2006 年高等代数与解析几何期中试题

姓名___________ 学号___________

1. (20分) 设$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 为数域$\mathbf{P}$ 上二阶方阵, 定义$\mathbf{P}^{2\times 2}$ 上变换σ 如下:

$$\sigma(X) = AX - XA, \quad X \in \mathbf{P}^{2\times 2}.$$

1) 证明σ 为线性变换;

2) 求σ 在基E_{11},E_{12},E_{21},E_{22} 下的矩阵, 其中$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) 证明σ 必以0 为特征值, 并求出0 作为σ 的特征值的重数.

2. （20分）设线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 & = & 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad - 2x_4 + x_5 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 + x_5 & = & 0 \end{cases}$$

的解空间为V. 试求V 在$\mathbf{R}^5$（标准度量）中的正交补$V^{\perp}$ 的一组标准正交基.

3. (20分) 设V 为数域$\mathbf{P}$ 上n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 为V 上线性变换. 已知$\mathcal{A}^3 = \mathcal{A}^2$ 但$\mathcal{A} \neq \mathcal{A}^2$. 试问是否存在$V$ 的一组基使$\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为对角矩阵?

4. (20分) 设A 为n 阶正定实对称矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, β 为n 维欧几里得空间$\mathbf{R}^n$ (标准度量)中的$n+1$ 个向量. 若已知

(1) $\alpha_i \neq 0 \ (i=1,2,\cdots,n)$;

(2) $\alpha_i' A \alpha_j = 0 \ (i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,n)$;

(3) β 与α_i 正交$(i=1,2,\cdots,n)$.

证明$\beta = 0$.

5. （20 分）在实n 维线性空间$\mathbf{R}^n$ 中是否存在线性变换$\mathcal{A}$ 满足

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{I} = 0?$$

其中$\mathcal{I}$ 为单位变换. 证明你的结论.

附加题

设V 为n 维Euclid 空间. 证明: 在V 中至多存在$n+1$ 个向量使得其中任何两个向量的内积都小于0.