10.4 向量值函数（映射）及其连续性

向量值函数的连续性

一个向量值函数是一个映射$F: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, 对于$X \in D$, 它的象是一个向量$F(X) = (f_1(X), \cdots, f_m(X))$. 线性映射是其中最简单的一种情况.

向量值函数在一点处连续的定义

我们称向量值函数F在$X_0 \in D$连续, 如果对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$X \in D$, $|X - X_0| < \delta$时, 有

$$|F(X) - F(X_0)| < \varepsilon.$$

连续映射

连续映射与连续函数一样，其本质是，对于$\mathbb{R}^m$中的开球$B_\varepsilon(F(X_0))$，存在$\mathbb{R}^n$中的开球$B_\delta(X_0)$，使得$F(B_\delta(X_0)\cap D)\subseteq B_\varepsilon(F(X_0))$.

由范数的等价性，这里的开球$B_\delta(X_0)$与$B_\varepsilon(F(X_0))$可分别用由范数所诱导出的距离函数定义开球代替：$B_\delta^{\rho_n}(X_0)=\{X\in\mathbb{R}^n|\,\rho_n(X,X_0)<\delta\}$，$B_\varepsilon^{\rho_m}(F(X_0))=\{Y\in\mathbb{R}^m|\,\rho_m(Y,F(X_0))<\varepsilon\}$. 这时连续映射就定义为：对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$X\in D$且$\rho_n(X,X_0)<\delta$时，有$\rho_m(F(X),F(X_0))<\varepsilon$，即$X\in D\cap B_\delta^{\rho_n}(X_0)\Rightarrow F(X)\in B_\varepsilon^{\rho_m}(F(X_0))$.

从分量的角度来看

容易看出, F在X_0连续当且仅当其每个分量f_i在X_0连续(只要取$\rho_m(Y_1, Y_2) = \|Y_1 - Y_2\|_\infty$). 称一个在定义域内处处连续的映射为连续映射.

一致连续

对于连续映射也有一致连续的概念, 可以证明一个映射在D上是一致连续的当且仅当其每个分量在D上一致连续, 从而$\mathbb{R}^n$的有界闭子集上的连续映射必一致连续. 读者可以给出一致连续的定义并证明这一结果.

线性映射是利普希茨连续的

例如线性映射满足$|AX^T - AY^T| = |A(X - Y)^T| \leqslant |A| \cdot |X - Y|$, 因此所有线性映射在全空间一致连续, 并且是利普希茨连续的.

连续映射的复合还是连续映射

设Ω是$\mathbb{R}^m$的子集，D是$\mathbb{R}^n$的子集，映射$G:\Omega\to\mathbb{R}^n$满足$G(\Omega)\cap D\neq\emptyset$，记$K=\{Y\in\Omega|G(Y)\in D\}$，映射$F:D\to\mathbb{R}^p$和映射$G:\Omega\to\mathbb{R}^n$的复合$F\circ G:\Omega\to\mathbb{R}^p$定义为

$$(F\circ G)(Y)=F(G(Y)),\quad Y\in K.$$

连续映射的复合还是连续映射

设Ω是$\mathbb{R}^m$的子集，D是$\mathbb{R}^n$的子集，映射$G:\Omega\to\mathbb{R}^n$满足$G(\Omega)\cap D\neq\emptyset$，记$K=\{Y\in\Omega|G(Y)\in D\}$，$Y_0\in K$，$X_0=G(Y_0)\in D$，映射$F:D\to\mathbb{R}^p$在$X_0$连续，映射$G$在$Y_0$连续，则$F\circ G:\Omega\to\mathbb{R}^p$在$Y_0$连续.

压缩映射原理

设D是$\mathbb{R}^n$的非空闭子集，映射$F : D \to D$满足条件“存在常数$\alpha \in (0,1)$使得对任何$X, Y \in D$, 都有$|F(X) - F(Y)| \leqslant \alpha |X - Y|$”，证明存在唯一的$\xi \in D$, 使得$F(\xi) = \xi$.

证明思路

任意取定一点X_1, 令$X_{m+1} = F(X_m)$, $m = 1, 2, \cdots$, 则容易验证$\{X_m\}$是柯西列. 由$\mathbb{R}^n$的完备性知$\{X_m\}$收敛，记$\xi = \lim\limits_{m\to\infty} X_m$, 则由$D$闭知$\xi \in D$. 又$F$利普希茨连续，故$F$连续，从而在$X_{m+1} = F(X_m)$中令$m \to \infty$取极限得$\xi = F(\xi)$. 唯一性易证.

连续的实质

定理 1

设D是$\mathbb{R}^n$中的开集, 则$F: D \to \mathbb{R}^m$是连续映射, 当且仅当对$\mathbb{R}^m$中的任意开集G, 其完全原象$F^{-1}(G) = \{X \in D |\ F(X) \in G\}$是$\mathbb{R}^n$的开子集.

注1

如果说D不是开集, 用完全类似的方法, 可以证明$F: D \to \mathbb{R}^m$是连续映射, 当且仅当对$\mathbb{R}^m$中的任意开集G, 其完全原象$F^{-1}(G)$是D的相对开子集.

注2

也可以用闭集来刻画连续性：$F: D \to \mathbb{R}^m$是连续映射, 当且仅当对$\mathbb{R}^m$中的任意闭集G, 其完全原象$F^{-1}(G)$是D的相对闭子集.

定理1的证明

先证必要性. 设F在D上连续, G是$\mathbb{R}^m$的开子集, 需证$F^{-1}(G)$是$\mathbb{R}^n$的开子集. 可设$F^{-1}(G) \neq \emptyset$. 设$X_0 \in F^{-1}(G)$, 则$F(X_0) \in G$. 由G是开集, 存在$\varepsilon > 0$使$B_\varepsilon(F(X_0)) \subseteq G$. 又因为$F$在$X_0$连续, 存在$\delta > 0$, 当$X \in D \cap B_\delta(X_0)$时, 有$F(X) \in B_\varepsilon(F(X_0))$. 从而

$$D \cap B_\delta(X_0) \subseteq F^{-1}(G).$$

由D是开集, 当δ足够小时有$B_\delta(X_0) \subseteq D$, 进而$B_\delta(X_0) \subseteq F^{-1}(G)$, 这正好说明$F^{-1}(G)$是$\mathbb{R}^n$的开子集.

再证明充分性. 任意取$X_0 \in D$, 对于$\varepsilon > 0$, 记$G = B_\varepsilon(F(X_0))$, 则$G$是$\mathbb{R}^m$中的开集. 按假定, $F^{-1}(G)$是$\mathbb{R}^n$的开子集. 因为$X_0 \in F^{-1}(G)$, 故存在$\delta > 0$, 使$B_\delta(X_0) \subseteq F^{-1}(G)$. 即当$|X - X_0| < \delta$时, 有$|F(X) - F(X_0)| < \varepsilon$. 所以$F$在$X_0$连续. 由$X_0$的任意性, F在D上连续.

开映射与闭映射

设D是$\mathbb{R}^n$的非空子集，$F: D \to \mathbb{R}^m$是一个映射，如果F把开集映为开集，即对D的每一个相对开子集U，$F(U)$都是$\mathbb{R}^m$中的开集，则称F是一个开映射.

设D是$\mathbb{R}^n$的非空子集，$F: D \to \mathbb{R}^m$是一个映射，如果F把闭集映为闭集，即对D的每一个相对闭子集V，$F(V)$都是$\mathbb{R}^m$中的闭集，则称F是一个闭映射.

例如，设$m < n$，映射$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$定义为$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$，$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，则$F$是连续开映射，但$F$不是闭映射.

举例说明连续映射未必是开映射. 此外，开映射也不一定是连续映射.

连续映射把紧集映为紧集

定理 2

设$D \subseteq \mathbb{R}^n$，若$F : D \to \mathbb{R}^m$是连续映射，并且D是紧集，则其象集$F(D)$是$\mathbb{R}^m$中的紧集. 即连续映射把紧集映为紧集.

证明 任取$F(D)$中一个点列$\{Y_k\}$, 则存在$\{X_k\} \subseteq D$, 使得$Y_k = F(X_k)$, $k = 1, 2, \cdots$. 因为D是紧集，所以D是列紧集，从而点列$\{X_k\}$有收敛于D中点的子列$\{X_{k_l}\}$. 设$\lim\limits_{l\to\infty} X_{k_l} = X_0 \in D$, 令$Y_0 = F(X_0)$, 则$Y_0 \in F(D)$. 因为$F$是连续映射，所以$\lim\limits_{l\to\infty} Y_{k_l} = \lim\limits_{l\to\infty} F(X_{k_l}) = F(X_0) = Y_0$. 因此$F(D)$中任意点列都有收敛到$F(D)$中点的子列，按定义知$F(D)$是$\mathbb{R}^m$中的列紧集，从而$F(D)$是$\mathbb{R}^m$中的紧集.

连续映射把连通集映为连通集

定理 3

设$D \subseteq \mathbb{R}^n$, 若$F : D \to \mathbb{R}^m$是连续映射, 并且D是连通集, 则其象集$F(D)$是$\mathbb{R}^m$中的连通集. 即连续映射把连通集映为连通集.

证明 反设$F(D)$不连通，则存在$\mathbb{R}^m$的开子集O_1，O_2, 使得$A = F(D) \cap O_1 \neq \emptyset, B = F(D) \cap O_2 \neq \emptyset$, $F(D) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$. 由连续性假设，$U_i = F^{-1}(O_i \cap F(D)) = F^{-1}(O_i), i = 1, 2$都是$D$的相对开子集，并且$U_i \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $D = U_1 \cup U_2$, 从而D不连通，矛盾! 所以$F(D)$是连通集.

投票

设置

判断下面的命题是否成立.

设$D \subseteq \mathbb{R}^n$, 若$F: D \to \mathbb{R}^m$是连续映射, 并且D是道路连通集, 则其象集$F(D)$是$\mathbb{R}^m$中的道路连通集. 即连续映射把道路连通集映为道路连通集.

A 成立

B 不成立

提交