一致连续

数学分析I

第25讲

December 5, 2022

函数在区间I连续, 用$\varepsilon-\delta$语言描述即是 "对于任意的$x_0 \in I$与任意$\varepsilon > 0$, 都存在$\delta > 0$, 当$x \in I$并且$|x - x_0| < \delta$时, 有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$" .

这是在指定了点x_0并给定了ε之后, 才确定δ的存在, 所以一般说来, δ不仅依赖于ε而且依赖于x_0. 问题是, 是否存在仅依赖于ε而不依赖于x_0的δ, 或者换句话说, 对同一个ε而言, 当x_0在区间I变化时, 是否存在对所有x_0共同适用的δ?

这个问题的答案并不都是肯定的. 例如$f(x) = \dfrac{1}{x}$在$(0, 1)$连续, 但对同一个ε, 找不到一个最小的、对区间上所有点x_0都适用的δ. 这种现象就是δ对x_0的不一致性, 或者说连续的不一致性.

对于任意的$x_0\in(0,1)$与$\varepsilon>0$, 不妨设$\varepsilon<\dfrac{1}{x_0}$, 要使

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{x-x_0}{x_0x}\right|<\varepsilon,$$

它等价于

$$-\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}<x-x_0<\frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0},$$

故可以取

$$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0},\frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0}\right\}=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}.$$

由于当$x_0\to 0$时, $\delta\to 0$, (见图6-1) 因此对同一个ε, 找不到一个最小的、对区间上所有点x_0都适用的δ.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$在$(0,1)$连续的不一致性的图示

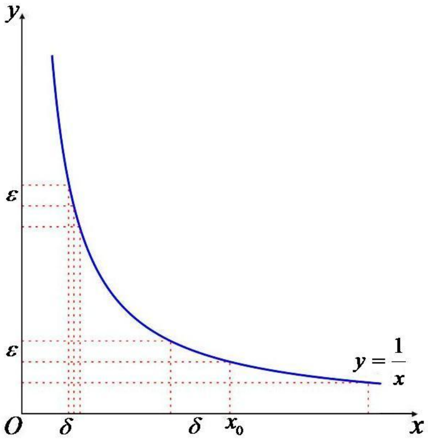

Figure: 图6-1

所谓区间上连续的一致性，即是对同一个ε，存在对区间上所有点x_0都适用的共同的δ.

定义 1

设函数$f(x)$在区间I上有定义，如果对于任何$\varepsilon > 0$，都存在$\delta > 0$，使当$x, x' \in I$且$|x - x'| < \delta$时，就有$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$，则称函数$f(x)$在区间$I$上一致连续.

将定义中的x'看作定点x_0可得，在区间I上一致连续的函数在区间I的每一点x_0都连续，从对函数$f(x) = \dfrac{1}{x}$在区间$(0, 1)$的分析可知，反之不然. 函数在区间连续，只需它在区间逐点连续，这仅与函数在所讨论点的小邻域中的状态有关，因而是局部性质. 函数在区间一致连续，需要存在对区间上所有点都适用的共同的δ，这与函数在整个区间的状态有关，因而是整体性质. 事实上，函数在区间上一致连续与否反映了连续函数在区间上的两种不同的整体状态.

对于定义1中一致连续的条件进行逻辑否定可得非一致连续的如下两个等价表述.

(i) 函数$f(x)$在区间I上非一致连续的充分必要条件为: 存在$\varepsilon_0 > 0$, 对任何$\delta > 0$, 都存在$x_1, x_2 \in I$, $|x_1 - x_2| < \delta$, 使得$|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon_0$.

(ii) 函数$f(x)$在区间I上非一致连续的充分必要条件为: 存在$\varepsilon_0 > 0$及两个数列$\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq I$, 使得$|x_n - y_n| \to 0$, 而$|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

由(ii)不难得到非一致连续的如下等价表述.
(iii) 函数$f(x)$在区间I上非一致连续的充分必要条件为: 存在满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$的数列$\{x_n\} \subseteq I$和$\{y_n\} \subseteq I$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$.

一致连续和非一致连续的例子

例 1

证明$f(x) = \sin\, x$在$(-\infty, +\infty)$上一致连续.

例 2

证明函数$\dfrac{1}{x}$ (i) 在$(c, 1)$ $(c > 0)$上一致连续; (ii) 在$(0, 1)$上非一致连续.

参考题

设$\alpha > 0$, 则$f(x) = x^\alpha$在$[0, +\infty)$一致连续当且仅当$\alpha \in (0, 1]$.

习题6(B)第4题

设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$一致连续. 证明存在非负常数a和b, 使得成立$|f(x)| \leqslant a|x| + b$.

一致连续的一些性质

由一致连续的定义不难证明下面的性质.

性质1

若$f(x)$在区间I一致连续，区间$J \subseteq I$, 则$f(x)$在区间J一致连续.

性质2

若$f(x)$和$g(x)$都在区间I一致连续，则$f(x) \pm g(x)$在区间I一致连续.

性质3

若$f(x)$与$g(x)$都在区间I一致连续且有界, 则$f(x)g(x)$在区间I一致连续.

性质4

若$f(x)$是区间I上的一致连续函数，$g(x)$是区间J上的一致连续函数，$g(J) \subseteq I$, 则$f(g(x))$在区间J上一致连续.

定理 1 (一致连续性定理，康托尔(Cantor)定理)

闭区间上的连续函数必一致连续.

这个定理表明闭区间上函数连续与一致连续是等价的.

证明

用致密性定理来证明.
反证法. 假设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 但非一致连续. 由一致连续的定义知, 存在一个$\varepsilon_0 > 0$, 对任意$\eta > 0$, 在区间$[a,b]$上都能找到两个点x, y, 使得

$$|x-y| < \eta, \quad |f(x)-f(y)| \geqslant \varepsilon_0.$$

对每个正整数n, 我们取$\eta_n = \dfrac{1}{n} > 0$, 于是在$[a,b]$上存在两点$x_n, y_n$, 使得

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n)-f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

由致密性定理, 有界数列$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = \xi$, 则$\xi \in [a,b]$. 由于$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \dfrac{1}{n_k}$, 知$\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k} - y_{n_k}) = 0$. 因而也成立

$$\lim_{n\to\infty} y_{n_k} = \xi.$$

另一方面, 由于$f(x)$在点ξ的连续性, 即$\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$, 得到

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(\xi).$$

从而有

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0.$$

这与$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0$ $(k = 1,2,3,\ldots)$矛盾. 因此, $f(x)$在$[a,b]$上必一致连续.

证明

设$f(x)$在$[a, b]$上连续. 对于任何$\varepsilon > 0$, 对每个$x \in [a, b]$, 都存在$\delta_x > 0$, 使当$|x' - x| < \delta_x$, $|x'' - x| < \delta_x$且$x', x'' \in [a, b]$时, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

于是得到一个开区间族$\left\{ \left(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2} \right) \middle| a \leqslant x \leqslant b \right\}$, 它是$[a, b]$的开覆盖, 从而由有限覆盖定理知其中必有有限子覆盖

$$\left(x_k - \frac{\delta_{x_k}}{2}, x_k + \frac{\delta_{x_k}}{2} \right), \quad k = 1, \cdots, m.$$

令$\delta = \min\left\{\frac{\delta_{x_k}}{2}\middle| k = 1, \cdots, m\right\}$, 于是当$|x' - x''| < \delta$且$x', x'' \in [a, b]$时, 存在$k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, 使得

$$x' \in \left(x_k - \frac{\delta_{x_k}}{2}, x_k + \frac{\delta_{x_k}}{2}\right).$$

又因

$$|x'' - x_k| \leqslant |x'' - x'| + |x' - x_k| < \delta + \frac{\delta_{x_k}}{2} \leqslant \delta_{x_k},$$

所以有$x', x'' \in (x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k})$. 因而

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

按定义知$f(x)$在$[a, b]$上一致连续.

例 3

设$f(x)$在(a,b)连续. 证明$f(x)$在(a,b)一致连续的充分必要条件为$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$都存在.

类似地，设$f(x)$在$(a,b]$（$[a,b)$）连续，则$f(x)$在$(a,b]$（$[a,b)$）一致连续的充分必要条件为$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$（$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$）存在.

练习6.5第3题

设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$连续且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A < +\infty.$$

证明：$f(x)$在$[a,+\infty)$一致连续.

判断下面的命题是否成立.

如果函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$一致连续且恒大于0，函数$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$，则函数$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$一致连续.

(A) 成立

(B) 不成立

如果存在常数$L > 0$, 使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|, \quad \forall x, y \in I,$$

则称$f(x)$在区间I利普希茨(Lipschitz)连续.

设函数$f(x)$在区间I利普希茨连续，对任给的$\varepsilon > 0$, 取$\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$, 则当$x, y \in I$, $|x - y| < \delta$时，就有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y| < L\delta = \varepsilon,$$

故$f(x)$在区间I一致连续.

例 4

若函数$f(x)$在区间I可导且导数$f'(x)$在区间I有界, 则$f(x)$在区间I利普希茨连续，从而$f(x)$在区间I一致连续.

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$连续可导. 如果$f(x)$在$[a,+\infty)$一致连续, 则存在$X > a$, 使得$f'(x)$在$[X,+\infty)$有界.

(A) 成立

(B) 不成立

判断下面的命题是否成立.

如果$f(x)$在$[a,+\infty)$可导，$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \infty$, 则$f(x)$在$[a,+\infty)$不一致连续.

(A) 成立

(B) 不成立