数学科学学院数学系2014 — 2015学年第一学期《高等代数与解析几何》课程期末考试试卷(A卷)

专业：　　　　年级：　　　　学号：　　　　姓名：　　　　成绩:

草 稿 区

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	成绩
得分									

得 分

一、(15分) 计算n阶行列式$\begin{vmatrix} x_1+t & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2+t & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3+t & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n+t \end{vmatrix}$.

草 稿 区

得 分

二、(15分)求矩阵X, 使得$A^*X = A^{-1}B - 2X$. 其中A^*是矩阵A的伴随矩阵, 且$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

草 稿 区

得 分

三、(15分) 设$A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. 当$a,b$为何值时, 存在矩阵$C$使得$AC-CA=B$, 并求出所有矩阵$C$.

草 稿 区

得 分

四、(15分) 在数域P中给定互不相等的n个数a_1, a_2, $\cdots$, a_n并定义多项式$f_i(x) = \prod_{j\neq i}(x-a_j)$, $i=1, 2, \cdots, n$. 证明下面两组多项式S_1: $1, x, \cdots, x^{n-1}$与S_2 : $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$都是$P[x]_n$的基, 并求出过渡矩阵$T\begin{pmatrix} S_2 \\ S_1 \end{pmatrix}$.

草 稿 区

得 分

五、(10分) 如果n阶矩阵A中每一列的n个数之和等于1, 则称A很任性. 证明: (1) 如果A很任性, 则对于任意正整数m, A^m很任性; (2) 如果A和A^*都很任性,则$\det(A) = 1$.

草 稿 区

得 分

六、(10分)设A为$n\times n$矩阵, 且$A^2=I_n$. 证明: $R(I_n+A)+R(I_n-A)=n$.

草 稿 区

得 分

七、(10分) 设$A \in P^{n\times n}$, $A^2 = A$, V_1和V_2分别是齐次线性方程组$AX = 0$和$(A-I_n)X = 0$的解空间. 证明：$P^{n\times 1} = V_1 \oplus V_2$.

得 分

八、问答题(10分) 设$A \in R^{s\times n}$, $\forall \beta \in R^{s\times 1}$. 问线性方程组$A'AX = A'\beta$是否一定有解？并说明理由.

草 稿 区