二次曲面

黄利兵

数学科学学院

2023 年 5 月 8 日

主要内容

导言

- 上学期我们学习过空间的直线和平面, 它们都是平直的, 没有弯曲. 在空间中, 弯曲的线和面远远比直线和平面要丰富. 在所有的曲面中, 二次曲面是相对简单的一种对象, 它们广泛地应用于计算机图形、工业曲面造型等.
- 在上一章我们已经了解了二次曲面的分类. 非退化的二次曲面中, 有实图形的仅有 5 种. 我们将结合图形详细讨论这 5 种曲面的几何性质, 包括凸性、有界性、对称性以及平面截线的类型等.
- 单叶双曲面和双曲抛物面尤其值得注意, 因为它们看起来是弯曲的, 却可以由直线构成. 这两种直纹面的性质有许多相通之处, 也有一些微妙的不同点.

方程与图形

解析几何有两个基本的问题:

- 已知一个几何图形, 在适当的坐标系中建立该图形的方程;
- 已知一个方程 (组), 研究解集所表示的图形.

这里我们先简要讨论前一个问题. 其中又包含了两个子问题:

- 空间的几何图形可以怎样产生?
  - 粒子的运动、卫星的轨道都可以抽象为点在空间中的运动轨迹, 正所谓 “点动成线”; 奔腾的瀑布、舞动的红绸都可以抽象为曲线在空间中的运动, 也就是 “线动成面”. 低维图形的运动是产生高维图形的一种重要方式.
  - CT 扫描、阳光下的影子都可以抽象为几何体与平面或曲面的交集. 从两个高维图形中取交集得到低维图形, 也是产生图形的重要方式.
- 对不同方式产生的图形如何选择合适的方程?
  - 以运动方式产生的图形, 用参数方程更容易描述.
  - 以相交方式产生的图形, 用一般方程更容易描述.

  参数方程和一般方程在一定条件下是可以互相转化的.

空间的曲线

我们考虑一点运动的轨迹. 假设该点在时刻 t 的坐标为 $(a(t), b(t), c(t))$, 那么, 我们就得到了轨迹曲线的参数方程

$$x = a(t), \quad y = b(t), \quad z = c(t).$$

从这三个方程中消去 t, 就可得到曲线的一般方程 (方程组).

例

一条弹簧曲线的参数方程为 $x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad z = 0.1t$. 消去 t 就可得到它的一般方程为

$$x = \cos 20z, \quad y = \sin 20z.$$

例

一条锥形螺线的参数方程为 $x = 0.3t\cos 2t, \quad y = 0.3t\sin 2t, \quad z = 0.1t$. 消去 t 就可得到它的一般方程为

$$x = 3z\cos 20z, \quad y = 3z\sin 20z.$$

空间的曲面

假想在 0 时刻有一条空间曲线, 它的参数方程是 $(a_0(s), b_0(s), c_0(s))$, 其中 s 为参数. 现在, 这条曲线随着时间在变化; 假设在 t 时刻, 点 $(a_0(s), b_0(s), c_0(s))$ 由原来的位置到达新的位置 $(a(s,t), b(s,t), c(s,t))$, 其中二元函数 a, b, c 满足

$$a(s,0) = a_0(s), \quad b(s,0) = b_0(s), \quad c(s,0) = c_0(s).$$

容易看出, 这条曲线的运动轨迹构成一个曲面. 该曲面的参数方程就是

$$x = a(s,t), \quad y = b(s,t), \quad z = c(s,t).$$

例

将 zOx 平面的单位圆绕着 z 轴旋转, 得到单位球面. 注意单位圆上的点 $(\sin s, 0, \cos s)$ 转过角度 t 时, 得到的点是 $(\sin s\cos t, \sin s\sin t, \cos s)$. 因此, 单位球面的参数方程是

$$x = \sin s\cos t, \quad y = \sin s\sin t, \quad z = \cos s.$$

消去 s, t, 就得到一般方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

在上面这个例子中, 参数 s, t 分别称为纬度和经度. 一般地, 对空间任意一点 $P(x, y, z)$, 假设它到原点 O 的距离为 r, 并设 $\overrightarrow{OP}$ 方向的单位向量的纬度和经度分别为 s, t, 则有

$$x = r\sin s\cos t, \quad y = r\sin s\sin t, \quad z = r\cos s.$$

将空间的点用 (r, s, t) 表示, 称为空间的球坐标系.

思考题

(**) 请作出以下曲面的大致图形.

(1) $x = t\cos s,\ y = t\sin s,\ z = s$;

(2) $x = (\sin s\cos t)^3,\ y = (\sin s\sin t)^3,\ z = \cos^3 s$;

(3) $z = \sin x\sin y$;

(4) $z = (1 + x^2 + y^2)^{-1}\cos(x^2 + y^2)$.

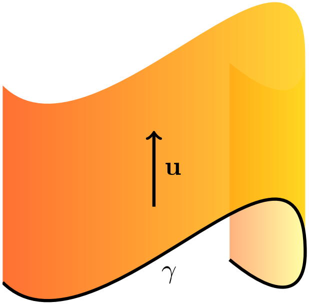
柱面

现在我们讨论几种常见的由曲线运动产生曲面的方式.

定义

给定空间曲线 γ 和非零向量 $\mathbf{u}$, 所有与 γ 相交且与 $\mathbf{u}$ 平行的直线 ℓ 所构成的曲面称为*柱面*. 称 γ 为柱面的*准线*, 每条直线 ℓ 称为柱面的一条 *母线*.

柱面既可看作沿 $\mathbf{u}$ 方向平移 γ 所产生的, 也可看作直线 ℓ 沿 γ 平行移动所产生的.



现在, 设柱面的母线平行于 $\mathbf{u}=(a_0,b_0,c_0)$. 在准线 γ 上任取一点 $Q_s=(a(s),b(s),c(s))$, s 为参数, 那么, 过 Q_s 且平行于 $\mathbf{u}$ 的直线上的点可表示为 $Q_s+t\mathbf{u}$, 即柱面的参数方程为

$$x=a(s)+a_0t,\quad y=b(s)+b_0t,\quad z=c(s)+c_0t.$$

例

设柱面的准线是 xOy 平面内的单位圆, 母线平行于 $(1,1,1)$, 那么柱面的参数方程为

$$x=\cos s+t,\quad y=\sin s+t,\quad z=t.$$

消去 s, t, 可得其一般方程为 $(x-z)^2+(y-z)^2=1$.

需要注意的是, 柱面的准线不是唯一的. 一条空间曲线只要与柱面中的每条母线都相交, 就可以作为柱面的准线.

柱面方程的特点

命题

如果柱面的母线平行于 z 轴，则它有形如 $f(x, y) = 0$ 的方程，即其中不出现变量 z. 反之，形如 $f(x, y) = 0$ 的方程表示的是母线平行于 z 轴的柱面.

证明.

如果柱面的母线平行于 z 轴，则它的每条母线都与 xOy 平面相交. 于是柱面与 xOy 平面的交线就是它的一条准线. 这条准线在 xOy 平面内，可设其方程为

$$f(x, y) = 0, \quad z = 0.$$

这时，柱面上的每一点一定满足 $f(x, y) = 0$; 且满足 $f(x, y) = 0$ 的每个点都在柱面上，因此柱面方程为 $f(x, y) = 0$.

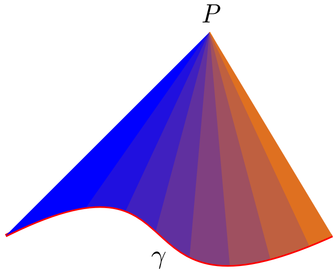
反之，若点 (x_0, y_0, z_0) 在曲面 $f(x, y) = 0$ 上，则点 $(x_0, y_0, z_0 + t)$ 也在曲面 $f(x, y) = 0$ 上，即平行于 z 轴的一整条直线都在曲面上. 因此 $f(x, y) = 0$ 是柱面. $\square$

锥面

定义

设 γ 是空间曲线, P 是空间一点. 考虑这样的直线 ℓ, 它经过 P 点, 且与 ℓ 相交. 那么, 所有这样的直线 ℓ 构成的曲面称为一个**锥面**. 称 γ 为该锥面的一条**准线**, P 为它的 **顶点**, 每一条直线 ℓ 都称为它的**母线**.

锥面既可以看作过 P 的直线沿着 γ 运动产生的, 也可看作曲线 γ 在以 P 为中心的放缩过程中产生的.



现在, 设锥面的顶点为 $P=(a_0,b_0,c_0)$. 在准线 γ 上任取一点 $Q_s=(a(s),b(s),c(s))$, 其中 s 为参数, 则直线 PQ_s 上的点可表示为 $(1-t)\cdot P+t\cdot Q_s$, 即锥面的参数方程为

$$x=(1-t)a_0+ta(s),\quad y=(1-t)b_0+tb(s),\quad z=(1-t)c_0+tc(s),$$

其中 s, t 为参数.

例

设锥面的准线 γ 是 xOy 平面内的单位圆, 顶点 $P=(0,0,1)$, 则它的参数方程为

$$x=t\cos s,\quad y=t\sin s,\quad z=1-t.$$

消去 s, t, 就得到一般方程为 $x^2+y^2=(1-z)^2$.

需要注意的是, 锥面的准线不是唯一的, 只要一条空间曲线与锥面的每条母线都相交, 它就可以成为该锥面的准线.

锥面方程的特点

命题

若锥面的顶点在原点, 则它有形如 $f(x,y,z)=0$ 的方程, 其中函数 $f(x,y,z)$ 具有齐次性, 即存在某个非负整数 k 使得

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^k f(x,y,z)$$

对任意非零实数 λ 成立. 反之, 若 f 是齐次函数, 则方程 $f(x,y,z)=0$ 所表示的图形是顶点在原点的锥面.

证明.

过原点的每条直线都至少与以下三个平面 $x=1$, $y=1$, $z=1$ 之一相交. 因此, 锥面与这三个平面的交线就是它的一条准线. 设平面 $z=1$ 内的交线方程为 $F(x,y)=0$, $z=1$. 那么, 易知这部分锥面的方程为 $F(x/z,y/z)=0$. 令 $f(x,y,z)=F(x/z,y/z)$, 则 f 是齐次函数. 对另两个平面的交线可类似处理.
反之, 若 f 是齐次函数, 则当 $f(X_0)=0$ 时, 就有 $f(\lambda X_0)=0$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$. 因此, 当 X_0 在曲面 $f(X)=0$ 上时, 过原点和 X_0 的整条直线都在该曲面上. 易知该曲面是以原点为顶点的锥面. □

例

方程 $z - x\arctan(y/x) = 0$ 的左端是 1 次齐次函数, 所以这个方程的图形是一个锥面.

例

设锥面的顶点在原点, 一条准线 γ 的方程为 $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ x + z = 1, \end{cases}$, 则锥面的方程为 $x^2 + y(x+z) = 2(x+z)^2$. 这是因为, 准线 γ 上每一点都满足这个方程; 且方程左端为齐次函数, 所以它是顶点在原点的锥面.

思考题

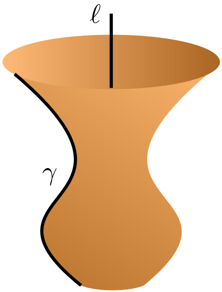
- (***) 设 γ 是平面 π 上的一条圆锥曲线, 点 P 不在平面 π 上. 证明: 以 P 为顶点, 以 γ 为准线的锥面是二次锥面.
- (**) 在上面这个问题中, 当 γ 分别取为椭圆、双曲线、抛物线时, 相应的锥面类型是否不同?

旋转面

定义

空间曲线 γ 绕直线 ℓ 旋转所产生的曲面称为*旋转面*. 称 γ 为旋转面的*母线*, 称 ℓ 为旋转面的*轴线*.

母线 γ 上任意一点在旋转时产生的圆称为旋转面上的*纬线*. 过轴线的平面与旋转面的交线也称为旋转面上的经线. 经线自然可以作为旋转面的母线.



旋转面的参数方程

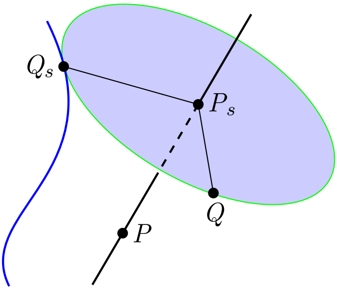
现在, 设 $P=(a_0,b_0,c_0)$ 是轴线 ℓ 上一点, 轴线方向的单位向量为 $\mathbf{u}=(u,v,w)$. 又设 $Q_s=(a(s),b(s),c(s))$ 是母线 γ 上一点, Q_s 在轴线上的正交投影为 P_s. 那么,

$$\overrightarrow{PP_s}=(\overrightarrow{PQ_s}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}.$$

Q_s 绕轴线旋转所产生的圆落在过 P_s 的一个平面内, 该平面的一组正交标架是 $(P_s;\ \overrightarrow{P_sQ_s},\ \mathbf{u}\times\overrightarrow{P_sQ_s})$. 因此, 若点 Q_s 绕轴线旋转角度 t 得到点 Q, 则有

$$\overrightarrow{P_sQ}=(\cos t)\overrightarrow{P_sQ_s}+(\sin t)(\mathbf{u}\times\overrightarrow{P_sQ_s}).$$

利用以上信息不难得到旋转面的参数方程.



例

设旋转面的母线 γ 是直线 $y=z=1$, 轴线经过原点, 且方向向量为 $(1,1,1)$. 求旋转面的方程.

解答

轴线方向的单位向量为 $\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. 在 γ 上任取一点 $Q_s=(3s+1,1,1)$, 则它在轴线上的正交投影为 $P_s=(s+1,s+1,s+1)$. 设点 Q_s 绕着轴线旋转角度 t 所得的点为 $Q(x,y,z)$, 则有 $\overrightarrow{P_sQ}=(\cos t)\overrightarrow{P_sQ_s}+(\sin t)(\mathbf{u}\times\overrightarrow{P_sQ_s})$, 由此可得

$$\begin{aligned} x &= s+1+2s\cos t, \\ y &= s+1-s\cos t+\sqrt{3}s\sin t, \\ z &= s+1-s\cos t-\sqrt{3}s\sin t. \end{aligned}$$

这就是旋转面的参数方程.

如果要求旋转面的一般方程, 则上述方法还可作一点简化.

旋转面的一般方程

旋转面上任意一点 Q 总是由母线上的某个点 Q_s 产生的, 所以 Q 点总满足

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PQ_s}|, \quad \overrightarrow{QQ_s} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

我们只要从这两个式子中消去 s, 就能得到 Q 点坐标应该满足的方程.

例

设旋转面的母线 γ 是直线 $y = z = 1$, 轴线为 $x = y = z$. 求旋转面的方程.

解答

这里 $P = (0, 0, 0)$, $\mathbf{u} // (1, 1, 1)$, $Q_s = (s, 1, 1)$. 旋转面上任意一点 $Q(x, y, z)$ 满足 $|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PQ_s}|^2$, $\quad \overrightarrow{QQ_s} \cdot \mathbf{u} = 0$, 即

$$x^2 + y^2 + z^2 = s^2 + 1^2 + 1^2, \quad (s - x) \cdot 1 + (1 - y) \cdot 1 + (1 - z) \cdot 1 = 0.$$

从后一式中解出 s, 再代入前一式, 就得到旋转面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z - 2)^2 + 2.$$

旋转面方程的特点

命题

若旋转面的轴线是 z 轴, 则它有形如 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$ 的方程. 反之, 形如 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$ 的方程所表示的曲面是以 z 轴为旋转轴的旋转面.

证明.

旋转面与 zOx 平面的交线是一条母线, 设其方程为

$$f(x,z)=0, \quad y=0.$$

旋转面上任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 一定是由这条母线上某个点 $(x_1,0,z_0)$ 旋转产生的. 因而 $|x_1|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$, 所以 P_0 的坐标一定满足方程 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$. 反之, 若点 P_0 满足方程 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$, 则它一定在旋转面上. □

例

将抛物线 $z=x^2$, $y=0$ 绕 z 轴旋转, 所得旋转面的方程为 $z=x^2+y^2$.

非退化二次曲面

类似于二次曲线的处理, 我们可将二次曲面方程的系数排成 4×4 矩阵. 容易发现, 二次曲面是非退化的, 当且仅当这个矩阵是可逆的.
我们将分别讨论五种非退化的二次曲面. 对其中的每一种, 我们都要考虑它与平面的交线可能是何种曲线.

引理

设 Γ 是二次曲面, π 和 π' 是平行的两个平面, 则 Γ 被 π 和 π' 所截得的二次曲线具有相同的类型.

证明.

适当取坐标系, 可设 π 和 π' 的方程分别是 $z = k$ 和 $z = k'$. 于是, 只要将 Γ 方程中的 z 分别用 k 和 k' 代入, 就得到两条截线的方程. 两者的二次项部分相同, 因此它们的不变量 $\mathbf{I}_2$ 相同. □

思考题

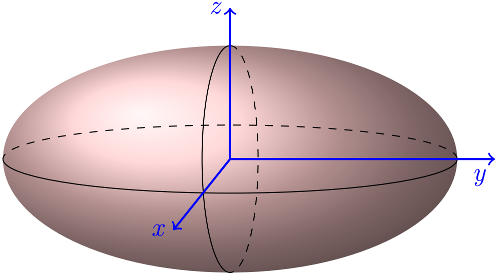
(***) 若 Γ 是非退化的二次曲面, 则它的平面截线不可能是重合直线.

椭球面

在适当的直角坐标系中, 椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

其中 a, b, c 为正实数.
经过压缩变换 $(x, y, z) \mapsto (x/a, y/b, z/c)$, 椭球面可变为单位球面, 因此它的图形大致如下



从方程可以看出, 椭球面具有如下性质:

- 有界: 整个曲面落在长方体 $[-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c]$ 内部.
- 对称: 关于原点中心对称, 关于三个坐标平面对称.
- 平面截线: 一定是有界的, 因此只能是椭圆或相交虚直线.

例

设平面 π 过原点, 且它与椭球面 $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$ 的交线是一个圆, 求 π 的方程.

解答

显然 π 不与 xOy 平面重合. 取 π 关于平面 xOy 的对称平面 α, 则 α 与椭球面的交线也是一个圆. 这两个圆的圆心都是原点, 且它们有公共点, 因此它们在同一个球面上.

设球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $r > 0$. 则球面与椭球面的交线一定满足方程 $x^2/2 - z^2/6 = 1 - r^2/2$. 如果 $1 - r^2/2 \neq 0$, 则交线在 xOz 平面的投影是双曲线, 不可能是两个圆. 因此 $r^2 = 2$.

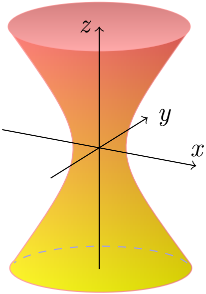
由此得到 π 的方程为 $z = \sqrt{3}x$ 或 $z = -\sqrt{3}x$.

单叶双曲面

在适当的直角坐标系中, 单叶双曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其中 a, b, c 为正实数.
经过压缩变换 $(x,y,z)\mapsto(x/a,y/b,z/c)$, 单叶双曲面可变为 $x^2+y^2-z^2=1$. 容易看出这是一个旋转面, 它是由双曲线 $x^2-z^2=1$, $y=0$ 绕着它的虚轴 (z 轴) 旋转得到的. 因此单叶双曲面的图形大致如下



从单叶双曲面的方程容易看出它有如下性质:

- 无界: z 可取任意实数, x, y 满足 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 1$.
- 对称: 关于原点中心对称, 关于三个坐标平面对称.
- 双曲线有渐近线, 将双曲线绕虚轴旋转所得的旋转面就有渐近的锥面. 一般的单叶双曲面是由这种旋转面压缩而来, 因此也有渐近锥面. 不难看出渐近锥面的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.
- 平面截线: 不可能是重合直线或相交虚直线 (为什么? 请用前面引理的方法证明). 可以是椭圆、双曲线、抛物线、相交直线、平行直线.

思考题

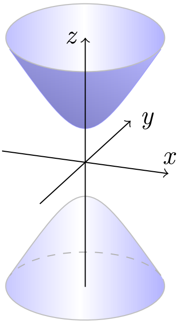
- (**) 设单叶双曲面 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. 证明: 平面 $y=b$ 与 Γ 的交线是两条直线; 平面 $y/b=z/c$ 与 Γ 的交线是平行直线.
- (****) 设 Γ 是单叶双曲面. 如果平面 π 与渐近锥面的某个切平面平行, 证明: π 与 Γ 的交线是抛物线.

双叶双曲面

在适当的直角坐标系中, 双叶双曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

其中 a, b, c 为正实数.
经过压缩变换 $(x,y,z)\mapsto(x/a,y/b,z/c)$, 双叶双曲面可变为 $x^2+y^2-z^2=-1$.
容易看出这是一个旋转面, 它是由双曲线 $x^2-z^2=-1$, $y=0$ 绕着它的实轴 (z 轴) 旋转得到的. 因此双叶双曲面的图形大致如下



从双叶双曲面的方程容易看出它有如下性质:

- 无界: x, y 可以取任意实数, $|z| \geq c$.
- 对称: 关于原点中心对称, 关于三个坐标平面对称.
- 分支: 整个曲面被平面 $z = 0$ 分隔为两支. 更精确地, 一支在平面 $z = c$ 上方, 另一支在平面 $z = -c$ 下方.
- 渐近锥面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.
- 平面截线: 由分支性质不难推出, 双叶双曲面上没有直线. 因此平面截线只可能是椭圆、双曲线、抛物线、相交虚直线.

思考题

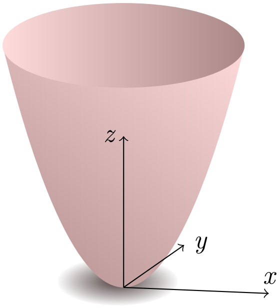
(***) 如果平面 π 与双叶双曲面 $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -1$ 的交线是一个圆, 求 π 的单位法向量.

椭圆抛物面

在适当的直角坐标系中, 椭圆抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

其中 a, b 为正实数.
利用压缩变换 $(x,y,z)\mapsto(x/a,y/b,z)$, 可将椭圆抛物面变为 $x^2+y^2=2z$. 这是一个旋转面, 它是由抛物线 $x^2=2z$, $y=0$ 绕着它的对称轴 (z 轴) 旋转产生的.
因此椭圆抛物面的图形大致如下



由方程可以看出, 椭圆抛物面具有以下性质:

- 单侧有界: x, y 可取任意实数, $z \geq 0$.
- 对称: 关于 zOx 和 zOy 平面对称.
- 平面截线: 利用单侧有界性, 易知平面截线不可能是双曲线, 也不可能包含直线, 只可能是椭圆、抛物线或相交虚直线.

例

过原点的平面 π 与椭圆抛物面 $x^2 + 2y^2 = z$ 的交线是圆, 求 π 的方程.

解答

显然 π 与 xOz 平面不重合. 取 π 关于 xOz 平面的对称平面 α, 则 α 与椭圆抛物面的交线仍是圆. 这两个圆显然位于同一个球面, 且球心在 xOz 平面上. 同理球心也在 yOz 平面上. 注意该球面还经过原点, 于是可设其方程为
$x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$.

上述球面与椭圆抛物面的交线一定满足方程 $y^2 - z^2 + 2rz = z$. 如果 $2r \neq 1$, 则交线在 yOz 平面的投影是双曲线, 从而交线不可能是两个圆. 因此 $r = 1/2$. 由此得到 π 的方程为 $y = z$ 或 $y = -z$.

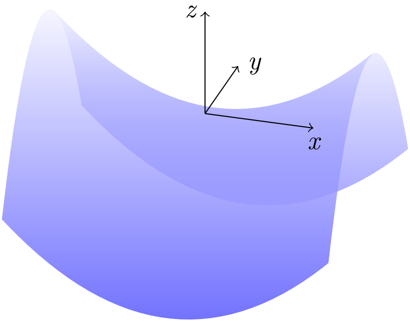
双曲抛物面

在适当的直角坐标系中, 双曲抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

其中 a, b 为正实数.

注意观察它与平面 $z = k$(其中 k 为常数) 的交线, 可发现它的图形大致如下. 由于它形如马鞍, 故又称为马鞍面.



由方程可以看出, 双曲抛物面有以下性质:

- 无界: x, y, z 都能取到任意实数.
- 对称: 关于 zOx 和 zOy 平面对称.
- 平面截线: 不可能是椭圆型曲线, 也不可能是平行直线或重合直线. 可能是双曲线、抛物线或相交直线.

思考题

(**) 设平面 π 经过点 $(3,1,4)$, 且它与双曲抛物面 $x^2 - y^2 = 2z$ 的交线是两条直线, 求 π 的方程.

直纹面

定义

若对曲面 S 上任意一点 P, 都存在过 P 的直线 $\ell \subset S$, 则称 S 为直纹面.

简单来讲, 直纹面就是由直线构成的曲面. 例如柱面和锥面都是直纹面. 一般地, 只要将两条空间曲线上的点对应连成直线, 就能获得一个直纹面. 下面举两个三次曲面的例子.

例

设 γ 是 xOy 平面的单位圆. 在 γ 上取点 $A_t = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 0\right)$, 再在 z 轴上取点 $B_t = (0, 0, t)$, 那么, 当 t 取遍所有实数时, 直线 A_tB_t 的轨迹就是一个直纹面, 称为 Mobius 曲面. 它的一般方程为 $y(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + 2z(x^2 + y^2 + x) = 0$.

例

在上面的例子中, 如果把 B_t 改为 $(-1, 0, t)$, 则直线 A_tB_t 的轨迹称为 Cayley 直纹面. 它的一般方程为 $2z(1 + x)^2 + y(x^2 + y^2 - 1) = 0$.

接下来我们重点讨论哪些二次曲面是直纹面, 并探索直母线的性质.

退化的情形:

- 二次锥面是直纹面, 它上面所有的直母线都经过锥面的顶点.
- 二次柱面也都是直纹面. 其中, 椭圆柱面、双曲柱面、抛物柱面上的直母线彼此平行; 相交平面、平行平面、重合平面上, 任意三条直母线中, 一定有两条是共面的.

非退化的情形:

- 椭球面、双叶双曲面和椭圆抛物面上都没有直线, 它们都不是直纹面.
- 因此, 只有单叶双曲面和双曲抛物面可能是直纹面.

思考题

- (*) 如果一个二次曲面是直纹面, 并且其中有三条两两异面的直母线, 则它一定是非退化的.
- (**) 设 $A_t = (\cos t, \sin t, 1)$ 和 $B_t = (\cos(t + \pi/3), \sin(t + \pi/3), -1)$ 分别是两个圆上的点. 那么, 直线 A_tB_t 的轨迹是什么曲面?

单叶双曲面上的直线

对于单叶双曲面 S: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, 我们可将它的方程改写为

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

现在, 对实数 t, 我们考虑直线

$$I_t:\quad \begin{cases} \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ t\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

并约定 I_∞ 为直线 $1+\frac{y}{b}=\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$.
容易看出, 直线 I_t 的每个点都在曲面 S 上; 而且, 对 S 上每个点 P_0, 我们都能找到相应的 t_0, 使得 P_0 在直线 I_{t_0} 上. 因此, S 是由直线族 I_t 构成的, S 是直纹面.
同理可知, S 也是由下面的直线族 II_s 构成的

$$II_s:\quad \begin{cases} \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=s\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ s\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

约定 II_∞ 为直线 $1-\frac{y}{b}=\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$.

下面我们来分析这些直母线的关系.

直母线 I_t 经过点 $P(at, b, ct)$, 方向向量为 $\mathbf{u} = (a(t^2-1), 2bt, c(t^2+1))$. 在同一族直母线中另取一条 I_r, 则它经过 $Q(ar, b, cr)$, 方向向量为 $\mathbf{v} = (a(r^2-1), 2br, c(r^2+1))$. 计算可知

$$\det(\overrightarrow{PQ}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -4abc(r-t)^2 \neq 0.$$

因此, 同一族的两条直母线一定异面.

直母线 II_s 经过点 $R(as, -b, cs)$, 方向向量为 $\mathbf{w} = (a(s^2-1), -2bs, 2c(s^2+1))$. 计算可知

$$\det(\overrightarrow{PR}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0.$$

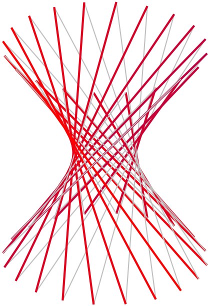
因此, 直母线 I_t 与 II_s 是共面的. 特别地, 当 $s=-t$ 时, $\mathbf{u}=\mathbf{w}$, 因此这时 I_t 与 II_{-t} 平行 (关于原点中心对称).

定理

单叶双曲面上有两族直母线. 同一族的两条直母线一定异面, 不同族的两条直母线一定共面 (有可能平行).

例

若直线 a 与直线 b 异面, 且不垂直, 则 a 绕 b 旋转所得的曲面是单叶双曲面.



思考题

- (***) 已知三条直线 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 两两异面. 如果直线 ℓ 与这三条直线中的每一条都共面, 则称 ℓ 为酷直线. 证明所有酷直线构成的曲面是非退化的二次曲面. 它一定是单叶双曲面吗?
- (****) 一个四面体的四条高线通常是两两异面的. 证明此时这四条高线在一个单叶双曲面上.

双曲抛物面上的直线

对于双曲抛物面 S: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$, 我们可将它的方程改写为

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z.$$

因此, 对固定的实数 t, 下述直线

$$I_t: \quad \begin{cases} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2t, \\ t\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z, \end{cases}$$

都在曲面 S 上. 而且, 对 S 上每个点 P_0, 我们可找到某个实数 t_0, 使得 P_0 落在直线 I_{t_0} 上. 因此, S 是由直线族 I_t 构成的, S 是直纹面.
同理可知, S 也是由下面的直线族 II_s 构成的

$$II_s: \quad \begin{cases} \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2s, \\ s\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z, \end{cases}$$

其中 s 为实数.

下面我们来分析这些直母线的关系.
直母线 I_t 经过点 $P(at, bt, 0)$, 方向向量为 $\mathbf{u} = (a, -b, 2t)$. 在同一族直母线中另取一条 I_r, 则它经过 $Q(ar, br, 0)$, 方向向量为 $\mathbf{v} = (a, -b, 2r)$. 计算可知

$$\det(\overrightarrow{PQ}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -4ab(r-t)^2 \neq 0.$$

因此, 同一族的两条直母线一定异面. 注意 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 都与向量 $(b, a, 0)$ 正交, 所以这一族直母线总平行于同一个平面.
直母线 $I\!I_s$ 经过点 $R(as, -bs, 0)$, 方向向量为 $\mathbf{w} = (a, b, 2s)$. 计算可知

$$\det(\overrightarrow{PR}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0.$$

因此, 直母线 I_t 与 $I\!I_s$ 是共面的. 事实上, 它们交于一点 $(a(t+s), b(t-s), 2st)$.

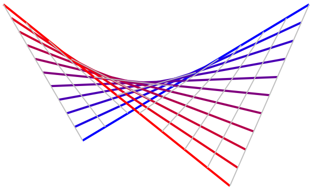
定理

双曲抛物面上有两族直母线. 同一族的两条直母线一定异面 (但平行于同一平面), 不同族的两条直母线一定共面 (相交).

生活中也很容易看到类似于双曲抛物面的形状, 最简单的例子是薯片.

例

在排球场上, 如果两侧的球网柱有一根倒在地上, 则球网呈现的形状就是双曲抛物面.



思考题

- (***) 直线 A_0A_1 与 B_0B_1 异面. 设 $A_t = (1-t)A_0 + tA_1$, $B_t = (1-t)B_0 + tB_1$. 求直线 A_tB_t 的轨迹并判断它是何种曲面.
- (***) 点 $P_t(2t-1, 1, t(t-1))$ 和 $Q_t(2t+1, -1, t(t+1))$ 分别在两条抛物线上. 求直线 P_tQ_t 的轨迹并判断它是何种曲面.