有限覆盖定理、闭区间上连续函数性质的证明

数学分析I

第24讲

November 30, 2022

到目前为止, 我们已经给出了如下(1)-(5)五个关于实数的基本定理, 并证明了它们都是互相等价的命题. 而命题(6)则是本节将要介绍的最后一个基本定理.

- (1) 确界原理
- (2) 单调收敛定理
- (3) 区间套定理
- (4) 致密性定理
- (5) 柯西收敛原理
- (6) 有限覆盖定理

“有限覆盖定理”, 又被称为“海涅-波莱尔(Heine-Borel)定理”. 我们要证明以上六个命题都是互相等价的, 只需要再证明(3) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (4)就足够了.

区间集的并集

设$\mathcal{J}$是一个区间集, 即对$\mathcal{J}$中的每一个元素$I \in \mathcal{J}$, I都是一个区间. 那么, 把$\mathcal{J}$中所有的区间合并成一个集合, 记为$\bigcup \mathcal{J}$或者$\bigcup\{I|I \in \mathcal{J}\}$. 它的意义是: 对任意$x$,

$$x \in \bigcup \mathcal{J} \iff \text{存在一个} I \in \mathcal{J} \text{使得} x \in I.$$

例 1

(1) 若$\mathcal{J}_1$是有穷集合, 即$\mathcal{J}_1 = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, 则

$$\bigcup \mathcal{J}_1 = \bigcup_{i=1}^{n} I_i = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n;$$

这个例子说明在区间集是有限集的情形，区间集的并集就是这有限多个区间的并.

例 1

(2) 若 $\mathscr{J}_2 = \left\{ \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \middle| n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$, 则

$$\begin{aligned} \bigcup \mathscr{J}_2 &= \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \cdots \cup \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \cup \cdots \\ &= \left\{ x \in (0,1) \middle| x \neq \frac{1}{n}, n = 2, 3, \ldots \right\}; \end{aligned}$$

例 1

(3) 若 $\mathscr{J}_3 = \left\{ \left(x - \frac{1}{3}, x + \frac{1}{3} \right) \middle| x \in (a, b] \right\}$, 则

$$\bigcup \mathscr{J}_3 = \left(a - \frac{1}{3}, b + \frac{1}{3} \right).$$

定义 1

设S是一个数集，$\mathcal{J}$是一个区间集. 如果$S \subseteq \bigcup \mathcal{J}$, 即: 对任意$x \in S$, 都存在一个$I \in \mathcal{J}$, 使得$x \in I$. 我们就称区间集$\mathcal{J}$是数集$S$的一个覆盖, 或者说$\mathcal{J}$覆盖$S$.

进一步地, 如果$\mathcal{J}$是一个开区间集, 即属于$\mathcal{J}$中的区间都是开区间, 我们称$\mathcal{J}$是数集S的一个开覆盖.

例 2

(1) 若$S = [0,1]$, $\mathcal{J} = \left\{(-1,0], \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \middle| n = 1,2,3,\dots\right\}$. 则$\mathcal{J}$覆盖$S$, 但是, 从$\mathcal{J}$中任意减少一个区间, 都不能够再覆盖$S$.

例 2

(2) 若$S = (0,1)$, $\mathcal{J} = \left\{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right) \middle| n = 2,3,4\dots\right\}$. 同样有, $\mathcal{J}$覆盖S, 但是, 从$\mathcal{J}$中任意减少一个区间, 都不能够再覆盖S.

思考题1

给出$S=(0,1)$的一个覆盖$\mathcal{J}$, 使得$\mathcal{J}$中每一个区间都是S的闭子区间，且从$\mathcal{J}$中任意减少一个区间, 都不能够再覆盖S.

思考题2

给出$S=(0,1]$的一个覆盖$\mathcal{J}$, 使得$\mathcal{J}$中每一个区间都是开区间，且$\mathcal{J}$的任何有限子集都不能够覆盖S.

判断下面的命题是否成立.

设$\mathcal{J}$是$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$的一个开覆盖，则$\mathbb{R}\setminus\bigcup\mathcal{J}$没有聚点.

(A) 成立

(B) 不成立

定义 2

设区间集$\mathcal{J}$是数集S的一个覆盖. 如果$\mathcal{J}$的一个子集$\mathcal{J}_1$仍然是S的一个覆盖, 称$\mathcal{J}_1$是$\mathcal{J}$的子覆盖.

进一步地, 如果$\mathcal{J}_1$是一个有穷集合, 则称$\mathcal{J}_1$是$\mathcal{J}$的有限子覆盖.

定理 1 (有限覆盖定理)

闭区间的任意开覆盖都存在有限子覆盖.

证明

我们用区间套定理来证明.

设$S=[a,b]$, 开区间集$\mathcal{J}$覆盖S. 我们要证明: 能够在$\mathcal{J}$中选出有限个开区间来覆盖S.

反证法, 假设$[a,b]$不能被$\mathcal{J}$中的任意有限个开区间所覆盖. 把$[a,b]$等分为两个闭区间$\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$, 其中至少有一个不能被$\mathcal{J}$中的有限个开区间所覆盖, 记该区间为$[a_1,b_1]$. 如果两个闭区间都不能被$\mathcal{J}$中的有限个开区间所覆盖, 就任取一个记为$[a_1,b_1]$.

再等分$[a_1, b_1]$为$\left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$，其中又至少有一个不能被$\mathcal{J}$中的有限个开区间所覆盖，将它记为$[a_2, b_2]$. 依此类推，我们得到一列闭区间$\{[a_n, b_n]\}$，每一个$[a_n, b_n]$都不能被$\mathcal{J}$中的有限个开区间所覆盖，并且:

(i) $[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$;

(ii) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0 \ (n \to \infty)$.

由区间套定理，有唯一的$\xi \in [a, b]$使得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$.

由于$\mathcal{J}$覆盖$[a,b]$, 在$\mathcal{J}$中必有一个开区间(α,β)使$\xi\in(\alpha,\beta)$, 即

$$\alpha<\xi<\beta.$$

又由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$, 存在正整数$N$, 当$n>N$时, 成立

$$\alpha<a_n<b_n<\beta.$$

即$[a_n,b_n]\subseteq(\alpha,\beta)$. 这表明, $\mathcal{J}$中的一个区间就覆盖$[a_n,b_n]$, 矛盾. 这就完成了定理的证明.

判断下面的命题是否成立.

设I是一个区间，且区间I的任意开覆盖都存在有限子覆盖，则I是闭区间.

(A) 成立

(B) 不成立

有限覆盖定理蕴涵致密性定理

证明

设$\{x_n\}$是一个有界数列, 即有实数a, b使$a \leqslant x_n \leqslant b$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. 我们要证明$\{x_n\}$有收敛子列. 由6.2节的定理3, 我们只须证, 存在$\xi \in [a, b]$, 满足: 在ξ的任意邻域内都含有$\{x_n\}$的无穷多项.

反证法, 假设对任意$\xi \in [a, b]$, 都有$\varepsilon_\xi > 0$, 使得在邻域$(\xi - \varepsilon_\xi, \xi + \varepsilon_\xi)$中只含有$\{x_n\}$的有穷多项. 于是我们得到一个开区间集

$$\mathcal{J} = \{(\xi - \varepsilon_\xi, \xi + \varepsilon_\xi) | \xi \in [a, b]\}.$$

显然, 闭区间$[a, b]$中的每一个点ξ都属于$\mathcal{J}$中的一个开区间, 即$\mathcal{J}$是$[a, b]$的一个开覆盖. 根据有限覆盖定理, 我们知道$\mathcal{J}$有一个有限子覆盖

$$\mathcal{J}_1 = \{(\xi_1 - \varepsilon_{\xi_1}, \xi_1 + \varepsilon_{\xi_1}), \ldots, (\xi_m - \varepsilon_{\xi_m}, \xi_m + \varepsilon_{\xi_m})\}.$$

由ε_ξ的选取知道, 对于$i = 1, 2, \ldots, m$, 在开区间$(\xi_i - \varepsilon_{\xi_i}, \xi_i + \varepsilon_{\xi_i})$内只含有$\{x_n\}$的有穷多项, 即有正整数$N_i$, 当$n > N_i$时, 成立

$$x_n \notin (\xi_i - \varepsilon_{\xi_i}, \xi_i + \varepsilon_{\xi_i}).$$

注意到$\mathcal{J}_1$是$\mathcal{J}$的子覆盖, 因而$\mathcal{J}_1$覆盖$[a, b]$, 即

$$\bigcup_{i=1}^{m} (\xi_i - \varepsilon_{\xi_i}, \xi_i + \varepsilon_{\xi_i}) \supseteq [a, b].$$

现在, 令$N = \max\{N_1, N_2, \ldots, N_m\}$, 当$n > N$时,

$$x_n \notin \bigcup_{i=1}^{m} (\xi_i - \varepsilon_{\xi_i}, \xi_i + \varepsilon_{\xi_i}) \supseteq [a, b].$$

这与$a \leqslant x_n \leqslant b$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$矛盾. 完成证明.

思考题

思考题3

怎样应用有限覆盖定理证明区间套定理？

思考题4

怎样用确界原理证明有限覆盖定理？

数集的任意开覆盖都存在至多可数的子覆盖

若把有限子覆盖的要求放宽，只要求$\mathcal{J}_1$是一个至多可数的集合，则有下面的定理.

任何一个数集的任意开覆盖都存在至多可数的子覆盖.

思考题5

任意开区间能用一列端点是有理数的子开区间来覆盖. 请说明理由.

思考题6

集合$\{(a, b) \big| a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$是可数无限集还是不可数无限集？

上面的两个思考题是一种提示，请自己思考上面定理的证明思路.

有界定理

闭区间上的连续函数必有界.

证明

设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续. 定义$[a,b]$的一个子集如下:

$$S=\{s\in[a,b]|f(x)\text{在}[a,s]\text{上无界}\}.$$

我们只需证明$S=\emptyset$即可.
反证法, 假设$S\neq\emptyset$. 可设$\xi=\inf S$, 于是$\xi\in[a,b]$.
若$a<\xi<b$, 则$f(x)$在$x=\xi$连续, 因而在ξ的某邻域$(\xi-\delta,\xi+\delta)\subseteq(a,b)$内有界. 又由$\xi-\delta<\inf S$, 知$\xi-\delta\notin S$, $f(x)$在$[a,\xi-\delta]$上有界. 所以, $f(x)$在$[a,\xi-\delta]\cup(\xi-\delta,\xi+\delta)=[a,\xi+\delta)$有界, 进而, 当$\xi<s<\xi+\delta$时, $f(x)$都在$[a,s]$上有界. 这与$\xi=\inf S$矛盾. 若$\xi=a$或$\xi=b$, 同理可导出矛盾.
因此假设不成立, $S=\emptyset$, $f(x)$在$[a,b]$上有界.

另证

设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续. 定义$[a,b]$的一个子集如下:

$$S=\{s\in[a,b]|f(x)\text{在}[a,s]\text{上有界}\}.$$

由$f(x)$在点a连续知$f(x)$在点a的某邻域中有界，因此S非空. 由确界原理知S有上确界. 记$\xi=\sup S$, 则$\xi\in(a,b]$.

由于$f(x)$在点ξ连续，故$f(x)$在ξ的某邻域$(\xi-\delta,\xi+\delta)$与$[a,b]$之交上有界. 由$\xi=\sup S$知必有$s_0\in(\xi-\delta,\xi]$, 使得$f(x)$在$[a,s_0]$上有界，从而$f(x)$在$[a,\xi+\delta)\cap[a,b]$上有界.

若$\xi<b$, 不妨设$\xi+\delta\leqslant b$, 于是$f(x)$在$[a,\xi+\delta)$上有界, 这与$\xi=\sup S$矛盾. 故必有$\xi=b$. 从而$[a,\xi+\delta)\cap[a,b]=[a,b]$, 即$f(x)$在$[a,b]$上有界.

练习6.4的第一题

设函数$f(x)$在$[a,b]$上没有第二类间断点. 证明$f(x)$在$[a,b]$有界.

上面的命题还可以更一般一些：设函数$f(x)$在$[a,b]$的每一点局部有界，即对任意$x \in [a,b]$, 存在$\delta_x > 0$, 使得$f(x)$在$(x-\delta_x, x+\delta_x) \cap [a,b]$上有界，则$f(x)$在$[a,b]$有界.

思考题7

怎样应用有限覆盖定理证明上面更一般的命题？

思考题8

闭区间上的函数还有哪些局部性质蕴涵相应的整体性质？

证明

若不然, 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续但无界. 于是对每个$n\in\mathbb{N}^*$, 都有$x_n\in[a,b]$, 使得

$$|f(x_n)|>n.$$

这样, 我们得到一个有界数列$\{x_n\}$, 从而由致密性定理知$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 记

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi\in[a,b].$$

因为$f(x)$在$[a,b]$上连续, 当然在点ξ连续, 所以有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(\xi).$$

由此知$\{f(x_{n_k})\}$有界. 但由$|f(x_n)|>n$又知$\{f(x_{n_k})\}$无界, 矛盾. 所以$f(x)$必于$[a,b]$上有界.

最大最小值定理

闭区间上的连续函数必能取到最大值和最小值.

证明

设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续. 由有界定理, $f(x)$在$[a, b]$上有界. 因而有上确界和下确界, 记$\alpha = \inf\{f(x)|x \in [a, b]\}, \beta = \sup\{f(x)|x \in [a, b]\}$. 我们要证明$f(x)$在$[a, b]$上可以达到上确界$\beta$和下确界$\alpha$.

我们只证明上确界情形. 由上确界定义, 对任意正整数n, 令$\varepsilon_n = \dfrac{1}{n} > 0$, 存在$x_n \in [a, b]$, 使得

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant \beta.$$

于是我们得到一个$[a, b]$中的数列$\{x_n\}$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$.

由致密性定理, 有界数列$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \to \xi$, 则$\xi \in [a, b]$. 注意到$\{f(x_{n_k})\}$也是$\{f(x_n)\}$的子列, 因而有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \beta.$$

最后, 由于$f(x)$在点ξ的连续性, 即$\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. 因此

$$\beta = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

所以β是$f(x)$在$[a, b]$上的最大值.

最小值情形同理可证.

证明

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续. 由有界定理, $f(x)$在$[a,b]$上有界. 因而有上确界和下确界, 记$\alpha = \inf\{f(x)|x \in [a,b]\}, \beta = \sup\{f(x)|x \in [a,b]\}$. 我们要证明$f(x)$在$[a,b]$上可以达到上确界$\beta$和下确界$\alpha$.

我们只证明上确界情形. 反证. 若$f(x)$不能取得最大值, 则对任何$x \in [a,b]$, 均有$f(x) < \beta$. 令

$$g(x) = \frac{1}{\beta - f(x)},$$

则$g(x)$是$[a,b]$上的连续函数. 由有界定理知$g(x)$于$[a,b]$上有界.

设$K>0$为$g(x)$在$[a,b]$上的一个上界, 即有

$$K \geqslant g(x) = \frac{1}{\beta - f(x)}, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

于是

$$f(x) \leqslant \beta - \frac{1}{K}, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

这表明$\beta - \frac{1}{K}$为$f(x)$的一个上界, 此与β为上确界矛盾. 从而证明了$f(x)$必能取得最大值β.

最小值情形同理可证.

思考题9

若$f(a)=\beta$, 则定理得证；若$f(a)<\beta$, 试构造集合$S\subseteq[a,b]$, 使得$\sup S=\beta$.

用区间套定理证明根的存在定理

根的存在定理

设$f(x)$在$[a,b]$上连续且有$f(a)f(b)<0$, 则在(a,b)内必有方程$f(x)=0$的一个根ξ.

证明

用闭区间套定理来证明.

不妨设$f(a)<0$, $f(b)>0$. 把$[a,b]$等分为两个闭区间$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$和$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$. 分成以下三种情形:

(1) 若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, 则令$\xi=\frac{a+b}{2}$, 完成证明;

(2) 若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$, 记$[a_1,b_1]=\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$;

(3) 若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$, 记$[a_1,b_1]=\left[\frac{a+b}{2},b\right]$.

在后两种情形下, 总成立$f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$.

再将$[a_1, b_1]$等分为两个闭区间$\left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. 重复以上过程, 有以下两种可能:

(a) 存在某个n, 使$f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)=0$, 则令$\xi=\dfrac{a_n+b_n}{2}$, 完成证明;

(b) 对每一个n, $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)$都不等于0. 于是得到闭区间列$\{[a_n, b_n]\}$,

满足: 对任意n, 有$f(a_n)<0, f(b_n)>0$, 并且

(i) $[a,b]\supseteq[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$;

(ii) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}\to 0\ (n\to\infty)$.

根据区间套定理, 有$\xi\in[a,b]$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$. 由$f(x)$在点$\xi$的连续性,

$$f(\xi)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)\leqslant 0,\quad f(\xi)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)\geqslant 0.$$

即$f(\xi)=0$.

我们还可以注意到，上面的证明不但保证了根ξ的存在，还给出了一个计算根ξ的近似算法．事实上，假如用$\dfrac{a_n+b_n}{2}$作为ξ的近似值，则误差$\Delta=\left|\xi-\dfrac{a_n+b_n}{2}\right|\leqslant\dfrac{b_n-a_n}{2}=\dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.

思考题10

怎样应用有限覆盖定理证明根的存在定理？