数学分析讲义（省身班）

段华贵

数学科学学院

2023年3月10日

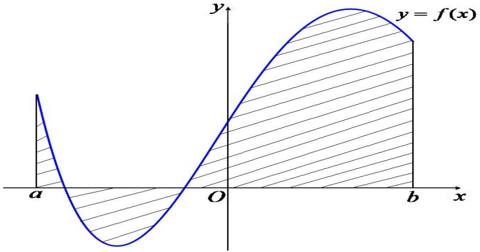
第九章
定积分的应用

- 平面图形的面积
- 曲线的弧长
- 空间区域的体积
- 旋转曲面的面积

1）直角坐标系

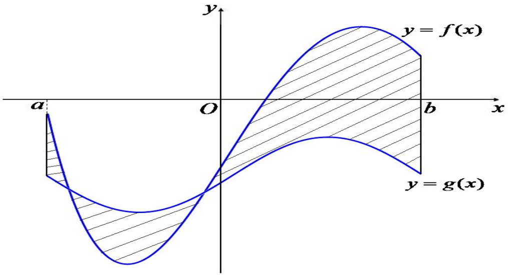
设$f(x)$在$[a,b]$上连续，由$y=f(x)$和$x=a,x=b,y=0$所围成的曲边梯形的面积

$$S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

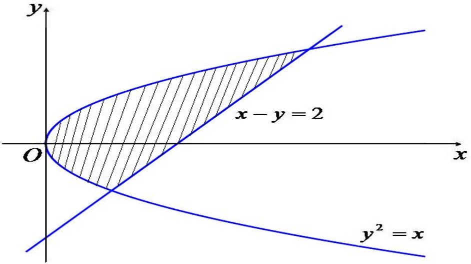


设$f(x), g(x)$在$[a, b]$上连续,则
由$y = f(x), y = g(x)$和$x = a, x = b$所围成图形的面积

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x.$$



求由抛物线$y^2=x$和直线$x-y=2$所围成的图形的面积.



$$A=\int_0^1 2\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_1^4\left[\sqrt{x}-(x-2)\right]\mathrm{d}x=\frac{4}{3}+\frac{19}{6}=\frac{9}{2}.$$

$$A=\int_{-1}^2[(y+2)-y^2]\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{2}y^2+2y-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{-1}^2=\frac{9}{2}.$$

例2

求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a,\ b>0$所围图形的面积.

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^a y\mathrm{d}x = 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x = 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\mathrm{d}t \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \pi ab. \end{aligned}$$

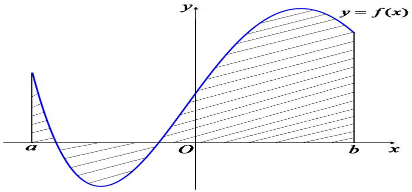
2）参数方程

设曲线方程由参数形式给出:

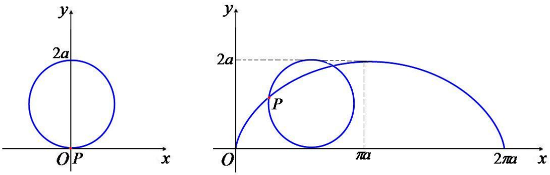
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

其中$x(t)$在$[\alpha, \beta]$上单调、连续可导, $y(t)$在$[\alpha, \beta]$上连续. 这时

$$A = \int_a^b |y| \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta |y(t) x'(t)| \mathrm{d}t.$$



求旋轮线$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $a > 0$与x轴所围图形的面积.



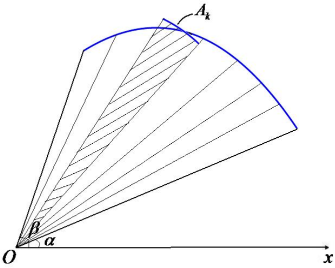
解

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) \mathrm{d}t \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) \mathrm{d}t = 3\pi a^2.
\end{aligned}
$$

3）极坐标

设曲线方程由极坐标给出: $r=r(\theta),\quad \theta\in[\alpha,\beta]$, 其中$r(\theta)$连续.求由曲线$r=r(\theta)$和射线$\theta=\alpha,\theta=\beta$所围成的面积：

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$



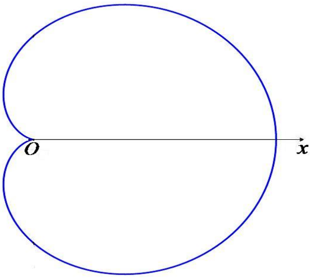
1) 对于$[\alpha,\beta]$作任一分割T,

2) 求面积近似$\frac{1}{2}r^2(\xi_k)\Delta\theta_k$,

3) 得黎曼积分和$\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}r^2(\xi_k)\Delta\theta_k$.

求心脏线$r = a(1+\cos\theta)$所围的面积.

$$A = 2\times\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta = \frac{3}{2}\pi a^2.$$



(1) 心脏线$r = a(1 + \cos t)$.

(2) 旋轮线$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

(3) 星形线$x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$(或者$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$).

(4) 圆的渐开线$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

(5) 双纽线$r^2 = a^2\cos 2\theta$ (或者$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$).

(6) 三叶玫瑰线$r = a\cos 3\theta$ (或者$r = a\sin 3\theta$).

对于平面上的一条曲线Γ, 起点为A, 终点为B, 在其上逐次取$n+1$个点P_k, $k=0,1,\cdots,n$, 使得$P_0=A$, $P_n=B$. 把这些点依次连接, 得到一条折线,折线长为

$$\sum_{k=1}^{n}|P_{k-1}P_k|$$

若这个分割愈来愈细时, 上述极限存在, 且不依赖于分割方式, 则称这条曲线可求长。

1）参数方程

设光滑曲线由参数方程给出:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ \alpha \le t \le \beta, \end{cases}$$

其中$x(t), y(t)$在$[\alpha, \beta]$上连续可导.

弧长公式的推导:

对区间$[\alpha, \beta]$作分割，得折线长度:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2} \\ = & \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[x'(\xi_k)]^2 + [y'(\eta_k)]^2} \Delta t_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{[x'(\xi_k)]^2+[y'(\eta_k)]^2}-\sqrt{[x'(\xi_k)]^2+[y'(\xi_k)]^2}\right\}\Delta t_k\right| \\
&\le \sum_{k=1}^{n}|y'(\eta_k)-y'(\xi_k)|\Delta t_k \\
&< \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k=\varepsilon.
\end{aligned}$$

即$\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_k)]^2+[y'(\eta_k)]^2}\Delta t_k$和$\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_k)]^2+[y'(\xi_k)]^2}\Delta t_k$当$\Delta(T)$ 趋向零时极限相等，故弧长

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

- 直角坐标系：$y = f(x)(a \le x \le b)$,此时

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \mathrm{d}x.$$

- 极坐标方程: $r = r(\theta)(\alpha \le \theta \le \beta)$,从而

$$x = r(\theta)\cos\theta, y = r(\theta)\sin\theta,$$

故

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2} \mathrm{d}\theta.$$

弧长微元

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s &= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}, && (1)\\
\mathrm{d}s &= \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t, && (2)\\
\mathrm{d}s &= \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x, && (3)\\
\mathrm{d}s &= \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta. && (4)
\end{aligned}
$$

令
$$s(t)=\int_\alpha^t\sqrt{x'(\tau)^2+y'(\tau)^2}\mathrm{d}\tau,\ t\in[\alpha,\beta].$$
弧长微分: $\mathrm{d}s=\phi(t)=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t.$

函数$\phi:[\alpha,\beta]\to[0,l]$(这里$l=s(\beta)$)是严格单增的,故存在反函数$t=\varphi(s)$, s称为弧长参数. 令
$$\begin{cases}\tilde{x}(s)=x(\varphi(s)),\\ \tilde{y}(s)=y(\varphi(s)),\ 0\le s\le l,\end{cases}$$
易知
$$\sqrt{\tilde{x}'(s)^2+\tilde{y}'(s)^2}=1.$$

设A,B是光滑曲线上的两点，AB的弧长记为Δs,曲线在A,B两点的切线的夹角记为$\Delta\theta$,称$\bar{K}_{AB}=\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$为曲线段$AB$的平均曲率. 称（若极限存在）

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|=K_A$$

为曲线在点A的曲率.

设光滑曲线$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t),\ \alpha\le t\le\beta. \end{cases}$

例题： 求圆$x^2+y^2=r^2$的曲率。

$$\tan\theta = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\theta = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t$$

由弧长微分$\mathrm{d}s = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t$得到

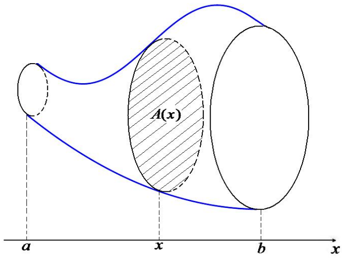
$$K_A = \left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

注： 曲线方程$y = f(x)$,则曲率计算公式为

$$K_A = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

1）平行截面面积已知情形

设空间区域位于在两个平行平面$x=a$和$x=b$之间. 用过点$(x,0,0)$且与x轴垂直的平面去截这个空间区域，所得的截面面积为$A(x)$已知或容易求得,且其在$[a,b]$上可积.



分割的黎曼和为

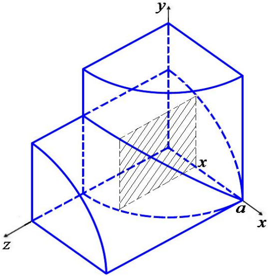
$$\sum_{k=1}^{n} A(\xi_k)\Delta x_k$$

从而

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

例题5

求圆柱面$x^2+y^2=a^2$和$x^2+z^2=a^2$相交所围区域的体积.



解 由对称性知, 所求体积是它在第1卦限中区域体积的8倍,

当$0\leqslant x\leqslant a$时, 过$(x,0,0)$且垂直于x轴的平面截所论区域的截面图形是边长为$\sqrt{a^2-x^2}$的正方形, 其面积为$A(x)=a^2-x^2$. 故

$$\begin{aligned} V &= 8\int_0^a A(x)\mathrm{d}x \\ &= 8\int_0^a (a^2-x^2)\mathrm{d}x = \frac{16}{3}a^3. \end{aligned}$$

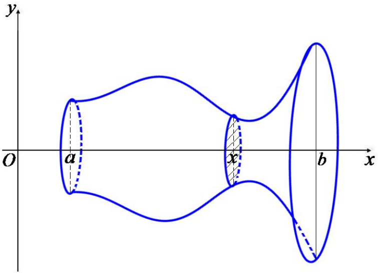
(1) 求以椭圆为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$为底的直圆柱被一个通过其底的短轴并与底面成角度$\alpha$的平面所截部分的体积.

(2) 求圆盘$(x-a)^2+y^2\leq b^2\ (a>b>0)$绕$y$轴旋转一周得到的旋转体的体积。

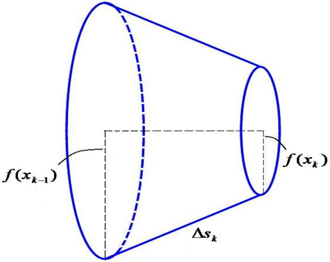
2）旋转体情形

设连续曲线$y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$与直线$y=0$，$x=a$，$x=b$围成的曲边梯形绕$x$轴旋转一周得到一个旋转体. 当$a\leqslant x\leqslant b$时，横坐标为$x$的平面与此旋转体的截面积为$A(x)=\pi f^2(x)$.则

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x.$$



一条光滑曲线$y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b, f(x)\geqslant 0)$绕$x$轴旋转得到一个旋转曲面，求这个旋转曲面的面积.



分析 分割后，圆台侧面积

$$\pi[f(x_{k-1})+f(x_k)]\sqrt{\Delta x_k^2+[f(x_k)-f(x_{k-1})]^2}$$
$$=\pi[f(x_{k-1})+f(x_k)]\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}\Delta x_k.$$

进而得到

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

问题：对于旋转体，为什么求体积微元时可以用圆柱体积近似代替实际体积，而求侧面积微元时不能用圆柱侧面积代替实际侧面积？

例如考虑：(教材例9)求底面半径为r,高为h的正圆锥的体积($V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$)和侧面积($S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$)。

- 位于x与$x+\mathrm{d}x$间小圆台的侧面积为($k=r/h$)

$$2\pi k\sqrt{1+k^2}\mathrm{d}x+\pi k\sqrt{1+k^2}(\mathrm{d}x)^2.$$