一定垂直，那么我们的兴趣是在于Euclid几何有一个度量，他们用的是非垂直的坐标系，而几何是一样的，但是分析方面的公式就比较复杂了。而我取 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$，是单位矢量，它们互相垂直。所以现在 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 三个矢量都是单位矢量，

互相垂直,并且因为要它是一个右手系,所以这是一个正交的坐标系,它的行列式等于1,于是

$$e_1,e_2,e_3(\text{右正交标架}):(e_i,e_j)=\delta_{ij},(e^1,e^2,e^3)=1,1\leq i,j,k\leq 3 \tag{4.2}$$

2. **曲面的微分式及其几何**

那么微分几何怎么样呢?这时就不只是有一个坐标系,而是有一族(family)坐标系,还有几个变数(变的参数)。那么微分几何最主要的问题就是了解一个坐标系跟它临近的坐标系是怎么一个关系。所以我现在有一族坐标系,比方说是有两个变数 u,v,甚至可以有多个变数,那么要找这个临近坐标系跟它的关系,我就把它微分了。现在我这个 e 是矢量,e_i 也都是矢量,所以我就求求看 $\mathrm{d}x$,看 d 跟 $\mathrm{d}e_i$,这是一个矢量的微分。但是因为 e_1,e_2,e_3 是一个标架,是线性无关的,而我们是在3维空间中讨论的,任何一个矢量必然是 e_1,e_2,e_3 的线性组合。所以我可以把 $\mathrm{d}e_i$ 写成

$$\mathrm{d}e_i=\omega_{ij}e_j。\tag{4.3}$$

这里我用的是Einstein的符号:如果有一个指数重复的话就相加,因为我们的空间是3维的,i,j,k 都是从1到3,那么 $\omega_{ij}e_j$ 就是对 j 相加。所以这是3项,即 $j=1,2,3$,有3项,这是Einstein在微分几何引进的符号。Einstein还做了一件事情:比方说,从前你要有个数目,它要有个指数,即 x_i,i 这个指数都写成下标。Einstein说不写下标,他就写了上标,因此后来的微分几何的书里头,上标非常多,坐标的这个指标都写成上标。其实,上下没有关系,所以,我用下标写成分式(4.3)。

公式(4.3)是基本的公式,它表示两个临近坐标的关系,一个 $\mathrm{d}e_i$ 跟原来的坐标 e_i 的关系。ω_{ij} 是什么呢?它是一次微分式。因为 $\mathrm{d}e_i$ 是一次微分式,它的值是矢量的一次微分式,所以你如果写成它的分量的话,就有3个分量,而且每一个都是 $\mathrm{d}e_i$ 的分量,那么 ω_{ij} 是一次微分式。因为 i,j 都是从1到3,所以一共有9个。但是这些 ω_{ij} 不是任意的,这是几何上,力学上最基本的一个公式。因为我们一切都正交的系统,所以 ω_{ij} 对于下标 i,j 是反对称的,即

$$\omega_{ij}+\omega_{ji}=0。\tag{4.4}$$

这是因为 e_i,e_j 满足 $(e_i,e_j)=\delta_{ij}$,你把它微分,而 δ_{ij} 是常数,所以微分它之后得:

$$(\mathrm{d}e_i,\ e_j)+(e_i,\ \mathrm{d}e_j)=0。\tag{4.5}$$

由于 $\mathrm{d}e_i=\omega_{ik}e_k$ 并且 e_i,e_k 是互相正交的,所以由上式就得到 $\omega_{ij}+\omega_{ji}=0$。对于所有的 i,j 从1到3,ω_{ij} 是反对称的,因此 ω_{ij} 看成一个 3×3 的方阵。那么这个方阵主(对角)线上的元素都是0,其他的关于主线是反对称的。也就是有

$$(\omega_{ij})=\begin{pmatrix}0&\omega_{12}&\omega_{13}\\-\omega_{12}&0&\omega_{23}\\-\omega_{13}&-\omega_{23}&0\end{pmatrix}。\tag{4.6}$$

因此,该方阵实际上只剩下3个元素,即只有 $\omega_{12},\omega_{13},\omega_{23}$,这3个都是一次微分式,而这3个一次微分式对曲面几何性质是非常要紧的,即它们都可以由微分式来表示。

普通研究函数论,搞分析的时候,都是讲函数,讨论函数或者是把函数微分了,把它的微商作为系数,大家一般不习惯于一次微分式。其实,一次微分式是把这个问题弄得简单了。我开头的时候曾经跟你们介绍过法国的大数学Darboux的书,它有四大本叫做《曲面论》。这种书很值得看,不过可惜是法文的。他不用微分式,他用的是偏微分,所以有许多公式写起来长一些。用微分式的话,一次微分式写起来就简单多了,所以我这里用了一次微分式,用正交标架,使曲面论非常简单,这些你们在普通微分几何书中很少能找到。但是这种方法很有效,因为一切东西都简单了。

我假定曲面是定向的,即在转的时候有一个反时钟方向。因为定了向之后,在一个点,它有两个切矢量的话,它的法矢量就完全确定了。因此,曲面定向之后,每一点一定有一个固定的单位法矢

量。曲面上有一个很要紧的几何结构，就是一个点加一个单位切矢量，即 x 跟 e_1，这是现代所谓纤维丛的最简单、最要紧的情况。对于 $x+e_1$，它多了一个维数，因为固定了 x 之后，e_1 这个单位切矢量还可以转圈，所以 x 的轨迹是 2 维的。那么每一个 x 的切矢量还得加 1 维。这是因为它可以是一个圆，转一个圆周，它是单位的，所以这个空间是 3 维的，而这个 3 维空间我叫做 E：

$$E=\{xe_1|x\in M\}\ (\text{圆丛});\ \dim E=3。\tag{4.7}$$

有一个 3 维的空间或者说造出一个 3 维空间，这个观念要紧极了，现在许多数学，物理都需要这个观念。一旦你用原来的流形来描写几何不够，往往需要上面有一个圆圈，这个我们叫做纤维丛。这时圆周是一个纤维，因此这个纤维丛叫做圆丛。因为纤维是圆，所以 E 是由流形 M(曲面我叫它为 M，是一个流形) 造出来的一个圆丛，那么在一点要有 e_1，就有 e_2 了。这是因为 e_2 是跟它垂直的一个单位切矢量，同时可以由原来的定向确定下来，因此 e_1,e_2 就定下来了，e_3 是法矢量当然也定了。所以 xe_1 这个单位切矢量跟标架是一回事。有了单位切矢量也可以构造一个标架，当然有了标架，你就可以取第一个切矢量为 e_1。所以这 3 维空间就是我们的曲面所有这些标架 e_1,e_2,e_3 所成的空间。于是我们就有上面的公式(4.7)。我说 E 是 3 维的，E 有一个映射，映到原来的曲面 M：因为你有这个切矢量，它有一个原点 x，由 xe_1 把它映为 x，这是一个从 E 到 M 的映射。

要研究曲面的微分几何，单从曲面不够，一定要用 E。E 跟原来的曲面有密切的关系。用 E 的好处在于，E 的空间是 3 维的空间，它上头有一次微分式，这些微分式在 E 上头都是确定的，那么除了我讲的 e_1,e_2,e_3 这几个单位矢量，当然曲面的点 x 也是一个矢量，它的位置矢量也是一个矢量。x 是 u,v 的函数，dx 当然是 u,v 的一个一次微分式，它也可以表为 e_1,e_2,e_3 的一个线性组合，但是实际上，它一定是 e_1,e_2 的组合，这是因为 e_3 是法矢量，所以它一定是在切面上头，而 e_1,e_2 都是切矢量，所以 dx 一定是 e_1,e_2 的线性组合，它的系数我叫做 ω_1,ω_2，即得到我们第一个公式：

$$dx=\omega_1e_1+\omega_2e_2。\tag{4.8}$$

所以我现在有 5 个一次微分式：$\omega_1,\omega_2,\omega_{13},\omega_{23},\omega_{12}$。这组微分式非常要紧，它们都有简单的几何意义。这个就说明微分式讨论几何性质使得问题简单而且容易。现在我们就有公式(4.8)。我们将公式(4.3)，(4.4) 作为我们的第二个公式。

微分式有个最大的优点，就是微分两次后是 0，即对于 dx，$d(dx)=0$。对于任何函数的外微分两次一定等于 0，这就相当于在空间任意取一个区域，再取它的边界，而边界不再有边界。取边界取两次一定是等于 0，因为这个性质，这种数学结构就有所谓的同调(homology) 性质，非常要紧。不过我们现在把公式(4.8) 左边 dx 再 d 一下子就等于 0，而把右边的展开就得

$$d(\omega_1e_1)+d(\omega_2e_2)=0。\tag{4.9}$$

注意当外微分前面有一个一次的话，微分第二个因子要改号。微分之后，所得到的式子是 e_1,e_2,e_3 的线性组合，那么它的系数是二次微分式。而对于这个系数是二次微分式的矢量要等于 0 的话，所有的系数都要等于 0。于是你如果令 e_1,e_2 的系数为 0 的话，就得到下面的第三个公式：

$$d\omega_1=-\omega_2\wedge\omega_{12};\qquad d\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12}。\tag{4.10}$$

这是要紧极了的一个公式。这些公式你们也许觉得新，因为在普通书上看不见，这是由于普通书不喜欢用微分式，许多人也不会用微分式，其实这很简单，所以就得到公式(4.10)。

然后令 e_3 的系数为 0，就得到第四个公式：

$$0=d\omega_3=\omega_1\wedge\omega_{13}+\omega_2\wedge\omega_{23}。\tag{4.11}$$

这是非常非常要紧的公式。

由这些就得到所谓的 Levi－Civita 平行性。现在，这个也叫联络(connection)。对于联络，普通找

一本书，可以讲上很久很久，其实很简单。我说在这个情形之下，Levi－Civita 联络就是 ω_{12} 这个一次微分式。注意 ω_{12} 是 E 里头的一个一次微分式，它就定几何的性质，使得我可以把这个矢量沿着一条曲线平行的移动。这是什么意思呢？就是 ω_{12} 这个一次微分式由方程(4.10) 完全确定。因为如果有一个 ω'_{12}，使得适合同样的方程式，即

$$d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega'_{12}; \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega'_{12}; \tag{4.12}$$

那么我们把两个方程相减，就得到

$$\omega_1 \wedge (\omega'_{12} - \omega_{12}) = 0; \quad \omega_2 \wedge (\omega'_{12} - \omega_{12}) = 0。 \tag{4.13}$$

而两个一次微分式如果相乘等于 0 的话，而且如果其中一个不是 0，那么其它那个必然是它的倍数，这是外代数最简单的东西。你们算一算就出来了。ω_1, ω_2 是不为 0 的，而且不但不等于 0，并且线性无关。因此，$\omega'_{12} - \omega_{12}$ 即等于 ω_1 的倍数，又等于 ω_2 的倍数，但是 ω_1, ω_2 线性无关，所以它要等于 0。因此如果再有一个 ω'_{12} 适合同样的方程，它一定等于 ω_{12}，这是完全确定的。

那么我用这个引进所谓的 Levi－Civita 平行性。我们现在有 $de_1 = \omega_{12}e_2 + \omega_{13}e_3$。我们把 e_3 这一项取消，取消是什么意思呢？假使有一个矢量，你把它的 e_3 取消之后，就是沿着 e_3 的方向取这个正交投影，所以你把它取消了的意思就是取它的正交投影。你把它取消的话，我现在不再是普通的微分了，是新的微分了，我用 D 表示这个新的微分，于是就得到这组公式：

$$De_1 = \omega_{12}e_2, \quad De_2 = -\omega_{12}e_1。 \tag{4.14}$$

照我刚才证明的这是由几何完全确定的，因为 ω_{12}是完全确定的。假使 $De_1 = 0$ 的话，我就说这个矢量在 Levi－Civita 意义下平行，即我说在这种情形下它就是平行的。它是平行的，这是有新的意义。在 Euclid 几何的时候，这就是普通平行，现在是普通平行的推广，也就是 $De_1 = 0$ 时是 Levi－Civita 平行。所以在曲面上，你用一次微分式，尽管这个平行比较难懂。令 $De_1 = 0$ 的话，对于矢量是个微分方程。这个微分方程不一定有解，但是假使你有一条曲线，你就可以沿着这条曲线求解。对于曲线来说，所有的这些函数都是 t 的函数。沿着这条曲线求解，可以求到解。至于这个条件，我说这个矢量就是 Levi－Civita 平行。所以从这个定义可以了解这个平行性跟曲线的选择有关。假使有一个点，另外还有一点，那么你联这两点有两条不同的曲线，你把同一个矢量沿头一条曲线平行，并沿第二条曲线平行，看到的一般不是同一个矢量。至于这个平行性与曲线的选择有关系，是普通的平行性的推广。普通的时候，平行性在 Euclid 平面上是绝对的和定了的，现在这个时候是跟曲线的选择有关系，这就是联络。

我刚才把 x 这个矢量 d 两次等于 0，而同样的，我可以对 e_i 这个矢量也 d 两次，即 $d(de_i) = 0$，因此算出来 $d(de_i) = 0$，就有

$$d\omega_{ij} = \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}。 \tag{4.15}$$

实际上，很简单地，我对 $de_i = \omega_{ij}e_j$ 求微分，然后因为 ω_{ij}是一次微分式，所以应该有个负号，即负的 $\omega_{ij} \wedge de_j$，于是有

$$d(de_i) = d\omega_{ij}e_j - \omega_{ij} \wedge de_j = 0。 \tag{4.16}$$

但是 $de_j = \omega_{jk}e_k$，所以头一个 $d\omega_{ij}e_j$ 改为 $d\omega_{ik}e_k$ 没有关系，这是因为你对于 j．k 是求和，可写成 j 也可写成 k，都是从 1 到 3，无所谓的，因此就得到公式（4.15）。

这是一个基本的公式，看着麻烦，其实很简单，尤其是在 3 维的情形，很简单。实际上，右边讲起来是 3 项之和，但是这 3 项是对于 j 求和，因为 ω 是反对称的，所以我们来看 ω_{ik}，$i \neq k$，或者就来看看 ω_{13}，在下面那个公式看 $d\omega_{13}$应该是 $\omega_{1j}\omega_{j3}$，但是实际上，j 只能等于 2，这是因为 $j=1$ 时 $\omega_{11}=0$，$j=3$ 时 $\omega_{33}=0$。所以右边看着是这么样之和其实就只有一项，所以你就得

到

$$d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}。\tag{4.17}$$

同样可以得到

$$d\omega_{23} = - \omega_{12} \wedge \omega_{13}。\tag{4.18}$$

这些一般就是所谓的 Weingarten 公式，非常简单。

所以这些公式都是从简单的外微分立即得到的。Weingarten 公式很有意思，你要它跟原来的 ω_1，ω_2 的公式比较的话，完全是一个形状，即注意到这些公式与公式（4.10）相似，这个形状是有几何意义的，现在它用来定所谓的 Betti Transformation，这个我不细讲了，Weingarten 公式跟原来的 $d\omega_i$ 的公式的相似性是有深刻的几何意义的。

3. 曲面的基本不变式

上面我讨论了 De_1 的 Levi－Civita 平行性。如果取这个矢量在 e_3 这个方向的话，我就得到 $\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0$，即公式（4.11）。因此，$\omega_{13}$，$\omega_{23}$都是 ω_1，ω_2 的线性组合，我可以写成

$$\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2, \omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2。\tag{4.19}$$

由这个我得到这个曲面的要紧的不变式。一个曲面与另一个曲面有什么分别？这个分别在于 曲率,曲率是曲面上的函数,比方说,一般的话,我们用第一基本式跟第二基本式来表示:

$$第一基本式\ \mathrm{I} = ds^2 = (d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}) = \omega_1^2 + \omega_2^2;\tag{4.20}$$

$$第二基本式\ \mathrm{II} = (-d\boldsymbol{x}, de_3) = a\omega^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2。\tag{4.21}$$

对于第一基本式,它就是曲面的 $ds^2 = (d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x})$。由于 $d\boldsymbol{x} = \omega_1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2 \boldsymbol{e}_2$,但是 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是互相垂直的单位矢量,所以就得到 $\omega_1^2 + \omega_2^2$。因此 ω 这 5 个一次微分式都有重要的几何意义。ω_1, ω_2 的平方和就是曲面的度量,在 3 维空间里头,曲面当然有一个度量,就是它的 Riemann 度量,是一个 2 次的微分式,这个 2 次微分式简单极了,就是 $\omega_1^2 + \omega_2^2$。对 $\boldsymbol{e}_3$ 这个矢量取 $-(de_3, d\boldsymbol{x})$,照我刚才所写的,它就等于 $a\omega^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2$,这也是一个 2 次微分式,这个一般叫做第二基本式。

那么有一个第一基本式,还有个第二基本式,你就取它的特征值,特征值的和就是 $a + c$,特征值的积就是 $ac - b^2$,一般地,$H = \frac{a+c}{2}$ 叫做曲面的中曲率。$K = ac - b^2$ 叫做曲面的 Gauss 曲率。这里要紧极了,Gauss 曲率有许多有趣的性质,因此这是怎么样从 5 个一次微分式由它们的线性组合的关系就得到曲面的不变式。

中曲率跟 Gauss 曲率这两个不变式描写曲面的几何性质。比方说,可以证明 Gauss 曲率是正的话,曲面是鼓的,Gauss 曲率是负的话,曲面就有鞍点,就象马鞍点,许多几何性质都可以用这两个曲率来描写,所以是曲面里头两个最主要的不变式,这个不变式是函数,以往我们得到的是一次微分式,而一次微分式不大容易想象究竟是什么意思,但由它的运算可以得出函数来。这函数当然是了解得比较清楚,便得到中曲率跟 Gauss 曲率。

中曲率等于 0,一般叫做极小曲面,所谓的极小曲面,举例就是你把一条封闭的曲线放在肥皂水里头所成的曲面就是面积最小的曲面,它的中曲率为 0。所以这有简单的几何意义,最近,甚至现在都有很多关于极小曲面的研究。

Gauss 曲率更要紧,Gauss 曲率是等于 $\omega_{13} \wedge \omega_{23}$,在曲面上也一样有 Gauss 映射,曲面每点有一个单位法矢量,把这个单位矢量看为一个半径为 1 的球面的点,就把曲面映射到球面上去了。每个点有一个单位法矢量,你在 0 点画一个单位法矢量跟它平行,它的端点就在单位球面上,那么对于所有的点都做这个构造的话,就在单位球面上得到一个区域。在这个映射下,两个面积元素的比,即

它的像(image)的面积元素跟原来面积元素的比就是Gauss曲率,这样一下子就看出来了,所以这个Gauss曲率有很简单的几何意义。这时,曲面的讨论是一个推广,曲面的时候有曲线,曲线也有一个Gauss映射,那个Gauss映射是取单位切矢量,其实也可以取单位法矢量,那么曲线的时候,Gauss映射把切线映射到单位圆上头,把单位圆的度量被原来这个度量除就是曲率,现在就把这个观念推广到高维,推广到2维,即推广到曲面,所以我由这个曲面Gauss映射到一个单位球面上头,这两个面积的比就是Gauss曲率,所以这是一个非常自然的几何度量。

现在有个很要紧的关系,上头有$d\omega_{ik}=\omega_{ij}\wedge\omega_{ik}$,现在我把这个公式用到$\omega_{12}$,$i,k=1,2$,于是$d\omega_{12}=\omega_{13}\wedge\omega_{32}$,但是$\omega$是反对称的,所以$\omega_{32}=-\omega_{23}$,这里$\omega_{13}\wedge\omega_{23}$就是$ac-b^2$,也就是Gauss曲率,所以我就得到公式

$$d\omega_{12}=-K\omega_1\wedge\omega_2 \tag{4.22}$$

其中,K是Gauss曲率,这是一个令Gauss非常惊讶的公式,所以Gauss把这个定理叫做Theorem Egregious,Egregious是拉丁字母,意思指这是一个了不得的定理,为什么呢?它证明了Gauss曲率只跟曲面在Riemann度量有关,跟这个曲面在空间的位置无关,因为在这个公式里头,ω_{12}已经证明了只跟曲面的Riemann度量有关,然后$\omega_1\wedge\omega_2$就是这个度量下的面积元素,当然只跟ds^2有关,即只跟Riemann度量有关。所以虽然Gauss曲率是一个曲面在空间里头的一个不变式,但是它只跟曲面的Riemann度量有关,换句话,你把曲面变换(deform)一下子,使得Riemann度量不变,Gauss曲率就不变,所以Gauss曲率有这么重要的性质,我想Gauss做了许多要紧的和漂亮的结果,这个定理显然是他特别欣赏的一个结果,是很特别的一个结果。实际上,我们就把这些方程用外微分微分一下子,得到基本公式,然后就得到这些公式。

下次,我要讲由这个公式证明Gauss-Bonnet公式。Gauss-Bonnet公式是推广三角形三角之和等于180°,将这个公式推广到曲面的情形Gauss-Bonnet公式的应用非常之广。证明的时候,我始终利用圆丛,这圆丛稍微用得复杂一些:假定这个丛是一个复的线丛(complex line),那么这个复线丛的纤维是条复线,在复线里头,绝对值等于1的复数是圆周,就是圆丛,这个观念在物理上是基本的。现在大家搞得很多的是辛几何(symplectic geometry)。单有辛结构(symplectic structure)不太有用,你要把辛几何用到量子力学的话,需要加上一个复线丛,就是我们现在所讲的东西的一个推广。我们现在讲2维,一到物理的话,空间与时间加在一起是4维,所有你基本的空间是4维,在4维空间当中有一个复线丛。因此就得到这个Gauss曲率。现在这个曲率是2次微分式,它d一下子等于0,就得到Maxwell方程。所以微积分在几何上应用是许多物理的基础,最近我在《科学》杂志上写了一篇文章,叫做《Gauss-Bonnet公式与Maxwell方程》,你们如果能找到,可以去看一看。

下次我想讲Gauss-Bonnet公式的一个证明,这个跟我们的工作有非常密切的关系,在50年前,在昆明西南联大,我教微分几何,就得到Gauss-Bonnet公式的这个证明。普通书上复杂多了。Gauss-Bonnet公式主要意思是说,你有任何一个曲面,曲面上头有一个多边形,把这个多边形的Euler特征数表示种种曲率的组合,这是Gauss-Bonnet公式。我得到这个证明,我想这是Gauss-Bonnet公式最简单和最自然的一个证明,就是把$d\omega_{12}$一微分就得到Gauss-Bonnet公式积分的式子,然后我在一九四几年的时候,到了Princeton做高维的,当然自然而然地,我想法子把这个推广到高维,这个是可以做到的,以后,我还做了些别的工作,所以可以说我这个Gauss-Bonnet公式的证明在我所做的工作中是我最喜欢的一个,我想现在可以结束了。