第二次数学分析考前辅导讲义-部分题目解答

回放：
https://www.bilibili.com/video/BV1ye4y1g7Zj/?share_source=copy_web&vd_source=272210ed5d46dc6fa9d209ec742a51bf

第一部分 连续函数的基本概念和基本性质

例2．设函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续,对任意$x \in \mathbb{R}$,有$f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$

证明：$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上是常数.

证明：由条件知$f(x)$为偶函数，由$f(x)$连续性知只需要
证明$f(x)$在$[0,+\infty)$上为常数

任取 $x \in [0, \frac{1}{2}]$

令 $x_1 = x$　$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}$　$(n=1,2,\cdots)$

用单调有界定理不难证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$

从而 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = f(\frac{1}{2})$

类似可证 $x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$ 时 $f(x) = f(\frac{1}{2})$

从而 $x \geq 0$ 时 $f(x) \equiv f(\frac{1}{2})$

即 $x \in \mathbb{R}$ 时 $f(x) \equiv f(\frac{1}{2})$ 为常数！

例4．*设函数$f(x)$在$(0, +\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1) - f(x)] = 0$

求证:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$$

△注：在证明此题之外，我们还希望对此题的一种“错误解答”进行一定讨论，详见文档最后的附加部分。

证明：根据条件，$\forall \varepsilon>0$ $\exists A>0$，当 $x>M$ 时 $-\varepsilon<f(x+1)-f(x)<\varepsilon$

设 $L=[x]-A$

则有 L 个不等式：
$$-\varepsilon<f(x)-f(x-1)<\varepsilon$$
$$-\varepsilon<f(x-1)-f(x-2)<\varepsilon$$
$$\vdots$$
$$-\varepsilon<f(x-L+1)-f(x-L)<\varepsilon$$

于是 $-L\varepsilon<f(x)-f(x-L)<L\varepsilon$

设 $M=\max\limits_{x\in[A,A+1]}|f(x)|$

则 $|f(x)|\leqslant|f(x)-f(x-L)|+|f(x-L)|\leqslant L\varepsilon+M<x\varepsilon+M$

取 $A'=\max\{A,\frac{M}{\varepsilon}\}$

于是 $x>A'$ 时 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\varepsilon+\frac{M}{x}<2\varepsilon$

第二部分 导数的概念和计算

例1. 已知$y=(\arcsin x)^2$ 求$y^{(n)}(0)$.

解：$y'=2\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (1-x^2)(y')^2=4y$

两边再求导：$(1-x^2)(2y'\cdot y'')-2x(y')^2=4y'$

于是由 y' 不恒为0知 $xy'+(x^2-1)y''=-2$

由Leibniz公式，在上式两边求n阶导得

$$xy^{(n+1)}+ny^{(n)}+(x^2-1)y^{(n+2)}-2xny^{(n+1)}+2C_n^2y''(0)=0$$

代入 $x=0$ 得 $n^2y^{(n)}(0)=y^{(n+2)}(0)$ $(n\geqslant1)$

结合 $y'(0)=0$ $y''(0)=2$ 知 $y^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n\text{为奇数}\\ 2[(n-2)!!]^2 & n\text{为偶数}\end{cases}$

remark. 最后的递推要细心

例6.* 设函数$f(x)$在$x=0$处连续，并且有$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=A$ $(A\in\mathbb{R})$.

求证：$f'(0)$存在且等于A

△注：在裴礼文《数学分析中的典型问题与方法》中，有一道有关于此题的一个证明过程的思考题，由于篇幅较长，放到文档最后的附加部分。

证明：先考虑 $A=0$ 时：

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ 当 $|x|<\delta$ 且 $x\neq 0$ 时，有 $|f(2x)-f(x)|<\varepsilon|x|$

进而有 $\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right|<\varepsilon\frac{|x|}{2}$

$\left|f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{4}\right)\right|<\varepsilon\frac{|x|}{4}$

$\vdots$

$\left|f\left(\frac{x}{2^n}\right)-f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right|<\varepsilon\cdot\frac{|x|}{2^{n+1}}$

因此 $\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right|<\varepsilon\left(\frac{|x|}{2}+\frac{|x|}{4}+\cdots+\frac{|x|}{2^{n+1}}\right)<\varepsilon|x|$

取 $n\to\infty$ 知 $|f(x)-f(0)|<\varepsilon|x|$

所以 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$

当 $A\neq 0$ 时，令 $g(x)=f(x)-Ax$

则 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(2x)-g(x)}{x}=0$

所以由上面的分析知 $g'(0)$ 存在且 $g'(0)=0$

于是 $f'(0)=A$. 证毕

第三部分 微分中值定理及其简单应用

例1. 求 $f(x)=x^2-4x\sin x-4\cos x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 中的极值点.

解：$f'(x)=2x-4x\cos x$ $\quad f''(x)=2-4\cos x+4x\sin x$

由 $f'(x)=0$ 解得 $x_1=0$ $\quad x_2=\frac{\pi}{3}$ $\quad x_3=-\frac{\pi}{3}$

计算得 $f''(0)<0$ $\quad f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=f''\left(-\frac{\pi}{3}\right)>0$

故 0 为 $f(x)$ 的极大值点；$\frac{\pi}{3}$ 与 $-\frac{\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 的极小值点

例3. (1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且至少有2个不同零点，证明对于任何 $\lambda\in\mathbb{R}$,都存在 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得 $\lambda f(\xi)+f'(\xi)=0$

(2)**设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上三次可导，且至少有5个不同零点，证明 $h=f+6f'+12f''+8f'''$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上至少有2个不同零点.

(2) 提示：令 $g(x)=e^{\frac{x}{2}}f(x)$.依次研究 g,g',g'',g''' 的零点即可.

例4. 设函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$可导，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.证明存在实数$\xi$,

使得 $$f(\xi)f'(\xi)=\xi$$

提示：存在$A>0$,使得对任意满足$|x|\geqslant A$的x都有$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<\dfrac{1}{2}$.

令$g(x)=f^2(x)-x^2$，研究$g(x)$在$[-A,A]$上的极值点即可.

例5. 设函数f,g,h均在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，证明存在$\xi\in(a,b)$

使得 $$\begin{vmatrix} f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}=0$$

提示：令$p(x)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$

注意到$p(a)=p(b)=0$且 $p'(x)=\begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$

第四部分 洛必达法则与泰勒公式

例2. 设$f(x)$在$[a,b]$上二次可导，$f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$.

(1)证明存在$\xi\in(a,b)$，使得$|f''(\xi)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

(2)*如果再设$f(x)$在(a,b)上非常数，证明存在$\xi\in(a,b)$使得(1)中的不等式取得严格的大于号.

证明 (1) 略

(2) 反证法. 若 $\forall x\in(a,b)$ $|f''(x)|\leqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

则 $|f'(x)|=|f'(x)-f'(\frac{a+b}{2})|$

$=|f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})|$

$\leqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)||x-\frac{a+b}{2}|$ …①

令 $g(x)=f(x)+\frac{2}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|(x-\frac{a+b}{2})^2$

于是由①知 $(a,\frac{a+b}{2})$ 上 $g'(x)\leqslant 0$

从而 $g(a)\leqslant g(\frac{a+b}{2}) \Rightarrow f(a)+\frac{|f(b)-f(a)|}{2}\leqslant f(\frac{a+b}{2})$ …②

同理可证 $f(\frac{a+b}{2})\leqslant f(b)-\frac{|f(b)-f(a)|}{2}$ …③

由②③知 $f(b)-f(a)\geqslant|f(b)-f(a)|$

$\Rightarrow f(b)-f(a)=|f(b)-f(a)|$

从而 ②必取等号

于是 $(a,\frac{a+b}{2})$ 上 $g'(x)=0$

可见 $(a,\frac{a+b}{2})$ 上 $f'(x)=\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)||x-\frac{a+b}{2}|$ …④

同理可证 $(\frac{a+b}{2},b)$ 上④式亦成立

若 $f(a)=f(b)$ 则 (a,b) 上 $f'(x)=0$，与 $f(x)$ 非常数矛盾!

故 $f(a)\neq f(b)$ 这样由④知 $f'_+(\frac{a+b}{2})\neq f'_-(\frac{a+b}{2})$，这又与

$f'(\frac{a+b}{2})$ 存在性矛盾.

于是假设不成立，原命题得证

例3. 设$f(x)$在$[a,b]$两次可导，且$f'(a)=f'(b)=0$，证明存在$\xi\in(a,b)$,使得 $$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$$

证明：由 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\cdot\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\frac{a-b}{2}+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$

于是 $|f(b)-f(a)|=\frac{(b-a)^2}{8}|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|$

$\le\frac{(b-a)^2}{8}\left(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\right)$

$\le\frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$

其中 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$

即证结论

例4．设$f(x)$在$(0,\delta)$上可导，常数$\lambda>0$

(1)若$\lim\limits_{x\to0^+}(f(x)-\lambda xf'(x))=0$,证明$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$;

(2)若$\lim\limits_{x\to0^+}(f(x)+\lambda xf'(x))=0$,是否一定有$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$?证明你的结论.

证明：(1) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^{-\frac{1}{\lambda}}f(x)}{x^{-\frac{1}{\lambda}}}$

$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{\lambda}x^{-\frac{1}{\lambda}-1}f(x)+x^{-\frac{1}{\lambda}}f'(x)}{-\frac{1}{\lambda}x^{-\frac{1}{\lambda}-1}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}(f(x)-\lambda xf'(x))=0$

(2) 不一定，例如 $f(x)=x^{-\frac{1}{\lambda}}$

则 $f(x)+\lambda xf'(x)=0$

但 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

例5.* 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上三次可导，且$f(x)$与$f'''(x)$均有界，证明：$f''(x)$在$(-\infty,+\infty)$上也有界.

证明：设在$(-\infty,+\infty)$上，$|f(x)|<M_1$　$|f'''(x)|<M_2$

任取$x\in R$，由泰勒公式

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$$

两式相加，整理得

$$f''(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$$

所以$|f''(x)|\leq 4M_1+\frac{1}{3}M_2$

即$f''(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界

例6．设函数$f(x)$在$[a,b]$两次连续可导，记M_0为$|f(x)|$在$[a,b]$上的最大值，M_1为$|f'(x)|$在$[a,b]$上的最大值，M_2为$|f''(x)|$在$[a,b]$上的最大值.

(1)证明：$\forall x\in[a,b]$,成立$|f'(x)|\leqslant\dfrac{2}{b-a}M_0+\dfrac{(x-a)^2+(x-b)^2}{2(b-a)}M_2$

(2)***证明：若$(b-a)^2M_2\geqslant 4M_0$,则$M_1\leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$

证 (1) 由泰勒公式，有

$$
\begin{aligned}
f(a) &= f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a-x)^2,\\
f(b) &= f(x)+f'(x)(b-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-x)^2,
\end{aligned}
$$

其中ξ_1介于a, x之间，ξ_2介于x, b之间. 后式减前式，得

$$
f(b)-f(a)=f'(x)(b-a)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-x)^2-\frac{f''(\xi_1)}{2}(a-x)^2.
$$

于是

$$
f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+\frac{f''(\xi_1)(x-a)^2-f''(\xi_2)(x-b)^2}{2(b-a)}.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
|f'(x)| &\leqslant \frac{|f(a)|+|f(b)|}{b-a}+\frac{|f''(\xi_1)|(x-a)^2+|f''(\xi_2)|(x-b)^2}{2(b-a)}\\
&\leqslant \frac{2}{b-a}M_0+\frac{(x-a)^2+(x-b)^2}{2(b-a)}M_2.
\end{aligned}
$$

(2) 注意到对任意$x\in[a,b]$, 有

$$
(b-a)^2-(x-a)^2-(x-b)^2=-2ab-2x^2+2ax+2bx=2(b-x)(x-a)\geqslant 0,
$$

结合(1)就得到

$$
|f'(x)|\leqslant \frac{2}{b-a}M_0+\frac{b-a}{2}M_2. \qquad (*)
$$

若$M_2=0$, 则由$(b-a)^2M_2\geqslant 4M_0$知$M_0=0$, 从而$f(x)\equiv 0$, 此时$M_1=0=2\sqrt{M_0M_2}$, 命题自然成立. 下设$M_2>0$. 由$f(x)$在$[a,b]$两次可导知$|f'(x)|$在$[a,b]$连续，故$|f'(x)|$在$[a,b]$取得最值. 设$u\in[a,b]$是$|f'(x)|$在$[a,b]$上的一个最大值点，由$(b-a)^2M_2\geqslant 4M_0$知$b-a\geqslant 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, 于是存在$[c,d]\subseteq[a,b]$, 使得$u\in[c,d]$且$d-c=2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$. 在上面的$(*)$式中用$u$代替$x$, 用$[c,d]$代替$[a,b]$, 就得到

$$
|f'(u)|\leqslant \frac{2}{d-c}\sup_{x\in[c,d]}|f(x)|+\frac{d-c}{2}\sup_{x\in[c,d]}|f''(x)|.
$$

因此，

$$
M_1=|f'(u)|\leqslant \frac{2}{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}}M_0+\frac{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}}{2}M_2=2\sqrt{M_0M_2}.
$$

□

remark. 此处尤应感谢李军老师

例7. 记$P_n(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}$，证明对于$\forall x\in\mathbb{R}$,

有$\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=e^x$.

证明：$\forall x\in R$，由泰勒公式知

$$e^x=P_n(x)+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad 0<\theta<1$$

从而 $$|e^x-P_n(x)|=\frac{e^{\theta x}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\leqslant\frac{e^{x}|x|^{n+1}}{(n+1)!}\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=e^x$

第五部分 函数的凹凸性

例2. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上凸，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在，证明$f(x)\equiv$常数.

证明：设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

$\forall x\in R$，$t>0$，由上凸性知

$$f(x-t)+f(x+t)\leqslant 2f(x)\quad ---- ①$$

$$f(x)\leqslant 2f(x+t)-f(x+2t)\quad --- ②$$

对① 取 $t\to+\infty$ 知 $f(x)\geqslant A$

② 取 $t\to+\infty$ 知 $f(x)\leqslant A$

所以 $f(x)\equiv A$

例3. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$是下凸且可导的，证明$f(x+f'(x))\geqslant f(x)$.

思路：存在介于ξ介于x与$x+f'(x)$,使得$f(x+f'(x))-f(x)=f'(x)f'(\xi)$

根据$f'(x)$的正负分类讨论，结合f'的单调性可得$f'(x)f'(\xi)\geqslant 0$.

附加部分 一些思考

1．实际上，第一部分的例1是21级的一道月考题，当时有一些同学给出了以下的证明过程：

证明：由$Stolz$定理得对任意$x\in(0,1]$,成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+n)}{x+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+n)-f(x+n-1)}{(x+n)-(x+n-1)}=0$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ □

上述证明是有问题的，这是因为过程中从“$\forall x\in(0,1],\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x+n)}{x+n}=0$”

到“$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$”的推导并不合理。

换句话说，对于$[0,+\infty)$上的连续函数$g(x)$,

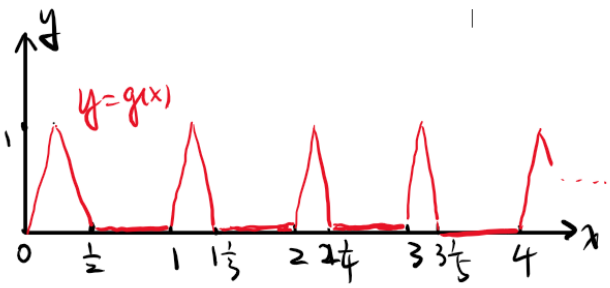
如果对于任意$x\in(0,1]$,都有 $\lim\limits_{n\to\infty}g(x+n)=0$ ①

不一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ ②

现在，请试着举出一个满足①但不满足②的连续函数$g(x)$.

1. 取$g(x)=\begin{cases}1-\frac{2}{n+2}\left|x-n-\frac{1}{2n+4}\right| & 当\ x\in[n,n+\frac{1}{n+2}]\ (n\in N)\\ 0 & 其他情形\end{cases}$

则$g(x)$在$[0,+\infty)$上图像为



于是$\forall x\in(0,1]$, 成立$\lim\limits_{n\to\infty}g(x+n)=0$

但 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\neq0$

2.(来源于裴礼文《数学分析中的典型问题与方法》)对**第二部分例1**的如下证法给出评论，认为正确请说明理由，认为不正确也说明理由.

证明： 由条件知$f(2x)-f(x)=Ax+o(x)$

$$\Rightarrow \text{对于}\forall k\in\mathbb{N},\text{成立} f\left(\frac{x}{2^k}\right)-f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)=A\frac{x}{2^{k+1}}+o\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{x}{2^k}\right)-f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right)=A\sum_{k=0}^{n}\frac{x}{2^{k+1}}+o\left(o\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow f(x)-f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)=Ax\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+o\left(x\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)$$

$$\xRightarrow{\text{令}n\to\infty} f(x)-f(0)=Ax+o(x)$$

$$\Rightarrow f'(0)=A$$ □

分析：关键在于，**本解法中倒数第三行到倒数第二行的推导中认为**

$$\lim_{n\to\infty}o\left(x\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)=o(x) \qquad (\star)$$

实际上，在$x\to 0$意义下，$o\left(x\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)$与$o(x)$并无区别，**因此$(\star)$其实是想表达：**

“如果一列函数$\{f_n(x)\}$均满足$f_n(x)=o(x)$ (当$x\to 0$)

那么这一列函数关于n的极限函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$也满足$f(x)=o(x)$ (当$x\to 0$).”

然而，这并不一定成立，例如我们可以取$f_n(x)=\arctan(nx)$.

则对于每个n，容易看出$f_n(x)=o(x)$ (当$x\to 0$).

但$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{\pi}{2} & x>0\end{cases}$ 显然不满足$f(x)=o(x)$ (当$x\to 0$).

这里关键在于$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}$未必与$\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_n(x)}{x}$相等，即两个极限不能交换次序.

类似的极限换序问题会在数分下册中进一步研究.

这里主要想以原题目的一种不合理解法说明$o(x)$表示一种趋势（极限结果），而不是一个唯一确定的函数，如果涉及一系列“x的高阶无穷小量”,盲目使用$o(x)$可能会导致混淆错乱.