前言

大学物理对最普遍、最基本的物质运动形式及其规律有着全面的介绍，大学物理是所有课程中将数学物理语言、高等数学和物理问题结合最紧密的一门课程，包含着物理学中最基本的概念、原理和方法，这对于学习其它学科以及进行工程技术创新与实践具有很重要的作用。

需要注意的是，为了能够“完美”地描述和处理物质运动，目前大学物理所涉及的内容通常采用理想化模型，大部分习题、例题都采用简化的理想模型，这和以后的学习和实践是不同的。然而大学物理又是重要的：通过学习大学物理，注意把握问题的本质，把握整体，重点与关键。

练习解答问题可以帮助大家熟悉物理基本原理、理解和运用数学物理方法、理性地思考问题中的各个要点。虽然一些定性问题可以通过概念、原理以及物理定律通过简单的逻辑推理得到答案，但是大量的物理问题还是需要进行定量描述和处理。在练习大学物理解题的过程中要关注以下几个环节：如何分析这个问题？这个问题的本质是什么？要采用什么方法处理？选择什么理论进行处理？为什么要选择这个理论？这个理论在整个课程体系中的地位和作用是什么？它如何与其它内容相关联？

对于问题的处理，可以尝试分为几个步骤进行解决：1. 收集信息，科学地描述问题：考虑运动中的共性与差异性，尽量采用描述运动共性的参量，使用相关物理量的通用符号，采用图、表等方式将问题中涉及的各个参量集中展示，各种条件用数学物理语言描述，涉及空间问题需要确定相应的参考系、坐标系以及坐标原点。这些前期处理可这以帮助大家熟悉和了解问题、描述问题，“进入”问题之中。2. 分析处理问题：通过物理近似选择合适的模型，考虑运动中的不变性与变化性：哪些特性（物理参量）是不变的，哪些物理理论是必须使用的，采用哪种方法可以对问题进行分解或简化处理。分析问题、思考问题是大家需要重点关注的，分析清楚才能正确综合处理。3.路线搜寻：确定参量之间的（因果）函数关系，以及相关微元之间的数学变换关系，发掘问题中隐含的条件与约束关系，通过各种关联关系搜寻可以达到目标的路线。这一步是确定如何将参数、理论、数据数学进行有效地关联和如何实现，练习对相关问题有序地进行组织。4. 操作运算：对符号所代表的参量间函数关系运用理论公式进行运算，考虑运算中的近似处理，获得最终的函数表达式，然后将问题中已知条件的具体数值带入，确定积分的上下限。这一步是呈现在作业和试卷上的内容，虽然同学们最重视，重要性反而不如其他几个环节。

上述的步骤会引导大家按照一定步骤有序地解答问题，有助于学习物理思维方法并且培养良好的操作习惯，加强逻辑思维能力和实验设计能力。答案本身并不重要，重要的是求解的思考过程，通过对习题的解答，学会分析问题和处理问题的方法，为将来进一步学习打下基础。

第一章 力学的内容和研究方法

一．内容提要:

运动学描述物体如何运动；动力学研究物体为什么会动。

二．要点:

1.模型的选取;

2.参考系、坐标系的选取;

3.参量之间以及参量微元之间的函数关系、矢量函数的描述。

习题解答:

1-1 什么叫质点？太阳、地球是质点吗？分子、原子是质点吗？试举例说明。

分析：本题说明模型选择的相对性。相同的物体，如果处于不同的运动中，结果将完全不同。当物体本身的空间因素所造成的差异在所研究的物理问题中可以忽略不计时，可以看成质点，否则则需要采用其他的物理模型。

答：在某些问题中，物体的形状和大小并不重要，可以忽略，可看成一个只有质量、没有大小和形状的理想的点，这样的物体就称为质点。

关于太阳、地球、分子、原子是否是质点，要视具体研究的问题而定。

例如，如果我们地球的公转或者太阳在银河系中的运动时，它们本身的尺度与其运动的空间尺度相比可以忽略，它们的自转基本可以忽略，此时它们可以被看作质点。

但是，如果我们要研究卫星发射，地球的大小、形状以及其自转就不能被忽略；研究太阳的黑子的分布，太阳就不能被看作质点。同样，在考虑理想气体所处的宏观物理状态时，分子或原子可当成质点，而研究分子或原子存在的内部构造对所研究的物理问题有影响时，如原子中电子绕核转动、分子中的几个原子相互总用时，它们就不能当做质点。

1-2 西部民歌：“阿拉木汗住在哪里，吐鲁番西三百六。”从位矢定义分析之。

分析：本题是关于参考系和坐标系选择的问题。遇到一个问题，首先要搞清楚研究对象，然后选择一个合适的参考系，在此参考系中选择一个点作为坐标原点，建立坐标系，然后才可以定量的分析问题。“西”是“上北下南左西右东”的垂直方位之一，所以应选直角坐标；“三百六”是以“里”为长度度量单位，有“三百六”。本题中心意思是选择则吐鲁番作为参考系坐标原点，选择直角坐标来定义阿拉木汗所住的位置。

答：选择地面参照系，以吐鲁番作为直角坐标原点，正东方向为x 轴正方向，正北方向为y 轴正向，在地面上建立直角坐标系。那么阿拉木汗住址的位矢为：

$\boldsymbol{r} = -360\boldsymbol{i}$

1-3 用量纲分析说明下列各式中力学量的量纲，如采用国际单位制，给出各量的单位：

分析：本题是关于量纲与国际单位制的问题。通过本题，使学生熟悉等式中量纲的一致性及不同单位之间的换算。

(1) $s = vt + \frac{1}{2}at^2$

解：v：量纲： L/T； 单位：m/s （速度）

t ：量纲：T； 单位：s （时间）

vt：量纲： L； 单位：m （距离）

a：量纲： L/T^2； 单位：m/s^2 （加速度）

at^2：量纲： L； 单位：m （距离）

s：量纲： L； 单位：m （长度）

(2) $p_1+\rho g h_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_0+\frac{1}{2}\rho v_0^2$

解： p：量纲： M/LT^2； 单位：Pa (N/m^2)（压强）

ρ ：量纲： M/L^3； 单位：kg/m^3 （体密度）

g：量纲： L/T^2； 单位：m/s^2 （重力加速度）

h：量纲： L； 单位：m （长度）

ρgh：量纲： M/LT^2； 单位：J/m^3 （能量密度）

v：量纲： L/T； 单位：m/s （速度）

ρv^2：量纲： M/LT^2； 单位：J/m^3 （动能密度）

等式两端量纲相同，均为 M/LT^2，单位均为Pa.

(3) $\frac{1}{2}k(x-x_0)^2=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}mv^2$

解： x：量纲： L； 单位：m （长度）

k：量纲： M/T^2； 单位： kg/s^2 （弹性系数）

$k(x-x_0)^2$：量纲： $M L^2/T^2$； 单位： J

v：量纲： L/T； 单位：m/s （速度）

mv^2：量纲： ML^2/T^2； 单位：J

等式左右均为能量量纲，ML^2/T^2

(4) $\int_0^t \boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\boldsymbol{p}(t)-\boldsymbol{p}(t_0)$

解：F: 量纲： ML/T^2； 单位：N ($kg\cdot m/s^2$)（力）

t：量纲： T； 单位：s （时间）

等式左边为冲量， 量纲： ML/T； 单位：N·s (kg·m/s)（冲量）

等式右边为动量的变化量， 量纲： ML/T； 单位：N·s (kg·m/s)（动量）

1-4 判断下列矢量表达式的正误：

分析：本题考察矢量的运算问题。矢量既有大小，又有方向，所以在进行矢量运算时，既要考虑矢量的大小，又要考虑矢量的方向。

(1) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

答：错 ；矢量按平行四边形法则相加，而不是简单的数量相加。

(2) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$

答：错 ；矢量叉乘按右手法则定方向，上式方程两边的矢量大小相同，方向相反。

(3) $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A}=A^2$

答：正确； 两个矢量点乘是标量，大小相同，方向相同所以上式成立。

(4) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$

答：正确 ；因为方向相同，叉乘结果恒为0。

第二章 质点力学

一．内容提要：

1.物体的位矢、速度、加速度这 3 个物理量都是随时间改变的，其中的任一物理参量都可以用 1 个标量函数与单位矢量函数的乘积来描述，矢量相加时需要遵循平行四边形法则。

2. 位矢、速度和加速度这 3 个物理参量之间是微分关系：

$$v=\frac{dr}{dt},\quad a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}$$

4.不同坐标系下位矢、速度和加速度（由于矢量求导，各坐标系下的微分关系不同，各单位矢量有专门的数学符号）

1）直角坐标系下：

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right)=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$
$$=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

2）自然坐标系下：

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t=v\boldsymbol{e}_t$$

切向加速度 $\quad a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

法向加速度 $\quad a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$

3）极坐标系下：

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta$$

径向加速度 $\quad a_r=\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$

横向加速度 $\quad a_\theta=r\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)$

5.做圆周运动的物体，其速度和加速度分别为:

$$\boldsymbol{v}=R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta=R\omega\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a}=-R\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\boldsymbol{e}_r+R\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_\theta=-R\omega^2\boldsymbol{e}_r+R\beta\boldsymbol{e}_\theta$$

6.速度和加速度的伽利略变换（两个参考系的坐标轴保持平行时）

$$\boldsymbol{v}'=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{a}' = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{相对}$$

7.牛顿第一定律给出了牛顿力学的适用空间，牛顿第二定律给出了力的定量关系，牛顿第三定律给出了作用力与反作用力的关系。

牛顿第二定律：

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

二．要点

1.对质点运动的描述，首先要选定参考系（一般是惯性系），然后采用坐标系将物体运动在空间进行分解处理。如何选择坐标系是描述物体运动的关键，要根据物体运动的特点来选择坐标系。直角坐标系下的微积分处理最简单，物体运动有固定轨迹时用自然坐标系进行描述和处理比较方便，当需要引入转过的角度这一运动参量描述物体时，用极坐标系描述比较方便。

2. 物体位矢、速度和加速度的微分关系是由运动的瞬时特性而定义得来的，和坐标系选择没有关系。不同情况下位矢、速度和加速度这 3 个物理量之间的函数关系是运动学研究的核心。参量之间的函数关系不明确时，可以由确定的几何约束关系求得参量微元之间的变换关系，然后进一步求解。

3.应用牛顿定律解题的一般步骤：

确定研究对象及其所适用的物理模型，选择参考系（通常是惯性参考系）；隔离体法进行受力分析，画出受力图；选取空间坐标以确定物理参量和公式的具体表达式；先用符号列方程，然后转化为函数的（微分）方联立求解；再带入具体的数值计算；讨论。

习题解答：

2-1 一质点沿一抛物线$y=x^2$ 运动，在任意时刻v_x=3m/s，试求在x=2/3m处这质点的速度和加速度的大小和方向。

分析：由位矢、速度、加速度的关系可知：题目已经给出y~x的函数关系，可知v_y~v_x的函数关系；进一步可知a_y~a_x的函数关系。由题意已知a_x=0，因此采用直角坐标系。

解:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2xv_x$$

在直角坐标系下，将x=2/3m处的运动参数带入，有：

$v=v_x\,i+ v_y\,j=3\,i+ 2*(2/3)*3=3i+4j$

$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$ ，可知此处的速度v = 5 m/s

$\alpha=arctg(v_y/v_x)=53°$

速度大小为5 m/s，方向与x轴正方向成53° 。

v_x不变，所以a_x=0；

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2v_x^2 + 2xa_x$$

所以，a = 18 j，加速度大小为18 m/s^2，方向沿y轴正方向。

2-2 一物体沿x 轴运动，其加速度可以表示为a_x=4x-2 (m/s^2)。已知x_0=0，v_0=10 m/s，试求在任意位置 x 处的速度。

分析：已知物体加速度和位矢的函数关系a~x，求物体运动的速度与位矢的函数关系v~x。常用公式以时间为变量，本题中要消去时间变量，考虑微分换元。

解：微分换元

$$a=\frac{dv}{dt}=4x-2=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}v$$

已经得到$a(v, \mathrm{d}v/\mathrm{d}x)$，题目给出了$a=f(x)$，经过分离变量处理，积分后可以得到$v$~$x$。

$$(4x-2)dx=vdv \qquad \text{或} \qquad \int_{x_0}^{x}(4x-2)dx=\int_{v_0}^{v}vdv$$

将x_0=0，v_0=10 m/s带入积分结果，有：

$v^2-v_0^2=4x^2-4x$

$$v=\sqrt{4x^2-4x+100}$$

2-3 一物体做直线运动，初速度为零，初始加速度为a_0，出发后每经过时间间隔τ，加速度均匀增加a_0，求经过时间 t 秒后物体的速度和距出发点的距离。

分析：题目中给出了直线运动中的加速度和时间关系a~t，可以得到函数$a(t)$，利用加速度、速度、位矢的基本关系，即可求得。

解：

物体运动加速度： $a=a_0+\dfrac{a_0}{\tau}t$

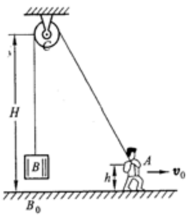
t 秒后物体运动的速度为： $v=\displaystyle\int_0^t adt=a_0t-\frac{1}{2}\frac{a_0}{\tau}t^2$

t 秒后距出发点的距离： $x=\displaystyle\int_0^t vdt=\frac{1}{2}a_0t^2-\frac{1}{6}\frac{a_0}{\tau}t^3$

2-4 如图所示，跨过滑轮 C的绳子，一端挂有重物 B。另一端 A被人拉着沿水平方向匀速运动，其速率v_0=1.0 m/s，A点离地面的距离保持着 h=1.5 m。运动开始时，重物在地面上的 B_0处，绳两侧都呈竖直伸长状态，且滑轮离地面 H=10 m，滑轮半径不计，

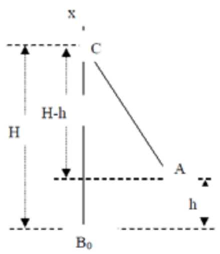
求 (1) 重物上升的运动方程；

(2) 到达滑轮前的任意 t时刻的速度和加速度以及到达滑轮处所需要的时间。



分析：重物直线上升，可以用直角坐标描述其运动。但是其位矢、速度、加速度没有直接的数学表达式，只知道左侧绳长改变的长度与右侧绳长改变长度相同。由A点的速度可知其位移，则右侧的绳长l与时间t的函数关系 l~t 可知，由此可知左侧绳长的改变（重物的位移）。对参量微元之间的函数关系进行变换，可进一步求得速度及加速度。

解：如图建立简化的坐标系：以B_0为原点，竖直向上方向为 x轴。由几何关系，得



$$l^2 = (H-h)^2 + (v_0 t)^2$$

将已知条件H，h，v_0 代入上式，得到：

$$l = \sqrt{8.5^2 + t^2}$$

（1）运动方程：

$$x = l - (H-h) = \sqrt{8.5^2 + t^2} - 8.5$$

（2）速度：

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{8.5^2 + t^2}}$$

加速度：

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\left(t^2 + 8.5^2\right)^{1/2}} - \frac{t^2}{(t^2 + 8.5^2)^{3/2}}$$

$$H = \sqrt{8.5^2 + t^2} - 8.5 = 10$$

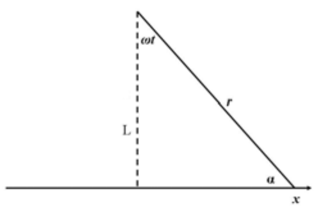
所需时间：

$$t = \pm 16.4(s)$$ （负值舍去）

2-5 在距河岸5.0 km处有一灯塔，它发出的光束每分钟转动一周。求：当光束扫至与岸边成60°角时，光束沿岸边滑动(光点运动)的速度和加速度。

分析：与5.0 km相比，河岸可以近似为直线，由此可知光点在河岸走直线，用直角坐标处理最方便。尽管光束在转动，但所研究的光点是在直线上滑动，如果描述光束的运动，由于其转动，需要采用极坐标描述，本题也可采用极坐标处理。

解：如图建立直角坐标。



由图可得：$x = \pm L\mathrm{tg}\omega t$

由此可知速度为：

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\omega \mathrm{L}\sec^2\omega t$$

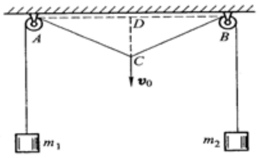
将ω=2 π/60，当α =60°时，ωt=30°，带入，有

v = ±5×10^3*(2 π/60)/cos^{2}30°≈±698 (m/s)

进一步求加速度，有

$$a = \pm 2\mathrm{L}\omega^2 \frac{\sin\omega t}{\cos^2\omega t}\Big|_{\alpha=60^\circ} = \pm 84.4\ (\mathrm{m/s^2})$$

2-6 如图所示，绕过小滑轮A 和B 的绳两端各挂重物m_1 和m_2，绳上的C 点起始位置与D 点重合，若将此点以匀速率v_0 沿垂线DC 向下拉，求t 时刻两重物的速率。(AD= BD = l)



分析：本题中DC的距离与时间t的函数关系可知，由此可进一步知道BC或AC与时间t的函数关系。因为重物和DC都是直线，以固定点D作为惯性参考系坐标原点，用直角坐标处理最方便。

解： $\mathrm{BC} = \sqrt{(v_0 t)^2 + l^2}$

则重物的位移为：x= BC－l，两重物具有相同的速率v，

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0^2 t}{\sqrt{(v_0 t)^2 + l^2}}$$

2-7 从地面向高空抛出一球，观察到它在高 9.1 米处的速度 $\boldsymbol{v} = 7.6\,\boldsymbol{i} + 6.1\,\boldsymbol{j}$ （m/s），x 轴沿水平方向，y 轴沿竖直向上方向，求：

（1）球上升的最大高度；

（2）球从抛出后所走过的总的水平距离；

(3) 球在落地时的速度。

分析：本题已知物体在某点的速度，求物体运动的轨迹及速度等。运动可分解为 2 个方向的运动，水平方向做匀速直线运动，竖直方向做匀加速直线运动（加速度为 g）各有其特点，然后进行合成。

解：根据运动的叠加原理，把小球的运动分解为 x 方向和 y 方向两个运动的叠加：

x 方向：小球不受力，作匀速直线运动，

t =0 时，x_0=0，v_x=7.6m/s

y 方向：小球受重力作用，作匀加速直线运动，加速度为重力加速度：$a = g$

t =0 时，y_0 =9.1 m，v_{y0} =6.1 m/s，a=－9.8 m/s^2

（1）球上升到最高点时，y 方向的速度为 0，有

$$v_y = v_{y0} - gt = 6.1 - 9.8t = 0$$

解得 t = 6.1/9.8 = 0.62 s，即还需要 0.62 s 才能达到最高处。

所以最高点的坐标: $y_{max} = y_0 + v_{y0}t - (1/2)gt^2$

有 y_{max} = 11 m

（2）球从最高点到落地，所需要的时间为t'，有：2 y_{max}= $g\,t'^2$

解得 t'≈1.5 s，所以x_{max} =7.6*(2*1.5) =22.8m

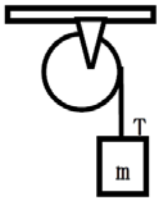
（3）球在落地时的速度为:

v_x =7.6 m/s，$v_y = gt'$= −14.7 m/s

$\boldsymbol{v}=7.6\,\boldsymbol{i}-14.7\,\boldsymbol{j}$ (m/s）

2-8 一半径为 0.1 m的圆盘，可以绕水平轴自由地转动，将一绳绕在圆盘上，绳的外端拴一物体 A，假设 A匀加速降落，它的加速度小于重力加速度。已知在 $t=0$时 A的速度为 0.04 m/s，2s后A落下0.2 m的距离，求圆盘边缘上任意一点在任一时刻 t 的切向和法向加速度？

分析：已知物体作匀加速直线运动、初始速度和位移，可知物体的速度和加速度。注意：此时求得的加速度（物体A的加速度）为圆盘边缘的切向加速度，圆盘做匀加速圆周运动时，圆盘边缘还有法向加速度。



解：已知：$t=0$时，v_0=0.04 m/s，$t=2$ s 时，$x=0.2$ m，而且做匀加速直线运动，有

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

将已知条件代入上式，得

$a_\tau=a=0.06$ (m/ s^2)

圆盘边缘的法向加速度为：$a_n=v^2/R$

因为 $v=v_0+at$

有：$a_n=(0.04+0.06\,t)^2/0.1=10(0.04+0.06\,t)^2$

2-9 物体的坐标为 $x=t^2$，$y=(t-1)^2$，式中各量均为国际单位。求：

(1)何时物体速度有极小值？

(2)计算 $t=1$秒时的切向和法向加速度

分析：已知物体的位矢分解到2个方向的坐标，可以分别求得速度及加速度的分量式。物体的速度和加速度与选用什么坐标没有关系，可以先合成切向速度，而后求得切向加速度再求得法向加速度。

解：（1）由速度与位置矢量关系可知

$v_x=2t$，$v_y=2(t-1)$

$$\boldsymbol{v}=\sqrt{\boldsymbol{v}_x^{\,2}+\boldsymbol{v}_y^{\,2}}=\sqrt{8\boldsymbol{t}^2-8\boldsymbol{t}+4}$$

当dv/dt =0时，物体的速度有极值，在本题中显然是极小值。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}=\frac{16\boldsymbol{t}-8}{2\sqrt{8\boldsymbol{t}^2-8\boldsymbol{t}+4}}=0$$

即$t=0.5$ s时物体速度有极小值。

（2）将$t=2$s带入上面dv/dt的表达式，可以得到切向加速度

$$\boldsymbol{a}_\tau=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}=\frac{16\boldsymbol{t}-8}{2\sqrt{8\boldsymbol{t}^2-8\boldsymbol{t}+4}}=2(\mathrm{m/s})$$

对分解到 x 和 y 轴上物体运动的轨迹求得加速度为：

a_x=2 m/s^2，a_y=2 m/s^2，则

$\boldsymbol{a}=2\sqrt{2}(\mathrm{m/s^2})$

因此 a_n=2 (m/s^2)

2-10 一质点沿一圆周按下述规律运动：$s=t^3+2t^2$，式中 s 是沿圆周测得的路程，以 m 为单位，t 以 s 为单位，如果当 t =2s 时质点的加速度为$16\sqrt{2}$ m/s^2 ，求圆的半径。
分析：已知路程与时间的函数关系，应选用自然坐标系，可以求得切向速率、切向加速度，由总的加速度可以反推其法向加速度，然后根据圆周运动的向心加速度公式可求出圆周的半径。
解：在自然坐标系下：

$$v=\frac{ds}{dt}=3t^2+4t$$

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=6t+4$$

将 t =2 s 带入，得到 v =20 m/s，a_τ=16 m/s，又由

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2},\qquad a=16\sqrt{2}\,m/s^2$$

可得到 a_n=16 m/s^2 ,
圆周运动向心加速度 $a_n= v^2$/R，有
$R= v^2/ a_n$
将 v =20 m/s，a_n=16 m/s 带入
可得 R=25 m.

2-11 一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s=v_0t-bt^2/2$ 运动，v_0 和 b 都是取正值的量。求
（1）t 时刻质点的加速度；
(2) t 为何值时加速度的值等于 b?
（3）加速度为 b 时，质点已沿圆周行进了多少圈？
分析：已知路程和时间的函数关系 s~t，选择自然坐标系最方便。圆周运动速率与向心加速度关系可计算，切向速度和切向加速度也可计算。
解：（1）自然坐标系下 $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t= v_0-b\,t$，因此有
$a_\tau=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -b$，$a_n= v^2/\mathrm{R} = (v_0-b\,t)^2/\mathrm{R}$

（2）$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$

因此有 $b=[(b^2 + (v_0-b\,t)^4/R^2)]^{1/2}$
解得 $t =v_0/b$
(3) 将 $t =v_0/b$ 带入路程 s 的表达式，可得
$s = v_{0*}(v_0/b) -b*(v_0/b)^2/2= v^2{}_0/2b$
圈数 $N= s/2\pi R$，有
$N= v^2{}_0/4\pi Rb$

2-12 质点在一平面内运动，其径向速度 dr/dt =4 m/s, 角速度 ω =1.0 rad/s（rad 为平面角的单位，称为弧度），试求质点距离原点 3 m 时的速度及加速度。
分析：存在转动问题，而且已经确定径向速度，应采用极坐标，求极坐标系下的速度和加速度。注意：径向加速度不仅与径向速度的时间变化率有关，还与横向速度有关；横向加速度也不仅与横向速度的时间变化率有关，同时还与径向速度有关。
解：极坐标系下

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta$$

因此速度为：$v = 4\boldsymbol{e}_r + (3*1)\boldsymbol{e}_\theta = 4\boldsymbol{e}_r + 3\boldsymbol{e}_\theta$ (m/s)

径向加速度 $a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

横向加速度 $a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$

本题中径向速度和角加速度皆为常数，因此有 $d^2r/dt^2=0$，$d^2\theta/dt^2=0$，

再把 $r=3$ m，ω=1 rad/s，dr/dt =4 m/s 分别带入径向加速度和横向加速度的表达式，有

$a = -3*1^2\ \boldsymbol{e}_r + 2*4*1\ \boldsymbol{e}_\theta = 3\ \boldsymbol{e}_r + 8\ \boldsymbol{e}_\theta$ (m/s)

2-13 一质点以角速度 $d\theta/dt = \omega$=常量运动，且 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0\ e^{bt}$，$r_0$ 和 b 都是常量，且 $b=\pm\ \omega$，求径向速度、径向和横向加速度。

分析：与上题相似，本题涉及旋转运动，应选择极坐标，求极坐标下物体的径向速度、横向速度，径向加速度以及横向加速度之间的函数关系。

解：极坐标系下

$$\boldsymbol{v} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_\theta$$

因此速度为：$v = \boldsymbol{r}_0\ b e^{bt}\ \boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{r}_0\ e^{bt}\omega\boldsymbol{e}_\theta$

径向速度为 $v_r = \boldsymbol{r}_0\ b e^{bt}\ \boldsymbol{e}_r$，法向速度为 $v_\theta = \boldsymbol{r}_0\ e^{bt}\omega\boldsymbol{e}_\theta$

径向加速度 $a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

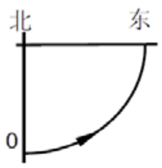
横向加速度 $a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$

本题中角加速度为常数，因此有 $d^2\theta/dt^2=0$，

径向加速度为：$\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{r}_0\ b^2 e^{bt} - \omega^2\boldsymbol{r}_0\ e^{bt} = 0$

横向加速度为：$\boldsymbol{a}_\theta = 2\omega b\boldsymbol{r}_0\ e^{bt}\ \boldsymbol{e}_\theta$

2-14 列车在圆形轨道上自南转向东行驶，$t=0$ 时列车在 O 点，它距 O 点的路程由 $l = 80t - t^2$ 给出，如图所示，轨道半径 R=1500 m，求列车时过 O 点以后前进至 1200 m 处的速度和加速度。



分析：本题已知路程与时间的函数关系，应选择自然坐标系，在自然坐标系下求物体运动的速度和加速度。注：自然坐标系中速度始终指向切线方向，所以由速率可直接推知速度。

解：自然坐标系下：

$v_\tau = dl/dt = 80-2t$

$a_\tau = dv_\tau/dt = -2$(m/s)，$a_n = v^2_\tau/R$

前进至 1200 m 处的时间 t，应满足方程：

$1200 = 80t - t^2$

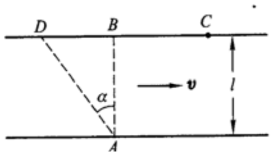
求得 t_1=20 s，t_2=60 s

当 t_2=60 s 时，$v_\tau = -40$ m/s，列车是返程，非前进方向，舍去。

取 t_1=20 s，有 v_τ=80 −2*20=40 (m/s)

$a_\tau = -2$ (m/s^2)，$a_n = v^2_\tau/R = 40^2/1500 = 16/15$ (m/s^2)

2-15 小船渡河，从 A 点出发，如果保持与岸垂直的方向划行，10 min 以后到达对岸的 C 点，C 点与正对着 A 点位置的 B 点之间的距离是 BC=120 m。如果要使小船正好到达 B 点，则小船必须向着 D 点方向划行，如题图所示，这时需要 12.5 min 才能到达对岸。试求小船划行的速率 u，河面宽度 l，水流速度 v 以及航角 α？



分析：本题是相对运动问题，速度合成、位移合成时要服从矢量相加的平行四边形法则。

解：正对河岸划船时，$\left|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\right|$ t_1=AC，t_1=600s

正对 D 点划船时，$(u\cos\alpha)\,t_2=l$，t_2=750 s，$u\sin\alpha = v$

由已知条件可知 $ut_1=l$，BC= $v\,t_1$=120 m，

有 v =120/600=0.2 (m/s)，

联立方程，有 $\cos\alpha = t_1/t_2$=4/5，$\sin\alpha$ = 3/5，

则 α =arcos0.8≈36.9°

可知 $u = v/\sin\alpha$ =0.2/(3/5)=1/3 (m/s)

$l = ut_1$ =600*(1/3)=200 (m/s)

2-16 测得一质点在坐标系 O 中的位置为 $\boldsymbol{r} = (6t^2-4t)\boldsymbol{i} +(-3t^2)\,\boldsymbol{j} +3\boldsymbol{k}$ (m)

(1)如果在坐标系 O′内测得它的位置为 $\boldsymbol{r}' = (6t^2+3t)\boldsymbol{i} +(-3t^2)\,\boldsymbol{j} +3\boldsymbol{k}$ (m)，试确定 O′系相对于 O 系的速度。

(2)证明在这两个坐标系中，质点的加速度相同。

分析：本题伽利略变换的问题。

解：（1）比较 2 个位矢的直角坐标

$\boldsymbol{r} = (6t^2-4t)\boldsymbol{i} +(-3t^2)\,\boldsymbol{j} +3\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{r}' = (6t^2+3t)\boldsymbol{i} +(-3t^2)\,\boldsymbol{j} +3\boldsymbol{k}$

有 $x = 6t^2-4t$　　　$x'=6t^2+3t$

$y=y'=-3t^2$

$z=z'=3$

由伽利略变换，$x' = x-ut$

$6t^2+3t = 6t^2-4t-ut$

$\boldsymbol{u}=-7\,\boldsymbol{i}$

或者分别求得质点在两个坐标系中的速度，然后相减，也可得到同样的结果。

(2) $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}^2}=12\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}^2}=12\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}$$

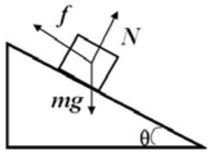
可见，在这两个坐标系中，加速度相同。

2-17 一人在静水中划船的速率为 u，现在他在水流速率为 v 的小河中将船从一岸划向另一岸，如果他希望用最短的时间到达对岸，应向什么方向划行？如果他希望用最短路径到达对岸，应向什么方向划行？

分析：本题与 2-15 题相似，是速度的合成问题。

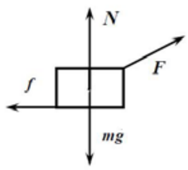
解：显然，如果希望用最短时间过河，则船速的方向应垂直于河岸的方向；
垂直于河岸的方向路径最短，因此船速在河岸方向的分量刚好能够抵消水的流速时，路径最短。

2-18 测量某两个物体之间的静摩擦因数时，可以将两个物体叠放在一个可以调节的斜面上，并将下面的物体跟斜面固定，逐渐增大斜面的倾角 θ，当 $\theta=\theta_0$ 时，上面的物体开始滑动，求 μ_s 。



分析：本题是静力学问题，关键在于受力分析，用隔离体法分析各个物体的受力情况。
解: 用隔离体法分析物体受力情况，如图所示，可知物体受三个力：
竖直向下的重力，平行于斜面的向斜上方的摩擦力和斜面对物体的支撑力。
当重力沿斜面向下的分力的大小和最大静摩擦力的大小相等时，物体开始滑动。所以：
$f = N\mu_s$
$N= mg\cos\theta_0$
$f = mg\sin\theta_0$
联立可解得
$\mu_s = \mathrm{tg}\theta_0$

2-19 若一根绳当张力超过 1000 N 时就会被拉断。
（1） 如果要用此绳在地板上拉动一只箱子，试问当摩擦因数为 0.35 时，它能拉动物体的最大质量是多少？
（2） 如果要用此绳提升箱子，箱子的加速度为 $1.0\ \mathrm{m/s^2}$，试问所提升箱子的最大质量是多少？
分析：同上题，关键也在受力分析。 现在是拉力已知(1000 N)，因为角度不同，质量 m 未知。



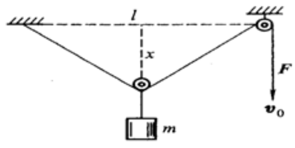
解: (1) 受力分析如图所示，在木板上拉箱子, 设拉力 F 与水平呈 α 角,
列方程组，有

$$\begin{cases} F\sin\alpha + N - mg = 0 \\ F\cos\alpha - f = 0 \\ f = \mu N \end{cases}$$

解得 $F=\mu mg/(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)$
$F_{max}=1000\ N$，则拉力与水平呈 α 角时可拉动的最大物体质量 $m= F_{max}\,(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)/\,\mu g$ ，随 α 角而变。
$\mathrm{d}m/\mathrm{d}\alpha=0$ 时，解得 $\mathrm{tg}\alpha=\mu=0.35$ (即 $\alpha = 19.29°$)时有极值，
此时 $\mathrm{d}^2m/\mathrm{d}\alpha^2 = F_{max}\,(-\mu\sin\alpha - \cos\alpha)/\,\mu g$ 为负，是极大值。
将 $F_{max}=1000N$，$\mathrm{tg}\alpha=\mu=0.35$ 带入，所能拉动的最大重物
$m= F_{max}\,(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)/\,\mu g$
化简后有 $m= F_{max}\,/(g\sin\alpha) \approx 308.9\ (\mathrm{kg})$
$F-mg = ma$

$m = F/(g + a)$
将 F_{max}=1000 N, a=1 m/s^2 带入，
有 $m \approx 92.6$ (kg)

2-20 如题 2-20 图所示，用力 F 使木箱上升，若绳端的下降速度 v_0 不变，木箱质量为 m，定滑轮和绳的固定端在同一高度上，且相距为 l，动滑轮、定滑轮和绳的质量以及绳的伸长量都忽略不计，求：
（1）以 x 为变量表示 m 的速率 v;
（2）求 $F(x)$。



题 2－20 图

分析：本题将运动学和动力学结合在一起。依题意用直角坐标系处理比较方便。可根据几何约束关系可得到 v_0 与 m 的速率 v 之间的关系，因为不含有时间变量，所以可表为 $v(x)$。滑轮改变了力的方向，不改变力的大小。注意竖直方向绳长的改变量是重物左右两端绳长的改变量相加（2 倍）。
解：（1）设重物右侧两个滑轮之间的绳长为 L
根据几何约束关系 $$x^2+\frac{l^2}{4}=L^2$$

求导: $$2x\frac{dx}{dt}+\frac{l}{2}\frac{dl}{dt}=2L\frac{dL}{dt}$$

已知: $$\frac{dl}{dt}=0\ ,\quad \frac{dL}{dt}=-\frac{v_0}{2}\ ,\quad \frac{dx}{dt}=v$$

带入求导结果，有 $xv = -\mathrm{L}v_0/2$
即 $$v=\frac{-\mathrm{L}v_0}{2x}=\frac{-v_0\sqrt{x^2+(l/2)^2}}{2x}$$
（2）绳中拉力处处相等，木箱受绳的拉力 T，重力 mg，有
$2T\cos\alpha - mg = ma$
$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(-\frac{v_0L}{2x})=-\frac{v_0}{2}\frac{d}{dt}(\frac{L}{x})=-\frac{v_0^2\ l^2}{16x^3}$$

$$F=T=\frac{m(g-a)}{2\cos\alpha}=\frac{m(g+\frac{v_0^2l^2}{16x^3})}{2x/L}=\frac{m}{2}(g+\frac{v_0^2l^2}{16x^3})\cdot\sqrt{1+\frac{l^2}{4x^2}}$$

2-21 摩托快艇以速率 v_0 行驶，它受到的摩擦阻力（黏性力）与速度的平方成正比，可表示为 $F=-.\eta v^2$ 。设摩托快艇的质量为 m，求当摩托快艇发动机关闭后
（1） 速度 v 随着时间的变化规律；
（2） 路径 x 随着时间的变化规律；
（3） 证明速度 v 与路程 x 之间的关系为 $v= v_0\mathrm{e}^{-\eta x/m}$。
分析：本题物体将动力学与运动学结合在一起，由受力可知其加速度 a，与其运动之间的函数关系 v

$\sim t$、$x \sim t$。首先做受力分析，考虑力的效应（变量之间的微分关系），然后应用牛顿第二定律解题。
解: (1) 快艇发动机关闭后, 只受摩擦力作用，速度从 v_0 逐渐减小

$$f=-\eta v^2=m\frac{dv}{dt}$$

分离变量，有：

$$\frac{dv}{v^2}=-\frac{\eta}{m}dt$$

积分：

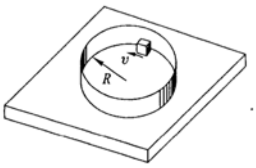
$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2}=-\int_0^t\frac{\eta}{m}dt$$

可得到 $t=m(1/v-1/v_0)/\eta$
经过整理，有 $v=v_0/(1+v_0\eta t/m)$
（2）由速度和位矢的关系，有

$$x=\int_0^t\frac{v_0\mathrm{d}t}{1+v_0\eta t/m}=\frac{m}{\eta}\ln(1+\frac{v_0\eta t}{m})$$

(3)欲求 $v\sim x$ 的关系，要消去时间 t
观察 $x(t)$，同时由 $v=v_0/(1+v_0\eta t/m)$，可得
$1+v_0\eta t/m=v_0/v$，带入 $x(t)$的积分结果，有
$x=m\ln(v_0/v)/\eta$
反解，有 $v=v_0e^{-\eta x/m}$

2-22 在光滑的水平桌面上平放着一个固定圆环，其半径为 R，一物体沿环的内侧运动，摩擦因数为 μ。已知 $t=0$ 时，物体的速率为 v_0，求在 t 时刻物体的速率和在 t 时间内物体所经过的路程，见题 2-22 图。



题 2－22 图

分析：本题将动力学与运动学结合，动力学可知其加速度，然后与其速度关联。因为有固定运动轨迹，选择自然坐标。物体受到重力、摩擦力、桌面支撑力和环的支撑力，桌面支撑力和重力平衡，摩擦力为环的切向，改变了物体运动的速率，环的支撑力沿法向，改变运动的方向。
解：
$\boldsymbol{f}=-\mu N$
$N=mv^2/R$
$\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}=m\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$
联立以上各方程，得到一个综合的方程

$$\boldsymbol{m}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}=-\mu\frac{\boldsymbol{m}\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R}}$$

简化方程、分离变量，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^2}=-\frac{\mu}{\boldsymbol{R}}\mathrm{d}\boldsymbol{t}$$

定积分之后，有

$\mu t/R=(1/v-1/v_0)$

整理后有 $v = v_0 R /(R+ v_0 \mu t)$

自然坐标下 v=ds/dt，积分可得路程 $s(t)$

$$s(t)=\int \frac{v_0 R}{R+v_0\mu t}\mathrm{d}t=\frac{R}{\mu}\ln\left(1+\frac{\mu v_0}{R}t\right)$$

2-23 若跑道为椭圆形的，通常意义的赛跑是测比赛选手的平均速率还是平均速度？

分析：本题考察速度与速率的区别，注意矢量性。速率只有大小，没有方向；速度既有大小，又有方向。速度是位移的时间变化率；速率是路程的时间变化率。

注意：1.这里路程和位移不是同一概念。当物体作直线运动时，路程与位移相等；但是当物体作曲线运动时，路程与位移不相等。2.瞬时速度（率）与平均速度（率）不同。瞬时速率等于瞬时速度的大小；直线运动中平均速率等于平均速度的大小。

答：不管跑道是什么形状，通常都是比赛选手的平均速率。因为我们最后评判的选手的成绩是跑过相同长度的跑道所需要的时间，即路程相同，看哪个选手所用的时间短。

只不过当跑道为直线形时，在整个比赛时间内的平均速度的大小就等于平均速率。赛跑中我们最后衡量的是比赛选手的平均速率的大小（单位时间内跑过的路程）。

2-24 利用速率和加速度的微分定义，推导匀加速直线运动的公式：

(1) $v = v_0 + at$

(2) $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

(3) $v^2 - v_0^2 = 2as$

分析：对于匀速直线运动，因为可以在直角坐标系下处理，速度和加速度可以用标量表达。注意速度和加速度都是瞬时量，需要采用微分定义。本题主要让同学们了解，微积分能方便解决过去初等数学解决的问题，更具有普遍性。

解：（1）加速度定义为 $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$

设 t 时刻速度为 v，初始时刻速度为 v_0，采用定积分处理，有

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t$$

可得 $v - v_0 = at$，

即 $v = v_0 + at$

（2）速度定义为 $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$

设 t 时刻位移为 s，初始时刻位移为 0（初始时刻位置的坐标不为 0，但是位移是末态位置与初始位置之差），采用定积分处理，有

$$\int_0^s \mathrm{d}s=\int_0^t v\mathrm{d}t=\int_0^t (v_0+at)\mathrm{d}t$$

积分后整理，有

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

（3）要消去时间标量 t，

由 $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$，$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$

微分换元，将 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}s/v$ 带入 $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，

有 $a = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}s$，

分离变量， 有 $a\,\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}v$，

取定积分，有

$$\int_0^s a\mathrm{d}s = \int_0^v v\mathrm{d}v$$

$$as = \frac{v^2 - v_0^2}{2}$$

因此有 $v^2 - v_0^2 = 2as$

2－25 任一随时间变化的物理量 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t)$ 在给定时间 $\Delta t = t - t_0$ 内的平均值定义为 $\langle \boldsymbol{B} \rangle = \dfrac{\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{B}(t)\mathrm{d}t}{\Delta t}$，证明平均速度和平均加速度的定义满足这一公式。

分析：本题考察平均速度和平均加速度的概念。平均速度是一段时间内速度的平均值；平均加速度是一段时间内加速度的平均值。

答：平均速度：

假设速度为 $\boldsymbol{v}(t)$， 平均速度的定义为

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta \boldsymbol{t}}$$

Δt 时间内的位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}\boldsymbol{t}$$

因此 $\langle \boldsymbol{v} \rangle = \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \dfrac{\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\Delta \boldsymbol{t}}$ 是满足该公式的。

平均加速度：

加速度为 $\boldsymbol{a}(t)$，平均加速度定义为

$$\langle \boldsymbol{a} \rangle = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{t}}$$

Δt 时间内的速度改变量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 为

$$\Delta \boldsymbol{v} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}\boldsymbol{t}$$

因此 $\langle \boldsymbol{a} \rangle = \dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \dfrac{\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\Delta \boldsymbol{t}}$ 是满足该公式的。

2－26 已知质点的运动方程 $x = x(t)$，$y = y(t)$，在计算质点的速度大小和加速度大小时，有人先求出 $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$，然后根据 $v = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，$a = \dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$ 求得；又有人先求 $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$，$a_y = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$，然后求得

$v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = \left[\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{1/2}$，$a = \left[\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2\right]^{1/2}$，哪一种方法正确？为什么？

分析：两种方法看似差不多，然而是有差别的，注意矢量的微积分和标量的微积分是不同的。
答：后一种方法正确，因为速度和加速度是矢量，直角坐标系下求微分处理不改变其方向，合成的结果是正确的。前一种方法虽然速度大小没有影响，但是求加速度的时候有错误。采用自然坐标系可以更加清晰地看出，第一种方法缺少了改变方向的法向加速度，计算的加速度要小于实际加速度。以物体做圆周运动为例，讨论速率、加速度大小可以更加清晰地看清这个问题。

2-27 讨论下面各种说法的正误或确切与否。
分析：这些问题考察运动学中各物理参量之间的关系。注意物理参量的矢量性，瞬时（微分 0 与累积(积分)效应是不同的。
(1)物体(质点)具有恒定的速率时，必作直线运动。
答：错误。速率只表示速度的大小，而不考虑方向，所以以恒定速率运动的物体，其运动方向可能发生改变，此时物体不做直线运动。例如匀速圆周运动，具有恒定的速率，但却是曲线运动。
(2)物体具有恒定的速度时，必作直线运动。
答：正确。速度是一个矢量，它包括大小和方向两个因素，既然速度恒定，说明加速度为 0，大小和方向这两个方面都不会恒定的，必然是直线运动。
(3)物体的加速度为常量时，必作直线运动。
答：错误。虽然加速度的大小和方向都不变，但是如果物体初始运动速度不为零，而且方向与加速度的方向不共线，那么速度的方向将会发生改变，此时物体的运动轨迹不是直线。
(4)物体加速度的绝对值减小时，该物体的速率也一定在减小。
答：错误。只要加速度的方向与速度的方向相同，不管加速度是增大还是减小，物体的速度都在增加。
(5)速度等于零的物体，其加速度可以不等于零。
答：正确。静止的物体（速度为零），如果受到力的作用，就会产生加速度。
(6)在直线运动中，$\boldsymbol{r}$ 的方向始终不变。
答：错误。如极坐标系下，极点不在直线上，即使物体作直线运动，$\boldsymbol{r}$ 的方向也是始终在变化。在直线运动中，Δr 的方向始终不变。$\boldsymbol{r}$ 和坐标原点选择有关。
(7)物体作曲线运动时必定有加速度，加速度的法向分量必不为零。
答：正确。速度的方向与曲线的切线方向一致，因此物体作曲线运动必须改变速度方向，而加速度的法向分量会改变物体的运动方向，因此加速度的法向方向分量必不为零。
(8)物体作曲线运动时，其加速度一定指向内切圆一方(即凹侧)。
答：正确。曲线运动中，速度方向指向曲线切线方向，切线加速度只改变加速度的大小，而法向加速度使物体的运动方向改变，垂直于切线指向内切圆的一侧，因此合成加速度的方向一定指向物体运动的凹侧。
(9)物体作曲线运动时，其速度一定沿切线方向，即 $v_n \equiv 0$，所以 $a_n \equiv 0$。
答：不确切。前一句正确：物体在作曲线运动时，其速度一定沿切线方向，其法线方向的速度为零。虽然法向速度为 0，法向加速度一般不为 0，用于改变速度的方向。例如，圆周运动，法向速度为 0，但是法向加速度不为 0。
(10)物体作圆运动时，其加速度一定指向圆心。
答：不确切。如果是匀速圆周运动，加速度始终指向圆心。但是如果是变速圆周运动，存在切向加速度，其加速度是切向加速度和法向加速度之和，不指向圆心。
(11)物体具有向西的速度，然而却同时具有向东的加速度。
答：可以存在这种情况。加速度与速度的方向相反，也就是物体作减速运动。
(12)只有法向加速度的运动一定是圆周运动。
答：不确切。法向加速度改变物体运动的方向，切向加速度改变物体运动速度的大小。由于只有法

向加速度，没有切向加速度，所以物体运动的速度大小不变，只是速度的方向在发生改变。如果运动的曲率半径不变，法向加速度的大小不变，则为匀速圆周运动，如果曲率半径改变，法向加速度的大小发生变化，运动轨迹不是圆。
(13)只有切向加速度的运动一定是直线运动。
答：正确。没有法向加速度，说明曲率半径无穷大，因此是直线。

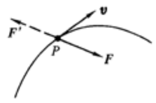
2-29 在平静的湖面上，甲乙两船各以恒速 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 行驶，判断两船是否相撞的最简单方法是什么？
分析：已知两物体速度，判断物体的行驶轨迹。如果我们选择甲船作为参照系，那么认为甲船不动，只有乙船在运动，这样判断是否相撞就容易的多。注意参考系与坐标系的选择。
答：在平静的湖面上，没有风，说明船无加速度。甲乙两船的速度恒定，那么两船均作匀速直线运动。选择甲船作为坐标原点建立坐标系，以初始时刻甲船和乙船连线为坐标轴（甲指向乙为正方向），则乙船相对于甲船的运动速度，得：
$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - v_1$
如果乙船的相对速度 $\boldsymbol{v}$ 平行于坐标轴上，且指向坐标原点（即甲船），那么经过一段时间后，两船会相撞。

2-30 在直线运动中，物体的运动方向是否一定与合力的方向相同？当作用于物体上的合力增大时，物体的速率是否一定增大？当作用于任何上的合力减小时，物体的速率是否一定减小？
分析：这道题目考察的是速度与力之间的关系。瞬时（力）效应与累积效应（速度）。
答：根据牛顿运动定律，力是产生加速度的原因，而不是产生速度的原因。所以力的方向与加速度的方向相同，而与速度的方向无关。所以，直线运动中，物体的运动方向与合力的方向不一定相同（如减速直线运动）。当作用于物体上的合力增大时，加速度会增大，但是方向未必与速度方向一致，速率不一定增大。当作用于物体上的合力减小时，加速度减小，但是速率不一定减小。

2-31 试从动力学观点说明：
(a) 质点做直线运动的条件；
(b) 质点做匀速圆周运动的条件；
(c) 只带你做匀速率曲线运动的条件；
(d) 质点做一船圆周运动的条件。
分析：这道题目考察力与运动之间的关系。
(a)质点作直线运动的条件；
答：根据牛顿第二定律，质点的加速度与质点所受外力方向一致。那么只要质点所受外力的方向一直与质点运动的方向平行（方向相同或方向相反），质点速度的方向就不会发生变化，那么质点就会作直线运动。
(b)质点作匀速圆周运动的条件；
答：质点作匀速圆周运动，说明运动的速率不变，方向一直在变化，其轨道为圆周。此时，质点的切向加速度为 0，法向加速度为向心加速度。向心加速度大小为 v^2/R ，也就是说，质点只受到大小恒定不变的法向加速度。
(c)质点作匀速率曲线运动的条件；
答：当质点所受的力始终垂直于质点运动速度的方向时，此力所产生的加速度的方向始终垂直于速度的方向，那么它只改变速度的方向，而不改变速度的大小，曲线所受的法向加速度与其速率和曲率半径保持关系 v^2/ρ，这时质点作匀速率曲线运动。
(d)质点作一般圆周运动的条件。
答：质点所受外力的法向分量始终提供质点运动的向心力。也就是说，质点所受的法向加速度与圆

周半径、运动速率的关系为 v^2/R。

2-32 设一质点在合力 F 的作用下做曲线运动，如题 2-32 图所示。如果在运动中到达某点 P 时，外力突然反向而大小未变，质点是否将会沿原轨迹反向折回？



题 2－32 图

分析：这道题目考察力与运动之间的关系。瞬时效应和累积效应不同。
答：不会。在外力突然反向的时刻，在 P 点质点已经有一个切向速度；此时速度不变，只是加速度的方向反向。那么质点不会沿原轨迹折回，质点会继续向前，但是轨迹曲线会向另一侧凹陷。（或者从微积分的角度考虑：运动轨迹是与加速度的二次累积效应有关，非瞬时效应）

2-33 电梯中质量为 m 的物体，求当
（1）电梯静止；（2）电梯匀速上升；（3）电梯以加速度 a 上升；　（4）电梯以加速度 a 下降时，物体对电梯的压力各为多少？
分析：这是一个合力与其效应的问题。
答：(1) 当电梯静止时，物体没有速度也没有加速度。此时物体对电梯的压力就是物体的重力 mg；
(2) 当电梯匀速上升时，电梯也没有加速度，此时，物体对电梯的压力仍然是物体的重力 mg；
(3) 当电梯以加速度 a 上升时，合外力为 ma，指向电梯上方，电梯给物体的支撑力除了要平衡物体的重力外，还要提供物体上升的加速度，所以，此时物体对电梯的压力为：$m(g+a)$；
(4) 当电梯以加速度 a 下降时，合外力为 ma，指向地面，重力的一部分用来提供下降的加速度，另一部分与电梯的支撑力平衡，此时压力为 $m(g-a)$。

第三章 质点系统的运动规律

一．内容提要

1.物体的动量包含了运动的运动状态及其惯性。

质点的动量定义为：$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$

质点系统的动量为各质点动量之和：$\boldsymbol{p}=\sum \boldsymbol{p}_i=\sum m_i\boldsymbol{v}_i$

质点系统和质点都遵循动量定理，动量改变量是力在时间上的累积效果：

质点的动量定理：$\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{p}$

由于内力互相抵消，对质点系统应用动量定理时不用考虑内力：$\boldsymbol{F}_{外}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{p}$

动量守恒定律（动量守恒定律和具体惯性系的选择无关）：

系统（某个方向）所受合外力为 0 时，系统（某个方向）动量守恒。

$\boldsymbol{F}_{外}=0$ 时，$\boldsymbol{p}=\sum \boldsymbol{p}_i$=常量

$$\boldsymbol{F}_{外x}=0\text{ 时},\boldsymbol{p}_x=\sum \boldsymbol{p}_{ix}=\text{常量}$$
$$\boldsymbol{F}_{外y}=0\text{ 时},\boldsymbol{p}_y=\sum \boldsymbol{p}_{iy}=\text{常量}$$
$$\boldsymbol{F}_{外z}=0\text{ 时},\boldsymbol{p}_z=\sum \boldsymbol{p}_{iz}=\text{常量}$$

3..元功定义为：

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

根据力所做功的空间特性，可以分为保守力和非保守力。

保守力：有些力所做的功与所走过的路径无关，典型的有弹性力，重力；

非保守力：另外一些力所做功依赖于所走过的路径，摩擦力是典型的非保守力。

4. 动能定义

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2,$$

质点的动能定理：质点的动能增量等于合外力对质点所做的功。

$$W=\Delta E_k=E_k-E_{k0}$$

质点系统的动能定理：质点系统的动能增量等于作用于所有质点上的所有力所做的总功：

$$W=\sum W_i=\sum \Delta E_{ki}=\Delta E_k=E_k-E_{k0}$$

特别地，一对内力对系统所做的元功等于内力与其相对元位移的标量积（点乘），即系统中内力做功（相互作用）不一定为 0。

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}_{21}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{21}$$

$$W_{外}+W_{内}=\Delta E_k=E_k-E_{k0}$$

5.势能、机械能以及机械能守恒定律

势能：由保守力势场中的空间位置所决定的能量，可以令空间任一位置为势能零点，求出势能差

$$W_{保}=\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{F}_{保}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\Delta E_p=E_p(\boldsymbol{r}_0)-E_p(\boldsymbol{r})$$

机械能：机械能为物体动能和势能之和

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_k+\boldsymbol{E}_p$$

功能原理：外力做功与内部非保守力做功之和等于系统机械能的增量。

$$W_{外}+W_{内,非保}=\Delta E_k+\Delta E_p=\Delta E$$

机械能守恒：当外力做功与内部非保守力做功之和为 0 时，系统机械能守恒。

当 $W_{外} + W_{内,非保} = 0$ 时，$\Delta E = 0$ 或 $E =$ 常量

6. 角动量主要应用于物体转动问题的研究，角动量和参考系（坐标原点）密切相关。
质点的角动量：
$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$
质点所受力矩：
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$
质点的角动量定理：
$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$$
质点系统的角动量
$$\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{L}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$$
质点系统的所受力矩：
$$\boldsymbol{M} = \sum \boldsymbol{M}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$
系统所受各内力产生的总力矩恒为 0， 因此系统的角动量定理为：
$$\boldsymbol{M}_{外} = \sum \boldsymbol{M}_{i外} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}$$
角动量守恒：当质点（系统）对某一固定参考点所受合外力矩（各外力矩之矢量和）为 0 时，质点（系统）对这一参考点角动量守恒。

当 $\boldsymbol{M}_{外} = 0$ 时， $\boldsymbol{L} =$ 常量

$$\boldsymbol{M}_{外x} = 0,\quad \boldsymbol{L}_x = 常量$$
$$\boldsymbol{M}_{外y} = 0,\quad \boldsymbol{L}_y = 常量$$
$$\boldsymbol{M}_{外z} = 0,\quad \boldsymbol{L}_z = 常量$$
7. 质心，质心系
质心对某一固定参考点的坐标：
$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{m}$$
或
$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\int_m \boldsymbol{r}\mathrm{d}m}{\int_m \mathrm{d}m} = \frac{1}{m}\int \boldsymbol{r}\rho\mathrm{d}V$$
质心运动定理
$$\boldsymbol{F}_{外} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t^2}$$
角动量：系统对固定参考点的角动量分为 2 个部分之和。外角动量：将系统当做质量集中于质心的质点时的角动量；内角动量：系统对质心的角动量。
$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \sum \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{L}_C + \boldsymbol{L}'$$
对固定参考点，考察系统的外角动量可使用角动量定理求得质心的转动状态：

$$M_C = r_C \times F_{外} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_C$$

在质心系下，对系统的内角动量（系统对质心）使用角动量定理有：

$$M'_{外} = \sum r'_i \times F_{i外} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L'$$

对质心使用动能定理，有：

$$E_k = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2 = E_{kC} + E'_k$$

$$\mathrm{d}W_C = F_{外} \cdot \mathrm{d}r_C = \mathrm{d}E_{kC}$$

在质心系下

$$\mathrm{d}W' = \sum F_i \cdot \mathrm{d}r'_i = \mathrm{d}E'_k$$

二．要点

1. 与质点模型相比，系统内部的相互作用（内力及其效应）成为质点系统模型的需要考虑的突出问题。在机械运动中，系统的动量、角动量和机械能是 3 个重要的状态参量，分别存在的 3 个守恒定律是物理学最根本、最普遍的定律。旋转问题要用角动量描述，相关物理量和参考点（通常选轴为参考点）有关。

2. 动量是力在时间上的累积，功是力在空间上的累积效果，角动量是力矩在时间上的累积。这些参量是力的时空积累效应，因此经典力学中力是核心因素。

3 质心参考系（坐标原点固定于质心）下的力学规律：

系统的各动力学参量都可分解为两个部分之和：1.以原参考系为坐标原点，同时采用质量集中在质心的质点模型的各动力学参量；2. 以质心为参考系（坐标原点）求得的质点系统的各动力学参量；各个部分的各动力学参量都遵循惯性系下的力学规律。对第 1 部分应用质点力学理论可以得到质心的运动学规律；第 2 部分质心系下的力学规律则是刚体力学的理论基础。

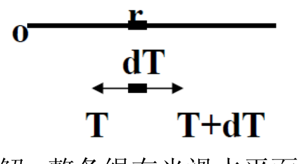
4. 解题时需要考虑的问题以及方法和步骤：

确定研究对象是质点还是系统模型；受力分析；建立空间坐标；对物体的运动过程进行分解；然后考察物体的动量、能量、角动量这 3 个动力学参量，对这 3 个参量按照坐标系分解，考察是否在某一方向上存在某一守恒定律，或者采用动量定理、角动量定理、动能定理进行处理。应用系统模型时需要考察系统内力的影响，对于动量、能量、角动量这 3 个动力学参量，内力只对系统的能量有影响。

习题解答：

3-1 一条均匀的、伸长量忽略不计的绳子，质量为 m，长度为 l，一端拴在转动轴上，并以匀角速率 ω 在一光滑水平面内旋转，问转动轴为 r 处的绳子中张力是多少？

分析：绳上各处因为距离转轴不同，因此受力不同，需要采用质点系统模型。取绳上一质量微元作受力分析，微元所受的合外力提供微元的向心力。本题注意 1.各处的力学特性和运动学特性差异很大（轴处速度为 0，受力最大，末端速度最大，受力最小），需要采用系统模型；2.微元的空间尺度无限小，可视为质点，用质点动力学；3.微积分边界条件的对应性。



解: 整条绳在光滑水平面内作圆周运动，绳上的每一小段（质元）都作圆周运动，如图。

$T-(T+\mathrm{d}T)=(\mathrm{d}m)\,\omega^2 r=(m/l)(\mathrm{d}r)\,\omega^2 r$

即 $-\mathrm{d}T=m\omega^2 r\mathrm{d}r/l$

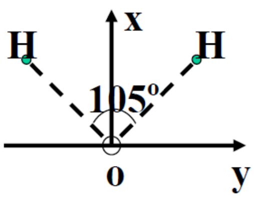
取定积分，有

$$\int_0^T -\mathrm{d}\boldsymbol{T}=\int_l^r \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{l}}\omega^2 \boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{T}=\frac{\boldsymbol{m}\omega^2\left(\boldsymbol{l}^2-\boldsymbol{r}^2\right)}{2\boldsymbol{l}}$$

3-2 一个水分子(H_2O)由一个氧原子（m_0=30.2×10^{-24} kg）和两个氢原子(m_H=1.68×10^{-24} kg)组成，氧原子与氢原子的中心距离均为 0.276 nm (1nm= 10^{-9} m)，氧原子中心与两个氢原子中心的连线夹角为 105°，试求水分子的质心位置。

分析：已知分立的质点组系统，求质心。以氧原子为轴对称中心，所以以氧原子中心为坐标原点，选择直角坐标系，运用质心的定义式即可求出。



解: 以 氧原子为坐标原点，如图所示:

y_c=0

$$x_c=\frac{2\times1.68\times10^{-24}\times2.76\times10^{-10}\cos\frac{105°}{2}}{(30.2+1.68\times2)\times10^{-24}}$$
$$=1.77X10^{-10}(m)$$

3-3 一长为 l 的细杆，若其密度按 $\rho=\rho_0 x/l$ 变化，其中 x 是从杆的一端算起的距离，ρ_0 为一常量。求它的质心位置。

分析：求质量连续分布系统的质心，要采用积分表达式；因为非均匀分布，考需虑质量微元与空间参数的函数关系。

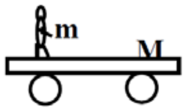
解: 根据质心定义，有：

$$x_c=\frac{\int x dm}{M}=\frac{\int_0^l x\rho dx}{\int_0^l \rho dx}=\frac{\int_0^l x\rho_0\frac{x}{l}dx}{\int_0^l \rho_0\frac{x}{l}dx}$$
$$=\frac{\int_0^l x^2 dx}{\int_0^l x dx}$$
$$=\frac{2}{3}l$$

3-4 在光滑的水平冰面上, 静放着质量为 m'的大平板车, 车上站着一个质量为 m 的人，若人在车上

走了 l 后而停止，那么平板车相对地走了多远。

分析：人和平板车组成一个质点系统，该系统在水平方向不受外力，即可认为是一个在 x 方向上的不受外力的孤立系统。对此系统运用质心运动定理，首先分别讨论人和车的运动，然后求质心的运动，考虑相对运动。



解: 水平方向合外力一直为零, 根据质心运动定理, 有 $a_c=0$

初始时刻 $v_c=0$ ，所以 $\Delta x_c=0$。

取地面为参考系，人走的方向为正方向。

设车的初始坐标为 x'，相对地面移动 $\Delta x'$；

人的初始坐标为 x，相对地面移动 Δx。

则质心初始位置 $x_{c初}=(m'x'+mx)/(m'+m)$

质心末态位置 $x_{c末}=[m'(x'+\Delta x')+m(x+\Delta x)]/(m'+m)$

$x_{c末}=x_{c初}$

由相对运动，有 $\Delta x-\Delta x'=l$

联立方程，有 $\Delta x'=m\,l/(m'+m)$。

3-5 两个小球用一细杆连结起来，它们静止于一无摩擦的水平面上，$m_1=4.0$ kg，$m_2=2.0$ kg，第三个小球的质量为 0.5 kg，它以 $v_0=2\boldsymbol{i}$ (m/s)趋近这系统，并与 2 kg 的小球相撞，如果 0.5 kg 的小球以 $v_f\boldsymbol{j}$ 跳开(v_f=1.0 m/s)，问这二小球系统的质心速度如何？

分析：由于有细杆相连，m_1 和 m_2 组成了一个质点组系统，第三个小球与第 2 个小球相撞，是质点与质点系统相互作用，碰撞过程动量守恒，只能求出 m_1 和 m_2 组成的系统的质心的速度。

解: 碰撞过程中动量守恒，有

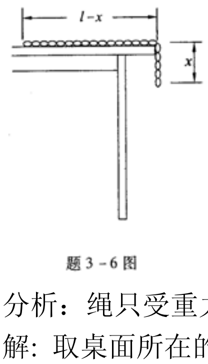
$m\boldsymbol{v}_0=m\,\boldsymbol{v}_f+(m_1+m_2)\boldsymbol{v}_c$

带入各参量，有

$0.5*2\,\boldsymbol{i}=0.5*1\,\boldsymbol{j}+(4+2)*\,\boldsymbol{v}_c$

$\boldsymbol{v}_c=\boldsymbol{i}/6-\boldsymbol{j}/12$

3-6 一条质量为 m，长为 l 的细绳，拉直后平放在光滑的桌面上，让其一端略沿桌面垂下，则细绳会顺其滑下，求细绳在滑下过程中的速率 v 与垂下部分绳长的关系。



题 3－6 图

分析：绳只受重力作用，重力为保守力，所以对绳与地面组成的系统，机械能守恒。

解: 取桌面所在的平面为零势能面, 单位长度绳的质量为 m/l, 当绳的下垂部分长为 x 时, 其质量为 xm/l, 下垂部分质心下降为 $x/2$，于是由机械能守恒, 可得:

$$\frac{xm}{l}g\frac{x}{2}=\frac{1}{2}mv^2$$

解得 $v=\sqrt{\frac{g}{l}}x$

3-7 在地面上竖直向上发射火箭，已知火箭的初始质量 m_0，喷气相对于火箭主体的速度为 u，不计空气阻力，求使火箭刚能离开地面的最低喷气流量(即单位时间内喷出气体的质量)应为多大？
分析：火箭是一个变质量系统，不能应用牛顿第二定律来处理，需要用动量定理来解题。
解：以地面为参考系，以火箭主体为研究对象，考察 $t\sim t+\mathrm{d}t$ 的动量改变量
设火箭主体对地速度为 t 时刻为 v，质量为 m，则 $t\sim t+\mathrm{d}t$ 时刻对地速度为 $v+\mathrm{d}v$，质量为 $m-\mathrm{d}m$；喷出气体的质量为 $\mathrm{d}\,m$，则对地速度为 $v-u$。
$\mathrm{d}\,m(v-u)+(m-\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)-mv=\mathrm{d}\,p$
整理该表达式，忽略二阶无穷小，有
$m\,\mathrm{d}v-u\,\mathrm{d}\,m=\mathrm{d}\,p$
两侧同除以 $\mathrm{d}t$，有
$\mathrm{d}p/\mathrm{d}t=m\,\mathrm{d}v/dt-u\,\mathrm{d}\,m/dt$
刚好离开地面，火箭主体加速度为 0，合外力要和重力平衡，有
$m_0\,\mathrm{g}=-u\,\mathrm{d}\,m/dt$
$\mathrm{d}\,m/dt$ 即喷气流量，为 $m_0\,\mathrm{g}/u$

3-8 有一个 6.0 kg 的质点，位矢为 $\boldsymbol{r}=(3t^2-6t)\boldsymbol{i}-4t^3\boldsymbol{j}+(3t+2)\boldsymbol{k}$（m）
试求（1）作用在这质点上的力；（2）作用在质点上的力矩（对原点）；（3）这质点的动量和角动量；（4）验证 $F=\mathrm{d}\,\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ 和 $\boldsymbol{M}=\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$
分析：本题在于复习位矢、速度、加速度、动量、力、角动量、力矩等物理参量之间基本函数关系，熟悉最基本、最重要的运动学参量和力学参量之间必然的逻辑关系。注意有些物理量和原点的有关。
解: $\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}/\mathrm{d}\,\boldsymbol{t}=(6t-6)\boldsymbol{i}-12\,t^2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{a}=\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}/\mathrm{d}\,\boldsymbol{t}=6\,\boldsymbol{i}-24\,t\boldsymbol{j}$
(1) 质量不变，$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=6*(6\,\boldsymbol{i}-24\,t\boldsymbol{j})=36\,\boldsymbol{i}-144\,t\boldsymbol{j}$ (N)
(2) $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3\boldsymbol{t}^2-6\boldsymbol{t} & -4\boldsymbol{t}^3 & 3\boldsymbol{t}+2\\ 36 & -144\boldsymbol{t} & 0\end{vmatrix}\\ &=144\boldsymbol{t}*(3\boldsymbol{t}+2)\boldsymbol{i}+36*(3\boldsymbol{t}+2)\boldsymbol{j}+[-144\boldsymbol{t}*(3\boldsymbol{t}^2-6\boldsymbol{t})-36*(-4\boldsymbol{t}^3)]\boldsymbol{k}\\ &=(432\boldsymbol{t}^2+288\boldsymbol{t})\boldsymbol{i}+(108\boldsymbol{t}+72)+(-288\boldsymbol{t}^3+864\boldsymbol{t}^2)\boldsymbol{k}\ (\mathrm{N}\square\mathrm{m})\end{aligned}$$

（3）$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=6*[(6t-6)\boldsymbol{i}-12\,t^2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}]=36(t-1)\boldsymbol{i}-72\,t^2\boldsymbol{j}+18\boldsymbol{k}$ (kg·m/s)
$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3\boldsymbol{t}^2-6\boldsymbol{t} & -4\boldsymbol{t}^3 & 3\boldsymbol{t}+2\\ 36(\boldsymbol{t}-1) & -72\boldsymbol{t}^2 & 18\end{vmatrix}\\ &=[18*(-4\boldsymbol{t}^3)-(3\boldsymbol{t}+2)(-72\boldsymbol{t}^2)]\boldsymbol{i}+[36(\boldsymbol{t}-1)(3\boldsymbol{t}+2)-18*(3\boldsymbol{t}^2-6\boldsymbol{t})]\boldsymbol{j}\\ &\quad+[(3\boldsymbol{t}^2-6\boldsymbol{t})(-72\boldsymbol{t}^2)-36(\boldsymbol{t}-1)(-4\boldsymbol{t}^3)]\boldsymbol{k}\\ &=144\boldsymbol{t}^2(\boldsymbol{t}+1)\boldsymbol{i}+(54\boldsymbol{t}^2+72\boldsymbol{t}-72)\boldsymbol{j}+(-72\boldsymbol{t}^4+288\boldsymbol{t}^3)\boldsymbol{k}\ (\mathrm{N}\square\mathrm{m})\end{aligned}$$

(4)

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\boldsymbol{t}}=\frac{\boldsymbol{d}[36(\boldsymbol{t}-1)\boldsymbol{i}-72\boldsymbol{t}^2\boldsymbol{j}+18\boldsymbol{k}]}{\mathrm{dt}}=36\boldsymbol{i}-144\boldsymbol{tj}=\boldsymbol{F}$$

$d\boldsymbol{L}/dt=144\boldsymbol{t}^2(\boldsymbol{t}+1)\boldsymbol{i}+(54\boldsymbol{t}^2+72\boldsymbol{t}-72)\boldsymbol{j}+(-72\boldsymbol{t}^4+288\boldsymbol{t}^3)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{M}$

3-9 两质点的质量分别为 m_1=4.0 kg，m_2 = 6.0 kg，位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1$ =3.0 $\boldsymbol{j}$ m， $\boldsymbol{r}_2$ = 3.0 $\boldsymbol{i}$ m。它们的速度分别为 $\boldsymbol{v}_1$ = 2.0$\boldsymbol{i}$ m/s， $\boldsymbol{v}_2$ = 3.0 $\boldsymbol{j}$ m/s。

(1) 试求这系统相对于 O 和相对于质心的总角动量，并验证它们之间的关系；

(2) 求这系统相对于 O 和相对于质心的动能并验证它们之间的关系。

分析：本题是关于质点系的动能、角动量等的概念问题，重点在于固定参考点(参考系)和质心系下角动量和动能的值是不同的，注意物理量的坐标原点问题，对系统固定参考点的动力学参量可以分解为两部分动力学参量之和：系统对质心+质心对固定点（质量集中在质心时）。

解：质心的坐标为，$\boldsymbol{r}_c$=(4*3.0 $\boldsymbol{j}$ + 6*3.0 $\boldsymbol{i}$)/ (4 + 6) =1. 8 $\boldsymbol{i}$ +1.2 $\boldsymbol{j}$ (m)

质心的速度为：$\boldsymbol{v}_c$=(4*2.0$\boldsymbol{i}$ + 6*3.0 $\boldsymbol{j}$)/ (4 + 6) =0.8 $\boldsymbol{i}$ +1.8 $\boldsymbol{j}$ (m/s)

(1) 系统相对于 O 的总角动量

$\boldsymbol{L}= \boldsymbol{r}_1\times m_1\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{r}_2\times m_2\boldsymbol{v}_2=3.0\,\boldsymbol{j}\times(4*2.0\boldsymbol{i}) + 3.0\,\boldsymbol{i}\times(6*3.0\,\boldsymbol{j}) = 30\boldsymbol{k}$ (kg·m^2/s)

两个质点相对于质心的速度分别为：

$$\boldsymbol{v}_1'=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_c=1.2\boldsymbol{i}-1.8\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_2'=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_c=-0.8\boldsymbol{i}+1.2\boldsymbol{j}$$

系统相对于质心的总角动量

$\boldsymbol{L}_{内}= (\boldsymbol{r}_1- \boldsymbol{r}_c)\times m_1\boldsymbol{v}'_1 +(\boldsymbol{r}_2- \boldsymbol{r}_c)\times m_2\boldsymbol{v}'_2$

$= (3.0\,\boldsymbol{j} - 1.8\,\boldsymbol{i} -1.2\,\boldsymbol{j})\times[4*(1.2\boldsymbol{i}-1.8\,\boldsymbol{j})] + (3.0\,\boldsymbol{i} - 1.8\,\boldsymbol{i} -1.2\,\boldsymbol{j})\times[6*(-0.8\,\boldsymbol{i} +1.2\,\boldsymbol{j})]$

$= 7.2\,\boldsymbol{k}$ (kg·m^2/s)

系统质量集中在质心上时（把系统看成质点）相对 O 的角动量

$\boldsymbol{L}_{外}= \boldsymbol{r}_c \times m\, \boldsymbol{v}_c$

$= (1.8\,\boldsymbol{i} +1.2\,\boldsymbol{j}) \times[(4 + 6)*(0.8\,\boldsymbol{i} +1.8\,\boldsymbol{j})]$

$= 22.8\,\boldsymbol{k}$ (kg·m^2/s)

可见，$\boldsymbol{L}= \boldsymbol{L}_{内} + \boldsymbol{L}_{外}$

(2) 系统相对于 O 的动能

$$\boldsymbol{E}_k=\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{v}_1^2/2+\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{v}_2^2/2=35\ (\mathrm{J})$$

质心相对于 O 的动能

$$\boldsymbol{E}_{kC}=\boldsymbol{m}_c\boldsymbol{v}_c^2/2=(4+6)(0.8^2+1.8^2)/2=19.4\ (\mathrm{J})$$

系统相对于质心的动能

$$\boldsymbol{E}_k'=\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{v}_1'^2/2+\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{v}_2'^2/2=4*(1.2^2+1.8^2)/2+6*(0.8^2+1.2^2)/2=15.6\ (\mathrm{J})$$

$$\boldsymbol{E}_k=\boldsymbol{E}_k'+\boldsymbol{E}_{kc}$$

3-10 在中间有一光滑小孔的水平光滑桌面上放置着一个用绳子联结的质量为 4.0 kg 的物体，绳的另一端穿过小孔下垂且用手握住，开始时，物体以半径为 0.5 m、速率为 4.0 m/s 在桌面上作匀速圆周运动，然后，将手极其缓慢地向下移动，直至运动半径变为 0.1 m。

(1) 求这时物体的速度；

(2) 在这一过程中，手的拉力作功多少？
(3) 写出拉力 F 与角动量 L，质量 m 以及半径 r 的关系。
分析：本题中物体在水平方向上所受的力只有绳子的拉力。而绳子的拉力是一个有心力，物体在有心力的作用下，角动量守恒。关于做功的问题，可以从功能转换的角度去考虑。
解：(1) 绳拉力为有心力，物体的角动量守恒。
物体做圆周运动，所以 $L=rmv$
$r_0mv_0=rmv$
有 $v=r_0v_0/r$=0.5*4/0.1=20 (m/s)
(2) 只有拉力做功，根据动能定理，

$$W=\Delta E_k=\frac{m(v^2-v_0^2)}{2}=\frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{r_0^2}{r^2}-1\right)$$

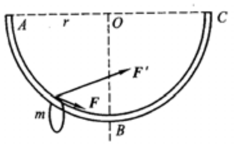
(3) 物体近似做圆周运动
$F\approx mv^2/r$
将 $L=rmv$ 带入，整理后，有

$$F=\frac{L^2}{mr^3}$$

3-11 一个人从 10 m 深的井中提水，起始桶内装有 25 kg 的水。由于水桶漏水，每升高 1.0 m 要漏去 0.5 kg 的水，求水桶匀速提升到井台上时这个人所作的功。
分析：本题中物体的质量一直在变化，那么它所受到的重力也是一个变化的力。功是力在空间上的累积，把力写成空间函数的形式(F~h)，考虑元功的定义，然后积分处理。
解: 选地面为参照系，直角坐标系，竖直向上为正方向。
因为非恒力做功，所以用元功 $\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\,r$
因为是匀速提升，所以提升时的力和重力平衡，随高度变化
有 $F(y)=m(y)g$ ，其中 $m(y)=25-0.5y$
取定积分可得

$$\int_0^{10}(25-0.5y)g\,dy=2205\ \text{(J)}$$

3-12 一个质量为 5.0 kg 的环 m 在一固定的光滑的金属环 ABC 上滑动，ABC 是半径为 1.2 m 的一个半圆的弧，作用在这小环 m 上的两个分力 F 和 F'的大小分别为 40 N 和 150 N，力 F 始终保持与圆相切，力 F'的作用方向恒定，始终与直径 AOC 构成 30°度，当这物体从 A 运动到 B 和从 A 运动到 C 时，如图所示，试计算作用在这物体上的这两个分力分别所做的总功。

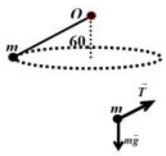


题 3－12 图

分析：元功为力与元位移的点乘，本题中力 F 始终与圆相切，与元位移方向一致，可以直接用力乘以物体移动的距离来求功；而力 F'是恒力，但是与元位移的夹角一直在变，可以用矢量分解的方法处理。
解：$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}$
力 $\boldsymbol{F}$ 大小恒定，且与圆相切，即与元位移的方向一致，因此力 $\boldsymbol{F}$ 的元功可改写为标量式，变为

dW=Fdr，积分结果是 F 与路程直接相乘。
积分后 F 在 AB 段做功为：$F\pi r/2$=40*π*1.2 /2≈ 75 .4 (J)
F 在 AC 段做功为：$F\pi r$=40*π*1.2≈ 151 (J)
F'是恒力，可按直角坐标分解为 x、y 方向上的恒力，元位移也按直角坐标分解，有
$W=\int F'_x \,\mathrm{d}x+\int F'_y \,\mathrm{d}y=F'_x\int \mathrm{d}x+F'_y\int \mathrm{d}y$
力 **F'**在 AC 段只有水平分量做功，为：$(F'\cos30°)*2r\approx$311.76 (J)
力 **F'**在 AB 段做功为：$(F'\cos30°-F'\cos60°)*r\approx$ 65.9 (J)

3-13 一橡皮绳原长 20 cm，上端固定在 O 点，当下端拴一质量为 m=0.05 kg 的物体时，其长度为 22 cm。若使这一物体在水平面内做匀速圆周运动，当橡皮绳与竖直方向成 60°角时，求：(1) 橡皮绳长度; (2) 物体的动能; (3)橡皮绳的弹性势能。
分析：首先，我们要对物体进行受力分析，如下图所示。对于圆周运动，已知向心力即可求得圆周运动的速度，随之就可以求出物体的动能。



解：由题意，$mg=k(l_1-l_0)$
k=0.05*9.8/(0.22−0.2) = 24.5 (N·m^2)

物体做圆周运动 $T\cos\theta=mg$ (1)

$$T\sin\theta=m\frac{v^2}{R}=m\frac{v^2}{l\sin\theta} \quad (2)$$

$$T=k(l-l_0) \quad (3)$$

可解得：
（1） 此时橡皮绳长度为：
$$l=\frac{l_1-l_0}{\cos\theta}+l_0=24cm$$
（2） 联立方程（1）、（2），有
$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}Tl\sin^2\theta=\frac{mgl\sin^2\theta}{2\cos\theta}=0.088\ (\mathrm{J})$$
（3） 样品的势能为：
$$E_p=\frac{1}{2}k(l-l_0)^2=1.96\times10^{-2}J$$

3-14 质量分别为 m_1 和 m_2 的两个球沿一条直线分别以速度 v_{10} 和 v_{20} 运动，求它们发生完全弹性的对心碰撞后的速度，并就两个球质量相等和两个球质量相差甚远两种情况作出讨论。
分析：这是一个碰撞问题，完全弹性碰撞系统的动量守恒，动能也守恒。
解: 完全弹性的对心碰撞，即碰撞前后速度均在联线上。碰前速度为 v_{10}，v_{20}，设碰后的速度为 v_1、v_2 。因系统动量守恒、动能守恒，有:
$m_1v_1+m_2v_2=m_1 v_{10}+m_2 v_{20}$
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2$$

联立，可解得

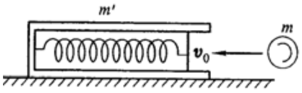
$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{2m_1 v_{10} + (m_2 - m_1)v_{20}}{m_1 + m_2}$$

若 $m_1 = m_2$，$v_1 = v_{20}$，$v_2 = v_{10}$，两球交换速度；

若 $m_1 << m_2$，$v_1 \approx 2v_{20} - v_{10}$，$v_2 \approx v_{20} - 2m_1 v_{10}/m_2$

3-15 如图所示，质量为 m 的小球以速度 v_0 射向质量为 m' 的弹簧上，设弹簧的弹性系数为 k, 靶 m′ 原来静止在光滑的水平面上，求弹簧被压缩的最大位移。



题 3－15 图

分析：小球和弹簧组成系统，二者之间存在弹性力，是系统内力。一对内力做的元功为内力与元位移的点乘，弹性力是保守力，因此系统机械能守恒。从过程看，小球压缩弹簧受反作用而速度减小，靶的加速度一直增加，二者有相同速度时，弹簧受到最大压缩。

解: 最大压缩时，小球与靶有共同的速度 v，系统水平方向动量守恒，有：

在具有相同速度时，$mv_0 = (m + m')v$

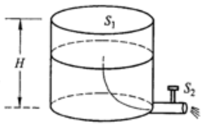
在此过程中，内力(弹力)做功，是保守力做功，机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m + m')v^2$$

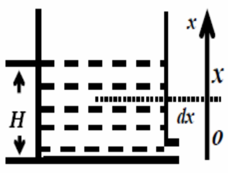
联立解得

$$x = \sqrt{\frac{mm'}{k(m + m')}}v_0$$

3-16 一个盛饮水的大圆桶，横截面积 $S=0.060\ m^2$，圆桶底部有一面积为 $S_0=1.0\times10^{-4}\ m^2$ 水龙头。打开水龙头，圆桶中的水流完需 3 分钟。问：原来桶内水面到桶底的高度是多少？



题 3－16 图



分析：本题是一个流体与运动学结合的问题，首先应用流体力学中伯努利方程，然后找出参量微元之间的函数关系求解。在运用伯努利方程时，需要用不同高度处水的压力。通常对于一个盛有水的桶中不同高度处水的压力是不同的，在水面是大气压，而在水面以下，则是大气压再加上水的重力。而本题中水面上和水桶底的水龙头处都与空气接触，所以它们的压强都应该是大气压。

解: 如图所示建立直角坐标系，在水箱任意处满足伯努利方程

$$p + \rho gx + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 + \rho g0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2$$

因为水面和出口都是大气压，伯努利方程简化为

$$\rho g x+\frac{1}{2}\rho v^2=\frac{1}{2}\rho {v_0}^2$$

由连续性方程，$sv = s_0v_0$

联立方程，有速率表达式

$$v^2(x)=\frac{s^2v^2(x)}{s_0^2}-2gx$$

整理后，有

$$v=\sqrt{\frac{2gS_0^2x}{S^2-S_0^2}}$$

速度定义 $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$

本题中速度向下，有 $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x/v(x)$

对上式取定积分

$$\int_0^t -\mathrm{d}t=\int_H^0\sqrt{\frac{s^2-s_0^2}{2gs_0^2x}}\mathrm{d}x$$

积分结果为

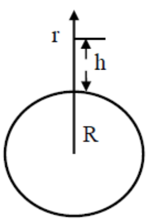
$$t=2\sqrt{\frac{s^2-s_0^2}{2gs_0^2}H}$$

解得

$$H=\left(\frac{t\sqrt{2gs_0^2}}{2\sqrt{s^2-s_0^2}}\right)^2\approx 0.44\ (\mathrm{m})$$

3-17 质量为 m 的物体以初速度 v_0 从地面竖直向上发射。 若发射后物体只受地球万有引力作用, 求物体所能上升的最大高度, 及逃逸地球的最小发射速度（第二宇宙速度）。

分析：物体只受重力，机械能守恒，上升高度受初速度的影响，当可以上升无限高度时，即可逃逸地球。



解：设上升最大高度距地面为 h。物体在运动过程中只受地球引力，机械能守恒。

$$\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{Mm}{R}=0-G\frac{Mm}{R+h}$$

因此，解得

$$h=\frac{v_0^2R^2}{2GM-v_0^2R}$$

当 h 为无穷大时，可以逃离地球的引力，即上式中分母为 0。

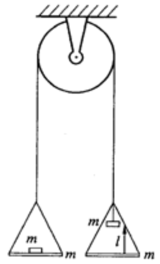
解得 $v_0=(2GM/R)^{1/2}\approx 9.8\times10^3\ (\mathrm{m/s})$

3-18 如图所示,绳的两端均系有两个物体，但右边的物体 m 是用棉线系于盘上高处的盘架上，开始

时系统是静止的，并且滑轮和绳的质量, 绳的伸长量以及滑轮轴处摩擦均忽略不计，若用火将棉线烧断。

求: (1) 右边的物体 m 在撞击底盘前一瞬时，系统的总动能;

(2)碰撞前后，系统的总动量(碰撞是完全非弹性的)和碰后速度。



题 3－18 图

分析：在右边物体与底盘的碰撞过程中，由于滑轮轴处外力的存在，系统动量并不守恒；但此外力不对该轴提供力矩，因此可从角动量角度讨论碰撞过程。

解: (1) 从动能定理看, 因系统只有重力作功：

设左侧物体位移 S_1, 烧断棉线碰撞前合外力为 mg，做功为 mgS_1，

设右边下落物体 S_2, 与盘相碰, 此过程中做功 mgS_2，

$S_1+S_2 = l$ 故: $\Delta E_k = mgl$

(2) 以轴处为参考点，在棉线烧毁前后以及碰撞前后，系统所受的合外力矩一直为 0，角动量守恒。

$0= R(2mv) + R(2mv) = R(2mv_1) + Rm\,v_1 - Rm\,v_2$

解得碰撞后瞬时都速度为 0，系统动量为 0，碰撞前瞬时，$v_2=3\,v_1$；

碰前瞬时机械能守恒

$$mgl = 3*\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}$$

联立方程，有 $v_1= (gl/6)^{1/2}$ ，

碰撞前动量为 $2m\,v_1 - m\,v_1 + m\,v_2 = 4m(gl/6)^{1/2}$

3-19 在地球表面附近将物体以足够速度发射出去，物体可能以稳定轨道环绕地球运行，这就是所谓的“人造地球卫星”。试估算物体能够环绕地球所需的最小发射速度（第一宇宙速度）。

分析：物体只受地球引力，机械能守恒。物体受到地球引力与向心力平衡时，可以成为卫星；若引力过大，物体将会坠向地面。

答：物体被抛出后以稳定的轨道环绕地球运动，那么物体所受到的地球引力提供物体环绕地球运动的向心力。

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$GM/R^2 = g$

卫星距离地面距离与地球半径 R 相比可忽略，因此有

$v \approx (gR)^{1/2} \approx 7.9\times10^3$ (m/s)

3-20 无风天气放烟花时，烟花质心的运动轨道如何？若将全部烟花微粒看作一组初速率相同，抛射角度不同的斜抛运动，试证明在任何时刻所有烟花微粒都分布在同一球面上。

分析：这是一个质点系统的问题。将所有的烟花颗粒看成一个质点组系统。在无风天气，这个质点

组系统爆炸之后只受到重力的作用，没有其他外力作用。本题采用质心系分析起来比较方便。
答：无风天气放烟花，说明烟花爆炸后除重力以外，不再受其它外力的作用。那么烟花爆炸时，有一个爆炸力（内力），使烟花分离成许多颗粒，其后只受重力的作用，所以烟花质心的运动轨道不变，仍然作斜抛运动。
任一烟花颗粒作为质点进行研究。
选取烟花爆炸点作为坐标原点，建立直角坐标系。假设此质点初速度为 $\boldsymbol{v}_0$，它与 z 轴夹角为 α，在 xy 平面的投影与 x 轴夹角为 β，则初始速度在各直角坐标的分量为：

$$v_{0x} = v_0 \sin\alpha\cos\beta$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha\sin\beta$$
$$v_z = v_0 \cos\alpha$$

未落地的任一时刻，竖直方向为重力加速度，其他方向为匀速直线运动，因此运动轨迹为

$$x = v_{0x}t = v_0 t\sin\alpha\cos\beta$$
$$y = v_{0y}t = v_0 t\sin\alpha\sin\beta$$
$$z = v_z t = v_0 t\cos\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

整理后，轨迹方程满足：

$$x^2 + y^2 + (z + \frac{1}{2}gt^2)^2 = (v_0 t)^2$$

可见，在任一确定的 t 时刻，这是个球面方程，因此各烟花分布在(0，0，$-gt^2/2$)，半径为 v_0t 的球面上。

3-21 参见例 3.1， 若记 m_1，m_2 组成的系统的质心与 m_1 和 m_2 的距离分别为 l_1 和 l_2，证明 $m_1 l_1= m_2 l_2$，并试说明此式与参考系选择无关。
分析：本题已知一质点组系统，求质心。本题的结论常用，应用杠杆原理求相对质心距离等。
答：将 m_1，m_2 与质心的距离表为矢量 $\boldsymbol{l}_1$ 和 $\boldsymbol{l}_2$，在任意确定的参考系下其位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$，则根据质心定义，有
$\boldsymbol{r}_c = (m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2) /(m_1+m_2)$
在质心系下两个物体相对质心的位置矢量分别为
$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_c = m_2 (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) /(m_1+m_2) = \boldsymbol{l}_1$
$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_c = m_1 (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) /(m_1+m_2) = \boldsymbol{l}_2$
比较二式，可见 $\boldsymbol{l}_1$ 和 $\boldsymbol{l}_2$ 向共线反向。转化为标量，两个公式相除，可以得到
$m_1 / m_2 = l_2 / l_1$
即 $m_1 l_1= m_2 l_2$

3-22 参照第二章习题 2-25，试由质心的位矢、速度和加速度的定义给出：任一和质量分布有关的物理量 B 对于给定质点系统的平均值<B>的定义（分为质量分立和质量连续两种情况讨论）。
分析：根据质心定义列式子即可。
解：

对于质量分立的情况：$\langle \bar{B} \rangle = \dfrac{\sum_i m_i \bar{B}(m_i)}{\sum_i m_i}$

对于质量连续的情况：$\langle \bar{B} \rangle = \dfrac{\int \bar{B}(m)dm}{\int dm}$

3-23 将一个钢笔帽立于一张纸条上，试试看如何抽取桌面上的纸条能使钢笔帽保持静止，不致倒下。用动量定理解释其中的原因。

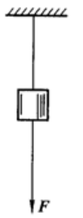
分析：动量定理即动量的增量等于冲量，而冲量与作用力之间有直接关系：冲量等于力与作用时间的乘积。对于本题，力的作用时间越短，其动量的增量越小，那么钢笔帽越不容易倒下。

答：非常快速的抽取纸条时，可以使钢笔帽保持静止，不致倒下。

根据动量定理，动量的增量等于合外力的冲量。而冲量是力的时间积累结果，也就是说，冲量是力与力的作用时间的乘积，那么在相同大小的力的作用下，作用时间越短，冲量越小。冲量越小，动量的增量就越小，那么它就不至于倒下去。

3-24 一根绳的上端固定，下端系一重物 m，重物的下端系一根同样的绳，如题 3.24 图所示。如果极其缓慢地往下拉下端的绳，则上面的绳被拉断；如果是突然用力往下拉下端的绳，则下面的绳将会先断。试解释这一现象。

分析：上下两端绳子受力状况不同，要用隔离体法分析两条绳子的受力情况。注意力的时间效应是不同的。



题 3－24 图

答：当极其缓慢的拉下端的绳子时，下面的绳只受到拉力 F 的作用，而上端的绳受到的力为拉力 F 与重物的重力的合力，即：$F+mg$，上端绳子受到的拉力比下端绳子受到的力大，所以上端的绳子先断；而当突然用力拉下端的绳子时，由于力的作用时间非常短，在拉力还没有来得及传递到上端绳子上的 F 时候，下端的绳子已经被拉断了。所以，突然用力拉绳子时，下端的绳子先断。更合理的解释可以把绳子看作为倔强系数很大的弹簧振子，迅速猛拉，远超系统的振动周期，超过了弹性范围（绳子被破坏了）。因为时间过短，此时重物的位移相对缓慢拉绳所产生的位移是无穷小，因而上面的绳子受力很小。

3-25 火箭能够在真空中被加速吗？此时火箭的推力是指什么力？

分析：动量守恒原理，类似手榴弹爆炸，一部分射出，另外一部分需要有反向的速度使得系统动量守恒。本题中向火箭施加力的并不仅仅是空气，燃料向外喷射自动会使火箭受到推力的作用。

答：火箭当然可以在真空中被加速，因为火箭主体被加速的推力并不是空气给与它的，而是火箭自身携带的燃料燃烧喷出火箭主体获得的反向动量。燃料相对主体向后喷出，动量守恒，火箭主体会获得一个动量，因此火箭会产生一个向前的加速度。

3-26 对于可变质量系统，是否可用方程 $\boldsymbol{F}_{外} = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ 来描述；又是否用方程 $\boldsymbol{F}_{外} = \mathrm{d}(m\boldsymbol{v})/\mathrm{d}t$ 来描述，为什么？

分析：本题要让大家注意哪一个公式是普遍公式，而另外一个公式的应用是有条件的。动量守恒才是最根本最普遍的规律，

答：不可以用 $\boldsymbol{F}_{外}=m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ 来描述，因为是可变质量系统，也就是说质量会随时间变化。质量守恒、动量守恒是最根本、最普遍的定律，所以失去的那部分质量需要划入系统来考虑。方程 $\boldsymbol{F}_{外}=\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})/\mathrm{d}t$ 从动量，已经考虑了质量变化对动量的影响，所以可以用。

3-27 试试看如何能将一细长铁杆（例如一把细长状不锈钢饭勺）的中间部分扭成麻花状，并用力矩概念解释其中的原因。
分析：若要将杆扭曲，需要施加一力矩而不是单纯的力。力矩是力与作用距离的乘积。所以要想得到较大的力矩，除需要大的力之外，还需要大的作用距离。
答：由于细长铁杆的横截面积很小，直接用两手窝在两端反向扭动并不能获得很大的力矩。如果我们改变力的方向，握住两端双手合拢，双手的力不均匀，在杆对折时中间会转动一个角度，形成一个“结”，如此反复操作，即可将细铁杆扭成麻花状。

3-28 一对大小相等、方向相反的力对某参考点产生的力矩一定为零吗？举例说明之。
分析：本题考察力矩的概念。力矩是位矢与力的叉乘，注意矢量性和参考点的问题。
答：不一定。由于力矩是位矢与力叉乘，只有力的大小相等和方向相反还不能说明力矩也是大小相等方向相反，还要考虑参考点的位矢。如果两个力作用点的位矢之差不为零（作用点不同），或者位矢差与力不共线，则会产生力矩。两端大小相同、方向相反的扭转力产生的合力矩不为零。

3-29 直升机是靠什么力停止在空中的？它为什么要用很大的螺旋桨？直升机尾端的小的辅助螺旋桨又起到什么作用？
分析：仍然是受力分析的问题，转动问题要考虑角动量和力矩。
答：燃料燃烧驱动螺旋桨旋转，形成气流，螺旋桨给气流一个向下的力，那么反之，气流就会给飞机一个向上的浮力，使飞机能够上升在空中。
大螺旋桨与气流的接触面积大，使大量气体流过，产生升力。如果螺旋桨很小，同样的速度而气体少，则气体流量小，动量改变量小，浮力不够。
发动机带动大螺旋桨高速旋转，即系统内力使得螺旋桨产生了一个对直升机质心的很大的角动量。由于内力不改变系统的角动量（或者由于系统不受外力，因此系统的总角动量不变），因此，该内力势必使机身产生一个相反方向的角动量，它将导致机身绕质心转动，则直升机无法保持稳定。如果在直升机尾部装有辅助螺旋桨，它的转动将平衡大螺旋桨转动产生的角动量，保持机身的稳定。所以小螺旋桨的作用是为了使飞机保持平衡。

3-30 通过船舱一个不大的洞进一股水，一个人想用木板堵住洞，单无力克服水流的力量，可是，在另一个人的帮助下将木板堵上了，这时，只原来的一个人便能推住木板，为什么？
分析：本题实际上是要分析流体在流速不同情况下（船上的洞堵住和未堵住时）的压力。流体的压力可用伯努利方程来分析。
答：根据伯努利方程， $p_1+\rho gh_1+\rho v_1^2/2=p_2+\rho gh_2+\rho v_2^2/2$。当船上的洞未被堵住时，有静压强（大气压、水高度）和水流造成的压强，而当船上的洞被堵住后，水速为零，只有静压强，所以，开始洞未堵住时，一个人的力量不够，而当洞堵住后，一个人的力量就可以按住木板。

3-31 只有外力才能改变物体质心的运动状态，为什么制动及对车轮所施的内力能使车停下来？
分析：本题是内力和外力的区别问题。制动属于系统内部摩擦（想象可以立刻让车轮不转），而使车停下来的力主要是地面给它的摩擦力，是外力。
答：只有外力才能改变物体质心的运动，这句话是对的。但是制动机对车轮施加的内力使车停下来这句话是错误的。使车停下来的是地面的摩擦力，而非制动力。制动只是让车轮不转，形成滑动摩

擦，假设车在一个无限光滑，没有摩擦力的平面上运动，无论制动力多大，车都不会停下来。摩擦力越大，车停的越快。

3-32 在质心参考系中角动量定理和动能定理具有和惯性系相同的形式，这是不是说明质心系一定是惯性系呢？若设想人站在某质心系内部，他可以通过什么力学实验来判定该系是否为惯性系，举例说明之。

分析：本题是质心系和惯性系的关系问题。虽然质心系可以等效为惯性系，但质心系不一定是惯性系。判断一个参考系是否为惯性系，要根据其定义，即看此参照系中不受力的物体是否有加速度，来判定。

答：质心系不一定是惯性系。因为我们在推导角动量定理和动能定理得时候，选择的质心系具有普遍性，我们当时并未用到质心系是惯性系这一条件。 质心系内部的人如果想判断这个参照系是否为惯性系，他只需要看这个参照系中不受力的物体是否有加速度即可。例如，我们取一列火车的车厢作为参照系，取火车车厢的质心处作为坐标原点，建立坐标系，我们就可以认为这样一个参照系是质心参照系。那么我们只需要站在火车车厢中，看车厢内部受理的小球是否有加速度，就可以知道这个参照系是否为惯性系。如果不受力的小球处于静止或匀速直线运动状态不变，那么此参照系为惯性系。如果小球的运动状态发生了改变，有加速度，那么说明这个质心系是一个非惯性系。不管质心系是否是惯性系，角动量定理和动能定理在质心系中均成立。

3-33 有些矢量是相对于原点确定的，而有些矢量与原点的选择无关，说明下列各矢量：位矢、位移、速度、动量、力、力矩、角动量、角速度，属于这两类中的那一种？

分析：对于一些绝对量，其选取与位置有关，则与原点的选择有关；而对一些量，是变化量，则它们的选取与位置无关。本题关注只有某些物理量具有具有平移不变性。

答：根据定义，与位矢有关的物理量：位矢、力矩、角动量的选取与原点的位置有关。 位移、速度、动量、力、角速度的的选取与原点的位置无关。由于位移和速度是变化量，动量是速度和质量的函数，角速度垂直于原来的平面，是角位移的变化量，他们都与原点的选取无关。

3-34 若不计原子的大小和原子间距离的改变，求双原子分子（如氢原子）的自由度；以水分子为例（参见本章习题 3-2），求多原子分子的自由度。

分析：求自由度的问题。

答：原子间距离不变，可以认为多分子的各原子间通过刚性细杆连接。任何分子都有 3 个平动自由度，在 x、y、z 三个方向上。 双原子分子，因为将原子视为质点，只有 2 个转动自由度，所以总共有 5 个自由度。 多原子分子，有很多个原子，但是无论有多少个原子，其转动自由度最多只有 3 个，再加 3 个平动自由度，最多共有 6 个自由度，如果所有原子共线，则只有 5 个自由度，不共线，则有 6 个自由度。

第四章 刚体的运动规律

一．内容提要

1.刚体模型和刚体一般运动规律

刚体模型：如果物体的形状和大小不能忽略，而其形变可忽略时，可视为刚体模型。刚体模型是一种特殊的质点系统模型。

刚体的运动通常可以分解为以质心为代表的质点平动以及绕质心的系统旋转运动。刚体各质元在各自的运动平面上有相同的角速度和角加速度。

2.转动惯量

转动惯量描述了物体转动时的惯性，与质点运动时的惯性质量类似。

刚体绕固定转轴（z 轴）的转动惯量为

$$I_z = \sum m_i r_i^2$$

$$I_z = \int r^2 \mathrm{d}m = \int r^2 \rho \mathrm{d}V$$

平行轴定理：

$$I = I_C + md^2$$

3.刚体绕固定转轴转动时，刚体对定轴的角动量和转动动能分别为：

$$L_z = I_z \omega$$

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

刚体对定轴的角动量定理：

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_z \omega) = I_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I_z \beta$$

刚体对定轴的动能定理（力矩做功）：

$$W = \int M_{外z} \mathrm{d}\theta = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_0^2$$

刚体模型，内力的力矩不做功。

二．要点

1.刚体是特殊质点系统模型，不用考虑内力的问题，质心系下的力学规律是解决刚体问题的关键。

2.转动惯量、角动量、力矩等物理参量的计算和相关定律的使用，注意对应的参考点。

2.刚体问题处理方法：

刚体的转动惯量与模型有关，首先要确定刚体的转动惯量是对处于哪个位置转轴的转动惯量；然后考虑刚体的运动是定轴转动还是平面平行运动：定轴转动时只需考察刚体对轴的角动量和刚体的机械能（势能和转动动能），平面平行运动可分解为绕质心的定轴转动和质心的平动，采用质心系的力学规律进行处理。

习题解答：

4-1 证明适用于薄的平面刚体的垂直轴定理：一个平面刚体薄板, 对于垂直板面的某轴的转动惯量, 等于绕平面内与该垂直轴相交的任意两个相互垂直的轴的转动惯量之和, 即 $I_z = I_x + I_y$。

分析：本题的结论可普遍适用，注意使用前提条件：平面无限薄板。

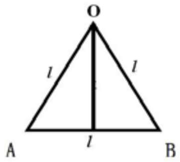
解：令平面薄板为 xy 坐标，垂直于薄板方向为 z 轴。

由定义求得：

$$I_Z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$
$$= \int x^2 dm + \int y^2 dm = I_X + I_Y$$

4-2 计算由三根质量均为 m 长为 l 的均匀细杆组成的正三角形绕通过一顶点并垂直于三角形平面的轴的转动惯量。

分析：注意转动惯量具有可加性与平行轴定理。特殊的是与顶点相对的那根细杆，可以认为转轴在杆的中间然后平移到顶点。



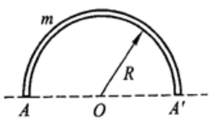
解：OA 和 OB 的转动惯量都是 $ml^2/3$，

对于 AB，应用平行轴定理，有：

$$I_{AB} = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 = \frac{5}{6}ml^2$$

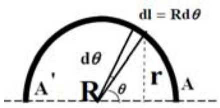
总的转动惯量：$I = 2 * ml^2/3 + 5ml^2/6 = 3ml^2/2$

4-3 一半圆形均匀细杆，其半径为 R，质量为 m，如图所示，试求细杆对过圆形圆心和端点的轴 AA′ 的转动惯量。



题 4－3 图

分析：直接用质量连续分布情况下转动惯量的公式求解。注意空间特点，对微元的划分应使每个微元具有空间均匀性，可以用同样的函数表达。



解：由空间特点，显然选择极坐标，可以只有角度一个变量。如图建立极坐标。

按照定义，有 $\mathrm{d}I = r^2 \mathrm{d}m$

采用极坐标，有

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R} R \mathrm{d}\theta$$

轴在 AA′，因此各质元距轴的距离为 $R\sin\theta$，带入公式，采用定积分，有

$$I = \int_0^{\pi} R^2 \sin^2\theta \frac{mR}{\pi R} \mathrm{d}\theta = \frac{mR^2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) \mathrm{d}\theta = \frac{mR^2}{2}$$

4-4 计算一个内半径为 R_1，外半径为 R_2 的圆筒对其几何中心轴的转动惯量。

分析：可以直接用转动惯量的定义求解，也可以用转动惯量的相加性。可以认为由两个具有相同密度的圆筒组成，从实心的大圆筒中挖去中间的小圆筒。

解：设圆筒的质量为 M，高为 h 体密度为 ρ，则有：

小圆筒质量为 $m_1=\pi R_1^2 h\rho$，转动惯量为 $m_1R_1^2/2$

实心的大圆筒质量为 $m_2=\pi R_2^2 h\rho$，则转动惯量为 $m_2R_2^2/2$

则空心的圆筒质量为 $M=m_2-m_1$，转动惯量为 I_M

有 $I_M=m_2R_2^2/2-m_1R_1^2/2$，　$M=\pi R_2^2h\rho-\pi R_1^2h\rho$

将 m_1，m_2 的表达式带入 I_M，联立上面两个方程，有

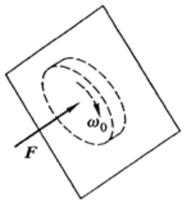
$$I_M=M(R_1^2+R_2^2)/2$$

小结：本题直接积分更容易，但是在形状不规则、积分比较难处理时可用此方法。

4-5 以垂直于盘面的力 $\boldsymbol{F}$ 将一粗糙平面紧压在一飞轮的盘面上，使其制动，如题 4-5 图所示。飞轮可以看作是质量为 m、半径为 R 的匀质圆盘, 盘面与粗糙平面间的摩擦系数为 μ，轴的粗细可略,飞轮的初始角速度为 ω。

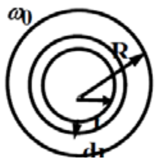
(1)求摩擦力矩;

(2)经过多长时间飞轮才停止转动?



题 4－5 图

分析：转动问题要考虑角动量这个物理参量以及相关的角动量定理和角动量守恒定律。本题要使用角动量定理，求力矩。单位面积上的压力是均匀的，但是压力带来的摩擦力所产生的力矩在空间各处是不同的，要把宏观空间划分为各个均匀的微元。从它的空间特点上看，显然采用极坐标比较方便，距离中心相同距离圆环上的每个点，摩擦力产生的力矩都相同。



解：

$$\mathrm{dN}=\frac{\mathrm{F}}{\pi\mathrm{R}^2}2\pi r\mathrm{dr}\qquad \mathrm{dM}=\mathrm{r}\mu\mathrm{dN}$$

$$\mathrm{M}=\int_0^{\mathrm{R}}\mathrm{dM}=\frac{2}{3}\mu\mathrm{FR}$$

$$\text{又 } \mathrm{M}=\mathrm{I}\beta=(\frac{1}{2}\mathrm{mR}^2)\beta\qquad \omega_0=\beta\mathrm{t}$$

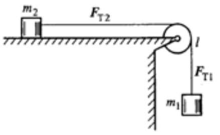
$$\therefore\ \mathrm{t}=\frac{1}{2}\mathrm{mR}^2\,\omega_0/\mathrm{M}=\frac{3\mathrm{mR}\omega_0}{4\mu\mathrm{F}}$$

4-6 如题 4-6 图所示，两物体的质量分别为 m_1 和 m_2，滑轮的转动惯量为 I，半径为 R。

(1)如果 m_2 与桌面之间为光滑接触，求系统的加速度 a 及绳中张力 F_{T1} 和 F_{T2}；

(2) 如果 m_2 与桌面之间的摩擦系数为 μ，求系统的加速度和绳中张力 F_{T1} 和 F_{T2}。设绳子与滑轮间

没有相对滑动。



题 4－6 图

分析：注意滑轮有转动惯量，所以 F_{T1} 和 F_{T2} 是不一样的。因为要讨论具体受力情况，需要用隔离体法分别分析物体与滑轮所受的力。

解：（1）采用隔离体法分析，有

$$\begin{cases} m_1 g - F_{T1} = m_1 a \\ F_{T2} = m_2 a \\ \left(F_{T1} - F_{T2}\right) R = I \dfrac{a}{R} \end{cases}$$

联立解得

$$\begin{cases} a = m_1 g / (I / R^2 + m_1 + m_2) \\ F_{T2} = m_1 m_2 g / (I / R^2 + m_1 + m_2) \\ F_{T1} = m_1 g (I / R^2 + m_2) / (I / R^2 + m_1 + m_2) \end{cases}$$

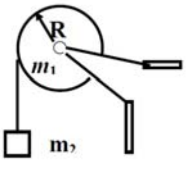
（2）设 $m_1 g > \mu m_2 g$，物体有加速度，则有方程

$$\begin{cases} m_1 g - F_{T1} = m_1 a \\ F_{T2} - \mu m_2 g = m_2 a \\ \left(F_{T1} - F_{T2}\right) R = I \dfrac{a}{R} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = \left(m_1 g - \mu m_2 g\right) / (I / R^2 + m_1 + m_2) \\ F_{T2} = m_2 g (\mu I / R^2 + m_1 + \mu m_1) / (I / R^2 + m_1 + m_2) \\ F_{T1} = m_1 g (I / R^2 + m_2 + \mu m_2) / (I / R^2 + m_1 + m_2) \end{cases}$$

4-7 有一个半径为 R=0.2 m，质量 m_1=2.5 kg 的匀质圆盘状定滑轮，轴处摩擦可略，当在圆盘边缘上绕一轻绳，绳上坠一个质量 m_2=0.51 kg 的物体。试计算施在圆盘上的力矩，从静止开始在 2 s 之内所作的功和 2 s 时物体 m_2 的动能。



分析：本题中的滑轮是定轴转动，从刚体定轴转动的角动量定理，及力矩做功的角度去处理。作用于圆盘上的拉力并不等于重力。

解：用隔离体法。

$$\begin{cases} m_2 g - T = m_2 a \\ TR = I\beta \\ \beta = a/R \\ I = \dfrac{1}{2} m_1 R^2 \end{cases}$$

解得 $a = m_2g/(m_2+m_1/2)$，$T= m_1 m_2g/(2m_2+m_1)$

因此物体 m_2 的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}m_2v^2 = \frac{m_2(at)^2}{2} = \frac{m_2}{2}\left(\frac{m_2gt}{m_2+2m_1}\right)^2$$

2 s 时， $E_k \approx 8.2$ J

由解已知本题中力矩为恒定，因此力矩做功为

$W=M\Delta\theta= TR\Delta\theta=TS$

$W= [m_1 m_2g/(2m_2+m_1)][at^2/2]$

$\quad = m_1 (m_2gt/2m_2+m_1)^2$

2 s 时，累积做功 $W \approx 20.2$ J

4-8 两个飞轮 A 和 B 可以接合起来，使它们以相同的转速一起转动。已知 A、B 两飞轮的轴在同一直线上，A 轮的转动惯量为 $I_1=10\ \text{kg·m}^2$，B 轮的转动惯量为 $I_2=20\ \text{kg·m}^2$，开始时 A 以转速 $n_1=600\ r/min$ 匀速转动，B 轮静止。

求 (1) 两轮接合后的转速；

(2)结合过程中机械能的损耗。

分析：在整个过程中，AB 组成的系统部受外力矩。因此，角动量守恒。

解： (1) 已知 $\omega_1 =2\pi n$ 在结合过程中，摩擦属内力，系统不受其他外力矩，角动量守恒。

因此有 $I_1\omega_1 = (I_1+I_2)\omega$

所以合并后转速为：

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{I_1}{I_1+I_2}n_1 = 200 \qquad \text{（转/分）}$$

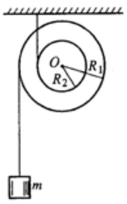
（2）

$$-\Delta E = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 - \frac{1}{2}(I_1+I_2)\omega^2 = 2I_1\pi^2 n_1^2\frac{I_2}{I_1+I_2} \approx 1.32\times 10^4 (J)$$

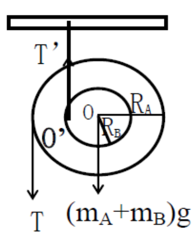
4-9 质量为 m_A 和 m_B, 半径为 R_A 和 R_B 的两个圆盘同心地粘在一起, 小圆盘边缘绕有绳子, 上端固定在天花板上, 大圆盘也绕有绳子, 下端挂以质量为 m 的物体,如题 4-9 图所示。

求: (1) 要使圆盘向上加速、向下加速，静止或匀速运动的条件?

(2) 在静止条件下两段绳中的张力。轴处摩擦和绳的质量忽略。绳与滑轮之间没有相对滑动发生。



题 4－9 图



分析： 先进行受力分析，圆盘转动才能上下移动，要考虑力矩，注意参考点的选择，瞬时轴的应用。

解：受力分析如图所示。圆盘的运动属于纯滚动，小圆盘与绳的切点 O′为瞬时轴，选择 O′为参考原点，则只有重力和大圆盘边缘的拉力会产生力矩。

$$T(R_A - R_B) = (m_A + m_B)gR_B$$

(1) 圆盘静止或匀速运动,则 m 也匀速运动或静止 ,则有 T = mg

$$mg(R_A - R_B) = (m_A + m_B)gR_B$$

当 $mg(R_A - R_B) > (m_A + m_B)gR_B$ 　　圆盘向上加速运动

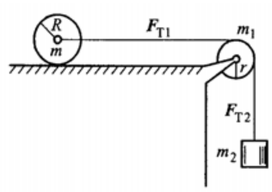
当 $mg(R_A - R_B) < (m_A + m_B)gR_B$ 　　圆盘向下加速运动

(2) 在静止条件下将圆盘和物体 m 视为一整体，则:

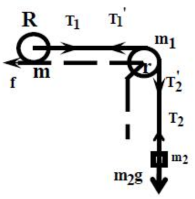
$T' = (m + m_A + m_B)g$

物体 m 静止则有: 　　T=mg

4-10 一质量 m=10 kg，半径为 R=0.20 m 的圆柱体，用绳子系住它的旋转中心轴，此绳子跨过一质量 m_1 =2 kg，半径 r =0.1m 的定滑轮，在绳的下端悬一质量 m_2=5.0 kg 的重物。设绳长不变，绳的质量及滑轮轴处摩擦都可忽略不计，绳与定滑轮间无相对滑动。当圆柱体沿斜面作纯滚动时，求：(1) 重物的加速度 (2) 绳中张力 T_1 和 T_2。



题 4－10 图



分析：要求绳中的张力，需要用隔离体方法处理。定滑轮可视为实心圆盘，选择定滑轮的轴为参考原点，处理比较方便。

解：列方程，有：

$$m_2g - T_2 = m_2a \qquad T_1 - f = ma$$

$$(T_2 - T_1)r = (\frac{1}{2}m_1r^2)\frac{a}{r} \qquad fR = (\frac{1}{2}mR^2)\frac{a}{R}$$

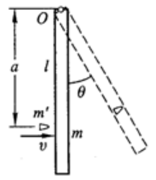
方程联立，可解得：

$$a = \frac{m_2g}{(m_2 + \frac{3}{2}m + \frac{1}{2}m_1)} = 2.33(m \cdot s^{-2})$$

$$T_1 = \frac{3}{2}ma = 35(N)$$

$$T_2 = m_2(g - a) = 37.3(N)$$

4-11 一根长为 *l*、质量为 *m* 的均匀细杆可绕其一端的水平轴 O 自由摆动。当被一发质量为 *m*′的子弹在离 O 点的 *a* 处水平方向击中后，子弹埋入杆内，杆的最大偏转角为 *θ*，如题 4-11 图所示，求子弹的初速度。



题 4－11 图

分析：要从空间（或时间）上对问题进行分割，不同的空间（时间）遵循不同的规律。从子弹击杆至子弹与杆具有的相同速度，这是个瞬态过程，对转轴 O 角动量守恒规律。由于这个过程时间极短（可以认为是无穷小），尽管有速度，但是无位移（位移无穷小）。第二个过程是两个物体一起做定轴转动，受重力作用达到最大偏转，这个过程机械能守恒。注意碰撞过程中水平方向动量不守恒（如果轴处不受力，碰撞后 O 点一般情况下速度不为零）。

解：碰撞过程中系统角动量守恒，而动量不守恒，有

$$m'v_0a=\left(\frac{1}{3}ml^2+ma^2\right)\omega$$

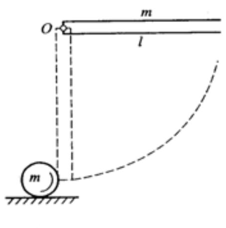
碰撞后定轴转动，机械能守恒，有：

$$mg\frac{l\left(1-\cos\theta\right)}{2}+m'ga\left(1-\cos\theta\right)=\frac{1}{2}*\frac{ml^2\omega^2}{3}+\frac{1}{2}m'(\omega a)^2$$

联立，解得子弹初速度为：

$$v_0=\frac{\sqrt{2\left(1-\cos\theta\right)\left(\frac{ml^2}{3}+m'a^2\right)\left(\frac{mgl}{2}+m'ga\right)}}{m'a}$$

4-12 质量为 m 长为 l 的匀质细杆，可绕端点 O 的固定水平轴转动，把杆抬平后无初速地释放，当杆摆至竖直位置时刚好和光滑水平桌面上的小球相碰。小球的转动不计，它的质量和杆相同，并且碰撞是完全弹性的，轴上摩擦也忽略不计，求碰后小球的速度 v。



题 4－12 图

分析：从时间（空间）分为两个过程，杆从水平位置到与小球将碰未碰时为一个过程，这个过程杆做定轴转动，机械能守恒。杆与小球碰撞是另外一个过程，以杆和球组成一个系统，这个过程因为是系统内弹性碰撞，系统机械能守恒，对转轴角动量守恒。

解：下摆过程中（定轴转动）机械能守恒，有

$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\omega^2$$

碰撞过程中角动量守恒，有

$$\left(\frac{ml^2}{3}\right)\omega=\left(\frac{ml^2}{3}\right)\omega'+m'vl$$

碰撞后机械能守恒，有

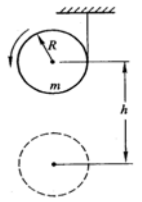
$$\frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\omega'^2+\frac{1}{2}m'v^2$$

小球和杆质量相同，$m=m'$，

解得

$$v=\frac{\sqrt{3gl}}{2}$$

4-13 有一线绕圆盘半径为 R、质量为 m 在其重量作用下滚落，线的上端固定在天花板上。求圆盘中心从静止下落 h 高度时的转动动能和质心速度?



题 4－13 图

分析：可以采用质心运动定理结合运动学，追踪处理，也可以能量角度求出动力学和运动学的状态参量。

解：机械能守恒。设圆盘质心速度为 v，转速为 ω。

$mgh=mv^2/2+I\omega^2/2$

因为圆盘做纯滚动，边缘速度为 0，刚体各处角速度一样，有

$v=\omega R$

$I=mR^2/2$

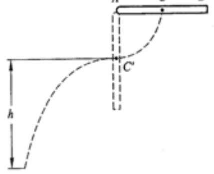
解得

$$v=\sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

转动动能为：

$E_{kc}=I\omega^2/2=mgh/3$

4-14 长为 $2a$ 的匀质细杆 AB，以铰链固结于 A 点，起初使杆在水平位置，当放开 B 端，棒绕 A 点无摩擦地转至竖直位置时，铰链自动脱落，棒变为抛体，在以后的运动中，棒的质心轨迹为一抛物线，而棒本身则绕质心 C 转动，试求当它的质心从 C′位置下降 h 距离时（如图所示），棒共转了多少转？



题 4－14 图

分析：从（时间）空间分为三个过程：杆从水平刚好到竖直位置时，这个过程是定轴转动，机械能守恒，也可以等效为质心做圆周运动与杆绕质心转动；杆脱离的瞬态过程，这个过程对轴、对质心都有角动量守恒；最后是旋转出射，只受重力，对质心角动量守恒。注意角动量和参考点有关，对不同参考点转动惯量不同。

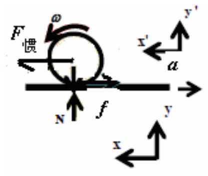
解：细杆从水平位置无摩擦地转至竖直位置时,重力作功，有

$$mga=\frac{1}{2}I_O\omega^2=\frac{1}{2}\left[\frac{m(2a)^2}{3}\right]\omega^2$$

杆保持在竖直位置脱落瞬间前后，对质心的角动量守恒（所有力都过轴），所以角速度仍为 ω；
脱落之后，物体只受重力，以质心为轴，对质心角动量守恒，角速度不变，质心做平抛运动。
质心下降距离为时，$h=gt^2/2$

$$\Delta\theta = \omega t = 2\pi N \quad \text{解得} \quad N = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{3h}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

4-15 一个质量为 m，半径为 R 的匀质圆柱体，在一块以加速度 a 运动的木板上作无滑动的滚动，求圆柱体的加速度 .(提示：考虑圆柱体与木板接触点处的运动约束与例 4.9 情形的区别。)



分析：本题是刚体在非惯性系中运动，要引入惯性力，用隔离体法处理。刚体与木板接触点的速度和木板速度一样。
解：在如图所示在木板上，圆柱体相对木板的加速度为 a'，方向与 a 相反，水平方向上质心运动方程：
$F_{惯} - f = ma'$
$F_{惯} = ma$
在质心系中，$fR=I\beta$
$a' = \beta R$
$I=mR^2/2$
$a'=2a/3$
圆柱体相对地面的加速度为
$a-2a/3=a/3$
圆柱体相对地面加速度为 $a/3$，与木板加速度方向一致。

4-16 若将刚体视为由 N 个质点组成的，各质点之间距离固定的质点系统，求 N=2，3，4 时刚体的自由度，并用递推法证明刚体（N>2）的自由度为 6。
分析：要分析一个系统的自由度，首先把自由度分为不同类型自由度然后分类讨论。
答：由于刚体由多个距离固定不变的质点组成，没有相对运动，只有质心的平动和绕质心的转动。质心的运动需要 x、y、z 三个平动自由度描述。对于 N=2 的系统，有 2 个转动自由度，当 N>2 时，一般是需要 3 个转动自由度描述。所以，N=2 的系统，自由度为 5；对于 N>2 的系统，自由度为 6。

4-17 以恒定角速度转动的飞轮上有两个点，一个点在飞轮的边缘，另一点在转轴与边缘之间的一半处，试问：在 Δt 时间内，哪个点运动的路程比较长？哪个点转过的角度比较大？哪个点具有较大的线速率、角速率、线加速度和角加速度？
分析：本题考查匀速圆周运动中角速度、线速度、角加速度、线加速度以及路程等的概念。
答：假设飞轮边缘上的点为 A 点，转轴与边缘之间一半处的点为 B 点。那么，在飞轮旋转过程中，Δt 时间内， A 点运动的路程较长； A 点和 B 点转过的角度一样大； A 点的线速率较大；两点的角速率相同；角加速度相同，均为 0；线加速度：切向加速度均为 0；法向加速度 A>B。

4-18 计算物体的转动惯量时，能否将物体的质量看作集中在质心处？
分析：应该从转动惯量的定义来分析。

答：计算物体的转动惯量时，由于 $dI = r^2 dm$ ，空间各质元对转动惯量的贡献是不同的，因此不能将物体的质量看作集中在质心。

4-19 在工程技术中，人们常给出质量为 m，对指定轴的转动惯量为 I 刚体的回转半径 k，其定义为 $k=(I/m)^{1/2}$。试说明：

(1) k^2 是什么物理量关于质量分布的平均值；

(2) k 是什么物理量的平方的平均值的平方根（简称方均根值）。

分析：首先根据转动惯量的定义，求一个质量为 m 的系统的转动惯量。将所求结果与题目中的 $k=(I/m)^{1/2}$ 相比较。

答：根据转动惯量定义： $I = \int r^2 dm$

已知 $k = (I/m)^{1/2}$ ，得 $I = mk^2$ 。比较上述两式，可知 $k^2 = \int r^2 dm / \int dm$。

(1) k^2 是各质元距离转轴距离平方的之后按质量分布的平均值。

（2）所有质量微元与转动轴的距离的方均根值。

4-20 在某一瞬间，物体在力矩作用下，其角速度可以为零吗？其角加速度可以为零吗？

分析：根据角动量定理，物体所受的合外力矩等于它的角动量随时间的变化率，所以外力矩是瞬时作用，直接对应角加速度，角速度是角加速度的累积值。

答：在某一瞬间，物体在力矩作用下，其角速度可以为零；但其角加速度不为零，是角速度的累积效应。

4-21 陀螺转速愈快，它站得愈稳，即愈能够保持转轴的方向不变。这一性质称为陀螺的稳定性。试由此说明枪筒或炮膛内来福线的作用。（提示：枪筒内刻上的一道道螺旋形的小槽能使子弹射出时具有一定的转速。）

分析：枪筒中的来福线的作用是使出射的子弹具有一定的转速度，保持子弹的方向性。

答：枪膛内的来福线使子弹射出时具有一定的转动速度，如果没有来福线，子弹出射时只有平动，没有转动。根据陀螺的稳定性原理：陀螺转速越快，越能保持转轴的方向不变。实际上是由于对于没有转动只有平动的物体，只要受到一个与运动方向不同的力，其运动方向就会发生改变。而对于有转动的物体，只有它受到力矩的作用时，其运动方向才会发生改变。所以，由于来福线的作用，子弹出射时具有一定的转速，这样可以保证子弹的弹头沿预定方向，提高高命中率

4-22 质点系统的动能的改变与外力和内力都有关，为什么刚体绕定轴转动时动能改变只和外力有关，而与内力无关吗？

分析：内力成对出现，内力的元功与相对位移点乘才是内力做功。刚体之间无相对位移。

答：在质点系统中，内力和外力都做功，所以，内力和外力都会引起系统动能的改变。但是在刚体定轴转动问题中，内力成对出现，相对位移为 0，所以一对内力不做功。

4-23 从能量角度讨论具有相同半径、相同质量的匀质圆环，圆柱和空心球，沿同一斜面从同一高度由静止开始下滚时，哪个将首先到达底部？顺序如何？一个塑料球和一个同样半径的铁球，沿同一斜面由静止下滚，哪一个先达到底部？

分析：本题考查不同物体势能与动能之间的转化过程。

答：对于具有相同半径、相同质量的匀质圆环、圆柱和空心球绕个自过质心的轴转动时，转动惯量分别为：$I_{环} = mR^2$、$I_{柱} = mR^2/2$ 、$I_{球} = 2mR^2/3$ 。在这几个物体由斜面向下滚动的过程中，只有重力做功，因而机械能守恒。因为高度相同，均由静止开始滚动，终了时刻，重力势能全部转化为动能（包括质心的平动动能和转动动能）：$mgh = mv^2/2 + I\omega^2/2$，因为是纯滚动，$v = \omega R$，所以转动惯量大

的物体滚到底部时将具有较小的质心速度。质心做匀加速直线运动，所以可知转动惯量较大的物体质心加速度较小，需要更长时间滚过整个斜面。所以圆柱、球、环先后到达底部。塑料球和铁球半径相同，具有相同的转动惯量表达式，因此同时滚到底部（速度的表达式和质量无关）。

第五章 狭义相对论

一．内容提要

1.狭义相对论的 2 个基本假设：

爱因斯坦相对性原理：所有惯性系下的力学规律都相同，即具有相同的数学表达式；

光速不变原理：在任何惯性系中，光在真空中的速率都一样。

2. 洛伦兹坐标变换和相对论速度变换：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{v_x - u}{1 - \dfrac{u}{c^2}v_x} \\ v'_y = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{v_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{u}{c^2}v_x\right)} = \dfrac{v_y}{1 - \dfrac{u}{c^2}v_x}\sqrt{1 - u^2/c^2} \\ v'_z = \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{v_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{u}{c^2}v_x\right)} = \dfrac{v_z}{1 - \dfrac{u}{c^2}v_x}\sqrt{1 - u^2/c^2} \end{cases}$$

定义速度因子γ为

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

3. 时空的相对性

长度收缩：

$$l = |x_2 - x_1| = l_0/\gamma$$

时间延缓：

$$\tau = t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma\tau_0 > \tau_0$$

4.相对论质量和动量：

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0\,\boldsymbol{v}$$

5.相对论能量：

$$E = mc^2$$

$E_k = mc^2 - m_0c^2$

二．要点

1. 相对论中时空是相对的，要确认参考系的时空特性（哪一个参考系为静止参考系）；确定标准尺（某一参考系的同时测到尺子两端坐标差为“标准尺”的长度，术语“固定长度”）、标准时（在某

一参考系的同一地点时钟测量的时间间隔为标准时，术语“固有时间”)；确定速度因子 γ 作为比例系数；根据时间延缓（相对标准时，时间间隔变长）或尺缩效应（相对标准尺，长度变小）进一步处理。

2. 物体在低速运动时，洛伦兹变换和伽利略变换应保持一致。解题时可以先写出伽利略变换，然后再写与运动速率相关的比例系数得到洛伦兹变换。

习题解答：

5-1 洛仑兹变换中引入的参数 γ 及其倒数 $1/\gamma$ 的大小直接体了三个重要的相对论效应——长度收缩、时间膨胀以及质量增加的显著程度。计算 v/c= 0.0，0.1，0.5，0.9，0.99，0.999，0.9999，0.99999 时的 γ 及其倒数的数值，以建立起对于相对论效应的定量认识。

解：

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

v/c	γ	$1/\gamma$
0.0	1.0	1.0
0.5	1.1547	0.8660
0.9	2.2942	0.4359
0.99	7.0888	0.1411
0.999	22.3660	0.04471
0.9999	70.7120	0.01414
0.99999	223.6070	0.004472

5-2 静止的自由粒子——中子的平均寿命为 15 分钟，它自发的蜕变为电子、质子和中微子，试问一个中子必须以多大的平均最小速度离开太阳，才能在蜕变之前到达地球。

分析：静止测量的寿命为 15 分（同一地点测到的时间），这是标准时，运动后由于速度因子的作用，在另外的参考系中（太阳）寿命变长。

解：以太阳为参考系时，看到以速度 v 运动的中子寿命延长了，为 $\gamma\Delta t$,

太阳与地球间的平均距离为 $r=1.495\times10^{11}$m

$v\gamma\Delta t\geq r$，即有

$$\frac{v\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\geq r$$

解得 $v\geq 0.5$ c

5-3 设 K′系以恒定速率相对 K 系沿 xx'轴运动，在 K 系中观察到有两个事件发生在某一地点，其时间间隔 4.0 s，从 K′系中观测到这两个事件的时间间隔 6.0 s，试求从 K′系测量到这两个事件的空间间隔是多少？

分析：K 系观测到的时间间隔是标准时（同一地点），由时间间隔之比可以得到运动因子 γ，从而求出速率。再通过洛伦兹变换可以求出空间间隔。

解：由题意可知，$\gamma=6/4$，

有 $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{2}{3}$

解得 $v^2=5c^2/9$

在 K′系中，

$$x_1^{'}=\gamma\left(x_1-vt_1\right)\quad x_2^{'}=\gamma\left(x_2-vt_2\right)$$

在 K′系测量到两个事件的空间间隔为

$$x_1{'}-x_2{'}=\gamma v\Delta t=6*\frac{\sqrt{5}}{3}\text{c}=1.34\times10^{9}\ (\text{m})$$

5-4 一火箭以 0.8c 的相对速度经过地球朝月球飞去， (1) 按地球上的观察者来看，从地球到月球的旅程需多长时间？ (2) 按火箭上的乘客来看，地球到月球离多大? (3) 按火箭上乘客来看，这旅程需多长时间？

分析：相对论中参考系与运动的时空效应问题。火箭上的乘客，以火箭为参照系，是在同一地点测到的时间（标准时），但不是标准尺（非同一时刻测到的地球到月球距离）

解：$\gamma=1/(1-0.8^2)^{1/2}=5/3$

（1）对于地球上的观察者来看： $l_{地月}=3.84\times10^8$ m，$v=0.8c=2.4\times10^8$ (m/s)，

则时间 $\Delta t=1.6$ (s)

（2）火箭乘客看到的距离要缩短，为

$l_{地月}/\gamma=3.84\times10^8/(5/3)=2.3\times10^8$ (m)

（3） 火箭上乘客觉得的时间要缩短（火箭乘客觉得速度未变，距离变短），为

$\Delta t/\gamma=0.96$ (s)

5-5 一个质子得到了相当于它的静止能量 100 倍的动能，试求这个质子的速度和动量。

分析：相对论动量仍然保持原来的定义式子，但是质量和速度有关。从题意分析需要应用相对论动能关系式。

解：

$$E_k=mc^2-m_0c^2=\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2\right)=100m_0c^2$$

求解，有

$$\mathbf{v=0.99995c}$$

$$p=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v=5.01\times10^{-17}\ (\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

5-6 一个电子从静止开始，加速到 0.1c 的速度，需要对它做多少功？速度从 0.9c 加速到 0.99c 又要做多少功？

解：

$E_k=mc^2-m_0c^2$

静止时无动能，所以从静止加速到 0.1c 做功为：

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2=4.1\times10^{-16}\left(\text{J}\right)$$

从 0.9c 加速到 0.99c 做功

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}-\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}=3.927\times10^{-13}\,(\mathrm{J})$$

5-7 一列行进中的火车的车头和车尾遭一次雷，车上的人看来两次雷击是同时发生的，地面上的人看来是否同时？若不同时，何处雷击在先？

分析：相对论的同时性问题，选择好静止参考系。车上的人是非同一地点测到的同时，所以是非标准时。

答：由于车上的人看到两次雷击同时发生，两个事件同时在不同地点发生。考虑相对论效应时，地面看到的并非同时发生的，此时地面上看到两次雷击不是同时发生的。以车为 S 参考系、地面为 S′参考系，有 $t'=\gamma(t-ux/c^2)$，可知 $\Delta t'$ 与 Δx 符号相反，x_1 (车头坐标)>x_2(车尾坐标)，因此车尾比车头先遭到雷击。

5-8 使用反证法说明垂直于相对运动方向的长度测量与运动无关的。（提示：假设反命题成立，利用一个假想的物理过程说明结果的不可行性。）

答：假设垂直于运动方向的长度测量与运动有关。一列火车静止时的高度为 h_0、以速度 v 运动的火车的高度为 h_v。假设有一座与火车同高度的山洞，那么同样山洞静止时的高度略大于 h_0，以速度 v 运动时的高度为 h_v。那么我们知道，当火车以非常缓慢的速度运动时，火车刚刚好可以通过山洞。对于以高速 v 运动的火车，如果垂直于运动方向的长度测量与运动有关，假设

（1）运动导致垂直高度变小，即 $h_v< h_0$。此时对于火车上的观察者来说，火车时静止的，而山洞是以速度$-v$ 运动的，那么山洞的高度变成了 h_v，而根据假设 $h_v< h$，则在火车上的观察者看来，由于火车的高度高于山洞，所以火车不能通过山洞。而对地面的观察者来说，火车运动导致垂直高度变小，是可以钻过山洞的。

（2）运动导致垂直高度变大，即 $h_v> h_0$ 时，同样有互相矛盾的结论。

所有惯性系下有相同的力学规律，火车能否通过山洞是个确定的物理事件，和观察者无关。因此比较合理的解释是垂直于相对运动方向的长度测量与运动无关。

5-9 垂直于相对运动方向长度测量与运动无关，那么为什么在这个方向上的速度分量却又和运动有关呢？

分析：时间的测量和空间的特性有关。不同参考系时间间隔不同。

答：虽然垂直于相对运动方向上的长度测量与运动无关，但是由于时间的测量与运动有关，不同参考系下测量的时间间隔不同，所以长度相同，垂直于运动方向上的速度分量与运动有关。

5-10 甲在以 v 运动的 K′坐标系中，在 $t'=0$ 时测得处于静止的棒两端点的坐标为 x_1 和 x_2，那么乙站在实验室参考系中，棒长是多少呢？有人说，

$$x_1=\gamma\,(x'_1-vt'),$$

$$x_2=\gamma\,(x'_2-vt'),$$

解得

$$x_2-x_1=l=\gamma\,(x'_2-x'_1)=\gamma l'$$

从而得出运动的棒看来变长了，你认为他错在那里?

分析：确定标准尺要在同时测量。

答：无论在任何坐标系中测量长度，必须是同时测量棒的两端。而本题中乙并未在同一时刻测量棒的两端。

5-11 在 K 惯性系统中 A 事件先于 B 事件发生，在另一个惯性系 K 中是否总是 A 事件先于 B 事

件发生呢？在什么条件下，结论是肯定的？
分析：要用洛伦兹变换。
答：不一定，如果不是发生在同一地点时，有可能时间顺序颠倒。在一个参考系中发生在同一地点或两个事件具有因果关系时，在不同惯性系中时间顺序不会颠倒。

5-12 参见例 5.3 题，试讨论固有时间和固定长度与时空间隔 s 之间的联系。
分析：时空间隔和参考系选择无关，是个绝对量。
答：在某一参考系中，同一地点先后发生的两个事件之间的时间间隔叫固有时间。静止时测得的长度称为固有长度。根据定义，时空间隔 s 为：

$$s=[c^2(t_1-t_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2]^{1/2}$$

固有长度（在同一时刻测量的长度）为 $l_0=[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^{1/2}=s\mathrm{i}$，相当于时空间隔的虚部；固有时间 (同一地点测量的时间间隔)为 τ，有 $s=c\tau$，通过光速将时间转换为与空间具有共同量纲的物理量（可以进行比较），相当于实部。因为不同参考系时空间隔不变，可以把时空间隔看作一个大小不变的复数，固有时是时空间隔经过尺度变化后实数轴上的投影， 固有长度是时空间隔在虚数轴上的投影，把时空统一在一起。

5-13 试说明经典力学中的变质量问题（如火箭问题）和相对论中的质量变化有何不同。
分析：运动过程中动量改变的因素不一样。
答：经典力学中的变质量与相对论中的质量变化是完全不同的，完全是两回事。经典力学中，所谓的变质量，实际上总质量并未变化，研究对象的质量转移到别处去了。而相对论中的质量变化，我们考察的是同一个物体，对于质量的测量也依赖于物体的速度。

5-14 能把一个粒子加速到光速吗？为什么？
分析：能量的角度时不可以的。
答：不能。参看 5-6 第 2 问，因为速度达到光速需要的动能无穷大。

5-15 试说明普通炸弹和原子弹爆炸是碎片动能的来源有何不同。
分析：普通炸弹是化学反应释放能量。
答：普通炸弹爆炸时，炸弹碎片的动能来自于炸药的化学能；而原子弹爆炸时，炸弹碎片的动能来自于原子核系统的静质量的减少，即来自静能。

第六章　机械运动和机械波

一．内容提要

1. 典型的简谐振动模型是光滑平面上的弹簧振子，简谐振动的运动方程：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

简谐振动的动力学方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

描述简谐振动的周期性参数

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \nu = \frac{1}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

对应简谐振动的运动表达式：简谐振子的动能和势能分别为：

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4}kA^2[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)]$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{4}kA^2[1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)]$$

简谐振子的平均动能和势能为：

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E_k dt = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E_p dt = \frac{1}{4}kA^2$$

简谐振动的机械能守恒，等于振子处于最大振幅时的势能：

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

2 种近似简谐振动：单摆和复摆，其周期分别为：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{lmg}}$$

2. 简谐振动的合成

两个同方向、同频率简谐振动的合成，其振幅为：

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

当两个同方向、不同频率进行合成，当他们的差频与他们的和频相比小很多时，会出现拍现象，拍频为 2 个简谐振动的差频。

$$\nu = |\nu_2 - \nu_1|$$

两个方向垂直、频率相同的振动合成的振动通常为椭圆，而两个方向垂直、频率不同的振动合成其运动轨迹为李萨如图形。

3.波是振动在空间中的传播。波速与波长、振动周期有关系：

$$v=\frac{\lambda}{T}=\lambda\nu$$

沿 x 正方向传播的平面简谐波的表达式可写为：

$$y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right]$$

或：

$$y=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0\right)$$

而从球心向外传播的球面波为：

$$y=\frac{A_0}{r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)$$

波的能量密度为：

$$\langle\varepsilon\rangle=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

波的能流密度（强度）为

$$I=\langle\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t\Delta S}\rangle=\langle\varepsilon\rangle v=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v$$

4.波的干涉：由于波的独立传播，当两列波满足波的相干条件时，在相遇处（空间重叠）会产生稳定的振幅，与其空间位置有关。两列波干涉

$$\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$$

相位差将决定合成振动的振幅，相长干涉和相消干涉分别是干涉的振幅极大和极小处。
驻波是两列沿完全相反传播的波叠加而成，驻波的表达式可写为：

$$y=2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t$$

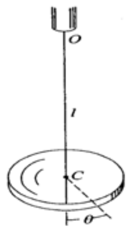
当弦长为半波长的整数倍时，可形成稳定驻波。
5.多普勒效应：
当波源（S）或观察者（O）相对传播媒质运动时，产生的多普勒频移为：

$$\nu=\frac{v\pm v_o}{v\mp v_s}\nu_s$$

二．要点
1. 振动频率是振动最关键的特征参数，周期、圆频率与之一一对应。求解振动频率可以从受力分析着手，列出动力学微分方程形式，简化为标准的振动方程，即可从二阶导数与零阶导数的系数之比求得振动频率。
2. 对于干涉问题，由于两列波频率相同、振动方向相同，波源有恒定的相位差，相遇处的干涉问题可简化为两个同方向、同频率振动的合成，相位差是唯一的决定因素。
3.多普勒频移的计算，是以媒质为参考系，波源和观察者接近时频率升高，远离时频率降低。某些情况下，反射物先是观察者然后又成为波源。

习 题解答

6-1 如题 6-1 图所示，用一根金属丝把一均匀圆盘悬挂起来，悬线 OC 通过圆盘质心，圆盘呈水平状态，这个装置称为扭摆，当使圆盘转过一个角度时，金属丝受到扭转，从而产生一个扭转的恢复力矩。若扭转角度很小，圆盘对 OC 轴的转动惯量为 I，扭转力矩可表示为 $M=-k\theta$，求扭摆的振动周期。



题 6－1 图

分析:本题考察复摆的周期，可以从动力学微分方程着手处理。扭摆是个刚体，要用角动量定理处理。

解:由转动方程

$$M = -k\theta = I\ddot{\theta},$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{I}\theta = 0,$$

因此有

$$\omega^2 = \frac{k}{I} \ ,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

6-2 一质量为 m 的细杆状的 1 m 长的直尺，如果以其一端点为轴悬挂起来，轴处摩擦不计，求其振动周期。

分析：复摆是个刚体，在角度很小时近似 $\sin\theta \approx \theta$

解： 复摆(物理摆)小角度振动时方程为:

$$-mgh\sin\theta \ = I\ddot{\theta}$$

$$-mgh\sin\theta \ \approx -mgh\theta$$

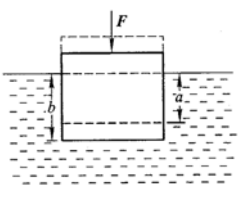
$$\ddot{\theta} \ + \frac{mgh}{I}\theta = 0$$

$$I = \frac{1}{3}ml^2, \quad h = \frac{l}{2},$$

令$\omega^2 = \dfrac{mgh}{I}$,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 1.64(S)$$

6-3 有一立方形的木块浮在静止水中，静止时浸入水中的部分高度为 a。若用力稍稍压下，使其浸入水中部分的高度为 b，如题 6-3 图所示，然后松手 ，任其做自由振动。试证 ，如果不计水的粘性阻力，木块将做简谐振动，并求振动的周期和振幅。



题 6－3 图

分析：忽略粘性阻力时，只有重力和浮力。因为是立方形木块，所以木块所受浮力只与入水的深度

有关。建立坐标系，列出动力学微分方程。

解：建立直角坐标，以平衡位置为坐标原点，竖直方向向下为 x 轴正方向。

浮力与重力相等处于平衡状态有：

$$\rho gas = mg \qquad \Rightarrow m = \rho as$$

$$mg - \rho g(a+x)s = m\ddot{x}$$

$$\rho gxs + m\ddot{x} = 0$$

由方程可见，这是个典型的振动方程。

$$\omega^2 = \frac{\rho gs}{m} = \frac{g}{a}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

6-4 一质量为 1.0×10^{-3} kg 的质点，做简谐振动，其振幅为 2.0×10^{-4} m，质点在离平衡位置最远处的加速度为 8.0×10^{3} m/s^2。

（1） 试计算质点的振动频率；

（2） 质点通过平衡位置时的速度；

（3） 质点位移为 1.2×10^{-4} m 时的速度；

（4） 写出作用在这质点上的力作为位置的函数和作为时间的函数。

分析：本题考察振子的各物理参量之间的关系。按照题意，振幅已知，最远处的加速度（加速度的振幅）已知，可以用振动的基本表达式进行处理。

解： $\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi) \qquad \ddot{x}_{\max} = A\omega^2$

(1) $\omega^2 = \dfrac{\ddot{x}_{\max}}{A} = 4.0\times10^7 \qquad \nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = 1.0\times10^3(Hz)$

(2) $\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$

平衡位置时速度最大，有

$\dot{x} = A\omega = 1.3(m/s)$

(3) $x = A\cos(\omega t+\varphi) = 1.2\times10^{-4}(m)$

$$\cos(\omega t+\varphi) = \frac{x}{A} = \frac{3}{5}$$

$$\dot{x} = -A\sin(\omega t+\varphi) = -A\omega(\pm\sqrt{1-\cos^2(\omega t+\varphi)})$$

此时的速度为 $\pm1.0(m/s)$

(4) $F = -kx = -m\omega^2 x = -4.0\times10^4 x(N)$

$$F = -m\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi) = -8.0\cos(6.3\times10^3 t+\varphi)$$

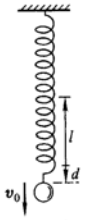
6-5 如题 6-5 图所示，一重力作用下的弹簧振子，振子静止时弹簧伸长 l=10 cm;将振子向下拉一段距离 d=2.0 cm，并将位移方向给它一个向下的初速度 v_0=10 cm/s，任其运动，不计空气阻力，试求：

（1） 振动频率

（2） 振幅 A

（3） 初始相位 φ

（4） 振动表达式。（g 取 10 m/s^2）



题 6－5 图

分析：本题考察振动中各物理量的基本关系。分析题意，可知弹簧以平衡位置做振动。

解：设振动表达式为 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

（1） 振动频率为 $\omega=(k/m)^{1/2}$

根据平衡时的条件：$mg=kl$

有 $k/m=g/l=100\ (s^{-2})$

$v=2\pi/\omega\approx 1.6$ (Hz)

（2） 振幅

$$A=\sqrt{x_0^2+(\frac{v_0}{\omega})^2}=\sqrt{5}\times 10^{-2}(m)$$

（3） 初相位

$$\dot{x}=-\omega A\sin\left(\omega t+\varphi\right)$$

$$tg^{-1}\frac{-\dot{x}_0}{\omega x_0}=-0.46(rad)$$

（4）振动表达式 $\boldsymbol{x}=\sqrt{5}\times 10^{-2}\,\mathbf{cos}\left(10\boldsymbol{t}-0.46\right)$ (m)

6-6 一不计质量，自然长度为 l 的弹簧，两端分别系上质量为 m_1 和 m_2 的质点，放在光滑的水平桌面上，开始时手持 m_1 和 m_2 把弹簧拉长至 l' ，停止不动，然后两手同时放开，试问这系统将如何运动？

分析：两个物体形成一个系统，存在相互作用，可采用隔离体法处理。整个过程无外力，质心不动。

解：运动中系统不受外力，质心位置不动，可以定为参考系坐标原点。设 t 时刻 m_1 和 m_2 坐标分别为 x_1、 x_2，弹簧内力为相互作用力

$$-k\left[(x_2-x_1)-l\right]=m_2\ddot{x}_2=-\ m_1\ddot{x}_1$$

$$m_1x_1+m_2x_2=0$$

$$x_1=-\frac{m_2x_2}{m_1}$$

$$x_2=-\frac{m_1x_1}{m_2}$$

联立方程，一对内力方向相反，方程消元，有

$$m_2\ddot{x}_2=-k(x_2+m_2x_2/m_1)+kl$$

$$\ddot{x}_2=\frac{-k\left(m_1+m_2\right)x_2}{m_2m_1}+\frac{kl}{m_2}=\frac{-kx_2}{\mu}+\frac{kl}{m_2}$$

$$\ddot{x}_1=\frac{-kx_1}{\mu}-\frac{kl}{m_1}$$

因此，两个球的振动频率 $\omega=(k/\mu)^{1/2}$，振幅 $A=l'-l$，圆频率为 ω 的简谐振动。

6-7 有一鸟类学家，他在野外观察到一种少见的大鸟落在一棵大树的细枝上，他想测得这只鸟的质量，但不能捉住来称量，于是灵机一动，测得这鸟在数枝上在 4 s 内来回摆动了 6 次，等鸟飞走以后，他又用 1 kg 的砝码系在大鸟原来落得位置上，测出树枝弯下了 12 cm，于是很快算出了这只鸟的质量。你认为这位鸟类学家是怎样算的？你想到了这种方法了吗？这只鸟的质量是多少？

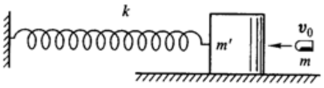
分析：已知振动频率，可以理想化为弹簧振子。测出弹性系数，可以知道质量。

解：树枝与鸟近似为一个谐振子。

$$k=\frac{mg}{l}=81.66\,(kg/m) \qquad \nu=\frac{6}{4}\,(\mathrm{Hz})$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{2\pi}{T}=9.42\,(rad) \qquad m=\frac{k}{\omega^2}=0.92\,(\mathrm{kg})$$

6-8 如题 6-8 图所示，有一弹簧振子，弹簧的劲度系数为 k，振子的质量为 m'，开始时处于静止平衡状态，有一 发质量为 m 的子弹以速度 v_0 沿弹簧方向飞来，击中振子并埋在其中，试以击中时为计时零点，写出此系统的振动表达式。



题 6－8 图

分析：按照时间分为两个过程：子弹射入木块直至具有相同速度，这个时间无穷小，木块位移无穷小，没有弹力。第二个过程是在平衡位置获得初始速度做振动，需要找到振动表达式所需的物理参量。

解：碰撞时动量守恒，碰撞后机械能守恒。

$$mv_0=(m+m')v \qquad v=\frac{mv_0}{m+m'}$$

$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}(m+m')v^2$$

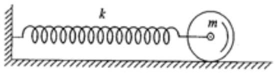
$$\mathrm{A}=\frac{mv_0}{\sqrt{k(m+m')}} \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m+m'}}$$

按照振动表达式 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$，以水平向右为 x 轴正方向，速度达到反向极大，

$$\varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)=\frac{mv_0}{\sqrt{k(m+m')}}\cos\left(\omega=\sqrt{\frac{k}{m+m'}}\ \ t+\frac{\pi}{2}\right)$$

6-9 如题 6-9 图所示振动系统，振子是一个做纯滚动的圆柱体，已知圆柱体的质量为 m，半径为 R，弹簧的劲度系数为 k，并且弹簧是系在圆柱体的中心旋转对称轴上。试求这一振动系统的频率。



题 6－9 图

分析：要做受力分析。因为涉及刚体问题，考虑力的作用效果时需要采用角动量定理。

解：设平衡点为弹簧原长时，又弹簧质量不计。圆柱体的质心运动方程为：

$$\begin{cases} -kx_c - f = m\ddot{x}_c \\ fR = (\frac{1}{2}mR^2)\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mR^2\frac{\ddot{x}_c}{R} \end{cases}$$

$$f = \frac{1}{2}m\ddot{x}_c$$

$$-kx_c - \frac{1}{2}m\ddot{x}_c = m\ddot{x}_c \qquad \ddot{x}_c = -(\frac{2k}{3m})x_c$$

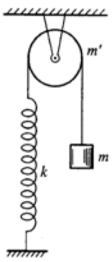
所以有

$$\therefore \omega^2 = \frac{2k}{3m}, \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}(\frac{2k}{3m})^{\frac{1}{2}}$$

6-10 如题 6-10 图所示，弹簧的劲度系数为 k，定滑轮的质量为 m'，半径为 R，转动惯量为,物体的质量为 m。轴处摩擦不计，弹簧和绳的质量也不计，绳与滑轮间无相对滑动。

(1) 试求这一振动系统的振动频率。

(2) 如果在弹簧处于原长时由静止释放物体 m，m 向下具有最大速度时开始计时，并令 m 向下运动为 x 的正坐标，试写出 m 的振动表达式。



题 6－10 图

分析：需要分析力的效果，写出动力学微分方程的标准形式即可求得振动频率。

解：(1) 建立直角坐标系，设平衡时弹簧相对原长伸长 $x_0= mg/k$ 时重物所在点为坐标原点，有：

对于 m 有：

$$\left[T - k\left(x + x_0\right)\right]R = I\beta$$

$$mg - T = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = R\beta$$

联立方程有：

$$-kx = (m + \frac{I}{R^2})\ddot{x}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{(m + \frac{I}{R^2})}$$

设弹簧原长时释放 m，将来振动到原长时，速度为 0，达到最大振幅，因此有

$$x_0=-\frac{mg}{k},\qquad A=\frac{mg}{k},\qquad \varphi=-\frac{\pi}{2}$$

振动表达式为：

$$x=\frac{mg}{k}\cos\left[\left(\frac{k}{m+\frac{I}{R^2}}\right)^{\frac{1}{2}}t-\frac{\pi}{2}\right]$$

6-11 在 LC 电路中，电容极板上的电荷量若为 q，电容器将储存能 $\frac{1}{2}\frac{q^2}{c}$ ，流经电感中的电流若为 i，电感中将储存磁能 $\frac{1}{2}Li^2$，$i=\frac{dq}{dt}$ 且 $\frac{1}{2}\frac{q^2}{c}+\frac{1}{2}Li^2=$ 常量，试求 LC 电路的固有振荡频率。

分析：振荡频率，可以先列出振动的微分方程形式然后直接求解。

解：

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{c}+\frac{1}{2}Li^2=Const$$

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{c}+\frac{1}{2}L(\frac{dq}{dt})^2=Const$$

两侧同时对时间求微分，有

$$\frac{dq}{dt}+L\frac{dq}{dt}\frac{d^2q}{dt^2}=0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}\qquad \nu=\frac{1}{2\pi\sqrt{\mathrm{LC}}}$$

6-12 假定有两个质量均为 m 的离子，它们之间的势能为 $E_s=\frac{a}{r^5}-\frac{b}{r}$

（1） 试用 a 和 b 表示其平衡位置；

（2） 试证明其振动角频率为 $\omega=\sqrt{\frac{8b}{m}(\frac{b}{5a})^{3/4}}$

分析：保守力是势能函数的负梯度（空间求导），平衡时势能为极值点。当把相互作用力用弹性力近似时，可求得角频率。

解：（1）保守力平衡点 f=0。

$$f=-\frac{dE_p}{dr}=-\frac{5a}{r^6}+\frac{b}{r^2}$$

$$f(r_0)=-\frac{5a}{r_0^6}+\frac{b}{r_0^6}=0$$

$$r_0=(\frac{5a}{b})^{1/4}$$

（2）作微振动，弹性力f可写成

$$f=-k(r-r_0)=\mu\ddot{r}$$

$$(\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}=\frac{m}{2})$$

对力f取一级近似

$$f(r)=f(r_0)+\frac{f'(r_0)}{1!}(r-r_0)=0+(\frac{30a}{r_0^7}-\frac{2b}{r_0^3})(r-r_0)$$

$$k=\frac{30a}{r_0^7}-\frac{2b}{r_0^3} \qquad \omega=\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mu}}=\sqrt{\frac{8\mathrm{b}}{m}(\frac{b}{5a})^{3/4}}$$

6-13 质量 m=1.0×10^{-2}kg 的小球与轻质弹簧组成的振动系统，按 $x=5\times10^{-3}\cos(8\pi t+\frac{\pi}{3})$ 的规律振动，式子各量均为 SI 单位，求：

（1）　振动的角频率、周期、振幅和初始相位；

（2）　振动的速度和加速度（函数式）；

（3）　振动的总能量 E;

（4）　振动的平均动能和平均势能；

（5）　t =1.0 s 、10 s 等时刻的相位。

分析：本题考察振动时各物理量之间的关系。

解：　（1） $x=5\times10^{-3}\mathbf{cos}(8\pi t+\frac{\pi}{3})$ 与振动表达式　$x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 比较，可以直接得到 A=5×10^{-3}（m），ω=8π，T = 2π/ω =0.25 (s)，φ = π/3，

(2) 速度和加速度表达式为

$$v=\dot{x}=-0.04\pi\mathbf{sin}(8\pi t+\frac{\pi}{3}) \ \ (m\cdot s^{-1})$$

$$a=\ddot{x}=-0.32\pi^2\mathbf{cos}(8\pi t+\frac{\pi}{3}) \ \ (m\cdot s^{-2})$$

（3）$E=kA^2/2=m\omega^2A^2/2\approx7.896\times10^{-5}$ (J)

(4) $\langle E_\mathrm{k}\rangle=\langle E_\mathrm{p}\rangle=kA^2/4=m\omega^2A^2/4\approx3.95\times10^{-5}$ (J)

(5) 相位为 $\omega t+\varphi$，带入可知 t =1.0s 、10s 时，相位分别为 25π/3，27π

6-14 在阻尼振动系统中，量 $\tau=\dfrac{1}{\delta}$ 叫做弛豫时间。

(1) 证明 τ 的量纲是时间；

(2) 经过时间 τ 后，这振动的振幅变为多少？能量的最大值变为多少？

(3) 把振动减小到其初值的一半所需要的时间（用表示）；

(4) 当经过的时间等于上述(3)中求出的 2 倍、3 倍……时，求振幅的值。

分析：阻尼振动表达式写出来，按照表达式计算即可。

解：（1）阻尼振动的解为 $x=Ae^{-\delta t}(\omega' t+\varphi)$，因此 τ 的单位

$$[\tau]=\left[\frac{1}{\delta}\right]=\left[\frac{2m}{\gamma}\right]=\left[\frac{2m}{f/v}\right]=\left[\frac{2mv}{f}\right]=\frac{kg.m.s^{-1}}{kg.m.s^{-2}}=s$$

因此 τ 的量纲是时间

（2） 经过 τ 时间后，振幅变为：

$$A = A_0 e^{-\delta t}\Big|_{t=\tau} = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_{t=\tau} = A_0 e^{-1} = 0.368 A_0$$

能量的最大值为 $m\omega'^2A^2/2$

（3）把条件带入方程，有

$$A = A_0 e^{-\delta t} = 0.5 A_0 \qquad t = \frac{\ln 2}{\delta} = \tau \ln 2$$

因此经过 $\tau\ln 2$ 后，振幅为原来的一半。

（4）进一步计算，有

$$A = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_{t=2\tau\ln 2} = A_0 e^{-2\ln 2} = \frac{A_0}{4}$$

$$A = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_{t=3\tau\ln 2} = A_0 e^{-3\ln 2} = \frac{A_0}{8}$$

经过 $n\tau$ 时间，振幅变为 $A_0/2^n$

6-15 火车在铁轨上行驶，每经过铁轨接轨处即受一次震动，使装在弹簧上面的车厢上下振动。设每段铁轨长 12.5m，弹簧平均负重 5.5×10^3 kg,而弹簧每受到 1.0×10^3 kg 力将压缩 16 mm。试问，火车速度多大时，振动特别强？

分析：题目中已给出了弹性系数、空间周期（每个相邻接轨的长度），共振频率与强迫力频率接近时振动最强。

解： 固有振动周期等于强迫力周期时发生共振。

$$m_0 g = kx_0 \qquad k = m_0 g / x_0$$

$$T_{\text{固}} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 g}{m x_0}} = 0.595(s)$$

$$v = \frac{12.5}{0.595} = 21(m\cdot s^{-1}) = 75.6(km\cdot h^{-1})$$

6-16 已知两个同方向的简谐振动为

$$x_1 = 0.05\cos(10t + \frac{3}{5}\pi)\text{，}\quad x_2 = 0.06\cos(10t + \frac{\pi}{5})$$

(1) 求它们合振动的振幅和初始相位；

(2) 另有一个同方向的简谐振动 $x_3 = 0.07\cos(10t+\varphi)$，问 φ 为何值的时候，x_1+x_3 振幅为最大？φ 为何值的时候，x_2+x_3 的振幅为最小？（各量皆用 SI 单位。）

分析：本题为同方向同频率振动的合成。可以用矢量合成法直接求解。

解：（1）

$$A = \sqrt{0.05^2 + 0.06^2 + 2\times0.05\times0.06\cos(\frac{3}{5}\pi - \frac{\pi}{5})} = 0.0892(m)$$

$$\varphi = \arctan\frac{0.05\sin\frac{3}{5}\pi + 0.06\sin\frac{\pi}{5}}{0.05\cos\frac{3}{5}\pi + 0.06\cos\frac{\pi}{5}}$$

振幅 A 最大时 $\Delta\varphi = 2k\pi(\text{取}0)$ 即$\varphi = \frac{3}{5}\pi$

振幅 A 最小时 $\Delta\varphi = \varphi - \frac{\pi}{5} = \pi(\text{或}-\pi)$， 即$\varphi = \frac{6}{5}\pi(\text{或}-\frac{4}{5}\pi)$

6-17 一质点同时受到两个同频率和同方向的简谐振动的作用，它们的运动方程分别为 x_1=1.7×10^{-2}cos(2t+ π/4)和 x_2=0.6×10^{-2}cos(2 t +2π/3),试写出质点的运动方程。

分析：本题是同方向同频率简谐振动的合成，用公式计算合成后的振幅和相角即可。

解：合成后仍是简谐振动 x=Acos(ωt+φ)，其中

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \approx 1.29\times 10^{-2}(m)$$
$$\varphi = arctg\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = 1.25(rad)$$

6-18 一待测量频率的音叉与一频率为 440Hz 的标准音叉并排放置，并同时振动，声音响度有周期性的起伏，每隔 0.5 s 听到一次最大响度的音（即拍声），问拍频是多少？音叉的频率可能是多少？ 为了进一步唯一确定其值，可以在待测音叉上滴下一滴石蜡，重做上述实验，若此时拍品变低，则说明待测音叉的频率是多少？

分析：拍频和是两个频率的差频。音叉相当于做简谐振动的弹簧振子，加入石蜡将使音叉的振动频率降低。

解：已知 T= 0.5s，得拍频 f=1/T =2 (Hz)

因此有 $|f_2-f_1|$=2

f_2 =438 Hz 或者 f_2=442 Hz

在待测音叉上滴上一滴石蜡后音叉的频率将变低，再测时差频降低，说明未滴石蜡前音叉是高频，所以

f_2=442 Hz

6-19 (1)波源的振动表达式为 y=Acosωt,我们的计时零点是怎样选择的？如果以波源所在处为原点，波沿着 x 正方向传播，那么对应的波函数应该怎样写？（设波速为 v）（2）如果选取波源向正方向振动，且位移为 A/2 的时刻为计时零点，波源处为坐标原点，波速仍为 v ，波函数该怎样写？（3）如果在上题中把波源的位置定为 x_0 点，波函数又该怎样写？

分析：本题主要在于波函数的表达方式，注意传播方向性、时间、空间的坐标原点对波函数的影响。

解：（1）波源初相位是 0，是恰好在正的最大位移处开始计时，若波速与 x 同向，参考波源的振动表达式，波函数可写为

$$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{v})$$

（2）按照题意，有 $t=0$ 时，位移为 $A/2$，且速度为正方向，所以初始时刻，波源的振动相位为 $\varphi=\pi/3$，以波源为空间的坐标原点，所以无需考虑空间平移产生的相位延迟。

$$y=A\cos\left[\omega(t-\frac{x}{v})-\frac{\pi}{3}\right]$$

（3）若波源在 x_0 点，若波速与 x 同向，则 x 处的振动要比 x_0 点的振动在时间上落后 $(x-x_0)/v$，则 t 时刻 x 处的振动为

$$y=A\cos\left[\omega(t-\frac{x-x_0}{v})-\frac{\pi}{3}\right]$$

6-20 一沿很长弦线行进的横波波函数为 $y=6.0\times10^{-2}\sin(0.02\pi x+4.0\pi t)$式中各量均为国际单位。试求振幅、波长、频率波速、波的传播方向和波线上质元的最大横向振动频率。

分析：主要对波函数与所对应的各个参量之间的基本关系。横向振动速率是波函数对时间的偏微分。

解：

由题意知：$A=0.06$ m，$\omega=4.0\pi$，$f=2$Hz

由表达式中的 $0.02\pi x$ 可知，是向$-x$ 方向传播，

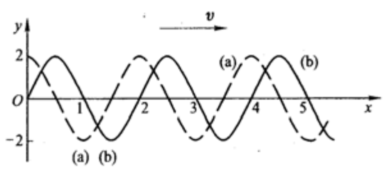
由 $2\pi x/\lambda=0.02\pi x$，可知波长为 100 m，波速为

$v=\lambda f=100*2=200$ (m/s)

横向速度为

$u=\partial y/\partial t=0.24\pi\cos(0.02\pi x+4.0\pi t)$，最大横向速度为 0.75m/s

6-21 题 6-21 图中的曲线(a) 和（b）分别表示 $t=0$s 和 $t=2.0$s 的某一平面简谐波的波形图，试写出此平面简谐波的表达式。



题 6－21 图

分析：写出波的表达式，需要确定表达式中的物理各物理参量，然后写出来。包含振幅、时间周期（频率等）、空间周期（波长）、参考原点（时间、空间）初始相位、波速、传播方向。

解：向右传播，设波函数为 $y=A\cos(\omega t-2\pi x/\lambda+\varphi)$，

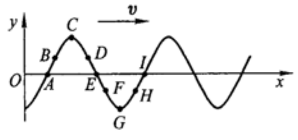
$t=0$s 时，是曲线（a），可以看出 $A=2$，$\lambda=2$，$\varphi=0$；

从曲线(a) 到（b)，时间延迟了 2s，相位延迟了 $2k\pi+\pi/4$，即

$\omega*2=2k\pi+\pi/4$，$\omega=k\pi+\pi/8$

所以波函数为 $y=2\cos(k\pi t+\pi t/8-\pi x)$

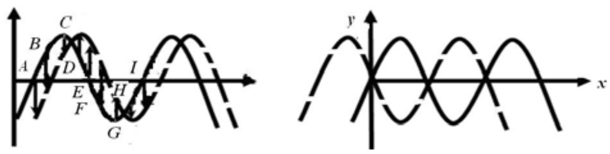
6-22 设在某一时刻，一个向右传播的平面简谐波的波形曲线如图所示，试分别说明图中 A、B、C、 D 等各点在该时刻的振动方向，并做出 $T/4$ 前和 $T/4$ 后的波形图。



题 6－22 图

分析：可将曲线沿着波的传播方向轻微移动，从图形中判断出各点速度方向。$T/4$ 对应 $\pi/2$ 的相位。质元的位移是波函数对空间的导数。

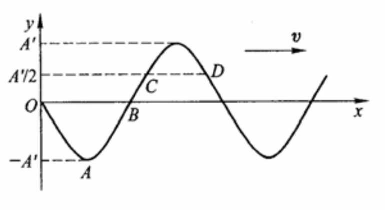
解：



左图虚线是经过短暂时间后的波形曲线，从 A、B、C、H、I 的位移都是向下，D、E、F、G 都是向上。

右图中 $T/4$ 后的振动曲线（虚线）（负最大位移传到 A、C 到了 x 轴）；$T/4$ 之前（实线）。

6-23 已知一列波速为 v、沿 x 正向传播的波在 $t=0$ 时的波形曲线如图所示，画出图中 A、B、C、D 各点在第一周期内的振动曲线。



题 6－23 图

分析：根据图形可以确定各点的相位。再根据波函数可以写出各点的振动表达式，进一步画出振动曲线。

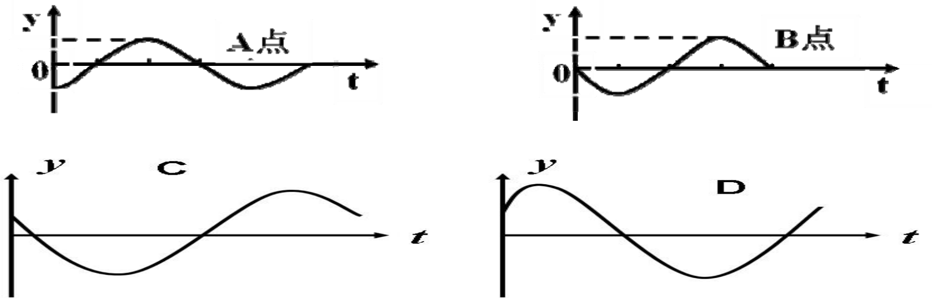
解：设波函数为 $y=A\cos(\omega t-2\pi x/\lambda+\varphi)$，

A 点，$t=0$ 时，$\phi=(-2\pi x_A/\lambda+\varphi)=\pi$，因此 A 点的振动为 $y_A=A\cos(\omega t+\pi)$；

B 点，$t=0$ 时，$\phi=(-2\pi x_B/\lambda+\varphi)=\pi/2$ (波向 x 正方向传播，B 点相位落后 A 点 $\pi/2$)，因此 B 点的振动为 $y_B=A\cos(\omega t+\pi/2)$；

C 点，$t=0$ 时，$\phi=(-2\pi x_C/\lambda+\varphi)=\pi/3$(波向 x 正方向传播，C 点相位稍微落后 A 点)，因此 C 点的振动为 $y_C=A\cos(\omega t+\pi/3)$；

Δ 点，$t=0$ 时，$\phi=(-2\pi x_D/\lambda+\varphi)=-\pi/3$(波向 x 正方向传播，D、C 点相角相同，但落后 C 点)，因此 C 点的振动为 $y_C=A\cos(\omega t-\pi/3)$；



6-24 在直径为 14cm 的直管中传播的平面简谐波，其平均能流密度为 9.0×10^{-3} W/m^2，频率 f=300Hz，波速 v=300m/s，求：（1）最大能量密度和平均能量密度；（2）相邻两同相位波面间（即相位差为 2π 的两波面间）的总能量。

分析：本题考察能流密度、能量密度、总能量的基本关系。可采用量纲分析方法辅助记忆这几个参量之间的转换关系。

解：（1）$\langle\varepsilon\rangle=\varepsilon_m/2$，$\langle I\rangle=\langle\varepsilon\rangle v$

$\langle\varepsilon\rangle=9.0\times10^{-3}/300=3\times10^{-5}$ (J/m^3)

$\varepsilon_m=6\times10^{-5}$ (J/m^3)

（2）$v=\lambda f$，λ=300/300=1(m)

相邻等相位面是一个空间周期，体积为 $V=\lambda S$，所以总能量为

$E=\langle\varepsilon\rangle V=3\times10^{-5}*1*\pi*(0.14/2)^2\approx4.6\times10^{-7}$ (J)

6-25 声波是流体或固体中的压缩波，在讨论声波时，讨论声波中的压强（即压力）变化要比讨论声波中质元的位移更方便些，可以证明，当声波的位移波函数为 $y=A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x-\omega t)$ 时，对应于压力变化的波函数为 $p=\omega\rho_0 Av\sin(\frac{2\pi}{\lambda}-\omega t)=p_m\sin(\frac{2\pi}{\lambda}-\omega t)$

p 是相对于为扰动时压力 ρ_0 的压强变化值，ρ_0 是介质的体密度。

（1）人耳能够忍受的强声波中的最大压强变化 p_m 约为 28 N/m^2（正常的大气压强约为 1.0×10^5N/m^2）若这一强度波的频率为 1000 Hz，试求这声波所对应的最大位移。

（2）在频率为 1000 Hz 的声波中，可以听得出最微弱的声音的压强振幅约为 2.0×10^{-5} N/m^2，试求相应的位移振幅，设 ρ_0=1.29 kg/m^3，v=321m/s。

分析：按照题目中所给的压强公式与振幅关系求出不同压强下的振幅。本题目的在于了解其他相关学科的一些常识。

解：按照题目所给的公式，有 $p_m=\omega\rho_0 Av$，即 $A=p_m/(\omega\rho_0 v)$

（1）忍受最大压强变化时，A_{max}=28/(2π*1000*1.29*321) ≈ 1.08×10^{-5} (m)

（2）最小位移：A_{max}=2.0×10^{-5}/(2π*1000*1.29*321) ≈ 7.69×10^{-11} (m)

6-26 无线电波以 3.0×10^{8} m/s 的速度传播，有一无线电波的波源功率为 50 kW，假设该波源在各向同性介质中发射球面波，求离波源 200 km 远处无线电波的能量密度。

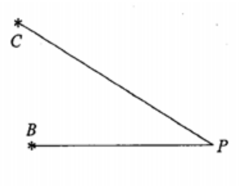
分析：球面波的能量密度随半径增加而衰减。题目中给的是输出功率（单位时间的能量），均分到波阵面上就是该波阵面上的能流密度。

解：$\langle I\rangle=50\times10^{3}/[4\pi(200\times10^{3})^{2}]$（W/m^2）

$\langle I\rangle=\langle\varepsilon\rangle v$，有

$\langle\varepsilon\rangle=\langle I\rangle/v\approx 3.3\times10^{-16}$（J/m^3）

6-27 如图所示，设 B 点发出的平面横波在 B 点的振动表达式为 $\xi=2\times10^{-3}\cos2\pi t$ 沿 BP 方向传播；C 点发出的平面横波在 C 点的振动表达式为 $\xi=2\times10^{-3}\cos(2\pi t+\pi)$，沿 CP 方向传播，两式中各量均为 SI 单位，设 BP=0.4 m ，CP=0.5 m，波速为 0.2 m/s，求：（1）两列波传达到 P 处时的相位差；（2）如果这两列波的振动方向相同，求 P 点的合成振幅；（3）如果这两列波的振动方向垂直，则合成振动的振幅如何？



题 6－27 图

分析：本题涉及波的干涉，振动合成。由于二个波源在相遇点，各自的振动已经确定，此时是两个振动的合成。

解：

（1） 因为是两个同频率的波，波源本身有相位差，由于空间距离的影响，在空间传播进一步产生相位差，计算实际相位差时需要把两个相位差相加。

所以 $\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)+\dfrac{\omega}{v}(r_2-r_1)=\pi+\dfrac{2\pi}{0.2}(0.4-0.5)=0$

（2） 如果振动方向也相同，得到两相干波

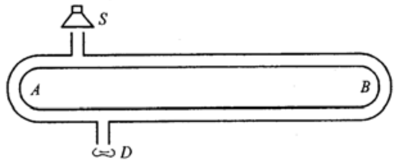
$A=A1+A2=2\times2\times10^{-3}=4\times10^{-3}$ (m)

（3） 如果振动方向垂直又同相，合成后仍是谐振动，

$$A^2=A_1^2+A_2^2\Rightarrow A=\sqrt{2}A_1=2\sqrt{2}\times10^{-3}(m)$$

6-28 题 6-28 图表示一个声学干涉仪，它是用来演示声波的干涉，S 是电磁铁作用下的振动膜片，D 是声波探测器，例如耳朵或传声器，路程 SBD 的长度可以改变，但路径 SAD 却是固定的，干涉仪内充有空气，实验中发现，当 B 在某一位置时声强有最小值（100 单位），而从这个位置向右拉 1.65cm 到第二个位置时声强就渐渐上升到最大值（900 单位）。试求：（1）由声源发出的声波的频率以及（2）当 B 在上述两个位置时到达探测器的两个波的相对振幅和(3)到达 D 处时二路声波的分振幅之比(已

知声速为 340 m/s)。



题 6－28 图

分析：波的干涉问题。S 发出的振动在管道中传播（声波是纵波），当管道的长度合适时会形成的驻波。应用形成驻波的条件是长度为半波长的整数倍。声强正比于振幅的平方，而且相消干涉时振幅并不为 0，说明 2 路的振幅并不相等。

解法一：极大为波腹，极小为波节，相邻波腹波节间距：

$$\frac{\lambda}{4}=1.65\times10^{-2}\Rightarrow\lambda=6.60\times10^{-2}(m)$$

解法二：D 处是相长干涉是相消干涉，只取决于相位差，相邻极大和极小只差半个波长，

故有 $\Delta=\dfrac{\lambda}{2}=2\times1.65\times10^{-2}\Rightarrow\lambda=6.60\times10^{-2}(m)$

(1) $v=\lambda f$ ，有 $f=340/(6.6\times10^{-2})\approx5.15\times10^{3}$ (Hz);

(2)处于两个位置的合成振幅比 $A_{\min}$ ：$A_{\max}$ 为$(100/900)^{1/2}$=1/3，即 1:3

（3）设 $A_2>A_1$，则有 $A_{\min}=(A_2-A_1)=10$ ，$A_{\max}=(A_2+A_1)=30$

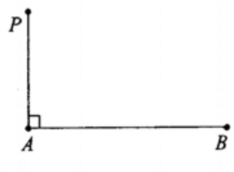
可知 $A_2:A_1$ 为 2 :1

6-29 在同一介质中的两个相干波源位于 AB 两点，其振动方向相同，振幅皆为 5 cm/s，频率皆为 100 Hz，但 A 点为波峰时，B 点为波谷，且在此介质中波速为 10 m/s，设 AB 相距 20 m，经过 A 点做一条垂线，在此垂线上取一点 P，AP=15 m，

（1） 试分别写出 P 点处两波在该点的振动表达式；

（2）求两波在 P 点的相位差；

（3）写出干涉后的振动表达式（波动中振动幅不变）。



题 6－29 图

分析：干涉问题，通过计算相位差简化为同方向同频率振动的合成。

解：（1）假设由 A 向 P 传播的波函数为 $y_A=A\cos(\omega t-x/v)$，则 $y_B=A\cos(\omega t-x/v-\pi)$，

依题意可知，$A=5\times10^{-2}$ (m)，$\omega=2\pi*100=200\pi$ (s^{-1})，BP 的距离为（$15^2+20^2)^{1/2}$=25 (m)

$$y_{AP}=5\times10^{-2}\cos[200\pi(t-\frac{15}{10})]=5\times10^{-2}\cos 200\pi t$$

$$y_{BP}=A\cos[200\pi(t-\frac{25}{10})-\pi]=5\times10^{-2}\cos(200\pi t-\pi)$$

（2）有效的相位差 $\Delta\varphi=\pi$

（3）相消干涉 A=0，所以 y=0

6-30 在一个两端固定的 3.0 m 长的弦上有 3 个波腹的“驻波”其振幅为 1.0 cm，弦长波速为 100 m/s（1）试计算频率；（2）若视为入、反射波叠加的理想驻波，写出产生此驻波的两个波的表达式。

分析：可以通过形成驻波的条件来确定波长。驻波仍然是波，波的物理参量之间的关系保持不变。

解：（1）由题意，$\lambda/2=3/3=1$ (m)，$\lambda=2$m，$A=1\times10^{-2}$ (m) ，$f=v/\lambda=100$ (Hz)

（2） 两端固定，所以驻波的表达式为 $y=2A\sin\omega t\sin(2\pi x/\lambda)$，具体表达式为：

$y=1\times10^{-2}\sin200\pi t\sin\pi x$

以入射端为 x 轴的坐标原点，设入射波的波函数

$y_{入}=0.5\times10^{-2}\cos(\omega t-\pi x)=0.5\times10^{-2}\cos(200\pi t-\pi x)$

则反射波波函数（考虑入射波传播到反射端后，在反射端有半波损失，然后反射到 x 处）为

$y_{反}=0.5\times10^{-2}\cos[(\omega t-\pi(3+3-x)-\pi]=0.5\times10^{-2}\cos[(\omega t+\pi x-\pi]=-0.5\times10^{-2}\cos(\omega t+\pi x)$

应用三角函数和差化积公式，有

$y_{入}+y_{反}=1\times10^{-2}\sin[(\omega t-\pi x+\omega t+\pi x)/2]\sin[(\omega t+\pi x-\omega t+\pi x)/2]=1\times10^{-2}\sin200\pi t\sin\pi x$

显然 $y_{入}+y_{反}=y$

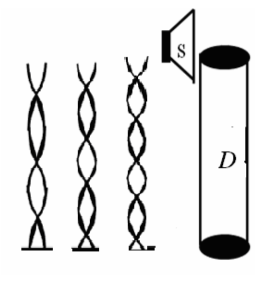
即 $y_{入}=0.5\times10^{-2}\cos(200\pi t-\pi x)$

$y_{反}=-0.5\times10^{-2}\cos(200\pi t+\pi x)$

6-31 如图所示，S 是一个由音频振荡器和放大器驱动的小喇叭，音频振荡器的频率可调范围为 1000-2000 Hz，D 是一段用金属薄板卷成的圆管，长 45 cm。

（1） 如果在所处温度下空气中的声速是 340 m/s，试问当喇叭发出的频率从 1000 Hz 改变到 2000 Hz 时，在那些频率上会发生共鸣？

（2） 试画出各次共鸣时管的位置波节、波腹图（忽略末端效应）。



分析：本题中长度固定，可以先求波长最长时所对应的最低频率。声速和频率、波长的关系已知。注意开口端为最大振幅时才能共鸣。

解：形成驻波圆管两端（开口）为波腹

$f = v/\lambda$，最低频率时，波长 $\lambda=0.45*2=0.9$ (m)，因此最低振动频率为

$f_{\min}= 340/0.9$ (Hz)

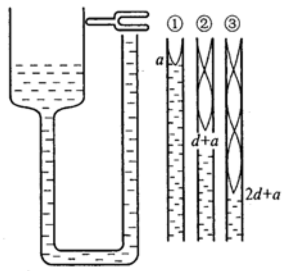
从 1000Hz 到 2000Hz，可共鸣的频率为 $n\,f_{\min}$（n 为整数），有

$2000\geq n*(340/0.9)\geq 1000$

解得 n=3，4，5

所以各频率为 1133Hz、1511Hz、1889Hz。

6-32 如题 6-32 图所示是一个测量空气中声速的装置。把频率为 v 的振动着的音叉置于管的开口端，管内装有水，而管中空气柱的长度可以由水面的升降加以改变。当水面由管的顶端渐渐下降距离 a 时，声音的强度达到最大值。求空气中声速。若用 1080Hz 音叉时，测得 d=15.3cm，求声速值是多少？



题 6－32 图

分析：由图可见，形成了驻波。注意开口端为最大振幅时才能共鸣，空气和水有一个交界面，由波疏到波密有半波损失，界面振幅最小。边界状况是一端固定，另外一端自由。

解：$d=\lambda/2$，有 $\lambda=2d$

带入公式 $v=\lambda f$ ，有 $v=2d*f=330.48$ (m/s)

6-33 有一提琴弦长 50cm，两端固定，当不按手指演奏时发出的声音是 A 调（440Hz），试问要奏出 C 调（528Hz）手指应该按在什么位置?

分析：两端固定形成稳定驻波波长，波长为半波长整数倍。此时弦中的张力可以认为是不变的，波速也不变。

解：提琴弦两端固定，谐振时，两端必为波节

由 $v=\lambda f$ ，有 $\lambda_1 f_1=\lambda_2 f_2$

$0.5*440=\lambda_2*528$

$\lambda_2\approx 0.4167$ (m)

6-34 蝙蝠在洞穴中飞来飞去，利用超声波脉冲导航非常有效（这种超声波脉冲是持续 1 ms 或不到 1 ms 的短促发射，并且每秒重复发射几次）。假设蝙蝠所发超声频率为 39×10^3 Hz，在朝着表面平直的墙壁飞扑的期间，它的运动速率为空气中声速的 1/40，试问它听到的从墙壁反射回

来的脉冲波频率是多少？

分析：因为运动，存在多普勒效应。发射声波时，墙壁为观察者，有多普勒效应；反射时，蝙蝠为观察者，也存在多普勒效应。

解：蝙蝠以 v_1 向墙飞扑，声源以 v_1 向观察者运动，存在多普勒效应；反射时，蝙蝠是观察者，也有多普勒效应，因此蝙蝠接收到的频率为

$f=f_0(v_1+v_{声})/(v_{声}-v_1)$，

将 $f_0=39\times10^3$ Hz，$v_1=v_{声}/40$ 带入，有

$f=4.1\times10^4$ Hz

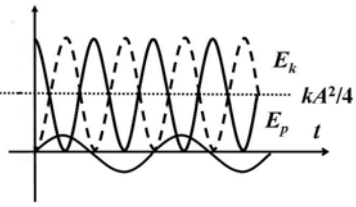
6-35 简谐振动中相位为 φ、$\pi+\varphi$、$2\pi+\varphi$、$3\pi+\varphi$、…. 时描述的是同一运动状态吗？为什么？

分析：本题考察相位的周期性。

答：不是同一运动状态。位相差为 2π 的整数倍的那些简谐振动描述的是同一运动状态。而位相差为 π 的奇数倍的那些简谐振动则做的是反相的振动，刚好颠倒。

6-36 对一简谐振动系统，画出其动能和势能关于时间变量的曲线，并分析两者反相的物理意义。

分析：可写出简谐振动的动能和势能表达式，然后处理。此时初始的相角可以取为零。简谐振动能量守恒。



答：令简谐振动的表达式为 $x=A\sin\omega t$，则其速度为 $v=\omega A\cos\omega t$，动能为 $E_k=mv^2/2$，势能为 $E_p=kx^2/2$ 利用关系式 $\omega^2=k/m$，有 $E_p=kA^2\sin^2\omega t/2=kA^2(1-\cos2\omega t)/4$，$E_k=kA^2\cos^2\omega t/2=kA^2(\cos2\omega t+1)/4$，可见，二者以 $kA^2/4$ 为基准线，刚好反相。这使得反相的部分能量互相抵消，只留下恒定的总能量 $kA^2/2$，能量守恒。曲线如图所示，以 $y=0$ 为中轴线的曲线为原来的振动曲线，以 $kA^2/4$ 为中轴线的虚线为动能曲线，实线为势能曲线。

6-37 将单摆摆线从铅直方向拉到 φ 角的位置撒手任其摆动。这里 φ 角是初相位吗？若不是，它将对应什么物理量？

分析：相同的符号有不同物理意义，振动表达式中的 φ 表示相位。而此时的 φ 角越大，到达底部的速度越大（能量守恒），因此对应的是角位移。

答：这里的 φ 角不是初相位，而是摆线的角位移，它决定了振动的振幅。

6-38 若以一装满水的空心球作为单摆的摆钟，并让水从球体缓慢流出，试描述其摆动周期的变化情况。

分析：这是变质量运动和振动过程相结合。水流出则空心球主体受到一个反向的动量改变量。水缓慢流出，可以认为是到了底部之后获得最大速度才脱离球体，相当于一个周期性的力。

答：单摆质量和周期无关，只与绳长和重力加速度有关，此时重力加速度恒定，因此达到稳定态时，从空心球漏完水和没漏水时，质心不变，单摆周期是一样的。空心球主体受到水流出的影响，质心下降，绳长变长，周期会变慢，每到底部受到与运动方向相反的冲量，阻碍振动，所以振幅会变小，。水流完之后，周期又变回去了。

6-39 利用受迫振动方程(6.18)式说明为什么恒力不能导致受迫振动。（提示：恒力的频率 ω 可视为零）

分析：利用受迫振动方程，因为恒定力可以认为其频率为零，在微分方程是一个常数项，对各阶导数没有影响。

答：对于恒定力 F，可以认为频率为零，因此原方程 6.18 可写为：

$$-\boldsymbol{kx}-\gamma\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}+\boldsymbol{F}_0=\boldsymbol{m}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}^2}-2\delta\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}+\omega_0^2\left(\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{F}_0}{\boldsymbol{k}}\right)=0$$

将方程中$(x-F_0/k)$定为新的变量 $y=(x-F_0/k)$，原来的动力学方程仍可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}^2}-2\delta\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}+\omega_0^2\boldsymbol{y}=0$$

与不受力时的微分方程一致，因此有相同的周期。

6-40 在太空中能听到声音吗？为什么？

分析：声音是机械波，振动在空间传播，但是这个振动需要弹性介质，真空中空气很稀薄。

答：不能听到。因为太空中空气密度极低，没有弹性，所以不能传递弹性波。

6-41 在较长时间间隔（$\Delta t>>T$）内，任意以 t 为变量的正弦（或余弦）型函数的平均值均为零，例如：$\langle\cos\alpha t\rangle=\langle\sin\alpha t\rangle=0$，其中 α 是任意常数。

试据此推导（6.11)、(6.12)及(6.40)式。

分析：先按照公式写出表达式，取平均值后可得到。

答：设振动表达式为 $x=A\cos\omega t$，则 $v=-\omega A\cos\omega t$

$$\langle\boldsymbol{E}_k\rangle=\frac{1}{\Delta\boldsymbol{t}}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\boldsymbol{m}\omega^2\boldsymbol{A}^2\sin^2\omega\boldsymbol{t}}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{t}$$

利用三角函数的倍角公式以及 $\omega^2=k/m$，有

$$\langle\boldsymbol{E}_k\rangle=\frac{1}{\Delta\boldsymbol{t}}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\boldsymbol{m}\omega^2\boldsymbol{A}^2\sin^2\omega\boldsymbol{t}}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\frac{1}{\Delta\boldsymbol{t}}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\boldsymbol{kA}^2}{2}*\frac{(1-\cos2\omega\boldsymbol{t})}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{kA}^2}{4}-\frac{\boldsymbol{kA}^2}{4}\langle\cos2\omega\boldsymbol{t}\rangle$$

对 1 个周期进行积分，有：

$$\langle\boldsymbol{E}_k\rangle=\frac{1}{\boldsymbol{T}}\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{\boldsymbol{m}\omega^2\boldsymbol{A}^2\sin^2\omega\boldsymbol{t}}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\frac{1}{\boldsymbol{T}}\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{\boldsymbol{kA}^2}{2}*\frac{(1-\cos2\omega\boldsymbol{t})}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{kA}^2}{4}-\frac{\boldsymbol{kA}^2}{8}\sin2\omega\boldsymbol{t}\Big|_{t_0}^{t_0+T}=\frac{\boldsymbol{kA}^2}{4}$$

应用题目中的公式，可知后一项为 0，(6.11)式对 1 个周期进行积分，有相同的结果，因此命题得证，同理可证(6.12)式；

$$\left\langle E_p \right\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{kA^2\cos^2\omega t}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{kA^2}{2}*\frac{(1+\cos 2\omega t)}{2}\mathrm{d}t = \frac{kA^2}{4}+\frac{kA^2}{4}\left\langle \cos 2\omega t \right\rangle$$

对于(6.40)式，同样有

$$\left\langle \varepsilon \right\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\rho\omega^2A^2\sin^2\left(\omega t-\frac{x}{v}\right)\mathrm{d}t$$

应用倍角公式、题目中的公式可以证明在 $\Delta t>>T$ 时，其结果与 1 个周期是相同的。

6-42 海啸是一种波长约为几十至几百千米、在海水中传播的波动现象。它在深海区域并不易被察觉，但一旦海啸接近岸边往往会造成巨大的灾害。试从能量角度分析其中的原因。

分析：从波的独立传播原理与能量的角度进行考虑，深海和岸边的条件不同。深海仍是连续介质，到了岸边条件发生改变。

答：在深海处，海啸形成的能量可以向相邻的区域传播出去，具有相同的弹性性质，区域内部只是个传递区域，少有能量截留下来，而到了岸边，界面条件发生改变，有反射，能量需要重新分配到两个不同区域，因此造成比较大的灾害。

6-43 描述机械波时间周期性的物理量由周期 T、频率 v 和圆频率 ω 给出。类似地，我们可以用 λ、$\dfrac{1}{\lambda}$、$\dfrac{2\pi}{\lambda}$ 描述波的空间周期性，试说明这三个量对应的物理意义。

分析：时间周期有不同的参量，可以互相变换，适宜求不同的参量，空间周期以波长作为主要参量进行变换，也适用于不同的状况。

答：波长 λ 是用于度量空间距离的周期性，表明在传播方向上，每相邻 λ 的距离重复一次原来的振动；$1/\lambda$ 则是考虑了单位距离上的周期性，如果知道距离可以由此确定振动的重复程度；$2\pi/\lambda$ 则更加明确地描述了相位上的重复性，每个波长对应 2π 周期性相位。

6-44 试解释弦乐器的以下现象：

（1） 较松的弦发生的音调较低，而较紧的弦则音调较高；

（2） 较细的弦发生的音调较高，而较粗的弦则音调较低（古人称之为“小弦大声，大弦小声”）；

（3） 正在振动的两端固定的弦，若用手指轻按弦的中点时，音调变高到两倍，若改按弦的三分之一处时，音调增至三倍；

（4） 用力弹拨琴弦（而非用手指按弦）时，能同时听到若干音调各异的声音。（提示：音调高低与弦振动的频率成正比。此外，在（4）情形中弦以基频振动的同时还以若干泛频振动。）

分析：本题主要在于频率与各种因素的关系，波速与张力有关。发出的声音是与驻波频率有关。

答：(1) 松的弦张力较低，因此波速慢，波长相同，因此频率低，音调低；反之则相反。

（2）各弦的张力一样，在用公式计算波速时，都把弦作为无限细的材料。但是细弦的截面小，线密度小（单位长度质量小），因而波速快，频率高；反之则相反。

（3）按到弦中不同地方，改变驻波的波长，弦中的波速不变，因此频率相应改变，中点时为两倍，按弦的三分之一处时，音调增至三倍；

（4）对复杂振动进行分解，泛频振动的相对振幅比基频小，用力弹拨琴弦时，因为振幅比较大，能量比较高，除了基频之外还能够听到泛频振动，所以音调各异。

第七章 热学基础

一．内容提要:

1. 理想气体模型：分子无限小，分子间无相互作用。
2. 温度：表征系统的热平衡性质的物理状态量。
3. 理想气体状态方程为：$pV=\nu RT$

习题解答：

7-1 如设单位摩尔气体的尺度约为 10^{-1} m 量级，一个气体分子约为 10^{-9} m 量级。试估算宏观气体系统是由多大数量级的微观粒子组成的。

分析：可以采用正方体模型，忽略边缘的效应。

答：标准状况下 1 mol 气体约为 $20\times10^{-3}\,\mathrm{m}^3$，气体分子围成的最小立方格子约为 $10^{-27}\,\mathrm{m}^3$，可见，大约有 2×10^{24} 个微观粒子，数量级在 10^{24}。

7-2 在一定条件下，较重的原子核可视为由质子、中子等组成的热学系统。试说明这里的“宏观系统”和“微观粒子”分别是谁？

分析：系统的属性、构成。

答：在此情况下，“微观粒子”指的是质子、中子等原子核内的独立单元，“热学”系统指的是原子核。这里“宏观系统”只是说明它具有类似宏观热力学的属性，而非一般意义上的宏观分类。

7-3 无规则热运动首先由生物学家布朗在观察悬浮在水中的细小花粉颗粒运动时候发现。有人说，热运动就是指花粉颗粒的无规则运动，这种说法正确吗？进一步的，若将水加热，花粉颗粒运动更加剧烈，这又说明了什么道理。

分析：区分花粉的运动和水的运动。花粉是宏观物质，肉眼可观察，用来指示分子热运动，水分子才是微观粒子，根本原因在于水分子无规的运动。

答：不正确。热运动指的是大量微观粒子无规则热运动，水分子的运动才是微观粒子的无规则运动，当温度上升，水分子热运动加剧，从而导致花粉运动加剧。

7-4 讨论热力学第零定律在温度概念引进中的必要性。

分析：热力学第零定律描述了平衡态的传递性，说明热平衡是一种普遍状态。

答：热力学第零定律表明了平衡态的传递性，而这种热的平衡是通过热接触传递的，而与体积、压强等都没有关系，表明需要有一个独立的、描述公共属性的热参量来比较两个状态是否可以平衡，相互之间是否需要传热，这个参量就是温度。

7-5 若一个物体的某种状态量与其物质的量成正比例，该状态属于广延量；若状态量与物质量没有关系，则属于强度量。试分析理想气体的三个状态量谁属于广延量，谁又属于强度量。

分析：理想气体 p、V、T 系统

答：显然体积是广延量，与物质的量成正比，压强、温度是强度量与物质的量无关。

7-6 有一氧气瓶，其容积为 32 L，压强为 130 个标准大气压（记为 atm）。当压强降到 10 大气压时，就应重新装气体。某工厂若平均每天用 1atm 下的氧气 400 L，试问，在温度不变的情况下，一瓶氧气能用多少天？

分析：应用理想气体状态方程，温度不变时，pV 正比于物质的量，因此可以直接用 pV 进行比较。

解：设温度为 T，出厂氧气有 v_1 mol，换装时还剩下的质量为 v_2 mol。

因为温度不变，每天用氧气 v mol 是个常数，有：

每天用氧气量的方程为： $pV=vRT$

与使用的总氧气量的方程为：$(p_1V_1- p_2V_2) =(n_1RT- v_2RT)$

因此需要的天数为（$v_1- v_2$)/ v =($p_1V_1- p_2V_2$)/ pV=(130-10)*32/(1*400)=9.6（day）

可以用 9 天。

7-7 测定气体摩尔质量的一种方法是：容积为 V 的容器内装满被测的气体，测出其压强为 p_1，温度为 T，并称容器连同气体的质量为 m_1；然后放出一部分气体，使压强降到 p_2，温度仍不变，再称出容器连同气体的质量 m_2，试由此求该气体的摩尔质量。

分析：用理想气体状态方程。连容器一起称重，所以需要称 2 次才能真正称出释放了多少气体。在这一过程中保持体积不变、温度不变。

解：应用理想气体状态方程 $pV= mRT/\mu$，因此有

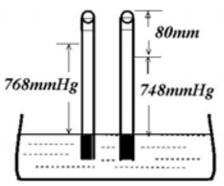
$d(pV)= d(mRT/\mu)$ ，因为体积和温度不变，

$V dp=(RT/\mu)\, dm$

$$\mu = \frac{(m_1 - m_2)RT}{(p_1 - p_2)V}$$

7-8 水银气压计混进了一个气泡，因此它的读数比实际的气压小些。当精确的气压计的水银柱高为 768 mm 时，它的水银柱高只有 748 mm，此时管中水银面到管顶的距离为 80 mm。试问，此气压计的水银柱高为 734 mm 时，实际气压应是多少？（把气泡中气体当作理想气体，并设温度不变。）

分析：画图帮助思考。采用理想气体状态方程。管中封闭了一段空气，压强改变时，气体的质量不变。气体对水银的压强 p 再加上水银的高度 h 才能与大气压 p_0 平衡，所以气体所受水银压强为实际压强与测试压强之差。



解：设管的横截面积为 S ，混进管内气体的质量为 v mol。又因等温过程。

$pV = \nu RT$

$p_1V_1 = p_2V_2$

l_2=80+(748−734)=94 (mm)，p_1 =768−748=20 (mm)

$p_1 l_1 S = p_2 l_2 S$

p_2=20*80/94 ≈17(mm)

所以实际读数应该是 734+17=751 (mm)

实际气压应是 751 mmHg。

7-9 两个空气容器 A 和 B 经装有阀门的细管相连，容器 A 浸入温度保持为 t_1=100℃的水槽中，而容器 B 浸入温度保持在 t_2= −20℃的冷却剂中。开始时，两容器的空气彼此被阀门分开，容器 A 中的压强等于 $p_1=5.33\times10^4$ Pa，容器 B 中的压强 $p_2=2.00\times10^4$ Pa。如果 A 的容积 $V_1=250\ \mathrm{cm}^3$，而 B 的容积 $V_2=400\ \mathrm{cm}^3$，求阀门打开后的稳定压强。

分析：应用理想气体状态方程，打开阀门后两个容器的压强相同，但是温度不同，质量守恒。

解：开始时，$p_1V_1 = \nu_1 RT_1$，$p_2V_2 = \nu_2 RT_2$ ，

由质量守恒，有 $p_1V_1/T_1 + p_2V_2/T_2 = pV_1/T_1 + pV_2/T_2$

有 $p = (p_1V_1/T_1 + p_2V_2/T_2)/(V_1/T_1 + pV_2/T_2)$，

将 T_1=273+100=373 (K)，T_2=273−20=253 (K)，p_1 ，p_2，V_1，V_2 带入，有

$p=2.99\times10^4$ Pa

7-10 若太阳中心压强由 $p = \frac{2\pi}{3} G \rho^2 R^2$ 给出（其中 ρ 和 R 分别是太阳的平均密度和半径，G 为引力常量）。试估算太阳中心的温度（假设其中心主要由氢原子核组成）。

分析：理想气体压强的公式为 $p= nkT$，质量在太阳中是均匀分布的。两个压强公式应该相等。

解：由理想气体状态方程 $p= nkT$，可知两个压强相等。

设太阳是气体均匀分布的球体，则太阳质量为 $M_{日} = \rho*(4\pi R^3/3)$，对应的氢原子数目为

$N=\rho* (4\pi R^3/3) /M_{\mathrm{H}}$ ，

则单位体积粒子数密度为

$n=N/V=\rho/M_{\mathrm{H}}$

氢原子质量为 $1\times10^{-3}/N_{\mathrm{A}}$ kg，比较两个方程，有

$$p = \frac{2\pi}{3} G \rho^2 R^2 = \frac{\rho}{M_H} kT$$

进一步整理，有

$$T = (\frac{2\pi}{3} G \rho R^2)(1\times10^{-3})/(N_A * k)$$

将太阳的常数 $R=6.9599\times10^8$ m，$\rho = 1.409\ \mathrm{kg/m^3}$ 以及引力常数 $G=6.674\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$ 带入，
$N_{\mathrm{A}}* k$ 即气体普适常数，解得
$T\approx1.15\times10^7$ K。

第八章 热力学第一和第二定律

一．内容提要

1. 理想气体做功，可看作是 p-V 相图曲线下的面积，写为：

$$\mathrm{d}W = F\mathrm{d}l = pS\mathrm{d}l = p\mathrm{d}V$$

2. 热力学第一定律：

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q - \mathrm{d}W$$

3.摩尔热容：

摩尔定容热容为 1mol 气体在等容时的热容，$C_{\mathrm{v,m}}$

摩尔定压热容为 1mol 气体在等容时的热容，$C_{\mathrm{p,m}}$

比热容比 $\gamma = C_{\mathrm{p,m}}/ C_{\mathrm{v,m}}$

对于理想气体，单原子气体，双原子气体和非共线的三原子气体的摩尔定容热容为 1.5R，2.5R，3.5R，而且摩尔定容热容和摩尔定压热容有关系：

$$C_{\mathrm{p,m}}= C_{\mathrm{v,m}}+R$$

3.理想气体绝热过程状态方程，是过程方程：

$$TV^{\gamma-1} = \text{常量}$$

$$pV^{\gamma} = \text{常量}$$

$$\frac{p^{\gamma-1}}{T^{\gamma}} = \text{常量}$$

4. 理想气体热力学过程的能量、状态转换公式

过程	过程方程	系统做功	吸收热量	内能	摩尔比热容
等体	$V=$常量 $p/T=$常量	0	$\nu C_{\mathrm{v,m}}(T_2-T_1)$	$\nu C_{\mathrm{v,m}}(T_2-T_1)$	$C_{\mathrm{v,m}}=\frac{i}{2}R$
等压	$p=$常量 $V/T=$常量	$p(V_2-V_1)$	$\nu C_{\mathrm{p,m}}(T_2-T_1)$	$\nu C_{\mathrm{v,m}}(T_2-T_1)$	$C_{\mathrm{p,m}}=C_{\mathrm{v,m}}+R$
等温	$T=$常量 $pV=$常量	$\nu RT\ln(V_2/V_1)$	$\nu RT\ln(V_2/V_1)$	0	∞
绝热	$pV^{\gamma}=$常量 $TV^{\gamma-1}=$常量 $\frac{p^{\gamma-1}}{T^{\gamma}}=$常量	$\frac{-1}{\gamma-1}(p_2V_2-p_1V_1)$ $=-\nu C_{\mathrm{v,m}}(T_2-T_1)$	0	$\nu C_{\mathrm{v,m}}(T_2-T_1)$	0
多方	$pV^{n}=$常量 $TV^{n-1}=$常量 $\frac{p^{n-1}}{T^{n}}=$常量	$\frac{-1}{n-1}(p_2V_2-p_1V_1)$ $=-\frac{\nu R}{n-1}(T_2-T_1)$	$\nu C_{\mathrm{n,m}}(T_2-T_1)$	$\nu C_{\mathrm{v,m}}(T_2-T_1)$ 与过程无关	$C_{\mathrm{n,m}}=\frac{\gamma-n}{1-n}C_{\mathrm{v,m}}$

5. 热循环的效率：

热机效率

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

卡诺热机的效率

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

制冷机的效率

$$\xi = \frac{Q_2}{W}$$

6. 热力学第二定律：
开尔文表述：不可能从单一热源吸收热量，使之完全变成有用功而不引起其他影响（热机效率不能为 100%）。
克劳修斯表述：不可能吧热量从低温物体传导到高温物体而不产生其他变化（热传导的不可逆性）。
7. 熵：又称热温比，是态函数，

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

熵增原理：孤立绝热系统熵永不减少。

$$dS \geqslant 0$$

二．要点
1. 热力学第一定律是能量守恒定律，从能量的效果来看，系统吸收的热量用于对外做功和增加系统的内能。内能是态函数，只和状态有关，。理想气体的内能只由温度决定。
2. 计算热机效率时，必须计算吸热和放热。理想热机，每一个过程能量守恒的角度，总的循环过程也是能量守恒的。循环过程初态和末态具有相同的状态参量，具有相同的内能，因此计算热机效率时可以只考虑每个过程的热量。
3. 热力学第二定律和热力学不可逆过程有关。热力学第二定律表明，所有与热现象有关的宏观实际过程都是不可逆的。由热力学第二定律提出了态函数熵，与时间历程和所走的空间路径无关。计算熵差时必须按照可逆过程计算，所计算的宏观熵差才有唯一值。如果涉及到相变，要分段计算。
4.理想气体状态方程可以在两个状态之间状态进行参量变换，使用热力学第一定律和第二定律时可以结合使用。

习题解答：
8-1 某一定量氧气原处于压强 p_1=120 atm、体积 V_1=1.0 L、温度 t_1=27℃的状态，经（1）绝热膨胀，（2）等温膨胀，（3）自由膨胀，体积增至 V_2=5.0 L。求这三个过程中气体对外做功及末状态压力值。
分析： 三个独立的过程，需要用热力学第一定律。理想气体状态方程可以对两个状态进行变换，绝热过程是过程曲线，做功要用路径积分。
解：（1）绝热膨胀，pV^γ=常数，氧气是双原子分子，有

$\gamma = C_{p,m}/C_{V,m}$=(7/2)/(5/2)=1.4

氧气的末态压力为

$p_2 = (V_1/V_2)^\gamma p_1 = (1/5)^{1.4} * 120 \approx 12.6(\text{atm}) \approx 1.28\times10^6$ Pa

所做的功为：

$$W = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1} = 1.44\times10^4(\text{J})$$

（3） 等温过程：

$$pV = \nu RT$$

$p_2 = p_1V_1/V_2 = 24(\text{atm}) \approx 2.43\times10^6$ Pa

所做的功为：

$W=\nu RT\ln(V_2/V_1)\approx1.96\times10^4$ (J)

（3）自由膨胀，T 不变，相当于等温过程，$p=2.43\times10^6$ Pa , $W=0$

8-2 将 418.6 J 的热量传给标准态下的 5.00×10^{-3} kg 的氢气[$C_{v,m}$=20.331 J/(mol.k)]

(1) 若体积不变，这热量变为什么？氢气的温度变为多少？

(2) 若温度不变，这热量变为什么？氢气的压强及体积变为多少?

(3) 若压强不变，这热量变为什么？氢气的温度和体积变为多少？

分析：热力学第一定律中功、热、内能的转换关系。标准状态是 273.15 K，1.013×10^5 Pa

解：热力学第一定律 $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W$，$5.00\times10^{-3}$ kg 氢气相当于 2.5 mol

（1） 体积不变，所以不做功($\mathrm{d}W=0$)，所以热量变为氢气的内能。

$\mathrm{d}Q=\nu C_{v,m}\mathrm{d}T$

$\Delta T= 418.6/(2.5*20.331)\approx8.05$ K

$T=273.15+8.05=281.2$ (K)

（2）温度不变，即内能不变，吸热完全转化为对外做功，即 $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}W$。

等温过程做功为：$W=\nu RT\ln(V_2/V_1)$，$V_1=2.5*22.4\times10^{-3}=5.6\times10^{-2}$ (m^3)

$V_2 = V_1\, e^{(W/\nu RT)}$，$V_2=6.02\times10^{-2}$ (m^3)

$p_2 = p_1V_1/V_2=9.41\times10^4$ Pa

（3）压强不变，对外做功，而且内能升高。 理想气体 $C_{p,m}=3.5R$

$$\Delta Q = \nu C_P \Delta T,\quad \Delta T = \frac{\Delta Q}{\nu C_{p,m}} = 5.85(K),$$

$$T_2 = 273.15 + 5.7 \approx 279.0(K)$$

$$\frac{pV_2}{T_2} = \frac{pV_1}{T_1}$$

$$V_2 = V_1\frac{T_2}{T_1} = 5.72\times10^{-2}m^3$$

8-3 有 20.0 L 的氢气，温度为 27℃，压强为 $p=1.25\times10^5$ Pa。设氢气经（1）等温过程;（2）先等压后绝热过程;（3）先绝热后等压;（4）先等压后等体变化到体积为 40.0 L，温度为 27℃的状态，试计算内能增量、对外做功和外界传给氢气的热量。

分析：用理想气体状态方程对各状态进行变换，应用热力学第一定律分别讨论各过程。等温过程内能不变，等容过程不做功，绝热过程不吸热。

解：热力学第一定律 $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W$，

27℃近似为 300K，氢气是双原子分子，$C_{v,m}=2.5\,R$，$C_{p,m}=3.5\,R$，$\gamma=1.4$

应用理想气体状态方程 $pV=\nu RT$，可知，$\nu\approx1mol$，$p_2= p_1V_1/V_2=6.25\times10^4$ Pa

（1） 等温过程：内能不变，吸热和对外做功相同，$\Delta Q=W=\nu RT\ln(V_2/V_1)=1.73\times10^3$ (J)

（2） 先等压后绝热，内能不变（内能只是温度的函数，温度不变），总的吸热和对外做功是相等的，需要按照 p-V 相图积分，或者完全按照热量计算（有 1 条绝热线，可以少算一步）。

考虑到 $\Delta Q=\nu C_{p,m}dT$，绝热和等压线交点的（p、V、T）状态参量中，用（p，T）描述，有 $p^{\gamma-1}/T^{\gamma}=$ 常量，交点的温度为

$$\frac{p_1^{\gamma-1}}{T_1^{\gamma}}=\frac{p_2^{\gamma-1}}{T_2^{\gamma}}$$

$$T_2^{\gamma}=T_1^{\gamma}(p_2/p_1)^{\gamma-1}=300^{1.4}(12.5/6.25)^{(1.4-1)}$$

$T_2=365.7$ K

$\Delta Q=W=\nu C_{p,m}dT=1*3.5*8.31*(365.7-300)\approx1.92\times10^3$ (J)

（3） 先绝热后等压，内能不变，做功和吸热相等，用热量计算。

用上面的结论，可计算出交点的温度

$$T_3^{\gamma}=300^{1.4}*(6.25/12.5)^{1.4-1}=246\,(\mathrm{K})$$

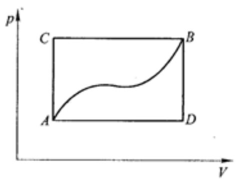
$\Delta Q=W=1.57\times10^3$ (J)

（4） 先等压后等容，等容过程不做功，用做功计算。

$dW=pdV$ ，等压过程，

$W=(1.25\times10^5)*[(40-20)\times10^{-3}]=2.5\times10^3$ (J)

8-4 如图 8-4 图所示，使一系统沿路径 ACB 从状态 A 变到状态 B 时，这系统吸收 335 J 的热量，对外做了 126 J 的功。（1）如果这系统经路径 ADB 做功 42 J，系统将吸收多少热量？（2）要使系统沿曲线从状态 B 回到状态 A，外界需对系统做功 84 J，该系统是吸收还是放出热量？其数量是多少？（3）如果 $U_D-U_A=40$ J，试求沿 AD 及 DB 各吸收热量多少？



题 8－4 图

分析：应用热力学第一定律。

解：热力学第一定律 $dQ=dU+dW$ ，可知从 A 到 B 内能变化 $\Delta U=335-126=209$ (J)

（1） 已知系统这系统经路径 ADB 做功 42 J，

系统内能改变 $\Delta U=209$ J

则系统吸热为 $\Delta Q=209+42=251$ (J)

(2) 系统从 B 沿曲线到 A 对外界做功，依题意有 $W=-82$J

系统内能改变 $\Delta U=-209$ J

因此 $\Delta Q=-209-82=-291$(J)

系统需要放出热量

(3) 系统内能改变 U_D-U_A=40 J，U_B-U_D=209−40 =169 (J)

由题意，AD 是等压膨胀，对外做功，DB 是等容过程，不对外做功，所以 W_{AD}=42 (J)

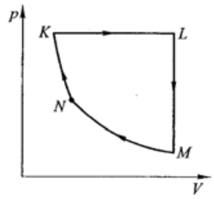
$\Delta Q = 40+42=82$ (J)

DB 是等容过程，不做功，吸收的热量与内能增量相同。

为：$\Delta U_{DB}= (U_B-U_A) + (U_A - U_D) = 209-40=169$ (J)。

吸热 $\Delta Q=\Delta U_{DB}=169$ J。

8-5 题 8-5 图为一理想气体的可逆循环，其中 MN 为等温线，NK 为绝热线。请在表中填写各分过程中各增量函数的符号（+表示增加，−表示减少，0 表示不变）



题 8－5 图

分析：结合热力学第一定律、熵的计算来讨论。理想气体状态方程可以确定温度的变化。

解：热力学第一定律 $\mathrm{d}Q=\mathrm{d}U+\mathrm{d}W$ ，$\mathrm{d}W=p\mathrm{d}V$

$$dS=\frac{dQ}{T}$$

$$\mathrm{d}S=\nu C_{v,m}\mathrm{d}T+\nu R\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

（1） $K\to L$，等压膨胀，

$\Delta V>0,\ \Delta T>0,\ W>0$

$\Delta Q=\nu C_{p,m}\mathrm{d}T>0$

$\Delta S>0$

（2）$L\to M$，等容降温过程，体积不变，做功为 0

$\Delta T<0 \quad \Delta U<0 \quad \Delta Q=\Delta U<0$

$$\mathrm{d}S=\nu C_{v,m}\mathrm{d}T+\nu R\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

$\Delta S<0$

（3）$M\to N$，等温压缩过程，

$\Delta V<0 \quad W<0$ ，$\Delta T=0$， $\Delta U=0$

$\Delta Q=W<0 \quad \Delta \mathrm{S}<0$

（4）$N\to K$，绝热压缩过程

$\mathrm{d}Q=0 \quad \Delta V<0$

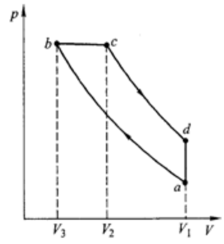
由本图可见，如果等温线与等压线相交，比绝热线与等压线相交的体积会更小，可见

$\Delta T > 0$ ， $\Delta U > 0$， $W < 0$

$\Delta S = 0$

过程	ΔQ	ΔW	ΔU	ΔT	ΔS
等压膨胀过程 KL	+	+	+	+	+
等容降温过程 LM	−	0	−	−	−
等温压缩过程 MN	−	−	0	0	−
绝热压缩过程 NK	0	−	+	+	0

8-6 题 8-6 所表示的是理想的迪赛尔内燃机的工作循环，它由两条绝热线 *ab*、*cd* 和一条等压线 *bc* 和一条等体线 *da* 组成，求其热机效率。



题 8－6 图

分析；求热机效率，需要求过程中的吸热量和放热量。存在两条绝热线，可以只计算另外两条工作曲线的吸热即可。需要理想气体状态方程和绝热过程方程对相关状态参量进行转换。

解：

等压过程 $\Delta Q_{bc} = \nu C_{P,m}(T_C - T_b)$ 吸热

等容过程 $\Delta Q_{da} = \nu C_{V,m}(T_a - T_d)$ 放热

$$\eta = \frac{\Delta Q_{bc} + \Delta Q_{da}}{\Delta Q_{bc}} = \frac{\nu C_{p,m}(T_C - T_b) - \nu C_{v,m}(T_d - T_a)}{\nu C_{p,m}(T_C - T_b)} = 1 - \frac{(T_d - T_a)}{\gamma(T_C - T_b)}$$

从图上看，体积 V 可知，因此绝热过程方程以(T,V)为变量。

$a \to b$ 绝热 $T_a V_1^{\gamma-1} = T_b V_3^{\gamma-1}$

$c \to d$ 绝热 $T_C V_2^{\gamma-1} = T_d V_1^{\gamma-1}$

$$\frac{(T_d - T_a)}{(T_C - T_b)} = \frac{T_C(V_2/V_1)^{\gamma-1} - T_b(V_3/V_1)^{\gamma-1}}{T_C - T_b}$$

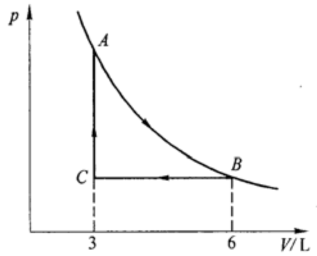
由等压过程的变换关系 $V_3/T_b = V_2/T_C$，求得 $T_C = T_b V_2 / V_3$ ，带入有

$$\frac{(T_d - T_a)}{(T_C - T_b)} = \frac{T_C(V_2/V_1)^{\gamma-1} - T_b(V_3/V_1)^{\gamma-1}}{T_C - T_b} = \frac{(V_2/V_3)(V_2/V_1)^{\gamma-1} - (V_3/V_1)^{\gamma-1}}{(V_2/V_3) - 1}$$

带入热机效率公式，有

$$\eta = 1 - \frac{T_d - T_a}{\gamma(T_C - T_b)} = 1 - \frac{V_2^{\gamma} - V_3^{\gamma}}{\gamma V_1^{\gamma-1}(V_2 - V_3)}$$

8-7 1mol 单原子理想气体进行如题 8-7 图所示的循环过程，其中 $A \to B$ 为等温过程，$B \to C$ 为等压过程，$C \to A$ 为等体过程。已知 V_A=3.00 L，V_B=6.00 L，求循环的热效率。



题 8－7 图

分析：需要对每个过程分析其吸热的性质，由热机效率公式进行计算。从热力学第一定律出发，每个过程计算一次。采用等容过程、等压过程的比热，可以简化计算，关键求出 T_C。理想气体状态方程可用于确定状态参量。

解：$A \to B$ 为等温膨胀过程，内能不变，对外做功，需要吸热；$B \to C$ 为等压压缩过程，温度降低，放热过程，$C \to A$ 为等体升温过程，吸热。

单原子气体，所以，$C_{v,m}$=1.5 R, $C_{p,m}$=2.5 R，ν =1 mol

由理想气体状态方程 $pV=\nu RT$，可知

$T_C=T_B V_C/V_B=0.5T_B=0.5T_A$

A 到 B 过程吸热过程：

$$Q_{AB} = \nu RT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = RT_A \ln 2$$

C 到 A 过程吸热：

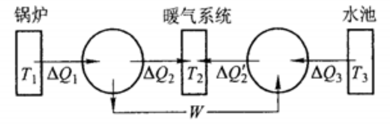
$$Q_{CA} = \nu C_{V,m}(T_A - T_C) = 1.5R \times (T_A - 0.5T_A) = 0.75RT_A$$

B 到 C 过程放热：

$$Q_{BC} = \nu C_{P,m}(T_C - T_B) = 2.5R*(0.5T_A - T_A) = -1.25RT_A$$

$$\eta = \frac{Q_{吸} - |Q_{放}|}{Q_{吸}} = 1 - \frac{1.25RT_A}{RT_A \ln 2 + 0.75RT_A} \approx 13.3\%$$

8-8 有一动力暖气装置如下图所示，热机从温度为 t_1 的锅炉内吸收热，对外做功带动一热机，制冷机自温度为 t_3 的水池中吸热传给暖气系统 t_2，此暖气系统同时作为热机的冷却器。若 t_1=210℃，t_2=60℃，t_3=15℃，煤的燃烧值为 $H=2.09\times10^7$ J/kg,回锅炉每燃烧 1.0 kg 的煤，暖气中的水得到的热量 Q 是多少？（设两部机器都作卡诺可逆循环）



题 8－8 图

分析：卡诺热机效率只和温度有关，热机以及制冷机，所做的功是一样的。这个过程认为是能量守恒。

解：由图知

$$\frac{W}{\Delta Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1} \quad 则 \quad W=\frac{T_1-T_2}{T_1}\Delta Q_1$$

$$\Delta Q_2=\Delta Q_1-W=\frac{T_2}{T_1}\Delta Q_1$$

制冷机的效率为

$$\varepsilon=\frac{\Delta Q_3}{W}=\frac{T_3}{T_2-T_3} \quad 则 \quad \Delta Q_2'=\Delta Q_3+W=(\frac{T_3}{T_2-T_3}+1)W=\frac{T_2}{T_2-T_3}W$$

$$\Delta Q_2'=\frac{T_2}{T_2-T_3}\frac{T_1-T_2}{T_1}\Delta Q_1$$

$$\Delta Q=\Delta Q_2+\Delta Q_2'=[\frac{T_2}{T_1}+\frac{T_2(T_1-T_2)}{T_1(T_2-T_3)}]\Delta Q_1=\frac{T_2(T_1-T_3)}{T_1(T_2-T_3)}\Delta Q_1$$

$$\Delta Q=6.24\times10^7 J/kg$$

8-9 试求 1 kg 的水在 1 atm 下进行如下过程的熵变[已知 在 1atm 下水的溶解热是 333 kJ/kg，汽化热是 2 256 kJ/kg，比定压热容是 4.2 kJ/(kg·K)];

（1）100℃的水蒸气化为 100℃的水蒸气；

（2）0℃的水转化为 100℃的水蒸气；

（3）水结成冰的过程中的熵变。

分析：涉及相变时的熵变计算，要分段处理。相变时温度不变。

解：（1）$\Delta S=\frac{dQ}{T}=\frac{2256\times10^3}{373.15}=6.05\times10^3$（J/K）

（2）0℃的水转化为 100℃的水蒸气，可以认为是等压热容下加热，再于 100℃时气化。水的比热是 4.2 J/(g·K)

$$\boldsymbol{\Delta S=\int\frac{mC_m\mathrm{d}T}{T}=mC_m\ln T}$$

$\Delta S_1\approx1\times10^3*4.18*\ln(373/273)\approx1.31\times10^3$ (J/K)

$$\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2=(1.305\times10^3+6.05\times10^{-3})=7.36\times10^3(\mathrm{J/K})$$

（3）水结成冰是等温过程：

$$\Delta S\approx\frac{dQ}{T}=\frac{-333\times10^3}{273}=-1.23\times10^3（J/K）$$

8-10 1mol 氧气原处于标准状态，经（1）准静态等温过程体积膨胀至 4 倍；（2）先经准静态等压过程体积膨胀至 4 倍，然后再经等体冷却至（1）中达到的末态，分别计算在这两个过程中熵的增量。

分析：熵是态函数，计算其熵变可以将熵差的公式表为态函数的形式，由初末态的状态参量进行计算。

解：把熵作为状态参量的函数表达式推导出来，再将初末两态的参量带入，从而算熵变。

$$S-S_0=\nu C_{V,m}\ln\frac{T}{T_0}+\nu R\ln\frac{V}{V_0}$$

氧原子是双原子分子，$C_{\mathrm{V,m}}=2.5\,R$

题中 A、B 态在同一条等温线上，且体积之比为 1：4 的 1mol 氧原子，所以得：

$$S_B-S_A=R\ln\frac{V_B}{V_A}=R\ln 4\approx 11.5\ \text{(J/K)}$$

8-11 将 1.0 mol 的氢气和 1.0 mol 的氮气装在相邻的两个容器中，其压强和温度均为 p 和 T，如果把两个容器连通，使氢气和氮气相互混合，求总熵变。

分析：熵具有可加性，可认为氢气和氮气分别向两个为真空的容器自由膨胀。不可逆过程要由可逆过程代替。熵是态函数，可用状态参量表达熵差。

解： 根据可加性，可分别求得氢气、氮气的熵变，再求得其和；

氢、氮气分子混合前、后，不吸热，不做功，内能不变，温度相同。

因为是不可逆过程，熵差可用状态参量计算

$$S-S_0=\nu C_{V,m}\ln\frac{T}{T_0}+\nu R\ln\frac{V}{V_0}$$

$$S_1-S_{10}=S_2-S_{20}=R\ln 2$$

总熵变 $(S_1-S_{10})+(S_2-S_{20})=2R\ln 2=11.5\ \text{(J/K)}$

8-12 推导理想气体的宏观熵变的表示式

$$\mathrm{d}S=\nu C_{V,m}\frac{dT}{T}+\nu R\frac{dV}{V}=\nu C_{V,m}\frac{dp}{p}+\nu C_{p,m}\frac{dV}{V}=\nu C_{p,m}\frac{dT}{T}-\nu R\frac{dp}{p}$$

分析：熵差的基本公式与理想气体状态方程，引入热力学第一定律，再考虑定容比热和定压比热的关系可得。

解：理想气体准静态过程：

$$\mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}Q}{T}\quad 且\ \mathrm{d}Q=\mathrm{d}U+p\mathrm{d}V$$

利用理想气体状态方程 $pV=\nu RT$，用(T，V)表示，则有

$T\,\mathrm{d}S=\nu C_{\mathrm{V,m}}\mathrm{d}T+\nu RTdV/V$

由此可得到

$$\mathrm{d}S = \nu C_{V,m}\frac{dT}{T} + \nu R\frac{dV}{V}$$

该式用 (p,V) 表示，需要对理想气体状态方程求全微分后进行变换，有

$\nu R\mathrm{d}T = p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p$

将上式以及理想气体状态方程带入 $T\,\mathrm{d}S = \nu C_{\mathrm{V,m}}\mathrm{d}T + \nu RTdV/V$ 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S &= \frac{\nu C_{V,m}(p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p)/\nu R}{pV/\nu R} + \nu R\frac{\mathrm{d}V}{V} \\ &= \nu C_{v,m}\left(\frac{\mathrm{d}V}{V} + \frac{\mathrm{d}p}{p}\right) + \nu R\frac{\mathrm{d}V}{V} \\ &= \nu C_{p,m}\frac{\mathrm{d}V}{V} + \nu C_{p,m}\frac{\mathrm{d}p}{p}\end{aligned}$$

采用(T，p)表示，将 $\nu R\mathrm{d}T = p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p$ 变换，

有 $p\mathrm{d}V = \nu R\mathrm{d}T - V\mathrm{d}p$，带入 $T\,\mathrm{d}S = \nu C_{\mathrm{V,m}}\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V$ ，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{dS} &= \frac{\boldsymbol{\nu C_{V,m}dT}}{\boldsymbol{T}} + \frac{\boldsymbol{\nu RdT - Vdp}}{\boldsymbol{T}} \\ &= \frac{\boldsymbol{\nu(C_{V,m} + R)dT}}{\boldsymbol{T}} - \frac{\boldsymbol{pVdp}}{\boldsymbol{pT}} \\ &= \frac{\boldsymbol{\nu C_{p,m}dT}}{\boldsymbol{T}} - \frac{\boldsymbol{\nu Rdp}}{\boldsymbol{p}}\end{aligned}$$

8-13 强光照射物体，可以使物体的温度上升，导致物体内能的改变。试问这一过程属于热量传递还是广义的做功。

分析：热是无规则运动的能量，强光属于电磁能量，是有序运动，但可以使分子的运动特性发生改变，可以算广义功。

答：虽然有些强光有热效应，但是并不是热能，应该属于广义功，电磁能量改变分子运动的特性。

8-14 储气瓶中的二氧化碳急速喷出，瓶口处会出现固态的二氧化碳——干冰。为什么？

分析：二氧化碳喷出后吸热，瓶口温度急剧降低。

答：高压的二氧化碳从瓶口喷出后，会急剧吸收周围大量的热量，热传导也是需要一定时间才能建立平衡，这个快速的非准静态过程导致瓶口温度急剧降低，一些二氧化碳变成了干冰。

8-15 日常生活中有“摩擦生热”的提法，从物理上讲正确的表述是什么？

分析：摩擦的特点是有机械运动。

答：正确的说法是由于摩擦产生的相对运动做功，传递到系统内部，导致系统内部内能升高，温度增加。

8-16 有人说：只有温度改变时，才有吸热或放热现象。这种说法正确吗？试举例说明之。

分析：温度只是热平衡，吸热或放热是能量转换。

答：相同温度只是表示系统达到了相同的热平衡。但是吸热或放热涉及能量转换，可以涉及其他因素，如等温膨胀或等温压缩，都会产生热交换。

8-17 微元 dW、dQ 和 dU 与具体微元过程有关吗？微元 $\frac{dQ}{T}$ 呢？

分析：有些函数是态函数，和过程没有关系，而另外一些函数则不是态函数。

答：dU 和具体微元过程无关，只是由状态参量决定。dW 是 p-V 相图曲线下的面积，曲线不同，结果不同，dQ 和微元过程有关，如果是可逆过程 $\frac{dQ}{T}$ 和微元过程无关，因此 $\frac{dQ}{T}$ 和实际微元过程是有关的。

8-18 参考§8.3 关于开尔文表述与克劳修斯表述等价性的证明，试用反证法证明卡诺循环与克劳修斯表述的等价性。

分析：可由卡诺循环构成的冷机和热机搭建一个系统，净效果违反热力学第二定律。

答：由卡诺循环的热机和制冷机构建成一个系统，一个从高温吸热、做功、低温放热，另外一个从做功、从低温吸热到高温放热。假设用热机做的净功去推动制冷机，使其从低温热源吸热，在高温放出。可以证明可逆热机效率最高。详见§8.4 卡诺定理及其意义。

8-19 等温膨胀过程的熵变大于零，有人说这表明此过程是不可逆的过程。这种说法正确吗？

分析：过程是否可逆指的是可以消除影响，孤立的绝热系统熵增，但等温膨胀不是孤立系统。

答：不对。等温膨胀，系统和外界有热交换，熵增加。熵增原理是对孤立绝热系统而言的，等温膨胀的系统和外界有热交换，不是孤立绝热系统。

8-20 基于克劳修斯表述证明两条绝热线不可能相交。

分析：用反证法证明绝热线不能相交。

证明：如果两条绝热线相交，则可以再做一条等温线与这两条绝热线相交，则总的效果是从一个热源吸收热量全部转化为功，这违反了热力学第二定律。

8-21 定义状态量焓 $H=U+pV$。 对准静态且只有压强做功的过程，证明 $dH=TdS+Vdp$，并说明该量在等压过程中的物理意义。

分析：考虑热力学第一定律和理想气体状态方程的参量变换。

答：对公式取全微分，有 dH=dU+pdV+Vdp ，只涉及压强做功时，用热力学第一定律 dQ= dU+pdV，以及熵的定义，dQ=TdS，可得到 $dH=TdS+Vdp$。当在等压环境时，焓变就是吸热。而且各个参量都是态函数，表明焓也是态函数。

8-22 报载，一小孩在夏季午睡时，由于长时间压着一个一次性打火机，导致打火机破裂，其皮肤轻度冻伤。试思考其中的物理原因。

分析：相变热的影响。

答：可燃性液体挥发性较强，变成气体时需要吸收热量，降低周围的温度。如发烧时，用棉签蘸着酒精溶液擦身体可以降低体温。

8-23 一般来说，物体吸热（放热）温度上升（下降），其热容量为正值。但是对于自引力系统，热容量可能取负值。试以第七章例 7.3 为例说明之。

分析：以恒星释放热量，温度升高为例。

解：按照热容的定义，物体吸热，温度升高，热容量为正值。但是恒星这样的系统，放热而使自身温度上升，吸热为正，因此放热为负，温升为正，因此热容为负值。

$$C_l = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_l$$

第九章 热平衡态的统计规律

一．内容提要

1．统计初步:

归一化分布函数：

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\int N(x)\,\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}N(x)}{\mathrm{d}x}$$

归一化条件

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=1$$

宏观统计平均值：

$$\overline{M}=\int M(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}N(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r})}{N}$$

2. 气体的麦克斯韦分布：

气体的麦克思维速度分布（三维）：

$$f(v_x,v_y,v_z)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2kT}$$

气体的麦克思维速率分布：

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}v^2$$

三种重要的速率：平均速率，最概然速率，方均根速率

平均速率：

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\approx1.6\sqrt{\frac{RT}{M}}$$

最概然速率：

$$v_{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{M}}\approx1.41\sqrt{\frac{kT}{M}}$$

方均根速率：

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=v_{\mathrm{rms}}$$

13. 能量均分定理，系统处于平衡态时，分子的每个自由度所具有的平均能量为 $kT/2$，因此有：

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}(t+r+2s)kT$$

t 是平动自由度，r 是转动自由度，每个振动自由度 s 需要考虑动能和势能。

温度的统计意义为分子的平均平动动能：

$$\overline{\varepsilon_{\mathrm{k}}}=\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}kT$$

因此理想气体的压强又可写为：

$$p=\frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_{\mathrm{k}}}=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}$$

4. 玻尔兹曼统计

玻尔兹曼统计在重力场中的粒子分布为：

$n(z) = n_0 e^{-mgz/kT}$

考虑高度因素时，理想气体的压强为：

$p(z) = p_0 e^{-mgz/kT}$

玻尔兹曼统计推广到任意势场时，有：

$n(\boldsymbol{r}) = n_0 e^{-\varepsilon_p(\boldsymbol{r})/kT}$

玻尔兹曼推广到按能量分布（普遍适用），有：

$\boldsymbol{n}(\varepsilon) \propto \boldsymbol{e}^{-\varepsilon/kT}$

5. 气体的输运过程：
热传导是由于温度不均匀造成的，输运的是能量；
粘滞现象是由于流速不均匀造成的，输运的是动量；
扩散现象是由于浓度不均匀造成的，输运的是质量
平均自由程：

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

6. 熵的微观统计意义（绝对熵），它表明了熵是系统混乱程度的度量，可从概率角度解释宏观不可逆过程。

$S = k\ln \Omega$

二．要点
1. 统计学问题必须先求归一化分布函数，然后再求统计平均值。
2.玻尔兹曼是能量分布，麦克斯韦速度分布可以作为玻尔兹曼分布的特例。

习题解答
9-1 一氦氖气体激光管，工作时管内的温度是 27℃，压强是 2.4 mmHg，氦气与氖气的压强比是 7：1，问管内氖气和氦气的分子数密度各是多少？
 分析：道尔顿分压定理。理想气体状态方程（微观）
解：

$$p_1 + p_2 = p, \frac{p_1}{p_2} = \frac{7}{1} = 7$$

$$p_2 = \frac{p}{8} = \frac{2.4}{8} = 0.3(mmHg)$$

$$p_1 = 2.1(mmHg)$$

$$p_1 = n_1 kT，\ n_1 = \frac{p_1}{kT} = 6.76\times 10^{22}(m^{-3})$$

$$p_2 = n_2 kT \quad n_2 = 9.66\times 10^{21}(m^{-3})$$

9-2 水蒸汽分解成同温度的氢气和氧气，内能增加百分之几？（不计分子的振动自由度）
分析：运用能量均分定理。水分子与氢气和氧气的比例关系遵守化学反应方程。都是双原子分子，由能量均分定理，可以知道其摩尔定容比热。

解：因为 $2H_2O \rightarrow 2H_2+O_2$，所以，2 mol 的水分子分成 2 mol 的氢和 1mol 的氧气。
双原子分子，不计振动自由度的时候，$C_{v,m}$=2.5 R，水是三原子分子，$C_{v,m}$=3 R
2 mol 水分子内能为 2*3 RT，2 mol 氢分子内能为 2*2.5 RT，1mol 的氧分子内能为 2.5 RT，
所以内能增加为：
(2*2.5 RT +2.5 RT−2*3 RT)/(2*3 RT) = 25%

9-3 一能量为 10^{12}ev（1.602×10^{-19}J）的宇宙射线粒子射入一氖管中，氖管中含有氖气 0.1 mol。如果宇宙射线粒子的能量全部被氖气分子所吸收，问氖气温度将升高多少开？
分析：氖气是单原子气体，可知其内能与温度关系式。增加的内能与温度升高有直接关系。
解：因为，内能 $\Delta U= vC_{v,m}\mathrm{d}T$ ，氖是单原子气体，$C_{v,m}$=1.5R
1.602×10^{-19}=0.1*1.5*8.31*ΔT
ΔT= 1.28×10^{-7} K

9-4 2.0g 的氢气装在容积为 20L 的容器内，当容器内压强为 1.20×10^5Pa 时，氢分子的平均动能是多少？总内能是多少?
分析：氢分子是双原子分子，1mol 分子的平均平动动能是 3RT/2，总内能是平动动能与转动动能之和。由理想气体状态方程可知状态参量的变换。
解：2.0 g 氢气是 1mol 分子。
由 $pV = vRT$，可知 $T= pV/vR$
T=(1.20×10^5) *(20×10^{-3})/(1*8.31)=288.8 K

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{3}{2}kT = 5.98\times10^{-21}\,\mathrm{J}$$

$$U = v*\frac{5}{2}RT = 6.0\times10^3\,\mathrm{J}$$

9-5 飞机在起飞前，舱中的压力计指示为 1.0 大气压，温度为 27℃；起飞后，压力计指示为 0.80 大气压，温度仍为 27℃，试计算飞机距离的高度。（空气的平均摩尔质量 M=29×10^{-3} kg/mol。）
分析：玻尔兹曼分布重力场分布，压强和高度相关。
解：

$$p = p_0\mathrm{e}^{-\frac{\mu g}{RT}z} \quad \mu = 29\times10^{-3}$$

$$z = \ln(\frac{p}{p_0})/(-\frac{\mu g}{RT}) = 1957(m)$$

9-6 我国的拉萨市海拔约为 3600 m，设大气温度处处相同，（1）当海平面上的气压为 1 大气压时，求拉萨的气压（温度按 27℃）。（2）若某人在海平面上每分钟呼吸 17 次，问他在拉萨应呼吸多少次，才能吸入同样质量的空气？
分析：玻尔兹曼重力场分布，粒子数密度与之有关。需要吸引相同的粒子数。
解：
（1）由玻尔兹曼分布，拉萨的气压为

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT}z} = p_0 \exp\left(\frac{29\times10^{-3}\times9.8\times3600}{8.31\times300}\right) = 0.66p_0 = 0.66atm$$

（2）pV=vRT，温度相同

$p_1V_1 = p_2V_2 \quad p_0(17V_0) = pV$

$V = \dfrac{17V_0 p_0}{p} \approx 26V_0$，26次/分

9-7　试说明下列各函数的物理意义[$f(v)$是麦克斯韦速度率分布函数]：

(1) $f(v)$　(2) $f(v)dv$　(3) $Nf(v)dv$　(4) $\int_{v1}^{v2} f(v)dv$

(5) $\int_{v1}^{v2} Nf(v)dv$　(6) $\int_{v1}^{v2} vf(v)dv$　(7) $\int_{v1}^{v2} Nvf(v)dv$

分析：各公式有的可对应某些物理量，有意义。

解：（1）$f(v)$为平衡态下的气体分子出现在 v 附近，单位速率间隔中的几率，或者说其速率在 v 附近单位速率间隔中的分子数占总分子数的比率。

（2）$f(v)\mathrm{d}v$ 为平衡态下的气体分子出现在速率 $v \sim v+\mathrm{d}v$ 速率间隔中的分子数占总分子数的百分比。

（3）$Nf(v)\mathrm{d}v$ 为平衡态下的气体分子出现在速率 $v \sim v+\mathrm{d}v$ 速率间隔中的总分子数。

（4）$\int_{v_1}^{v_2} f(v)du$ 为平衡态下分子速率在 v_1 到 v_2 速率间隔中分子数占总分子数的百分比。

（5）$\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv$ 为平衡态下分子速率在 v_1 到 v_2 速率间隔中的总分子数。

（6）$\int_{v_1}^{v_2} vf(v)dv$ 无确定的物理意义。

（7）$\int_{v1}^{v2} Nvf(v)dv$ 是平衡态下分子速率在 v_1 到 v_2 速率间隔中分子的速率求和。

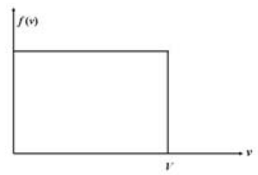
9-8 设 N 个粒子系统速率在 $v \sim vdv$ 内的分子数为

$$\begin{cases} dN_u = kdv(V \geq v \geq 0, k\text{为常数}) \\ \qquad dN_u = 0(v > V) \end{cases}$$

（1）试画出速率分布函数图；（2）用 N 和 V 定出常数 k；（3）用 V 表示 $\bar{v}$ 和 v_{rms}；

分析：先确定归一化分布函数，然后计算相应的统计量

解：（1）$f(v)\mathrm{d}v=\mathrm{d}N_u/N$



(2)归一化分布，有

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = \int_0^{v} \frac{k}{N}dv = 1$$

$\dfrac{kV}{N} = 1$　即　$k = \dfrac{N}{V}$

（3）平均速率和方均根速率为：

$$\overline{v}=\int_0^{\infty}vf(v)dv=\int_0^{V}v\frac{k}{N}dv$$

$$\overline{v}=\frac{V^2}{2N}\frac{N}{V}=\frac{V}{2}$$

$$\overline{v^2}=\int_0^{\infty}v^2f(v)dv=\int_0^{V}v^2\frac{k}{N}dv$$

$$v_{rms}=\sqrt{\overline{v}^2}=\sqrt{\frac{V^3}{3N}\frac{N}{V}}=\frac{V}{\sqrt{3}}$$

9-9 导体中自由电子的运动，可看作类似于气体分子的运动（故称电子气），设导体中共有 N 个自由电子，其中电子的最大速率为 u_F（称为费米速率），电子在之间运动的概率为

$$\frac{dN}{N}=\begin{cases}\dfrac{4\pi A}{N}u^2du & (0\le u\le u_F)\\ 0 & (u\ge u_F)\end{cases}$$

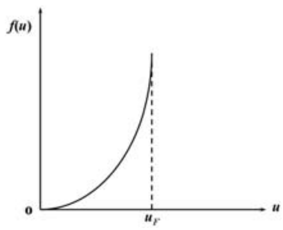
(1) 画出分布函数图；

(2) 用 N、u_F 定出常数 A；

(3) 求电子气中的电子的平均平动动能 $\overline{\varepsilon_\kappa}$ 。

分析；归一化分布条件求，用归一化分布函数求统计平均值。

解：（1）$f(u)$如下图所示



（2）归一化分布条件

$$\int_0^{\infty}f(u)du=\int_0^{u_F}4\pi Au^2du/N=1,$$

即 $\dfrac{4\pi \mathrm{A}}{N}\dfrac{1}{3}u_F^3=1,\quad A=\dfrac{3N}{4\pi u_F^3}$

（3）电子气的归一化分布函数为

$$f(u)=\begin{cases}\dfrac{4\pi Au^2}{N}du=\dfrac{3u^2}{u_F^3}\\ 0\end{cases}$$

电子气的速率平方的平均为

$$\overline{u^2}=\int_0^{u_F}u^2f(u)du=\int_0^{u_F}\frac{3}{u_F^3}u^4du=\frac{3}{5}u_F^2$$

$$\overline{\varepsilon}_k=\frac{1}{2}m\overline{u^2}=\frac{3}{10}mu_F^2$$

9-10 在麦克斯韦速率分布中求速率在 v_p~v_p+0.01v_p 之间的分子数占总分子数的百分比。
分析：因为间隔很小，可以认为在这个间隔内函数是不变的。
解：麦克思维速率分布为：

$$\boldsymbol{f(v)}=4\pi\left(\frac{\boldsymbol{m}}{2\pi\boldsymbol{kT}}\right)^{3/2}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{m}\boldsymbol{v}^2/2\boldsymbol{kT}}\boldsymbol{v}^2$$

总分子数的百分比为 $f(v_p)*(0.01v_p)$

带入，$v_p=(2kT/m)^{1/2}$，可得速率在 v_p~v_p+0.01v_p 之间的分子数占总分子数的百分比：

$$f(v_p)dv_p=\frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-1}0.01=0.83\%$$

9-11 设 H_2 的温度为 300℃，求速度大小在 3000 m/s 到 3010 m/s 之间的分子数 ΔN_1 与速度大小在 v_p 到 v_p+10m/s 之间的分子数之 ΔN_2 比。
分析：间隔很小，可以当做不变。本题仍然计算的是速率分布，温度确定后，速率分布确定了。
解：间隔很小，可以认为间隔内分布函数不变。$\Delta N \approx Nf(v)\mathrm{d}v$

$$v_p^2=\frac{2kT}{m}=\frac{2RT}{\mu}=\frac{2\times8.31\times573}{2\times10^{-3}}=4.76\times10^6(m^2/s^2)$$

且

$$\boldsymbol{f(v)}=4\pi\left(\frac{\boldsymbol{m}}{2\pi\boldsymbol{kT}}\right)^{3/2}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{m}\boldsymbol{v}^2/2\boldsymbol{kT}}\boldsymbol{v}^2$$

因为间隔都相同，所以是 2 个分布函数之比，

$$\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{m}\boldsymbol{v}^2/2\boldsymbol{kT}}\boldsymbol{v}^2=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{v}^2/\boldsymbol{v}_p^2}\boldsymbol{v}^2$$

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}=\frac{e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2}{e^{-\frac{mv_p^2}{2kT}}v_p^2}=e^{-\frac{v^2-v_p^2}{v_p^2}}\cdot\left(\frac{v}{v_p}\right)^2=e^{-\frac{3^2-4.76}{4.76}}*\frac{3^2}{4.76}$$

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}=0.78$$

9-12 若一宇宙飞船的体积 V=27 m^3，舱内压强 p_0=1 大气压，温度取与 $\bar{v}=300m/s$ 相应的值，在飞行中被一陨石击中而在壁上形成一面积为 1 cm^2 的小孔，以致舱内空气逸出，问经过多久舱内压力将降到 $p=\frac{1}{e}p_0$？设温度不变。
分析：先要根据平均速度计算温度。外界是真空，空气可以认为是单向流出。对于小孔泄流问题，有专门的公式。
解：t 时刻舱内压强为 p，舱外真空
小孔泄流，dt 时间间隔内，舱内净减小分子数

$$-dN=\frac{n\bar{v}}{4}\cdot s\cdot dt$$

又因为 $p=nkT$，有 $dp=kTdn+nkdT$
温度不变，上式简化为 $dp=kTdn$
$n=N/V$，船舱体积不变，有 $dn=dN/V$
简化为：$dp=kTdN/V$
综合上述公式有

$$dp=-kT\frac{n\bar{v}s\mathrm{d}t}{4V}=\frac{-p\bar{v}s\mathrm{d}t}{4V}$$

分离变量，积分有

$$\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p}=\int_0^t-\frac{\bar{v}s}{4V}\mathrm{d}t$$

$$\ln\left(p/p_0\right)=-\frac{\bar{v}st}{4V}\quad 即\ p=p_0e^{-\frac{\bar{v}st}{4V}}$$

可见，压强欲降到 p_0/e，时间为

$$t=\frac{4V}{\bar{v}s}$$

将相关参数带入，可计算出时间 $t=3600\ \mathrm{s}=1\ \mathrm{h}$

9-13 处在热平衡态中的气体分子，由于频繁碰撞，分子沿 x 方向的分速度 v_x 取值随机，但气体分子数沿 v_x 的分布与伽耳顿板中小球按 x 的分布一样，具有高斯分布。又由能量均分定理知 $\frac{1}{2}m\overline{v_x^2}=\frac{1}{2}kT$，试推得气体分子按速度分量 v_x 的分布律是 $f(v_x)=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}e^{-mv_x^2/2kT}$

分析：套用伽耳顿板的归一化分布函数，写出 v_x 的归一化分布函数，然后把能量均分定理结果带入，可求得常数。

解：气体分子分速度 v_x 的归一分布为高斯分布，即

$$f(v_x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-v_x^2/2\sigma}$$

根据题意有

$$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2}=\frac{1}{2}kT\quad 即\quad \overline{v_x^2}=\frac{kT}{m}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}v_x^2f(v_x)dv_x=\int_{-\infty}^{+\infty}v_x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-v_x^2/2\sigma}dv_x=\frac{kT}{m}$$

应用高斯积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

可得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=2\left[xe^{-x^2}\Big|_0^{\infty}+2\int_0^{\infty}x^2e^{-x^2}dx\right]=2\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

做变换

$$y^2=v_x^2/2\sigma\quad ,\quad dv_x=\sqrt{2\sigma}dy$$

带入能量均分定理结果，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f(v_x) dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-v_x^2/2\sigma} dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sigma y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sqrt{2\sigma} e^{-y^2} dy = \frac{kT}{m}$$

$$\sigma = \frac{kT}{m}$$

$$f\left(v_x\right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\kappa T}} e^{-m v_x{}^2/2\kappa T}$$

9-14 已知 基本高斯积分公式

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad 或 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

若记 $I_n = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^n dx$ 验证 $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-\frac{1}{2}}$、$I_1 = \frac{1}{2} a^{-1}$ 以及递推公式 $I_n = \frac{(n-1)}{2a} I_{n-2}$

分析：分步积分。

答：做变换，$a^{1/2} x = y$，有 $dx = a^{-1/2} dy$

将基本积分结果带入，因此有

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = a^{-1/2} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-1/2}$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx^2 = \frac{a^{-1}}{2} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy^2 = \frac{a^{-1}}{2}$$

已知

$$I_k = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^k dx = e^{-ax^2} x^{k+1} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x d\left(x^k e^{-ax^2}\right)$$

即 $I_k = -\int_0^{\infty} x\left[k x^{k-1} e^{-ax^2} - x^k (2axe^{-ax^2})\right] dx = -kI_k + 2aI_{k+2}$

即 $I_{k+2} = (k+1) I_k / 2a$

重新取序列，令 $n = k+2$

显然有 $I_n = (n-1) I_{n-2} / 2a$

9-15 若气体密度的数量级为 1 kg/m^3，液体密度数量级是 10^3 kg/m^3 估算气体分子间平均距离是液体分子间平均距离的多少倍。

分析：可以采用立方模型，体积是距离的立方。

答：密度 $\rho = m/V = m/d^3$，因此相同质量，气体体积是液体的 1000 倍，距离是 10 倍。

9-16 在统计问题中，将相互独立的事件称为相乘事件，这是因为互相独立的事件同时发生的概率为各个时间发生概率的乘积。例如，同时掷两组硬币，则两组硬币均出现“数字”一面的概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$。两相加事件指的是互相排斥的事件，即或出现此事件、或出现彼事件。例如，掷体筛子，出现 1 点或 3 点的概率应为 $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$。根据以上定义，试分析麦氏速度分布律（9.7）式、麦氏速率分布律（9.8）式和麦氏速度分量分布规律（例 9.2①式）之间的关系。

分析：本题从概率概率分布的独立性与相关性讨论麦氏速度分布与各分量以及速率的关系。

答：各个方向的速度是独立无关的，所以概率是乘法的关系，速度分量是速度分布的开立方；而考

虑速率分布时，各个方向不是独立无关的，相同的速率应该具有相同的概率，速度的平方才没有方向性，和速率平方具有相同的概率分布特点，所以从速度推速率分布时采用速率平方。

9-17 由力学可知，声波在气体中传播的速度（声速）$v=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$。其中 p 是气体压强，ρ 是传播介质的密度。假设声波传播可视为绝热过程，试证明声速 $v=\sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}}$。（其中 γ 为比热容比）。

分析：从绝热方程出发，考虑微分，另外，质量不变。

答：因为质量不变，所以对 $m=\rho V$ 求全微分，有 $\rho\mathrm{d}V=-V\mathrm{d}\rho$，即 $\mathrm{d}\rho/\rho=-\mathrm{d}V/V$

对绝热方程 pV^{γ}=常数求全微分有 $V^{\gamma}\mathrm{d}p=-\gamma pV^{\gamma-1}dV$，两侧同除以 pV^{γ}，有

$\mathrm{d}p/p=-\gamma\,\mathrm{d}V/V$，即有 $\mathrm{d}p/p=\gamma\mathrm{d}\rho/\rho$，

带入声速公式可证。

9-18 利用玻尔兹曼原理（9.28）式说明熵的可加性。

分析：不同事件的几率，不同事件的熵要对应。

答：设各独立事件的几率分别为 Ω_1、Ω_2、$\Omega_3\cdots$，则共同出现的概率为 $\Omega=\Omega_1\Omega_2\Omega_3\cdots$，按照玻尔兹曼原理，$S=k\ln\Omega$，$S=k\ln\Omega_1+k\ln\Omega_2+k\ln\Omega_3+\cdots=S_1+S_2+S_3+\cdots$，满足熵的可加性。