二次曲面复习题

一. 求经过三平行直线

$$L_1 : x = y = z, \quad L_2 : x - 1 = y = z + 1, \quad L_3 : x = y + 1 = z - 1$$

的圆柱面的方程.

二. 顶点在原点的二次锥面的方程采用矩阵形式可写为 $XAX^T = 0$, 其中 $X = (x, y, z)$, A 为三阶实对称矩阵且 $A \neq 0$. 证明: 当且仅当 $\mathrm{tr}(A) = 0$ 时, 该锥面上存在三条两两垂直的直线.

三. 给定椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. 求这样的点 P 的轨迹: 过点 P 能向椭球面作三条两两垂直的切线.

四. 给定二次曲面 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$. 求这样的点 P 的轨迹: 过点 P 能作三个两两正交的切平面.

五. 证明 $x^2 - 2z^2 + 5y - x + 8z = 0$ 是直纹二次曲面, 并判断曲面类型.

六. 已知非退化二次曲面 Σ 过以下九点: $A(1,0,0)$, $B(1,1,2)$, $C(1,-1,-2)$, $D(3,0,0)$, $E(3,1,2)$, $F(3,-2,-4)$, $G(0,1,4)$, $H(3,-1,-2)$, $I(5,2\sqrt{2},8)$. 问 Σ 是哪一类曲面?

七. 设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $P = (a, b, c)$ 为 S 外一固定点, 满足 $a^2 + b^2 > 2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明: 这些切线的切点落在同一张平面上.

八. 在空间直角坐标系中, 设单叶双曲面 Γ 的方程为 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. 设 P 为空间中的平面, 它交 Γ 于一抛物线 C. 求该平面 P 的法向量与 z 轴的夹角.

九. 在空间直角坐标系中, 设马鞍面 S 的方程为 $x^2 - y^2 = 2z$. 设 σ 为平面 $z = \alpha x + \beta y + \gamma$, 其中 α, β, γ 为给定常数. 求马鞍面 S 上点 P 的坐标, 使得过 P 且在马鞍面 S 上的直线均平行于平面 σ.