e的超越性

下面的材料来自李成章、黄玉民的《数学分析》.

一个复数, 如果它是某个整系数代数方程的根, 则称之为代数数, 否则就称之为超越数. 显然, 所有有理数和用有理数开方表示的无理数都是代数数. 然而, 指出一个数是超越数的事就没有这么简单. 1873年, 厄尔米特证明了自然对数的底数e是超越数. 随后在1882年, 林德曼证明了圆周率π的超越性. 现在我们就来证明e的超越性.

若不然, 设e是整系数方程

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_m x^m = 0 \tag{1}$$

的根.

设$f(x)$是任一n次多项式, 于是有$f^{(n+1)}(x) = 0$. 从而由分部积分公式可得

$$\int_0^b f(x)e^{-x}dx = -e^{-x}[f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x)]\Big|_0^b.$$

令$F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x)$, 由上式可得

$$e^b F(0) = F(b) + e^b \int_0^b f(x)e^{-x}dx. \tag{2}$$

在(2)式中依次取$b = 0, 1, 2, \cdots, m$, 并用(1)中的系数$c_0, c_1, \cdots, c_m$分别乘所得的等式然后相加, 得到

$$0 = c_0 F(0) + c_1 F(1) + \cdots + c_m F(m) + \sum_{k=0}^{m} c_k e^k \int_0^k f(x)e^{-x}dx. \tag{3}$$

注意, (3)式对于任何多项式$f(x)$都成立. 下面我们要构造多项式$f(x)$, 使得(3)式不成立, 从而导出矛盾.

令

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots(x-m)^p, \tag{4}$$

其中p为大于m和$|c_0|$的任一质数. 由于当$q \geq p$为整数时, 有

$$(x^q)^{(p)} = q(q-1)\cdots(q-p+1)x^{q-p} = C_q^p \cdot p! x^{q-p},$$

所以, 多项式$f(x)$的p阶及p阶以上的导数都是整系数多项式且系数都能被p整除. 因此当x取整数值时, 所有这样导数的值都是整数且能被p整除. 由$f(x)$定义式(4)又知, 当$x = 1, 2, \cdots, m$时, $f(x)$与它的直到$p-1$阶导数都为0, 所以$F(1), F(2), \cdots, F(m)$都能被p整除.

然而, $F(0)$却是另一种情形. 当$x=0$时, $f(0), f'(0), \cdots, f^{p-2}(0)$都是0, 于是有

$$F(0) = f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \cdots + f^{(n)}(0). \tag{5}$$

在(5)式右端的各项中, 除第1项之外, 其它各项都能被p整除. 但是第1项

$$f^{(p-1)}(0) = [(-1)^m m!]^p.$$

由于$p > m$, 故p不能整除$f^{(p-1)}(0)$. 从而由(5)知p不能整除$F(0)$. 又因$p > |c_0|$, 所以$p \nmid |c_0|$. 从而(3)式右端前$m+1$ 项之和不能被p整除当然不等于0.

再考察(3)式右端最后的和数. 在区间$[0, m]$上, 由定义(4)有

$$|f(x)| < \frac{1}{(p-1)!} m^{p-1} m^p m^p \cdots m^p = \frac{m^{(m+1)p-1}}{(p-1)!}.$$

因而有

$$\left| \int_0^k f(x) e^{-x} dx \right| < \frac{m^{(m+1)p-1}}{(p-1)!} \int_0^k e^{-x} dx < \frac{m^{(m+1)p-1}}{(p-1)!}. \tag{6}$$

令$c = |c_0| + |c_1| + \cdots + |c_m|$, 于是由估计式(6)有

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{k=0}^{m} c_k e^k \int_0^k f(x) e^{-x} dx \Big| &< c e^m \frac{m^{(m+1)p-1}}{(p-1)!} \\ &= c e^m m^m \frac{(m^{m+1})^{p-1}}{(p-1)!}. \end{aligned} \tag{7}$$

注意, (4)中的质数p可以是大于m和$|c_0|$的任一质数且估计式(7)中的p也可以是大于m和$|c_0|$的任一质数. 令p沿着质数趋向$+\infty$, 我们有

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{(m^{m+1})^{p-1}}{(p-1)!} = 0.$$

故可取得足够大的质数p_0, 使得在(4)中令$p = p_0$时相应的$f_0(x)$满足

$$\left| \sum_{k=0}^{m} c_k e^k \int_0^k f_0(x) e^{-x} dx \right| \le \frac{1}{2}.$$

这样一来, (3)式右端前$m+1$项之和是个非零整数而最后的和数绝对值不超过$\frac{1}{2}$. 所以右端不能为0, 矛盾. 这就完成了证明.