定义 1

设函数$y = f(x)$在点x_0的某邻域可导，如果导函数$f'(x)$在点x_0可导，则称函数$y = f(x)$在点x_0两次可导，并把导函数的导数称为二阶导数，记为$f''(x_0)$. 如果$f''(x)$在区间I处处有定义，则称之为$f(x)$的二阶导函数(简称二阶导数)，就记为$f''(x)$. 有时也用y'', $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$或$\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$等记号表示二阶导数.

类似地，可以定义函数$y = f(x)$的三阶，四阶以至n阶导数. 三阶导数记为$f'''(x)$，四阶导数记为$f^{(4)}(x)$，n阶导数记为$f^{(n)}(x)$. 当然也可以分别记为y''', $y^{(4)}$, $y^{(n)}$或$\dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$, $\dfrac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}$, $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$. 规定$f^{(0)}(x) = f(x)$, $y^{(0)} = y$.

由定义可见，函数$f(x)$在点x_0两次可导意味着$f(x)$在x_0的某个邻域内可导且存在极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在点$x_0 \in (a, b)$处两次可导且$f'(x_0) \neq 0$, 则存在$\delta > 0$, 使得对任意$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f'(x)$都与$f'(x_0)$同号.

(A) 成立

(B) 不成立

计算高阶导数的例题

一种计算n阶导数的方法是：先计算$y', y'', y''', y^{(4)}$等等，直到可以猜测出$y^{(n)}$，然后用数学归纳法证明结论.

例 1

设$n \in \mathbb{N}^*$, 求函数$y = x^n$的k阶导数.

例 2

求$y = \dfrac{1}{x}$的n阶导数.

由此可知，对$y = \ln x$，有$y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

类似可得：$\left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$, $\left(\dfrac{1}{a-x}\right)^{(n)} = \dfrac{n!}{(a-x)^{n+1}}$.

例 3

求$y = \sin x$和$y = \cos x$的n阶导数.

例 4

问函数

$$f(x) = \begin{cases} x^5 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点0最高有几阶导数？说明理由.

例3中，改写$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，从而得$(\sin x)'' = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$，进而发现$(\sin x)^{(n)}$的一般规律. 这种做法对计算某些函数的$n$阶导数有启发.

例如，$y = e^x \sin x$，则$y' = e^x(\sin x + \cos x) = e^x \cdot \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，从而$y'' = \sqrt{2}e^x \cdot \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)$，进而不难得到$y^{(n)}$.

再如，$y = \arctan x$，则$y' = \dfrac{1}{x^2+1} = \cos^2 y = \cos y \sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$，从而$y'' = \cos^2 y \sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$，$y''' = 2\cos^3 y \sin 3\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$，$y^{(4)} = 6\cos^4 y \sin 4\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$，进而不难得到$y^{(n)}$.

判断下面的命题是否成立.

设$f(x)$是$(-\delta,\delta)$上的连续函数，若存在实数a, b, c, 使得$f(x)=ax^2+bx+c+o(x^2)$ $(x\to 0)$, 则$f(x)$在0点处两次可导.

(A) 成立

(B) 不成立

定理 1

设函数$u(x)$和$v(x)$都n次可导, 则下列三个公式成立:

(i) $[Cu(x)]^{(n)} = Cu^{(n)}(x)$, 其中$C$为常数;

(ii) $[u(x) \pm v(x)]^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x)$;

(iii) 莱布尼茨(Leibniz)公式

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

例 5

设$y = x^2 \sin x$, 求$y^{(10)}$.

例 6

求函数$f(x) = \arctan x$在$x = 0$处的各阶导数的值.

$$\left(\frac{x^{2022}}{x-1}\right)^{(2022)} = \left(\frac{x^{2022}-1}{x-1}\right)^{(2022)} + \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(2022)} = \frac{2022!}{(x-1)^{2023}},$$

上面的计算中，$\left(\frac{x^{2022}-1}{x-1}\right)^{(2022)} = 0$是由$\frac{x^{2022}-1}{x-1} = \sum\limits_{k=0}^{2021} x^k$得到的.

$\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(n)}$可以用莱布尼茨公式来计算，而用

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(n)} &= \left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right]\right)^{(n)} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}\right]\end{aligned}$$

更为简便.

The Curious History of Faà di Bruno's Formula

Warren P. Johnson

1. WHAT IS THE *m*th DERIVATIVE OF A COMPOSITE FUNCTION? By far the best known answer is

Faà di Bruno's Formula. *If g and f are functions with a sufficient number of derivatives, then*

$$\frac{d^m}{dt^m} g(f(t)) = \sum \frac{m!}{b_1!\, b_2! \cdots b_m!} g^{(k)}(f(t)) \left(\frac{f'(t)}{1!}\right)^{b_1} \left(\frac{f''(t)}{2!}\right)^{b_2} \cdots \left(\frac{f^{(m)}(t)}{m!}\right)^{b_m}, \qquad (1.1)$$

where the sum is over all different solutions in nonnegative integers $b_1, \ldots, b_m$ of $b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m = m$, and $k := b_1 + \cdots + b_m$.

判断下面的命题是否成立.

设函数$y = f(x)$在(a, b)严格单调，在点$x_0 \in (a, b)$处两次可导且$f'(x_0) \neq 0$, $x = \varphi(y)$为$y = f(x)$的反函数, 则$x = \varphi(y)$在点$y_0 = f(x_0)$处两次可导.

(A) 成立

(B) 不成立

例 7

求由方程$x^2+xy+y^2=1$所确定的隐函数$y=y(x)$的二阶导数.

本例中求二阶导数时，是对$y'=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$求导, 也可以对$2x+y+xy'+2yy'=0$求导，再整理化简. 类似地, 还可以求隐函数的更高阶的导数.

由4.2节知, 对参数方程

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad t \in I$$

给出的函数$y = y(x)$, 在$u(t)$和$v(t)$都可导, $x = u(t)$有反函数且$u'(t) \neq 0$的条件下, 其导数为

$$y'(x) = \frac{v'(t)}{u'(t)}.$$

于是参数方程

$$x = u(t), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v'(t)}{u'(t)}$$

又可确定$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$是$x$的函数, 从而当$u(t)$和$v(t)$都两次可导时, 就有

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v'(t)}{u'(t)}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{v''(t)u'(t) - v'(t)u''(t)}{[u'(t)]^3}.$$

类似地可以求出由参数方程给出的函数的更高阶的导数.

例 8

求由参数方程

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

给出的函数$y = y(x)$的二阶导数.