行列式

行列式

为了引进行列式的定义，我们考虑如下的二元一次方程组:

$$\begin{cases} x+3y=5, \\ 2x+7y=11. \end{cases}$$

我们从两个不同角度来观察它.

- 按行看: 我们可用消元法求出方程组的解. 例如将第一个方程乘以(-2)，再与第二个方程相加，得到$y=1$. 这个过程我们甚至可以省略变元，而仅仅写出系数: 将$(1,3,5)$乘以(-2)，与$(2,7,11)$相加，得到$(0,1,1)$.
- 按列看: 如果记向量$\alpha_1=(1,2)$, $\alpha_2=(3,7)$, $\beta=(5,11)$，则原方程组也可写为$x\alpha_1+y\alpha_2=\beta$. 当然，把$\alpha_1$, α_2, β竖着写更接近原方程组.

定义

在数域P中，把n个数排成一行，再加上括号，即形如$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，称为数域P上的n维行向量. 如果把它们排成一列，则称为n维列向量.

定义

设$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$和$\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$是数域$P$上的两个$n$维行向量，定义

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n).$$

对于$k \in P$，定义

$$k\alpha = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n).$$

这两种运算分别称为向量的加法和数量乘法(简称数乘). 列向量的加法与数乘可以类似定义.

例

$(1, 3, 5)$和$(2, 7, 11)$是数域$\mathbb{Q}$上的3维行向量，我们有

$$(-2) \cdot (1, 3, 5) + (2, 7, 11) = (0, 1, 1).$$

当$ad-cb\neq 0$时，关于变元x，y的方程组$\begin{cases} ax+by=u, \\ cx+dy=v \end{cases}$有唯一一组解

$$x=\frac{ud-vb}{ad-cb},\quad y=\frac{av-cu}{ad-cb}.$$

分子和分母的表达式很相似．如果把$ad-cb$记为$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，则上式也可写为

$$x=\frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

关于变元x_1, x_2, x_3的方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$可以仿照二元一次方程组进行讨论. 在大多数情况下, 它也有唯一一组解

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d}, \quad x_3 = \frac{d_3}{d},$$

其中

$$\begin{aligned} d &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}, \\ d_1 &= b_1a_{22}a_{33} - b_1a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}b_3 - a_{12}b_2a_{33} + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3, \\ d_2 &= a_{11}b_2a_{33} - a_{11}a_{23}b_3 + b_1a_{23}a_{31} - b_1a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31}, \\ d_3 &= a_{11}a_{22}b_3 - a_{11}b_2a_{32} + a_{12}b_2a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

如果把分母

$$d = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

记为$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, 则三个分子也可分别写为

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

仔细观察

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

不难发现,

- 右端的每一项都形如$\pm a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}a_{3\sigma_3}$，其中$\sigma_1$，$\sigma_2$，$\sigma_3$是1，2，3的排列;
- 右端的6项恰好对应着1，2，3的所有6个排列;
- 每一项的系数(正负号)可能与相应的排列有关.

这就导出一般行列式的定义，但我们需要首先确定n元排列的奇偶性.

定义

从n元实数集$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$到其自身的一一映射σ，称为A的一个排列(permutation)．对于一个排列σ，如果$(a_i-a_j)(\sigma(a_i)-\sigma(a_j))<0$，则称二元子集$\{a_i,a_j\}$为这个排列的一个逆序．在排列$\sigma$中，逆序的个数称为它的逆序数，记作$\tau(\sigma)$．逆序数为奇数的排列，称为奇排列；逆序数为偶数的排列，称为偶排列．

集合$\{1,2,\cdots,n\}$的所有排列构成的集合记作S_n；这时为了方便地写出一个排列σ，通常只写出有序数组$(\sigma(1);\cdots;\sigma(n))$．其中$\sigma(i)$有时也写为$\sigma_i$．

例

在$\{1,2,3\}$的排列中，

- $(1;3;2)$只有一个逆序$\{2,3\}$，它的逆序数为1；
- $(3;2;1)$的逆序有$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，它的逆序数为3．

定义

设α是n元集$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的一个排列. 如果存在A的二元子集$B=\{a_i,a_j\}$, 使得$\alpha(a_i)=a_j$, $\alpha(a_j)=a_i$, 而$\alpha(x)=x$, $\forall x\in A\setminus B$, 则称$\alpha$为$\{a_i,a_j\}$ 对换, 简称对换(transposition).

例

考虑$\{1,2,3,4,5\}$的排列. 令α为$\{2,3\}$对换, 即$(1;3;2;4;5)$. 又令σ为排列$(3;1;4;5;2)$. 容易验证, $\sigma\circ\alpha$ 是排列$(3;4;1;5;2)$, 它恰好是将σ中的第2和第3个数交换位置; 而$\alpha\circ\sigma$是排列$(2;1;4;5;3)$, 它恰好是将σ中的2和3 交换位置.

定理

对换改变排列的奇偶性; 也就是说, 如果σ和α都是n元集A上的排列, 且α是一个对换, 则$\sigma\circ\alpha$与σ的奇偶性相反.

证明

将A中的元素重新命名为$b_1, \cdots, b_n$, 可不妨设$\alpha(b_1) = b_2$, $\alpha(b_2) = b_1$. 我们考虑以下三类二元子集是否为逆序:

- $\{b_1, b_2\}$: 注意$(b_1 - b_2)(\sigma(b_1) - \sigma(b_2))$与$(b_1 - b_2)(\sigma(\alpha(b_1)) - \sigma(\alpha(b_2)))$的符号相反, 所以, (b_1, b_2)在σ中和在$\sigma \circ \alpha$ 中是否为逆序的情况刚好相反.
- $\{b_1, b_i\}$和$\{b_2, b_i\}$, $i > 2$: 注意$(b_1 - b_i)(\sigma(b_1) - \sigma(b_i))$, $(b_1 - b_i)(\sigma(\alpha(b_1)) - \sigma(\alpha(b_i)))$, $(b_2 - b_i)(\sigma(b_2) - \sigma(b_i))$ 以及$(b_2 - b_i)(\sigma(\alpha(b_2)) - \sigma(\alpha(b_i)))$这四个数的乘积为正数, 所以, $\{b_1, b_i\}$和$\{b_2, b_i\}$在σ中和在$\sigma \circ \alpha$中构成逆序的数目的奇偶性相同.
- $\{b_i, b_j\}$, $2 < i < j$: 显然它在σ和$\sigma \circ \alpha$中同为逆序或同不为逆序.

综合以上三种类型, 就证明了σ和$\sigma \circ \alpha$的逆序数有不同的奇偶性.

例

在前面的例子中，$(3;1;4;5;2)$的逆序数为4，而$(3;4;1;5;2)$的逆序数为5.

思考题

(**) 设σ为n元集A上的排列，α是一个对换，证明$\alpha\circ\sigma$与σ的奇偶性相反.

定义

在数域P中取mn个数, 排成m行, n列的长方形数阵, 再加上括号, 即形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为数域P上的一个$m \times n$矩阵. 通常用大写字母如A, B等表示. 一个$m \times n$矩阵既可看作m个n维行向量竖排在一起, 也可以看作n个m维列向量横排在一起. 矩阵中第i行第j列的数称为它的(i, j)元素, 简称(i, j)元.

数域P上$m \times n$矩阵的集合记作$P^{m\times n}$. 特别地, $m \times 1$ 矩阵就是m维列向量, $1 \times n$矩阵就是n维行向量. $n \times n$矩阵也称为n阶方阵.

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$是一个$2 \times 3$ 矩阵, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$是一个2阶方阵.

例

对于一个n阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

它的行列式定义为

$$\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\tau(\sigma)}a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a_{n\sigma_n}.$$

通常将A的行列式记作$\det(A)$或$|A|$.

根据定义，n阶方阵的行列式(也称为n级行列式)，由$n!$项构成，其中每一项都是矩阵中位于不同行且不同列的n个数相乘，而该项的符号取决于相应排列的奇偶性.

直接用定义计算行列式通常是很麻烦的，只有在矩阵中有很多元素为零时较为方便.

例

用定义计算上三角矩阵$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$的行列式.

解答

在$n!$项中，我们分析怎样的项不是0. 注意第n行仅有(n,n)元不为零，第$n-1$行仅有$(n-1,n-1)$不为零且不位于第n列，$\cdots$，第一行仅有$(1,1)$ 元不为零且不位于第n, $n-1$, $\cdots$, 2列. 因此，只有一项$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$不为零，$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

这个例子告诉我们，上三角矩阵的行列式，等于它的对角线元素的积. 类似可以证明，下三角矩阵的行列式，也等于它的对角线元素的积. 对角矩阵（只有对角线上有非零元素的方阵）的行列式等于其对角线上元素的乘积.

定义

对于$m\times n$矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, 称如下的$n\times m$矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为A的转置(transpose), 记为A'或A^{T}.

例

若$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则$A'=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

命题

将方阵A变为它的转置, 行列式不变. 即$\det(A')=\det(A)$.

证明

设$A=(a_{ij})$, $A'=(b_{ij})$, 则$b_{ij}=a_{ji}$. 我们有

$$\begin{aligned}\det(A)&=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\tau(\sigma)}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\&=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\tau(\sigma)}a_{\sigma^{-1}(1),1}a_{\sigma^{-1}(2),2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n),n}\\&=\sum_{\beta\in S_n}(-1)^{\tau(\beta)}a_{\beta(1),1}a_{\beta(2),2}\cdots a_{\beta(n),n}\\&=\sum_{\beta\in S_n}(-1)^{\tau(\beta)}b_{1\beta(1)}b_{2\beta(2)}\cdots b_{n\beta(n)}=\det(A'),\end{aligned}$$

其中用到$\beta=\sigma^{-1}$与σ的逆序数相等.

行列式的性质(二)

命题

交换方阵中的两行，行列式变为原来的相反数.

证明

将矩阵$A=(a_{ij})$中的第k行与第l行交换，得到矩阵$B=(b_{ij})$，则$b_{kj}=a_{lj}$，$b_{lj}=a_{kj}$，而当$i\neq k$，$i\neq l$时$b_{ij}=a_{ij}$. 记α为$\{k,l\}$对换.
我们有

$$\begin{aligned}\det(A)&=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\tau(\sigma)}a_{1\sigma(1)}\cdots a_{k\sigma(k)}\cdots a_{l\sigma(l)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\&=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\tau(\sigma)}a_{1\sigma\circ\alpha(1)}\cdots a_{k\sigma\circ\alpha(l)}\cdots a_{l\sigma\circ\alpha(k)}\cdots a_{n\sigma\circ\alpha(n)}\\&=\sum_{\beta\in S_n}(-1)^{\tau(\beta\circ\alpha)}b_{1\beta(1)}\cdots b_{k\beta(k)}\cdots b_{l\beta(l)}\cdots b_{n\beta(n)}=-\det(B),\end{aligned}$$

其中$\beta=\sigma\circ\alpha$与σ的奇偶性相反.

推论

方阵中如果有两行相等, 则行列式为零.

证明

交换这相等的两行之后, 行列式变为原来的相反数; 但新的矩阵与原来一样, 其行列式也与原来相等. 因此行列式为零.

由于转置不改变行列式, 所以上面的性质也可叙述为

- 交换方阵中的两列, 行列式变为原来的相反数;
- 方阵中如果有两列相等, 则行列式为零.

如果把n阶方阵$A=(a_{ij})$的第j列记作$\mathbf{a}_j$, 则A的行列式$\det(A)$也可记作$\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n)$.

命题

行列式关于每一列具有线性性质, 即有

- 保持列的加法:

$$\begin{aligned}&\det(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{b}+\mathbf{c},\cdots,\mathbf{a}_n)\\=&\det(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{b},\cdots,\mathbf{a}_n)+\det(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{c},\cdots,\mathbf{a}_n);\end{aligned}$$

- 保持列的数乘:

$$\det(\mathbf{a}_1,\cdots,\lambda\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_n)=\lambda\det(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_i,\cdots,\mathbf{a}_n).$$

证明

把行列式中的其他列中的元素都看作常数，而把第j列中的元素看作变元，这样行列式成为一个n元多项式. 由行列式的定义，它的每一项都恰好含有第j列中的一个元素. 因此它是这n个变元的1次齐次多项式.

命题

将方阵中一列的倍数加到另一列上，行列式不变.

证明

利用列的加法性质，可以把新的行列式写为两个行列式之和，其中一个是原行列式；另一个有两列成比例，利用数乘性质，易知它为零.

与前面一样，把这些性质中的“列”换为“行”，结论仍成立，这里就不再重复了.

定义

对于数域P上的一个$m \times n$矩阵, 以下三种操作都称为初等列变换:

(1) 把某一列变为原来的非零常数倍;

(2) 把某一列的倍数加到另一列上;

(3) 交换矩阵中两列的位置.

类似可定义矩阵的初等行变换. 初等行变换和初等列变换统称为初等变换. 矩阵A经过初等变换变为B, 记作$A \to B$.

方阵作初等变换时，行列式的变化是清楚的．我们可以设法用初等变换将方阵变为上三角，这样就可以容易地计算出行列式的值了．

定义

设B是$m \times n$矩阵．在它的第i行中，从左往右找到第一个非零的数，设它位于第u_i列，$1 \leq i \leq m$(当第i行全为零时，约定$u_i = n+1$; 还约定$u_{m+1} = n+1$)．如果存在$r \leq m$，使得$u_1 < u_2 < \cdots < u_r < n+1 = u_{r+1} = \cdots = u_{m+1}$，则称$B$为阶梯形矩阵．

例

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ 都是阶梯形矩阵.

下面来证明, 每个矩阵都可以经过初等行变换变为阶梯形矩阵. 这样, 作为特例, 每个方阵都可经初等行变换变为上三角矩阵, 从而其行列式是容易计算的.

命题

任意一个$m \times n$矩阵可以经过一系列(第(2)类) 初等行变换变为阶梯形矩阵.

证明

如果矩阵的第一列全为零, 则继续检查它的下一列. 直到找到第一个不全为零的列(设为第j列). 设(t, j)元素是该列从上往下第一个非零数. 如果$t \neq 1$, 则把第t 行的1倍加到第一行. 这样, 矩阵的$(1, j)$元素不为零. 之后, 我们把第一行的适当倍数加到其他各行, 可以使第j列只有第一个元素不是零, 而其他元素全为零.
这时, 蒙上矩阵的第1行和前j列, 再对剩下的部分重复上面的算法, 就可将原矩阵变为阶梯形.

思考题

(**) 如果改用初等列变换, 能将矩阵变为阶梯形吗?

例

用初等行变换将 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 变为阶梯形矩阵.

解答

依次作以下变换: 交换前两行; 将第一行的1倍加到第三行; 将第一行的(-2)倍加到第四行; 将第二行的1倍加到第三行; 将第二行的3倍加到第四行; 将第三行的(-1) 倍加到第四行. 则原矩阵变为

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

例

计算$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$.

解答

交换前两行(注意这时行列式会变号); 再分别将第一行的2倍, (-3)倍, (-2)倍加到下方各行; 再将第二行的2倍分别加到下方各行; 再将第四行的(-1)倍加到第三行; 最后将第三行的17倍加到第四行. 这样就将它变为上三角, 从而容易算得行列式的值为312.

思考题

(*****) 计算$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

如果A为m阶方阵，B为n阶方阵，C为$m\times n$矩阵，我们把A 排在左上角，C排在右上角，B排在右下角，并把左下角全排上零，所得的$(m+n)\times(m+n)$矩阵记作$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$，像这样的矩阵称为准上三角矩阵.

命题

准上三角矩阵的行列式，等于各对角块行列式的乘积，即

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|.$$

证明

分别对A, B两块用第(2)种初等行变换将它变为上三角矩阵，则左端变为上三角形，由此立即看出结论成立.

类似可证，准下三角矩阵的行列式，也等于各对角块行列式的乘积.

Cramer法则

我们考虑如下关于变元$x_1, x_2, \cdots, x_n$的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

如果记列向量$\alpha_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni})'$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)'$, 则上述方程组也可写为$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$.

定理

设$\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta \in P^{n\times 1}$. 如果线性方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$的系数矩阵$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$的行列式$d \neq 0$, 则它有唯一一组解$x_i = d_i/d$, 其中$d_i$是把矩阵$A$中的第$j$列换成$\beta$ 所得的矩阵的行列式.

证明

我们先验证上述表达式是方程组的解，即$\sum a_{ij}d_j/d = b_i$. 记矩阵A中a_{ij}的代数余子式为A_{ij}. 那么，按第j列展开，可知$d_j = \sum b_k A_{kj}$. 我们有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}b_k A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = b_i d.$$

这就证明了$(x_1, \cdots, x_n) = (d_1, \cdots, d_n)/d$确实是解.

证明（续）

下面再证明解的唯一性. 事实上, 若$x_1, \cdots, x_n$满足等式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta,$$

则有

$$\begin{aligned} d_i =& \det(\alpha_1, \cdots, \beta, \cdots, \alpha_n) \\ =& \det(\alpha_1, \cdots, \sum x_k\alpha_k, \cdots, \alpha_n) \\ =& \det(\alpha_1, \cdots, x_i\alpha_i, \cdots, \alpha_n) \\ =& x_i \det(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n), \end{aligned}$$

可见一定有$x_i = d_i/d$. □

推论

如果上述方程组为齐次线性方程组，即$b_k = 0$，$1 \leq k \leq n$，那么，当系数行列式$d \neq 0$时，它只有零解．换句话说，当它有非零解时，系数行列式一定为零．

例

在$\triangle ABC$中，证明：$\begin{vmatrix} 1 & -\cos C & -\cos B \\ -\cos C & 1 & -\cos A \\ -\cos B & -\cos A & 1 \end{vmatrix} = 0.$

解答

考虑以上式左端矩阵为系数矩阵的齐次线性方程组，易知它有非零解$(a, b, c)'$，因此系数行列式一定为零．