数学文化十讲

见面课（九）

联系方式

李军　　数学科学学院**416**办公室

邮箱：lijun@nankai.edu.cn

鼓励师生课下的联系和交流。上周已经建立了课程的飞书群，教学通知会发到飞书群。大家在学习中遇到问题，就及时通过飞书联系我。

提醒：慕课期末考试的截止时间

慕课的期末考试

于12月11日23:30截止！

期末考核方式：课程论文

- “数学文化”课的考核与评分比例

“数学文化十讲”慕课的 成绩 占40%；

见面课的 成绩 占20%；

课程论文的 成绩 占40%。

- 课程论文提交的截止时间：**2023年1月15日**
- 论文提交方式：通过飞书或通过邮箱 **lijun@nankai.edu.cn**发给我

课程论文的要求

- 自定题目，必须是数学文化的主题。
- 字数不少于3000字。
- 论文要独立完成，不能抄袭。复制比高的课程论文的得分将大为降低，抄袭情节严重的论文以0分计。
- 论文要包含题目、摘要、关键词、正文、参考文献等部分，数学之美论文格式模板给出了具体格式要求。

课程论文的一些建议

- 选择你有兴趣的主题，论文题目取得要具体一些、小一些。课程论文的写作时间有限、篇幅不大，题目过大往往写不清楚。
- 文章的主体要有合理清晰的逻辑顺序，不要照搬已有的资料，按你自己的理解来整理思路，用自己的语言来进行阐述，讲出自己的心得体会。
- 鼓励创新，最好能有一些新的思路、看法和探讨。
- 引用原文应该注明。
- 完成文章的初稿后还应仔细推敲，反复修改完善。

课程论文的选题举例

- 以**数学问题**为主题：

  费马大定理

  浅谈几个多人博弈问题

  对于“商人过河”问题的探讨

  如何找到次品球

- 以**数学方法**为主题：

  浅谈中国古算之“盈不足”术

  浅析常数变易法

课程论文的选题举例

- 以数学思想为主题：
  - 浅说数学中的对立统一
  - 对数学本质的浅见
  - 数学思维与哲学思维漫谈
  - 数学逐级抽象之浅谈
- 以数学精神为主题：
  - 甘于寂寞、献身科学的精神永存
  - 数学是一种精神

课程论文的选题举例

- 以数学的魅力为主题：

  音乐中的数学之美

  量子物理中的数学之美

  化学分子中的对称美

- 以数学与其他学科的联系为主题：

  生命王国的数学奥秘

  化学发展中的数学之影

  会计学中数学思想和数学方法浅谈

课程论文的选题举例

- 以趣味数学为主题：

  小游戏中的玄机

  七巧板的魅力

  数独的魅力

- 以数学的应用为主题：

  关于数学在我国国际关系研究中应用现状的浅见

  浅谈数学在生物学中的应用

课程论文的选题举例

- 以数学史为主题：

  Bourbaki学派对公理化方法的传承和发展

  从数到代数

  零符号的起源与传播

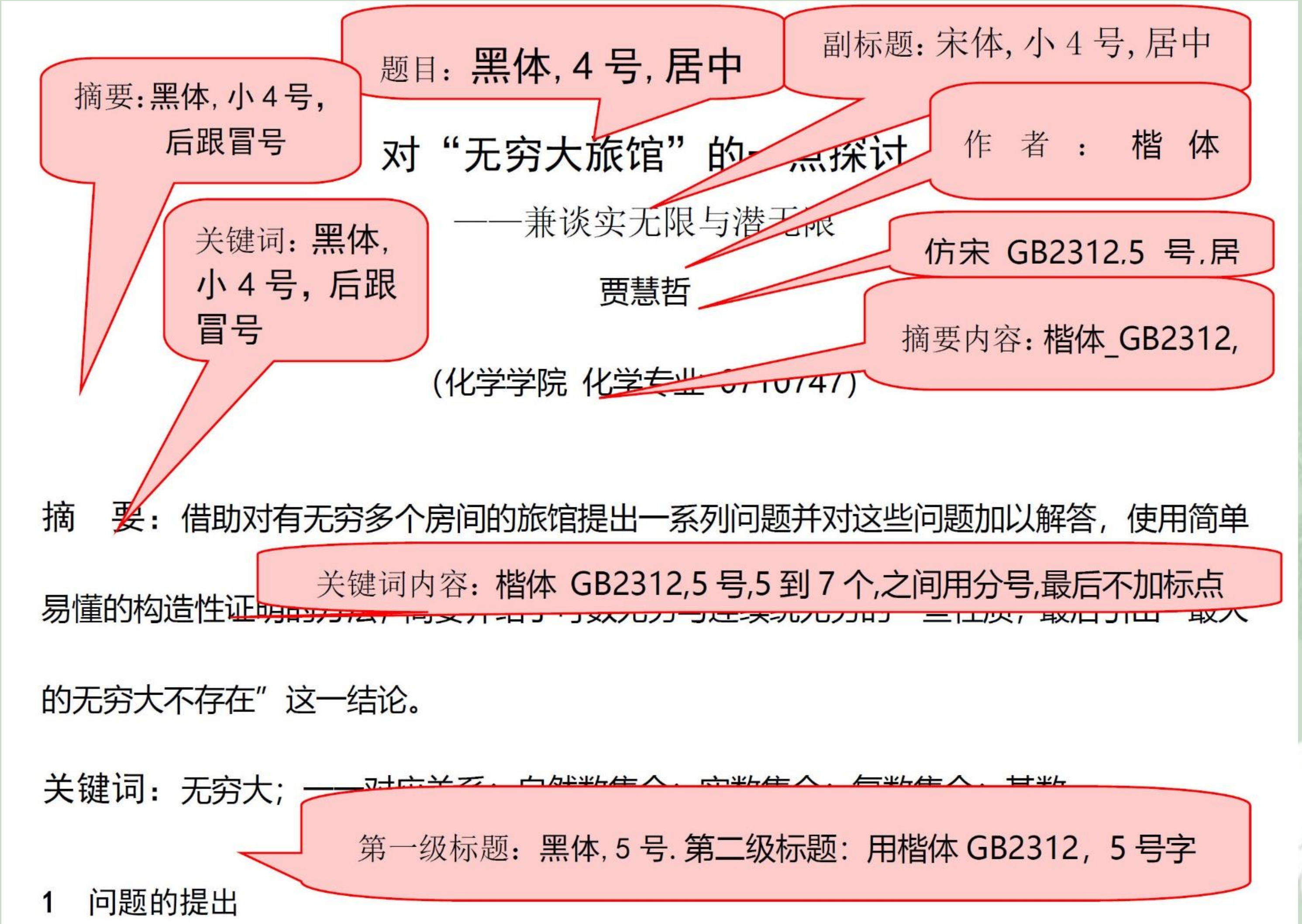
  悖论在三次数学危机中的作用

- 其他数学文化相关的主题：

  浅析美国小学数学教学及其中体现的数学文化

  化学公理化探讨

数学之美论文格式模板


对“无穷大旅馆”的一点探讨

——兼谈实无限与潜无限

贾慧哲

(化学学院 化学专业 0710747)

摘 要：借助对有无穷多个房间的旅馆提出一系列问题并对这些问题加以解答，使用简单易懂的构造性证明的方法，……最后引出“最大的无穷大不存在”这一结论。

关键词：无穷大；一一对应关系；自然数集合；实数集合；复数集合；基数

1 问题的提出

数学之美论文格式模板

在现实中的旅馆，其房间数都是有限的。如果有一个有无穷多个房间的旅馆，这旅馆会挂出怎样的招牌呢？比如说，“本旅馆永远有房间”这句话，在只入住有限个客人时，是成立的，那么在客人的数量有无穷多个的时候，是否还能成立呢？

为了下面的讨论方便起见，先在这里简要地介绍一下比较两个无穷集合中元素个数多少的方法：两个无穷集合 A 和 B，如果对于每一个 $a \in A$，都有一个 $b \in B$ 与之对应，反之亦然（即建立一一对应关系），那么我们认为 A 和 B 中的元素“一样多”。用专业的语言来讲，这两个集合是对等的，具有相同的基数。

凭借上面的方法，我们将开始对“无穷大旅馆”进行一系列的探索，让旅馆中房间的数目一步步地增多起来，进而一步步地得出各种惊人的结论。

所有变量请用公式编辑器书写。

文章正文内容用宋体 5 号字

2　自然数旅馆

设想有一个旅馆（方便起见我们称之为“自然数旅馆”），其房间按自然数编号且有无穷多，即房间编号为 $1, 2, 3, \cdots$。假设每个房间都住有一人，然后我们提出如下一系列问题：

………

数学之美论文格式模板

但是康托尔在 19 世纪 70～80 年代发表了《关于一切实代数数的一个性质》、《关于无穷线性点集》等一系列论文，他首次把无穷当作了一个“已经被综合完成的整体”，并研究其性质，进而得出了一系列结论（如因为任何一个集合的所有子集构成的集合，总是有更大的基数，所以“所有集合的集合”根本不存在等），在数学界引起了轩然大波。康托尔本人遭到来自数学界和哲学界众多权威的反对，自己最终也因研究结果得不到承认而陷入精神失常。

这场潜无穷与实无穷的争论至今还在继续，而且早已超出数学领域，把众多的哲学家也卷入其中——的确，“无穷究竟只是一种无限增长的可能性还是一个完成了的实体”这个问题确实太形而上了。

不过在今天，我们还是看到康托尔的观点逐渐得到了越来越多的人的认可；而且，不论这场争论的最终结果如何，康托尔的这种思索问题的方式，对于我们未尝不是一种有益的启迪。

黑体，5 号

参考文献：

楷体_GB2312,小 5 号

[1]唐璐、付雪，数学爵士乐，湖南科学技术出版社 2007 年 6 月第 1 版.
[2]黄克宁，无穷与集合，（台湾）徐氏基金会出版部 1968 年 11 月 5 日初版.

填空题举例

2021年10月28日是数学大师陈省身先生诞辰110周年的纪念日。陈先生在一次演讲中说“三角形三内角之和等于180度，这个命题不好”。比较而言，“n边形n外角之和等于360度”，这个命题较好。这是由于，后一个命题是“变中有不变”的性质，抓住了事物的本质。

填空题举例

最早开创“命题证明”先河的是古代希腊的数学家泰勒斯，他也因此被誉为“世界上第一位数学家”。古代希腊的毕达哥拉斯学派首先意识到，总有某些最前面的命题是无法证明的，只能把它们当作“假设”预先承认。这样一些预先承认的“假设”被称为“公理”和“公设”。

填空题举例

对称集S(K)是所有使平面图形K不变的“保距变换”放在一起构成的集合，其元素个数的多少就描述了平面图形对称性的强弱。例如，正弦曲线y=sin x的对称集有可数无穷多个元素，圆的对称集有不可数无穷多个元素，故圆比正弦曲线更对称。

填空题举例

有一堆谷粒，共n粒，甲乙轮流抓，每次可抓**1**粒、**3**粒、**4**粒或**7**粒。甲先抓，规定谁抓到最后一把谁赢。当n = 6时，甲有取胜策略，甲第一把应该抓**4**粒；当n = 12时，甲有取胜策略，甲第一把应该抓**4**粒；当n = 600时，乙有取胜策略；当n = 666时，乙有取胜策略；当n = 2021时，甲有取胜策略。

解答题举例

（公开题）有一句名言：“一个国家科学的进步，可以用它消耗的数学来度量”，请你结合数学文化的学习以及近年来中国的发展，就这句话谈谈自己的体会。

解答题举例

（公开题）2019年9月17日，吴文俊等5人获授“人民科学家”国家荣誉称号。结合中国当代数学家的事迹，就你的理解，请谈谈数学家有哪些精神。

解答题举例

一个人站在“梯子格”的起点处向上跳，从格外只能进入第1格，从格中，每次可向上跳一格或三格，问：可以用多少种方法，跳到第12格？详细说明你的计算方法。

解答题举例

反证法的理论依据是什么？陈述实施反证法证明的具体步骤，并用反证法证明“$\log_2 3$是无理数”。

解答题举例

(1) 第三次数学危机是由罗素的集合论悖论引发的，请详细叙述罗素悖论。

(2) 第三次数学危机是如何消除的？

(3) 对于“数学基础的问题能否彻底解决”这个问题，你的看法是什么？

解答题举例

“今有物不知其数，五五数之剩2，六六数之剩3，七七数之剩5，问物几何”，请详细说明如何用“单因子构件凑成法”解决该问题。

解答题举例

古希腊的三位数学家泰勒斯、毕达哥拉斯、欧几里得，及近代的两位数学家希尔伯特、哥德尔，在数学的“公理化系统”方法上，各自的贡献是什么？

解答题举例

桌子上有一堆石子，共n粒，甲乙两人轮流操作，甲先操作，每次操作要将所有多于1粒石子的堆分成两个较小的堆，若在操作完成后每堆石子都恰为1粒，则进行该次操作的人就获胜。

(1)　当n=15时，谁有必胜策略？他的必胜策略是什么？说明理由。

(2)　当n=2021时，谁有必胜策略？他的必胜策略是什么？说明理由。

平台上慕课内容的拓展

距离公理的独立性

设$d(x,y)$是集合X上的二元函数，如果$d(x,y)$满足距离公理：

(1) 对任意$x,y\in X$, 有$d(x,y)\geq 0$；

(2) 对任意$x,y\in X$, $d(x,y)=0$当且仅当$x=y$；

(3) 对任意$x,y\in X$, 有$d(x,y)=d(y,x)$；

(4) 对任意$x,y,z\in X$, 有$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$，

则称$d(x,y)$是集合X上的一个距离函数。

这里，公理**(1)-(4)**不独立，可以用**(2),(3),(4)**推出**(1)**。

MU谜题

《Gödel，Escher，Bach：An Eternal Golden Braid》一书中给出了一个称为MU谜题的问题，用以说明形式系统。

MU谜题中用到的是M、I、U三个字母组成的字符串，按照给定的规则从已有的字符串产生出字符串。

MU谜题（续）

初始的字符串是MI，四条产生字符串的规则如下：

(1) 如果一个字符串以I结尾，则可以在该字符串后面加上U;

(2) 如果一个字符串形如Mx，其中x是字符串，则可以得到Mxx;

(3) 如果一个字符串中有三个连续的I，则可以将这三个连续的I换成U;

(4) 如果一个字符串中有两个连续的U，则可以删去这两个连续的U.

问题：由初始的字符串MI出发，能得出MU吗？

投票(匿名)　最多可选1项

设置

由初始的字符串MI出发，能得出MU吗？

A 能

B 不能

提交

MU谜题的解答

可以用“变中有不变”的思想来解决MU谜题。答案是不可能得出MU。

初始字符串MI中I的个数为1，规则(1)和(4)不改变I的个数，规则(2)将I的个数翻倍，规则(3)将I的个数减少3，“变中有不变”的规律是“字符串中I的个数除以3的余数是1或2”。因此，不可能得出MU。

数学家胡国定

- 胡国定先生是中国共产党优秀党员，著名数学家、教育家。
- 胡国定先生1923年4月4日生于浙江省鄞县，2011年9月21日在天津逝世，享年88岁。

求学时期的胡国定先生

胡国定先生1943年考入上海交通大学物理系。

1945年他加入中国共产党, 之后成为交通大学地下党和学生运动领导人之一。

大学毕业后任教于南开大学

胡国定先生1947年从上海交通大学物理系毕业，到南开大学数学系任教，同时担任天津市地下党交通站负责人。

1949年解放后，他继续在南开大学数学系任教，并兼任系党政领导工作。

到莫斯科大学进修

胡国定先生1957年被国家派送到苏联莫斯科大学数学系进修，从事概率论与信息论的学习与研究工作。

1958 年 7 月，留苏生(下蹲者，左起)江泽培、董明德、王梓坤、孙和生四人毕业返国时，在莫斯科车站合影。后立均为欢送者。中排有：杨芙清(左三)、黄克智(左四)、谷超豪(左五)。后排有：赵 桢(左一)、吴文达(左二)及胡国定(右二)

回国后从事发展信息论

1961年回国后，胡国定先生除了继续担任南开大学与南开大学数学系党政领导工作外，专门从事发展信息论的教学与研究工作，成为我国最早开拓这一学科领域研究的学术带头人之一。

南开数学研究所的成立

自1981年胡国定先生开始多次与国际著名数学大师、美国数学研究所所长陈省身联系、商议组建“南开数学所”事宜，该所终经国务院批准于1985年成立，陈省身、胡国定先生分别担任第一、二任所长。

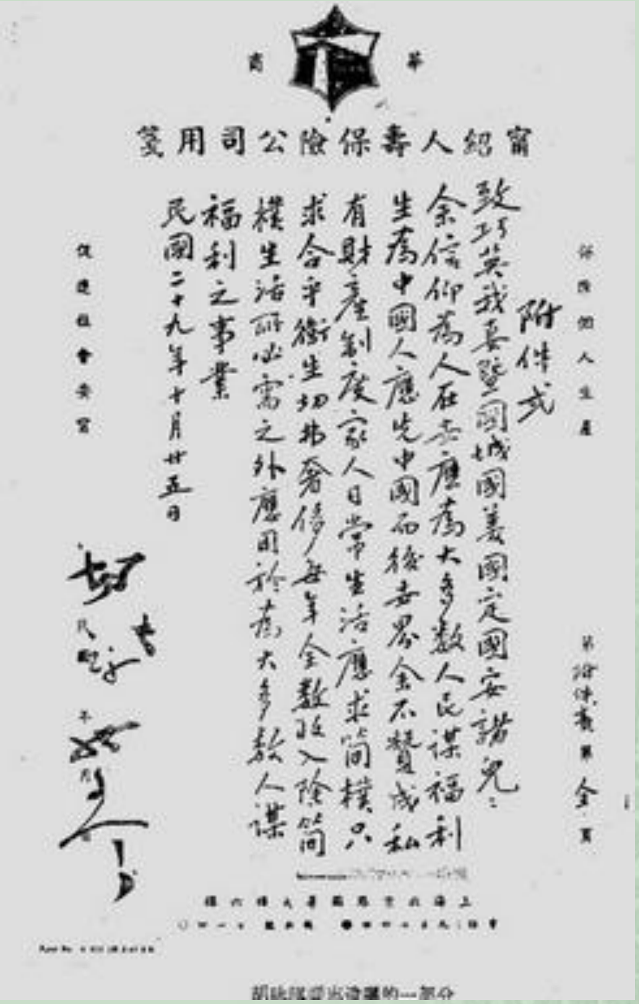
1984年8月5日邓小平同志接见陈省身夫妇，参加接见的还有何东昌、胡国定、丁石孙等

2005年9月27日江泽民同志访问我所并在“省身楼”前合影
前排左起：邢元敏、戴相龙、张立昌、江泽民、胡国定、房凤友
后排左起：扶磊、孙广平、龙以明、侯自新、薛进文、陈永川、张伟平、方复全

胡国定先生的父亲 — 胡詠骐

胡国定先生的父亲胡詠骐(1898－1940)是中国保险业的最早创办人之一，曾担任上海保险同业公会主席，1937年起积极投入抗日救亡运动，并加入中国共产党。他对胡国定先生影响很大。

胡詠騏先生的遺囑



寧紹人壽保險公司用箋

附件式

致巧英我妻暨同城國義國定國安諸兒

余信仰為人在世應為大多數人民謀福利

生為中國人應先中國而後世界全不贊成私

有財產制度家人日常生活應求簡樸只

求合乎衛生切弗奢侈每年全數投入險簡

樸生活所必需之外應用於為大多數人謀

福利之事業

民國二十九年十月廿五日

胡詠騏

胡国定先生的学术成果

胡国定先生把Shannon 熵中的熵、联合熵、条件熵与交互信息等信息量用集合论的模型给以表达与对应，对不同随机变量产生的熵、联合熵、条件熵与交互信息等信息量可用集合的关系给以表达，给出了一个更加清晰明确的数学阐述，得到的主要结果发展和完善了Shannon 熵的概念，使得现代通讯理论具有更加牢固的数学基础。

胡国定先生的学术成果

- 胡国定先生解决了Shannon信息论的基本问题—信源与信道的正、反编码定理。
- 胡国定先生把信源序列的核心问题归结为信息稳定性问题，并对信道的序列模型提出了“Shannon定理的三种反定理”。
- 胡国定先生证明了第一准则与第三准则的等价关系，并由此得到Shannon第一定理成立的充分与必要条件。

第11卷 第3期
1961 年 9 月
数学学报
ACTA MATHEMATICA SINICA
Vol. 11, No. 3
Sep., 1961

[2]

信息論中 Shannon 定理的三种反定理*

胡国定
(南开大学)

§1. 引言

信息論这一門新兴的学科，自从 C. E. Shannon 的論文[1]发表而誕生到现在，探討的中心还围繞在信息論基本定理——Shannon 定理所提出的那个問題上. 作者在本文中綜合整理了有关 Shannon 定理的一般提法的已有結果，特别着重地討論了 Shannon 定理的三种反定理. 有关头两种反定理，作者本人的工作，都在文中指明. 至于第三种反定理(以輸入消息序列为中心的反定理)则是迄今从未被探討过的.

有别于一般信息論論文中探討消息与信号的随机过程和每单位时間的平均信息量，本文仿照 Р. Л. Добрушин 的論文[2]探討以时間为指数的消息与信号序列和随时間而无限增大的信息量. 这一点，讀者以后自会察觉到的.

本文詳列了所有必要的准备知識及其严格的証明. 这样，只要具有初等概率論知識的讀者大多都能讀懂本文.

§2. 信息量

1° 为探討信息量間的代数关系，以后經常要用到下列基本不等式.

引理 2.1. 对任意正数 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 与 $v_1, v_2, \cdots, v_m$,

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \log \frac{u_i}{v_i} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{m} u_i\right) \log \frac{\sum_{i=1}^{m} u_i}{\sum_{i=1}^{m} v_i},$$

其中等号成立当且只当

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \cdots = \frac{u_m}{v_m} = \frac{\sum_{i=1}^{m} u_i}{\sum_{i=1}^{m} v_i}.$$

胡国定先生的学术成果

胡国定先生的这些成果全面彻底解决了Shannon信息论的基本问题，他在1962年布拉格召开的第二届国际信息论会议上对此作了这一内容的专题报告，得到很大反响与好评。

此后国际上把这些结果称为“胡国定定理”。这些研究成果在以后的信息论著作中被多处引用，成为信息论中经典和奠基性的工作。

TRANSACTIONS

of the

THIRD PRAGUE CONFERENCE

on

INFORMATION THEORY, STATISTICAL DECISION FUNCTIONS, RANDOM PROCESSES

held at

Liblice near Prague, from June 5 to 13, 1962

Hu Guo Ding:

ON SHANNON THEOREM AND ITS CONVERSE FOR SEQUENCES OF COMMUNICATION SCHEMES IN THE CASE OF ABSTRACT RANDOM VARIABLES

PUBLISHING HOUSE
OF THE
CZECHOSLOVAK ACADEMY OF SCIENCES

PRAGUE 1964

胡国定先生重视人才培养

胡国定先生始终把人才培养放在重要位置，教书育人，诲人不倦，他培养的学生许多已成为国内外的著名学者。

2000年“基础数学人才培养基地”被评为天津市特等劳动模范集体，该基地“培养基础性数学人才的实践”2001年获国家级教学成果一等奖。


2000年度天津市特等模范集体
数学科学学院


国家级教学成果奖

获奖证书

获奖成果：培养基础性数学人才的实践

获 奖 者：顾 沛 周性伟 王公恕
梁 科 胡国定

获奖等级：一等奖

证 书 号：2001015

中华人民共和国
教育部部长：陈至立

二〇〇一年十二月

单选题 1分

设置

有一堆石子，共12粒，甲乙两人轮流取石子，甲先取，每一次取走的个数必须是当时石子的个数的因数，取到最后一个石子的人为输。问谁有必胜的策略?

A 甲

B 乙

提交

问题1解答

甲有必胜的策略。他的必胜策略是他每次恰取1粒石子。

12是一个偶数，只要这堆石子的初始数目是一个偶数，甲按上面的策略就必胜。理由如下：第一次甲先取，甲取走1粒后，这堆石子还剩奇数粒。轮到乙取，若乙全取走，则乙输，若乙不全取走，则乙只能取当时石子的个数的真因数，奇数的因数还是奇数，于是乙取后这堆石子还剩偶数粒。这个过程一直进行下去，每次轮到甲取时，石子是偶数粒，甲取走1粒，每次轮到乙取时，石子是奇数粒，乙只能取走奇数粒石子，剩下偶数粒石子给甲。甲每次总能取1粒石子，有限多步之后，必定是乙取到最后1粒石子，因此甲必胜。

单选题 1分

设置

有一堆石子，共20粒，甲、乙轮流抓，每次只可以抓1粒、4粒或5粒，甲先抓，规定谁抓到最后一把谁赢。问谁有取胜的策略?

A 甲

B 乙

提交

问题2解答

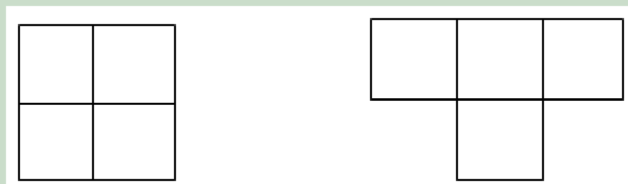
甲能赢。分析如下：先把问题一般化，考虑n粒石子的情形，再把问题特殊化，依次讨论n=1,2,3,… 时分别有什么结论，然后从中猜测规律。n=1时，显然甲赢； n=2时，每次只能抓1粒，显然乙赢； n=3时，每次只能抓1粒，显然甲赢； n=4或5时，显然甲赢； n=6或7时，甲抓4粒或5粒，剩下2粒，可见甲赢； n=8时，甲第一次抓完后剩下7粒，4粒或3粒，无论哪种情形都是乙赢。当n取值为9到16时，取胜的关键是给对手剩下8粒，由前面的讨论知n=10或16时乙赢，其余情形甲赢。由此可见n是8的倍数或n除以8余2时乙赢，其余情形甲赢。

因此由上述讨论知，石子共20粒时，甲能赢。甲取胜的策略是第一次取4粒，以后根据乙的取法，将10粒，8粒，2粒的情形留给乙。

单选题 1分

设置

如下图所示，有田字和T字形状的两种纸片。能否用1个田字纸片和15个T字纸片，拼成一个8×8的国际象棋棋盘?



A 能

B 不能

提交

问题3解答

不能用1个田字纸片和15个T字纸片拼成一个 8×8 的国际象棋棋盘。理由如下： 8×8的国际象棋棋盘中的正方形格子有黑格和白格之分，任何两个相邻的格子是一黑一白，总共有32个黑格和32个白格。田字纸片无论放在棋盘的哪个位置，4个格子总是两黑两白；T字纸片无论放在棋盘的哪个位置，4个格子总是一黑三白或者三黑一白。因此，1个田字纸片和15个T字纸片无论如何拼，黑格的总数必定是奇数，不可能得到32个黑格。所以不能用1个田字纸片和15个T字纸片拼成一个8×8的国际象棋棋盘。

主观题 10分

设置

谈谈你对于“数学文化十讲”慕课和数学文化课程线上线下混合式教学的一些建议。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

本次“见面课”结束

谢谢！