三角函数有理式的积分

数学分析I

第31讲

December 21, 2022

7.5节的学习要点

- “万能代换”是一般方法，有可能带来较大的计算量.
- 通过例1体会“万能代换”的应用.
- 通过例2和例3体会某些情形下其他换元的方法.
- 通过例4的解法二体会三角函数公式的应用.

设$R(u, v)$是关于变量u, v的有理式, 我们称$R(\sin x, \cos x)$为三角函数有理式. 由于$\tan x$, $\cot x$等都可以化为$\sin x$, $\cos x$的有理式, 从而上述所说的三角函数有理式具有更广泛的意义, 它包含任何形式的三角函数构成的有理式.

万能代换

万能代换就是令$t=\tan\dfrac{x}{2}$，于是$x=2\arctan t$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$，且有

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

三角函数有理式的积分总可化为有理函数的积分

三角函数有理式$R(\sin x, \cos x)$总是可以通过“万能代换”化为有理函数的积分. 令$t = \tan \frac{x}{2}$, 那么

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

这就把三角函数有理式的积分化成了有理函数的积分.

三角函数有理式的积分总可化为有理函数的积分

三角函数有理式$R(\sin x, \cos x)$总是可以通过“万能代换”化为有理函数的积分. 令$t = \tan \frac{x}{2}$, 那么

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

这就把三角函数有理式的积分化成了有理函数的积分.

从理论上说, 三角函数有理式的积分是可以这样计算出来, 但是, 有时候万能代换不是最好的积分方法, 要具体问题具体分析, 如果有一个比较简单的办法计算积分, 就可以不用这种“万能”之法.

使用万能代换的例题

例 1

求

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}.$$

使用万能代换的例题

例 1

求
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}.$$

令$t=\tan\frac{x}{2}$, 有
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}=\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln|1+t|+C=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

例 1

求
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin\ x+\cos\ x}.$$

令$t=\tan\frac{x}{2}$, 有
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin\ x+\cos\ x}=\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln|1+t|+C=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

$\int \frac{a}{b-\sin x}\mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$, $\int \frac{a\cos x}{b-\cos x}\mathrm{d}x$等不定积分的计算可以上来就考虑使用万能代换.

除了万能变换之外, 对于三角函数有理式的积分, 在某些条件下还可选用如下三种变换:

- (i) 若$R(-u,v)=-R(u,v)$, 即R关于变量u为奇函数, 可作变换$t=\cos x$;
- (ii) 若$R(u,-v)=-R(u,v)$, 即R关于变量v为奇函数, 可作变换$t=\sin x$;
- (iii) 若$R(-u,-v)=R(u,v)$, 即R关于两个变量为偶函数, 则可令$t=\tan x$.

除了万能变换之外, 对于三角函数有理式的积分, 在某些条件下还可选用如下三种变换:

- (i) 若$R(-u, v) = -R(u, v)$, 即R关于变量u为奇函数, 可作变换$t = \cos x$;
- (ii) 若$R(u, -v) = -R(u, v)$, 即R关于变量v为奇函数, 可作变换$t = \sin x$;
- (iii) 若$R(-u, -v) = R(u, v)$, 即R关于两个变量为偶函数, 则可令$t = \tan x$.

事实上，对任何一个三角函数有理式$R(u, v)$, 都可以将其化为$R_1(u, v) + R_2(u, v) + R_3(u, v)$, 其中$R_1(u, v)$, $R_2(u, v)$, $R_3(u, v)$分别是满足上述条件(i), (ii)和(iii)的三角函数有理式.

例 2

求
$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2\cos x}\mathrm{d}x.$$

例 2

求
$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2\cos x} \mathrm{d}x.$$

令$t = \cos x$, 从而有
$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2\cos x} \mathrm{d}x \\ = \quad & -2 \int \frac{t \mathrm{d}t}{1 + 2t - t^2} \\ = \quad & \int \frac{-2t + 2 - 2}{1 + 2t - t^2} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

例 3

求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+\cos^2 x}$， $a>0$.

例 3

求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+\cos^2 x}$, $a>0$.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+\cos^2 x} &= \int \frac{\mathrm{d}\tan x}{1+a^2\sec^2 x} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\tan x}{(1+a^2)+a^2\tan^2 x} \\
&= \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{a^2}{1+a^2}}\arctan\frac{a\tan x}{\sqrt{1+a^2}} + C \\
&= \frac{\arctan\dfrac{a\tan x}{\sqrt{1+a^2}}}{a\sqrt{1+a^2}} + C.
\end{aligned}
$$

例 4

求 $\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x$.

例 4

求 $\int \sin^4 x \, \mathrm{d}x$.

按三角公式有

$$\int \sin^4 x \, \mathrm{d}x = \int \sin^2 x (1 - \cos^2 x) \mathrm{d}x = \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x - \int \sin^2 x \, \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \mathrm{d}x - \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

将
$$\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$$
通过换元化为有理函数的积分.

补充题

将
$$\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$$
通过换元化为有理函数的积分.

本题方法和结果不唯一，下面是其中一种解法.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x \\
= & \int \frac{\tan^2 x \cos^2 x}{\tan x + 1} \mathrm{d}x \\
= & \int \frac{\tan^2 x}{(\tan x + 1) \sec^4 x} \mathrm{d}(\tan x) \\
= & \int \frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2} \mathrm{d}t \ (t = \tan x).
\end{aligned}$$