有理函数的积分

数学分析I

第30讲

December 19, 2022

- 有理函数的积分法是将有理函数写成多项式与简单分式之和，再分别进行积分.
- 要掌握计算(iii)和(iv)这两类简单分式的不定积分的思路.
- 待定系数法是将真分式分解为简单分式之和的基本方法.
- 如例1和例2所示，实际中将真分式分解为简单分式之和，常将待定系数法与赋值法结合来做.
- 从例2的解法可见，可以赋复数值.
- 某些特殊的有理函数积分，用换元积分法能减少计算量.

我们称形如

$$R(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$$

的函数为有理函数，其中$F(x)$和$G(x)$都是多项式而且$G(x)$的次数不小于1. 如果$F(x)$ 的次数不小于$G(x)$的次数，则称$R(x)$为假分式，否则称为真分式.

对于一般的有理分式，按多项式除法可以写成

$$\frac{F(x)}{G(x)} = h(x) + \frac{f(x)}{g(x)}.$$

其中$f(x)$, $g(x)$和$h(x)$都是多项式，$f(x)$与$g(x)$是既约的，$f(x)$的次数小于$g(x)$的次数，$g(x)$的最高次项的系数为1. 多项式$h(x)$的积分容易按公式求得，对于有理函数的积分，我们只要讨论真分式的积分就可以了.

我们称下列四类分式为简单分式, 也有时称为部分分式:

- (i) $\dfrac{a}{x-\alpha}$;
- (ii) $\dfrac{a}{(x-\alpha)^n}, \quad n = 2, 3, \cdots;$
- (iii) $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q}, \quad p^2-4q<0;$
- (iv) $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}, \quad p^2-4q<0, n=2,3,\cdots.$

这四类简单分式的积分可以计算出来, 例如, (i)和(ii)的积分都是容易的.

- (i) $\displaystyle\int \frac{a}{x-\alpha}\mathrm{d}x = a\ln|x-\alpha| + C;$
- (ii) $\displaystyle\int \frac{a}{(x-\alpha)^n}\mathrm{d}x = -\frac{a}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}} + C, \quad n = 2, 3, \cdots;$

对于(iii), 将它改写成

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{a}{2}\cdot\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\cdot\frac{1}{x^2+px+q}. \tag{1}$$

因为

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \ln\left|x^2+px+q\right| + C, \tag{2}$$

又因$p^2-4q<0$, 由上一节补充积分表中的公式(i)得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C, \tag{3}$$

所以由(1)–(3)得到

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2b-ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

至于(iv), 与(1)式类似地有分解式

$$\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}=\frac{a}{2}\cdot\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\frac{1}{(x^2+px+q)^n}. \qquad (4)$$

由于$n\geqslant 2$, 所以对(4)式右端第1项有

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x=\frac{-1}{(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}}+C.$$

对于(4)式右端第2项, 令$t=x+\frac{p}{2}$, $d=\frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}$, 类似于(3)式可得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+d^2)^n}. \qquad (5)$$

(5)式右端的积分恰为上一节例5中计算过的积分, 所以(iv)的积分问题也就解决了.

设多项式$g(x)$的次数为n. 由代数基本定理, 实系数不可约多项式最多是二次多项式, 从而任何真分式的分母$g(x)$可以分解成

$$g(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\alpha_i)^{n_i}\prod_{j=1}^{t}(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}, \quad p_j^2-4q_j<0, \tag{6}$$

这里

$$\sum_{i=1}^{s} n_i + 2\sum_{j=1}^{t} m_j = n.$$

按照代数理论, 任何有理真分式$\dfrac{f(x)}{g(x)}$可以分解为一些简单分式之和:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{a_{i1}}{x-\alpha_i}+\frac{a_{i2}}{(x-\alpha_i)^2}+\cdots+\frac{a_{in_i}}{(x-\alpha_i)^{n_i}}\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{t}\left[\frac{b_{j1}x+c_{j1}}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{b_{j2}x+c_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2}+\cdots+\frac{b_{jm_j}x+c_{jm_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}}\right], \tag{7}$$

其中a_{ik}, b_{jk}, c_{jk}都是待定的实常数, 其总个数恰好是n, 它们可以通过取x的n个特殊值或对比多项式系数而得到n个方程式的线性方程组来解得.

这样只要把(7)式右端的每一项简单分式的积分计算出来, 就可以完成这个真分式的积分. 因此从理论上来说, 每一个有理函数的积分是可以算出来的.

将真分式分解为简单分式之和时，尽管使用待定系数法就可以，但常常采用赋值法与待定系数法相结合的做法.

例 1

计算积分

$$I = \int \frac{x+3}{x^3 - 3x^2 + 4} \mathrm{d}x.$$

$$x + 3 = a(x-2)^2 + b(x+1)(x-2) + c(x+1). \tag{9}$$

注意, (9)式关于所有x值是恒等式. 令$x = -1$, 由(9)式得到$2 = 9a$, $a = \frac{2}{9}$. 再于(9)式中令$x = 2$, 又得$5 = 3c$, $c = \frac{5}{3}$. 最后比较(9)式两端x^2项的系数得$a + b = 0$. 将a的值代入并解得$b = -\frac{2}{9}$.

例题

例 2

求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.

$$1=(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

令$x=0$, 得$1=B+D$; 令$x=\mathrm{i}$, 得$1=\sqrt{2}(C-A)+\sqrt{2}(B-D)\mathrm{i}$, 从而$C-A=\frac{\sqrt{2}}{2}$且$B-D=0$; 比较$x^3$项系数，得$A+C=0$. 由线性方程组

$$\begin{cases} A+C=0 \\ C-A=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ B+D=1 \\ B-D=0 \end{cases}$$

解得$A=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $D=\frac{1}{2}$.

例题

例 3

求$\displaystyle\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

设

$$\begin{aligned}&\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\\ =\ &\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}+\frac{ex+f}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

结合赋值法可得$a=0$, $b=3$, $c=0$, $d=1$, $e=2$, $f=4$, 进而得

$$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=-\frac{3}{x+1}+3\arctan x+\frac{2x-1}{x^2+1}+C.$$

例3确定系数的具体计算过程

$$\begin{aligned} & 4x^4+4x^3+16x^2+12x+8 \\ = \; & a(x+1)(x^2+1)^2+b(x^2+1)^2+(cx+d)(x+1)^2(x^2+1) \\ & +(ex+f)(x+1)^2. \qquad (*) \end{aligned}$$

令$x=-1$, 由$(*)$式可得$b=3$; 令$x=i$, 由$(*)$式可得$-e+fi=-2+4i$, 故$e=2$, $f=4$.

比较$(*)$式两边x^5的系数，可得$a+c=0$; 比较$(*)$式两边常数项系数，可得$a+d=1$; 令$x=1$, 由$(*)$式可得$a+c+d=1$. 于是得到方程组

$$\begin{cases} a+c=0, \\ a+d=1, \\ a+c+d=1. \end{cases}$$

由此解得$a=0$, $c=0$, $d=1$.