二次超曲面

黄利兵

数学科学学院

2023 年 5 月 8 日

主要内容

标准正交标架

令 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$, 将 $\mathbb{R}^n$ 中的元素称为点. 任取 $p \in \mathbb{R}^n$, 并取标准正交基 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$, 称 $(p; \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交标架.

例

如果取 $O = (0, \cdots, 0)'$, $\varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0)'$, $\cdots$, $\varepsilon_n = (0, \cdots, 0, 1)'$, 则 $(O; \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ 是一个标准正交标架, 称为 $\mathbb{R}^n$ 的典范标架或自然标架.

在标架 $(p; \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$ 中, 点 q 的坐标定义为 $q - p$ 在基 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ 下的坐标. 特别地, 在自然标架中, 点 q 的坐标仍为 q.

由于每个点在标准正交标架下都有坐标, 我们也称这个标架诱导了一个 (直角) 坐标系.

坐标变换

现在, 设 $(p; \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$ 和 $(\widetilde{p}; \widetilde{\mathbf{e}}_1, \cdots, \widetilde{\mathbf{e}}_n)$ 是两个标准正交标架. 我们来讨论同一点在两个标架中的坐标之间的关系.
假设点 $\widetilde{p}$ 在前一标架中的坐标为 b_0, 即

$$\widetilde{p} - p = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)\, b_0.$$

又设标准正交基 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ 到 $\widetilde{\mathbf{e}}_1, \cdots, \widetilde{\mathbf{e}}_n$ 的过渡矩阵为 Q, 即

$$(\widetilde{\mathbf{e}}_1, \cdots, \widetilde{\mathbf{e}}_n) = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) Q.$$

现在, 若点 q 在两个标架中的坐标分别为 $\mathbf{x}$ 和 $\widetilde{\mathbf{x}}$, 则有

$$\begin{aligned} q - p &= (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)\, \mathbf{x}, \\ q - \widetilde{p} &= (\widetilde{\mathbf{e}}_1, \cdots, \widetilde{\mathbf{e}}_n)\, \widetilde{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

综合以上信息即可得到

$$\mathbf{x} = Q\widetilde{\mathbf{x}} + b_0.$$

这个等式称为 (直角) 坐标变换公式.

通过选取合适的标准正交标架, 可以使我们方便地识别一些图形.

例

在 $\mathbb{R}^2$ 的自然标架中, 考虑二次方程 $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 20x - 40y + 20 = 0$ 所定义的曲线.
令 $p = (-2, -1)'$, $\mathbf{e}_1 = (3/5, 4/5)'$, $\mathbf{e}_2 = (-4/5, 3/5)'$, 则 $(p; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ 是另一个标准正交标架. 新标架下的坐标 $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y})'$ 与原坐标 $\mathbf{x} = (x, y)'$ 之间的关系是

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

原二次曲线的方程在新的标架下可以写为 $\frac{\tilde{x}^2}{4} - \tilde{y}^2 = 1$. 可见该二次曲线是双曲线.

二次超曲面

定义

在 $\mathbb{R}^n$ 的自然标架中, 满足方程

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x} + 2\beta'\mathbf{x} + c = 0$$

的所有点 $\mathbf{x}$ 所构成的集合 Γ 称为二次超曲面, 其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称矩阵, $\beta \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $c \in \mathbb{R}$. 特别地, 当 $n = 2$ 时, Γ 称为二次曲线; $n = 3$ 时, Γ 称为二次曲面.

经坐标变换 $\mathbf{x} = Q\widetilde{\mathbf{x}} + b_0$, 上述二次超曲面 Γ 的方程变为

$$\widetilde{\mathbf{x}}'\widetilde{A}\widetilde{\mathbf{x}} + 2\widetilde{\beta}'\widetilde{\mathbf{x}} + \widetilde{c} = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad \widetilde{A} &= Q'AQ, \\ \widetilde{\beta} &= Q'(Ab_0 + \beta), \\ \widetilde{c} &= b_0'Ab_0 + 2\beta'b_0 + c. \end{aligned}$$

怎样选取合适的正交矩阵 Q 和列向量 b_0, 可以使得 $\widetilde{A}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{c}$ 最简单?

二次超曲面的分类

我们分两种情况来讨论.

- 情形一: $\mathrm{rank}(A \ \ \beta) = \mathrm{rank}(A)$.
  这时线性方程组 $A\mathbf{x} = -\beta$ 有解, 取 b_0 为一个解, 则 $\widetilde{\beta} = Q'(Ab_0 + \beta) = 0$. 再取正交矩阵 Q 使得 $\widetilde{A} = Q'AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为对角矩阵. 这样, 在新的坐标系下, 二次超曲面的方程为
  $$\lambda_1 \widetilde{x}_1^2 + \cdots + \lambda_n \widetilde{x}_n^2 + \widetilde{c} = 0.$$
- 情形二: $\mathrm{rank}(A \ \ \beta) > \mathrm{rank}(A)$.
  这时线性方程组 $A\mathbf{x} = -\beta$ 无解. 设 A 的列向量组张成的子空间为 W, 则 $\dim W < n$ 且 $\beta \notin W$. 设 β 在 W 上的正交投影为 β_1, 并设 $\beta_2 = \beta - \beta_1$ 的长度为 d, 那么, $\xi = \frac{1}{d}\beta_2$ 是与 W 正交的单位向量, 因而 ξ 与 A 的列向量都正交, $A\xi = 0$, 即 ξ 是 A 的属于特征值 0 的特征向量. 利用这一点, 我们可按下面的步骤找到合适的正交矩阵 Q 和列向量 b_0.

首先, 取 A 的特征向量构成的正交矩阵 Q, 使得 Q 的第 n 列为 ξ, 则

$$\widetilde{A} = Q'AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, 0).$$

其次, 取列向量 b_1, 使得 $Ab_1 = -\beta_1$(注: b_1 是方程组 $A\mathbf{x} = -\beta$ 的一个最小二乘解); 这时 $b_0 = b_1 - t\xi$ 仍满足 $Ab_0 = -\beta_1$, 其中实数 t 待定. 于是

$$\widetilde{\beta} = Q'(Ab_0 + \beta) = Q'\beta_2 = (0, \cdots, 0, d)'.$$

最后, 取 $t = \frac{1}{2d}(b_1'Ab_1 + 2\beta'b_1 + c)$, 则 $\widetilde{c} = b_0'Ab_0 + 2\beta'b_0 + c = 0$.
按如上方式取正交矩阵 Q 和列向量 b_0, 则在新坐标系中, Γ 的方程成为

$$\lambda_1\widetilde{x}_1^2 + \cdots + \lambda_{n-1}\widetilde{x}_{n-1}^2 + 2d\widetilde{x}_n = 0.$$

定理

若 Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的二次超曲面, 则在适当的标准正交标架下, Γ 的方程可以写为

$$\lambda_1\widetilde{x}_1^2 + \cdots + \lambda_n\widetilde{x}_n^2 + \widetilde{c} = 0,$$
$$\text{或}\quad \lambda_1\widetilde{x}_1^2 + \cdots + \lambda_{n-1}\widetilde{x}_{n-1}^2 + 2d\widetilde{x}_n = 0.$$

平面二次曲线的分类

在上述定理中取 $n=2$, 就有

定理

平面二次曲线 Γ 在适当的标准正交标架下的方程为以下 9 种类型之一

	非退化	退化
椭圆型	(椭圆) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ (虚椭圆) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$	(相交虚直线) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
双曲型	(双曲线) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$	(相交直线) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
抛物型	(抛物线) $x^2-2py=0$	(平行直线) $x^2-a^2=0$ (平行虚直线) $x^2+a^2=0$ (重合直线) $x^2=0$

思考题

(**) 判断 $x^2-xy+y^2=x+y$ 是何种曲线.

空间二次曲面的分类

当 $n=3$ 时, 则有

定理

若 Γ 是空间二次曲面, 则在适当的标准正交标架下, Γ 的方程可以写为以下 17 种类型之一

- 非退化 (6 种)
  - 椭圆型: (椭球面) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$; (虚椭球面) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$;
  - 双曲型: (单叶) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$; (双叶) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$;
  - 抛物型: (椭圆抛物面) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$; (双曲抛物面) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z=0$;
- 退化 (11 种)
  - 锥面: (虚锥面) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; (实锥面) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$;
  - 柱面: 将 xOy 平面的二次曲线沿 z 轴平移形成的柱面, 共 9 种.

思考题

(***) 判断 $xy+yz+zx=x+y+1$ 是何种曲面.

二次曲线方程的不变量

在上面的讨论中, 我们解决了平面二次曲线的类型判别问题, 但它的代价是比较高的, 即需要找到合适的坐标变换. 那么, 能否不经过坐标变换, 而直接在原坐标系中解决这个问题? 为此, 我们来寻找坐标变换过程中方程系数的不变量.
设二次曲线 Γ 在自然标架下的方程为

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x}+2\beta'\mathbf{x}+c=0.$$

经坐标变换 $\mathbf{x}=Q\widetilde{\mathbf{x}}+b_0$, 它在新坐标系中的方程为

$$\widetilde{\mathbf{x}}'\widetilde{A}\widetilde{\mathbf{x}}+2\widetilde{\beta}'\widetilde{\mathbf{x}}+\widetilde{c}=0,$$

其中

$$\widetilde{A}=Q'AQ,\quad \widetilde{\beta}=Q'(Ab_0+\beta),\quad \widetilde{c}=b_0'Ab_0+2\beta'b_0+c.$$

由第一个关系式可以看出, $\widetilde{A}$ 与 A 是相似的, 所以它们有相同的迹和行列式.

定义

对于二次曲线 $\mathbf{x}'A\mathbf{x} + 2\beta'\mathbf{x} + c = 0$, 分别将二次项部分的迹 $\mathrm{tr}(A)$ 和行列式 $\det(A)$ 记作 $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$. 它们是方程 (在直角坐标变换下) 的不变量.

与前面的列表对照, 容易发现

- 当 $\mathbf{I}_2 > 0$ 时, 曲线是椭圆型的;
- 当 $\mathbf{I}_2 < 0$ 时, 曲线是双曲型的;
- 当 $\mathbf{I}_2 = 0$ 时, 曲线是抛物型的.

为了继续探索其他的不变量, 我们把 $\mathbf{x}'A\mathbf{x} + 2\beta'\mathbf{x} + c = 0$ 改写为 $X'\mathbb{A}\,X = 0$, 其中

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} A & \beta \\ \beta' & c \end{bmatrix}.$$

称 $\mathbb{A}$ 为该二次曲线的矩阵.

若记 $\widetilde{X} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{x}} \\ 1 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} Q & b_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则坐标变换 $\mathbf{x} = Q\widetilde{\mathbf{x}} + b_0$ 也可写为

$$X = T\widetilde{X}.$$

因此, 在新坐标系中, 二次曲线的方程可写为 $\widetilde{X}'\widetilde{\mathbb{A}}\,\widetilde{X}=0$, 其中 $\widetilde{\mathbb{A}}=T'\mathbb{A}\,T$.
由于 $\det(T)=1$, 所以 $\det(\mathbb{A})=\det(\widetilde{\mathbb{A}})$. 也就是说, $\mathbb{A}$ 的行列式也是二次曲线方程的一个不变量, 我们把它记作 $\mathbf{I}_3$.
与前面的列表对照, 容易发现

- 当 $\mathbf{I}_3\neq 0$ 时, 二次曲线是非退化的;
- 当 $\mathbf{I}_3=0$ 时, 二次曲线是退化的.

下面看一个简单的例子.

例

判断曲线 $x^2+6xy+2y^2-4x-2y-1=0$ 的类型.

解答

该二次曲线二次项部分的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$, 一次项部分的矩阵为 $\beta=\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix}$, 常数项 $c=-1$. 因此 $\mathbf{I}_2=-7$, $\mathbf{I}_3=c\mathbf{I}_2-\beta'A^*\beta=10$.

由 $\mathbf{I}_3\neq 0$ 可知该曲线非退化. 由 $\mathbf{I}_2<0$ 可知该曲线是双曲型的. 因此它是双曲线.

对于一般的二次曲线 Γ,

- 当 $\mathbf{I}_3 \neq 0$ 时, Γ 是非退化的. 进一步, 如果 $\mathbf{I}_2 < 0$, 则 Γ 为双曲线; 如果 $\mathbf{I}_2 = 0$, 则 Γ 为抛物线. 而当 $\mathbf{I}_2 > 0$ 时, Γ 到底是椭圆还是虚椭圆呢? 这时 $\mathbf{I}_1$ 可以派上用场了: 若 $\mathbf{I}_1\mathbf{I}_3 < 0$, 则 Γ 是椭圆; 若 $\mathbf{I}_1\mathbf{I}_3 > 0$, 则 Γ 是虚椭圆.
- 当 $\mathbf{I}_3 = 0$ 时, Γ 是退化的. 进一步, 如果 $\mathbf{I}_2 > 0$, 则 Γ 是相交虚直线; 如果 $\mathbf{I}_2 < 0$, 则 Γ 是相交直线. 而当 $\mathbf{I}_2 = 0$ 时, Γ 到底是平行直线, 虚平行直线, 还是重合直线呢? 事实上, $\mathbf{I}_2 = 0$ 表明方程的二次部分可以配成完全平方式, $\mathbf{I}_3 = 0$ 表明一次项也可配进去. 我们只需要完成配方就可回答了.

例

判断曲线 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x + 8y - 1 = 0$ 的类型.

解答

曲线的方程可以配方为 $(x + 2y + 2)^2 - 5 = 0$, 可见它是两条平行直线.

对于 $\mathbf{I}_2=\mathbf{I}_3=0$ 这种情形, 如果继续从不变量的角度来考虑, 也可以利用矩阵 $\mathbb{A}$ 的正惯性指数和负惯性指数来进行判断. 为了方便地获得这些信息, 我们再引进一个量.

对于三阶实对称矩阵 $\mathbb{A}$, 当它的行列式 $\mathbf{I}_3=0$ 时, 存在正交矩阵 U 使得 $U'\mathbb{A}U=\mathrm{diag}(t_1,t_2,0)$. 两端取伴随矩阵可得 $U^*\mathbb{A}^*U'^*=\mathrm{diag}(0,0,t_1t_2)$. 再取迹就得到

$$\mathrm{tr}(\mathbb{A}^*)=t_1t_2.$$

定义

令 $K_1=\mathrm{tr}(\mathbb{A}^*)$, 称 K_1 为二次曲线的半不变量 (它仅在 $\mathbf{I}_3=0$ 时起作用).

由于 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 与 $\mathbb{A}$ 是合同的, 它们有相同的正惯性指数和负惯性指数, 因此它们的半不变量 K_1 的符号相同.

容易看出, 当 $\mathbf{I}_2=\mathbf{I}_3=0$ 时,

- 若 $K_1>0$, 则 Γ 为虚平行直线;
- 若 $K_1<0$, 则 Γ 为平行直线;
- 若 $K_1=0$, 则 Γ 为重合直线.

例

判断曲线 $x^2+4xy+4y^2+4x+8y-1=0$ 的类型.

解答

该二次曲线的矩阵为 $\mathbb{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&-1\end{bmatrix}$, 可见 $\mathbf{I}_2=\mathbf{I}_3=0$. 注意

$$K_1=\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4&4\\4&-1\end{vmatrix}=-25<0,$$

所以该曲线是一对平行直线.

至此, 我们利用不变量 $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$, K_1 完整回答了平面二次曲线的分类问题. 需要指出的是, 虽然我们是针对直角坐标变换来讨论的, 但分类结果其实对仿射坐标变换也成立. 这是因为, 我们只用到了 $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$, K_1 的符号, 而不需要用到它们的具体数值. 当过渡矩阵 Q 不是正交矩阵时, 它们的符号仍是保持不变的.

对于空间二次曲面, 原则上我们也可找到一组不变量来判断它的类型, 但这时不变量的计算不见得比坐标变换更简单, 这里就不介绍了.

圆锥曲线的几何特征

非退化二次曲线也称为圆锥曲线，主要包括 (虚、实) 椭圆，双曲线和抛物线．其中椭圆和双曲线都有对称中心，称为中心型曲线或有心圆锥曲线；而抛物线没有对称中心，称为无心圆锥曲线．圆锥曲线的中心、顶点、对称轴和渐近线等称为它的几何特征．

设圆锥曲线 Γ(在自然标架下) 的方程为 $\mathbf{x}'A\mathbf{x} + 2\beta'\mathbf{x} + c = 0$.
当 $\mathbf{I}_2 = \det(A) \neq 0$ 时，Γ 是中心型曲线．经适当的坐标变换 $\mathbf{x} = Q\widetilde{\mathbf{x}} + b_0$，可将 Γ 的方程变为

$$\lambda_1\widetilde{x}^2 + \lambda_2\widetilde{y}^2 + \widetilde{c} = 0.$$

从中可以看到

- 中心的坐标为 $b_0 = -A^{-1}\beta = -\frac{1}{\mathbf{I}_2}A^*\beta$.
- λ_1 和 λ_2 是 A 的特征值，因此

  $$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathbf{I}_1, \quad \lambda_1\lambda_2 = \mathbf{I}_2.$$

  此外，$\widetilde{c}\lambda_1\lambda_2 = \mathbf{I}_3$，所以 $\widetilde{c} = \mathbf{I}_3/\mathbf{I}_2$.
- 矩阵 Q 的两个列向量分别是矩阵 A 的属于特征值 λ_1 和 λ_2 的特征向量，它们分别是两条对称轴的方向向量．

例

证明 $5x^2+6xy+5y^2-4x-12y=0$ 是椭圆, 并求出它的长轴、短轴和焦距.

解答

由该曲线的矩阵容易求得 $\mathbf{I}_1=10$, $\mathbf{I}_2=16$, $\mathbf{I}_3=-128$. 由于 $\mathbf{I}_2>0$, $\mathbf{I}_1\mathbf{I}_3<0$, 所以它是椭圆. 进一步, 由 $\lambda_1+\lambda_2=10$, $\lambda_1\lambda_2=16$ 可知两个特征值分别为 2 和 8. 而 $\widetilde{c}=\mathbf{I}_3/\mathbf{I}_2=-8$, 表明经坐标变换后它的方程为 $2\widetilde{x}^2+8\widetilde{y}^2-8=0$. 因此, 它的长轴和短轴的长度分别为 4 和 2, 焦距为 $2\sqrt{3}$.

在这个例子中, 如果继续算出中心和对称轴的方向, 则不难画出椭圆的草图.

思考题

- (***) 设 Γ 是有心圆锥曲线, 且 A 的两个互相正交的特征向量分别为 ξ_1, ξ_2. 证明: Γ 的两条对称轴分别是

$$\xi_1'(A\mathbf{x}+\beta)=0, \quad \xi_2'(A\mathbf{x}+\beta)=0.$$

- (**) 设 Γ 是有心圆锥曲线, 且 A 的两个特征值分别为 λ_1, λ_2. 证明: Γ 的两条对称轴分别经过坐标为 $-\frac{1}{\lambda_1}\beta$ 和 $-\frac{1}{\lambda_2}\beta$ 的点.

双曲线的渐近线

现在设 Γ 是双曲线. 方程 $\mathbf{x}'A\mathbf{x}+2\beta'\mathbf{x}+c=0$ 经坐标变换后成为

$$\lambda_1\widetilde{x}^2+\lambda_2\widetilde{y}^2+\widetilde{c}=0,\quad \widetilde{c}=b_0'Ab_0+2\beta'b_0+c.$$

可见, 如果把 Γ 方程中的常数项 c 修改为 $c-\widetilde{c}$, 则所得曲线在新坐标系中方程的常数项为零. 容易看出, 它恰好是双曲线的渐近线.

例

证明 $x^2+xy-x-2y-1=0$ 是双曲线, 并求出它的渐近线.

解答

由曲线的方程可以算得 $\mathbf{I}_2=-1/4$, $\mathbf{I}_3=-1/4$. 因此它是双曲线. 只要将方程的常数项减去 $\widetilde{c}=\mathbf{I}_3/\mathbf{I}_2=1$, 就得到渐近线的方程 $x^2+xy-x-2y-2=0$.

思考题

(***) 若双曲线 Γ 的一条渐近线平行于向量 $\mathbf{v}$, 证明 $\mathbf{v}'A\mathbf{v}=0$, 这里 A 是 Γ 的方程中二次部分的矩阵.

抛物线的对称轴

当 Γ 是抛物线时, A 的行列式 $\mathbf{I}_2=0$, 且 $A\neq 0$, 因此 A 的秩为 1, 它的两列成比例. 我们取 A 中的非零列向量 η, 则 η 是 A 的一个特征向量 (属于非零特征值), 这也就是与 Γ 的对称轴垂直的方向.
平行于 η 方向的弦的中点都在 Γ 的对称轴上. 利用这一点不难求出 Γ 的对称轴方程为

$$\eta'(A\mathbf{x}+\beta)=0.$$

回忆一下, 经坐标变换 $\mathbf{x}=Q\widetilde{\mathbf{x}}+b_0$, 我们可将 Γ 的方程写为

$$\lambda_1\widetilde{x}^2+2d\widetilde{y}=0.$$

其中 $\lambda_1=\mathbf{I}_1$ 为 A 的非零特征值, 而 $-d^2\lambda_1=\mathbf{I}_3$, 可知 $d=\sqrt{-\mathbf{I}_3/\mathbf{I}_1}$, 抛物线的焦点到准线的距离为 $d/|\mathbf{I}_1|$.

思考题

(**) 证明 $x^2+4xy+4y^2-10x-10y+1=0$ 是抛物线, 并求出它的顶点和对称轴.