数列极限的定义

数学分析I

第3讲

September 29, 2022

无穷数列是指一个定义域为正整数集的函数$f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, 记为$\{f(n)\}$. 习惯上将$f(n)$记为x_n, y_n, a_n, b_n等, 相应地, 将数列记为$\{x_n\},\{y_n\},\{a_n\},\{b_n\}$等. 称$x_n$为数列$\{x_n\}$的通项, n为通项的下标. 按照下标的增长顺序也常将数列$\{x_n\}$写成$x_1,x_2,x_3,\cdots$.

对于数列, 我们关心的是随着n无限增大, 通项x_n的变化趋势, 也就是数列的极限状态.

观察下面三个数列:

(i) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \cdots,$

(ii) $1,\ 4,\ 9,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots,$

(iii) $1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^{n+1},\ \cdots,$

容易看出, 数列(i)的通项随着n无限增大而无限地接近0, 数列(ii)的通项随着n无限增大也无限地增大, 数列(iii)的通项随着n的改变总在1与-1间轮换取值, 这实际上反映了数列不同的特征.

定义 1

对给定的数列$\{x_n\}$, 若存在某个实数a, 当n无限增大时, x_n无限地接近a, 则称数列为收敛数列, 并以a为极限. 否则, 若对于任何实数a, 数列都不以a为极限, 则称数列为发散数列(也称数列的极限不存在).

根据定义1与前面的观察可以看到, 数列(i)是收敛的, 并且以0为极限, 数列(ii)与(iii)都是发散的.

定义1虽然形象地描述了数列以某数a为极限的特征, 但是若要在理论上证明一个数列的极限是某数, 还需要进一步给出“数列以某数a为极限”的确切定义, 这就需要用数学语言描述收敛数列“当n无限增大时, x_n无限地接近a”这句话的含义.

观察以$a=0$为极限的数列(i), 如果用$\frac{1}{10}$作为衡量x_n与a接近的程度, 即要使$|x_n-a|=\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|<\frac{1}{10}$, 只要$n>10$便可, 即从第11项起以后所有项, 都能使$|x_n-a|<\frac{1}{10}$. 用$\frac{1}{100}$作为衡量尺度, 要使$|x_n-a|<\frac{1}{100}$, 只要$n>100$便可. 可见, 描述"当$n$无限增大时", 即是在一个给定的衡量尺度下, 找到一个下标N, 只要"$n>N$"即认为n充分大.

就衡量尺度而言, 任何具体的数, 如$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\cdots$等都只是描述了x_n与a的一个具体的接近程度, 而不能描述x_n与a无限接近这一特征. 为了描述x_n与a无限地接近, 或者$|x_n-a|$可以任意小, 用一个表示任意小的、抽象的正数作为衡量尺度才是合理的.

对数列(i), 用任意小的正数ε作为衡量尺度, 要使$|x_n-a|=\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$, 只要$n>\frac{1}{\varepsilon}$便可, 所以, 可以取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 那么, 当$n>N$时, 就有$|x_n-a|<\varepsilon$. 通过对数列(i)上述特征的观察, 我们可以给出"数列以某数a为极限"的严格数学定义.

定义 2

设$a \in \mathbb{R}$. 如果对于任何$\varepsilon > 0$, 都存在正整数N, 使当$n > N$时, 就有$|x_n - a| < \varepsilon$, 则称数列$\{x_n\}$以a为极限, 记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$或者$x_n \to a\,(n \to \infty)$.

关于极限的$\varepsilon - N$定义, 我们有必要先进行以下几点说明:

第一, 正数ε的任意性与给定性. 为了说明x_n与a无限地接近, ε作为衡量x_n与a接近程度的尺度, 只能是个抽象的、任意小的正数. 由于强调ε任意小, 必要时可以假定ε足够小, 比如$\varepsilon < 1$等(见后面的例题). 既然ε表示任何正数, 那么2ε, ε^2, $\sqrt{\varepsilon}$等也是任意正数, 因此定义中的ε也可以用2ε, ε^2, $\sqrt{\varepsilon}$等来代替, 将不等式中"$< \varepsilon$"换成"$\leqslant \varepsilon$"也不影响定义所蕴涵的意义. 尽管ε有任意性, 由于在说明正整数N的存在性时是针对事先给定的ε进行的, 从这个意义上讲, ε又具有给定性.

第二, N的存在性. 对于定义中的N, 我们关心的是它的存在性, 而不在乎它具体数值的大小. 一般来说, ε越小, N越大, 所以常将N写作$N(\varepsilon)$来表示N依赖于ε, 但是这并不意味着它们之间构成函数关系. 事实上对给定的ε, 若某个正整数N能使不等式成立, 则比N大的任何正整数都可以代替这个N. 如此说来, 将定义中 "$n > N$" 改写为 "$n \geqslant N$" 也是可以的, 并且在证明极限关系式时, 对给定的ε只要找到N即可, 而不必将N取得尽量小.

第三, 定义的几何解释. 从几何意义上讲, 数列$\{x_n\}$以a为极限, 就是无论ε多么小, 在a的ε邻域内总是包含了数列中某项x_N之后的所有项. 因为所有下标大于N的项$x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots$都落在a的ε邻域内, 而在这个邻域之外最多只有$x_1, x_2, \cdots, x_N$这有限的N项. 所以, 一个数列是否有极限、极限值是多少, 与它的任何有限项之取值无关, 换句话说, 添加、去掉或改变数列的任何有限项不会影响数列的(收)敛(发)散性与极限值.

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$的等价陈述

除了$\varepsilon - N$定义之外，由以上的说明可知，以下陈述都分别等价于$\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

- (1) $\forall \varepsilon \in (0,1), \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N(|x_n - a| < \varepsilon)$;
- (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N(|x_n - a| \leqslant \varepsilon)$;
- (3) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N(|x_n - a| < \varepsilon^2)$;
- (4) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N(|x_n - a| < \sqrt{\varepsilon})$;
- (5) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N(|x_n - a| < K\varepsilon)$ (其中K是与ε、n无关的常数);
- (6) $\forall m \in \mathbb{N}^*, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N\left(|x_n - a| < \frac{1}{m}\right)$;
- (7) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant N(|x_n - a| < \varepsilon)$;
- (8) a的任何邻域之外只有数列$\{x_n\}$中有限多项.

多选题

下列陈述中，与“$\lim_{n\to\infty} x_n = a$”等价的陈述有(　　　　　　　).

(A) 对任何$\varepsilon > 0$, 都存在正整数N, 使当$n \geqslant N$时，就有$|x_n - a| \leqslant \varepsilon$.

(B) 对任何正整数m, 都存在正整数N, 使当$n > N$时，就有$|x_n - a| < \frac{1}{m}$.

(C) 对任何$\varepsilon > 0$, 都存在正整数N, 使当$n > N$时，就有$|x_n - a| < (1+\varepsilon)\varepsilon$.

(D) 对任何$\varepsilon > 0$, 都存在正整数N, 使当$n > N$时，就有$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{N}$.

(E) a的任何邻域都包含数列$\{x_n\}$的无穷多项.

思考题

是否存在数列$\{x_n\}$, 使得对任意正整数m, 数列$\{x_n\}$有连续m项严格递减，但不存在正整数N, 使得数列$\{x_n\}$从N项开始严格递减？说明理由.

例 1

设$|q|<1$, 求证$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

对于本题这样的简单问题，可以直接解不等式$|x_n - a| < \varepsilon$来找到N. 本题的解答中，取$N = \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right] + 1$, 这里“取整后加1”是为了保证$N$是正整数.

上例的证明中找N的过程是直接求解不等式$|x_n-a|<\varepsilon$. 一般地，解不等式得出的是使不等式成立的充分必要条件，而$\varepsilon-N$定义中要求的“$n>N$”是使不等式成立的充分条件，因此对复杂问题常采用适当放大$|x_n-a|$的技巧. 例如，如果当$n>N_1$时有$|x_n-a|\leqslant\dfrac{C}{n^p}$，其中$C$和$p$都是正的常数，则取$N=\max\left\{N_1,\left[\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}\right]\right\}$，当$n>N$时，就有

$$|x_n-a|\leqslant\frac{C}{n^p}<\varepsilon.$$

例 2

设$a>1$，求证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

本题的解答是用伯努利不等式（二项式定理就可以）来放缩，也可以用均值不等式来放缩.

上例中将$|\sqrt[n]{a}-1|$放大为$\frac{a-1}{n}$, 通过解$\frac{a-1}{n}<\varepsilon$, 当然也就有$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$. 一般地, 为了便于放大$|x_n - a|$, 常需预先假定$n$足够大, 见下面的几例.

例 3

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\dfrac{1}{3}$.

本题的解答展示了分式表达式放缩的思路，具体的做法当然不是唯一的，重点在于掌握这种思路.

例 4

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0.$

本题的解答是用二项式定理来将分母适当缩小，举一反三，不难想到这种做法适用于更一般的结果：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^s}{a^n}=0\quad(a>1,s\in\mathbb{R}).$

从以上例题的证明过程可以看出, 用定义证明极限的关键在于证明N的存在性, 为了使这一过程简单明了, 假定n足够大并适当放大$|x_n-a|$是常用的技巧. 要点是适当放大得到$|x_n-a|\leqslant y_n$, 这里y_n以0为极限，不等式$y_n<\varepsilon$容易求解.

例 5

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n} = a$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 所以对于任给的$\varepsilon > 0$, 存在$N$, 使当$n > N$时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

因此很自然地，将$\left|\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n} - a\right| = \left|\dfrac{(x_1-a)+\cdots+(x_n-a)}{n}\right|$适当放大为

$$\left|\frac{(x_1-a)+\cdots+(x_N-a)}{n}\right| + \left|\frac{(x_{N+1}-a)+\cdots+(x_n-a)}{n}\right|,$$

再对前后两段分别估计.

数列极限定义的否定

利用极限的$\varepsilon - N$定义可以从正面验证一个数列以某数为极限, 而有时需要论证一个数列不以某数为极限. 一个数列不以某数为极限的情况比较复杂, 该数列可能是发散的, 根本没有极限; 也可能是收敛的, 但是它的极限是另外的数. 对于这种复杂情况, 通常并不采取分情况一一讨论的方法, 而是利用所谓的"极限定义的否定"给予解决.

极限定义的否定就是用数学语言对数列$\{x_n\}$不以a为极限进行描述. 当用反证法证明某些极限问题时, 极限定义的否定往往也是不可或缺的. 基本的逻辑知识告诉我们, 如果一个命题"条件$A \Longrightarrow$ 条件B"为真, 那么它的逆否命题"否条件$A \Longleftarrow$ 否条件B"也为真. 如果将一个数学定义看做是一个等价的真命题, 即"条件$A \Longleftrightarrow$ 条件B"为真, 那么必然得到"否条件$A \Longleftrightarrow$ 否条件B"也为真. 因此, 对$\varepsilon - N$定义中数列$\{x_n\}$以a为极限的条件"对于任何$\varepsilon > 0$, 都存在正整数N, 使当$n > N$时, 就有$|x_n - a| < \varepsilon$"进行逻辑否定, 就得到下面的数列$\{x_n\}$不以a为极限的数学表述.

定理 1 (极限定义的否定)

设$a \in \mathbb{R}$. 数列$\{x_n\}$不以a为极限(记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$)的充分必要条件为: 存在$\varepsilon_0 > 0$, 对于任何正整数$N$, 都存在$n_0 > N$, 使得$|x_{n_0} - a| \geqslant \varepsilon_0$.

从上面的分析可知, 极限定义的否定与$\varepsilon - N$定义是相互等价的, 可以看做是从反面表述$\varepsilon - N$定义. 根据定义1可以进一步得到发散数列的数学表述: 数列$\{x_n\}$为发散数列(或者极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在)的充分必要条件是对于任何实数$a$, 存在$\varepsilon_0 > 0$, 对于任何正整数$N$, 都存在$n_0 > N$, 使得$|x_{n_0} - a| \geqslant \varepsilon_0$.

下列陈述中，与“$\lim_{n\to\infty} x_n \neq a$”等价的陈述有(　　　　).

(A) 对于任何正整数N, 存在$\varepsilon_0 > 0$, 存在$n_0 > N$，使得$|x_{n_0} - a| \geqslant \varepsilon_0$.

(B) 存在正整数m_0, 使得数列$\{x_n\}$有无穷多项满足$|x_n - a| > \frac{1}{m_0}$.

(C) 存在a的邻域$B(a)$, 使得$B(a)$中只有数列$\{x_n\}$的有限多项.

(D) 存在a的邻域$B(a)$, 使得$\mathbb{R} \setminus B(a)$中有数列$\{x_n\}$的无穷多项.

例 6

证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\neq 1$.

要找$\varepsilon_0>0$, 使得对任意正整数N, 都存在$n_0>N$, 满足$\left|\frac{1}{n_0}-1\right|\geqslant\varepsilon_0$.
由$\frac{1}{n}$趋于0可见任何$(0,1)$中的实数作为ε_0都是可以的.

应用极限定义的否定的例题

例 7

证明极限 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$不存在.

对任意实数a, 要找$\varepsilon_0 > 0$(一般来说ε_0与a有关), 使得对任意正整数N, 都存在$n_0 > N$, 满足$|(-1)^{n_0} - a| \geqslant \varepsilon_0$. 由$(-1)^n$的值为$\pm 1$可见任何$(0, 1]$中的实数作为$\varepsilon_0$都是可以的.