第五章 导数的应用

难题选解

例 1 设$f(x)$在$[0,1]$可微，$f(0)=0$, $f(1)=1$, 证明：对任意n个正数a_1, a_2, $\cdots$, a_n, 在$(0,1)$内存在n个不同的数$x_1,x_2,\cdots,x_n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

证 令$\lambda_k=\dfrac{a_k}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$, 由介值定理可知存在$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=1$使得$f(t_k)=\lambda_1+\cdots+\lambda_k$ $(k=1,\cdots,n-1)$. 于是由拉格朗日中值定理，存在$x_i\in(t_{i-1},t_i)$，使得$\lambda_i=f(t_i)-f(t_{i-1})=f'(x_i)(t_i-t_{i-1})$ $(i=1,\cdots,n)$. 因此有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=t_n-t_0=1-0=1.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

$\square$

例 2 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$两次连续可微，对任意实数x, 有$|f(x)|\leqslant 1$, 且$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$. 证明存在一点ξ使得$f(\xi)+f''(\xi)=0$.

证 令$F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$, 则$F(0)=4$. 由拉格朗日中值定理可得存在$a\in(-2,0)$, $b\in(0,2)$使得$|f'(a)|=\left|\dfrac{f(-2)-f(0)}{2}\right|\leqslant 1$，$|f'(b)|=\left|\dfrac{f(2)-f(0)}{2}\right|\leqslant 1$. 由此得到存在一点$\xi\in(a,b)$使得$F(x)$在$\xi$处取得$[a,b]$上的最大值, 由$F(\xi)\geqslant F(0)=4$知$f'(\xi)\neq 0$, 故由$F'(\xi)=2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]=0$得$f(\xi)+f''(\xi)=0$. $\square$

例 3 求最大的α和最小的β, 使对所有正整数n, 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant \mathrm{e}\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}.$$

解 最大的α是$\frac{1}{\ln 2}-1$, 最小的β是$\frac{1}{2}$. 证明如下：对上面的不等式取对数，整理后可见最大的α等于$\inf\{f(n)|n\in\mathbb{N}^*\}$, 最小的$\beta$等于$\sup\{f(n)|n\in\mathbb{N}^*\}$, 其中$f(x)=\dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x$. 因为

$$f'(x)=\frac{1}{x(x+1)\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1>0,\quad x>0,$$

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$严格递增. 因此$\inf\{f(n)|n\in\mathbb{N}^*\}=f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$, 从而最大的$\alpha$等于$\frac{1}{\ln 2}-1$. 另一方面，

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2},$$

故$\sup\{f(n)|n\in\mathbb{N}^*\}=\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{1}{2}$, 从而最小的$\beta$是$\frac{1}{2}$. □

例 4 设$f(x)$是$[0,+\infty)$上两次连续可微且恒大于0的有界函数，$C>0$是常数，对任意$x\geqslant 0$, 有$f''(x)\geqslant Cf(x)$, 求证：对任意$x\geqslant 0$, 有$f(x)\leqslant f(0)\mathrm{e}^{-\sqrt{C}x}$.

证 因为$f''(x)\geqslant Cf(x)>0$, 所以$f'(x)$在$[0,+\infty)$上严格单调递增. 于是$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在或$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$, 由洛必达法则得$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$. 因此$f'(x)$在$[0,+\infty)$上有界. 令$\varphi(x)=f(x)\mathrm{e}^{\sqrt{C}x}$, $x\in[0,+\infty)$, 则

$$\varphi'(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{C}x}[f'(x)+\sqrt{C}f(x)],$$

令$\psi(x)=\mathrm{e}^{-\sqrt{C}x}[f'(x)+\sqrt{C}f(x)]$, $x\in[0,+\infty)$, 则

$$\psi'(x)=\mathrm{e}^{-\sqrt{C}x}[f''(x)-Cf(x)]\geqslant 0,$$

因此$\psi(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增. 由$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{C}x}=0$与$f'(x)+\sqrt{C}f(x)$有界知$\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0$, 故对任意$x\geqslant 0$, 有$\psi(x)\leqslant 0$, 从而$f'(x)+\sqrt{C}f(x)\leqslant 0$. 于是对任意$x\geqslant 0$, 有$\varphi'(x)\leqslant 0$, 故$\varphi(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减. 因此，对任意$x\geqslant 0$, 有$f(x)\mathrm{e}^{\sqrt{C}x}=\varphi(x)\leqslant\varphi(0)=f(0)$, 即$f(x)\leqslant f(0)\mathrm{e}^{-\sqrt{C}x}$. □

例 5 设n是大于1的正整数，求证：

$$\prod_{k=2}^{n}\ln k<\frac{\sqrt{n!}}{n}.$$

证 令$\varphi(x)=\ln x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 则$\varphi(1)=0$,

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=-\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}<0,\ \forall x>1.$$

因此$\varphi(x)$在$[1,+\infty)$上严格单调递减，从而对任何$x>1$, 有$\varphi(x)<\varphi(1)=0$, 即$\ln x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}<0$. 特别地，当$k$是大于1的正整数时，就有$\ln k<\sqrt{k}-\dfrac{1}{\sqrt{k}}=\sqrt{k}\cdot\dfrac{k-1}{k}$, 故

$$\prod_{k=2}^{n}\ln k<\prod_{k=2}^{n}\left(\sqrt{k}\cdot\frac{k-1}{k}\right)=\frac{\sqrt{n!}}{n}.$$

□

例 6 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上有二阶导函数，$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$都大于零，假设存在正数a, b, 使得$f''(x)\leqslant af(x)+bf'(x)$对一切$x\in\mathbb{R}$成立.

(i) 求证：$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$;

(ii) 求证：存在常数c使得$f'(x)\leqslant cf(x)$;

(iii) 求使上面不等式成立的最小常数c.

证 (i) 由题设知$f(x)$和$f'(x)$都是恒大于0的严格递增函数，因此$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)$都存在. 由洛必达法则知$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)$, 故由$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$得$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$.

(ii) 令$c=\dfrac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$, 则$c>b>0$且$\dfrac{a}{b-c}=-c$. 于是由$f''(x)\leqslant af(x)+bf'(x)$得

$$f''(x)-cf'(x)\leqslant(b-c)f'(x)+af(x)=(b-c)[f'(x)-cf(x)].$$

由此可知$g(x)=\mathrm{e}^{-(b-c)x}[f'(x)-cf(x)]$是单调递减函数，由$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$知$g(x)\leqslant 0$, 从而得$f'(x)\leqslant cf(x)$.

(iii) 下证(ii)中的常数c就是最小常数. 这是因为对于函数$f(x)=\mathrm{e}^{cx}$, 有$f''(x)=af(x)+bf'(x)$, 由$f'(x)=cf(x)$可见c是使上面不等式成立的最小常数. □

例 7 设$f(x)$在$[a,b]$可导，在(a,b)两次可导. 证明存在$\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a).$$

证 先证$f'(a)=f'(b)$的特殊情形，用反证法，若对任意$x\in(a,b)$, $f''(x)$恒不为0, 则由达布定理知$f''(x)$恒大于0或恒小于0. 不妨设$f''(x)>0$, 于是$f'(x)$在(a,b)严格递增，从而

$$\lim_{x\to a^+} f'(x)=A \quad (A\in\mathbb{R}\text{或}A=-\infty),$$

$$\lim_{x\to b^-} f'(x)=B \quad (B\in\mathbb{R}\text{或}B=+\infty).$$

又因为$f(x)$在$[a,b]$上可微，所以由中值定理，

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+} f'(\xi)=A,$$

$$f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to a^+} f'(\eta)=B.$$

但由于$f'(x)$在(a,b)严格递增，故$A\neq B$, 与$f'(a)=f'(b)$矛盾.

再证一般情形. 令

$$F(x)=f(x)-[f'(b)-f'(a)]\frac{(x-a)^2}{2(b-a)},$$

则$F'(a)=f'(a)=F'(b)$. 又上面的证明知存在$\xi\in(a,b)$, 使得$F''(\xi)=0$，即$f''(\xi)-\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}=0$. 因此

$$f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a).$$

□

例 8 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$M>0$是常数，对任意实数x和t, 有

$$|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|\leqslant Mt^2,$$

求证：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导且对任意实数x和t, 有

$$|f'(x+t)-f'(x)|\leqslant M|t|.$$

证 令$g(x)=f(x)-\dfrac{M}{2}x^2$, $h(x)=f(x)+\dfrac{M}{2}x^2$, 则由$|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|\leqslant Mt^2$得

$$g(x+t)-2g(x)+g(x-t)=f(x+t)-2f(x)+f(x-t)-Mt^2\leqslant 0,$$

$$h(x+t)-2h(x)+h(x-t)=f(x+t)-2f(x)+f(x-t)+Mt^2\geqslant 0.$$

结合$g(x)$和$h(x)$的连续性即知$g(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的上凸函数，$h(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的下凸函数. 于是$g(x)$和$h(x)$处处有两个单侧导数，且$g'_-(x)\geqslant g'_+(x)$, $h'_-(x)\leqslant h'_+(x)$. 由此知$f(x)$处处有两个单侧导数，且

$$f'_-(x)=g'_-(x)+Mx\geqslant g'_+(x)+Mx=f'_+(x),$$

$$f'_-(x)=h'_-(x)-Mx\leqslant h'_+(x)+Mx=f'_+(x).$$

合起来即知$f'_-(x)=f'_+(x)$, 故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导. 于是$g(x)$和$h(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，且$g'(x)$单调递减，$h'(x)$单调递增. 对任意实数x和t, 不妨设$t\geqslant 0$ ($t<0$时类似可证), 就有

$$f'(x+t)-f'(x)-Mt=g'(x+t)-g'(x)\leqslant 0,$$

$$f'(x+t)-f'(x)+Mt=h'(x+t)-h'(x)\geqslant 0.$$

合起来即得

$$|f'(x+t)-f'(x)|\leqslant Mt.$$

这就完成了证明. □

例 9 设$f(x)$在$(0,1]$单调递增且下凸，n是大于1的整数，记$a_k=f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, $k=1,2,\cdots,n$, 证明：

$$\frac{1}{3n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^3(a_{k+1}-a_k)^2\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\leqslant\frac{1}{3n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^3(a_{k+1}-a_k)^2.$$

证 由$f(x)$在$(0,1]$单调递增知$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$, 由$f(x)$在$(0,1]$下凸知$a_2-a_1\leqslant a_3-a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n-a_{n-1}$, 故当$1\leqslant k<j\leqslant n$时，有

$$0\leqslant(j-k)(a_{k+1}-a_k)\leqslant a_j-a_k=\sum_{i=k}^{j-1}(a_{i+1}-a_i)\leqslant(j-k)(a_j-a_{j-1}).$$

因为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}(a_j-a_k)^2,$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2 &\geqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}(j-k)^2(a_{k+1}-a_k)^2\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k}i^2(a_{k+1}-a_k)^2\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{6}(n-k)(n-k+1)[2(n-k)+1](a_{k+1}-a_k)^2\\ &\geqslant \frac{1}{3n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^3(a_{k+1}-a_k)^2,\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2 &\leqslant \sum_{j=2}^{n}\sum_{k=1}^{j-1}(j-k)^2(a_j-a_{j-1})^2\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}i^2(a_j-a_{j-1})^2\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{6}(j-1)j(2j-1)(a_j-a_{j-1})^2\\ &\leqslant \frac{1}{3n^2}\sum_{j=2}^{n}j^3(a_j-a_{j-1})^2\\ &= \frac{1}{3n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^3(a_{k+1}-a_k)^2.\end{aligned}$$

$\square$

例 10 设n是大于1的整数，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上n次可导，记$M_k=\sup\left\{|f^{(k)}(x)|\big|x\in\mathbb{R}\right\}$，$k=0,1,\cdots,n$. 证明：若$f(x)$和$f^{(n)}(x)$都在$(-\infty,+\infty)$上有界，则有$M_k\leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{n}}M_n^{\frac{k}{n}}$，$k=1,2,\cdots,n-1$.

证 先证明$f^{(i)}(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界，$i=1,2,\cdots,n-1$. 由泰勒公式有

$$\begin{aligned}
f(x+1) &= f(x)+f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi_1)\\
f(x+2) &= f(x)+2f'(x)+\frac{2^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{2^n}{n!}f^{(n)}(\xi_2)\\
&\cdots\\
f(x+n-1) &= f(x)+(n-1)f'(x)+\frac{(n-1)^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)\\
&\quad+\frac{(n-1)^n}{n!}f^{(n)}(\xi_{n-1})
\end{aligned}$$

其中$\xi_i\in(x,x+i)$, $i=1,2,\cdots,n-1$. 记$\alpha_i(x)=if'(x)+\frac{i^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)$, 则由题设得

$$|\alpha_i(x)|\leqslant 2M_0+\frac{i^n}{n!}M_n,$$

故$\alpha_i(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界，$i=1,2,\cdots,n-1$. 令

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1^2}{2!} & \cdots & \frac{1^{n-1}}{(n-1)!}\\ 2 & \frac{2^2}{2!} & \cdots & \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n-1 & \frac{(n-1)^2}{2!} & \cdots & \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} f'(x)\\ f''(x)\\ \vdots\\ f^{(n-1)}(x)\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\alpha_1(x)\\ \alpha_2(x)\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}(x)\end{pmatrix}$$

则$AX=B$, 由于$\det A\neq 0$, 可知A^{-1}存在，于是$X=A^{-1}B$, 即$f^{(i)}(x)$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$可以被$\alpha_1(x),\alpha_2(x),\cdots,\alpha_{n-1}(x)$线性表出，因此由$\alpha_i(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界，$i=1,2,\cdots,n-1$就得到$f^{(i)}(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界，$i=1,2,\cdots,n-1$.

再用数学归纳法证明$M_k\leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{n}}M_n^{\frac{k}{n}}$, $k=1,2,\cdots,n-1$. $n=2$的情形已证明. 设命题对$n=2,3,\cdots,m$都成立，则当$n=m+1$时，由$n=2$情形的结论知$M_m\leqslant\sqrt{2M_{m-1}M_{m+1}}$. 再由归纳假设知$M_{m-1}\leqslant 2^{\frac{m-1}{2}}M_0^{\frac{1}{m}}M_m^{\frac{m-1}{m}}$, 代入到$M_m\leqslant\sqrt{2M_{m-1}M_{m+1}}$中，整理化简得

$$M_m\leqslant 2^{\frac{m}{2}}M_0^{\frac{1}{m+1}}M_{m+1}^{\frac{m}{m+1}},$$

即$n=m+1$且$k=m$时命题成立. 最后结合归纳假设，对于$k=1,2,\cdots,m-1$, 得

$$M_k \leqslant 2^{\frac{k(m-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{m}} M_m^{\frac{k}{m}} \leqslant 2^{\frac{k(m-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{m}} \cdot 2^{\frac{k}{2}} M_0^{\frac{k}{m(m+1)}} M_{m+1}^{\frac{k}{m+1}} = 2^{\frac{k(m+1-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{m+1}} M_{m+1}^{\frac{k}{m+1}}.$$

这就证明了$n=m+1$时命题成立. 于是由数学归纳法知对任意大于1的整数n, 有$M_k \leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$, $k=1,2,\cdots,n-1$. □

例 11 设$f(x)$在(a,b)无穷次可导，对任意自然数n, $f^{(n)}(x)$在(a,b)非负，证明：对任意$x,y\in(a,b)$, $x<y$, 有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n=0$.

证 记$P_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k$, $n=1,2,\cdots$, 则由题设知$\{P_n\}$是单调递增数列. 由泰勒公式得

$$f(y)-f(x)=P_n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(y-x)^{n+1},$$

其中$x<\xi<y$. 由题设知$\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(y-x)^{n+1}\geqslant 0$, 故$P_n\leqslant f(y)-f(x)$, 即数列$\{P_n\}$有上界$f(y)-f(x)$. 由单调收敛定理知$\{P_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=A$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n=\lim_{n\to\infty}(P_n-P_{n-1})=A-A=0.$$

□

例 12 设函数$f_1(x),\cdots,f_n(x)$都在(a,b)内n次可导, 令

$$W_k(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1'(x) & \cdots & f_k'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & \cdots & f_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}, \qquad k=1,2,\cdots,n$$

($W_k(x)$称为$f_1(x)$, …, $f_k(x)$的朗斯基*(Wronski)*行列式*)*. 已知$W_n(x)\equiv 0$而$W_{n-1}(x)\neq 0$. 证明：$f_1(x),\cdots,f_n(x)$线性相关, 即存在不全为*0*的常数$C_1,C_2,\cdots,C_n$, 使得

$$C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\cdots+C_nf_n(x)\equiv 0.$$

证 考察$C_i(x)$（$i=1,2,\ldots,n-1$）的方程组

$$\begin{cases} C_1(x)f_1(x)+C_2(x)f_2(x)+\ldots+C_{n-1}(x)f_{n-1}(x)=f_n(x) & (0)\\ C_1(x)f_1'(x)+C_2(x)f_2'(x)+\ldots+C_{n-1}(x)f_{n-1}'(x)=f_n'(x) & (1)\\ \vdots & \vdots\\ C_1(x)f_1^{(n-2)}(x)+C_2(x)f_2^{(n-2)}(x)+\ldots+C_{n-1}(x)f_{n-1}^{(n-2)}(x)=f_n^{(n-2)}(x) & (n-2)\end{cases}$$

由于$W_{n-1}(x)\neq 0$，方程组有唯一解，并且由Cramer法则知$C_i(x)$（$i=1,2,\ldots,n-1$）可微. 又因$W_n(x)\equiv 0$，故$W_n(x)$中最后一列与前$n-1$列线性相关，特别地有

$$C_1(x)f_1^{(n-1)}(x)+C_2(x)f_2^{(n-1)}(x)+\ldots+C_{n-1}(x)f_{n-1}^{(n-1)}(x)=f_n^{(n-1)}(x)\quad (n-1)$$

将(0)求导，再减去(1), 得

$$C_1'(x)f_1(x)+C_2'(x)f_2(x)+\ldots+C_{n-1}'(x)f_{n-1}(x)=0$$

将(1)求导，再减去(2), 得

$$C_1'(x)f_1'(x)+C_2'(x)f_2'(x)+\ldots+C_{n-1}'(x)f_{n-1}'(x)=0$$

直到将$(n-2)$求导，再减去$(n-1)$, 得

$$C_1'(x)f_1^{(n-2)}(x)+C_2'(x)f_2^{(n-2)}(x)+\ldots+C_{n-1}'(x)f_{n-1}^{(n-2)}(x)=0$$

将这$n-1$个方程联立，得到关于$C_i'(x)$（$i=1,2,\ldots,n-1$）的方程组. 由于系数行列式$W_{n-1}(x)\neq 0$，方程组只有零解，即

$$C_1'(x)=C_2'(x)=\ldots=C_{n-1}'(x)=0.$$

因此$C_i(x)$（$i=1,2,\ldots,n-1$）都是常数，再由(0)即知$f_1(x),\cdots,f_n(x)$线性相关. □

例 13 设$0<x_1<x_2<\cdots<x_n$, $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$, 令$n$阶方阵$A=\left(x_i^{\lambda_j}\right)$, 求证：$\det A>0$.

证 首先用数学归纳法对n进行归纳证明形如$\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx^{\lambda_j}$的函数$f(x)$没有$n$个不同的正零点. $n=1$时，$c_1x^{\lambda_1}$只有一个零点$x=0$, 命题成立. 设$n-1$时命题成立，则n时，

用反证法，若$f(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx^{\lambda_j}$有$n$个不同的正零点$x_1,x_2,\cdots,x_n$，则$f_1(x)=x^{-\lambda_1}f(x)=c_1+\sum\limits_{j=2}^{n}c_jx^{\lambda_j-\lambda_1}$有$n$个不同的正零点$x_1,x_2,\cdots,x_n$，从而由罗尔定理知$f_1'(x)=\sum\limits_{j=2}^{n}c_j(\lambda_j-\lambda_1)x^{\lambda_j-\lambda_1-1}$有$n-1$个不同的正零点，与归纳假设矛盾！因此$n$时命题也成立. 由数学归纳法知对任意正整数$n$, 形如$\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx^{\lambda_j}$的函数没有$n$个不同的正零点.

然后证明$\det A\neq 0$. 反证. 若不然，则$t_1,t_2,\cdots,t_n$的齐次线性方程组$\sum\limits_{j=1}^{n}x_i^{\lambda_j}t_j=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$有非零解$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$. 换个角度来看，令$f(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx^{\lambda_j}$, 则$f(x)$有$n$个不同的正零点$x_1,x_2,\cdots,x_n$. 与上面证明的命题矛盾！

最后来证明$\det A>0$. 将$\det A$记作$V(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, 由Vandermonde行列式的性质知$V(1,2,\cdots,n)>0$. 令$\lambda_j(t)=(1-t)j+t\lambda_j$, $t\in[0,1]$, $j=1,2,\cdots,n$, 则$\lambda_1(t)<\lambda_2(t)<\cdots<\lambda_n(t)$, $\varphi(t)=V(\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_n(t))$是$t$的连续函数. 结合$\varphi(t)\neq 0$与$\varphi(0)=V(1,2,\cdots,n)>0$知$\varphi(t)$恒大于0, 从而$\det A=V(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\varphi(1)>0$. □

例 14 求所有满足下面要求的可微函数$f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$：存在正数$a$, 使得对任何正数$x$, 有

$$f'\left(\frac{a}{x}\right)=\frac{x}{f(x)}.$$

证 所有满足要求的可微函数是$f(x)=cx^d$, 其中c和d是任意正数，唯一的例外是$d=1$时必须取$c=1$.

首先验证上面的$f(x)$满足要求. 由$f(x)=cx^d$和$f'\left(\frac{a}{x}\right)=\frac{x}{f(x)}$得$\frac{cda^{d-1}}{x^{d-1}}=\frac{1}{cx^d}$, 上式成立当且仅当$dc^2a^{d-1}=1$. 若$d>0$，$d\neq 1$, 则对任意$c>0$, 都可以解得正数$a$, 若$d=1$, 则必须$c=1$.

然后证明$f(x)$一定形如cx^d, 其中c和d是正数. 令$b=\ln a$, $y=\ln\frac{a}{x}$, 则$f'\left(\frac{a}{x}\right)=\frac{x}{f(x)}$就改写为$f\left(\mathrm{e}^{b-y}\right)f'\left(\mathrm{e}^{y}\right)=\mathrm{e}^{b-y}$. 令$g(y)=\ln f\left(\mathrm{e}^{y}\right)$, 上式就又可改写为$g(b-y)+\ln g'(y)+g(y)-y=b-y$, 整理得

$$\ln g'(y)=b-g(y)-g(b-y).$$

由上式右边的对称性得$g'(y)=g'(b-y)$, 从而$g(y)+g(b-y)$的导数恒为0, 因此$g(y)+g(b-y)$恒为常数. 由$\ln g'(y)=b-g(y)-g(b-y)$知$g'(y)$恒为常数, 故$g(y)$形如$\alpha y+\beta$, 从而知$f(x)$形如cx^d. 因为$f(x)$和$f'(x)$都恒大于0, 所以c和d必须都是正数. □

例 15 设$f(x)$在$(a,+\infty)$上两次连续可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}=1$, $c>0$是常数, 对任意$x>a$, 有$|f''(x)|<c|f'(x)|$, 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{\mathrm{e}^x}=1$.

证 先给出一个引理：“设$\varphi(x)$在$(a,+\infty)$两次可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$存在，$\varphi''(x)$在$(a,+\infty)$有界，则$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi'(x)=0$.”这个引理本质上和习题5(B)的第23题是一回事，在此略去其证明.

令$\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$, 则由$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$知$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 于是可以取定$x_1>a$使得$f(x_1)>0$. 因为对任意$x>a$, 有$|f''(x)|<c|f'(x)|$, 所以$f'(x)$在$(a,+\infty)$上恒不为0. 根据达布定理知$f'(x)$在$(a,+\infty)$上恒大于0或恒小于0, 再结合$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$知$f'(x)$在$(a,+\infty)$上恒大于0. 由$|f''(x)|<cf'(x)$知$f'(x)+cf(x)$在$(a,+\infty)$严格递增，$f'(x)-cf(x)$在$(a,+\infty)$严格递减. 因此，对任何$x>x_1$, 有$f'(x)+cf(x)>f'(x_1)+cf(x_1)$, $f'(x)-cf(x)<f'(x_1)-cf(x_1)$, 从而

$$|f'(x)-f'(x_1)|<cf(x)-cf(x_1).$$

令$K=c+\dfrac{|f'(x_1)|}{f(x_1)}$, 则对任何$x>x_1$, 由上式以及$f$的严格递增性可得

$$|f'(x)|<cf(x)+|f'(x_1)|\leqslant Kf(x).$$

于是当$x>x_1$时，有

$$\frac{|\varphi''(x)|}{\varphi(x)}=\frac{|f''(x)-2f'(x)+f(x)|}{f(x)}\leqslant\frac{|f''(x)|}{f(x)}+2\frac{|f'(x)|}{f(x)}+1<cK+2K+1.$$

因为$\varphi(x)$在$[x_1,+\infty)$连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$, 所以$\varphi(x)$在$[x_1,+\infty)$有界. 因此由$|\varphi''(x)|<(cK+2K+1)\varphi(x)$知$\varphi''(x)$在$(x_1,+\infty)$有界. 根据引理得$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi'(x)=0$, 即$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)-f(x)}{\mathrm{e}^x}=0$, 从而结合$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}=1$即得$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{\mathrm{e}^x}=1$. □

例 16 设$f(x)$在$[a,b]$上二次可微,$f''(x)<0$.试证：$\forall a\leq x_1<x_2<\cdots<x_n\leq b,k_i\geq 0,$

$$\sum_{i=1}^{n}k_i=1$$

有

$$f(\sum_{i=1}^{n}k_ix_i)>\sum_{i=1}^{n}k_if(x_i)$$

证 取

$$x_0=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i$$

将$f(x_i)$在$x=x_0$处展开

$$f(x_i)=f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_i)(x_i-x_0)^2<f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

以k_i乘此式两端，然后n个不等式相加，注意

$$\sum_{i=1}^{n}k_i=1$$

$$\sum_{i=1}^{n}k_i(x_i-x_0)=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i-x_0=0$$

得

$$f(\sum_{i=1}^{n}k_ix_i)=f(x_0)>\sum_{i=1}^{n}k_if(x_i)$$

□

例 17 设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)$ $(k\geqslant 2)$都存在. 证明

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\ldots=\lim_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0.$$

证 首先证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0$. 反证. 若$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=a\neq0$, 不妨设$a>0$, 则存在$x_0>0$, 当$x>x_0$时，有$f^{(k)}(x_0)>\dfrac{a}{2}$, 从而当$x>x_0$时，

$$f^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(x_0)=f^{(k)}(\xi)(x-x_0)>\frac{a}{2}(x-x_0)\ \ (\text{其中}x_0<\xi<x).$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k-1)}(x)=+\infty$. 使用同样的方法，由$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k-1)}(x)=+\infty$可得$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k-2)}(x)=+\infty$. 一直做下去，最后就会得到$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 这与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在矛盾！

现在再来证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k-1)}(x)=0$. 由泰勒公式有

$$\begin{aligned}
f(x+1)&=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)+\frac{1}{k!}f^{(k)}(\xi_1)\\
f(x+2)&=f(x)+2f'(x)+\frac{2^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{2^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)+\frac{2^k}{k!}f^{(k)}(\xi_2)\\
&\cdots\\
f(x+k-1)&=f(x)+(k-1)f'(x)+\frac{(k-1)^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{(k-1)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)\\
&\quad+\frac{(k-1)^k}{k!}f^{(k)}(\xi_{k-1})
\end{aligned}$$

其中$\xi_i\in(x,x+i)$, $i=1,2,\ldots,k-1$.

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0$，所以对上面$k-1$个等式两边分别取极限便得

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)+\dfrac{1}{2!}f''(x)+\cdots+\dfrac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)]=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}[2f'(x)+\dfrac{2^2}{2!}f''(x)+\cdots+\dfrac{2^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)]=0$,

$\cdots$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[(k-1)f'(x)+\dfrac{(k-1)^2}{2!}f''(x)+\cdots+\dfrac{(k-1)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)]=0$.

记$\alpha_i(x)=if'(x)+\dfrac{i^2}{2!}f''(x)+\cdots+\dfrac{i^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x)$, $i=1,2,\ldots,k-1$. 上面$k-1$个式子

就是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_2(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_{k-1}(x)=0$. 令

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1^2}{2!} & \cdots & \dfrac{1^{k-1}}{(k-1)!} \\ 2 & \dfrac{2^2}{2!} & \cdots & \dfrac{2^{k-1}}{(k-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k-1 & \dfrac{(k-1)^2}{2!} & \cdots & \dfrac{(k-1)^{k-1}}{(k-1)!} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(k-1)}(x) \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \\ \vdots \\ \alpha_{k-1}(x) \end{pmatrix}$$

则$AX=B$, 由于$\det A\neq 0$, 可知A^{-1}存在，于是$X=A^{-1}B$, 即$f_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,k-1)$ 可以被$\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\ldots$, $\alpha_{k-1}(x)$线性表出，因此由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_2(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_{k-1}(x)=0$就得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k-1)}(x)=0$. $\square$

补充题5

(A)

1. 求$f(x)=x^4(x-1)^3$的极大点与极小点；

2. 求方程$\sin x=\frac{x}{\pi^2}$的实根的个数；

3. 求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{x^x}-x^x}{x^x-x}$;

4. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$.

5. 求函数$y=e^x\sin^2 x$的麦克劳林展式（到x^4项）;

6. 设$f(x)$在(x_0,x_0+r)上可导，$f'(x)$在(x_0,x_0+r)上严格单增且$\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=-\infty$，求证$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{f'(x)}=0$.

7. 设$a>0$. 证明：对任意实数x, 都有$a^x\geq x+1$的充分必要条件是$a=\mathrm{e}$.

8. 设函数$f(x)$在$[0,2]$连续，在$(0,2)$两次可导，$f(0)=1$, $f(1)=2$, $f(2)=3$. 证明存在$\xi\in(0,2)$, 使得$f''(\xi)=0$.

9. 设$f(x)$在$(0,+\infty)$上可导，对任意$x>0$, 有$f'(x)\leqslant\dfrac{f(x)}{x}$.

(1) 证明$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递减；

(2) 证明对任意$x>0$和任意$y>0$, 有$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$.

10. 设$f(x)$在$[a,b]$连续可导，在(a,b)两次可导，$f(a)=f(b)$, $f'(a)=f'(b)=0$. 证明: 存在ξ_1, $\xi_2\in(a,b)$, $\xi_1<\xi_2$, 使得$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$.

(B)

1. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上可微并且$|f'(x)| \le M$. 如果对任何$x \ge a$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n)=0$, 求证$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上两次可导, $f''(x)>0$, $f(0)<0$, 且有$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\alpha<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\beta>0$, 求证$f(x)$恰有两个零点.

3. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上三次可微且满足对任何实数x，$|f(x)| \le M_0$，$|f'''(x)| \le M_3$（M_0，M_3为常数）. 证明存在与M_0，M_3无关的常数C_1和C_2，使对任何实数x，都有

$$|f'(x)| \le C_1 M_0^{\frac{2}{3}} M_3^{\frac{1}{3}}, \quad |f''(x)| \le C_2 M_0^{\frac{1}{3}} M_3^{\frac{2}{3}}.$$

4. 设函数$f(x)$在$(0,\eta)$上两次可导，α是大于0的常数，当$x \to 0^+$时，有$f(x)=o\left(x^{\alpha+2}\right)$, $f''(x)=O\left(x^{\alpha}\right)$, 求证：$f'(x)=o\left(x^{\alpha+1}\right)$ $(x\to 0^+)$.

5. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续可导，在(a,b)中两次可导，$f(a)=f(b)=0$, 对任意$x\in(a,b)$, 有$f(x)+f''(x) \geqslant 0$, 且存在$x_0\in(a,b)$, 使得$f(x_0)>0$. 证明：$b-a \geqslant \pi$.

6. 是否存在$(-\infty,+\infty)$上的连续可微函数$f(x)$, 使得对任意实数x, 有$f(x)>0$且$f'(x)=f(f(x))$?

7. 是否存在$(-\infty,+\infty)$上严格递增的可微函数$f(x)$, 使得对任何实数x, 有$f'(x)=f(f(x))$? 证明你的结论.

8. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上三次连续可微，$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$和$f'''(x)$都恒大于0, 且对任意实数x, 有$f'''(x) \leqslant f(x)$, 求证：对任意实数x, 有$f'(x)<2f(x)$.

9. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可微，对任意实数x, 有$f'(x)>f(f(x))$, 求证：对任意$x \geqslant 0$, 有$f(f(f(x))) \leqslant 0$.