20级数学伯苓班模拟选拔考试数学分析试卷

(满分100分，考试时间为90分钟)

一、（30分）设函数$f(x)$在$[a,b]$两次可导，记$M_0=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$, $M_1=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$, $M_2=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

(1) 证明：对任意$x\in[a,b]$, 有$|f'(x)|\leqslant\dfrac{2}{b-a}M_0+\dfrac{(x-a)^2+(x-b)^2}{2(b-a)}M_2$.

(2) 证明：若$(b-a)^2M_2\geqslant 4M_0$, 则$M_1\leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$.

二、（30分）

(1) 设$\{A_n\}$和$\{\varphi_n\}$都是数列，$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=+\infty$. 证明：对任意实数$a<b$, 都存在$x\in(a,b)$, 使得$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\cos(A_nx+\varphi_n)=1$.

(2) 设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都是数列，(α,β)是一个开区间. 证明：若对任意$x\in(\alpha,\beta)$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=0$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

三、（30分）设函数$f(x)$在$[0,a]$连续可微，$f(0)=0$.

(1) 证明：$\displaystyle\int_0^a|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{a}{2}\int_0^a[f'(x)]^2\mathrm{d}x$.

(2) 证明：$\displaystyle\int_0^a f^2(x)[f'(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{a^2}{2}\int_0^a[f'(x)]^4\mathrm{d}x$.

四、（10分）设函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上两次连续可微，对任意$x\geqslant 1$, 有$f''(x)+xf(x)=0$. 证明：$f(x)$在$[1,+\infty)$上有界.