

广义函数与数学物理方程习题

第二章广义函数

1. 设 $f(x) \in C^k(\Omega)$, 则对 Ω 内的任意紧子集 K , 必存在一族 C_0^∞ 函数列使得在 K 上函数列以及其直到 k 阶的微分一致收敛于 $f(x)$ 和其相应的微分
2. 构造截断函数 $f(x)$, 并证明 $|\partial^\alpha f(x)| \leq M_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}$
3. 证明 $L_{loc}(\Omega) \subset D'(\Omega)$
4. 设 $f(x) \in D'(\Omega)$, $f|_\Omega = 0$ 则对任意开集 $U \subset \Omega$ 有 $f|_U = 0$; 反之若 Ω 有一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 且对所有 α 成立 $f|_{U_\alpha} = 0$ 则有 $f|_\Omega = 0$.
5. 证明 $H'(x) = \delta(x)$
6. 设 C^∞ 系数线性微分算子 $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$, $u(x) \in D'(\Omega)$ 定义 $\langle Pu, \varphi \rangle = \langle u, {}^t P \varphi \rangle$, $\varphi \in C_0^\infty$, 请给出 ${}^t P$ 的形式
7. 设 $P(x, D)$ 是一个 C^∞ 系数的线性偏微分算子. 证明:
(1) $P(x, \xi + \eta) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \xi^\alpha P^\alpha(x, \eta)$;
(2) 利用莱布尼茨公式 $\partial^\alpha = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta! \gamma!} \partial^\beta u \cdot \partial^\gamma v$, 证明:

$$P(x, \partial)(uv) = \sum_\alpha \partial^\beta u \cdot R_\alpha(x, \partial)v,$$

其中 $R_\alpha(x, \partial)$ 一个 C^∞ 系数的线性偏微分算子;

- (3) 证明: $P(x, \partial)e^{x \cdot \eta} = P(x, \eta)e^{x \cdot \eta}$, 这里 $x \cdot \eta = x_1 \eta_1 + \cdots + x_n \eta_n$;
- (4) 在(2)中令 $u = e^{x \cdot \xi}$, $v = e^{x \cdot \eta}$, 在利用(1), (3)证明(2)中的

$$R_\alpha(x, \partial) = \frac{1}{\alpha!} \xi^\alpha P^\alpha(x, \eta).$$

此题中得到的

$$P(x, \partial)(uv) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \xi^\alpha \partial^\alpha u P^\alpha(x, \eta)$$

是一个重要的公式, 称为推广的莱布尼茨公式. 又以后对任一函数 $F(x, \xi)$ 恒记 $F_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) = \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha F(x, \xi)$, 即下标表示对 x 求导, 上标表示对 ξ 求导.

8. 设有 $C^\infty(R)$ 函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足

- (i) 对任意 $M > 0$, 当 $|a| < M, |b| < M$ 时有 $|\int_a^b f_n(x) dx| \leq c$
 (ii) 固定 a, b 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & a \cdot b > 0 \\ 1 & a < 0 < b \end{cases}$$

则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x)$.

9. 证明下列广义极限成立

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x), f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 x^2 + 1}$

(2) $\lim_{t \rightarrow 0} f_t(x) = \delta(x), f_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t} \quad t > 0$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x), f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{n}$

(4) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi_\varepsilon(x) = \delta(x)$, 其中 $\Psi_\varepsilon(x)$ 为磨光核.

10. 设 $a(x) \in C^\infty(\Omega), u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 证明

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(au) = a \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial a}{\partial x_i} u.$$

11. 若广义函数 u 适合 $\check{u} = u, (\check{u} = -u)$, 则称 u 为偶(奇)广义函数. 证明:

(1). $\delta(x)$ 与常值函数 c 皆为偶广义函数.

(2). 偶广义函数之微商是奇广义函数.

(3). 任一广义函数 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 皆可唯一地分解为一个偶广义函数与一个奇广义函数之和如下:

$$u(x) = \frac{1}{2}(u(x) + \check{u}(x)) + \frac{1}{2}(u(x) - \check{u}(x)).$$

(4). $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 为偶广义函数当且仅当对任一奇的 $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$

均有 $\langle u, \varphi \rangle = 0$.

12. 证明: 若 $f(x) = H(x) \cos x, g(x) = H(x) \sin x$, 则

$$f'(x) = \delta(x) - g(x), \quad g'(x) = f(x),$$

因此 g 与 f 分别适合微分方程

$$u'' + u = \delta, \quad u'' + u = \delta'.$$

13. 单位分解的定义及证明

第三章卷积

1. 证明 $\delta * f = f$,

当(1) $f \in C(R^n)$, (2) $f \in D'(R^n)$

2.证明

(1)设 $f \in D'(R^n)$, $g \in D(R^n)$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, 则有 $\partial^\alpha(f * g) = \partial^{\alpha_1}f * \partial^{\alpha_2}g$

(2)设 $f \in D'(R^n)$, $g \in E'(R^n)$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, 则有 $\partial^\alpha(f * g) = \partial^{\alpha_1}f * \partial^{\alpha_2}g$

3.设 $f(x) \in D'(R^n)$, $\Psi_\epsilon(x)$ 为磨光核, 则 $f * \Psi_\epsilon = f_\epsilon(x) \in C^\infty$ 且有 $f_\epsilon(x) \rightarrow f(x)$ 在 $D'(R^n)$ 中成立

4.设 $f, g, h \in D'(R^n)$, 其中至少有两个广义函数具有紧支集, 证明 $(f * g) * h = f * (g * h)$

5.设 $f \in D'(R^n)$, $g \in E'(R^n)$, 证明 $\text{supp} f * g \subset \text{supp} f + \text{supp} g$

6.设 $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, g 是一个 m 次多项式, 证明 $f * g$ 也是一个 m 次多项式

第四章 Fourier 变换

1.证明:

(1)设 $f(x) \in S(R^n)$, 则 $(\widehat{D^\alpha f(x)})(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$, $(\widehat{x^\alpha f(x)})(\xi) = (-D)^\alpha \hat{f}(\xi)$

(2)设 $f(x) \in S'(R^n)$, 则 $(\widehat{D^\alpha f(x)})(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$, $(\widehat{x^\alpha f(x)})(\xi) = (-D)^\alpha \hat{f}(\xi)$

2.设 $f(x), g(x) \in S(R^n)$ 证明

(1) $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

(2) $\widehat{f \cdot g} = (2\pi)^{-n}(\hat{f} * \hat{g})$

3.设 $P(x, D)$ 是一个 C^∞ 系数的线性偏微分算子 $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$, 其算子象征为 $\sigma(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$, 证明 $P(x, D) = F^{-1} \sigma(x, \xi) F$, 其中 F 为Fourier变换。

4.证明 $\delta(x, t)$ 关于 x 部分作Fourier变换 $\langle \delta(x, t), e^{-ix\xi} \rangle = \delta(t)$

5.设 $x \in R$, 证明(1) $\widehat{\delta(x)} = 1$, (2) $\widehat{1} = (2\pi)\delta$

6. 设 $P(\xi), Q(\xi)$ 皆为常系数多项式, 证明以下各命题等价:

(1). $\varphi(x) \in \mathcal{S}$;

(2). 对任意 $P(\xi), Q(\xi)$, $P(x)Q(D)\varphi \in \mathcal{S}$;

(3). 对任意 $P(\xi), Q(\xi)$, $Q(D)[P(x)\varphi(x)] \in \mathcal{S}$.

7. 对于 $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ 证明其傅里叶变换有以下性质:

(1). $F(\varphi)(-\xi) = F(\check{\varphi})(\xi) = (2\pi)^n F^{-1}(\varphi)(\xi)$;

(2). $\tau_h(F(\varphi))(\xi) = \hat{\varphi}(\xi - h) = F(e^{i\langle \cdot, h \rangle} \varphi)(\xi)$;

(3). $\hat{\varphi}(c\xi) = |c|^{-n} F(\varphi(\frac{\cdot}{c}))(\xi)$;

8. 多项式 $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathcal{S}'$, 求它的傅里叶变换.

9. 证明 $L^p(R^n) \subset S'(R^n)$

第五章 一般理论

1.求下列算子的基本解

$$(1)P(D) = \frac{d}{dx}$$

$$(2)P(D) = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$(3)P(D) = \frac{d}{dx} + \alpha, \alpha \in R.$$

第六章Laplace方程

1.证明 $\Delta = \frac{n-1}{r}\partial_r + \partial_r^2$, 其中 $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

2.设开集 $\Omega \subset R^3$ 有界, 边界 $\partial\Omega$ 光滑, $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $Q \in \Omega$ 证明

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} dx$$

3.证明球面平均值公式, 球体平均值公式

4.证明调和函数的极值原理

5.利用极值原理证明以下Dirichlet问题的唯一性和稳定性

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = f$$

6.利用Green函数求解上半平面的Dirichlet问题

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad y > 0$$

$$u|_{y=0} = f(x)$$

7.利用Green函数求解圆 Ω 上的Dirichlet问题

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = f(x)$$

8.设 $\Omega = B_R(Q)$ (以 Q 为心、 R 为半径的开圆域), $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, 证明:

$$(1). u(Q) = \frac{1}{4\pi R^2} \int \int_{\partial B_R(Q)} u(P) dS_p + \frac{1}{4\pi} \int \int_{B_R(Q)} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \Delta u dx.$$

$$(2). \text{若 } \Delta u \geq 0, \text{ 则 } u(\Omega) \leq \frac{1}{4\pi R^2} \int \int_{\partial B_R(Q)} u(P) dS_p.$$

9.证明第一格林公式

$$\int \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS = \int \int \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int \int \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx.$$

这里 u, v 皆假设足够光滑.利用此式证明:

若 u 是诺依曼问题 $\Delta u = 0$ 于 Ω 中, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = f$, 的解, 则问题的一切解必可表示为 $u + C$, C 为常数. 当然所有 $u + C$ 也都是此问题之解.

10.若 Ω 是有界连通开集, $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, 并且 u 在 Ω 上有: $\Delta u \geq 0, u \neq C$ (常数), 则 u 必不可可在 Ω 内部达到其上确界.

11. 设 $G(P, Q)$ 为格林函数, 证明:

(1) $0 < -G(P, Q) < \frac{1}{r(P, Q)}$, 当 $P \neq Q, P, Q \in \Omega$.

(2) $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS_p = 1$.

12. 当 $n = 3$ 时, 求上半空间 $\{(x, y, z); z > 0\}$ 的格林函数. 并给出相应的狄利克雷问题的解.

13. 证明哈纳克不等式: 设 u 在以 Q 为心 R 为半径的圆 B 内非负调和, 而且在 \bar{B} 上连续, 则

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}u(Q) \leq u(P) \leq \frac{R+\rho}{R-\rho}u(Q).$$

$P \in B$ 是 B 内任意点, $\rho = |PQ|$.

14. 证明以下更一般的哈纳克不等式:

(1) 设 $u \geq 0$ 是 Ω 中的调和函数, $B_{4R}(Q) \subset \Omega$, 证明对 $B_R(Q)$ 中任二点 p_1, p_2 有

$$u(P_1) = |B_R|^{-1} \int_{B_R(P_1)} u(x) dx,$$

$$u(P_2) = |B_{3R}|^{-1} \int_{B_{3R}(P_2)} u(x) dx \geq |B_{3R}|^{-1} \int_{B_R(P_1)} u(x) dx.$$

(2) 利用(1)证明

$$\sup_{B_R(Q)} u \leq 3^n \inf_{B_R(Q)} u.$$

(3) 证明一般的哈纳克不等式: 设 $u \geq 0$ 在 Ω 中调和, $K \subset\subset \Omega$ 是 Ω 的连通子集, 必可找到一个只与 n, K, Ω 有关的常数 C 使

$$\sup_K u \leq C \inf_K u.$$

15. 证明 $n = 3$ 时的可去奇点定理.

定理的叙述: 若 $u(Q)$ 在 A 点附近调和, $u(Q) = o(1) \frac{1}{r(A, Q)}$, 则可补充 $u(Q)$ 在 A 之值使得 $u(Q)$ 在 A 点得邻域中调和.

16. 设 P 为常系数线性偏微分算子, 且有基本解 $E(x)$,

满足 $\text{singsupp} E = \{0\}$ 则 P 为亚椭圆的。(Thm 6.3.2)

第七章热传导方程

1. 求解热传导算子的基本解

2. 求解热传导方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t) & t > 0 \\ u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

3. 求解热传导方程的初边值问题.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & t > 0 \\ u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

4. 求解热传导方程的初边值问题.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & t > 0 \\ u(x, t)|_{t=0} = g(x) \\ u(0, t) = \varphi_1(t) \\ u(l, t) = \varphi_2(t) \end{cases}$$

5. 设 $f \in C^3(\mathbf{R}^n)$, 证明在 $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ 中

$$\langle \delta(t, \cdot), f(\cdot) \rangle = f(0)\delta(t).$$

6. Duhamel原理: 设 $U(x, t, \tau)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, & x \in \mathbf{R}, t > \tau (\tau > 0), \\ U|_{t=\tau} = f(x, \tau). \end{cases}$$

令 $u(x, t) = \int_0^t U(x, t, \tau) d\tau$, 证明 $u(x, t)$ 为柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

之解.

7. 用傅里叶方法求解以下初边值问题:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin x. \end{cases}$$

8. 用傅里叶方法求解以下初边值问题:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = x(l-x), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 1, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x/l). \end{cases}$$

9.叙述热传导方程关于抛物边界的极值原理，并由此证明问题解的唯一性和稳定性

第八章波动方程

1.求解波动方程的Cauchy问题,其中 $n = 3$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_3 u = f(x, t) & t > 0 \\ u(x, t)|_{t=0} = g_0(x) \\ u_t(x, t)|_{t=0} = g_1(x) \end{cases}$$

2.求解弦振动方程的Cauchy问题，其中 $n = 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & t > 0 \\ u(x, t)|_{t=0} = g_0(x) \\ u_t(x, t)|_{t=0} = g_1(x) \end{cases}$$

3.用傅里叶方法求解弦振动方程的初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & t > 0 \\ u(x, t)|_{t=0} = g_0(x) \\ u_t(x, t)|_{t=0} = g_1(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

4.用能量积分的方法证明以下波动方程初边值问题解的唯一性和稳定性，其中 $n = 2$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 u = f(x, t) & t > 0, x \in \Omega \\ u(x, t)|_{t=0} = g_0(x) \\ u_t(x, t)|_{t=0} = g_1(x) \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

5.用能量积分的方法证明以下波动方程Cauchy问题解的唯一性，其中 $n = 2$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 u = f(x, t) & t > 0, \\ u(x, t)|_{t=0} = g_0(x) \\ u_t(x, t)|_{t=0} = g_1(x) \end{cases}$$

6.求柯西问题

$$\begin{cases} \square_4 u = f(x, t), & t < 0; \\ u(x, 0) = g_0(x), \\ u_t(x, 0) = g_1(x) \end{cases}$$

的解.

7.(Duhamel原理) 设 $\omega(x, t, \tau)$ 是柯西问题

$$\begin{cases} \square_4 \omega = 0, & t > \tau; \\ \omega(x, \tau, \tau) = 0, \\ \omega_t(x, t, \tau)|_{t=\tau} = f(x, \tau) \end{cases}$$

的解. 证明 $u(x, t) = \int_0^t \omega(x, t, \tau) d\tau$ 是柯西问题

$$\begin{cases} \square_4 u = f(x, t), & t > 0; \\ u(x, t)|_{t=0} = 0, \\ u_t(x, t)|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解. 再证明上述 $u(x, t)$ 可写为推迟势(15), 从而知道推迟势必适合齐次初始条件.

8.证明函数

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2c}, & c^2 t^2 - x^2 \geq 0, t \geq 0. \\ 0, & \text{其他地方} \end{cases}$$

是弦振动方程的基本解($x \in \mathbf{R}^1$). 设 f 充分光滑, 令

$$I(x, t; f) = E(\cdot, t) * f(\cdot),$$

证明:

$$I(x, t; f) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} f(\xi) d\xi.$$

问 $\partial I(x, t; f)$ 是什么? 由此解出弦振动方程的柯西问题.

9.用降维法直接从 $\square_4 u = 0$ 的柯西问题解的公式导出弦振动方程柯西问题解的公式.

10.用波在端点的反射来求解半无解弦振动问题, 其边值条件为 $u(0, t) = 0$, 即求解

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \infty, t > 0; \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$