函数极限的定义

数学分析I

第6讲

October 12, 2022

在数列极限中，自变量只有一种变化状态即$n \to \infty$，而函数极限中的自变量却有六种不同的变化状态，它们是$x \to +\infty$，$x \to -\infty$，$x \to \infty$，$x \to x_0$，$x \to x_0^+$，$x \to x_0^-$. 本节给出函数极限的定义.

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = A$ ($A \in \mathbb{R}$)的统一刻画

对于自变量六种不同的变化状态，$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = A$的定义可以统一陈述如下.

对于任意给定的$\varepsilon > 0$，都存在$x \to \alpha$相应的“空心邻域”U，当$x \in U$时，就有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

- $x \to +\infty$相应的“空心邻域”为$(X, +\infty)$;
- $x \to -\infty$相应的“空心邻域”为$(-\infty, -X)$;
- $x \to \infty$相应的“空心邻域”为$(-\infty, -X) \cup (X, +\infty)$;
- $x \to x_0$相应的“空心邻域”为$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, 即$\overset{\circ}{B}_\delta\,(x_0)$;
- $x \to x_0^+$相应的“空心邻域”为$(x_0, x_0 + \delta)$;
- $x \to x_0^-$相应的“空心邻域”为$(x_0 - \delta, x_0)$.

定义 1

(i) 设函数$f(x)$在$(a,+\infty)$有定义, $A\in\mathbb{R}$. 如果对于任何$\varepsilon>0$, 都存在$X>0$, 当$x>X$时, 就有$|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称$f(x)$当$x\to+\infty$时极限存在, 极限值为A, 记为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$或者$f(x)\to A\ (x\to+\infty)$.

(ii) 设函数$f(x)$在$(-\infty,a)$有定义, $A\in\mathbb{R}$. 如果对于任何$\varepsilon>0$, 都存在$X>0$, 当$x<-X$时, 就有$|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称$f(x)$当$x\to-\infty$时极限存在, 极限值为A, 记为$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$或者$f(x)\to A\ (x\to-\infty)$.

(iii) 设函数$f(x)$在$(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$有定义, $A\in\mathbb{R}$. 如果对于任何$\varepsilon>0$, 都存在$X>0$, 当$|x|>X$时, 就有$|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称$f(x)$当$x\to\infty$时极限存在, 极限值为A, 记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$或者$f(x)\to A\ (x\to\infty)$.

函数在无穷远的极限的一些例子

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} [\ln(x+a) - \ln x] = 0,$$ 其中a是常数.

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0,$$ 其中$a > 1$.

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d} = 1,$$ 其中a, b, c和d是常数.

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x^2) = \frac{\pi}{2}.$$

几点说明

第一, 在定义的(i)中正数X的作用与数列极限中的N类似, 说明x充分大的程度; 所不同的是这里考虑的是比X大的所有实数x, 为一致起见, X取为正实数而非正整数.

第二, 对于任给的$\varepsilon > 0$, 在坐标平面上, $y = A + \varepsilon$与$y = A - \varepsilon$是两条平行于x轴的直线, 它们组成以直线$y = A$为中心线, 宽为2ε的带形区域. 如果将$y = f(x)$看作坐标平面上的曲线, 那么极限$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$的几何解释为: 无论上述带形区域多么窄, 总存在直线$x = X$, 使曲线$y = f(x)$在直线$x = X$的右边部分全部落在这个带形区域内.

第三, 由定义知, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$的充分必要条件为: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$. 也可以说, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$存在的充分必要条件为: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$与$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$都存在且相等.

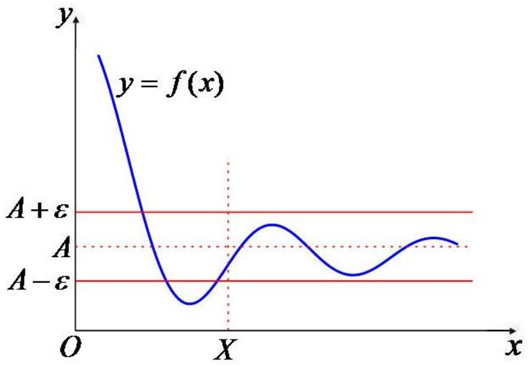


Figure: 2-1

判断题

判断下面的命题是否成立.

设$R(x)$是黎曼函数，则由$R(x)$是偶函数知$\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} R(x)$, 从而$\lim\limits_{x\to\infty} R(x)$存在.

(A) 成立

(B) 不成立

例 1

证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-2}=3.$

类似于用数列极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-1}{n^2-2}=3.$

例 2

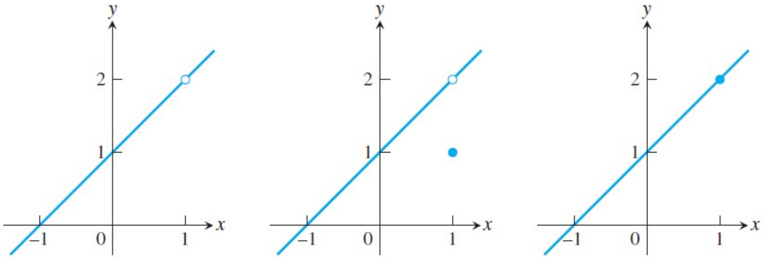
证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\dfrac{1}{2}$.

这里还是应用适当放大$|f(x)-A|$的方法.

例如函数$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, 当x越来越接近2时, 其函数值随之越来越接近4. 注意到该函数在$x=2$无定义, 这表明函数在x_0的极限与它在这点是否有定义没有关系. 所以, 在讨论函数在定点的极限时, 总是假设函数在该点的某个空心邻域中有定义.

定义 2 ($\varepsilon-\delta$定义)

设函数$f(x)$在点x_0的某个空心邻域中有定义, $A\in\mathbb{R}$. 如果对于任何$\varepsilon>0$, 都存在$\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时, 就有$|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称$f(x)$在点x_0极限存在, 极限值为A, 记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$或者$f(x)\longrightarrow A\ (x\to x_0)$.



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(c) $h(x) = x + 1$

（图片取自Thomas' Calculus）

第一, 极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$是刻画$f(x)$在$x$不为$x_0$而无限靠近$x_0$时的变化趋势, 与$f(x)$在$x_0$是否有定义, 或$f(x_0)$是多少没有关系.

第二, 定义中的δ与数列极限中的N相当, 它依赖于ε, 但是并不唯一. 一般地, ε越小, δ也越小.

第三, 从几何意义上讲, $\varepsilon-\delta$定义表明, 在坐标平面上任意划一条以直线$y=A$为中心线, 宽2ε的横带, 必存在一条以直线$x=x_0$为中心线, 宽2δ的竖带, 使竖带内的函数图像全部落在上述横带内, 但是若函数在x_0有定义, 点$(x_0, f(x_0))$可能例外.

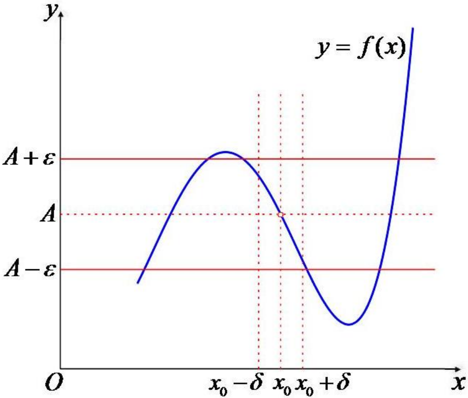


Figure: 2-2

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，如果对任意实数x_0, 都有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, 则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

(A) 成立

(B) 不成立

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域中单调，如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(A) 成立

(B) 不成立

据定义证明函数在x_0以A为极限即是寻找使不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立的充分条件$0<|x-x_0|<\delta$, 类似于证明数列极限找N的过程, 先将$|f(x)-A|$适当放大可以使找δ这一过程更简单. 为便于放大$|f(x)-A|$, 常预先假定x与x_0足够接近, 这即是限定δ的方法.

例 3

证明$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)(2-x)}=2.$

为了便于适当放大$\left|\dfrac{x^2-1}{(x-1)(2-x)}-2\right|=\dfrac{3|x-1|}{|2-x|}$, 预先假定$0<|x-1|<\dfrac{1}{2}$, 这个$x=1$的空心邻域中不包含分母的零点$x=2$.

例 4

证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

不等式的证明

首先证明不等式$|\sin x|<|x|<|\tan x|$, 当$0<|x|<\frac{\pi}{2}$. 因为$|\sin x|, |x|, |\tan x|$都是偶函数, 故只须就$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$的情形给出证明. 图中画出了坐标平面上的单位圆, A为第一象限圆弧上的一点,$\angle AOC=x$, 过点A的切线交x轴于点D. 由图可以看出

$$S_{\Delta AOC}<S_{\text{扇形}OCA}<S_{\Delta AOD}.$$

因为$OA=OC=1$, 所以$S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}\sin x$, $S_{\text{扇形}OCA}=\frac{1}{2}x$, $S_{\Delta AOD}=\frac{1}{2}\tan x$. 故得$\sin x<x<\tan x$, 这表明不等式成立.

图示

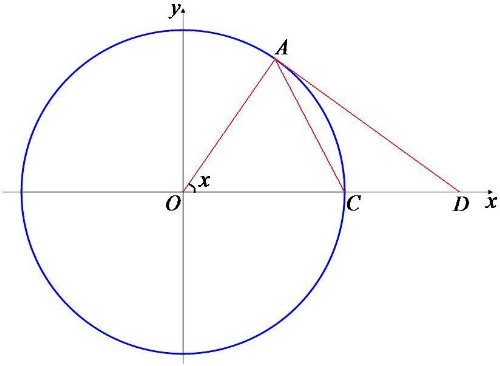


Figure: 2-3

定义 3 ($\varepsilon-\delta$定义)

(i) 设函数$f(x)$在区间(a,x_0)有定义, $A\in\mathbb{R}$. 如果对于任何$\varepsilon>0$, 都存在$\delta>0$, 当$x_0-\delta<x<x_0$时, 有$|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称$f(x)$在点x_0的左极限存在, 左极限值为A, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$, 或者$f(x)\to A\ \ (x\to x_0^-)$, 亦或$A=f(x_0-0)$.

(ii) 设函数$f(x)$在区间(x_0,b)有定义, $A\in\mathbb{R}$. 如果对于任何$\varepsilon>0$, 都存在$\delta>0$, 当$x_0<x<x_0+\delta$时, 有$|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称$f(x)$在点x_0的右极限存在, 右极限值为A, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$, 或者$f(x)\to A\ \ (x\to x_0^+)$, 亦或$A=f(x_0+0)$.

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在点x_0处两个单侧极限都存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, 则存在$\delta > 0$, 使得当$s \in (x_0 - \delta, x_0)$, $t \in (x_0, x_0 + \delta)$时，有$f(s) < f(t)$.

(A) 成立

(B) 不成立

例 5

证明 $\lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0.$

应用实数理论，可以给出指数函数、对数函数的定义，并证明指数函数、对数函数的性质. 因此，在处理极限问题时，我们可以自由地应用指数函数、对数函数的各种性质.

给定点极限与两个单侧极限的关系

定理 1

$f(x)$在点x_0极限存在的充分必要条件是$f(x)$在点x_0左极限和右极限都存在且相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A.$

例 6

设$f(x) = x - [x]$. 讨论该函数在整数点$x = n$的极限.

对于分段定义的函数，常应用定理1来讨论该函数在分段点处的极限.

同数列极限定义的否定类似, 对于$\varepsilon-\delta$等定义中的条件进行逻辑否定, 就得到函数$f(x)$在相应极限过程中不以A为极限的数学表述, 这既是函数极限定义的否定. 按照基本的逻辑知识可知, 函数极限定义的否定与相应的极限定义是互为等价的. 在此, 仅以几种情形为例给出极限定义的否定, 其它情形请读者自行给出.

定理 2

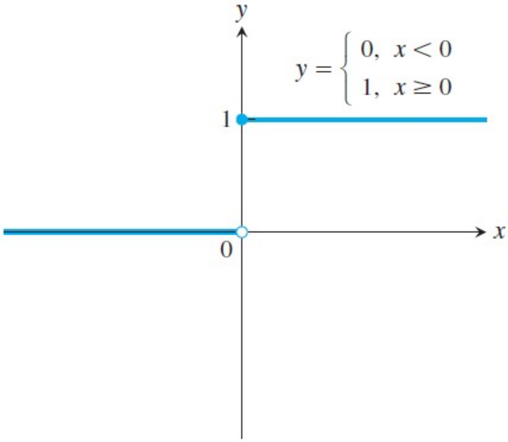
(i) 设函数$f(x)$在点x_0的某个空心邻域中有定义, $A\in\mathbb{R}$. $f(x)$在点x_0不以A为极限(记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$)的充分必要条件为: 存在$\varepsilon_0>0$, 对任何$\delta>0$, 都存在$x_\delta$, 使得$0<|x_\delta-x_0|<\delta$, 并且$|f(x_\delta)-A|\geqslant\varepsilon_0$.
(ii) 设函数$f(x)$在$(a,+\infty)$有定义, $A\in\mathbb{R}$. $f(x)$在$x\to+\infty$时不以A为极限(记为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq A$)的充分必要条件为: 存在$\varepsilon_0>0$, 对任何$X>0$, 都存在$x_0>X$, 使得$|f(x_0)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

对于上面这个定理中所涉及到的函数极限, 按照极限定义可以进一步得到极限不存在的数学表述如下:

(i) 设函数$f(x)$在点x_0的某个空心邻域中有定义. 极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在的充分必要条件为: 对于任何$A\in\mathbb{R}$, 都有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$.

(ii) 设函数$f(x)$在$(a,+\infty)$有定义. 极限$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$不存在的充分必要条件为: 对于任何$A\in\mathbb{R}$, 都有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq A$.

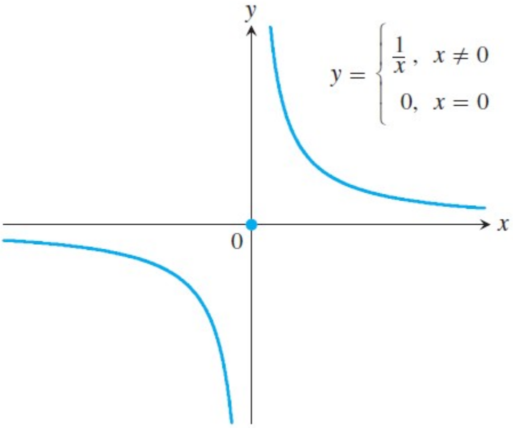
一点处函数极限不存在的例子



(a) Unit step function $U(x)$

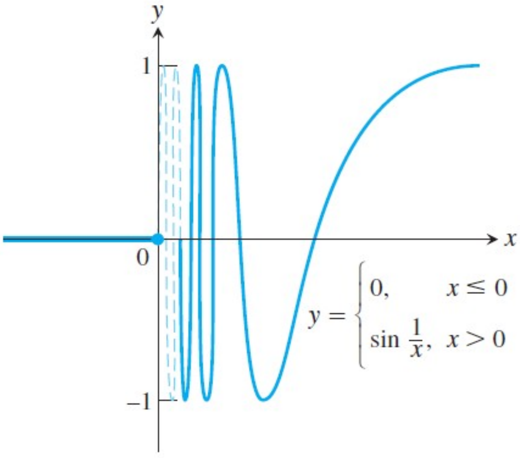
（图片取自Thomas' Calculus）

一点处函数极限不存在的例子



(b) $g(x)$

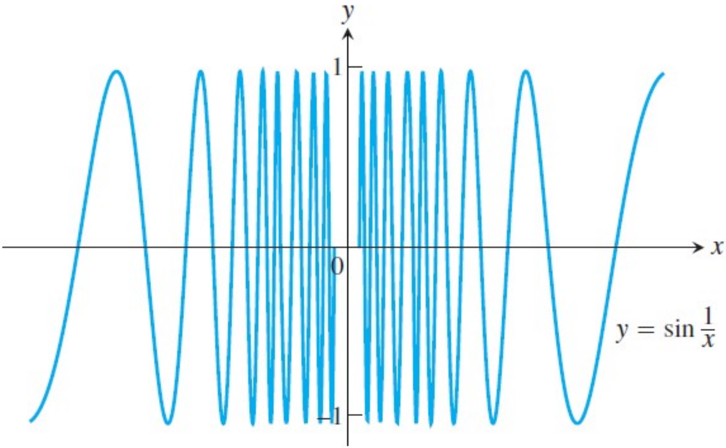
（图片取自Thomas' Calculus）



(c) $f(x)$

（图片取自Thomas' Calculus）

一点处函数极限不存在的例子



（图片取自Thomas' Calculus）

应用函数极限定义的否定的例题

例 7

证明极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$不存在.

证明极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$不存在比证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$不存在要容易. 这是因为，对任意$X>0$, 在函数极限情形，可以取$x_0>X$, 使得$\sin x_0=1$或$-1$.

应用函数极限定义的否定的例题

例 8

证明极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$不存在.

从函数图象看到，当$x \to 0^+$时，$e^{\frac{1}{x}}$趋于$+\infty$, 就不难找到x_δ了.