预备知识

数学分析I

第2讲

September 28, 2022

在中学数学中, 已经较为全面地接触到实数及其运算性质, 序性质等. 现在, 我们把它们开列于下并不加证明地补充一些进一步的性质, 以作为本书内容的出发点.

实数的四则运算性质

在中学数学中, 已经较为全面地接触到实数及其运算性质, 序性质等. 现在, 我们把它们开列于下并不加证明地补充一些进一步的性质, 以作为本书内容的出发点.

实数的四则运算封闭性

任何两个实数之间可以进行加, 减, 乘, 除(除数不为0)四则运算, 运算的结果和, 差, 积, 商仍为实数.

实数的四则运算性质

在中学数学中，已经较为全面地接触到实数及其运算性质，序性质等. 现在，我们把它们开列于下并不加证明地补充一些进一步的性质，以作为本书内容的出发点.

实数的四则运算封闭性

任何两个实数之间可以进行加，减，乘，除(除数不为0)四则运算，运算的结果和，差，积，商仍为实数.

实际上，减法和除法分别是加法和乘法的逆运算，因此只要给出加法和乘法就可以了. 加法和乘法满足交换律、结合律和分配律. 将来学过抽象代数后，将可知道$\mathbb{R}$是一个域.

实数是一个域

- 对任意实数a和b, $a+b$与ab仍为实数.
- 对任意实数a和b, 有$a+b=b+a$.
- 对任意实数a, b和c, 有$(a+b)+c=a+(b+c)$.
- 存在实数0，使得对任意实数a, $0+a=a$.
- 对任意实数a, 存在实数$-a$, 使得$a+(-a)=0$.
- 对任意实数a和b, 有$ab=ba$.
- 对任意实数a, b和c, 有$(ab)c=a(bc)$.
- 存在实数$1\neq 0$, 使得对任意实数a, 有$1a=a$.
- 对任意实数$a\neq 0$, 存在实数$\frac{1}{a}$, 使得$a\cdot(\frac{1}{a})=1$.
- 对任意实数a, b和c, 有$a(b+c)=ab+ac$.

三岐性

对于任何两个实数a和b, 下列三种关系

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

恰有一个成立.

实数的序的性质

三歧性

对于任何两个实数a和b, 下列三种关系

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

恰有一个成立.

传递性

对任何实数a, b, c, 如果$a < b$且$b < c$, 那么$a < c$.

实数的序的性质

三岐性

对于任何两个实数a和b, 下列三种关系

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

恰有一个成立.

传递性

对任何实数a, b, c, 如果$a < b$且$b < c$, 那么$a < c$.

对于任何实数a, b, c, 若$a \leqslant b$, 则$a + c \leqslant b + c$; 若$a \leqslant b$, $c \geqslant 0$, 则$ac \leqslant bc$. 当条件为严格不等式时, 结论也是严格不等式.

不等式在数学分析中有着广泛的应用，在此我们介绍一些常见的不等式.

绝对值不等式

- 对任意实数a和b, 有

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|,$$

其中等式成立当且仅当$ab \geqslant 0$.

不等式在数学分析中有着广泛的应用，在此我们介绍一些常见的不等式.

绝对值不等式

- 对任意实数a和b, 有

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|,$$

其中等式成立当且仅当$ab \geqslant 0$.

- 对任意实数a和b, 有

$$|a+b| \geqslant \big||a| - |b|\big|.$$

不等式在数学分析中有着广泛的应用，在此我们介绍一些常见的不等式.

绝对值不等式

- 对任意实数a和b, 有
$$|a+b| \leqslant |a|+|b|,$$
其中等式成立当且仅当$ab \geqslant 0$.
- 对任意实数a和b, 有
$$|a+b| \geqslant \big||a|-|b|\big|.$$
- 对任意n个实数$x_1, x_2, \ldots, x_n$, 有
$$|x_1+x_2+\ldots+x_n| \leqslant |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|.$$

伯努利不等式

$$(1+\lambda)^n \geqslant 1+n\lambda, \quad \lambda > -1$$

其中等式成立当且仅当$n=1$或$\lambda=0$.

伯努利不等式

$$(1+\lambda)^n \geqslant 1+n\lambda,\quad \lambda > -1$$

其中等式成立当且仅当$n=1$或$\lambda=0$.

均值不等式

设$a_k \geqslant 0$, $k=1,2,\ldots,n$, 则a_1, a_2, ..., a_n的算术均值大于等于它们的几何均值，即

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

其中等式成立当且仅当$a_1=a_2=\ldots=a_n$.

伯努利不等式

$$(1+\lambda)^n \geqslant 1+n\lambda, \quad \lambda > -1$$

其中等式成立当且仅当$n=1$或$\lambda=0$.

均值不等式

设$a_k \geqslant 0$, $k=1,2,\ldots,n$, 则a_1, a_2, ..., a_n的算术均值大于等于它们的几何均值，即

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

其中等式成立当且仅当$a_1=a_2=\ldots=a_n$.

均值不等式是最常用的不等式之一，作为练习，用均值不等式证明

$$(1)\ n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n; \qquad (2)\ n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n.$$

柯西不等式

对任意实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$和$b_1, b_2, \cdots, b_n$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

柯西不等式

对任意实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$和$b_1, b_2, \cdots, b_n$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

用柯西不等式证明对任意实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$

柯西不等式

对任意实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$和$b_1, b_2, \cdots, b_n$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

用柯西不等式证明对任意实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$

用柯西不等式证明对任意实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$和任意正数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^2\right).$$

如果两个整数p, q的最大公因数是1，我们称p, q是互质或互素的；有理数则是所有形如$\dfrac{p}{q}$的实数，其中p, q是两个互素的整数，且$q > 0$.

如果两个整数p,q的最大公因数是1，我们称p,q是互质或互素的；有理数则是所有形如$\dfrac{p}{q}$的实数，其中p,q是两个互素的整数，且$q>0$.

不是有理数的实数称为无理数. 一个实数r是有理数当且仅当r是有限小数或无限循环小数；一个实数s是无理数当且仅当s是无限不循环小数.

如果两个整数p, q的最大公因数是1，我们称p, q是互质或互素的；有理数则是所有形如$\dfrac{p}{q}$的实数，其中p, q是两个互素的整数，且$q > 0$.

不是有理数的实数称为无理数．一个实数r是有理数当且仅当r是有限小数或无限循环小数；一个实数s是无理数当且仅当s是无限不循环小数.

我们知道一些无理数的例子，如：$\sqrt{2}$, $\log_2 3$, e, π等，其中用反证法不难证明$\sqrt{2}$和$\log_2 3$是无理数，而证明e和π是无理数就要用到微积分了.

有理数和无理数的概念

如果两个整数p, q的最大公因数是1，我们称p, q是互质或互素的；有理数则是所有形如$\dfrac{p}{q}$的实数，其中p, q是两个互素的整数，且$q > 0$.

不是有理数的实数称为无理数. 一个实数r是有理数当且仅当r是有限小数或无限循环小数；一个实数s是无理数当且仅当s是无限不循环小数.

我们知道一些无理数的例子，如：$\sqrt{2}$, $\log_2 3$, e, π等，其中用反证法不难证明$\sqrt{2}$和$\log_2 3$是无理数，而证明e和π是无理数就要用到微积分了.

当大家学习了多项式的有关知识之后，可以尝试解决下面的问题：“$\cos(r\pi)$(其中r是有理数)为有理数的充要条件是什么？”

有理数和无理数在实数系中的稠密性.

任何两个不同的实数之间既有有理数又有无理数.

有理数和无理数在实数系中的稠密性.

任何两个不同的实数之间既有有理数又有无理数.

关于有理数的稠密性, 我们将来主要按以下两种方式来理解(无理数稠密性的理解方式是类似的):
(i) 对任意实数a, b, 如果$a < b$, 则必定存在一个有理数r, 使得$a < r < b$;
(ii) 对任意实数a和任意$\varepsilon > 0$, 都必定存在一个有理数r, 使得$|a - r| < \varepsilon$.

有理数和无理数在实数系中的稠密性.

任何两个不同的实数之间既有有理数又有无理数.

关于有理数的稠密性, 我们将来主要按以下两种方式来理解(无理数稠密性的理解方式是类似的):
(i) 对任意实数a, b, 如果$a < b$, 则必定存在一个有理数r, 使得$a < r < b$;
(ii) 对任意实数a和任意$\varepsilon > 0$, 都必定存在一个有理数r, 使得$|a - r| < \varepsilon$.

稠密性的一般定义及其含义以后再讲, 目前如上理解即可. 例如, 说$\{\sin n | n \in \mathbb{Z}\}$在$(-1, 1)$中稠密, 是指对任意$a, b \in (-1, 1)$, $a < b$, 存在$n \in \mathbb{Z}$使得$a < \sin n < b$.

实数的理论也有它的公理. 除了上述域的公理和序的性质，实数还有一个基本的公理是确界原理（在6.1节介绍和讨论）.

公理(确界原理) 有上界的非空数集必有上确界.

实数的理论也有它的公理. 除了上述域的公理和序的性质，实数还有一个基本的公理是确界原理（在6.1节介绍和讨论）.

公理(确界原理) 有上界的非空数集必有上确界.

有了域的公理、序的性质和确界原理作为实数理论的公理，阿基米德公理实际上是一个定理.

定理(阿基米德公理) 若a和b都是正实数, 则必存在$n \in \mathbb{N}^*$, 使得$na > b$.

由阿基米德公理可知，既没有最大的正有理数，也没有最小的正有理数.

实数的理论也有它的公理. 除了上述域的公理和序的性质，实数还有一个基本的公理是确界原理（在6.1节介绍和讨论）.
公理(确界原理) 有上界的非空数集必有上确界.

有了域的公理、序的性质和确界原理作为实数理论的公理，阿基米德公理实际上是一个定理.
定理(阿基米德公理) 若a和b都是正实数, 则必存在$n \in \mathbb{N}^*$, 使得$na > b$.
由阿基米德公理可知，既没有最大的正有理数，也没有最小的正有理数.

使用阿基米德公理证明有理数的稠密性

任取(a, b)，则$b - a > 0$, 于是由阿基米德公理，存在正整数n使得$n(b - a) > 1$. 再由阿基米德公理，存在正整数m_1和m_2使得$m_1 > na$且$m_2 > -na$. 从而$-m_2 < na < m_1$. 因此有整数$m \in (-m_2, m_1]$使得$m - 1 \leqslant na < m$. 于是有$na < m \leqslant 1 + na < nb$. 这样就得到$\dfrac{m}{n} \in (a, b)$.

一些数学符号

所有自然数的集合, 所有整数的集合, 所有有理数的集合和所有实数的集合在教材中用空心体分别记为$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$和$\mathbb{R}$，板书时我们也用空心体来写.

一些数学符号

所有自然数的集合, 所有整数的集合, 所有有理数的集合和所有实数的集合在教材中用空心体分别记为$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$和$\mathbb{R}$，板书时我们也用空心体来写.

注意同一个数学术语、同一个数学符号在不同的书中有可能含义不同. 比如，中学课本中的增函数与数学分析教材中的单调递增函数不是一回事，中学课本中的增函数实际上是严格递增函数；再如，在一些书中 “$f^2(x)$” 表示 “$[f(x)]^2$”, 在另外某些书中 “$f^2(x)$” 表示 “$f(f(x))$”.

一些数学符号

所有自然数的集合, 所有整数的集合, 所有有理数的集合和所有实数的集合在教材中用空心体分别记为$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$和$\mathbb{R}$，板书时我们也用空心体来写.

注意同一个数学术语、同一个数学符号在不同的书中有可能含义不同. 比如，中学课本中的增函数与数学分析教材中的单调递增函数不是一回事，中学课本中的增函数实际上是严格递增函数；再如，在一些书中"$f^2(x)$"表示"$[f(x)]^2$", 在另外某些书中"$f^2(x)$"表示"$f(f(x))$".

我们有时用逻辑符号"$\forall$"表示"任意", 用"$\exists$"表示"存在".

在本课程中我们不使用集合的补集的记号, 作为替代, 我们引进差集的概念和记号.

差集的定义

设A, B是两个集合, 我们定义A与B的差集$A\setminus B$如下:

$$x\in A\setminus B \text{ 当且仅当} x\in A \text{ 但} x\notin B.$$

差集

在本课程中我们不使用集合的补集的记号, 作为替代, 我们引进差集的概念和记号.

差集的定义

设A, B是两个集合, 我们定义A与B的差集$A \setminus B$如下:

$$x \in A \setminus B \text{ 当且仅当} x \in A \text{ 但} x \notin B.$$

注意到在上面的定义中并不要求B是A的子集, 例如, $\mathbb{Z} \setminus (-\infty, 0] = \mathbb{N}^*$. 当我们需要用到补集时, 我们也利用差集来写. 例如, $(0, 1)$在$\mathbb{R}$中的补集$(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$记为$\mathbb{R} \setminus (0, 1)$.

实数轴

实数可以和一条直线上的点一一对应，规定了原点，正方向和单位长度的直线叫数轴，或实数轴. 今后我们经常把实数轴上的点和实数等同起来，不加区分.

实数轴

实数可以和一条直线上的点一一对应, 规定了原点, 正方向和单位长度的直线叫数轴, 或实数轴. 今后我们经常把实数轴上的点和实数等同起来, 不加区分.

无穷大记号

我们用记号$-\infty$和$+\infty$分别表示负无穷大和正无穷大. 要强调的是, $-\infty$和$+\infty$都只是记号, 不能把它们看成实数. 另外, 还有一个记号是∞. 这个记号有时是$+\infty$的简写, 有时表示不区分正负的无穷大, 需要从上下文来判定它的确切含义.

区间

在讨论多元函数之前, 我们涉及的集合主要是实数集合的子集, 简称为数集. 一组常见的数集是区间.

区间

在讨论多元函数之前, 我们涉及的集合主要是实数集合的子集, 简称为数集. 一组常见的数集是区间.

设a和b是两个实数且$a < b$. 将集合$\{x|a < x < b\}$, $\{x|a \leqslant x < b\}$, $\{x|a < x \leqslant b\}$, $\{x|a \leqslant x \leqslant b\}$分别记为$(a, b)$, $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$并称之为区间. (a, b)称为开区间, $[a, b]$称为闭区间, $[a, b)$和$(a, b]$称为半开半闭区间.

在讨论多元函数之前, 我们涉及的集合主要是实数集合的子集, 简称为数集. 一组常见的数集是区间.

设a和b是两个实数且$a < b$. 将集合$\{x|a < x < b\}$, $\{x|a \leqslant x < b\}$, $\{x|a < x \leqslant b\}$, $\{x|a \leqslant x \leqslant b\}$分别记为$(a, b)$, $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$并称之为区间. (a, b)称为开区间, $[a, b]$称为闭区间, $[a, b)$和$(a, b]$称为半开半闭区间.

我们可以把前面的区间概念推广到无界区间$(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$和$(-\infty, +\infty)$, 分别表示集合$\{x|x < b\}, \{x|x \leqslant b\}, \{x|x > a\}, \{x|x \geqslant a\}$和实数集$\mathbb{R}$.

邻域的定义

在本课程中, 有一个和区间相关的极其重要的概念, 称为邻域. 设x_0是一个实数, $\delta > 0$, 我们称开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$为$x_0$的$\delta$邻域, 记为$B_\delta(x_0)$.

邻域的定义

在本课程中, 有一个和区间相关的极其重要的概念, 称为邻域. 设x_0是一个实数, $\delta > 0$, 我们称开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$为$x_0$的$\delta$邻域, 记为$B_\delta(x_0)$.

有时候, 我们不强调δ的大小, 就简称为x_0的邻域, 记为$B(x_0)$. 如果从x_0的邻域中去掉x_0自身, 得到集合$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, 则称为$x_0$的空心邻域, 记为$\overset{\circ}{B}_\delta(x_0)$.

数集的最大值、最小值

如果一个数集S有最小值m或最大值M, 则它们可分别记为

$$m = \min S, \quad M = \max S.$$

其中max是maximum的简写, 而min是minimum的简写.

数集的最大值、最小值

如果一个数集S有最小值m或最大值M, 则它们可分别记为

$$m = \min S, \quad M = \max S.$$

其中max是maximum的简写, 而min是minimum的简写.

当S为有穷集时, S既有最小值又有最大值.但当S为无穷集时, 就不一定有最小值和最大值了. 例如, $\min\{1,2,3\} = 1$, $\max\{1,2,3\} = 3$; $\min \mathbb{N} = 0$; $\max(0,1] = 1$等等. 但是$\max \mathbb{N}$和$\min(0,1]$没有意义, 因为它们不存在. 所以$\min S$有两层意义: 一是表示S的最小值存在; 二是表示这个最小值. $\max S$的意义也与此类似.

如果一个数集S有最小值m或最大值M, 则它们可分别记为

$$m = \min S, \quad M = \max S.$$

其中max是maximum的简写, 而min是minimum的简写.

当S为有穷集时, S既有最小值又有最大值.但当S为无穷集时, 就不一定有最小值和最大值了. 例如, $\min\{1,2,3\} = 1$, $\max\{1,2,3\} = 3$; $\min \mathbb{N} = 0$; $\max(0,1] = 1$等等. 但是$\max \mathbb{N}$和$\min(0,1]$没有意义, 因为它们不存在. 所以$\min S$有两层意义: 一是表示S的最小值存在; 二是表示这个最小值. $\max S$的意义也与此类似.

集S有最小值m是指$m \in S$且对任何$x \in S$, 都有$x \geqslant m$.
集S有最小值是指存在$m \in S$, 使得对任何$x \in S$, 都有$x \geqslant m$.

有界集的定义

设S是一个非空数集.

- 如果有一个实数M, 使得对任意$x \in S$, 都成立$x \leqslant M$, 则称S是有上界的, 并称M是S的一个上界. 例如, 无界区间$(-\infty, 0)$是有上界的. 若M为S的一个上界, 则比M大的数都是S的上界，因此，一个有上界的集合S有无穷多个上界.

有界集的定义

设S是一个非空数集.

- 如果有一个实数M, 使得对任意$x \in S$, 都成立$x \leqslant M$, 则称S是有上界的, 并称M是S的一个上界. 例如, 无界区间$(-\infty, 0)$是有上界的. 若M为S的一个上界, 则比M大的数都是S的上界，因此，一个有上界的集合S有无穷多个上界.
- 同理, 如果存在实数m使得: 对任意$x \in S$, 都成立$x \geqslant m$, 则称S是有下界的, 并称m是S的一个下界. 例如, 自然数集$\mathbb{N}$是有下界的.
- 既有上界又有下界的集合称为有界集. 例如区间$(0, 1]$是有界集, $\{\frac{\sin x}{x} | x > 0\}$是有界集.

无界集的定义

设S是一个非空数集.

- 若对任何$M \in \mathbb{R}$, 都存在$x_M \in S$, 使得$x_M > M$, 则称集S是无上界的.

无界集的定义

设S是一个非空数集.

- 若对任何$M \in \mathbb{R}$, 都存在$x_M \in S$, 使得$x_M > M$, 则称集S是无上界的.
- 若对任何$m \in \mathbb{R}$, 都存在$x_m \in S$, 使得$x_m < m$, 则称集S是无下界的.

无界集的定义

设S是一个非空数集.

- 若对任何$M \in \mathbb{R}$, 都存在$x_M \in S$, 使得$x_M > M$, 则称集S是无上界的.
- 若对任何$m \in \mathbb{R}$, 都存在$x_m \in S$, 使得$x_m < m$, 则称集S是无下界的.
- 如果S没有上界, 或者没有下界, 称S是无界集.

无界集的定义

设S是一个非空数集.

- 若对任何$M \in \mathbb{R}$, 都存在$x_M \in S$, 使得$x_M > M$, 则称集S是无上界的.
- 若对任何$m \in \mathbb{R}$, 都存在$x_m \in S$, 使得$x_m < m$, 则称集S是无下界的.
- 如果S没有上界, 或者没有下界, 称S是无界集.

例如, 自然数集$\mathbb{N}$是无上界集, $\mathbb{Z}$是既无上界又无下界的无界集.

性质 1

设S是一个非空数集, 则

(1) S无上界的充分必要条件是: 对任意实数M, 都存在$x_0 \in S$, 使得$x_0 > M$;

(2) S无下界的充分必要条件是: 对任意实数m, 都存在$x_0 \in S$, 使得$x_0 < m$;

(3) S是无界集的充分必要条件是: 对任意实数M, 都存在$x_0 \in S$, 使得$|x_0| > M$.

有界集的充要条件

性质1′

非空数集S为有界集的充分必要条件是存在$M > 0$, 使对所有$x \in S$, 都有$|x| \leqslant M$.

性质1′

非空数集S为有界集的充分必要条件是存在$M > 0$, 使对所有$x \in S$, 都有$|x| \leqslant M$.

证明.

设S为有界集, 于是存在下界m_1和上界m_2使对所有$x \in S$, 都有

$$m_1 \leqslant x \leqslant m_2.$$

令$M = \max\{|m_1|, |m_2|\}$, 则对所有$x \in S$, 都有$|x| \leqslant M$.

性质1′

非空数集S为有界集的充分必要条件是存在$M>0$, 使对所有$x\in S$, 都有$|x|\leqslant M$.

证明.

设S为有界集, 于是存在下界m_1和上界m_2使对所有$x\in S$, 都有

$$m_1\leqslant x\leqslant m_2.$$

令$M=\max\{|m_1|,|m_2|\}$, 则对所有$x\in S$, 都有$|x|\leqslant M$.
反之, 若存在$M>0$, 使对所有$x\in S$, 都有

$$|x|\leqslant M,$$

则$-M\leqslant x\leqslant M$, 即$-M$为S的一个下界而M为S的一个上界, 从而S为有界集.

例 1

证明集合$A = \left\{ \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} | x \in \mathbb{R} \right\}$有界.

两个例子

例 1

证明集合$A=\left\{\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}|x\in\mathbb{R}\right\}$有界.

证明.

因为$\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}\right|\leqslant\dfrac{x^2+1}{2x^2+1}\leqslant 1$，所以集合$A$有界.

例 1

证明集合$A=\left\{\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}|x\in\mathbb{R}\right\}$有界.

证明.

因为$\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}\right|\leqslant\dfrac{x^2+1}{2x^2+1}\leqslant 1$，所以集合$A$有界.

例 2

证明集合$B=\left\{\dfrac{n+1}{\sqrt{n}-1}|n\in\mathbb{N}^*,n\geqslant 2\right\}$无界.

例 1

证明集合$A=\left\{\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}|x\in\mathbb{R}\right\}$有界.

证明.

因为$\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}\right|\leqslant\dfrac{x^2+1}{2x^2+1}\leqslant 1$，所以集合$A$有界.

例 2

证明集合$B=\left\{\dfrac{n+1}{\sqrt{n}-1}|n\in\mathbb{N}^*,n\geqslant 2\right\}$无界.

证明.

对任意$M>0$, 令$n=\left[M^2\right]+2$, 则$\dfrac{n+1}{\sqrt{n}-1}>\dfrac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}>M$，故$B$无界.

定义 1

设X是一个非空数集, 对任意$x \in X$, 按照确定的法则f, 都有唯一确定的实数y与它对应, 则该对应关系叫做集合X上的一个函数. 记作

$$y = f(x), \quad x \in X,$$

其中x称为自变量, 数集X称为该函数的定义域. 而所有函数值构成的集合

$$\{f(x) | x \in X\}$$

称为该函数的值域, 记为$f(X)$.

定义 1

设X是一个非空数集, 对任意$x \in X$, 按照确定的法则f, 都有唯一确定的实数y与它对应, 则该对应关系叫做集合X上的一个函数. 记作

$$y = f(x), \quad x \in X,$$

其中x称为自变量, 数集X称为该函数的定义域. 而所有函数值构成的集合

$$\{f(x) | x \in X\}$$

称为该函数的值域, 记为$f(X)$.

一个自变量的函数称为一元函数, 具有两个及两个以上自变量的函数称为多元函数.

简单地说, 函数就是由定义域到它的值域的一个单值对应. 两个函数相同的充分必要条件是这两个函数的定义域相同且对应关系也相同. 例如$f(x)=x^2, Dom(f)=(-\infty,+\infty)$和$g(x)=x^2,\ Dom(g)=[0,+\infty)$就是两个不同的函数.

简单地说, 函数就是由定义域到它的值域的一个单值对应. 两个函数相同的充分必要条件是这两个函数的定义域相同且对应关系也相同. 例如$f(x) = x^2, Dom(f) = (-\infty, +\infty)$和$g(x) = x^2,\ Dom(g) = [0, +\infty)$就是两个不同的函数.

但显然二者之间又有着密切的联系, 函数$y = g(x)$称为$y = f(x)$在$[0, +\infty)$上的限制, 而函数$y = f(x)$称为$y = g(x)$在$(-\infty, +\infty)$上的延拓.

简单地说, 函数就是由定义域到它的值域的一个单值对应. 两个函数相同的充分必要条件是这两个函数的定义域相同且对应关系也相同. 例如$f(x) = x^2, Dom(f) = (-\infty, +\infty)$和$g(x) = x^2$, $Dom(g) = [0, +\infty)$就是两个不同的函数.

但显然二者之间又有着密切的联系, 函数$y = g(x)$称为$y = f(x)$在$[0, +\infty)$上的限制, 而函数$y = f(x)$称为$y = g(x)$在$(-\infty, +\infty)$上的延拓.

一般地, 若有$y = F(x)$, $Dom(F) = X_1$, $y = f(x)$, $Dom(f) = X_2$, $X_2 \subseteq X_1$且在X_2上, $F(x) \equiv f(x)$, 则称$F(x)$为$f(x)$在X_1上的延拓, 称$f(x)$为$F(x)$在X_2 上的限制.

单射

设函数$f(x)$在数集X上有定义. 如果对于X中的任意两个不同的数x_1, x_2, 都成立$f(x_1) \neq f(x_2)$, 我们称函数f在X上是一个单射.

单射

设函数$f(x)$在数集X上有定义. 如果对于X中的任意两个不同的数x_1, x_2, 都成立$f(x_1) \neq f(x_2)$, 我们称函数f在X上是一个单射.

例如，令$f(n) = n - (-1)^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$, 那么函数$f$在$\mathbb{N}^*$上是一个单射. $g(x) = x^m \ (m \in \mathbb{N}^*)$在$\mathbb{R}$上是一个单射当且仅当$m$是奇数.

设S是一个数集，β是一个实数，“β是S的最小上界”包含两层意义: (1) β是S的上界, 即对任意$x \in S$, 都成立$x \leqslant \beta$; (2) 比β小的实数都不是S的上界.
请你用(1)中后一句话的方式来陈述(2).

命题“如果$(-\infty, +\infty)$上的函数$f(x)$是单射, 则$f(x)$是$(-\infty, +\infty)$上的单调函数”成立吗？说明理由.

思考题

命题“如果数集S既无上界也无下界，且对任意满足$a < b$的实数$a, b \in S$, 都存在$c \in S$, 使得$a < c < b$, 则S在$\mathbb{R}$中稠密”成立吗？说明理由.

单调函数

设函数$f(x)$在数集X上有定义. 如果对于X中的任意两个点x_1, x_2, 当$x_1 < x_2$时, 总成立

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称$f(x)$在数集X上是递增函数(递减函数).

设函数$f(x)$在数集X上有定义. 如果对于X中的任意两个点x_1, x_2, 当$x_1 < x_2$时, 总成立

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称$f(x)$在数集X上是递增函数(递减函数).

假如在上式中严格不等式总成立, 即$f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$, 则称$f(x)$在数集X上是严格递增函数(严格递减函数).

设函数$f(x)$在数集X上有定义. 如果对于X中的任意两个点x_1, x_2, 当$x_1 < x_2$时, 总成立

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称$f(x)$在数集X上是递增函数(递减函数).

假如在上式中严格不等式总成立, 即$f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$, 则称$f(x)$在数集X上是严格递增函数(严格递减函数).

递增函数和递减函数统称为单调函数, 严格递增函数和严格递减函数统称为严格单调函数.

例如$\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上是严格递增函数, 在$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$上是严格递减函数. 而常数函数$f(x)=1$在$(-\infty, \infty)$既是递增函数, 也是递减函数, 但不是严格递增或严格递减函数.

例如$\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上是严格递增函数，在$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$上是严格递减函数. 而常数函数$f(x) = 1$在$(-\infty, \infty)$既是递增函数，也是递减函数，但不是严格递增或严格递减函数.

大多数时候，我们只在区间上讨论函数的单调性. 我们容易知道，区间I上的严格单调函数是I上的单射，反之未必成立. 试举一个$\mathbb{R}$上的单射f使得f不是$\mathbb{R}$上的严格单调函数.

如果函数$f(x)$的定义域是关于原点对称的区间, 或是关于原点对称的更一般的数集X, 且对任意$x \in X$, 都成立

$$f(-x) = -f(x) \quad (f(-x) = f(x)),$$

则称$f(x)$是奇(偶)函数.

如果函数$f(x)$的定义域是关于原点对称的区间, 或是关于原点对称的更一般的数集X, 且对任意$x \in X$, 都成立

$$f(-x) = -f(x) \quad (f(-x) = f(x)),$$

则称$f(x)$是奇(偶)函数.

对于自然数n, 函数$y = x^n$在n是奇数时是奇函数, 在n是偶数时是偶函数. 这正是奇函数和偶函数的名称来源. 三角函数$y = \sin x$和$y = \tan x$都是奇函数, 而$y = \cos x$是偶函数.

如果函数$f(x)$的定义域是关于原点对称的区间, 或是关于原点对称的更一般的数集X, 且对任意$x \in X$, 都成立

$$f(-x) = -f(x) \quad (f(-x) = f(x)),$$

则称$f(x)$是奇(偶)函数.

对于自然数n, 函数$y = x^n$在n是奇数时是奇函数, 在n是偶数时是偶函数. 这正是奇函数和偶函数的名称来源. 三角函数$y = \sin x$和$y = \tan x$都是奇函数, 而$y = \cos x$是偶函数.

易见, 奇函数的图形关于原点中心对称, 而偶函数的图形关于y轴对称.

周期函数

对于函数$f(x)$, 如果能找到非零实数T, 满足: 当函数在点x有定义时, 一定在$x \pm T$也有定义, 并且$f(x+T)=f(x)$, 则称$f(x)$是一个周期函数, 并称T是$f(x)$的一个周期. 如果$f(x)$的所有正周期中有最小值T_0, 我们称T_0为$f(x)$的最小正周期.

周期函数

对于函数$f(x)$, 如果能找到非零实数T, 满足: 当函数在点x有定义时, 一定在$x \pm T$也有定义, 并且$f(x+T)=f(x)$, 则称$f(x)$是一个周期函数, 并称T是$f(x)$的一个周期. 如果$f(x)$的所有正周期中有最小值T_0, 我们称T_0为$f(x)$的最小正周期.

我们熟悉的周期函数如$y=\sin x$和$y=\cos x$, 对任意整数k, $2k\pi$是它们的周期, 而2π是它们的最小正周期. $y=\tan x, y=\cot x$也是周期函数, 它们的最小正周期是π. 常数函数$f(x)=1$也是周期函数, 任何非零实数都是它的周期, 但它没有最小正周期.

有界函数与无界函数

如果函数$f(x)$的值域有上界(下界), 称函数$f(x)$有上界(下界); 如果函数$f(x)$的值域是有界集, 称函数$f(x)$为有界函数; 反过来, 如果函数$f(x)$的值域是无界集, 则称$f(x)$为无界函数.

有界函数与无界函数

如果函数$f(x)$的值域有上界(下界), 称函数$f(x)$有上界(下界); 如果函数$f(x)$的值域是有界集, 称函数$f(x)$为有界函数; 反过来, 如果函数$f(x)$的值域是无界集, 则称$f(x)$为无界函数.

由性质1′知, 函数$f(x)$为X上的有界函数的充分必要条件是存在$M \geqslant 0$, 使得对任意$x \in X$, 都成立$|f(x)| \leqslant M$. 此时称M是$f(x)$的一个界.

有界函数与无界函数

如果函数$f(x)$的值域有上界(下界), 称函数$f(x)$有上界(下界); 如果函数$f(x)$的值域是有界集, 称函数$f(x)$为有界函数; 反过来, 如果函数$f(x)$的值域是无界集, 则称$f(x)$为无界函数.

由性质1′知, 函数$f(x)$为X上的有界函数的充分必要条件是存在$M \geqslant 0$, 使得对任意$x \in X$, 都成立$|f(x)| \leqslant M$. 此时称M是$f(x)$的一个界.

例如, 三角函数$y = \sin x$和$y = \cos x$都是有界函数; 幂函数$y = x^2$是无界函数, 但它是有下界的函数; 对数函数$y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$是无界函数, 它既没有上界也没有下界.

反函数

设函数$y = f(x)$的定义域是X, 值域是Y, 并且$f(x)$是X上的单射. 于是, 对任意$y \in Y$, 有唯一的$x \in X$与它对应. 这样的情形下, 我们称f是从X到Y的一个一一对应.

反函数

设函数$y = f(x)$的定义域是X, 值域是Y, 并且$f(x)$是X上的单射. 于是, 对任意$y \in Y$, 有唯一的$x \in X$与它对应. 这样的情形下, 我们称f是从X到Y的一个一一对应.

此时, 我们可以定义一个从Y到X的函数f^{-1}为: 对任意$y \in Y$,

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

我们称f^{-1}是f的反函数. 显然, f也是f^{-1}的反函数, 或者说, f和f^{-1}互为反函数. 为方便起见, 我们交换x与y, 写成$y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$.

设函数$y = f(x)$的定义域是X, 值域是Y, 并且$f(x)$是X上的单射. 于是, 对任意$y \in Y$, 有唯一的$x \in X$与它对应. 这样的情形下, 我们称f是从X到Y的一个一一对应.

此时, 我们可以定义一个从Y到X的函数f^{-1}为: 对任意$y \in Y$,

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

我们称f^{-1}是f的反函数. 显然, f也是f^{-1}的反函数, 或者说, f和f^{-1}互为反函数. 为方便起见, 我们交换x与y, 写成$y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$.

例如, 对数函数$y = \log_a x$与指数函数$y = a^x$互为反函数. 从中学的数学知识里我们知道, 如果$y = f(x)$和$y = g(x)$互为反函数, 那么它们的图象关于直线$y = x$对称. 需要强调的是, $y = f(x)$与$x = f^{-1}(y)$在同一个坐标系中的图象其实是重合的.

严格单调函数有反函数

假如$y = f(x)$是定义在区间I上的严格单调函数, 那么它在I上是单射. 如果记$f(x)$的值域为Y, 则f是从I到Y的一一对应, 因此存在它的反函数$y = f^{-1}(x)$ $(x \in Y)$. 并且，严格单调函数的反函数也是严格单调的.

假如$y = f(x)$是定义在区间I上的严格单调函数, 那么它在I上是单射. 如果记$f(x)$的值域为Y, 则f是从I到Y的一一对应, 因此存在它的反函数$y = f^{-1}(x)$ $(x \in Y)$. 并且，严格单调函数的反函数也是严格单调的.

当$f(x)$不是严格单调函数时, 也可能有反函数. 例如函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数}, \\ -x, & \text{当 } x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

它不但不是严格单调函数, 而且它的图形也无法明确画出来. 但是, $f(x)$有反函数而且反函数就是它自身, 即$f^{-1}(x) = f(x)$.

复合函数

设函数$y = f(u)$的定义域是U, 函数$u = g(x)$的定义域是X. 对于$x \in X$, 如果$u = g(x) \in U$, 我们可以按如下对应法则确定唯一的实数y:

$$y = f(g(x)).$$

我们称$y = f(g(x))$是$y = f(u)$和$u = g(x)$的复合函数, 记为$f \circ g$. 复合函数$(f \circ g)(x)$的定义域是$\{x \in X | g(x) \in U\}$.

复合函数

设函数$y = f(u)$的定义域是U, 函数$u = g(x)$的定义域是X. 对于$x \in X$, 如果$u = g(x) \in U$, 我们可以按如下对应法则确定唯一的实数y:

$$y = f(g(x)).$$

我们称$y = f(g(x))$是$y = f(u)$和$u = g(x)$的复合函数, 记为$f \circ g$. 复合函数$(f \circ g)(x)$的定义域是$\{x \in X | g(x) \in U\}$.

可见, $f \circ g$的定义域是g的定义域的一个子集, 并且只有在$\{x \in X | g(x) \in U\}$是非空集合的情况下, $f \circ g$才有意义.

复合函数的例子

例 3

设$f(x) = 1 - x^2, g(x) = \log_2 x$, 则

$$(f \circ g)(x) = 1 - \log_2^2 x, \quad \forall x \in (0, \infty);$$

$$(g \circ f)(x) = \log_2(1 - x^2), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

从这个例子看到, 复合函数$f \circ g$和$g \circ f$是两个不同的函数.

例 4

设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $g(x)=1-\dfrac{1}{x}$. 显然$f(x)$的定义域是$\{x|x\neq 1\}$, 而$g(x)$的定义域是$\{x|x\neq 0\}$. 两个复合函数为:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{1-(1-\frac{1}{x})}=x \quad (x\neq 0);$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=1-\frac{1}{\frac{1}{1-x}}=x \quad (x\neq 1).$$

两个复合函数的表达式相同, 但它们的定义域不同, 因此仍然是两个不同的函数. 这里, 我们还可以看到$f(x)$和$g(x)$互为反函数.

复合函数的例子

例 4

设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $g(x)=1-\dfrac{1}{x}$. 显然$f(x)$的定义域是$\{x|x\neq 1\}$, 而$g(x)$的定义域是$\{x|x\neq 0\}$. 两个复合函数为:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{1-(1-\frac{1}{x})}=x\quad (x\neq 0);$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=1-\frac{1}{\frac{1}{1-x}}=x\quad (x\neq 1).$$

两个复合函数的表达式相同, 但它们的定义域不同, 因此仍然是两个不同的函数. 这里, 我们还可以看到$f(x)$和$g(x)$互为反函数.

更一般地, 如果$f(x)$是从X到Y的一一对应, 那么

$$(f\circ f^{-1})(y)=y\quad (y\in Y);\quad (f^{-1}\circ f)(x)=x\quad (x\in X).$$

我们可以按两种不同方式把复合函数的定义推广到三个以上函数的情形. 设有三个函数$y = f(u)$ $(u \in U)$, $u = g(v)$ $(v \in V)$和$v = h(x)$ $(x \in X)$, 则

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))),$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))).$$

上面的两个函数表达式相同, 并且它们的定义域都是$\{x | x \in X, h(x) \in V$且$g(h(x)) \in U\}$, 因此它们是同一个函数. 我们把它们都简记为

$$f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

例 5

设$f(x) = \log_2 x, g(x) = \sqrt{x}, h(x) = \dfrac{x+1}{2}$. 则

$$(f \circ g \circ h)(x) = \log_2 \sqrt{\frac{x+1}{2}} \quad (x > -1);$$

$$(g \circ h \circ f)(x) = \sqrt{\frac{\log_2 x + 1}{2}} \quad \left(x \geqslant \frac{1}{2}\right).$$

我们最经常接触到的函数是所谓的初等函数. 为了给出初等函数的定义, 我们先总结以下六种类型的基本初等函数.

1. 常数函数$y = C$;
2. 幂函数$y = x^\mu$ $(\mu \neq 0)$;
3. 指数函数$y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$;
4. 对数函数$y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$;
5. 三角函数$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$;
6. 反三角函数$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

常数函数$y = C$

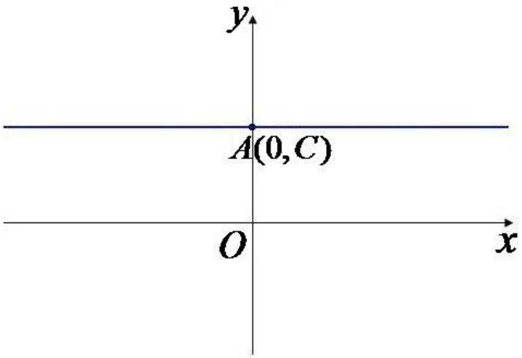

Figure: 1-1

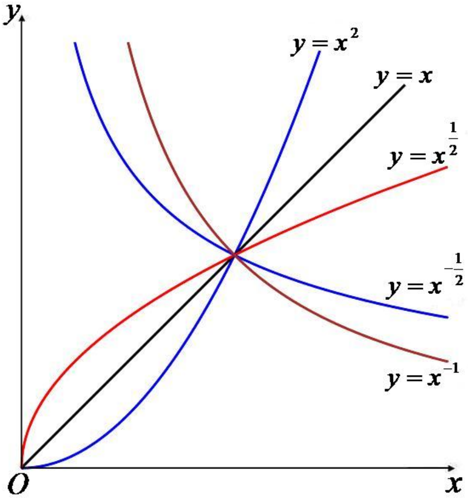

Figure: 1-2

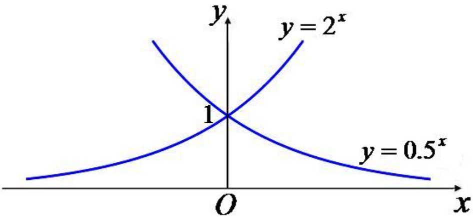

Figure: 1-3

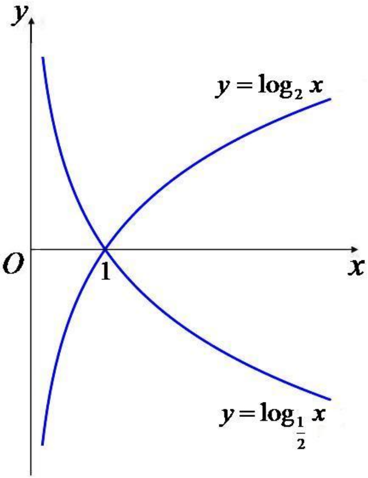

Figure: 1-4

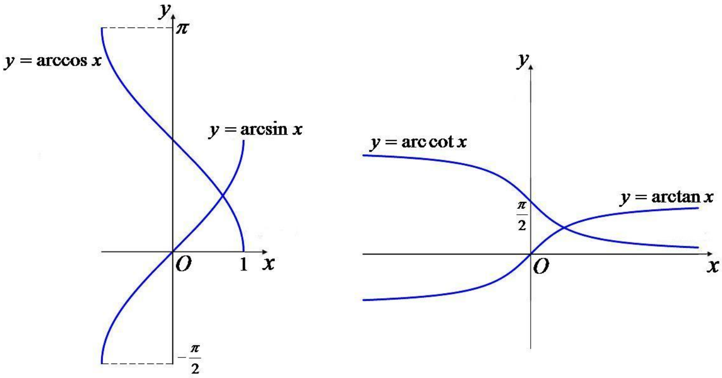

Figure: 1-5

由基本初等函数, 经过有限多次四则运算及有限多次复合所得到的函数, 称为初等函数. 例如

$$y = \log_a x + \frac{e^{\sin\sqrt{x}} - 1}{x^2}$$

就是一个初等函数. 而$y = |x| = \sqrt{x^2}$也是一个初等函数.

由基本初等函数, 经过有限多次四则运算及有限多次复合所得到的函数, 称为初等函数. 例如

$$y = \log_a x + \frac{e^{\sin\sqrt{x}} - 1}{x^2}$$

就是一个初等函数. 而$y = |x| = \sqrt{x^2}$也是一个初等函数.

由定义不难看出，两个初等函数的和、差、积、商以及它们的复合（如果可以复合的话），得到的还是初等函数.

由基本初等函数, 经过有限多次四则运算及有限多次复合所得到的函数, 称为初等函数. 例如

$$y = \log_a x + \frac{e^{\sin\sqrt{x}} - 1}{x^2}$$

就是一个初等函数. 而$y = |x| = \sqrt{x^2}$也是一个初等函数.

由定义不难看出，两个初等函数的和、差、积、商以及它们的复合（如果可以复合的话），得到的还是初等函数.

思考题

分别给出定义域是$\{a\}, \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, \mathbb{Z}$的初等函数的例子.

由基本初等函数, 经过有限多次四则运算及有限多次复合所得到的函数, 称为初等函数. 例如

$$y = \log_a x + \frac{e^{\sin\sqrt{x}} - 1}{x^2}$$

就是一个初等函数. 而$y = |x| = \sqrt{x^2}$也是一个初等函数.

由定义不难看出，两个初等函数的和、差、积、商以及它们的复合（如果可以复合的话），得到的还是初等函数.

思考题

分别给出定义域是$\{a\}$, $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $\mathbb{Z}$的初等函数的例子.

思考题

证明函数$f(x) = x, x \in [a, b]$是初等函数.

某些分段定义的函数是初等函数

思考题

证明函数$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$是初等函数.

思考题

证明函数$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$是初等函数.

思考题

证明函数$f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0 \\ \cos x, & x \geqslant 0 \end{cases}$是初等函数.

思考题

证明函数$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$是初等函数.

思考题

证明函数$f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0\\ \cos x, & x\geqslant 0\end{cases}$是初等函数.

一般情形的思考

利用解决上述思考题的想法，推广到一般情形进行研究，你能得出什么结果？给出结论，加以证明.

例 1 (符号函数)

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & 当 x < 0, \\ 0, & 当 x = 0, \\ 1, & 当 x > 0. \end{cases}$$

显然, $y = \operatorname{sgn} x$是一个奇函数, 有界函数, 并且在$(-\infty, +\infty)$上是递增函数.

例 1 (符号函数)

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{当} x < 0, \\ 0, & \text{当} x = 0, \\ 1, & \text{当} x > 0. \end{cases}$$

显然, $y = \operatorname{sgn} x$是一个奇函数, 有界函数, 并且在$(-\infty, +\infty)$上是递增函数.

注意到, 对任意$x \in \mathbb{R}$, 都成立

$$x = |x| \operatorname{sgn} x.$$

例 2 (取整函数)

记$[x]$是“不超过x的最大整数”，如图1-6. 分段定义如下: $f(x)=[x]=n$, 当$n\leqslant x<n+1, n\in\mathbb{Z}$. 函数$y=x-[x]$是周期为1的有界函数.

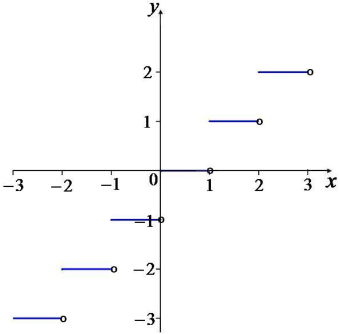

Figure: 1-6

例 3

设$f(x) = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, 将它延拓为整个实数轴上, 周期为2的偶函数. 即, 作出一个函数$g(x)$, 它是周期为2的偶函数, 并且当$0 \leqslant x \leqslant 1$时, $g(x) = f(x)$.

例 3

设$f(x) = x\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$, 将它延拓为整个实数轴上, 周期为2的偶函数. 即, 作出一个函数$g(x)$, 它是周期为2的偶函数, 并且当$0 \leqslant x \leqslant 1$时, $g(x) = f(x)$.

借助几何图形(图1-7)知道, 延拓后的函数是:

$$g(x) = \begin{cases} x - 2n, & \text{当} 2n \leqslant x \leqslant 2n+1, \\ 2n - x, & \text{当} 2n-1 \leqslant x \leqslant 2n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

这个函数也可以写成

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x),$$

因此, $g(x)$仍然是初等函数.

延拓的例子（图）

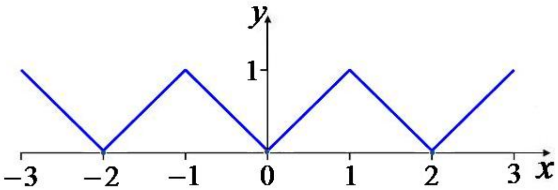

Figure: 1-7

例 4 (特征函数)

设数集$A \subseteq \mathbb{R}$, 定义

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{当} x \in A, \\ 0, & \text{当} x \notin A. \end{cases}$$

函数$\chi_A(x)$称为数集A的特征函数.

例 4 (特征函数)

设数集$A \subseteq \mathbb{R}$, 定义

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{当} x \in A, \\ 0, & \text{当} x \notin A. \end{cases}$$

函数$\chi_A(x)$称为数集A的特征函数.

如果$A_1, A_2, \cdots, A_n$是两两不交的数集, 函数$f_i(x)$的定义域是$\mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 我们可以分情形定义一个函数$F(x)$如下:

$$F(x) = \begin{cases} f_i(x), & \text{当} x \in A_i, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

则$F(x)$可以利用A_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$的特征函数定义为

$$F(x) = f_1(x)\chi_{A_1}(x) + f_2(x)\chi_{A_2}(x) + \cdots f_n(x)\chi_{A_n}(x).$$

例如, 如果我们令$A_1 = (-\infty, 0), A_2 = (0, +\infty)$, 则有

$$\operatorname{sgn} x = \chi_{A_2}(x) - \chi_{A_1}(x).$$

特征函数

例如, 如果我们令$A_1=(-\infty,0)$, $A_2=(0,+\infty)$, 则有

$$\operatorname{sgn} x=\chi_{A_2}(x)-\chi_{A_1}(x).$$

在第三章我们可以证明, $y=\operatorname{sgn} x$和$y=[x]$都不是初等函数.

例如, 如果我们令$A_1 = (-\infty, 0), A_2 = (0, +\infty)$, 则有

$$\operatorname{sgn} x = \chi_{A_2}(x) - \chi_{A_1}(x).$$

在第三章我们可以证明, $y = \operatorname{sgn} x$和$y = [x]$都不是初等函数.

思考题

证明$f(x) = \begin{cases} -1, & 当x < 0, \\ 1, & 当x > 0 \end{cases}$ 是初等函数.

例 5 (狄利克雷函数)

在特征函数$\chi_A(x)$中, 令$A=\mathbb{Q}$, 得到

$$D(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数},\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数}.\end{cases}$$

例 5 (狄利克雷函数)

在特征函数$\chi_A(x)$中, 令$A=\mathbb{Q}$, 得到

$$D(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数}, \\ 0, & \text{当}x\text{为无理数}.\end{cases}$$

例 6 (黎曼函数)

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当}x=\dfrac{p}{q}, \text{其中}p,q\text{是互素的整数, 且}q>0, \\ 0, & \text{当}x\text{为无理数}.\end{cases}$$

例 5 (狄利克雷函数)

在特征函数$\chi_A(x)$中, 令$A=\mathbb{Q}$, 得到

$$D(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数},\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数}.\end{cases}$$

例 6 (黎曼函数)

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当}x=\dfrac{p}{q},\text{其中}p,q\text{是互素的整数, 且}q>0,\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数}.\end{cases}$$

这两个函数都是偶函数, 有界函数, 也都是周期函数. 不难验证$R(x)$的最小正周期是1, 而每一个有理数r都是$D(x)$的周期, 因此$D(x)$没有最小正周期. 另外, 我们还有

$$D(x)=\operatorname{sgn}(R(x)).$$

常用作反例的$x^\alpha \sin\frac{1}{x}$

设$\alpha \in \mathbb{R}$, 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

常被用作反例，后面我们会多次遇到.

设$\alpha \in \mathbb{R}$, 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

常被用作反例，后面我们会多次遇到.

例如，函数$f(x)$在$[a, b]$可导，问$f'(x)$是否一定在$[a, b]$连续？答案是否定的. 一个例子是取$[a, b] = [-1, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

不难验证$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$可导，但$f'(x)$在0点不连续.

函数$y = \sin\frac{1}{x}$的图象

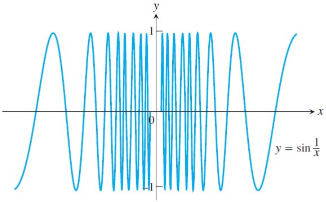

Figure: 1-8

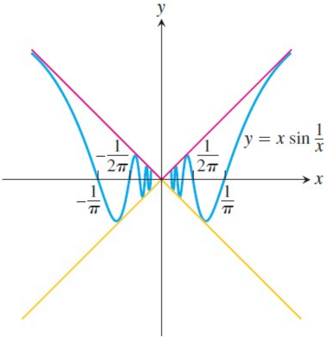

Figure: 1-9

对于抛物线$y^2=2px$ $(p>0)$, 我们可以认为它是函数$x=\dfrac{y^2}{2p}$的图象, 也可以认为它是以下两个函数图象之并集$y=\sqrt{2px}$, $y=-\sqrt{2px}$. 同理, 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$是以下两个函数图象之并集

$$y=y_1(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad y=y_2(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

对于抛物线$y^2 = 2px\ (p > 0)$, 我们可以认为它是函数$x = \frac{y^2}{2p}$的图象, 也可以认为它是以下两个函数图象之并集$y = \sqrt{2px}, \quad y = -\sqrt{2px}$. 同理, 椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a, b > 0)$是以下两个函数图象之并集

$$y = y_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = y_2(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

我们把上面的方法称为函数的隐函数表示法. 例如, 椭圆方程$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$或者$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ 在$y \geqslant 0$和$y \leqslant 0$的条件下, 分别表示两个隐函数$y = y_1(x)$和$y = y_2(x)$. 而$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$和$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$则是这两个隐函数的显式表示.

隐函数方程

隐函数还可以表示更复杂的函数. 例如, 函数

$$y = x + \arctan x$$

是定义在$(-\infty, +\infty)$上的严格递增函数, 因此存在反函数$x = f(y)$. 我们难以写出$f(y)$的显式表达式, 但我们可以认为方程

$$x + \arctan x - y = 0$$

是$x = f(y)$的隐函数表示.

隐函数还可以表示更复杂的函数. 例如, 函数

$$y = x + \arctan x$$

是定义在$(-\infty, +\infty)$上的严格递增函数, 因此存在反函数$x = f(y)$. 我们难以写出$f(y)$的显式表达式, 但我们可以认为方程

$$x + \arctan x - y = 0$$

是$x = f(y)$的隐函数表示.

关于隐函数的更完整的理论, 我们要到多元函数部分才能详细介绍.

曲线的更一般的表示法是参数方程. 例如, 前面的椭圆可以用以下参数方程来表示:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

而下面给出的是一个双曲线的参数方程

$$x = a\sec t,\ y = b\tan t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

平面曲线还可以利用“极坐标”来表示. 它在本课程的多元函数的重积分部分有重要的应用, 因此我们在这里较为详细地介绍一下平面上的极坐标系的概念.

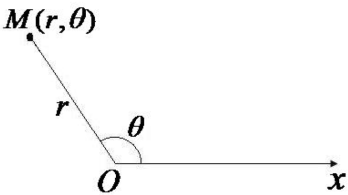

Figure: 1-8

如图1-8, 我们把直角坐标原点O称为极点, x轴的正半轴称为极轴, 记为Ox. 对平面上任一点$M(x,y)$, 用r表示线段OM的长度, 称为M的极径. 显然$r\geqslant 0$. 用θ表示Ox到OM的角度, 称为M的极角. θ常用的取值范围是$[0,2\pi)$或$[-\pi,\pi)$. 有序数对(r,θ)称为M的极坐标. 从定义我们立即可以得到极坐标和直角坐标的关系

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta. \end{cases}$$

思考题

设θ的取值范围是$[0,2\pi)$, 给定直角坐标原点O之外的一点(x,y), 写出θ的显式表达式.

圆$r = R$

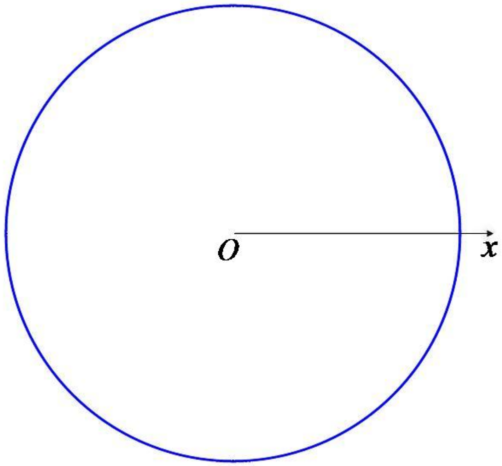

Figure: 1-9

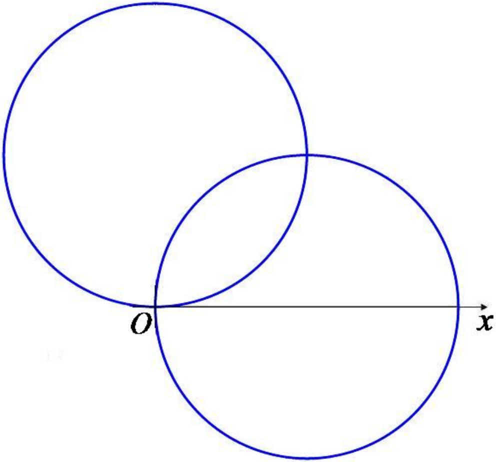

Figure: 1-10

椭圆 $r = \dfrac{k}{1 + e\cos\theta}$ $(k > 0, 0 < e < 1)$

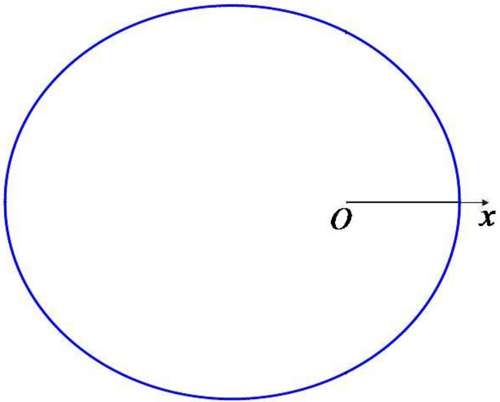

Figure: 1-11

抛物线 $r = \dfrac{k}{1+\cos\theta} \quad (-\pi < \theta < \pi, k > 0)$

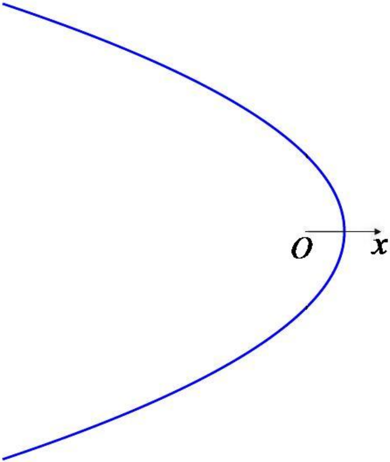

Figure: 1-12

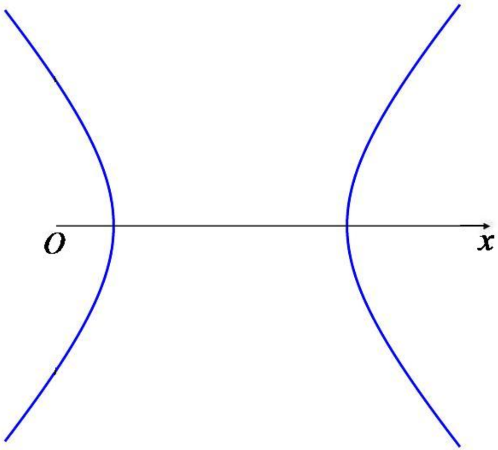

Figure: 1-13

对数螺线: $r = ae^{k\theta}$ $(a > 0, k > 0)$

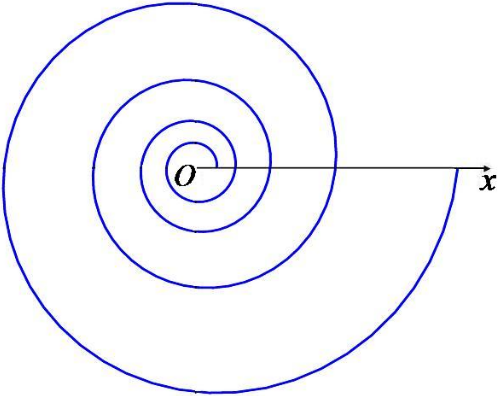

Figure: 1-14

心形线: $r = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$

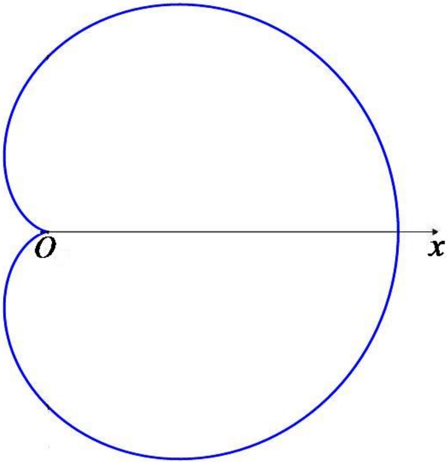

Figure: 1-15

三叶玫瑰线: $r = a\sin 3\theta\ (a > 0)$

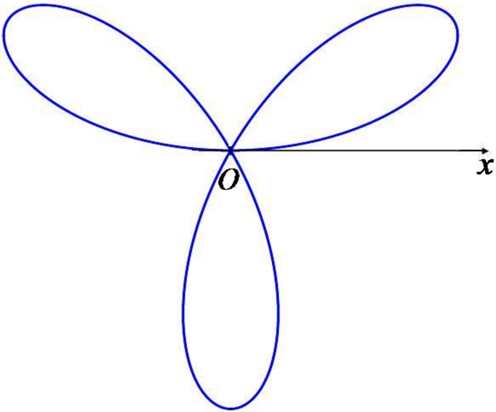

Figure: 1-16