$\Longrightarrow AM=MNBN_{右}^{-1}$.

而M为列满秩阵，由引理可得

$S=NBN_{右}^{-1}$的特征多项式$f_S(\lambda)$整除A的特征多项式$f_A(\lambda)$.

在引理中，$AP=PB$. P为列满秩阵，从而存在左逆$P_{左}^{-1}$，有$P_{左}^{-1}AP=B$，$f_B(\lambda)$整除$f_A(\lambda)$. 在$S=NBN_{右}^{-1}$中.

$N_{右}^{-1}$为列满秩阵，N是$N_{右}^{-1}$的左逆.

因此由上可得：$f_S(\lambda)$整除$f_B(\lambda)$.

又前面已证$f_S(\lambda)$整除$f_A(\lambda)$.

所以$f_S(\lambda)$是$f_A(\lambda)$与$f_B(\lambda)$的一个公因式. 并且次数为r. 因此证明了$f_A(\lambda)$与$f_B(\lambda)$有一个至少r次公因式.

注意：公因式的次数可以高于r. 例 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$. $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

有$AP=PB$. $r(P)=1$. 但$f_A(\lambda)=f_B(\lambda)$. (二次公因式).

多项式的值与多项式不可约

梅　汉　飞

(常德师专数学系)

在判定整系数多项式是否在有理数域Q上不可约时，一般用系数的性质来判定. 实际上多项式的值与不可约性有着密切的联系. Brow 和 Graha 证明了[1]：设$f(x)$是n次整系数多项式，$S(f)=\{\cdots,|f(-2)|,|f(-1)|,|f(0)|,|f(1)|,|f(2)|,\cdots\}$，$N$表示$S(f)$中1的个数，$N_p$表示$S(f)$中素数的个数，如果$2N+N_p-4>n$，则，$f(x)$在$Q$上不可约. 我们将推广这一定理，为此，约定本文出现的多项式均为整系数多项式，数均为整数，Q为有理数域，N与N_p的意义同 Brow、Graha 定理，$\partial^{\circ}V(x)$表示多项式$V(x)$的次数.

首先证明

引理　$V(x)$是多项式，且$V(x_0)=1$，$V(x_1)=-1$，则. ①最多还存在另外两个不相等的整数满足$|V(x)|=1$. ②当$\partial^{\circ}(V(x))=1$时，不存在其它整数满足$|V(x)|=1$

证明　① 假设另外还有x_2、x_3、x_4(互不相等)满足$|V(x)|=1$，则在x_2、x_3、x_4中必有两个满足$V(x)=1$或必有两个满足$V(x)=-1$. 不妨设$V(x_2)=V(x_3)=1$，则

$V(x)-1=(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)V_1(x)$，$V_1(x)$是整系数多项式.

如果$V(x_4)=-1$，则

$$(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)V_1(x_1)=-2 \quad (1)$$

$$(x_4-x_0)(x_4-x_2)(x_4-x_3)V_1(x_4)=-2 \quad (2)$$

则在(1)中$|V_1(x_1)|=1$，不然的话就有$|x_1-x_0|=|x_1-x_2|=|x_1-x_3|=1$，于是$(x_1-x_0)$、$(x_1-x_2)$、$(x_1-x_3)$中有两个相等，就有$x_0$、$x_2$、$x_3$中有两个相等，这与$x_0$、$x_2$、$x_3$互不相等矛盾. 同理$|V_1(x_4)|=1$. 于是$|x_1-x_0|$、$|x_1-x_2|$、$|x_1-x_3|$中有两个为1，一个为2. 不妨设$|x_1-x_2|=2$、$x_1-x_0=1$，那么，因$x_0\neq x_3$有$x_1-x_3=-1$. 此时$(a)$如果$|x_4-x_0|=2$，因$x_4\neq x_1$，有$x_4-x_3=1$，进而$x_4-x_2=-1$式$(b)$如果$|x_4-x_2|=2$，因$x_4\neq x_1$有$x_4-x_3=1$、$x_4-x_0=-1$或$(c)$ $|x_4-x_3|=2$、$x_4-x_0=-1$、$x_4-x_2=1$. 若(a)成立由$x_4-x_2=-1$和$|x_1-x_2|=2$有$|x_1-x_4|=1$或3，而由$x_1-x_3=-1$和$x_4-x_3=1$得$|x_4-x_2|=2$，矛盾. 同理，(b)和(c)均不成立. 所以$V(x_4)=1$，那么

$$V(x)=(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdot(x-x_4)V_2(x)+1$$

其中$V_2(x)$是整系数多项式. 于是$(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)=-2$，这样有$(x_1-x_0)$、$(x_1-x_3)$、$(x_1-x_4)$、$(x_1-x_2)$中必有两个同时为1或两个同时为$-1$，即$x_0$、$x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$中必有两个相等，矛盾，①得证. ②如果有3个不相等的数满足$|V(x)|=1$，则$V(x)-1$或$V(x)+1$有两个根，与$\partial^{\circ}(V(x))=1$矛盾.

定理　设$f(x)$是n次多项式，则

(i) 当$2N+N_p>n+3$，且$f(x)$不是两个

二次多项式积时，$f(x)$在Q上不可约．

(ii) 当 $2N+N_p>n+2$，$n\geqslant 6$ 时，$f(x)$在Q上不可约．

(iii) 当 $2N+N_p>n+1, n\geqslant 7$ 时，$f(x)$无二次因式时，$f(x)$在Q上不可约．

(iv) 当 $2N+N_p>n$，$n\geqslant 8$，$f(x)$无一次、二次、三次因式时，$f(x)$在Q上不可约．

证明 假设 $f(x)=u(x)V(x)$，$\partial^\circ(f(x))>\partial^\circ(u(x))$，$\partial^\circ(f(x))>\partial^\circ(V(x))$．若$N$或$N_p$是无限的，那么满足$|u(x)|=1$或满足$|V(x)|=1$的$x$个数为无限多个．就会出现$u(x)-1$或$u(x)+1$或$V(x)-1$或$V(x)+1$有无限多个根，不可能．以下的证明均设$N$、$N_p$是有限数．

(i) 设$u(x)$有$N+r$个a_i满足$|u(a_i)|=1$ $(i=1,\cdots,N+r)$，则$V(x)$有$N+N_p-r$个b_j满足$|V(x)|=1(j=1,\cdots,N+N_p-r)$．

1°如果$u(a_i)$同号、$V(b_j)$同号，则$\partial^\circ(u(x))\geqslant N+r$，$\partial^\circ(V(x))\geqslant N+N_p-r$，$\partial^\circ(f(x))\geqslant(N+r)+(N+N_p-r)>n+3$，矛盾．

2°如果$u(a_i)$异号而$V(b_j)$同号，由引理得，$N+r\leqslant 4$，而$\partial^\circ(V(x))\geqslant N+N_p-r$，由$N+N_p-r=2N+N_p-(N+r)$有$\partial^\circ(V(x))>n+3-4$，得出$\partial^\circ(V(x))=n$，矛盾．同理可证$u(a_i)$同号而$V(b_j)$异号的情况．

3°如果$u(a_i)$异号且$V(b_j)$异号，则$N+r\leqslant 4$，$N+N_p-r\leqslant 4$，于是$8>n+3$，$n\leqslant 4$．此时必有$\partial^\circ(u(x))=2$，$\partial^\circ(V(x))=2$，不然的话，若$\partial^\circ(u(x))=3$，则$\partial^\circ(V(x))$只能是1，由引理得$N+N_p-r\leqslant 2$，这时$6\geqslant 2N+N_p>n+3, n<3$，这与$\partial^\circ(V(x))+\partial^\circ(u(x))=4$矛盾，若$\partial^\circ(u(x))=1$，则$N+r\leqslant 2$，$6\geqslant 2N+N_p>n+3, n<3$，于是$\partial^\circ(V(x))=1$，推出$N+N_p-r\leqslant 2$，这样有$4\geqslant 2N+N_p>n+3$，$n<1$，这不可能，所以$\partial^\circ(u(x))=2$，同理$\partial^\circ(V(x))=2$．而$\partial^\circ(u(x))=\partial^\circ(V(x))=2$与(i)中条件矛盾．

(ii) 和(i)的证明类似，分和(i)中一样的1°、2°、3°，情形1°同理可证．情形2°中，$N+r\leqslant 4$，则$\partial^\circ(V(x))\geqslant N+N_p-r$，而$N+N_p-r=2N+N_p-(N+r)$，所以$\partial^\circ(V(x))>n-2$，得$\partial^\circ(V(x))=n-1$，$\partial^\circ(u(x))=1$，由此得$N+r\leqslant 2$，再次$\partial^\circ V((x))\geqslant N+N_p-r>n+2-2>n$，这与$\partial^\circ(f(x))>\partial^\circ(V(x))$矛盾．情形3°，由$N+r\leqslant 4$，$N+N_p-r\leqslant 4$有$2N+N_p\leqslant 8$，$n<6$，与$n\geqslant 6$矛盾．

(iii) 同理，情形1°略．情形2°中，$N+r\leqslant 4$，$\partial^\circ(V(x))\geqslant N+N_p-r>n+1-4$，所以$\partial^\circ(u(x))\leqslant 2$，因$f(x)$无二次因式，所以$\partial^\circ(u(x))=1$，$N+r\leqslant 2$，又用$\partial^\circ(V(x))\geqslant N+N_p-r>n+1-2$得$\partial^\circ(V(x))=n$，不可能．情形3°与(ii)的情形3°完全类似的证明．

用同样的方法可证(iv)．

利用这一定理可以判定一些多项式不可约．

推论 (a) $f(x)=x^3+x+1$在Q上不可约

(b) $f(x)=[(x-a_1)\cdots(x-a_m)]^2\cdot$
$\cdot(x-a_{m+1})(x-a_{m+r})\pm 1$

当$r>3, m>0$时，$f(x)$在Q上不可约．其中$a_i(i=1,\cdots,m+r)$互不相等．

(c) $f(x)=g(x)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)\pm 1$，$a_i(i=1,\ \cdots,\ m)$互不相等；$\partial^\circ(g(x))<m-3$，$\partial^\circ(g(x))+m\neq 4$．则$f(x)$在$Q$上不可约．其中$g(x)$为多项式．

证明 (a) 因$|f(1)|=3$，$|f(-1)|=1$，$|f(0)|=1$，$|f(2)|=11$，$|f(3)|=31$，所以$2N+N_p\geqslant 2\times 2+3>3+3$，而$\partial^\circ(f(x))\neq 4$，用定理中(i)得，$f(x)$在$Q$上不可约．(b)和(c)均用定理中(i)得出．

参考文献

1 柯召、孙琦．数论讲义，第一版．1987，5．