第四章 导数

难题选解

例 1 是否存在实轴上的可微函数$f(x)$满足条件$f(f(x)) = -x^3 + x^2 + 1$? 说明理由.

解 不存在实轴上的可微函数$f(x)$满足条件$f(f(x)) = -x^3 + x^2 + 1$. 反证. 若存在实轴上的可微函数$f(x)$满足条件$f(f(x)) = -x^3 + x^2 + 1$, 则

$$f'(f(x)) \cdot f'(x) = -3x^2 + 2x.$$

因为$x^* = 1$是$f(f(x)) = -x^3 + x^2 + 1$的唯一不动点，所以由第一章A组第30题知$x^* = 1$也是$f(x)$的唯一不动点，从而$f(1) = 1$. 在上面的等式中令$x = 1$, 得$[f'(1)]^2 = -1$, 矛盾！ □

例 2 证明：勒让德*(Legendre)*多项式

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}[(x^2-1)^l]^{(l)} \quad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

满足

$$(1-x^2)P_l''(x) - 2xP_l'(x) + l(l+1)P_l(x) = 0.$$

证 设$y = (x^2-1)^l$，则$y' = l(x^2-1)^{l-1} \cdot 2x$, 故有

$$(x^2-1)y' - 2lxy = 0.$$

上式两边求$l+1$阶导数，由Leibniz公式可得

$$(x^2-1)y^{(l+2)} + 2(l+1)xy^{(l+1)} + (l+1)ly^{(l)} - 2l\left[xy^{(l+1)} + (l+1)y^{(l)}\right] = 0,$$

即

$$(x^2-1)y^{(l+2)} + 2xy^{(l+1)} - l(l+1)y^{(l)} = 0.$$

又因为$P_l(x) = \dfrac{1}{2^l l!}y^{(l)}$, 所以$P_l'(x) = \dfrac{1}{2^l l!}y^{(l+1)}$, $P_l''(x) = \dfrac{1}{2^l l!}y^{(l+2)}$, 从而有

$$(1-x^2)P_l''(x) - 2xP_l'(x) + l(l+1)P_l(x) = 0.$$

□

例 3 设$\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k>0$, 其中$k=1,2,\cdots$,

$$f(x)=\frac{1}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)\cdots(1-\lambda_n x)},$$

求证：$f^{(k)}(0)>0$, $k=1,2,\cdots$.

证 函数$f(x)$在0点的充分小邻域内恒大于0, 令$g(x)=(\ln f(x))'=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\lambda_j}{1-\lambda_j x}$, 则由$(\ln f(x))'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$知$f'(x)=f(x)g(x)$. 对任意自然数$i$, 都有$g^{(i)}(x)=i!\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\lambda_j^{i+1}}{(1-\lambda_j x)^{i+1}}$, 从而$g^{(i)}(0)=i!\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j^{i+1}>0$. 下面用数学归纳法来证$f^{(k)}(0)>0$, $k=1,2,\cdots$. 当$k=1$时，$f'(0)=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j>0$. 设$f'(0)$, $f''(0)$, $\cdots$, $f^{(k-1)}(0)$都大于0, 由Leibniz公式得

$$f^{(k)}(x)=[f'(x)]^{(k-1)}=[f(x)g(x)]^{(k-1)}=\sum_{i=0}^{k-1}\mathrm{C}_{k-1}^{i}f^{(i)}(x)g^{(k-1-i)}(x),$$

故$f^{(k)}(0)=\sum\limits_{i=0}^{k-1}\mathrm{C}_{k-1}^{i}f^{(i)}(0)g^{(k-1-i)}(0)>0$. 因此，根据数学归纳法知对任意正整数$k$, 都有$f^{(k)}(0)>0$. □

例 4 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上两次连续可导且对任意x, h, 都有

$$f(x+h)-f(x)=hf'\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

求证$f(x)=ax^2+bx+c$, 其中a,b,c都是常数.

证 在$f(x+h)-f(x)=hf'\left(x+\dfrac{h}{2}\right)$中令$x=0$, 得到

$$f(h)-f(0)=hf'\left(\frac{h}{2}\right).$$

$f(x+h)-f(x)=hf'\left(x+\dfrac{h}{2}\right)$两边对$h$求导，得

$$f'(x+h)=f'\left(x+\frac{h}{2}\right)+hf''\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{1}{2},$$

上式中令$x=-\dfrac{h}{2}$, 得

$$f'\left(\frac{h}{2}\right)=f'(0)+\frac{f''(0)}{2}h.$$

所以综合上面的结果，有

$$f(h) = f(0) + hf'\left(\frac{h}{2}\right) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2.$$

□

补充题4

(A)

1. 设$f(x)$在(a,b)可导, 且对任意$x, y \in (a,b)$, 有$|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$. 证明对任意$x \in (a,b)$, 有$|f'(x)| \leqslant M$.

2. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，在点0处可导, 对任意实数x, 都有$f(2x) = 2f(x)$, 证明：对任意实数x, 都有$f(x) = f'(0)x$.

3. 设$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{当}x\text{是有理数}, \\ 2x-1, & \text{当}x\text{是无理数}. \end{cases}$ 证明：

   (1) 对任意$x_0 \neq 1$, $f(x)$在点x_0处不连续；

   (2) $f(x)$在点$x_0 = 1$处可导.

4. 设$a > 0$, 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n^2}\right)\left(1+\frac{2a}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{na}{n^2}\right)$.

5. 设$y = f(x)$是由参数方程$x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$, $t > 0$确定的函数，求$36(y-\sqrt{3x})y''-x$；

6. 设$f(x) = x^a + a^x + a^{x^x}$ $(a > 0,\ x > 0)$, 求$f'(x)$;

7. 求方程$xy - \ln y = 1$确定的隐函数的二阶导数$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$;

8. 设$f(x) = \frac{x^{2016}}{x^2-1}$, 求$f^{(2016)}(x)$；

9. 设$y = \frac{x^2+x+1}{\mathrm{e}^x}$，求$y^{(10)}$；

10. 设$\alpha > 0$，

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

   (1) 函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导，求α的取值范围；

   (2) $f'''(0)$存在，求α的取值范围.

(B)

1. 是否存在实轴上的可微函数$f(x)$满足条件$f(f(x)) = x^2 - 3x + 3$? 证明你的结论.

2. 设函数$f(x)$在(a,b)上连续，对任意$x \in (a,b)$, 有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h} = 0.$$

证明：集合$\{x\in(a,b)\big|f$在点x处可导$\}$在(a,b)中稠密.

3. 是否存在函数$f(x)$以$\{\frac{1}{n}|n=1,2,\cdots\}$为第二类间断点而在$[-2,2]$的其它点上都可微？若将可微改为二次可微而其它条件不变，结论又如何？说明理由.

4. 设$f(x)=\sqrt{x^2-1}$, 证明：对任意正整数n, 当n是奇数时，$f^{(n)}(x)$在$(1,+\infty)$上恒大于0, 当n是偶数时，$f^{(n)}(x)$在$(1,+\infty)$上恒小于0.

5. (行列式的求导法则) 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & \cdots & u_{1k}(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) & \cdots & u_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k1}(x) & u_{k2}(x) & \cdots & u_{kk}(x) \end{vmatrix}$$

(其中$u_{ij}(x)$为n次可微函数)，证明

$$\begin{aligned} & f^{(n)}(x) \\ = & \sum_{r_1+r_2+\ldots+r_k=n}\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}\cdot\begin{vmatrix} u_{11}^{(r_1)}(x) & u_{12}^{(r_1)}(x) & \cdots & u_{1k}^{(r_1)}(x) \\ u_{21}^{(r_2)}(x) & u_{22}^{(r_2)}(x) & \cdots & u_{2k}^{(r_2)}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k1}^{(r_k)}(x) & u_{k2}^{(r_k)}(x) & \cdots & u_{kk}^{(r_k)}(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(其中$r_1,r_2,\ldots,r_k$为非负整数).