对称导数和单侧导数

定义 1 若$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$存在，则称该极限为$f(x)$在点$x_0$处的对称导数*(*也称为施瓦茨*(Schwarz)*导数*)*，记为$f^s(x_0)$.

不难看到，若$f(x)$在点x_0处可导，则$f(x)$在点x_0处的对称导数一定存在，且$f^s(x_0)=f'(x_0)$; 但是，若$f(x)$在点x_0处的对称导数存在，则$f(x)$在点x_0未必可导，例如$f(x)=|x|$, 有$f^s(0)=0$, 但$f'(0)$不存在.

命题 1 设$f(x)$在$[a,b]$连续，$f(a)<f(b)$, 又设$f(x)$在(a,b)中对称导数处处存在，则存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f^s(\xi)\geqslant 0$.

证 取定$\lambda\in(f(a),f(b))$, 令$S=\{x\in[a,b]\big|f(x)>\lambda\}$, 则由$b\in S$知$S$非空，从而根据确界原理知$S$有下确界. 记$\xi=\inf S$, 则由$f(x)$在$[a,b]$连续，$f(a)<\lambda<f(b)$知$\xi\in(a,b)$. 当$x<\xi$时，有$f(x)\leqslant\lambda$; 当$n$充分大使得$\left(\xi-\frac{1}{n},\xi+\frac{1}{n}\right)\subset(a,b)$时，存在$x_n\in\left(\xi,\xi+\frac{1}{n}\right)$使得$f(x_n)>\lambda$. 于是$\dfrac{f(x_n)-f(2\xi-x_n)}{2(x_n-\xi)}>0$, 故由海涅定理和极限的保序性得

$$f^s(\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(2\xi-x_n)}{2(x_n-\xi)}\geqslant 0.$$

□

思考题 (1) 设$f(x)$在$[a,b]$连续，$f(a)=f(b)$, 又设$f(x)$在(a,b)中对称导数处处存在，问：是否一定存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f^s(\xi)\geqslant 0$?

(2) 设$f(x)$在$[a,b]$连续，$f(a)<f(b)$, 又设$f(x)$在(a,b)中对称导数处处存在，问：是否一定存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f^s(\xi)>0$?

(3) 设$f(x)$在$[a,b]$连续，$f(x)$在(a,b)中对称导数处处存在，且对任意$x\in(a,b)$, 都有$f^s(\xi)\geqslant 0$, 问：$f(x)$是否一定在$[a,b]$单调递增?

答 (1) 一定存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f^s(\xi)\geqslant 0$. 证明如下. 若$f(x)$是常数函数，则任取一点$\xi\in(a,b)$, 就有$f^s(\xi)=0$; 若$f(x)$在$[a,b]$上不是常数函数，则存在$c\in(a,b)$, 使得$f(c)\neq f(a)$, 不妨设$f(a)<f(c)$, 由命题1知存在$\xi\in(a,c)$, 使得$f^s(\xi)\geqslant 0$.

(2) 一定存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f^s(\xi)>0$. 证明如下. 取$k=\dfrac{f(b)-f(a)}{2(b-a)}>0$, 令$g(x)=f(x)-kx$, 则$g(b)-g(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{2}>0$, 由命题1知存在$\xi\in(a,b)$, 使得$g^s(\xi)\geqslant 0$, 从而$f^s(\xi)=g^s(\xi)+k>0$.

(3) $f(x)$一定在$[a,b]$单调递增. 证明如下. 反证. 若不然，则存在$x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$, 使得$f(x_1) > f(x_2)$. 这时，用上面的方法可以证明存在$\xi \in (x_1, x_2)$, 使得$f^s(\xi) < 0$, 矛盾！ $\square$

命题 2 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)中处处存在对称导数，则存在$\lambda, \mu \in (a,b)$, 使得

$$f^s(\lambda) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f^s(\mu).$$

证 先证明$f(a) = f(b)$的情形下命题成立. 这时，若$f(x)$在$[a,b]$上恒为常数，则任取$\lambda, \mu \in (a,b)$即可；若$f(x)$在$[a,b]$上不恒为常数，则不妨设存在$c \in (a,b)$, 使得$f(c) > f(a)$, 则由命题1知存在$\mu \in (a,c)$, 使得$f^s(\mu) \geqslant 0$, 同理可证存在$\lambda \in (c,b)$, 使得$f^s(\lambda) \leqslant 0$.

再证明一般情形. 这时，令$g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, 则$g(x)$在$[a,b]$连续，$g(a) = f(a) = g(b)$, 对任意$x \in (a,b)$, 有$g^s(x) = f^s(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 由上面的证明知存在$\lambda, \mu \in (a,b)$, 使得$g^s(\lambda) \leqslant 0 \leqslant g^s(\mu)$, 从而

$$f^s(\lambda) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f^s(\mu).$$

$\square$

命题2是对称导数的微分中值定理，借助命题2，我们可以利用对称导数来研究函数的性质.

推论 1 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)中处处存在对称导数. 若$f^s(x)$在(a,b)中恒为0, 则$f(x)$是$[a,b]$上的常数函数.

命题 3 设函数$f(x)$在(a,b)连续且处处存在对称导数. 若$f^s(x)$在(a,b)连续，则$f(x)$在(a,b)可导.

定义 2 如果存在常数$M \geqslant 0$, 使得

$$|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|, \quad \forall x, y \in I,$$

则称$f(x)$在区间I利普希茨连续.

命题 4 设函数$f(x)$在(a,b)连续且处处存在对称导数. 若$f^s(x)$在(a,b)有界，则$f(x)$在(a,b)利普希茨连续.

下面是二阶施瓦茨导数的概念和一些性质.

定义 3 若$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$存在，则称该极限为$f(x)$在点$x_0$处的二阶施瓦茨导数，记为$f^{('')}(x_0)$.

命题 5 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)中处处存在二阶施瓦茨导数. 若$f''(x)$在(a,b)内恒为0, 则存在常数α, β, 使得$f(x)=\alpha x+\beta$, $\forall x\in[a,b]$.

命题 6 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)中处处存在二阶施瓦茨导数. 若$f''(x)$在(a,b)非负, 则$f(x)$在$[a,b]$下凸.

下面讨论单侧导数的一些性质.

定义 4 如果对任意$x\in(a,b)$, 右导数$f'_+(x)$都存在，则称函数$f(x)$在(a,b)右可导；如果对任意$x\in(a,b)$, 左导数$f'_-(x)$都存在，则称函数$f(x)$在(a,b)左可导.

命题 7 设函数$f(x)$在(a,b)右可导，则存在(a,b)的子区间(α,β), 使得$f(x)$在(α,β)上连续.

命题 8 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)右可导，则存在$\lambda,\mu\in(a,b)$, 使得

$$f'_+(\lambda)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'_+(\mu).$$

证 先证明$f(a)=f(b)$的情形下命题成立. 这时，若$f(x)$在$[a,b]$上恒为常数，则任取$\lambda,\mu\in(a,b)$即可；若$f(x)$在$[a,b]$上不恒为常数，则不妨设存在$c\in(a,b)$, 使得$f(c)>f(a)$, 则取定$d\in(f(a),f(c))$, 令$S=\{x\in[a,c]\big|f(x)<d\}$, 则由$a\in S$知$S$非空，从而根据确界原理知$S$有上确界. 记$\mu=\sup S$, 则由$f(x)$在$[a,b]$连续，$f(a)<d<f(c)$知$\mu\in(a,b)$. 当$x>\mu$时，有$f(x)\geqslant d$, 故$f(\mu)=\lim\limits_{x\to\mu^+}f(x)\geqslant d$; 由$\mu=\sup S$知存在$\{x_n\}\subseteq S$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\mu$, 故$f(\mu)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\leqslant d$. 合起来得到$f(\mu)=d$. 于是$x>\mu$时，有$\dfrac{f(x)-f(\mu)}{x-\mu}\geqslant 0$. 由极限的保序性得$f'_+(\mu)=\lim\limits_{x\to\mu^+}\dfrac{f(x)-f(\mu)}{x-\mu}\geqslant 0$. 类似可证存在$\lambda\in(c,b)$, 使得$f'_+(\lambda)\leqslant 0$.

再证明一般情形. 这时，令$g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, 则$g(x)$在$[a,b]$连续，$g(a)=f(a)=g(b)$, 对任意$x\in(a,b)$, 有$g'_+(x)=f'_+(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 由上面的证明知存在$\lambda,\mu\in(a,b)$, 使得$g'_+(\lambda)\leqslant 0\leqslant g'_+(\mu)$, 从而

$$f'_+(\lambda)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'_+(\mu).$$

□

命题 9 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)右可导，那么有

(1) 若$f'_+(x)$在(a,b)非负（非正），则$f(x)$在$[a,b]$单调递增（递减）；

(2) 若$f'_+(x)$在(a,b)恒等于0, 则$f(x)$在$[a,b]$恒为常数.

命题 10 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)右可导. 若$f'_+(x)$在(a,b)连续，则$f(x)$在(a,b)可导.

命题 11 设函数$f(x)$在(a,b)右可导且利普希茨连续，则有

$$\inf\left\{M\in\mathbb{R}\Big||f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|,\ \forall x,y\in(a,b)\right\}=\sup_{x\in(a,b)}|f'_+(x)|.$$

命题 12 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)右可导，令$m=\inf\limits_{x\in(a,b)}f'_+(x)$, $M=\sup\limits_{x\in(a,b)}f'_+(x)$, $S=\left\{\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\middle|x,y\in[a,b],x\neq y\right\}$, 那么有

(1) $m=\inf S$, $M=\sup S$;

(2) 若$m<M$, 则$(m,M)\subseteq S$.

命题 13 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)既右可导也左可导，则$\inf\limits_{x\in(a,b)}f'_+(x)=\inf\limits_{x\in(a,b)}f'_-(x)$, $\sup\limits_{x\in(a,b)}f'_+(x)=\sup\limits_{x\in(a,b)}f'_-(x)$.

命题 14 函数$f(x)$在(a,b)下凸的充分必要条件是$f(x)$在(a,b)连续且有单调递增的右导函数.

证 “$\Rightarrow$”. 课上已证明$f(x)$在(a,b)既左可导也右可导，从而$f(x)$在(a,b)连续. 由三弦引理不难证明$f'_+(x)$在(a,b)单调递增. 请自行证明.

“$\Leftarrow$”. 对任意$x_0,x_1\in(a,b)$, $x_0<x_1$, 以及任意的$t\in(0,1)$, 记$x_t=(1-t)x_0+tx_1$, 由例1知存在$\lambda\in(x_0,x_t)$和$\mu\in(x_t,x_1)$, 使得

$$\frac{f(x_t)-f(x_0)}{x_t-x_0}\leqslant f'_+(\lambda),\quad f'_+(\mu)\leqslant\frac{f(x_t)-f(x_1)}{x_t-x_1},$$

整理得到

$$f(x_t)\leqslant f(x_0)+f'_+(\lambda)\cdot t(x_1-x_0),\quad f(x_t)\leqslant f(x_1)-f'_+(\mu)\cdot(1-t)(x_1-x_0).$$

前一个等式两边乘以$1-t$, 后一个等式两边乘以t, 相加得

$$f(x_t)\leqslant(1-t)f(x_0)+tf(x_1)+[f'_+(\lambda)-f'_+(\mu)]\cdot t(1-t)(x_1-x_0).$$

由$f'_+(x)$在(a,b)单调递增知$f'_+(\lambda)\leqslant f'_+(\mu)$, 故$f(x_t)\leqslant(1-t)f(x_0)+tf(x_1)$. 按定义知$f(x)$在$(a,b)$下凸. $\square$

命题 15 设函数$f(x)$在(a,b)下凸，$u\in(a,b)$, 则曲线$y=f(x)$在直线$y=m(x-u)+f(u)$的上方当且仅当$f'_-(u)\leqslant m\leqslant f'_+(u)$.

命题 16 设函数$f(x)$在(a,b)连续且右可导，对任意$x,u\in(a,b)$, 都有$f(x)\geqslant f'_+(u)(x-u)+f(u)$, 则$f(x)$在$(a,b)$下凸.

证 任意取定$x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$, 则$f(x_1)\geqslant f'_+(x_2)(x_1-x_2)+f(x_2)$, $f(x_2)\geqslant f'_+(x_1)(x_2-x_1)+f(x_1)$. 于是

$$f'_+(x_1)\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant f'_+(x_2).$$

由命题14给出的充要条件知$f(x)$在(a,b)下凸. $\square$