第七章复习

黄利兵

数学科学学院

2023 年 5 月 7 日

本章总结

- 主要概念: ________, ________, ________, ________, ________, ________, ________, ________, ________, ________, ________, ________.
- 基本结论: ________; ________; ________; ________; ________; ________.
- 常用算法: ________; ________.
- 主要方法: 回到定义; 运用基本结论; 转化为矩阵问题.

判断题

(1) 在 n 维 Euclid 空间中, 保持向量长度的变换一定是正交变换.

(2) 在酉空间 V 中, 如果线性变换 T 满足 $(T\alpha, \alpha) = 0, \forall \alpha \in V$, 则 $T = 0$.

(3) 在 Euclid 空间 V 中, 如果线性变换 T 满足 $(T\alpha, \alpha) = 0, \forall \alpha \in V$, 则 $T = 0$.

(4) 在 n 维 Euclid 空间中, 正规变换在任何一组基下的矩阵是正规矩阵.

(5) 如果 $\mathcal{A}$ 是正规变换, 则 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}^*$ 的核相等.

(6) 在 n 维 Euclid 空间中, 可对角化的线性变换一定是正规变换.

填空题

(1) 设 A, B 是 n 阶正交矩阵, 且 $\det(A) = -\det(B)$, 那么 $\det(A+B) =$______________.

(2) 理论表明数据 y 随时间 t 的变化规律是 $y = at^2 + bt + c$. 实验测得 $t = 0$ 时 $y = 20$, $t = 1$ 时 $y = 2$, $t = 2$ 时 $y = 8$, $t = 3$ 时 $y = 24$. 那么, 用最小二乘法可得到 $a =$______________, $b =$______________, $c =$______________.

(3) 在 3 维酉空间 V 中, 线性变换 $\mathcal{A}$ 的行列式为 $1 + \sqrt{-1}$, 则它的共轭变换 $\mathcal{A}^*$ 的行列式为______________.

(4) 如果 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} & 3 \end{bmatrix}$, 且 Hermite 矩阵 $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & a \\ \overline{a} & b \end{bmatrix}$ 满足 $B^2 = A$, 则 $a =$______________, $b =$______________.

(5) 在 $\mathbb{R}[x]_3$ 中定义内积 $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 如果正交变换 $\mathcal{A}$ 分别把 $1, x$ 变为 $1, -x$, 那么 $\mathcal{A}(x^2) =$______________.

(6) 已知 $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = QR$, 其中 Q 为正交矩阵, $R = \begin{bmatrix} 3a & 9a & -4a \\ 0 & 2b & -b \\ 0 & 0 & ab \end{bmatrix}$, 则 $a =$______________, $b =$______________.

计算题

(1) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 正交变换 T 将每个向量绕直线 $x/2 = y = z$ 旋转 $60°$, 求 T 在 $\mathbb{R}^3$ 的自然标架下的矩阵.

(2) 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 求正交矩阵 Q, 使得 $Q'AQ$ 为对角矩阵.

证明题 (一)

在 $V=\mathbb{R}^{n\times n}$ 中定义内积 $(A,B)=\operatorname{tr}(AB')$.

(1) 设 W 是所有 n 阶实对称矩阵的集合, 求 W 在 V 中的正交补.

(2) 若线性变换 $\mathcal{T}$ 定义为 $\mathcal{T}(A)=A', \forall A\in V$, 证明 $\mathcal{T}$ 是对称变换.

(3) 设 $S\in V$ 为对称矩阵, 线性变换 L_S, R_S 分别定义为 $L_S(A)=SA$, $R_S(A)=AS, \forall A\in V$. 证明存在 V 的标准正交基, 使得 L_S, R_S 在这组基下的矩阵都是对角矩阵.

证明题 (二)

在 (可能是无穷维的) 酉空间 V 中, 两两正交且长度均为 1 的一组向量称为标准正交向量组.

(1) 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 为标准正交向量组, 证明: 对任意向量 $\beta \in V$, 有

$$\sum_{i=1}^{k} |(\alpha_i, \beta)|^2 \le |\beta|^2.$$

(2) 设 V 是在 $[0, 2\pi]$ 上定义的复数值连续函数 (即实部和虚部都是连续函数) 所构成的线性空间, 证明如下定义的二元函数是 V 上的内积

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

(3) 对每个整数 n, 令 $\mathbf{e}_n(x) = \cos(nx) + \sqrt{-1}\sin(nx)$. 证明 $\{\mathbf{e}_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 是上述酉空间 V 中的标准正交向量组.

(4) 应用上述结果证明: 当 k 为正整数时,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} \le \frac{\pi^2}{6}.$$

(提示: 考虑函数 $f(x) = x$)

证明题 (三)

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 的对称变换. 证明存在实数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 和线性变换 $T_1, T_2, \cdots, T_n$, 使得

(1) $\mathcal{A} = k_1 T_1 + k_2 T_2 + \cdots + k_n T_n$;

(2) $\mathrm{id} = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$;

(3) 当 $i \neq j$ 时, $T_i T_j = 0$.

证明题 (四)

设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 n 维酉空间 V 上的线性变换, 且 $\mathcal{A}$ 是正规变换.

(1) 证明 $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$ 的充分必要条件是: $\mathcal{A}$ 的每个特征子空间都是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间;

(2) 如果 $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, 证明 $\mathcal{A}^*\mathcal{B} = \mathcal{BA}^*$;

(3) 若 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 都是正规变换, 且 $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, 证明 $\mathcal{AB}$ 也是正规变换.

补充题

(A) 在 n 维 Euclid 空间 V 中, 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 满足 $(\alpha_i, \alpha_j) < 0, \forall i \neq j$. 证明: $m \leq n+1$.

(B) 在 n 维 Euclid 空间 V 中, 线性变换 f, g 的共轭变换分别为 f^*, g^*. 如果 f 的像恰好是 g 的核, 证明 $ff^* + g^*g$ 是单射.