一个新的多项式不可约判定定理

梅汉飞 龙占洪

(湖南常德师专 415000) (湖南常德市五中)

本文利用复数性质深化了 Brow,Graha 判定定理 [1], 使其有更广的应用范围.

约定 Q 为有理数域, Z 为整数环, $\bar{x}$ 表示 x 的共轭数, $\|A\|$ 表示集 A 的元素个数. $\partial^\circ(v)$ 表示多项式 $v(x)$ 的次数. 设 $f(x)$ 为整系数多项式, $N=\|\{x\mid |f(x)|=1, x\in Z\}\|, N_p=\|\{x\mid |f(x)|\text{是素数}x\in Z\}\|$.

定理 设 $f(x)$ 是 n 次整系数多项式, $x_0=a+\sqrt{m}bi, |f(x_0)|=1$, 其中 $a,m,b\in Z, m\geq 1, b\neq 0$.

(1) 若 $mb^2\geq 2, 2N+N_p>n-2$, 则 $f(x)$ 在 Q 上不可约.

(2) 若 $mb^2\geq 3, 2N+N_p>n-4$, 则 $f(x)$ 在 Q 上不可约.

(3) 若 $mb^2=1, 2N+N_p>n+2$, 则 $f(x)$ 在 Q 上不可约.

可以看出定理中的不等式比 Brow,Graha 定理中的不等式要弱. 首先证明:

引理 1 设 $v(x),u(x)$ 是整系数多项式, $x_0=a+\sqrt{m}bi, a,b,m\in Z, m\geq 1, b\neq 0$.

(1) 若 $mb^2\geq 2, |v(x_0)|=1$, 则 $v(x_0)=1$ 或 -1;

(2) 若 $mb^2=1, |v(x_0)|=1$, 则 $v(x_0)=1$ 或 -1 或 i 或 $-i$;

(3) 若 $|v(x_0)u(x_0)|=1$, 则 $|v(x_0)|=|u(x_0)|=1$.

证明 因 $x_0=a+\sqrt{m}bi$, 可设 $v(x_0)=A+\sqrt{m}bBi, A,B\in Z$, 则 $A^2+mb^2B^2=v(x_0)\overline{v(x_0)}=|v(x_0)|^2=1$. (1) 因 $mb^2\geq 2$, 所以 $A=\pm 1, B=0$, 结论 (1) 正确. (2) 因 $mb^2=1$, 则 $A=\pm 1, B=0$ 或 $A=0, B=\pm 1$. 有结论 (2). (3) 由条件 $|v(x_0)|^2|u(x_0)|^2=1$, 由前面的证明可知, $|v(x_0)|^2=v(x_0)\overline{v(x_0)}, |u(x_0)|^2$ 是非负整数, 于是, $|v(x_0)|^2=|u(x_0)|^2=1$, 推出 $|v(x_0)|=|u(x_0)|=1$.

引理 2[1] 设 $v(x)$ 是整系数多项式, $v(x_0)=1, v(x_1)=-1, x_0,x_1\in Z$. 则

(1) 最多还存在另外两个不等的整数满足 $|v(x)|=1$;

(2) $\partial^\circ(v)=1$ 时, 不存在其它整数满足 $|v(x)|=1$.

设 $g(x)$ 是整系数多项式, $n(g)=\{x\mid |g(x)|=1, x\in Z\}$.

定理证明 假设 $f(x)=v(x)u(x), v(x)$ 、$u(x)$ 是非零次整系数多项式. 当 $x\in Z$ 时, 若 $|f(x)|=1$, 有 $|v(x)|=|u(x)|=1$, 若 $|f(x)|$ 是素数, 有 $|v(x)|=1$ 或 $|u(x)|=1$. 于是有 $\|n(v)\|+\|n(u)\|\geq 2N+N_p$.

(1) 有 $\|n(v)\|+\|n(u)\|>n-2$, 故 $\|n(v)\|>\partial^\circ(v)-1$ 或 $\|n(u)\|>\partial^\circ(u)-1$, 不妨设 $\|n(v)\|>\partial^\circ(v)-1$. 再由引理 1(1),(3) 有 $|v(x_0)|=1, v(x_0)=1$ 或 -1, 若 $v(x_0)=1$, 则 $v(\overline{x_0})=1$, 则 $v(x)=v_1(x)(x-x_0)(x-\overline{x_0})+1, v_1(x)$ 一定是整系数多项式, 这时 $\|n(v)\|>\partial^\circ(v)-1\geq 2-1>0$, 如果 $n(v)$ 中的数都满足 $v(x)=1$, 那么非零次多项式 $v(x)-1$ 至少有 $\partial^\circ(v)+2$ 个根, 不可能, 故必有 $x_1\in n(v)$ 满足 $v(x_1)=-1$, 那么 $v_1(x_1)(x_1-x_0)(x_1-\overline{x_0})=-2$ 即 $v_1(x_1)[(x_1-a)^2+mb^2]=-2$, 因 $v_1(x_1)$ 是整数, $mb^2\geq 2$, 故 $x_1=a$, 故在 $n(v)$ 中只有一个数 a 满足 $v(x)=-1$, 总共就有 $\|n(v)\|-1+2=\|n(v)\|+1$ 个数满足 $v(x)=1$, 那么 $v(x)-1=0$ 根的个数超过 $\partial^\circ(v)$, 矛盾. 若 $v(x_0)=-1$, 观察 $-v(x)$ 即可.

(2) 从前面证明可知, $\|n(v)\|>\partial^\circ(v)-2$ 或 $\|n(u)\|>\partial^\circ(u)-2$, 不妨设 $\|n(v)\|>\partial^\circ(v)-2$. 由条件有, $v(x_0)=1$ 或 -1, 若 $v(x_0)=1$, 故 $v(x)=v_1(x)(x-x_0)(x-\overline{x_0})+1, v_1(x)$ 一定是整系数多项式, $\|n(v)\|>2-2=0$, 同样, $n(v)$ 中的数不可能都满足 $v(x)=1$, 必有 $x_1\in n(v)$ 满足 $v(x_1)=-1$, 于是 $v_1(x_1)(x_1-x_0)(x_1-\overline{x_0})=-2$,

$v_1(x_1)[(x_1-a)^2+mb^2]=-2$, 因 $mb^2\geq 3, v_1(x_1)$ 是整数，此式不成立，矛盾，若 $v(x_0)=-1$, 观察 $-v(x)$ 即可.

(3) 有 $||n(v)||>\partial^\circ(v)+1$ 或 $||n(u)||>\partial^\circ(u)+1$, 不妨设 $||n(v)||>\partial^\circ(v)+1$, 同样，$n(v)$ 中的数不可能都满足 $v(x)=1$, 也不可能都满足 $v(x)=-1$, 设 x_1 、 $x_2\in n(v)$, 分别满足 $v(x_1)=1, v(x_2)=-1$, 由引理 2(1) 有 $||n(v)||\leq 4$, 当 $||n(v)||=4$ 时， $4>\partial^\circ(v)+1$, 故 $\partial^\circ(v)=1$ 或 2, 若 $\partial^\circ(v)=1$, 由引理 2(2) 有 $||n(v)||=2$, 与 $||n(v)||=4$ 矛盾，所以 $\partial^\circ(v)=2$, 这时， $n(v)$ 中的另两个数 x_3, x_4 不可能都满足 $v(x)=1$, 也不可能都满足 $v(x)=-1$, 设 $v(x_3)=1, v(x_4)=-1$, 于是 $v(x)=a_1(x-x_1)(x-x_3)+1, v(x)=b_1(x-x_2)(x-x_4)-1$, a_1 、 $b_1\in Z$, 因 $|f(x_0)|=1$, 由引理 1(2),(3) 有 $v(x_0)=1$ 或 -1 或 i 或 $-i$. 从前面分析有 $v(x_0)=\pm i$, 这样有,

$$a_1[(a-x_1)+\sqrt{m}bi][(a-x_3)+\sqrt{m}bi]=-1\pm i$$
$$b_1[(a-x_2)+\sqrt{m}bi][(a-x_4)+\sqrt{m}bi]=1\pm i$$
$$a_1^2[(a-x_1)^2+mb^2][(a-x_3)^2+mb^2]=2$$
$$b_1^2[(a-x_2)^2+mb^2][(a-x_4)^2+mb^2]=2$$

因 $mb^2=1$, 则 $|a-x_j|\leq 1$, $j=1,2,3,4$, 而 x_1,x_2,x_3,x_4 互不相等，那么 $|a-x_j|$ $(j=1,2,3,4)$ 中只能有一个为 0, 其余的为 1, 则 $(a-x_j)$ $(j=1,2,3,4)$ 四个数有两个相等，推出 x_j $(j=1,2,3,4)$ 四个数中定有两个相等，矛盾. 当 $|n(v)||=3$ 时， $\partial^\circ(v)<2$, 即 $\partial^\circ(v)=1$, 由引理 2(2) 有 $||n(v)||=2$, 矛盾，当 $||n(v)||<3$ 时， $\partial^\circ(v)<1$, 与 $v(x)$ 非零次矛盾.

应用本文定可以解决下列问题，其中有的无法用 Brow,Graha 定理解决.

例 1 设 $f(x)=x^4+x^3-x^2+x-3$, 因 $|f(0)|=3, |f(-1)|=5$, $|f(1)|=1, |f(2)|=19, |f(-2)|=1, |f(i)|=1$, 故 $N\geq 2, N_p\geq 3$, $2N+N_p\geq 2\times 2+3>4+2$, 由定理中的 (3) 有 $f(x)$ 在 Q 上不可约.

例 2 设 $f(x)=x^5+x^4+3x^3+3x^2+2x+3$, 因为 $|f(0)|=3, |f(-1)|=1, |f(1)|=13$, $2N+N_p\geq 2\times 1+2>5-2$. 而 $|f(\sqrt{2}i)|=1$, 由定理中 (1) 有 $f(x)$ 在 Q 上不可约.

例 3 设 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 是 n 个不相等的整数， $m\geq 3$ 是整数， $g(x)$ 是次数小于 $(n+2)$ 的整系数多项式. 则

$$f(x)=g(x)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)(x^2+m)\pm 1$$

在 Q 上不可约.

证明 $|f(a_j)|=1, j=1,2,3,\cdots,n, |f(\sqrt{m}i)|=1$, $2N+N_p\geq 2n=n+2+n+2-4>n+2+\partial^\circ(g)-4>\partial^\circ(f)-4$, 由定理中 (2) 有 $f(x)$ 在 Q 上不可约.

例 3 用 Brow,Graha 定理不能解决.

参考文献

1 梅汉飞. 多项式的值与多项式不可约. 数学通报，1992.8:26-27.

三维空间中的梅耐劳斯定理

刘毅

(齐齐哈尔教育学院 161005)

梅耐劳斯定理可叙述为：设一直线与三角形 ABC 的三条边 BC, CA, AB 或其延长线分别相交于点 A', B', C', 则有

$$A'B\cdot B'C\cdot C'A=AB'\cdot BC'\cdot CA'$$

它可向三维空间推广为如下的

定理 设一直线与四面体 $ABCD$ 的四个面 BCD, CDA, DAB, ABC 或其延展面分别相交于点 A', B', C', D', 则有

$$A'BC\cdot B'CD\cdot C'DA\cdot D'AB=ABC'\cdot BCD'\cdot CDA'\cdot DAB' \quad (1)$$

为证明这一推广定理，先介绍平行射影对应