8.4 微积分基本定理

微积分基本定理

定理 1

设$f(x)$在$[a,b]$上可积.

(i) $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上连续;

(ii) (微积分基本定理) 若$f(x)$在点$x_0\in[a,b]$连续, 则$G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在点$x_0$可导且$G'(x_0)=f(x_0)$. 特别地，若$f(x)$在$[a,b]$连续, 则$G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是$f(x)$在$[a,b]$的一个原函数, 即有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C,\quad x\in[a,b].$$

这一结果把不定积分与定积分这两个不同的概念联系在一起, 是相当深刻且相当漂亮的结果.

微积分基本定理的推论

推论 1

任一区间上的连续函数都有原函数.

牛顿-莱布尼茨公式

设$f(x)$在$[a, b]$上连续, $F(x)$是$f(x)$在$[a, b]$上的任一原函数, 则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

牛顿-莱布尼茨公式把定积分的计算问题化为求被积函数的一个原函数的问题, 极大地简化了定积分的计算并为许多关于积分的论证带来了方便. 它可由8.1节的定理2和8.2节的定理7得到.

用牛顿-莱布尼茨公式计算定积分

例 1

求$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

在应用牛顿-莱布尼茨公式时要注意原函数$F(x)$在区间$[a,b]$上的连续性条件. 例如，由7.5节的例3可得$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

在求$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$时，如下的计算是错误的:

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^\pi = 0-0=0.$$

错误的根源在于$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$在$\frac{\pi}{2}$处间断，不满足牛顿-莱布尼茨公式的条件.

定积分的分部积分公式

与不定积分类似, 用牛顿-莱布尼茨公式容易证明定积分也有分部积分公式:

$$\int_a^b F'(x)g(x)\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

这里要求$F'(x)$和$g'(x)$在$[a,b]$上都可积.

例 2

求 $\int_0^1 x\ln^2 x\mathrm{d}x$.

例 3

求 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x, n \geqslant 2$.

牛顿-莱布尼茨公式不要求被积函数连续

这些例子都是被积函数是连续的, 其实, 由8.1节的定理2, 牛顿-莱布尼茨公式并不需要被积函数连续, 只要在积分区间具有原函数即可. 我们举一个这方面的例子.

例 4

计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

这里被积函数不连续, 但是是有界函数, 在原点没有定义, 由于无论怎么样定义被积函数在原点的值, 不会改变可积性与积分的值, 因此我们可以任意给被积函数在原点定义. 由于间断点只有原点, 因此被积函数在积分区间可积. 我们可以用8.1节的更弱条件的牛顿-莱布尼茨公式.

定积分用于计算数列极限

例 5

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

改写

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}.$$

易见, 这是连续函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$在区间$[0,1]$均分成n等分的分割上的一个积分和. 所以有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2.$$

微积分基本定理用于包含积分的极限

例 6

设函数$f(x)$连续，求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{x^3}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{x^2}$.

因为函数$f(x)$连续，故$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是$f(x)$的一个原函数，即有$F'(x)=f(x)$. 从而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^3}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[F(x^2)-F(x^3)\right]=2xf(x^2)-3x^2f(x^3).$$

由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_{x^3}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2xf(x^2)-3x^2f(x^3)}{2x}=f(0).$$

注意根据问题的条件来选择适当的方法解决问题

设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$. 求证：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=a.$$

这时，用洛必达法则和微积分基本定理就解决问题了.

设$f(x)$在$[0,+\infty)$上有定义，对任意$A>0$，$f(x)$在$[0,A]$可积，且有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$. 求证：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=a.$$

这时，不能用洛必达法则. 可以用“分段估计”的方法来解决问题.

积分不等式

一般来说，计算或估计积分的方法都可以用于证明积分不等式，如利用黎曼积分的定义、利用定积分的不等式性质、适当放缩被积函数、进行“分段估计”、应用施瓦兹不等式等经典不等式、应用微分学方法、利用牛顿-莱布尼茨公式、利用分部积分法、利用换元积分法、使用“函数逼近”的方法、利用积分中值定理，等等. 证明较复杂的积分不等式常常需要综合运用多种方法.

例 7

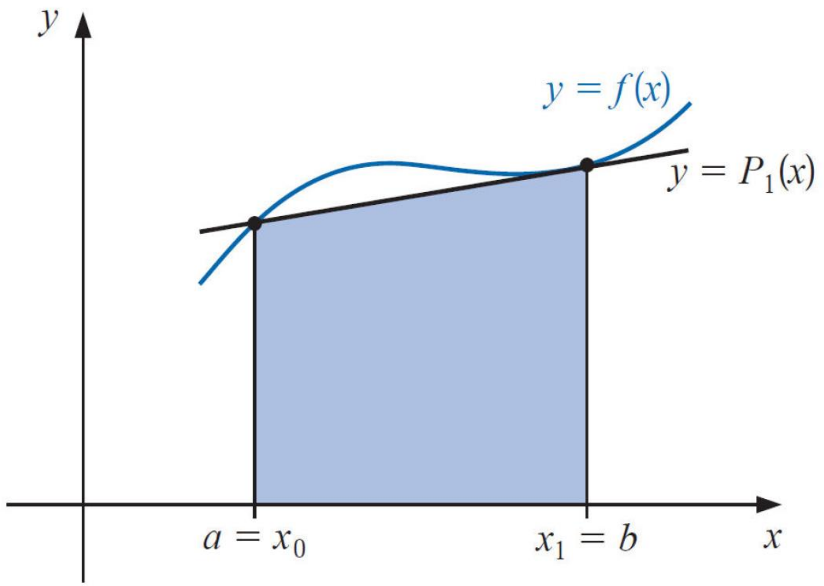
设$f(x)$在$[a, b]$上连续可微, 求证

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \leqslant \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

梯形近似的误差估计

设$f(x)$在$[a,b]$两次连续可导，则存在$\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] - \frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3.$$



如图所示，梯形近似实际上是用次数为1的拉格朗日插值多项式来近似$f(x)$.

泰勒公式的积分型余项

定理 2

若$f(x)$在包含x_0的一个区间有$n+1$阶连续导数, 则对此区间内的任意x, 有下面的泰勒公式成立:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

称为积分型余项.

比较泰勒公式的三种形式的余项可见, 拉格朗日余项和柯西余项中分别含有不定因素ξ和θ, 而积分余项中则不含类似的因素, 它是完全确定的. 这正是积分余项的优点. 因此, 在许多较为精确的估计式中, 经常使用带有积分余项的泰勒公式.

由泰勒公式的积分型余项导出拉格朗日余项

注意, 在积分型余项右端的积分中, $f^{(n+1)}(t)$连续且$(x-t)^n$不变号. 故由积分第一中值定理知, 存在ξ在x_0与x之间, 使得

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t &= f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n \mathrm{d}t\\ = \quad & -\tfrac{1}{n+1} f^{(n+1)}(\xi)(x-t)^{n+1}\Big|_{x_0}^{x} = \tfrac{1}{n+1} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.\end{aligned}$$

我们又得到拉格朗日余项

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

由泰勒公式的积分型余项导出柯西余项

此外, 在积分型余项右端的积分中, 把被积函数视为$f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$和1的乘积, 由积分第一中值定理又知, 在x_0与x之间存在ξ, 使得

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n (x-x_0). \end{aligned}$$

将ξ写成$\xi = x_0 + \theta(x-x_0), 0 \leqslant \theta \leqslant 1$, 上式化为

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x-x_0)\right)(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}.$$

此式所表达的余项$R_n(x)$称为柯西余项.