施笃兹定理

施笃兹定理是奥地利数学家Otto Stolz (1842-1905) 和意大利数学家Ernesto Cesàro (1859 - 1906) 最早提出并证明的([1]和[2])，因此也被称为Stolz-Cesàro定理或Stolz-Cesàro引理. 对于数列极限，当$x_n \to \infty$且$y_n \to \infty$或者$x_n \to 0$且$y_n \to 0$时, 比值$\dfrac{x_n}{y_n}$的极限状态极为复杂，这两种情形下的极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$分别被称为$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式和$\dfrac{0}{0}$型不定式，施笃兹定理是计算这两种不定式的一个有力工具.

定理1 (施笃兹定理，$\dfrac{\infty}{\infty}$型)　设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是两个数列, 满足下列条件:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=A$ (其中$A\in\mathbb{R}$或$A=+\infty$或$A=-\infty$),

(2) 数列$\{y_n\}$严格递增且趋向$+\infty$,

则有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=A$.

证　(i) 设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=0$. 于是对于任给的$\varepsilon>0$, 存在正整数$N_1$, 使当$n\geqslant N_1$时, 就有$\left|\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 从而

$$-\frac{\varepsilon}{2}(y_{n+1}-y_n)<x_{n+1}-x_n<\frac{\varepsilon}{2}(y_{n+1}-y_n).$$

因此当$n>N_1$时, 有

$$x_n-x_{N_1}=\sum_{k=N_1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)<\sum_{k=N_1}^{n-1}\frac{\varepsilon}{2}(y_{k+1}-y_k)=\frac{\varepsilon}{2}(y_n-y_{N_1})$$

和

$$x_n-x_{N_1}=\sum_{k=N_1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)>-\sum_{k=N_1}^{n-1}\frac{\varepsilon}{2}(y_{k+1}-y_k)=-\frac{\varepsilon}{2}(y_n-y_{N_1}).$$

故$\left|\dfrac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 另一方面, 又有

$$\left|\frac{x_n-x_{N_1}}{y_n-y_{N_1}}\right|=\frac{\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\dfrac{x_{N_1}}{y_n}\right|}{1-\dfrac{y_{N_1}}{y_n}}\geqslant\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_{N_1}}{y_n}\right|\geqslant\left|\frac{x_n}{y_n}\right|-\left|\frac{x_{N_1}}{y_n}\right|.$$

于是$n>N_1$时，有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\left|\frac{x_{N_1}}{y_n}\right|.$$

由已知, $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 故有$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{N_1}}{y_n} = 0$, 从而对前述的$\varepsilon > 0$, 又存在正整数$N_2$, 使当$n > N_2$时, 就有$\left|\frac{x_{N_1}}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. 令$N = \max\{N_1, N_2\}$, 于是当$n > N$时, 就有$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. 所以$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$, 即此时结论成立.

(ii) 设$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a \neq 0$. 令$z_n = x_n - ay_n$, 于是有

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - a \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

由上段证明知$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{y_n} = 0$. 从而有$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$.

(iii) 设$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty$. 因为$\{y_n\}$ 严格递增且$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 故存在正整数$N$, 使当$n > N$时, 就有

$$x_{n+1} - x_n > y_{n+1} - y_n > 0.$$

故不妨设$\{x_n\}$严格递增且$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. 又因这时有$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = 0$, 由(i)有$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$. 从而得到$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

(iv) 设$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = -\infty$. 这时, 只要令$z_n = -x_n$即可由(iii) 的结论得到证明. □

注 1. 注意定理1的前提条件中没有"数列$\{x_n\}$趋向∞"的要求.

2. 当$A = \infty$时，定理1的结论未必成立. 例如，$x_n = (-1)^n n$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \cdots$, 则$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \infty$, 而$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$不存在.

3. 定理1的逆命题不成立. 例如，$x_n = 3n + (-1)^n$, $y_n = 3n + (-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$, 则$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, 而$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$不存在. 因此，要从$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$得到$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A$，或者已知$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$存在，或者需要另外附加条件，下面的命题就是一例.

命题1 设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是两个数列, 满足下列条件:

(1) 对任何正整数n, 有$y_n \neq 0$,

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A \in \mathbb{R}$,

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{y_{n+1}} = B \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

则有$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A$.

证 因为

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \frac{x_n}{y_{n+1}}}{1 - \frac{y_n}{y_{n+1}}} = \frac{\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \frac{x_n}{y_n} \cdot \frac{y_n}{y_{n+1}}}{1 - \frac{y_n}{y_{n+1}}},$$

所以由条件得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{A-A\cdot B}{1-B}=A. \qquad \square$$

4. 施笃兹定理有一些常用的推论. 例如，

(1) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ (其中$a\in\mathbb{R}$或$a=+\infty$或$a=-\infty$), 则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}=a$;

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=a$ (其中$a\in\mathbb{R}$或$a=+\infty$或$a=-\infty$), 则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=a$;

(3) 设$x_n>0,\ n=1,2,\cdots$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ (其中$a\in\mathbb{R}$或$a=+\infty$)，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$;

(4) 设$x_n>0,\ n=1,2,\cdots$且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=a$ (其中$a\in\mathbb{R}$或$a=+\infty$)，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$.

5. 由定理1可以证明下面形式上更一般的结果：设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是两个数列, p是一个给定的正整数，满足下列条件:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+p}-x_n}{y_{n+p}-y_n}=A$ (其中$A\in\mathbb{R}$或$A=+\infty$或$A=-\infty$),

(2) 数列$\{y_n\}$严格递增且趋向$+\infty$.

则有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=A$.

类似于定理1，不难证明$\dfrac{0}{0}$型不定式的施笃兹定理.

定理2 (施笃兹定理，$\dfrac{0}{0}$型)　设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是两个数列, 满足下列条件:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,

(2) 数列$\{y_n\}$严格递减,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=A$ (其中$A\in\mathbb{R}$或$A=+\infty$或$A=-\infty$),

则有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=A$.

将来在第6章，学习了上下极限之后，施笃兹定理可以推广为上下极限形式的命题.

定理3　设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是两个数列, 满足数列$\{y_n\}$严格递增且趋向$+\infty$, 则有

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

定理4　设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是两个数列, 满足下列条件:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,

(2) 数列$\{y_n\}$严格递减,

则有

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

同样地，对于函数极限，当$f(x)\to 0$且$g(x)\to 0$或者$f(x)\to\infty$且$g(x)\to\infty$时, 比值$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的极限状态极为复杂，这两种情形下的极限$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$分别被称为$\dfrac{0}{0}$型不定式和$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式. 将来在一元微分学中，我们将给出计算这两种不定式的有力工具— 洛必达法则. 由施笃兹定理的思想，可以给出和证明下面的两个定理(它们可以看成是施笃兹定理的推广). 请自行给出定理的证明([3]中有定理5和定理6的证明).

定理5　设常数$T>0$，若$f(x), g(x)$在$[a,+\infty)$上满足

(1) 对任意$x\in[a,+\infty)$, 有$g(x+T)>g(x)$,

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$,

(3) $f(x), g(x)$在$[a,+\infty)$的每个有界子区间上有界，

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A$ (其中$A\in\mathbb{R}$或$A=+\infty$或$A=-\infty$),

则有$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

定理6　设常数$T>0$，若$f(x), g(x)$在$[a,+\infty)$上满足

(1) 对任意$x\in[a,+\infty)$, 有$0<g(x+T)<g(x)$,

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$,

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A$ (其中$A\in\mathbb{R}$或$A=+\infty$或$A=-\infty$),

则有$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

下面是应用施笃兹定理解决问题的一些例子，其中有的例子需要较高的技巧. [3]中有更多应用施笃兹定理的例子.

例1　设$p\in\mathbb{N}^*$, 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\dfrac{1}{p+1}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\dfrac{n}{p+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

证　(1) 由施笃兹定理，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{n^p+pn^{p-1}+\cdots+1}{(p+1)n^p+\cdots+1}\\
=&\frac{1}{p+1}.
\end{aligned}$$

(2) 由施笃兹定理，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p-\frac{n^{p+1}}{p+1}}{n^p}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p-\frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{p+1}}{(n+1)^p-n^p}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{(n^p+pn^{p-1}+\cdots+1)-\left(n^p+\frac{p}{2}n^{p-1}+\cdots+\frac{1}{p+1}\right)}{pn^{p-1}+\cdots+1}\\
=&\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

例2 设$a_1>0$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$, $n=1,2,\cdots$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$.

证 已知$0<a_1<1$, 故$a_2=a_1+\dfrac{1}{a_1}>a_1>0$. 设$a_n>a_{n-1}>0$, 则$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}>a_n>0$, 因此由数学归纳法知对一切正整数$n$, 有$a_{n+1}>a_n>0$, 于是$\{a_n\}$严格递增. 若$\{a_n\}$有上界，由单调收敛定理知数列$\{a_n\}$收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$, 在$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$两边令$n\to\infty$取极限得$a=a+\dfrac{1}{a}$, 矛盾. 因此$\{a_n\}$无上界，从而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 由施笃兹定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{a_n^2}}{2}=1.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$. □

例3 (William Lowell Putnam Mathematical Competition, 2006年B6)

设k是一个大于1的整数，$a_1>0$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$, $n=1,2,\cdots$, 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^{k+1}}{n^k}$.

解 不难看到$\{a_n\}$是一个严格递增的正数数列. 若$\{a_n\}$有上界，则由单调收敛定理知$\{a_n\}$收敛于一个正数A, 在$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$两边令$n\to\infty$取极限，得$A=A+\dfrac{1}{\sqrt[k]{A}}$, 即$0=\dfrac{1}{\sqrt[k]{A}}$, 矛盾！因此$\{a_n\}$无上界，从而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

对任意$x>0$, 将$\left(1+\dfrac{k+1}{k}x\right)^k$看成$k$个$1+\dfrac{k+1}{k}x$和1个1相乘，由均值不等式得

$$\left(1+\frac{k+1}{k}x\right)^{\frac{k}{k+1}}<\frac{k\left(1+\frac{k+1}{k}x\right)+1}{k+1}=1+x,$$

故$(1+x)^{\frac{k+1}{k}}>1+\dfrac{k+1}{k}x$; 另一方面，由$(1+x)^{\frac{1}{k}}<1+\dfrac{x}{k}$得

$$(1+x)^{\frac{k+1}{k}}-1-\frac{k+1}{k}x<(1+x)\left(1+\frac{x}{k}\right)-1-\frac{k+1}{k}x=\frac{x^2}{k}.$$

合起来，就得到
$$0<(1+x)^{\frac{k+1}{k}}-1-\frac{k+1}{k}x<\frac{x^2}{k}.$$
将$x=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1=a_n^{-\frac{k+1}{k}}$代入到上面的不等式，整理得到
$$0<a_{n+1}^{\frac{k+1}{k}}-a_n^{\frac{k+1}{k}}-\frac{k+1}{k}<\frac{a_n^{-\frac{k+1}{k}}}{k}.$$
由两边夹定理知
$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^{\frac{k+1}{k}}-a_n^{\frac{k+1}{k}}-\frac{k+1}{k}\right)=0,\ 即\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^{\frac{k+1}{k}}-a_n^{\frac{k+1}{k}}\right)=\frac{k+1}{k}.$$
于是由施笃兹定理得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{\frac{k+1}{k}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^{\frac{k+1}{k}}-a_n^{\frac{k+1}{k}}\right)=\frac{k+1}{k},$$
故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{k+1}}{n^k}=\left(\frac{k+1}{k}\right)^k.$$
□

例4　设$x_n=\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \mathrm{C}_n^k}{n^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　由施笃兹定理，有
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}x_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln \mathrm{C}_{n+1}^k-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \mathrm{C}_n^k}{(n+1)^2-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\frac{\mathrm{C}_{n+1}^k}{\mathrm{C}_n^k}}{2n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\frac{n+1}{n-k+1}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-\ln(n+1)!}{2n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)\ln(n+1)-\ln(n+1)!]-(n\ln n-\ln n!)}{(2n+1)-(2n-1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$
□

例5　设$\{a_n\}$是一个数列，$a,\lambda\in\mathbb{R}$, $|\lambda|>1$, 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n+1})=a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{a}{1+\lambda}$.

证　令$b_n=a_n-\dfrac{a}{1+\lambda}$, $n=1,2,\cdots$, 则由$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n+1})=a$得$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n+\lambda b_{n+1})=0$. 由施笃兹定理，有
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(-\operatorname{sgn}\lambda)^n b_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{(-\lambda)^n b_n}{|\lambda|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-\lambda)^{n+1}b_{n+1}-(-\lambda)^n b_n}{|\lambda|^{n+1}-|\lambda|^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\operatorname{sgn}\lambda)^n}{|\lambda|-1}(b_n+\lambda b_{n+1})=0.\end{aligned}$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(-\operatorname{sgn}\lambda)^n} \cdot (-\operatorname{sgn}\lambda)^n b_n = 0$, 进而得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{a}{1+\lambda}$. □

例6 设$a_1 > 0$,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k},\ n = 1, 2, \cdots,$$

求证：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2\ln n}} = 1.$$

证 记$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n = 1, 2, \cdots$. 当$n = 1$时，由题设知$a_1 > 0$. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$都大于0, 则$S_n > 0$, 从而$a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{S_n} > 0$. 由数学归纳法知对任意正整数$n$, 都有$a_n > 0$. 于是$a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{S_n} > a_n$, 即数列$\{a_n\}$严格递增. 进而知$na_1 \leqslant S_n \leqslant na_n$, $n = 1, 2, \cdots$. 由

$$a_{n+1}^2 = \left(a_n + \frac{1}{S_n}\right)^2 \geqslant \left(a_n + \frac{1}{na_n}\right)^2 > a_n^2 + \frac{2}{n}$$

可见

$$a_{n+1}^2 > a_1^2 + \frac{2}{1} + \cdots + \frac{2}{n} \to +\infty\ (n\to\infty),$$

故$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. 注意到$0 < \dfrac{n}{S_n^2} \leqslant \dfrac{1}{na_1^2}$，根据两边夹定理知$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{S_n^2} = 0$. 因为

$$1 < \frac{(n+1)a_{n+1} - na_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{n}{a_{n+1}S_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_1 a_{n+1}},$$

所以由两边夹定理得$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)a_{n+1} - na_n}{a_{n+1}} = 1$，再由施笃兹定理知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a_{n+1} - na_n}{a_{n+1}} = 1.$$

因此使用施笃兹定理就得到

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{2\ln n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{2\ln(n+1) - 2\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(a_{n+1}^2 - a_n^2)}{2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{na_n}{S_n} + \frac{n}{2S_n^2}\right) = 1 + 0 = 1, \end{aligned}$$

进而得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2\ln n}} = 1.$$

□

参考文献

[1] Stolz, Otto, Über die grenzwerte der quotienten, Mathematische Annalen 15, 556 – 559 (1879).

[2] Cesàro, Ernesto, Sur la convergence des séries, Nouvelles annales de mathématiques, Series 3, 7: 49 – 59 (1888).

[3] 孙本旺，汪浩，数学分析中的典型例题和解题方法，湖南科学技术出版社，1981.