

# 第三部分 电 磁 学

## 第一章 真空中的静电场

**1-1** 试说明:(1)场强大的地方电势是否一定高?电势高的地方场强是否一定大? (2)场强为零的地方电势是否一定为零?电势为零的地方场强是否一定为零

解:(1)电场强度大;说明电势沿其等势面法线方向的电势变化率大,故不一定此处电势就高.若电势高,但它对空间变化率不大,场强不大; .(2)场强为零,说明对电势空间变化率为零.电势为零的地方,它的临近处电势不为零,说明电势变化率不为零,即场强不为零

**补充1.1** A、B、C是在同一直线依次排列的三点且 $\varphi_A > \varphi_B > \varphi_C$  (1)若将一正电荷放在B点,在电场力的作用下此电荷向何处运动? (2)若将一负电荷放在B点,情况又如一何?

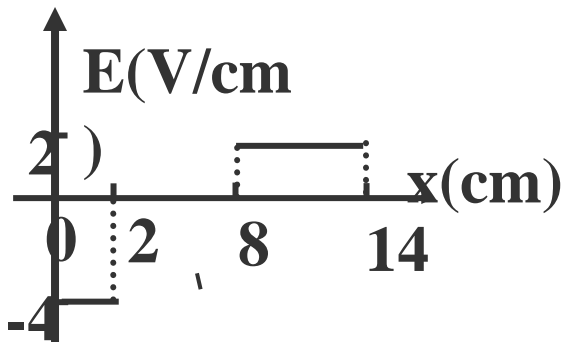
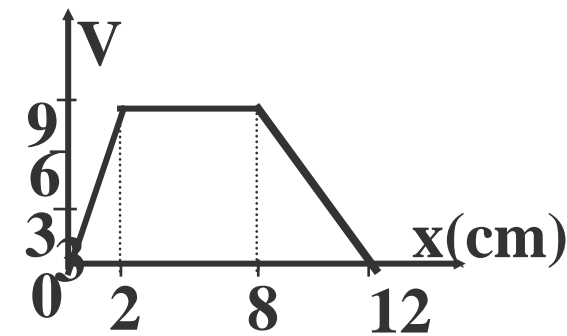
解:场强的方向总是由电势高指向电势低方向.(1)放在B点的静止正电荷向C方向运动.(2)放在B点的静止负电荷向A方向运动

**补充1.2** 已知某区域内,电势沿x方向变化曲线如图所示,请画出电场强度沿该方向的变化曲线.



解: 
$$v = \begin{cases} 4x, & 0 < x < 2 \\ 8, & 2 < x < 8 \\ 64/3 - 4x/3, & 8 < x < 14 \end{cases}$$

$$E = -\frac{dv}{dx} = \begin{cases} -4 & 0 < x < 2 \\ 0 & 2 < x < 8 \\ 4/3 & 8 < x < 14 \end{cases}$$



1-2 两个同号点电荷, 电量之和为 $Q$ , 问他们的电量各为多少时, 他们之间的作用力最大?

解: 设一个点电荷为 $q$ , 另一个点电荷为 $Q-q$ .

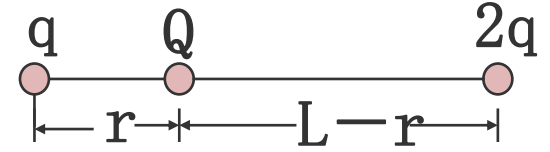
$$f = \frac{q(Q-q)}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \frac{df}{dq} = \frac{Q-2q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

$$\text{得 } q=Q/2 \text{ 时, } f = \frac{\frac{Q}{2} \cdot \frac{Q}{2}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 r^2}$$

为最大.



1-3 两点电荷点电量分别为 $2q$ 和 $q$ ，相距 $L$ ，将第三个电荷放在何处时，它所受的合力为零？



解：设第三个电荷 $Q$ 距电荷 $q$ 的距离为 $r$

°此时电荷 $Q$ 受合力为零， $q$ 对其的作用力

与电荷 $2q$ 对其点作用力  $f' = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$f = \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 (L-r)^2}$$

$$\text{即： } f = f'$$

整理后为：  $r^2 + 2Lr - L^2 = 0$  解得  $r_1 = (\sqrt{2}-1)L, r_2 = -(1+\sqrt{2})L$

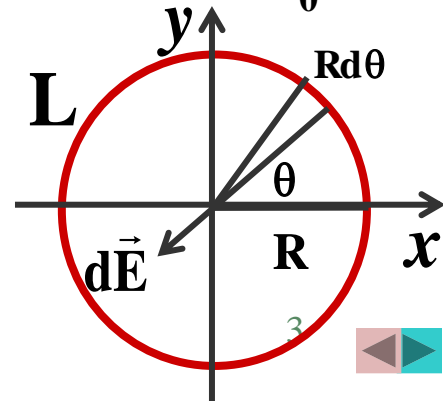
$r_2$ 不合题意，舍去。故电荷 $Q$ 应距电荷 $q$   $(\sqrt{2}-1)L$

1-4 半径为 $R$ 的带电圆环，其单位长度电量的分布为， $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$   
求(1)  $x$  轴上方半圆所带电量 (2) 在圆环圆心处的电场强度？

解：半圆所带电量为：  $q = \int_L \lambda_0 \sin\theta R d\theta = \lambda_0 R \int_0^\pi \sin\theta \cdot d\theta = 2\lambda_0 R$

在圆心处的场强：  $E_x = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 \sin\theta R \cos\theta \cdot d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 0$

$$E_y = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 \sin\theta R \sin\theta \cdot d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda_0 \pi}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}$$

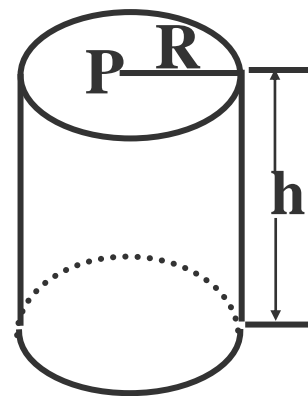


补充1.3 一均匀带电圆柱面, 电荷面密度为 $\sigma$ , 柱面高度为 $h$ , 半径为 $R$ , 求柱面上端面的中心P点的电场强度?

解: 在 $z$ 与 $z+dz$ 之间取一小圆环, 带电量:  $dq = 2\pi R dz \cdot \sigma$

$$dE = \frac{1}{4\epsilon_0 \pi} \frac{dq \cdot z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R\sigma dz}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

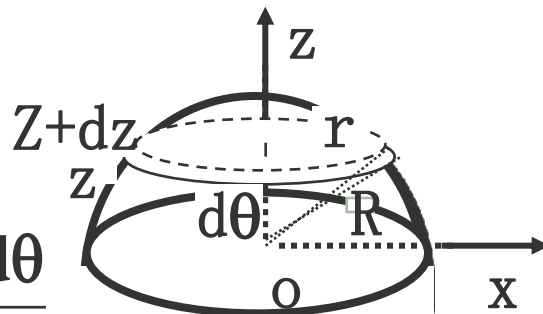
$$E = \int_0^{-h} \frac{R\sigma dz}{2\epsilon_0 (\kappa^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R\sigma}{4\epsilon_0} \frac{-2}{(\kappa^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^{-h} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$



1-5 半径为 $R$ , 面电荷密度为 $\sigma$ 的均匀带电上半球面的球心处场强

解: 两平面 $z, z+dz$ 所夹的球面看作半径为 $r$ 的小园环, 面积 $ds = 2\pi r \cdot dl = 2\pi R \sin\theta \cdot R d\theta$ , 带电量 $dq = \sigma \cdot ds$ , 此园环在球心 $o$ 处的场强为:

$$dE = \frac{z dq}{4\pi \epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{R \cos\theta \cdot \sigma ds}{4\pi \epsilon_0 R^3} = \frac{\sigma \sin\theta \cos\theta d\theta}{2\epsilon_0}$$



故球心 $o$ 处总场强为:  $E = \int dE = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma \sin\theta \cos\theta d\theta}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$



1-6 均匀带电的无限长细线, 弯成如图所示的形状, 若点电荷的线密度为 $\lambda$ , 半圆处半径为 $R$ , 求 $o$ 点处的电场强度.

解: $o$ 点场强是由三部分电荷产生的:



(1)半圆环场强:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad dE_x = dE \cdot \sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \sin\theta d\theta,$$

$$E_x = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dE_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}, \quad E_y = 0$$

(2)两半直线在 $o$ 点的场强:

$$dq = \lambda dx, \quad dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)},$$

$$dE_x = dE \cdot \cos\alpha = \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)} \cdot \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{R\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$E_x = 2 \int_0^{\infty} \frac{R\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

$$o \text{点场强: } E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = 0$$



**补充1.4** 求在点电荷 $q$ 的电场中, 通过半径为 $R$ 的圆形平面的电通量, 设 $q$ 位于该平面轴线上离圆心 $O$ 为  $h$  处.

解: $r \sim r+dr$ 之间圆环, $ds=2\pi r dr$

$$d\phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(h^2 + r^2)} \cdot 2\pi r dr \cdot \cos\theta = \frac{qhrdr}{2\epsilon_0(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\phi_e = \int_0^R \frac{qhrdr}{2\epsilon_0(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{qh}{2\epsilon_0(h^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^R = \frac{q}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{h}{(h^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

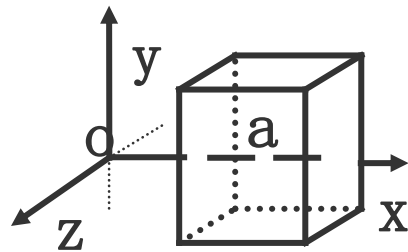
1-7 某一区域电场沿 $x$ 轴正方向, 场强  $E_x=800\sqrt{x}$  伏/米. 求: (1) 通过图示边长为 $a$ 的正方体表面的电通量; (2) 正方体内的正电量有多少? (设 $a=10$ 厘米)

解: 由电通量的定义 因为 $E_y$ 、 $E_z$ 为零,

$$\text{故 } \Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S E_x ds_x + \int_S E_y ds_y + \int_S E_z ds_z$$

$$\Phi = \int_S E_x ds = E_{1x} \Delta s_1 + E_{2x} \Delta s_2 = 800 \cdot a^{1/2} + 800(2a)^{1/2} \cdot a^2 = 1.05(V \cdot m)$$

$$\text{由于 } \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Sigma q / \epsilon_0 = \Phi \quad \text{故} \quad \Sigma q = \epsilon_0 \cdot \Phi = 9.29 \times 10^{-12}(C)$$



1-8 两同心球面, 半径分别为0.10米和0.30米, 内球面上带有 $q_1=1.0 \times 10^{-8}$ 库仑的电量, 外球面上带有 $q_2=1.5 \times 10^{-8}$ 库仑的电量, 求离球心为0.05米、0.20米、0.50米各处的电场强度.

解:由高斯定理求得的E分布:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{0 < r < 0.10} \\ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \mathbf{0.10 < r < 0.30} \\ \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \mathbf{r > 0.30} \end{cases}$$

$$E|_{r=0.05} = 0 \quad E|_{r=0.20} = \left. \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right|_{r=0.20} = 2.25 \times 10^3 (\text{V/m})$$

$$E|_{r=0.50} = \left. \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right|_{r=0.50} = 9 \times 10^2 (\text{V/m})$$



**补充1-5** 中性氢原子处于基态时,其电荷按密度  $\rho(r) = -ce^{-2r/a_0}$

分布在点电荷 $+e$ (原子核)的周围,这里 $a_0=0.529 \times 10^{-10}$ 米,是玻尔半径, $c$ 为一常数,旗帜可以有负电种植 $-e$ 定出. 试计算:(1)半径为 $a_0$ 的球内的静电荷. (2)离核距离为 $a_0$ 处的电场强度.

解: (1)  $r < a_0$  的静电荷:

$$-e' = \int_0^\infty \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi c \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot r^2 dr = c\pi a_0^3 \therefore c = \frac{-e'}{\pi a_0^3}$$

$$q = e' + \int_0^{a_0} \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = e' - \int_0^{a_0} \frac{4e}{a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot r^2 dr$$

$$= 5e' \cdot e^{-2} = 5e' \times 0.14 = 1.08 \times 10^{-19} (C)$$

(2) 由高斯定理求得:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{u_0^2} = 9.0 \times 10^9 \times \frac{1.12 \times 10^{-19}}{(0.529 \times 10^{-10})^2} = 3.47 \times 10^{11} (V/m)$$





1-9 一层厚度为0.5厘米的无限大平板, 均匀带电, 电荷体密度为  $1.0 \times 10^{-4}$  库仑/米<sup>3</sup>, 求:

- (1) 薄板中央的电场强度;
- (2) 薄板与表面相距0.1厘米处的电场强度;
- (3) 薄板内外的电场强度;

解: 在板内作一对称高斯面, 由高斯定理求得:

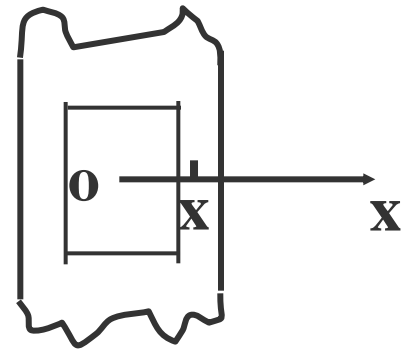
$$2\mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = \frac{2\mathbf{x} \cdot \mathbf{s} \cdot \rho}{\epsilon_0} \quad \therefore \mathbf{E} = \frac{\mathbf{x}\rho}{\epsilon_0}$$

(1) 板中央  $\mathbf{x}=0$  处,  $\mathbf{E}=0$ ;

(2)  $\mathbf{x}=0.15\text{cm}$ ,  $\mathbf{E}=1.69 \times 10^4 (\text{V/m})$ ;

(3) 板外,

$$2\mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{s} \cdot \rho}{\epsilon_0} \quad \therefore \mathbf{E} = \frac{\rho \mathbf{d}}{2\epsilon_0} = 2.83 \times 10^4 (\text{v/m})$$



1-10 两个无限长的共轴圆柱面，半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ ，面上都均匀带电，沿轴线单位长度的电量分别为 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ ，求：

(1) 场强分布；(2) 若 $\lambda_1 = -\lambda_2$ ，情况如何？画出 $E-r$ 曲线。

解：由圆柱面的对称性， $E$ 的方向为垂直柱面，故作一共轴圆柱面为高斯面，由高斯定律得：

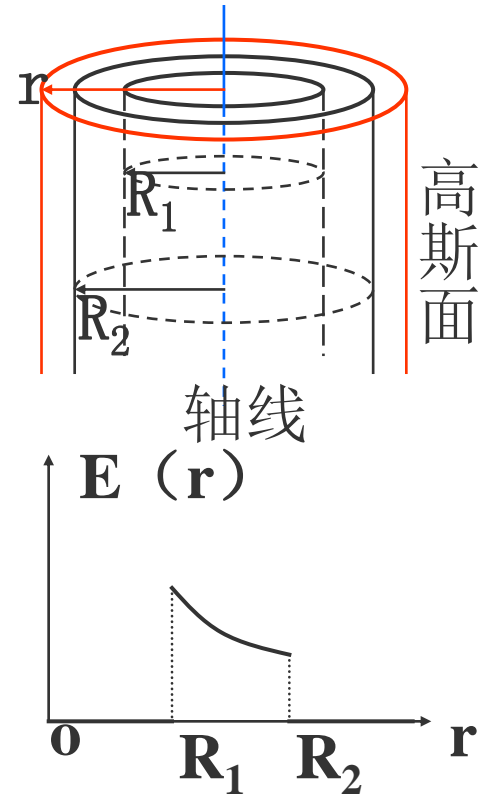
$$\text{当 } r < R_1, \quad \mathbf{E}_1 \cdot 2\pi r L = \frac{0}{\epsilon_0}, \quad \mathbf{E}_1 = 0$$

$$\text{当 } R_1 < r < R_2, \quad \mathbf{E}_2 \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda_1 L}{\epsilon_0}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\text{当 } r > R_2, \quad \mathbf{E}_3 \cdot 2\pi r L = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)L}{\epsilon_0}, \quad \mathbf{E}_3 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\pi\epsilon_0 r}$$

若 $\lambda_1 = -\lambda_2$ ， $E_1$ 和 $E_2$ 不变，即

$$\mathbf{E}_1 = 0 \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{而} \quad \mathbf{E}_3 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\pi\epsilon_0 r} = 0$$



补充1.6 内外半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ 的无限空心直圆柱体均匀带电, 电荷体密度为 $\rho$ . 求空间任一点的电场, 并做 $E \sim r$ 图.

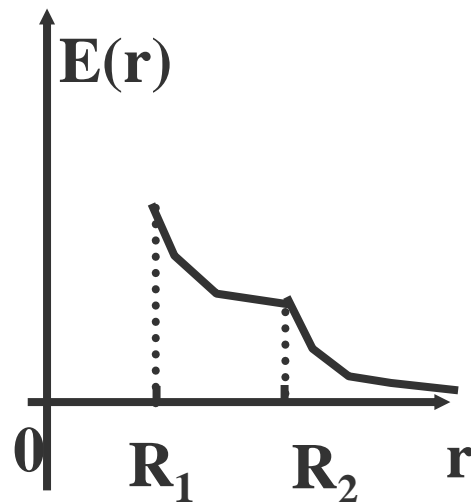
解:  $0 < r < R_1$      $E \cdot 2\pi r L = \frac{0}{\epsilon_0}$      $E = 0$

$R_1 < r < R_2$      $E \cdot 2\pi r L = \frac{\int_{R_1}^r \rho 2\pi r dr \cdot L}{\epsilon_0} = \frac{\rho L \pi (r^2 - R_1^2)}{\epsilon_0}$

$$E = \frac{\rho(r^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r}$$

$r > R_2$      $E \cdot 2\pi r L = \frac{\rho L \pi (R_2^2 - R_1^2)}{\epsilon_0}$

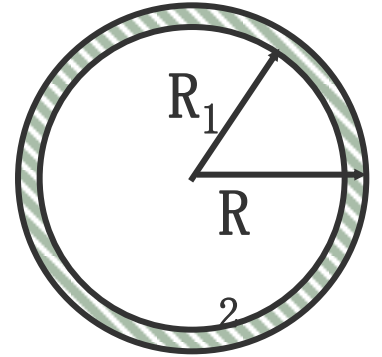
$$E = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r}$$



1-11 一带电厚球壳，其内外半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ ，电荷体密度 $\rho=A/r$ ， $A$ 为已知恒量，求其场强分布。

解：作一半径为 $r$ 的同心球面为高斯面。

$$\text{当 } r < R_1 \quad \mathbf{E} \cdot 4\pi r^2 = 0, \quad \therefore \mathbf{E} = 0$$



$$\text{当 } R_1 < r < R_2 \quad \mathbf{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{\int_{R_1}^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A \cdot r \sin\theta dr d\theta d\phi \quad \therefore \mathbf{E} = \frac{A(r^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r^2}$$

同理，当 $r > R_2$

$$\mathbf{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A \cdot r \sin\theta dr d\theta d\phi \quad \therefore \mathbf{E} = \frac{A(R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r^2}$$



补充1.7 假定一个半径为R的球内均匀分布着正电荷, 电荷体密度 $\rho$ , 试用高斯定理证明, 离球心 $r$  ( $r \leq R$ ) 处的一个正电荷 $q$ 所受斥力为

$$\mathbf{F} = \rho q \mathbf{r} / 3\epsilon_0.$$

解:由高斯定理求得:

$$\mathbf{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{\int \rho dV}{\epsilon_0} = \frac{\int_0^r \rho \cdot 4\pi r'^2 dr'}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot 4\pi r^3}{3\epsilon_0} \quad \therefore \mathbf{E} = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0}$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{q \rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0}$$

1-12 将 $q=1.7 \times 10^{-8}$ 库仑的点电荷从电场中的A点移到B点, 外力需做功 $5.0 \times 10^{-8}$ 焦耳, 问A, B两点间的电势差是多少? 哪点电势高? 若设B点的电势为零, A点的电势为多大?

解:(1)  $A_{AB}=q(V_A-V_B)$ ,  $W_{AB}=-A_{AB}=+5.0 \times 10^{-8}$

即 $q(V_A-V_B)=-5.0 \times 10^{-8}$        $V_A-V_B=-2.94(V)$       B点电势高

(2)  $V_B=0$        $V_A=-2.94$        $V_B=-2.94(V)$



1-13 点电荷 $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_3$ 、 $q_4$  各为 $4 \times 10^{-9}$  库仑，置于正方形的四个顶点上，各点距正方形中心O点均5厘米。

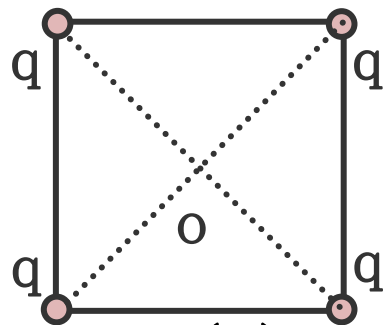
(1) 计算O点的场强和电势：(2) 将 $q_0 = 10^{-9}$  库仑的试探电荷从无限远处移到O点，电场力作功多少？(3) 电势能的改变为多少？

解：由于 $q$ 对于O点对称， 电场强度  $E_o = 0$

电势为 
$$v_o = 4 \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = 2.88 \times 10^3 (V)$$

电场力作功为 
$$A_e = \int_{\infty}^0 q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q_0 v_o = -2.88 \times 10^{-6} (J)$$

电势能的改变为 
$$\Delta W = -A_e = 2.88 \times 10^{-6} J$$



1-14 两个点电荷，电量分别为 $+4q$ 和 $-q$ ，相距为 $L$ ，求电场中电势为零的点的位置，该点的电场强度是多少？

解：(1) 
$$\frac{4q}{4\pi\epsilon_0(L-x)} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} = 0 \quad \therefore \frac{4}{(L-x)} - \frac{1}{x} = 0 \quad x = \frac{1}{5}L$$

(2) 
$$E = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0(L - \frac{4}{5}L)^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(\frac{1}{5}L)^2} = \frac{25q}{4\pi\epsilon_0 L^2} \times \frac{3}{2} = \frac{75q}{8\pi\epsilon_0 L^2}$$

补充1.8 题设条件和题1-12相同, 求各点电势?

解:  $V|_{r=0.05} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 1350(V)$

$$V|_{r=0.20} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 900(V) \quad V|_{r=0.50} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = 450(V)$$

1-15 电荷 $q$ 均匀分布在半径为 $R$ 的球体内, 求球内的电势。

解: 作一半径为 $r_0$ 同心球面为高斯面。且  $q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$

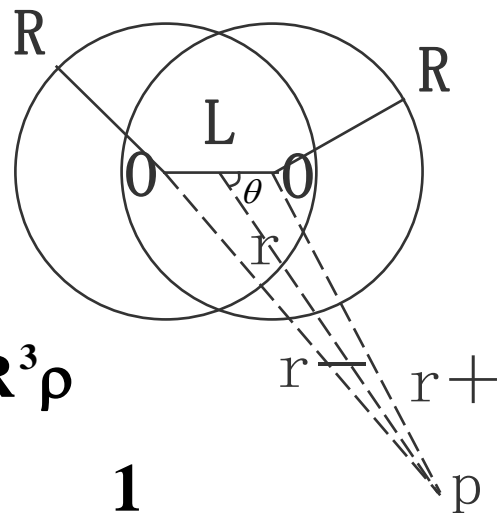
$$\text{当 } 0 < r_0 < R \quad E \cdot 4\pi r_0^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3}{\epsilon_0} \quad \text{故 } E = \frac{\rho r_0}{3\epsilon_0}$$

$$\text{当 } r_0 > R \quad E \cdot 4\pi r_0^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \quad \text{故 } E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r_0^2}$$

$$r \text{ 处的电势为 } V = \int_r^\infty E dr = \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

1-16 有两个半径为 $R$ 的球体, 球心相距为 $L$  ( $L < R$ )。在两球各自不于另一个球重叠的部分均匀地带电, 体电荷密度分别为  $+\rho$  和  $-\rho$ 。试求在球外任一点 ( $r \gg L$ ) 电势, 并与偶极子电场比较, 确定其等效电偶极距。

解: 由于重叠部分不带电, 等价于各球带等密度异种电荷。而球外一点电势等价于电荷集中于球心的电势。



故 
$$V = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_-} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} \quad (r \gg L) \text{ 其中 } q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

又有 
$$r_-^2 = r^2 + \frac{L^2}{4} + 2 \cdot \frac{L}{2} r \cos \theta$$

$$\frac{1}{r_-} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{L^2/4 + Lr \cos \theta}{r^2}\right)^{1/2}}$$

由二项式定理

$$\frac{1}{r_-} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{L \cos \theta}{2r} + \frac{L^2}{8r^2} + \dots \right)$$

同理 
$$\frac{1}{r_+} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{L \cos \theta}{2r} + \frac{L^2}{8r^2} + \dots \right)$$

故 
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \approx \frac{qL \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$





1-17 利用电势梯度求体电荷密度为 $\rho$ ，半径为 $R$ 均匀带电球体的电场强度。

解：

$$r > R \text{ 时} \quad V = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$$

$$\text{由 } \mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{可得 } \mathbf{E} = -\frac{d}{dr} \left[ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} \right] = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$r < R \text{ 时} \quad V = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho(3R^2 - r^2)}{6\epsilon_0}$$

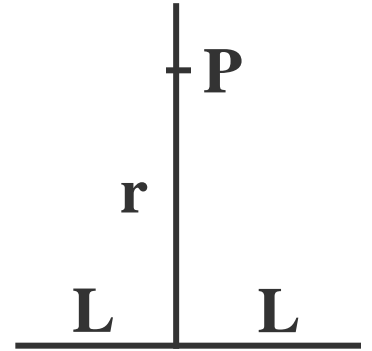
$$\text{由 } \mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{可得 } \mathbf{E} = -\frac{d}{dr} \left[ \frac{\rho(3R^2 - r^2)}{6\epsilon_0} \right] = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$



补充1.9 电量 $q$ 均匀分布在长为 $2L$ 的细直线上, 求其中垂面上离带电线段垂直距离为 $r$ 处的电势, (见图), 并利用梯度求电场强度.

解:

$$dq = \frac{q}{2L} dz, \quad d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{q}{2L} dz}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$



$$\varphi = 2 \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2L} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln(z + \sqrt{r^2 + z^2}) \Big|_0^L$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{L + \sqrt{r^2 + L^2}}{r}\right)$$

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r \sqrt{r^2 + L^2}}$$



## 第二章 静电场中的导体与电介质

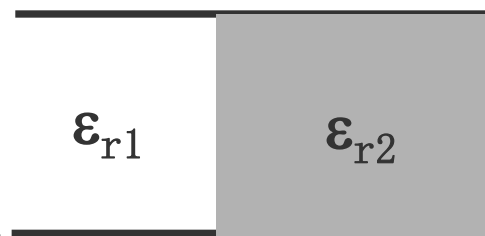
2-1 如图在电容器中充入两种介质, 其相对电容率为  $\epsilon_{r1}$  和  $\epsilon_{r2}$

(1) 在充入介质保持电源与电容器的极板相连接; (2) 电容器充电后, 与电源断开, 再充入介质, 以上两种情况下, 两种介质中的场强之比? 极板上电荷是否均匀? (3) 这两种情况下电容如何计算?

解:(1) 保持电源与电容器相连再充入介质,

$Q_0$  变  $U_1=U_2$ ,  $E_1=E_2$ ,

$$\therefore \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{D_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}, \quad \because D = \sigma \quad \frac{\sigma_1}{\epsilon_{r1}} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_{r2}}$$



(2) 充电后, 与电源断开, 再充入介质,  $Q_0$  不变,  $U'_1=U'_2$ ,

$$E'_1=E'_2, \quad \therefore \frac{D'_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{D'_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}, \quad \because D' = \sigma' \quad \frac{\sigma'_1}{\epsilon_{r1}} = \frac{\sigma'_2}{\epsilon_{r2}}$$

(3) 这两种情况下电容可看作并联

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S_1}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S_2}{d}$$

2-2 如图平行板电容器面积为 $S$ , 两板间距为 $d$ . (1) 在保持电源与电容器的极板相连接情况下插入厚度为 $d'$ 介质, 求介质内外场强之比; (2) 电容器与电源断开, 再插入介质, 情况如何? (3) 插入不是介质, 而是金属平板. (1), (2) 这两种情况如何?

解: (1) 在保持电源与电容器的极板相连接情况下插入厚度为 $d'$ 介质, 介质内外场强之比.

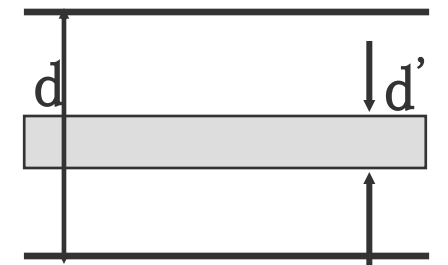
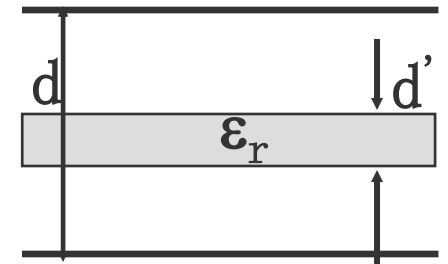
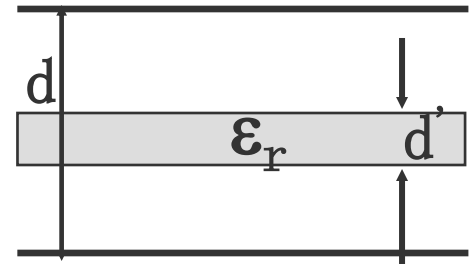
$$D = D_1 = D_2 = \sigma, \quad \epsilon_0 E_1 = \epsilon_r \epsilon_0 E_2, \quad \frac{E_1}{E_2} = \epsilon_r$$

(2) 先充电后再插入介质,

$$D' = \sigma' = D'_1 = D'_2, \quad \epsilon_0 E'_1 = \epsilon_0 \epsilon_r E'_2, \quad \frac{E'_1}{E'_2} = \epsilon_r$$

(3) 如果插入的不是介质板而是一块金属板, 金属板内 $E=0$ , 电势差变小:

$$V = E(d - d') = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(d - d'), \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 S}{d - d'}$$



2-3 在一个点电荷的电场中,以点电荷所在处作一个球形封闭曲面,问在下列情况下,高斯定律是否成立?有能否由高斯定律求出这些曲面上的电场强度? (1) 电场中有一块对球心不对称的电解质; (2) 电场中有一块以点电荷为中心的均匀球壳形电解质。

解:下列(1)(2)情况,高斯定律均成立!但 :

(1) 电场中有一块对球心不对称的电解质,极化后产生一附加场  $E'$ ,这样各点电场不再球面对称,不能由高斯定律求出这些曲面上的电场强度!

(2) 电场中有一块以点电荷为中心的均匀球壳形电解质。这样各点电场是球面对称,能由高斯定律求出这些球形封闭曲面的电场强度

2-4 下列说法是否正确,为什么? (1) 高斯面内如无自由电荷,则面上各点  $D$  必为零; (2) 高斯面上各点的  $D$  为零,则面内一定没有自由电荷. (3) 高斯面上各点的  $E$  均为零,则面内自由电荷电量的代数和为零,极化电荷电量的代数和也为零; (4) 通过高斯面的  $D$  通量只与面内自由电荷的电量有关; (5)  $D$  仅与自由电荷有关。

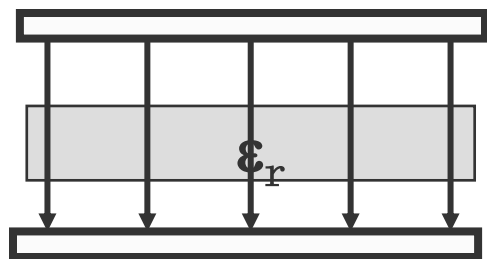


解: 高斯定理是研究闭曲面 $\mathbf{D}$ 的通量等于面内自由电荷电量的代数和, 而 $\mathbf{D}$ 本身不仅与自由电荷有关, 还与极化电荷有关. 故:

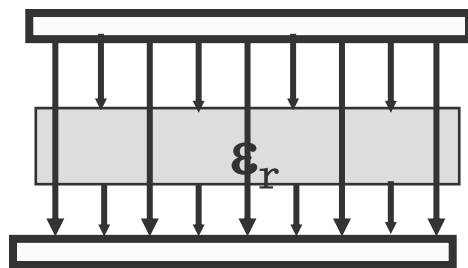
- (1) 面内如无自由电荷, 而面外有, 则面上各点 $\mathbf{D}$ 不见得为零;
- (2) 高斯面上各点的 $\mathbf{D}$ 为零, 则面内一定没有自由电荷。正确!
- (3) 高斯面上各点的 $\mathbf{E}$ 均为零, 则面内自由电荷电量的代数和为零, 极化电荷电量的代数和也为零;
- (4) 通过闭合高斯面的 $\mathbf{D}$ 通量只与面内自由电荷的电量有关; 这种才对!
- (5) 不对.  $\mathbf{D}$ 本身不仅与自由电荷有关, 还与极化电荷有关.

2-5  $\mathbf{D}$ 线,  $\mathbf{E}$ 线和 $\mathbf{P}$ 线各起自何处?

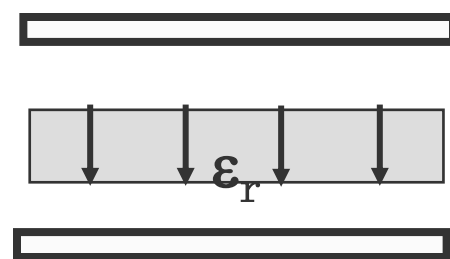
答: 以平行板电容器介质板为例画出 $\mathbf{D}$ 线,  $\mathbf{E}$ 线和 $\mathbf{P}$ 线示意图.



$\mathbf{D}$ 线



$\mathbf{E}$ 线



$\mathbf{P}$ 线



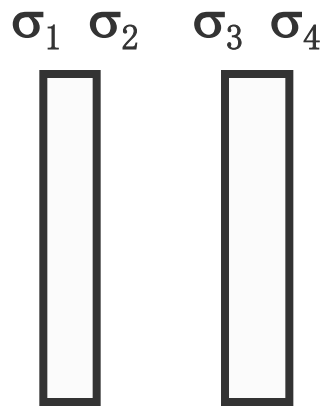
2-6 证明两个无限大平行带电导体板(1)相向的两面上, 电荷的面密度总是大小相等而异号; (2)相背的两面上, 电荷的面密度总是大小相等而同号。

证明: 设各板面电荷密度为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ 。

由电荷守恒, 得:

$$\sigma_1 S + \sigma_2 S = Q_1$$

$$\sigma_3 S + \sigma_4 S = Q_2$$



由左导体内电场为零得:

$$\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0$$

由右导体内电场为零得:

$$\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0$$

连立上述四个方程解得:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{2S} \\ \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_1 - Q_2}{2S} \end{cases}$$



2-7 两个面积均为S的平行金属板，两板间距d远小于板的限度，已知其中一块金属板上带的电量是q，另一块上所带电量是2q，试求（1）板上各面的面密度是多少？（2）两板间的电势差是多少？（3）两板外电场强度是多少？

解：(1) 以2-6的结果，以 $Q_1=q$ ， $Q_2=2q$ 带入求得：

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{3q}{2s} \qquad \sigma_1 = -\sigma_3 = \frac{-q}{2s}$$

$$(2) \text{ 两板间的电势差 } v_1 - v_2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} d = -\frac{q \cdot d}{2\epsilon_0 s}$$

(3) 两板外的电场由高斯定理求得：

$$\mathbf{E} \cdot \Delta s = \frac{\sigma_4 \cdot \Delta s}{\epsilon_0} \qquad \mathbf{E} = \frac{\sigma_4}{\epsilon_0} = \frac{3q}{2\epsilon_0 s}$$





补充2.1 有一半径为0.01米的金属球A带电 $q=1.0 \times 10^{-8}$ 库仑，把原来一个不带电的半径为0.20米的薄金属球壳B同心的罩在球A的外面。(1)求距球心0.05米处的电势；(2)求距球心0.15米处的电势；(3)求B球的电势；(4)若A, B两球用导线连接, 求B球的电势。

解：由高斯定理求得电场E的分布：

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{0} & 0 < r < 0.1 \\ \frac{\mathbf{q}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & 0.1 < r < 0.2 \\ \frac{\mathbf{q}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & 0.2 < r < \infty \end{cases}$$

由  $v = \int_x^\infty \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}}$  求得电势分布：

$$(1) \quad v(0.05) = \int_{0.05}^{0.1} 0 dr + \int_{0.1}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \left. \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right|_{r=0.1}^{\infty} = 900(\text{V})$$



$$(2) \quad v(0.15) = \int_{0.15}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r=0.15} = 600(\text{v})$$

$$(3) \quad v(0.2) = \int_{0.2}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r=0.2} = 450(\text{v})$$

(4) 若A, B两球用导线连接, 内球上的电荷转移到外球上,  
故

$$v = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r=0.2} = 450(\text{v})$$

2-8有半径为 $R_1$ 和 $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) 的两个相互绝缘的同心金属球壳, 现在把 $+q$ 的电量给予内球, 问(1)外球的电荷和电势; (2)把外球接地后, 重新绝缘, 这时外球的电荷和电势.

解: 由静电感应可知, 外球内壁带 $-q$ , 外壁带 $+q$ 。  
故

$$v_{\text{外}} = \int_{R_2}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_2}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}^0 \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

外球接地后, 其外壁不再带电, 电场集中在内外球壳间, 故 $v_{\text{外}} = 0$  

2-9 将电量为 $4 \times 10^{-10}$ 库仑的点电荷，放在内外半径分别为 $R_1=2.0$  厘米， $R_2=3.0$  厘米的原不带电的导体球壳的中心，求（1）导体球壳的电势；（2）离球心  $r=1.0$  厘米处的电势；（3）把点电荷移至离球心 $r=1.0$  厘米处，导体球壳的电势。

解：（1）球壳电势为 
$$v_{\text{壳}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 120(\text{V})$$

（2）球壳电势 
$$v = \int_r^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 300(\text{V})$$

（3）点电荷在壳内移动不影响壳外电势，故 
$$v_{\text{壳}} = 120(\text{V})$$

补充2.2 以内外半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ 的金属球壳，带电量为 $Q$ ，问：

（1）球心处的电势是多少？（2）若再在球壳内离球心为 $r_0$ 处，绝缘地放置一个点电荷 $q_0$ ，这时球心处的电势是多少？（3）若在球外离球心为 $r$ 处再放置一个电量为 $q$ 的点电荷，球心处的电势是多少？

解：（1）当求带电为 $Q$ 时，球壳电势为：
$$v = \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

球内各点电势均为 $Q/4\pi\epsilon_0 R_2$



(2)若球壳内离球心为 $r_0$ 处放一点电荷 $q_0$ ,由于静电感应,球壳内表面电荷为 $-q_0$ ,球壳外表面电荷为 $Q+q_0$ ,故球心电势为这三部分电荷的电势的叠加:

$$v_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r_0} + \frac{-q_0}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q+q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

(3)若球外 $r$ 处又放一点电荷 $q$ ,在球外表面上又感应出等量异号电荷,但他在球心电势为零,故球心处电势为:

$$v_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r_0} + \frac{-q_0}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q+q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

补充2.3 有两个同轴的圆柱面,面内柱面半径为 $R_1$ ,电势为 $U_1$ ,外柱面半径为 $R_2$ ,电势为 $U_2$ ,求两柱面间两点的电势差。

解: 设内筒单位长度的电量为 $\lambda_1$ ,外筒为 $\lambda_2$ ,故 $R_1$ 与 $R_2$ 之间的电场强度  $E=\lambda_1/2\pi\epsilon_0 r$ ,两筒之间电势差:

$$V_{12} = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



$\therefore \lambda_1 = \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot 2\pi\epsilon_0}{\ln(\mathbf{R}_2/\mathbf{R}_1)}$  在两筒之间 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 两点的电势差:

$$\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2' = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1} = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{\ln(\mathbf{r}_2/\mathbf{r}_1)}{\ln(\mathbf{R}_2/\mathbf{R}_1)}$$

**2-10** 两同心导体球壳，内球和外球的半径分别为 $\mathbf{R}_1$ 和 $\mathbf{R}_2$ ，设该系统与地面以及其他物体相距都很远，现将内球通过细导线接地，试证明此时系统的电容可用如下公式表示：

$$\mathbf{C} = \frac{4\pi\mathbf{R}_2^2}{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1}$$

证明：把内球接地电势为零可与无限远电势为零等同起来。这样可看作：内球与外球的内表面组成一个球形电容器，外球的外表面与无限远处构成一个球电容器，但它们之间是并联关系。故

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\text{球形}} + \mathbf{C}_{\text{球}} = \frac{4\pi\epsilon_0 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1}{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1} + 4\pi\epsilon_0 \mathbf{R}_2 = \frac{4\pi\epsilon_0 \mathbf{R}_2^2}{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1}$$



2-11 三个平行金属板A、B、C面积均为200平方厘米，AB间距离4.0毫米，AC间距离2.0毫米，B和C都接地。如果使A板带正电， $Q=3 \times 10^{-7}$  库仑，求：(1) B、C上的感应电荷；(2) A板上的电势。

解：由图可知

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{A_1} + \sigma_{A_2} = \frac{Q}{S} \\ \sigma_{A_1} = -\sigma_B \\ \sigma_{A_2} = -\sigma_C \\ E_1 d_1 = E_2 d_2 \\ E_1 = \frac{\sigma_{A_1}}{\epsilon_0}, E_2 = \frac{\sigma_{A_2}}{\epsilon_0} \end{array} \right.$$

由此得出

$$\sigma_C = -\sigma_{A_2} = -10^{-5} (\text{C/m}^2)$$

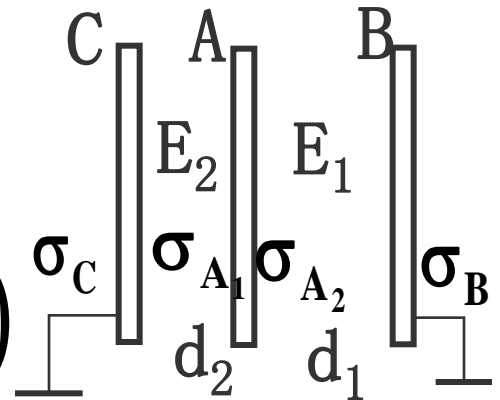
$$\sigma_B = -\sigma_{A_1} = -0.5 \times 10^{-5} (\text{C/m}^2)$$

故

$$q_C = \sigma_C S = -2 \times 10^{-7} \text{ C}$$

$$q_B = \sigma_B S = -1 \times 10^{-7} \text{ C}$$

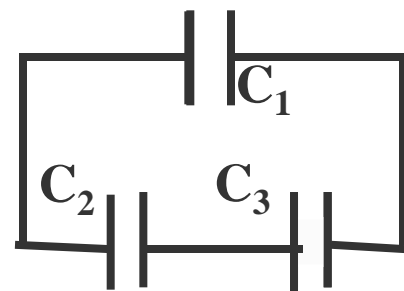
$$V_A = V_{AC} = E_2 d_2 = \frac{\sigma_{A_2} d_2}{\epsilon_0} = 2260 (\text{V})$$



2-12 有三个电容 $C_1, C_2, C_3$ 先将 $C_1$ 充电致电压 $U_0$ ,然后再将 $C_1$ 何以串联好的 $C_2, C_3$ 并联起来, 如图, 求各电容上的电压和电量。

解:  $q_0 = C_1 V_0$ ,  $C_2$ 与 $C_3$ 串联再与 $C_1$ 并联的电容为

$$C = C_1 + \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} = \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$



$C$ 的带电量 $q = C_1 V_0$ , 故等效电容 $C$ 的电势为:

$$V_1 = \frac{q}{C} = \frac{C_1 V_0 (C_2 + C_3)}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3},$$

$$\begin{cases} V_2 + V_3 = V_1 = \frac{C_1 V_0 (C_2 + C_3)}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} \\ C_2 V_2 = C_3 V_3 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} V_2 = \frac{C_1 C_3 V_0}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} \\ V_3 = \frac{C_1 C_2 V_0}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} \end{cases}$$

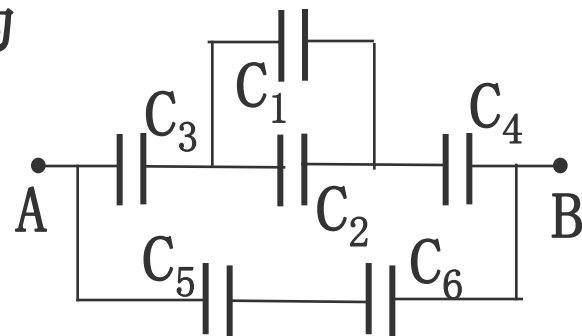
2-13 图中 $C_1 = C_2 = C_4 = 2.0$ 微法,  $C_3 = C_5 = C_6 = 4.0$ 微法, 求(1) AB间电容; (2) AB间电压为200伏时, 每块极板上的电量; (3) 每个电容存储的电。

解:(1)  $C_1$  并  $C_2$  为  $C' = 4.0\mu\text{F}$  再与  $C_3$  和  $C_4$  串联为

$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C'} \quad \therefore C'' = 1\mu\text{F}$$

$C_5$  和  $C_6$  串联后, 再与  $C''$  并联的电容为

$$C = C'' + C''' = C'' + \frac{C_5 C_6}{C_5 + C_6} = 3\mu\text{F}$$



(2) 设  $V = 200$  伏, 则 AB 间电荷为  $q = CV = 6 \times 10^{-4} \text{C}$

由于  $C'' : C''' = 1 : 2$  故  $q'' : q''' = 1 : 2$  因此

$$q_3 = q_4 = q'' = 2 \times 10^{-4} \text{C} \quad q_5 = q_6 = q''' = 4 \times 10^{-4} \text{C}$$

同理由于  $C_1 : C_2 = 1 : 1$  故  $q_1 : q_2 = 1 : 1$  , 因此

$$q_1 = q_2 = \frac{q''}{2} = 1 \times 10^{-4} \text{C}$$

电容存储的电能为  $W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$ , 因此可得

$$W_1 = W_2 = 2.5 \times 10^{-3} \text{J} \quad W_3 = 5 \times 10^{-3} \text{J} \quad W_4 = 10^{-2} \text{J} \quad W_5 = W_6 = 2 \times 10^{-2} \text{J}$$



2-14 计算两根带异号电荷的平行导线单位长度的电容，导线的半径均为 $a$ ，距离为 $d$  ( $d \gg a$ )，设导线可视为无限长，电荷均匀分布。

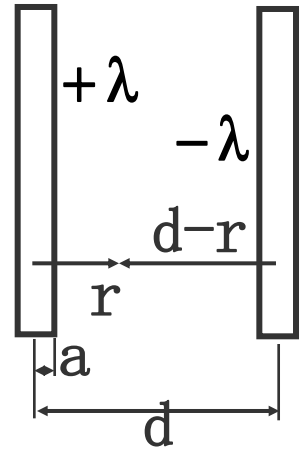
解：由于  $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \mathbf{r}}, \quad \mathbf{E}_- = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 (\mathbf{d} - \mathbf{r})}$$

$$\text{故 } \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\mathbf{r}} + \frac{1}{\mathbf{d} - \mathbf{r}} \right)$$

$$\Delta V = \int_a^{d-a} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a} \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}$$

$$\text{因而 } C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{d}{a}} \quad C_{\text{单位长}} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}}$$



2-15 今需要一个耐压900伏、500微微法的电容，能否用两个分别标有“200pF 500V”和“300pF 900V”的电容来代替？

解：若电容串联，则增大耐压，减小电容，

$$V = V_1 + V_2 = 500 + 900 = 1400(\text{V}) \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{200 \cdot 300}{200 + 300} = 120(\text{pF})$$

若并联，耐压不变，容量增大， $C = C_1 + C_2 = 200 + 300 = 500(\text{pF})$

因而串联、并联都不行。不能用两个电容来代替。

补充2.4 两块平行导体板，面积各为100厘米板上带有 $8.9 \times 10^{-7}$ 库仑的等量异号电荷，在两板间充满电介质，已知介质内部电场强度为 $1.4 \times 10^6$ 伏特/米，求：（1）电介质的相对电容率  $\epsilon_r$ ；（2）电介质的极化面电荷密度。

解： 由于  $E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$ ，故  $\epsilon_r = \frac{Q}{\epsilon_0 E S} = 7.18$

由于  $E = D - P = \frac{Q}{\epsilon_0 S} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$  故  $\sigma' = \frac{Q}{S} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) = 7.66 \times 10^{-5} (\text{C} \cdot \text{m}^{-2})$



**2-16** 在一平行板电容器的极板上，带有等值异号电荷，两板间的距离为5.0毫米，以 $\epsilon_r=3$ 的电介质，介质中的电场强度为 $1.0 \times 10^6$ 伏特/米，求：(1)介质中电位移 $\mathbf{D}$ ；(2)极板上自由电荷面密度 $\sigma_0$ ；(3)介质中的极化强度 $\mathbf{P}$ ；(4)介质面上的极化电荷面电荷密度 $\sigma'$ ；(5)极板上自由电荷产生的电场强度 $E_0$ ；(6)极化电荷产生的电场强度 $E'$

。解：(1)  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = 2.7 \times 10^{-5} (\text{库仑} / \text{米}^2)$

(2)  $\sigma_0 = D = 2.7 \times 10^{-5} (\text{库仑} / \text{米}^2)$

(3)  $\mathbf{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} = 1.8 \times 10^{-5} (\text{库仑} / \text{米}^2)$

(4)  $\sigma = \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = P = 1.8 \times 10^{-5} (\text{库仑} / \text{米}^2)$

(5)  $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{2.7 \times 10^{-5}}{8.85 \times 10^{-12}} = 3.0 \times 10^6 (\text{伏} / \text{米})$

(6)  $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = 2.0 \times 10^6 (\text{伏} / \text{米})$



2-17一空气平行板电容器, 面积 $S=0.2\text{米}^2$ ,  $d=0.1\text{厘米}$ , 充电后断开电源, 其电位差 $V=3\times 10^3\text{伏}$ , 当将电介质充满极间后, 电压降至1000伏, 计算: (1) 原电容; (2) 导体极板上的自由电荷的电量; (3) 放入介质后的电容; (4) 两板间原场强和充入介质后的场强; (5) 介质面上的极化电荷; (6) 电介质的相对介电常数  $\epsilon_r$  。

解: (1) 原电容为  $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = 177\text{pF}$

(2) 极板上自由电荷的电量  $q_0 = C_0 V_0 = 5.31 \times 10^{-7} \text{C}$

(3) 放入介质后的电容  $C = \epsilon_r C_0 = 531\text{pF}$

(4) 两板间原场强  $E_0 = \frac{V_0}{d} = 3 \times 10^5 (\text{V} \cdot \text{m}^{-1})$

充入介质后的场强  $E = \frac{V}{d} = 1 \times 10^5 (\text{V} \cdot \text{m}^{-1})$

(5) 介质面上的极化电荷

$$\sigma' = \rho_n = P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E \quad q' = \sigma' S = 3.54 \times 10^{-7} \text{C}$$

(6) 电介质的相对介电常数  $\epsilon_r = C/C_0 = V_0/V = 3$

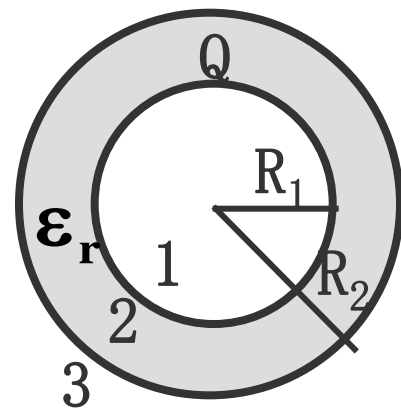


2-18 在半径为 $R_1$ 的金属球之外有一均匀电介质层，其外半径为 $R_2$ ，电介质的相对电容率为 $\epsilon_r$ ，金属球带的电量为 $Q$ ，求(1)介质层内外场强分布；(2)介质层内外电势分布；(3)金属球的电势；(4)该系统所储存的静电能。

解：(1) 由高斯定理求得介质中 $D_2=Q/4\pi r^2$

$$\text{又 } D=\epsilon_0\epsilon_r E, \text{ 故介质层内场强 } E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$$

$$\text{在介质外场强为 } E_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



$$(2) \text{ 介质内电势为 } v_2 = \int_r^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} \right)$$

$$\text{介质外电势为 } v_3 = \int_r^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$(3) \text{ 金属球电势为 } v_{\text{金}} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} \right)$$

(4) 系统所储存的静电能为

$$W = \int \omega_e dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E_2^2 (4\pi r^2 dr) + \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_3^2 (4\pi r^2 dr) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} \right)$$

补充2.5 球形电容器是半径为 $R_1$ 的的导体球与和它同心的导体球壳组成的，球壳的内半径为 $R_3$ ，其间充入两层均匀电介质，分界面的半径为 $R_2$ ，它们的相对电容率分别为  $\epsilon_{r1}$ 和  $\epsilon_{r2}$ ，求电容 $C$ 。

解：设两板各带 $+Q$ 和 $-Q$ 则介质中场强为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}r^2} \quad \mathbf{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}r^2}$$

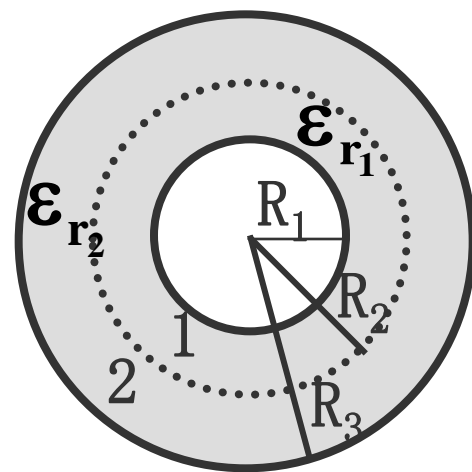
因而介质中电势差为

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \bar{\mathbf{E}}_1 \cdot d\bar{\mathbf{l}} + \int_{R_2}^{R_3} \bar{\mathbf{E}}_2 \cdot d\bar{\mathbf{l}}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}R_1R_2R_3} \left[ \epsilon_{r2}R_3(R_2 - R_1) + \epsilon_{r1}R_1(R_3 - R_2) \right]$$

故电容为

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}R_1R_2R_3}{\epsilon_{r2}R_3(R_2 - R_1) + \epsilon_{r1}R_1(R_3 - R_2)}$$



补充2.6 当上题中，内球上带有电量Q时，求各介质表面上极化电荷面密度是多少？

解:由上题的结果:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}r^2} & \mathbf{R_1 < r < R_2} \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}r^2} & \mathbf{R_2 < r < R_3} \\ 0 & \mathbf{r < R_1, r > R_3} \end{cases}$$

由  $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$  求得的  $\mathbf{P}$  分布

$$\mathbf{P} = \begin{cases} \frac{(\epsilon_{r1} - 1)Q}{4\pi\epsilon_{r1}r^2} & \mathbf{R_1 < r < R_2} \\ \frac{(\epsilon_{r2} - 1)Q}{4\pi\epsilon_{r2}r^2} & \mathbf{R_2 < r < R_3} \end{cases}$$

$$\mathbf{r = R_1处} \quad \sigma' = -\mathbf{P(R_1)} = \frac{(1 - \epsilon_{r1})Q}{4\pi\epsilon_{r1}R_1^2}$$



$$r = R_2 \text{处} \quad \sigma' = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n} = \frac{(\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2})Q}{4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}R_2^2}$$

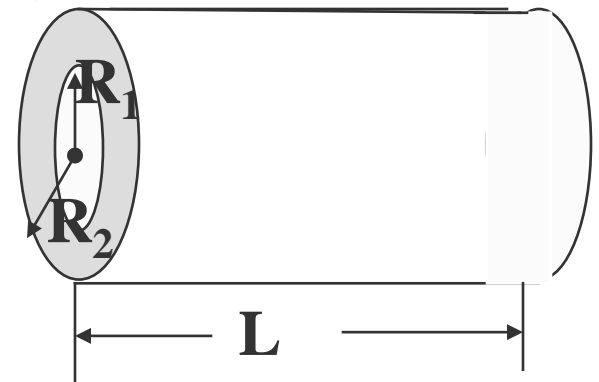
$$r = R_3 \text{处} \quad \sigma' = -P(R_3) = \frac{(1 - \epsilon_{r2})Q}{4\pi\epsilon_{r2}R_3^2}$$

补充2.7 圆柱形变容器是由半径为 $R_1$ 的导体圆柱和与它同轴的导体圆柱面组成，柱面内半径为 $R_2$ ，长为 $L$ ，其间充满相对电容率为 $\epsilon_r$ 的电介质，如图。内外导体带等量异号电荷，单位长度的电量为 $\pm\lambda_0$ ，求：（1）介质中的电位移 $\mathbf{D}$ ，电场强度 $\mathbf{E}$ 和极化强度 $\mathbf{P}$ 的值；（2）极化电荷的面密度 $\sigma'$ ；（3）极间电势差。

解：在 $R_1 < r < R_2$ 的介质区间内，

$$(1) \text{ 由 } \oiint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q, \text{ 求得： } D = \frac{\lambda_0}{2\pi r}$$

$$\text{由 } D = \epsilon_0 \epsilon_r E, \text{ 求得： } E = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}$$





$$\text{由 } \mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}, \text{ 求得: } \mathbf{P} = \frac{(\varepsilon_r - 1) \lambda_0}{2\pi \varepsilon_r r},$$

$$(2) \sigma' \big|_{r=R_1} = \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = -\mathbf{P} \big|_{r=R_1} = -\frac{(\varepsilon_r - 1) \lambda_0}{2\pi \varepsilon_r R_1},$$

$$\sigma' \big|_{r=R_2} = \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = -\mathbf{P} \big|_{r=R_2} = -\frac{(\varepsilon_r - 1) \lambda_0}{2\pi \varepsilon_r R_2},$$

$$(3) V = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda_0}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r} d\mathbf{r} = \frac{\lambda_0}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

2-19 三个相同的点电荷，放置在等边三角形各顶点上，设三角形的边长为 $a$ ，电荷的电量均为 $q$ ，计算电荷系的相互作用能。如果在三角形的中心放置一个电量为 $-q/\sqrt{3}$ 的电荷，计算该电荷在其余三个电荷产生的场中具有的电势能。



解：由等边三角形可知  $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$  故  $W = 3 \times (\frac{1}{2} \times q \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a}) = \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$

$$\text{又 } V_0 = 3 \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{3\sqrt{3}q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$\text{故 } W = q_0 V_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} q \frac{3\sqrt{3}q}{4\pi\epsilon_0 a} = -\frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

补充2.8 电量为Q的导体球，置于均匀的无限大的电介质中，已知电介质的相对电容率为 $\epsilon_r$ ，导体球半径为R，求在介质中的能量密度和静电能。

解：介质中的场强为

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$$

故能量密度为

$$\omega = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0\epsilon_r r^4}$$

静电能为

$$W = \int_R^\infty \omega dV = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r R}$$



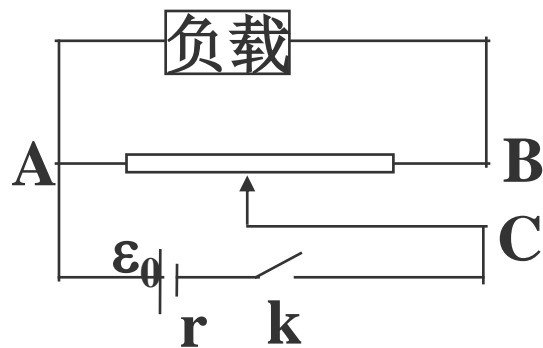
### 第三章 稳恒电流和稳恒电场

3-1. 下列各量中那些是空间的函数?那些是矢量?电压;电流强度;电流密度;电阻;电导率;电功率。

解: 空间点的函数有:电压. 电流强度. 电阻. 电导率. 热功率密度;  
矢量有: 电流密度。

补充3.1 如图所示, 这样连接变阻器有何不妥?

解: 调节可变电阻器时易把电源短路而损坏电源。



3-2 5安培的电流在10欧姆的电阻器中的流动4分钟之久, 在这段时间内有多少库仑的电荷和多少电子通过这个电阻的任意横截面?

解:  $q = I \times t = 5 \times 4 \times 60 = 1.2 \times 10^3$  (库仑)

$$n = \frac{q}{e} = \frac{1.2 \times 10^3}{1.6 \times 10^{-19}} = 7.5 \times 10^{21} \text{ (个)}$$



3-3 在下列情况下通过导体横截面的电量是多少？

(1) 电流强度在10秒内均匀的有零增加到3安培；

(2) 电流强度从18安培起，每过0.01秒减少一半，直到零。

解：(1)  $I = \frac{3}{10} t$        $q = \int I dt = \int_0^{10} \frac{t}{10} dt = 15(\text{库仑})$

$$\begin{aligned} (2) q &= I_0 \Delta k + \frac{1}{2} I_0 \Delta k + \frac{1}{4} I_0 \Delta k + \dots \\ &= I_0 \Delta k (1 + 1/2 + 1/4 + \dots) \\ &= 18 \times 0.01 \times 1 / (1 - 1/2) = 0.36(\text{库仑}) \end{aligned}$$

3-4 球形电容器的内、外半径分别为a和b，两极间充满电阻率为  $\rho$  的均匀介质，试计算该电容器的漏电电阻。

解：取体元球壳，故  $dR = \rho \frac{dl}{S} = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}$

积分得漏电电阻为  $R = \int_a^b dR = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$

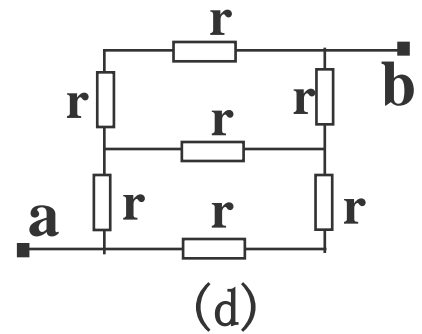
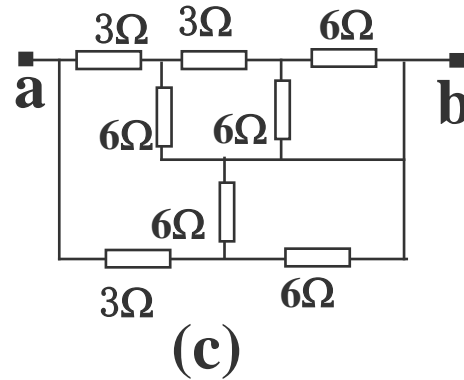
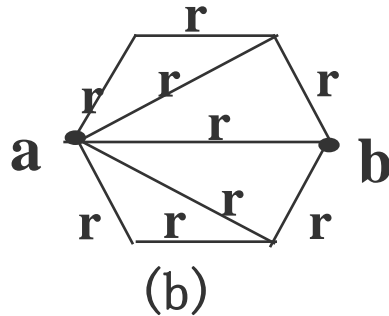
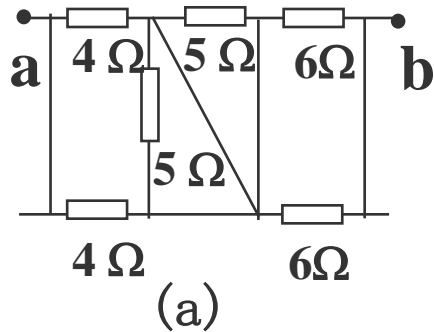


3-5 如果有20安培的电流通过直径为2毫米的导线, 且电流均匀分布, 导线的电阻率为 $3.14 \times 10^{-8}$ 欧姆·米, 求导线内的电场强度。

解:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2} \quad j = \sigma E \quad \therefore E = \frac{j}{\sigma} = \rho j = \rho \frac{I}{\pi r^2} = 0.2 (\text{伏特/米})$$

补充3. 2求下面各图中a和b两点间的电阻。



解: (d)

$$\begin{cases} V_{ab} = I_2 \times 2r + I_1 r \\ V_{ab} = I_1 r + (I_1 - I_2)r + I_1 r = 3I_1 r - I_2 r \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = 3V_{ab}/7r \\ I_2 = 2V_{ab}/7r \end{cases}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{5V_{ab}}{7r} \quad \therefore R_{ab} = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{7}{5}r$$



3-6 高频情况下，电流在导线横截面上的分布是不均匀的，越靠近表面，电流的密度越大，这种效应叫做趋肤效应。已知电流密度的函数表达式为  $j=j_0 e^{-d/d_s}$ ，式中  $j_0$  是导体表面处的电流密度， $d_s$  是和材料及频率有关的常量，称为趋肤深度， $d$  是离表面的深度。设导体是半径为  $R$  的圆柱体，试计算由表面到  $d=d_s$  的一层导体中的电流与总电流之比。若  $d_s \ll R$ ，结果如何？

解： $r=R-d_s$        $r_s=R-d_s$

$$I_s = \int_{r_s}^R j \cdot 2\pi r dr = \int_{r_s}^R j_0 e^{-\frac{R-r}{d_s}} \cdot 2\pi r dr = 2\pi j_0 d_s [(R-d_s)(1-e^{-1}) + d_s e^{-1}]$$

$$I = \int_0^R j 2\pi r dr = \int_0^R j_0 e^{-\frac{R-r}{d_s}} \cdot 2\pi r dr = 2\pi j_0 d_s (R-d_s + d_s e^{-\frac{R}{d_s}})$$

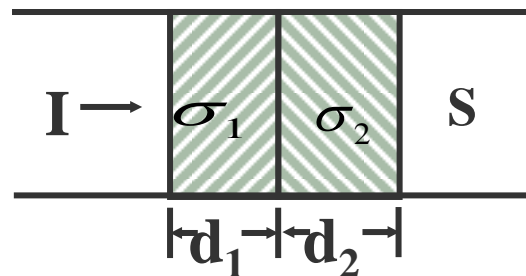
$$\frac{I_s}{I} = \frac{(R+d_s)(1-e^{-1}) + d_s e^{-1}}{R-d_s + d_s e^{-R/d_s}}$$



3-7 如图电导率很大的导体之间有两层电导率分别为 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 的导电介质,厚度为 $d_1$ 和 $d_2$ ,导体的截面积为 $S$ ,通过导体的稳恒电流强度为 $I$ ,求(1)两层导电电介质中的场强 $E_1$ 和 $E_2$ ; (2)电势差 $V_1$ 和 $V_2$ 。

解: 由欧姆定律  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \frac{\mathbf{I}}{S}$

可得电介质中场强为  $\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{I}}{\sigma_1 S}, \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{I}}{\sigma_2 S}$



而电势差为  $V_1 = E_1 d_1 = \frac{I d_1}{\sigma_1 S}, V_2 = E_2 d_2 = \frac{I d_2}{\sigma_2 S}$

补充3.3一导线电阻为  $R=6$  欧姆, 其中电流的变化规律为: (1) 电流强度在10秒内均匀的由零增加到3安培; (2) 电流强度从18安培起, 每过0.01秒减少一半, 直到零。求导线产生的热量。

解: (1)  $I = \frac{3}{10} t \quad dQ = I^2 R dt \quad Q = \int_0^t \left(\frac{3}{10} t\right)^2 R dt = \frac{3}{10} R t^3 \Big|_0^{10} = 180 \text{ (焦)}$

(2)  $Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \dots = I_1^2 R \Delta t + I_2^2 R \Delta t + I_3^2 R \Delta t + \dots$

$= R \Delta t [I_0^2 + (I_0/2)^2 + (I_0/4)^2 + \dots] = I_0^2 R \Delta t \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3} I_0^2 R \Delta t = 25.92 \text{ (焦耳)}$



3-8 一铜棒截面积为 $20 \times 80$ 毫米<sup>2</sup>, 长2米, 两端的电势差为50毫伏, 已知铜的电导率为 $\sigma = 5.7 \times 10^7$ 西门子/米, 自由电子密度 $n = 8.5 \times 10^{28}$ 个/米<sup>3</sup>, 求: (1) 它的电阻; (2) 电流及电流密度; (3) 棒内电场强度; (4) 所消耗的功率;

解(1) 电阻为 
$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S} = 2.2 \times 10^{-5} (\Omega)$$

(2) 电流及其密度为 
$$I = \frac{V}{R} = 2.27 \times 10^3 (\text{A}), \quad j = \frac{I}{S} = 1.42 \times 10^6 (\text{A/m}^2)$$

(3) 棒内场强 
$$j = \sigma E \quad \therefore E = j / \sigma = 2.49 \times 10^{-12} (\text{V/m})$$

(4) 消耗功率为 
$$P = IV = 113.5 (\text{W})$$

3-9 一蓄电池在充电时, 通过的电流为3安培, 此时两极间的电势差为4.25伏特, 当该电池放电时, 通过的电流为4安培两极间的电势差为3.90伏特, 求该电池的电动势和电阻。

解:

$$\begin{cases} \varepsilon + I_1 r = 4.25 \\ \varepsilon - I_2 r = 3.90 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} r = 0.05 (\text{欧姆}) \\ \varepsilon = 4.10 (\text{伏特}) \end{cases}$$





3-10 设在图中所示的电路中，三个电容开始时均不带电，求将它们与A、B、C点联结后，各极板上的电量。

解：充电完毕后，电容等价于开路，

设回路ABCA中电流为I。

$$-20 + 24 - 10 + I(10 + 15 + 15 + 5 + 5 + 25) = 0$$

$$\therefore I = 0.1(\text{A})$$

故

$$V_A = V_{AC} = 10 - I(25 + 5) = 7(\text{V})$$

$$V_B = V_{BC} = 24 + I(15 + 5) = 26(\text{V})$$

由图可知

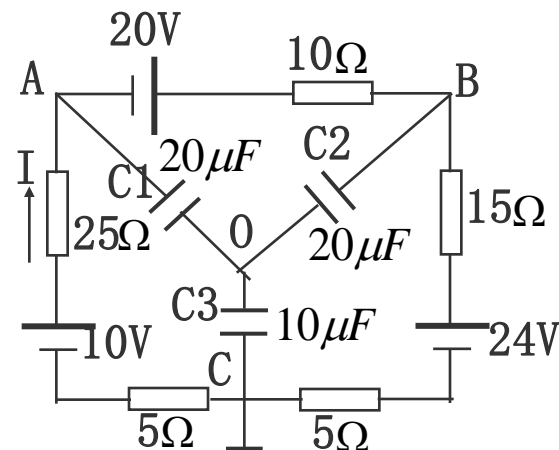
$$\begin{cases} V_1 + V_3 = V_A \\ V_2 + V_3 = V_B \\ -C_1 V_1 - C_2 V_2 + C_3 V_3 = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} V_1 = -6.2\text{V} \\ V_2 = 12.8\text{V} \\ V_3 = 13.2\text{V} \end{cases}$$

故

$$q_1 = -C_1 V_1 = 1.24 \times 10^{-4}(\text{C})$$

$$q_2 = -C_2 V_2 = -2.56 \times 10^{-4}(\text{C})$$

$$q_3 = -C_3 V_3 = 1.32 \times 10^{-4}(\text{C})$$



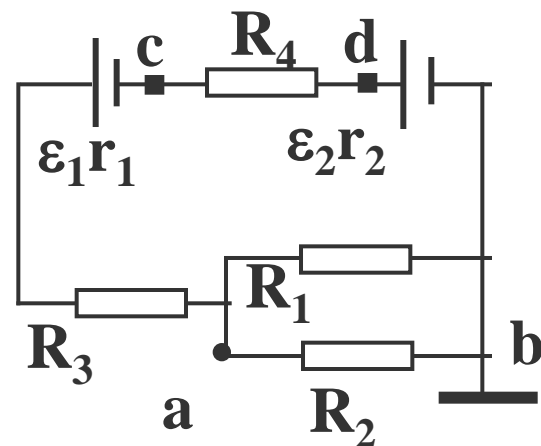
补充3. 4一电路如图, 其中b点接地,  $R_1=10.0$ 欧姆,  $R_2=2.5$ 欧姆,  $R_3=3.0$ 欧姆,  $R_4=1.0$ 欧姆,  $\varepsilon_1=6.0$ 伏,  $r_1=0.40$ 欧姆,  $\varepsilon_2=8.0$ 伏特,  $r_2=0.6$ 欧姆, 求: (1) 通过每个电阻的电流; (2) 每个电源的端电压; (3) a, d 两点电势差; (4) b, c 两点电势差 (5) a, b, c, d各点电势。

解 (1)

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2(\Omega)$$

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R} = \frac{6 + 8}{0.4 + 0.6 + 1 + 3 + 2} = 2(\text{A})$$

$$I_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = 0.4(\text{A}) \quad I_2 = I - I_1 = 1.6(\text{A})$$



$$(2) v_1 = \varepsilon_1 - I r_1 = 5.2(\text{V}) \quad v_2 = \varepsilon_2 - I r_2 = 6.8(\text{V})$$

$$(3) v_a - v_d = -I R_3 + \varepsilon_1 - I r_1 - I R_4 = -2.8(\text{V})$$

$$(4) v_b - v_c = -\varepsilon_2 + I r_2 + I R_4 = -4.8(\text{V})$$

$$(5) v_b = 0 \quad v_a = I R_{12} = 2 \times 2 = 4(\text{V}) \quad v_b - v_c = -4.8(\text{V})$$

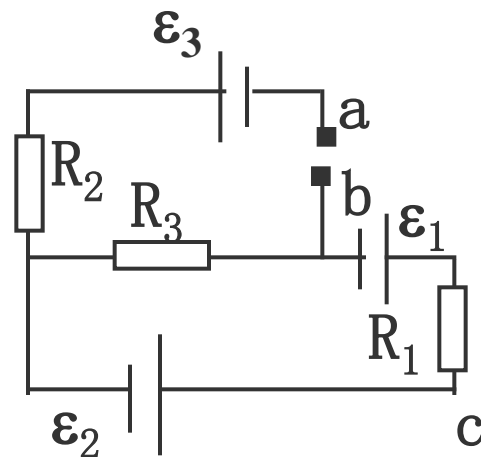
$$v_c = 4.8(\text{V}) \quad v_d = (v_d - v_a) + (v_a - v_b) = 2.8 + 4 = 6.8(\text{V})$$



3-11 如图所示电路,  $\varepsilon_1=12.0$  伏特,  $\varepsilon_2=\varepsilon_3=6.0$  伏特,  $R_1=R_2=R_3=3.0$  欧姆, 电源内阻可忽略, 求  $V_{cb}$ ,  $V_{ac}$ ,  $V_{bc}$ ; 若C点接地, a, b, c 点电动势是多少?

解:  $R_1 \varepsilon_2 R_2 \varepsilon_1 R_1$  回路电流:

$$I = \frac{\Sigma \varepsilon_R}{\Sigma R} = \frac{12.0 - 6.0}{3 + 3} = 1 \text{ (安培)}$$



$$V_{ab} = V_a - V_b = -\varepsilon_3 + 0 + IR_2 = -3 \text{ (伏特)}$$

$$V_{bc} = V_b - V_c = -\varepsilon_1 + I_1 R_1 = -9 \text{ (伏特)}$$

$$V_{ac} = V_a - V_c = (V_a - V_b) + (V_b - V_c) = -12 \text{ (伏特)}$$



3-12 电路中, 已知  $\varepsilon_1 = 12$  伏,  $\varepsilon_2 = 9$  伏,  $\varepsilon_3 = 8$  伏,  $r_1 = r_2 = r_3 = 1$  欧姆  
 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2$  欧姆,  $R_5 = 3$  欧姆求: (1) a、b两点的电势差;  
 (2) c、d两点的电势差; (3) 如果c d两点短路, 这时通过 $R_5$ 的电流是多少?

解: c、d开路 则回路中电流为

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r_1 + r_2 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 0.5(\text{A})$$

a、b间电势差为  $V_{ab} = \varepsilon_2 + I(R_2 + r_2 + R_4) = 10.5(\text{V})$

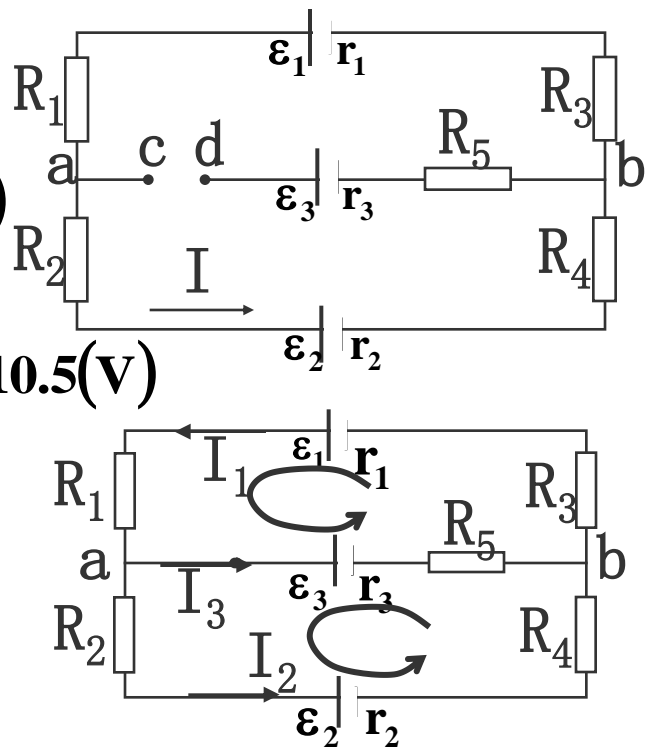
c、d间电势差为  $V_{cd} = V_{ab} + V_{bd} = 2.5(\text{V})$

(3) c、d短路, 设回路中电流为 $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ , 回路绕向见图

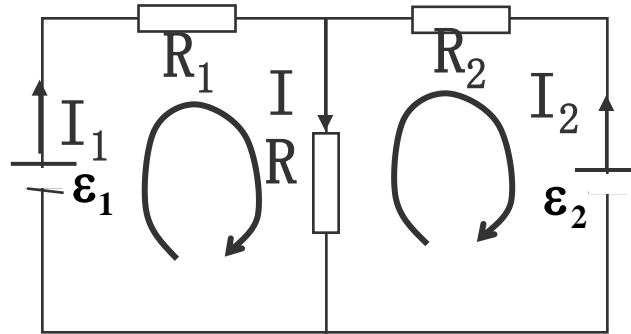
由基尔霍夫方程可得

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ -\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + I_1(r_1 + R_1 + R_3) + I_3(r_3 + R_5) = 0 \\ -\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + I_2(r_2 + R_2 + R_4) - I_3(r_3 + R_5) = 0 \end{cases}$$

通过 $R_5$ 的电流为  $I = 0.455(\text{A})$  方向由a到b



3-13 图中  $\varepsilon_1 = 1.5$  伏,  $\varepsilon_2 = 1.0$  伏;  $R_1 = 50$  欧姆,  $R_2 = 75$  欧姆,  $R = 70$  欧姆, 求通过  $R$  的电流。



解：由基尔霍夫方程可知

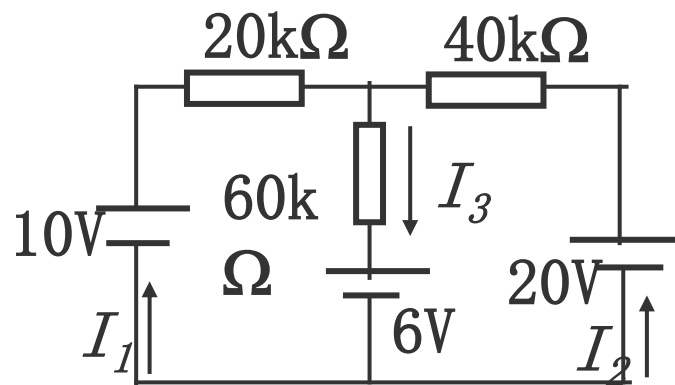
$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ -\varepsilon_1 + I_1 R_1 + IR = 0 \\ \varepsilon_2 - I_2 R_2 - IR = 0 \end{cases}$$

可得  $I = 1.3 \times 10^{-2} (\text{A})$



补充3.5求图中各支路电流。

解: 
$$\begin{cases} I_1 + I_3 - I_2 = 0 \\ -\varepsilon_3 - I_3 R_3 + I_1 R_1 + \varepsilon_1 = 0 \\ -\varepsilon_2 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + \varepsilon_3 = 0 \end{cases}$$



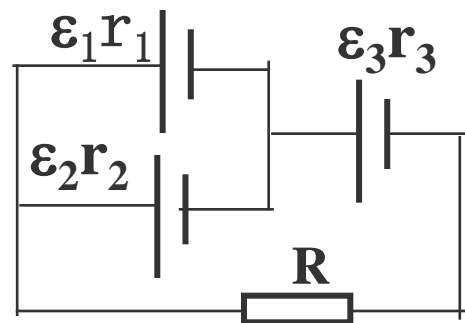
$$\begin{cases} I_1 + I_3 - I_2 = 0 \\ I_1 - 3I_3 = -1.2 \times 10^{-4} \\ I_2 + 1.5I_3 = 3.5 \times 10^{-4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 1.0 \times 10^{-4} \text{ (安培)} \\ I_2 = 2.0 \times 10^{-4} \text{ (安培)} \\ I_3 = 1.0 \times 10^{-4} \text{ (安培)} \end{cases}$$

补充3.6三个电池连接如图, 已知 $\varepsilon_1=1.3$ 伏特,  $\varepsilon_2=1.5$ 伏特,  $\varepsilon_3=2.0$ 伏特,  $r_1=r_2=r_3=0.20$ 伏特, 外电阻 $R=0.55$ 欧姆, 求电池中的电流

解:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ -I_1 r_1 + I_2 r_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0 \\ -I_2 r_2 - I_3 (r_3 + R) + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ -I_1 + I_2 + 1 = 0 \\ -2I_1 - 7.5I_3 + 35 = 0 \end{cases}$$



$$I_1 = 1.5 \text{ (安培)} \quad I_2 = 2.5 \text{ (安培)} \quad I_3 = 4.0 \text{ (安培)}$$



3-14 如图电路中,  $\varepsilon_1=20$ 伏特,  $\varepsilon_2=18$ 伏特,  $\varepsilon_3=7$ 伏特  $r_1=r_2=r_3=1$  欧姆,  $R_1=4$ 欧姆,  $R_2=6$ 欧姆,  $R_3=2$ 欧姆, 求个支路中的电流以及  $V_{ab}$ , 若  $a$  点接地,  $U_b=?$

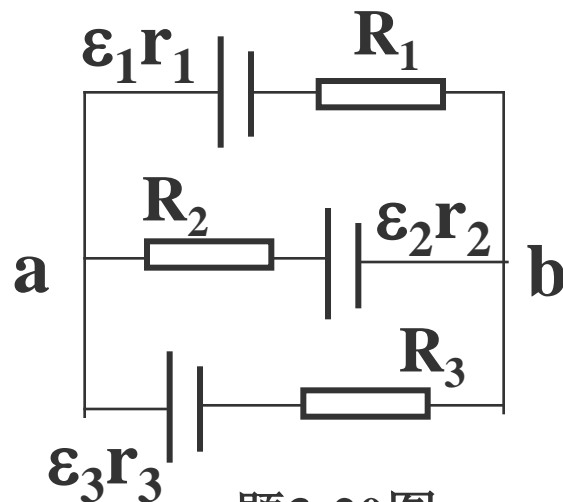
解: 
$$\begin{cases} I_3 + I_2 - I_1 = 0 \\ I_2(R_2 + r_2) + I_1(R_1 + r_1) + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 0 \\ I_3(r_3 + R_3) - I_2(r_2 + R_2) - \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_3 + I_2 - I_1 = 0 \\ 3I_2 + 7I_1 - 2 = 0 \\ 3I_3 - 5I_2 - 11 = 0 \end{cases} \quad I_1 = 1(\text{A}), \quad I_2 = -1(\text{A}), \quad I_3 = 2(\text{A})$$

$$V_{ab} = -I_2 R_2 - I_2 r_2 + \varepsilon_2 = -1 \times 2 - 1 \times 1 + 18 = 13(\text{v})$$

$$V_{ab} = V_a - V_b = 0 - V_b = 13$$

$$\therefore V_b = -13(\text{v})$$



题3-20图



3-15 电容  $C=1.0$  微法拉的电容器, 经过  $R=1000$  欧姆的电阻放电, 经过多少时间后, 电容器两极板上的电压降为原来的一半?

解:  $u_C = Ue^{-\frac{t}{RC}} = Ue^{-10^3 t}$      $\frac{U}{2} = Ue^{-10^3 t}$      $t = 10^{-3} \ln 2 = 6.9 \times 10^{-4}$  (秒)

3-16 如图开关先接1, 对电容充电到稳定值后再将开关拨向2, (1) 问经过几倍的时间后, 电容器所处的能量变为原来的一半? (2) 试证明: 电容器所处的能量最后全部转化为电阻消耗的热量。

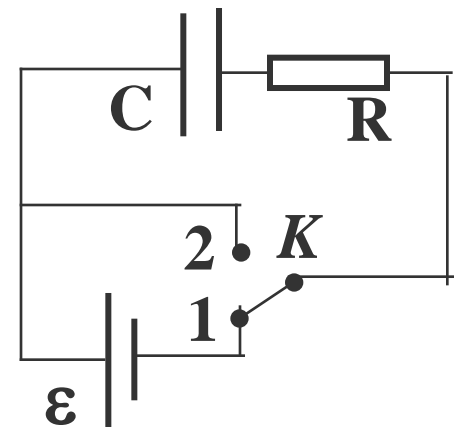
解: (1)  $u_C|_{t=0} = \varepsilon$      $\tau = RC$

$$W = \frac{1}{2} C U^2 e^{-\frac{2t}{RC}} = W_0 e^{-\frac{2t}{\tau}} \quad \frac{1}{2} W_0 = W_0 e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

$$\frac{2t}{\tau} = \ln 2 \quad t = \frac{1}{2} \tau \ln 2$$

(2)  $i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} \quad dw = P dt \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt$

$$W = \int dw = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} C \varepsilon^2$$





3-17 如图所示, 在  $t=0$  时,  $C_1$  和  $C_2$  上都没有电荷, 求: (1) 在  $K$  接通后的瞬间各电阻上的电流。 (2) 流感电源的稳态电流和此时  $C_1$  和  $C_2$  上的电量。

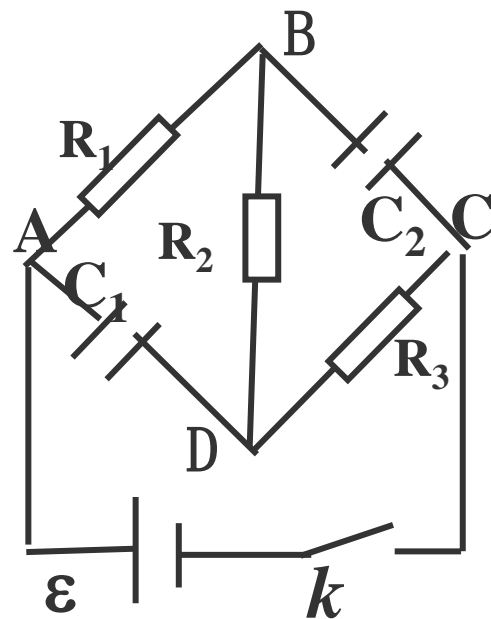
解 (1)  $K$  接通瞬间, 电容相当于短路  
三个电阻并联后与电源相连接, 故

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}, I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2}, I_3 = \frac{\varepsilon}{R_3}$$

(2) 接通很久, 电容相当于断路, 三个电阻串联与电源连接:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad V_{c1} = I(R_1 + R_2), \quad V_{c2} = I(R_2 + R_3)$$

$$q_{c1} = c_1 V_{c1} = \frac{c_1 \varepsilon (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad q_{c2} = c_2 V_{c2} = \frac{c_2 \varepsilon (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$



## 第四章      稳 恒 磁 场

4-1. 一电流元 $Idl$ 沿 $x$ 方向放置时不受力，将它转到 $y$ 方向上时，受的力与 $z$ 轴反向，试问此地 $B$ 的方向为何？

解：  $Id\vec{x} \times \vec{B} = 0$  说明 $\vec{B} // \vec{i}$ ，若 $Id\vec{y} \times \vec{B}$ 在负 $\vec{k}$ 方向，说明 $\vec{B}$ 与 $\vec{i}$ 方向相同。

4-2 一电流元 $Idl$ 位于坐标原点处，并沿 $x$ 轴方向。在以原点为中心半径为 $R$ 的圆上，每隔 $45^\circ$ 有一个点，求 $P_1-P_8$ 各点处磁感应强度 $B$ 的大小和方向。

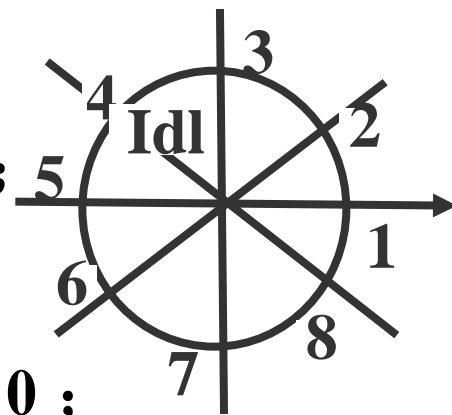
解：由毕-沙定律 $d\vec{B} = \mu_0 Id\vec{l} \times \vec{r} / 4\pi r^3$ 求得 $\vec{B}$ ：

$$\vec{B}_1 = 0; \quad \vec{B}_2 = \mu_0 Id\vec{l} \times \vec{r}_2 / 4\pi r_2^3 = \sqrt{3}\mu_0 Idl \vec{k} / 8\pi R^2;$$

$$\vec{B}_3 = \mu_0 Id\vec{l} \times \vec{r}_3 / 4\pi r_3^3 = \mu_0 Idl \vec{k} / 4\pi R^2;$$

$$\vec{B}_4 = \mu_0 Id\vec{l} \times \vec{r}_4 / 4\pi r_4^3 = \sqrt{2}\mu_0 Idl \vec{k} / 8\pi R^2; \quad \vec{B}_5 = 0;$$

$$\vec{B}_6 = \mu_0 Id\vec{l} \times \vec{r}_6 / 4\pi r_6^3 = -\sqrt{2}\mu_0 Idl \vec{k} / 8\pi R^2;$$



$$\vec{B}_7 = \mu_0 I d \vec{l} \times \vec{r}_7 / 4\pi r_7^3 = -\mu_0 I d \vec{l} \vec{k} / 4\pi R^2;$$

$$\vec{B}_8 = \mu_0 I d \vec{l} \times \vec{r}_8 / 4\pi r_8^3 = -\sqrt{2}\mu_0 I d \vec{l} \vec{k} / 8\pi R^2 .$$

4-3 在电子仪器中，常把载有大小相等方向相反电流的导线扭在一起，这是为什么？

解： 导线双过来而扭在一起相当于两线圈串联，  
载有电流时两方向相反 这样可以消除自感

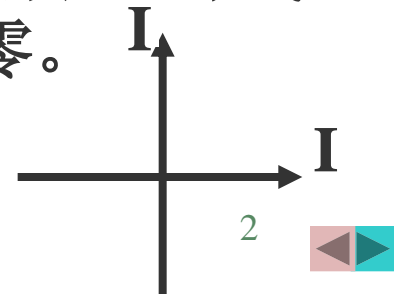
4-4. 将一六面体，放入非均匀磁场内，已知穿插过其中一个面的磁通量为 $\Phi_1$ ，则穿过其它五面的磁通量是多少？

解：  $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$  即：  $\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

可得  $\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\Phi$  。

4-5 在同一平面上有两根彼此垂直，而且相互绝缘的长直导线，电流为  $I$ ，指出该平面上哪些点的磁感应强度为零。

解： 两电流方向所夹的 $90^\circ$ 角的角平分线  
上的各点的磁感应强度为0。



**4-6**在下列两种情况下能否用安培环路定理求磁感应强度 $B$ ，为什么？(1)有限长载流直导线产生的场；(2)圆电流产生的场。

答(1)安培环路定理  $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$  中的 $B$ 是闭合电流产生,故不能用!  
(2)圆电流产生的场不是高度对称的场,故也不能用。

**4-7**一个质子，一个氦核和一个 $\alpha$  粒子，通过相同的电位差加速后，进入一均匀磁场中，此时它们的运动方向与 $B$ 正交。试比较这些粒子的动能；(2)如果质子在磁场中运动的圆形轨道半径为10厘米，则氦核和  $\alpha$  粒子的轨道半径为多少？

解： (1)  $E_H = m_H v_H^2 / 2 = q_H v = e v$   $E_d = m_D v_D^2 / 2 = q_D v = e v$

$E_\alpha = m_\alpha v_\alpha^2 / 2 = q_\alpha v = 2 e v$   $E_H : E_d : E_\alpha = 1 : 1 : 2$

(2)  $m_H : m_D : m_\alpha = 1 : 2 : 4$

$(m_H v_H^2 / 2) : (m_D v_D^2 / 2) : (m_\alpha v_\alpha^2 / 2) = 1 : 1 : 2$

$v_H : v_D : v_\alpha = 1 : \sqrt{2} / 2 : \sqrt{2} / 2$   $\because R = mv / qB$

$R_H : R_D : R_\alpha = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{2}$   $R_D = R_\alpha = \sqrt{2} R_H \approx 14^3 (\text{cm})$

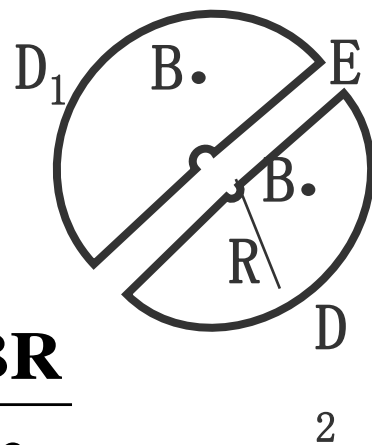
4-8 回旋加速器工作原理如图， $D_1$ 和 $D_2$ 是两个电极，其形状如沿直径切成两半的扁金属盒，其间加上交变电场。在与盒垂直方向上有一稳恒均匀磁场同时存在，整个装置放在真空中，带电粒子在极间加速，进入电极后在磁场作用下作圆周运动，半个周期后又进入极间，再次被加速，如此反复。随粒子速度的增大，圆周运动的半径也加大，当运动半径达到 $R$ 时及时引出。今欲加速氦核，已知电场频率 $f=12 \times 10^6$ 赫兹， $R=0.53$ 米，求磁感应强度 $B$ 及氦核的最大能量。

解：回旋次数等于电场频率，故

$$f = \frac{qB}{2\pi m} \quad \therefore B = \frac{2\pi m f}{q} = 1.57(\text{T})$$

出加速器时粒子运动速度为  $R = \frac{mv}{Bq} \quad \therefore v = \frac{qBR}{m}$

故其最大能量为  $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m} = 2.65 \times 10^{-12}(\text{J})$



**4-9** 某一区域内，有正交电磁场存在，已知电场强度 $E=1500$ 伏/米，磁感应强度 $B=0.4$ 特，且作用在一个电子上的合力为零，求电子的速率 $V$ ，并画出 $E$ ， $B$ 和 $V$ 三个量的相对方向。

解：(1)  $eE = evB$        $v = E/B = 3.75 \times 10^3$  (米/秒)

(2)  $\vec{E}$ ， $\vec{V}$ ， $\vec{B}$  两两垂直

**4-10** 已知一电量为 $q$ 的粒子垂直入射到磁感应强度为 $B$ 的均匀磁场以前，经过电压为 $V$ 的电场加速，粒子的初速度可以忽略不计，进入磁场后经过半圆到达照像底片上的 $P$ 点，已知粒子入口至 $P$ 点的距离为 $x$ ，求该粒子质量。

解：经电场加速后速度为  $qV = \frac{1}{2}mv^2$        $\therefore v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$

由已知  $R = \frac{mv}{Bq} = \frac{x}{2}$  故粒子质量为  $m = \frac{Bqx}{2v} = \frac{qB^2x^2}{8V}$

**4-11** 如图设有一电子射入磁感应强度为 $B$ 的均匀磁场中，当它通过 $a$ 点时，其速度 $V$ 与磁场 $B$ 的夹角为 $\alpha$ ，它沿螺旋线运动一周到达 $b$ 点。(1) 写出 $ab$ 两点间距离的表达式；(2) 如果测螺旋线的半径为 $R$ ， $ab$ 间距离为 $h$ ，则角度是多少？



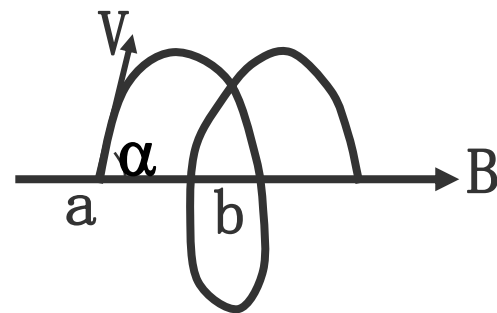
解：电子运动的周期为  $T = \frac{2\pi m}{Bq}$

故ab间距离为  $\overline{ab} = V \cos \alpha T = V \cos \alpha \frac{2\pi m}{Bq}$

电子运动半径为  $R = \frac{mV \sin \alpha}{Bq}$

又  $\overline{ab} = h = V \cos \alpha \frac{2\pi m}{Bq}$

故  $\tan \alpha = \frac{2\pi R}{h}$

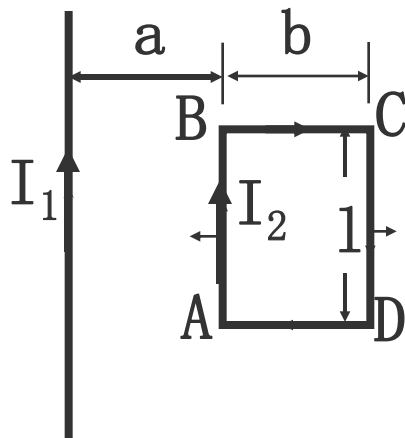


4-12 如图，在长直导线旁有一个矩形线圈，导线中电流  $I_1 = 20$  安培，线圈中电流  $I_2 = 10$  安培，求矩形线圈受到的合力是多少？已知  $a = 1$  厘米， $b = 9$  厘米， $l = 20$  厘米。

解：由于BC和AD中  $I_2$  方向相反，在  $I_1$  的磁场中受力，大小相等方向相反，合力为零。

AB受力为  $F_{AB} = I_2 l B_1 = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$  （方向如图）

CD受力为  $F_{CD} = I_2 l B'_1 = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+b)}$  （方向如图）



故合力为

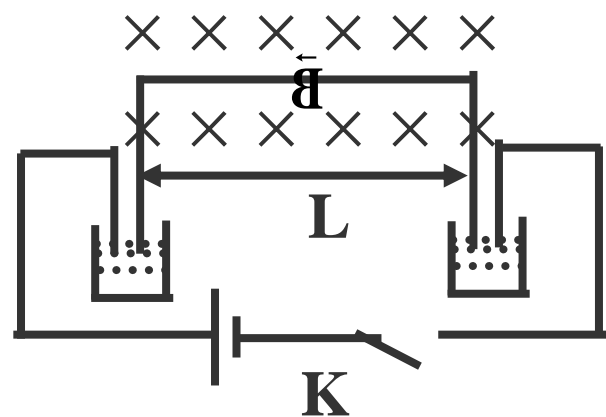
$$F = F_{AB} - F_{CD} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{(a+b)} \right] = 7.2 \times 10^{-4} (\text{N}) \quad (\text{方向指向 } I_1)$$

补充4.1 有一段导线弯成如图所示的形状，它的质量为 $m$ ，上面水平的一段长为 $L$ ，处于均匀磁场中，磁感应强度 $B$ 与导线垂直，导线的下端分别插在两个浅水银槽内，水银槽又通过一开关与电源连接，当 $K$ 一接通，导线便从水银槽里跳出来。（1）设跳的高度为 $h$ 。求通过导线的电量 $q$ ；（2）当 $m=10\text{g}$ ， $L=20\text{cm}$ ， $h=0.30\text{m}$ ， $B=0.10\text{T}$ 时，求 $q$ 的量值。（提示：利用动量定理，并找出 $\int i dt$ 与 $\int \vec{F} dt$ 的关系）

解：(1)  $F = BIL, \int F dt = \int BLI dt = mV = m\sqrt{2gh}$

即  $BL \int I dt = BL \Delta q = m\sqrt{2gh}$  ,

$$\Delta q = \frac{m\sqrt{2gh}}{BL}$$



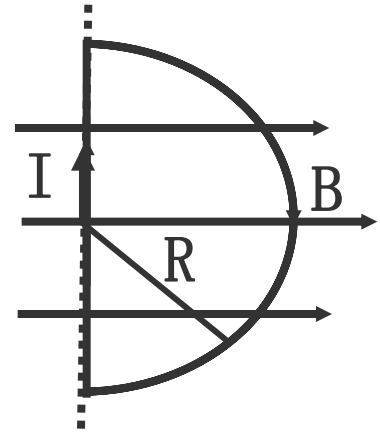
(2)  $m=10\text{克}$ ， $L=20\text{厘米}$ ， $h=0.30\text{米}$ ， $B=0.10\text{特}$ ，求得 $\Delta q=1$ (库仑)



4-13一半径为 $R=0.10$ 米的半圆形闭合线圈，载有电流 $I=10$ 安培，放在均匀外磁场中，磁场方向与线圈平面平行，磁感应强度  $B=5.0 \times 10^3$  高斯。（1）求线圈的磁矩 $P$ ；（2）求线圈所受磁力矩的大小和方向；（3）在此力矩作用下线圈转 $90^\circ$ （即转到线圈平面与 $B$ 垂直），求力矩做功。

解：线圈的磁矩为

$$\mathbf{P} = I\mathbf{S} = I \frac{\pi R^2}{2} = 15.7 \times 10^{-2} (\text{A} \cdot \text{m}^2)$$



线圈所受磁力矩

$$\mathbf{M} = |\vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{B}}| = PB \sin \frac{\pi}{2} = 7.85 \times 10^{-2} (\text{J})$$

力矩做功

$$\mathbf{A} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathbf{M} d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} PB \sin \theta d\theta = PB = 7.85 \times 10^{-2} (\text{J})$$



补充4.2 半径为R的载流圆线圈, 电流为 I, 在均匀磁场B中, 已知B的方向与线圈平面平行, 求此时该线圈绕OO' 轴的磁力矩。

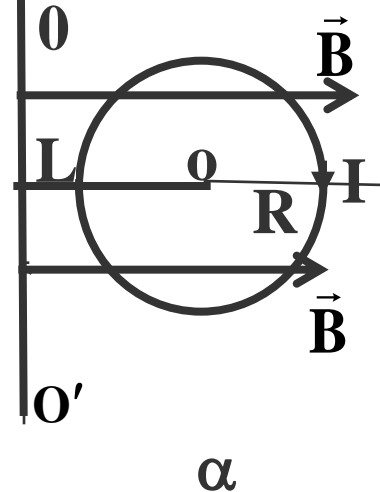
解:

求线圈的磁矩P

$$\mathbf{P} = \mathbf{IS} = \mathbf{I} \cdot \pi \mathbf{R}^2, \text{方向垂直纸面}$$

磁力矩

$$\mathbf{M} = |\vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{B}}| = \mathbf{PB} = \pi \mathbf{R}^2 \mathbf{IB}$$

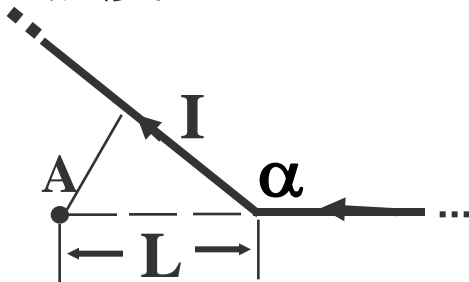


补充4.3 一根载流长直导线被折成如图所示的形状, 已知电流强度为20安,  $\alpha = 120^\circ$ ,  $L = 2$ 厘米, 求A点的磁感应强度B。

解:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi a} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) + 0$$

$$= \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi L \sin 60^\circ} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) = 1.73 \times 10^{-4} \text{ (特斯拉) }。$$



4-14 如图所示，一根宽为a的“无限长”平面载流铜板，其厚度可以忽略，铜板中的电流为I，求铜板中心上方h处的磁感应强度B，并讨论 $h \gg a$ ,  $h \ll a$ 两种情况，其结果说明了什么？

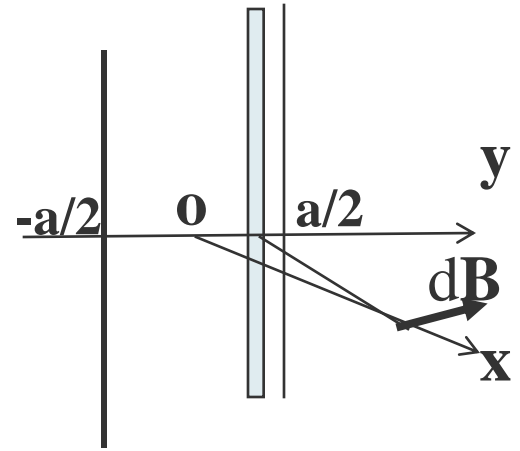
解:  $dI = j dy = \frac{I}{a} dy$        $dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I dy}{2\pi a \sqrt{x^2 + y^2}}$

$$dB_y = dB \cdot \cos \alpha = \frac{\mu_0 I x dy}{2\pi a (x^2 + y^2)}$$

$$B_y = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\mu_0 I y dx}{2\pi a (x^2 + y^2)} = \frac{\mu_0 I x}{2\pi a} \cdot \frac{1}{x} \arctg \frac{y}{x} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \arctg \frac{a}{2x} \quad B_x = 0$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = B_y = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \arctg \frac{a}{2x}$$

当  $a \rightarrow \infty$  时,  $B = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \arctg \infty = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0 j}{2}$



**补充4.4** 边长为 $a$ 的正方形载流回路，电流为 $I$ ，(1)求这回路轴线上离回路中心 $x$ 远处一点 $B$ 的值；(2)求 $x=0$ 处的 $B$ 值；(3)当 $x \gg a$ 时，该回路能否看成一个磁偶极子，它的磁矩是多少？

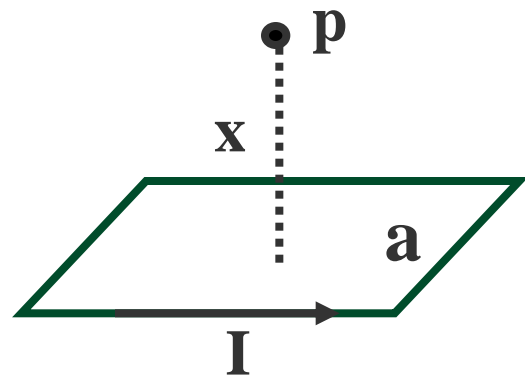
解：正方形的一边在轴处为 $B_1$ ，这边的 $\vec{l} \rightarrow \vec{l} + d\vec{l}$ 电流之 $I d\vec{l}$ 的 $d\vec{B}_1$

垂直分量：
$$dB_{1\perp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin\theta}{r^2} \cos\alpha, \quad r^2 = (l^2 + x^2 + \frac{a^2}{4})$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2 + a^2/4}}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{a/2}{r}$$

$$B = 4 \int dB_{1\perp} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dl}{(l^2 + x^2 + a^2/4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\mu_0 Ia^2/2}{\pi (x^2 + a^2/4) (x^2 + a^2/4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\mu_0 Ia^2}{\pi (4x^2 + a^2) (4x^2 + 2a^2)^{\frac{1}{2}}}$$



补充4.5 一根半径为R的无限长半圆柱面金属薄片中有自下而上的电流通过，电流为I，求自轴线上任一点的磁感应强度。

解：将金属片顺I分成dI宽的小条。

则

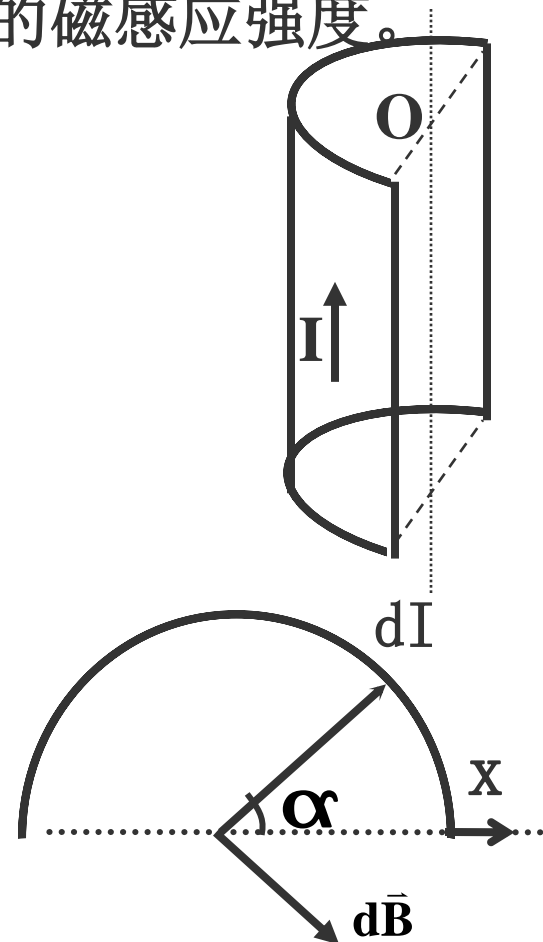
$$dI = \frac{I}{\pi R} d\alpha$$

由无限长载流直导线的磁场

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi R} dI = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2} R d\alpha$$

根据对称性

$$B = \int dB_x = \int dB \cos \alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$



柱面横截面图

(沿x正向)



4-15 载流长直导线弯成图中三种形状，求0点的磁感应强度B。

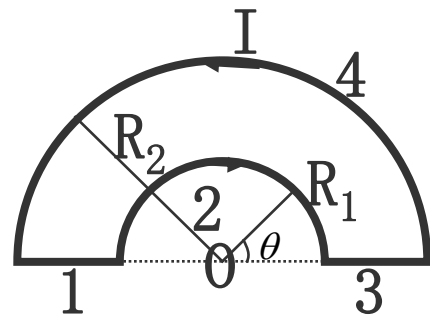
解：(a) 分成4段

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_3 = 0$$

$$\mathbf{B}_2 = \int \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R_1^2} = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2} R_1 d\theta = \frac{\mu_0 I}{4R_1}$$

同理  $\mathbf{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{4R_2}$

垂直纸面向外



故0点磁感应强度为  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$  垂直纸面向里

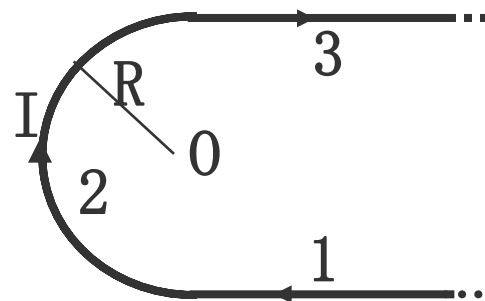
(b) 分三段  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi R} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$  垂直纸面向里

$$\mathbf{B}_2 = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

垂直纸面向里

故0点磁感应强度为

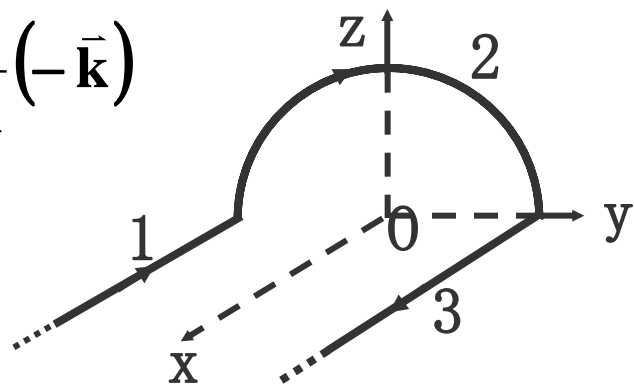
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (2 + \pi)$$



(c) 分三段  $\bar{\mathbf{B}}_1 = \bar{\mathbf{B}}_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 \mathbf{I}(-\bar{\mathbf{k}})}{4\pi R} d\theta = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{4\pi R}(-\bar{\mathbf{k}})$

$$\bar{\mathbf{B}}_2 = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{4\pi R}(-\bar{\mathbf{i}}) d\theta = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{4R}(-\bar{\mathbf{i}})$$

故0点磁感应强度  $\mathbf{B}_x = -\frac{\mu_0 \mathbf{I}}{4R}$   $\mathbf{B}_z = -\frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi R}$



补充4.6在半径为R的半木球上密绕着一层细导线，导线平面互相平行，且匝数沿半径均匀分布，设线圈的总匝数为N，每匝中的电流为I，求球心出的磁感应强度。

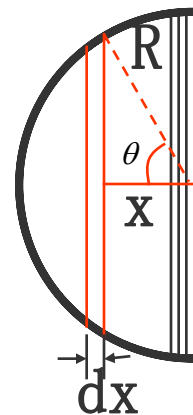
解：把半圆分为一系列环带，带宽  $dx = R \sin\theta d\theta$

故电流元  $d\mathbf{I} = \frac{N\mathbf{I}}{R} dx = N\mathbf{I} \sin\theta d\theta$

从而  $\mathbf{m} = d\mathbf{I}S = N\mathbf{I} \sin\theta d\theta \cdot \pi(R \sin\theta)^2$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} 2\mathbf{m} = \frac{\mu_0 N\mathbf{I}}{2R} \sin^3 \theta d\theta$$

得到  $\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 N\mathbf{I}}{2R} \sin^3 \theta d\theta = \frac{\mu_0 N\mathbf{I}}{3R}$



4-16 一个半径为  $R$  的均匀带电圆盘，电量为  $q$ ，如果使这个圆盘以角速率  $\omega$  绕其轴线（与盘面垂直）旋转，试证明：

(1) 在圆盘中心的磁感应强度大小为 
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R}$$

(2) 圆盘的磁矩为 
$$\mu = \frac{\omega q R^2}{4}$$

解：把圆盘分成一系列圆环，宽为  $dr$  
$$dq = \frac{q}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2q}{R^2} r dr$$

则 
$$d\mathbf{I} = \frac{\omega}{2\pi} dq = \frac{\omega q}{\pi R^2} r dr$$
 而 
$$dB = \frac{\mu_0 d\mathbf{I}}{2r} = \frac{\mu_0 q \omega}{2\pi R^2} dr$$

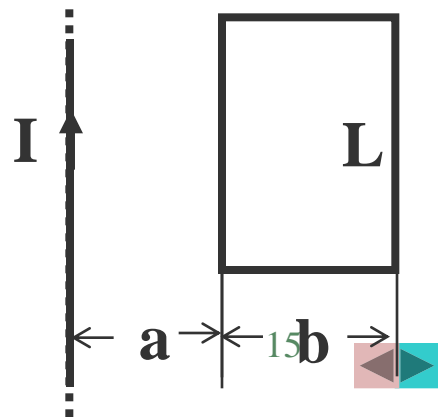
故中心处磁感应强度为 
$$\mathbf{B} = \int dB = \int_0^R \frac{\mu_0 q \omega}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 q \omega}{2\pi R}$$

又 
$$dm = S \cdot d\mathbf{I} = \frac{\omega q}{R^2} r^3 dr$$
 故磁矩为 
$$\mathbf{P} = \int d\mathbf{P} = \int_0^R \frac{\omega q}{R^2} r^3 dr = \frac{1}{4} q \omega R^2$$

4-17 试求无限长载流导线旁一矩形面积的磁通量。

解： 
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi r}, \quad d\mathbf{S} = L dr, \quad d\phi = \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{\mu_0 \mathbf{I} L}{2\pi r} dr$$

$$\phi_m = \int_a^{a+b} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 \mathbf{I} L}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 \mathbf{I} L}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$



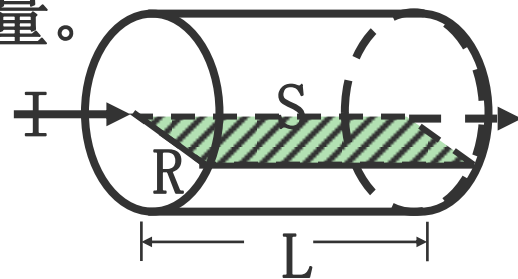


4-18一无限长载流圆柱形导体，电流I均匀分布在整個截面上，圆柱半径为R，求穿过S面（图中阴影）的磁通量。

解：由I的轴对称性，作轴对称的圆环。

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \quad \therefore B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

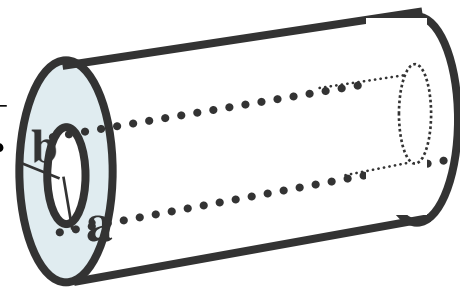
故S面的磁通  $d\Phi = B dS = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} L dr$   $\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} L$



4-19如图所示一空心柱形导体，其内外半径分别为a和b,导体内载有电流I，设电流均匀的分布在导体的横截面上，求证导体内部各点（ $a < r < b$ ）的磁感应强度

解： $a < r < b$

$$B = \frac{\mu_0 I (r^2 - a^2)}{2\pi (b^2 - a^2) r}$$



$$j = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 j \cdot \pi(b^2 - a^2)$$

$$B = \frac{\mu_0 j}{2r} \cdot (r^2 - a^2) = \frac{\mu_0 I (b^2 - a^2)}{2\pi (b^2 - a^2) r}$$



**补充4.7** 图中所示的导体内，电流密度按 $j=A/r$ 分布，其中 $A$ 为已知常数， $r$ 为场点到轴的距离。(1)求柱内外磁感应强度的分布；(2)若在轴线上放一根载流导线，电流为 $I$ ，欲使导体内磁感应强度与 $r$ 无关，则 $I$ 应取何值？

解：(1)  $r < a$   $B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_i = 0$  ,  $B = 0$

$$0 < r < a \quad B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 \int_a^r j dS = \mu_0 \int_a^r \frac{A}{r} \cdot 2\pi r \cdot dr = \mu_0 2\pi A(r-a)$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 A(r-a)}{r} = \mu_0 A \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

$$r > b \quad B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 A(b-a)}{r}$$

(2) 在 (1) 中  $B = \mu_0 A \left(1 - \frac{a}{r}\right) = \mu_0 A - \frac{\mu_0 Aa}{r}$

若 $I$ 的磁场  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 Aa}{r}$

则  $I = 2\pi Aa$  。



4-20 有一根很长的同轴电缆是由同轴的圆柱形导体组成，在这两个导体中有大小相等方向相反的电流通过，试求同轴电缆内外的磁感应强度分布。

解：根据安培环路定理, 由于I的对称性作半径为r的同轴环路。



$$\text{当 } r < a \quad \mathbf{B} \cdot 2\pi r = \mu_0 \mathbf{I} \frac{r^2}{a^2} \quad \therefore \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{I} r}{2\pi a^2}$$

$$\text{当 } a < r < b \quad \mathbf{B} 2\pi r = \mu_0 \mathbf{I} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi r}$$

$$\text{当 } b < r < c \quad \mathbf{B} 2\pi r = \mu_0 \mathbf{I} \left[ 1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right] \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

$$\text{当 } c < r \quad \mathbf{B} 2\pi r = \mu_0 \cdot 0 \quad \therefore \mathbf{B} = 0$$



## 第五章 磁介质

5-1 下面的说法是否正确(1)若闭和曲线内没有包含传导电流,则曲线上各点的 $\mathbf{H}$ 必为零.(2)若闭和曲线上各点 $\mathbf{H}$ 为零,则该曲线包围的传导电流代数和为零。(3) $\mathbf{H}$ 仅与传导电流有关。

解: (1)  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_i$ , 若  $\sum I_i = 0$ , 则 $\mathbf{H}$ 不一定为零

(2)  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_i$ , 回路上总 $\mathbf{H}$ 为零,  $\sum I_i$  必然为零。

(3) 由  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$  知  $\vec{H}$  不仅与传导电流有关, 还与磁化电流有关, 但  $\vec{H}$  沿环路的积分值只与传导电流有关系。

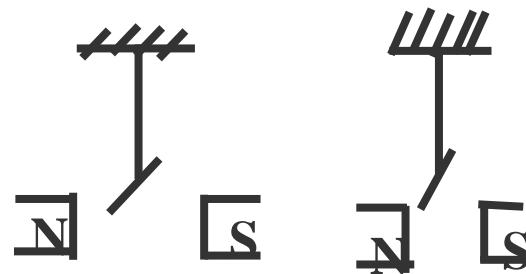
补充5.1 有两根铁棒, 外形完全相同, 其中一根为磁铁, 另一根则不是, 你怎样辨别他们? (不允许将一根铁棒悬挂起来, 也不允许用其他设备。)

解: 用甲棒的一端靠近乙棒的中部, 若有吸引力, 则甲为铁棒, 乙为磁棒; 若无吸引力, 则结论相反。



补充5.2 两种不同磁材料作成的小棒, 分别放在磁铁的两个磁极之间, 小棒磁化后其方位取向如图, 指出哪个是顺磁质, 哪个是抗磁质。

具有固有分子磁矩的顺磁质在磁场中, 分子磁矩转向外磁场方向故小棒不转; 而无分子磁矩组成的抗磁质在外磁场中产生一附近磁场与外磁场方向相反, 受排斥而旋转。



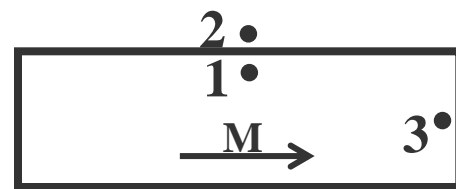
补充5.3 把未磁化的铁棒和直棒形状的永久磁铁放在同一均匀磁场中时, 分别讨论初始时刻它们受到的力和力矩的作用。

解: 棒形永久磁铁与外磁场不平行时, 合力为零, 合力矩不为零; 若平行, 则合力和合力矩均为零。而铁棒在外磁场中很快磁化变为磁棒, 结论同上。

补充5.4 一永久磁铁的磁力强度为  $M$ , 如题所示。 (1) 你能证明1和2两点  $H$  相等吗? (2) 你能根据  $B, M, H$  三矢量之间的关系分析点3处  $B$  和  $H$  的方向吗?



解: (1)  $M_1=M, M_2=0. B_1'=\mu_0 j'=\mu_0 M, B_2'=0,$   
 $B=B_0+B'=B'. H_1=B_1/\mu_0-M=B_1'/\mu-M=0, H_2=0.$



(2)  $\vec{B}_3 = \vec{B}_0 + \vec{B}_3' = \vec{B}_3' \quad B_3' = 1/2 B_1' = 1/2 \mu_0 M$

$H_3 = B_3 / \mu_0 - M = -1/2 M$

$H_3$ 与 $B_3$ 方向相反。

5-2 一均匀磁化的介质棒，直径为25毫米，长为75毫米，其总磁矩为 $1.2 \times 10^4$ 安·米<sup>2</sup>，求该棒中的磁化强度。

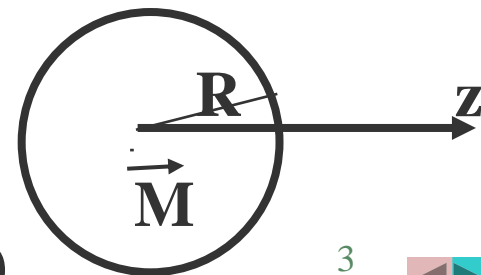
解:  $m=IS=j_m \pi r^2, j_m=|\vec{M} \times \vec{n}_0| = \vec{M}$

$m=Ml\pi r^2, M=m/l\pi r^2=3.3 \times 10^8$ (安/米)

补充5.5 半径为R的磁介质球，均匀磁化，磁化强度为M，M与z轴平行，如题所示。用球坐标表示出介质球表面上的磁化面电流密度，并求出这样分布的磁化棉电流所提供的总磁矩。

解:  $j_m' = |\vec{M} \times \vec{r}^0| = M \sin \theta, \theta-\theta+d\theta$ 所对应的弧  
 $dl=Rd\theta$ 含有磁化电流,  $dI' = j_m \cdot dl = MR \sin \theta d\theta,$

$dm = \pi r^2 \cdot dI' = \pi R^2 \sin \theta \cdot MR \sin \theta d\theta = \pi MR^3 \sin^3 \theta d\theta$



$$= \mu_0 B_3 (-\cos \theta + \cos_3 \theta) \Big|_0^\pi = \frac{3}{4} \mu_0 B_3$$

$$m = \int qm = \int_0^\pi \mu_0 B_3 \sin \theta q \theta = \mu_0 B_3 \int_0^\pi (1 - \cos_3 \theta) q (-\cos \theta)$$

补充5.6一环形螺线管，已知 $n=10^3$ 匝/米，电流 $I=2.0$ 安，再环内充满磁介质时， $B=1.0$ 特斯拉。求（1）放入磁介质后，环内的 $H$ ,  $M$ 和 $\mu$ 的值。（2）移去磁介质后，环内的 $H$ ,  $M$ ,  $\mu$ 的值。

解：（1） $H=nI=10^3 \times 2.0=2.0 \times 10^3$  （安/米）

$$H=B/\mu_0-M, \quad M=B/\mu_0-H=7.9 \times 10^5 \quad (\text{安/米})$$

$$B=\mu_0 \mu_r H \quad \mu_r = B/\mu_0 H = 398$$

（2） $H=nI=2.0 \times 10^3$ （安/米），

$$M=0, \quad \mu_r = 1$$



5-3 中心周长 $l=10$ 厘米的环形密绕细型螺线管环上线圈的总匝数 $N=200$ 匝, 线圈中的电流 $I=100$ 毫安. 求(1)环内磁感应强度 $B_0$ 和磁场强度 $H_0$ ; (2)在环内充入相对磁导率 $\mu_r=4200$ 的磁介质, 求环内的 $B$ 和 $H$ ; (3)在管内由传导电流产生的 $B$ 和由磁化电流产生的 $B'$   
解: 由于是密绕细型, 故

$$H_0 2\pi r = NI \quad \therefore H_0 = \frac{NI}{2\pi r} = 200(\text{A/m}) \quad B_0 = \mu_0 H_0 = 2.5 \times 10^{-4}(\text{T})$$

$$\text{若 } \mu_r=4200 \text{ 则 } H = H_0 = 200(\text{A/m}) \quad B = \mu_0 \mu_r H_0 = 1.06(\text{T})$$

$$\text{传导电流的磁场} \quad B_0 = 2.5 \times 10^{-4}(\text{T})$$

$$\text{磁化电流的磁场} \quad B' = B - B_0 = 1.06(\text{T})$$

5-4 一个铁制的圆环, 如题5-10图所示, 其平均周长为30厘米, 截面积为1厘米<sup>2</sup>, 在环上均匀的绕有300匝导线, 当导线的电流为0.032安时, 环内的磁通量为 $2 \times 10^{-6}$ 韦伯, 试计算(1)环内磁感应强度 $B$ ; 磁场强度 $H$ ; (2)磁性材料的磁导率 $\mu$ , 相对磁导率 $\mu_r$ 和磁化率 $\chi_m$ . (3)铁心内的磁化强度 $M$ . (4)磁化面的电流密度 $j'$ . <sup>5</sup>





解 (1)  $\Phi_m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{B} = \Phi_m / S = 2 \times 10^{-2}$  (特)

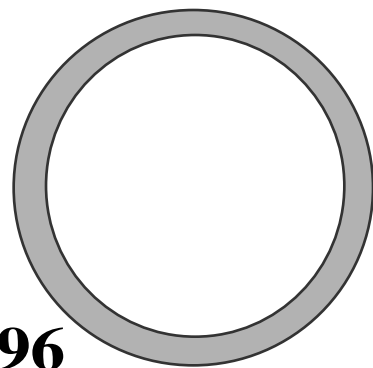
(2)  $\mathbf{H} = n\mathbf{I} = 32$  (安 / 米)

(3)  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ,  $\mu = \mathbf{B}/\mathbf{H} = 6.25 \times 10^{-4}$  (牛 / 安<sup>2</sup>)

$\mu = \mu_0 \mu_r$ ,  $\mu_r = \mu / \mu_0 = 497$ ,  $\mathbf{X}_m = \mu_r - 1 = 496$

(4)  $\mathbf{M} = \mathbf{X}_m \mathbf{H} = 1.59 \times 10^4$  (安 / 米)

(5)  $\mathbf{j}_m = |\vec{\mathbf{M}} \times \vec{\mathbf{n}}^0| = \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{I}' = \mathbf{j}_m \cdot l = 4.77 \times 10^3$  (安)



5-5 有一圆柱形无限长导体, 其磁导率为 $\mu$ , 半径为 $R$ , 电流 $I$ 沿轴向流动且均匀分布在截面上求 (1) 导体内任一点的 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ ; (2) 导体外任一点的 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 。

解: 根据安培环路定理, 由于对称性作半径为 $r$ 的同轴环路

导体内:  $\mathbf{H} 2\pi r = I \frac{r^2}{R^2} \quad \therefore \mathbf{H} = \frac{\mathbf{I} r}{2\pi R^2} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \frac{\mu \mathbf{I} r}{2\pi R^2}$

导体外:  $\mathbf{H} 2\pi r = I \quad \therefore \mathbf{H} = I / 2\pi r \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \frac{\mu I}{2\pi r}$



5-6 一磁导率为 $\mu_1$  的无限长圆柱形导体，半径为 $R_1$ ，其中均匀地通过电流 $I$ ，导体外包了一层绝缘介质，其外半径为 $R_2$ ，磁导率为 $\mu_2$ ，试求 $B$ 和 $H$ 的分布。

解：根据安培环路定理, 由于 $I$ 的对称性作半径为 $r$ 的同轴环路。

$$\text{当 } r < R_1 \quad H 2\pi r = I \frac{r^2}{R_1^2} \Rightarrow H = \frac{I r}{2\pi R_1^2}$$

$$B = \frac{\mu_1 I r}{2\pi R_1^2}$$

$$\text{当 } R_1 < r < R_2 \quad H 2\pi r = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}, B = \frac{\mu_2 I}{2\pi r}$$

$$\text{当 } r > R_2 \quad H 2\pi r = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



5-7 同轴电缆是由同轴导体圆柱组成，内导体半径为 $R_1$ 的圆柱，外导体的内外半径分别为 $R_2$ 和 $R_3$ ，导体间充满相对磁导率为 $\mu_2$ 的磁介质，已知两导体中电流 $I$ 等量而反向且均匀分布，导体的相对磁导率为 $\mu_1$ ，求 $B$ 的分布。

解：根据安培环路定理，由于 $I$ 的对称性作半径为 $r$ 的同轴环路。

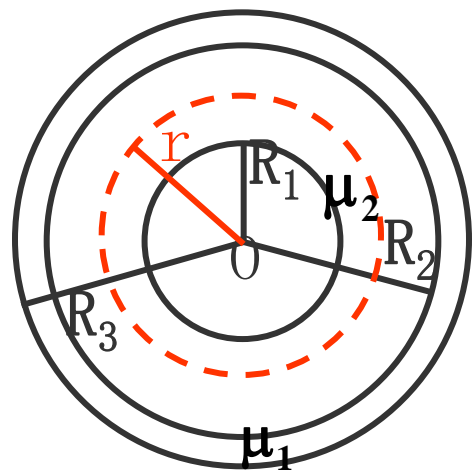
$$\text{当 } r < R_1 \quad H 2\pi r = I \frac{r^2}{R_1^2} \Rightarrow H = \frac{I r}{2\pi R_1^2}, B = \frac{\mu_0 \mu_{r1} I r}{2\pi R_1^2}$$

$$\text{当 } R_1 < r < R_2 \quad H 2\pi r = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}, B = \frac{\mu_0 \mu_{2r} I}{2\pi r}$$

$$\text{当 } R_2 < r < R_3 \quad H 2\pi r = I \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 \mu_{1r} I}{2\pi r} \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$\text{当 } R_3 < r \quad H 2\pi r = 0 \Rightarrow H = 0, B = 0$$



5-8 如图中是储存元件的环形磁芯，其外直径为0.8毫米，高为0.3毫米。若磁芯原来已被磁化，方向如图所示，现需使磁芯自内到外的磁化方向全部翻转，已知该矩磁材料的矫顽力 $H_c=2$ 奥斯特，问导线中电流至少需要多大？（1奥斯特= $10^3/4\pi$ 安/米）

解：

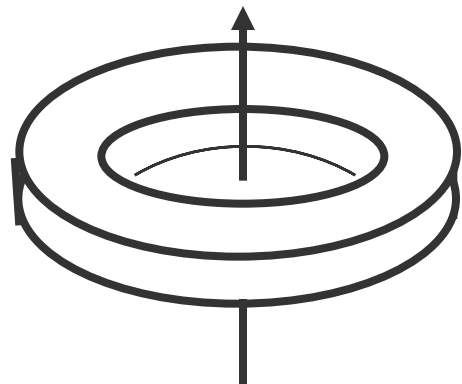
电流 $I$ 在磁介质内产生的磁场 由式：

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad \text{求得}$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

它在 $r = 0.4\text{mm}$  处内 $H$ 最小，若在此点 $H_c = 2$ 奥斯特 翻转，在 $r > 0.4\text{mm}$ ，( $H = I/2\pi r$ )， $H_c$ 而全部翻转，故

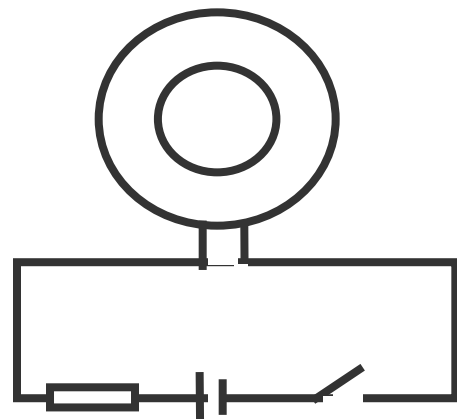
$$I = 2\pi r \cdot H_c = 2\pi \times 0.4 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^3 / 4\pi = 0.4 \text{ (安)}$$



## 第六章 电磁感应和电磁波

6-1 如图所示，两个同心共面的圆形闭合回路，问当开关合上的瞬间，小回路各段上受力方向如何？

解：当K合上瞬间，大回路中电流增大，这样小回路内部有一磁场方向向里，磁感应强度增大的磁场，因而小回路中的感应电流是逆时针方向的，由安培定则  $\vec{I} \times \vec{B}$  可知，内环受一个方向指向圆心的内压力。



补充6.1 一块金属板在均匀磁场中平移会不会产生感应电动势？会不会产生涡电流？若金属板在均匀磁场中旋转，情况怎样？

解：当平板运动方向与磁力线平行时，不产生感应电动势；若不平行，则有感应电动势，但无涡流产生；若是旋转，则平板上各点速度所在平面与磁力线平行，无感应电动势，不平行则有电动势。



补充6.2有一个铜环和一个木环，两环尺寸完全相同，放在同一变化磁场里，问在两环中的感应电动势和感生电场相同吗？

解：产生的感应电场相同，电动势不同，铜环内有自由电子可形成感应电流，而木环在感应电场作用下受极化。

6-2将一个超导材料作成的小薄片，放在永久磁铁的上方，它会悬浮起来。你能解释这种现象吗？

解：处于超导态的材料电阻为零，电流分布在外表面上，内部磁场为零。实际超导电流产生磁场抵抗外磁场的侵入，因而超导材料受到一个排斥力，它与重力平衡而悬浮在磁场的上方。

补充6.3 在一个电子感应加速器中从上往下看，电子沿逆时针方向旋转，试问：在该加速器中磁场的方向？当电子正在受加速作用时，这个磁场随时间如何变化？

解：电子受的洛伦兹力  $\vec{f} = -e\vec{v} \times \vec{B}$  是向心力可判断出磁场方向垂直向上。若电子在运动的方向上被加速，说明感应电场的方向是顺时针方向，由此推知磁场是随时间而增大的。

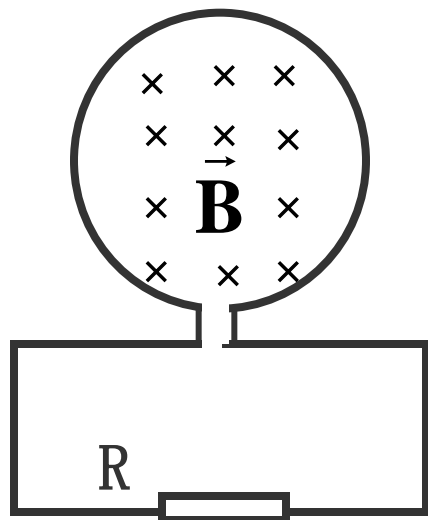


6-3 如图所示，通过回路的B线与线圈平面垂直，若磁通量按如下规律变化 $\phi=6t^2+8t+8$ ，式中 $\phi$ 的单位是毫韦伯， $t$ 是以秒为单位。求当 $t=2$ 秒时，（1）回路中感应电动势的大小是多少？（2）设 $R=2$ 欧姆， $R$ 上电流 $I$ 的大小及方向如何？

解：（1）  $\phi = (6t^2 + 8t + 8) \times 10^{-3}$  (韦伯)

$$\varepsilon = \left| -\frac{d\phi}{dt} \right|_{t=2} = (12t + 8) \times 10^{-3} \Big|_{t=2} = 3.2 \times 10^{-2} \text{ (V)}$$

$$(2) \quad I = \frac{\varepsilon}{R} = 1.6 \times 10^{-2} \text{ (A)}$$



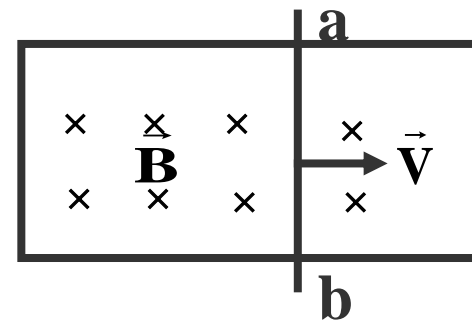
6-4 如图导体棒 $ab$ 长1米，放在金属导轨上，整个装置放在 $B=0.5$ 特斯拉的均匀磁场中，磁场方向与图面垂直。（1）若棒以4米/秒的速度向右运动，求棒的感应电动势大小和方向；（2）若棒 $ab$ 到某一位置时，电路的电阻恰好为0.2欧姆，求此时棒受的力（摩擦力略去）；（3）比较外力做功的功率及所消耗的热功率。

解:(1)  $\varepsilon = Bvab = 0.5 \times 4 \times 1 = 2(\text{V})$

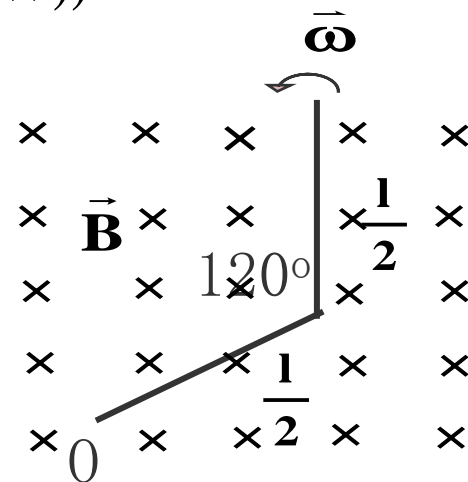
$$(2) \quad I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{2}{0.2} = 10(\text{A})$$

$$F = IBab = 10 \times 0.5 \times 1 = 5(\text{N})$$

$$(3) \quad P = I^2 R = 10^2 \times 0.2 = 20(\text{W}) \quad (P = FV = 5 \times 4 = 20(\text{W}))$$



6-5 如图一长为1的直导线弯折成夹角为 $120^\circ$ 相等长度的两部分，放在垂直于均匀磁场B的平面上，并绕其一端以角速度 $\omega$ 在此平面内旋转，求导线中感应电动势，并指出哪些电势高



解:两部分获感应电动势相当于直线段OA感应电动势:

$$OA = 2 \times \frac{1}{2} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

直线段OA感应电动势:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \omega B \overline{OA}^2 = \frac{3}{8} \omega B l^2$$

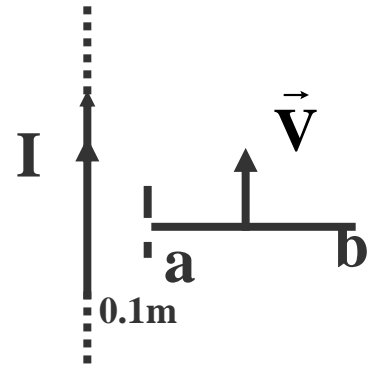




6-6 如图金属ab长1米, 以 $V=2.0$ 米/秒的速度平行于一直导线运动, 直导线中电流 $I=40$ 安培. 求棒中感应电动势大小, 哪端电势高?

$$\text{解: } d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = -vB dr = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi r} dr$$

$$\varepsilon = \int_{0.1}^{1.1} \frac{\mu_0 I v}{2\pi r} dr = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 40 \times 2.0}{2\pi} \ln \frac{1.1}{0.1} = 3.85 \times 10^{-5} (\text{V})$$

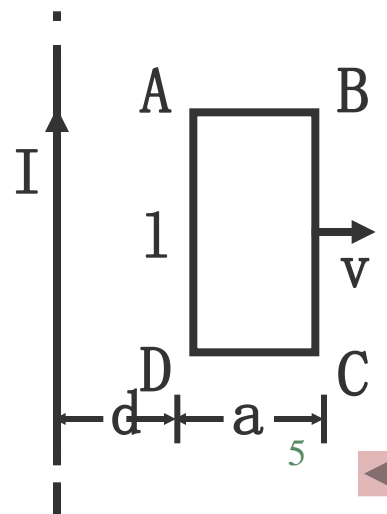


6-7 如图一长直导线, 通有电流 $I=5.0$ 安培, 在与其相距 $d=5.0$ 厘米处放一矩形线圈,  $l=4.0$ 厘米, 宽 $A=2.0$ 厘米, 共1000匝. 线圈以速度 $v=3.0$ 厘米/秒, 沿垂直于长直导线的方向向右运动, 问该时刻线圈中感应电动势是多少?

解: 将矩形线圈分成AB、BC、CD、DA四段。

$$\text{则 } \varepsilon_{AB} = \varepsilon_{cd} = 0 \quad \text{而} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\text{故 } \varepsilon_{DA} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{l} = v \frac{\mu_0 I}{2\pi d} l \quad (D \rightarrow A)$$



$$\varepsilon_{BC} = (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}}) \cdot \bar{\mathbf{l}} = v \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi(d+a)} l \quad (C \rightarrow B)$$

感应电动势为：

$$\varepsilon = N(\varepsilon_{AD} - \varepsilon_{BC}) = v \frac{\mu_0 a I}{2\pi d(d+a)} l = 6.86 \times 10^{-6} (V)$$

6-8若上题中的线圈不动, 而直导线通有交变电流,  $i = 5 \sin 100\pi t$  安培, 求线圈中感应电动势。

$$\text{解: } \varphi = \frac{\mu_0 \mathbf{I} N}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$

$$\varepsilon = \left| -\frac{d\varphi}{dt} \right| = \frac{\mu_0 N}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln \frac{d+a}{a} = \frac{\mu_0 N}{2\pi} \times 500\pi \cos 100\pi t \ln \frac{d+a}{a}$$

$$= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 4.0 \times 10^{-2} \times 10^3}{2\pi} \times 500\pi \ln \frac{7.0 \times 10^{-2}}{5.0 \times 10^{-2}} \cos 100\pi t$$

$$= 4.23 \times 10^{-3} \cos 100\pi t$$



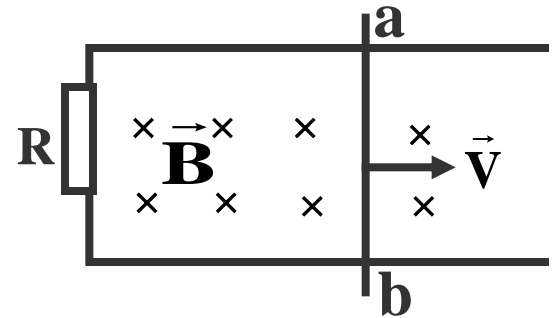
补充6.4 如图所示，一平行导轨上放一质量为 $m$ 的金属杆，长为 $l$ ，导轨的一端与电阻 $R$ 相连，其它部分的电阻可以忽略。整个装置放在均匀磁场 $B$ 中， $B$ 与导线平面垂直，当杆以初速度 $V$ 向右运动时，试求：（1）金属杆能移动的距离；（2）在此过程中 $R$ 发出的焦耳热；（3）能否用能量守恒解释所得结果。

解：(1)  $\varepsilon = vBl, I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{vBl}{R},$

$$f = I l B = \frac{vBl}{R} \cdot l B = \frac{B^2 l^2}{R} v$$

$$f = -m \frac{dv}{dt} = -m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -mv \frac{dv}{dx}, \quad \frac{B^2 l^2}{R} v = -mv \frac{dv}{dx}$$

$$dx = -\frac{Rm}{B^2 l^2} dv, \quad \therefore x = \int_0^x dx = \int_{v_0}^0 -\frac{Rm}{B^2 l^2} dv = \frac{Rm}{B^2 l^2} v_0$$



$$(2)dw = I^2 R dt = \left(\frac{vBl}{R}\right)^2 R dt = \frac{v^2 B^2 l^2}{R} \cdot \frac{dx}{v} = \frac{v B^2 l}{R} \left(-\frac{Rm}{B^2 l^2} dv\right)$$

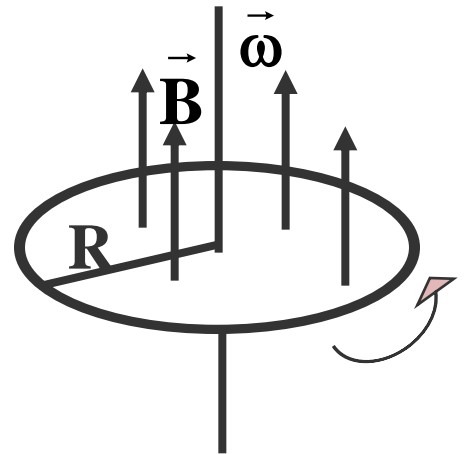
$$dw = -mv dv, w = \int_{v_0}^0 -mv dv = \frac{1}{2}mv_0^2$$

补充6.5如图所示，法拉第圆盘发电机是一个在磁场中转动的导体圆盘。设圆盘的半径 $R$ ，它的轴线与均匀外磁场 $B$ 平行，旋转角速率为 $\omega$ 。求盘心到盘边的电势差，哪处电势高？当盘旋转方向反转时，电势的高低是否也会反过来？

$$\text{解： } d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dr}, \quad \vec{v} = \vec{r}\omega$$

$$d\varepsilon = \omega B r dr$$

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int_0^R \omega B r dr = \frac{1}{2} \omega B R^2$$



6-9 一环形密绕细型螺线管，每厘米上有40匝，铁芯截面积为3厘米<sup>2</sup>，磁导率  $\mu = 2000\mu_0$ ，线圈中通有5毫安电流。试求

- (1) 环中磁场强度H: (2) 环中的磁感应强度B: (3) 磁通量;  
(4) 如果环上绕有2匝次级线圈，并且初级线圈中电流在0.1秒内由5安培均匀降到零，在次级线圈中产生的感应电动势是多少？

解：由于线圈密绕

磁场强度为 
$$H = nI = \frac{40}{10^{-2}} 5 \times 10^{-3} = 20 (\text{A/m})$$

磁感应强度为 
$$B = \mu H = 2000\mu_0 H = 5.03 \times 10^{-2} (\text{T})$$

磁通量为 
$$\Phi = BS = 1.51 \times 10^{-5} (\text{韦伯})$$

感应电动势为 
$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt}(N\Phi) = -\frac{d}{dt}(N\mu nIS) = 0.302 (\text{V})$$



6-10在圆柱形空间中存在着均匀磁场，B的方向与柱的轴线平行，若B的变化率为 $\frac{dB}{dt}=0.1$ 特/秒， $R=10$ 厘米，问自 $r=5$ 厘米、15厘米处的感应电场的电场强度为多大？若将一个电子放在 $r=5$ 厘米处，求开始时电子的加速度 $a$ 。

解：由于B的对称性

$$r=5\text{厘米时} \quad \oint_1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_1 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \pi r^2 \quad \therefore E_1 = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} = -2.5 \times 10^{-3} (\text{V} \cdot \text{m}^{-1})$$

$$r=15\text{厘米时} \quad \oint_1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_2 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \pi R^2$$

$$E_2 = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} = -3.3 \times 10^{-3} (\text{V} \cdot \text{m}^{-1})$$

（负号表示E为逆时针方向）

$$\text{加速度为} \quad eE_1 = ma \quad \therefore a = \frac{eE_1}{m} = 4.40 \times 10^8 (\text{V} \cdot \text{s}^{-2})$$



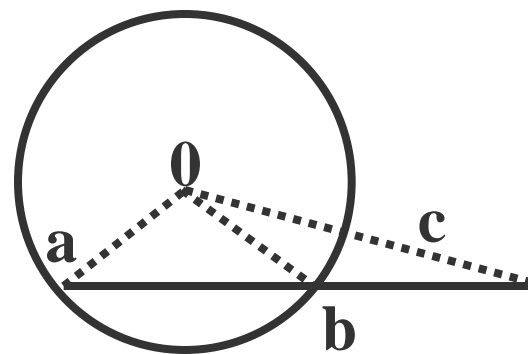
6-11 在半径  $R$  的圆柱形空间内存在一均匀磁场, 磁场变化率  $\frac{dB}{dt} > 0$  一长度位  $l$  的金属棒置于如图所示的位置, 棒的一半在磁场内一半在磁场外 ( $ab=bc$ ), 求棒两端的感应电动势  $\varepsilon_{ac}$ 。

解法一 用  $\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$  计算。取  $oabco$  为一闭合环路, 由于

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} = \int_{oa} \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} + \int_{abc} \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} + \int_{co} \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l}$$

因在  $oa$ ,  $co$  段上  $\vec{E}_{\text{涡}}$  垂直  $d\vec{l}$ , 积分值为零, 故

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} = \int_{abc} \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_{ac}$$



上述闭合环路内的磁通变化仅在三角形  $oab$ , 扇形  $obc$  区域内, 故有

$$\phi = B \cdot S = B \left( \frac{1}{2} \cdot ab \cdot h + \pi R^2 \times \frac{30}{360} \right) = BR^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{12} \right)$$

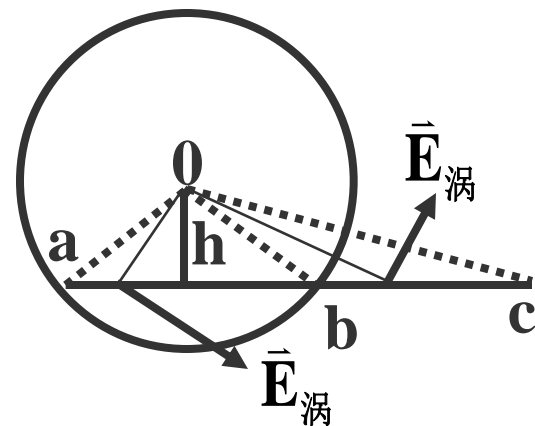
求得感生电动势大小为:  $\varepsilon_{ac} = -\left| \frac{d\phi}{dt} \right| = \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{12} \right) R^2 \frac{dB}{dt}$



解法二 用  $\varepsilon_{ac} = \int \mathbf{E}_{\text{涡}} \cdot d\mathbf{l}$  计算

变化的磁场激起一涡旋电场

$$\mathbf{E}_{\text{涡}} = -\frac{r}{R} \frac{dB}{dt} (r < R) \quad \mathbf{E}_{\text{涡}} = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} (r > R)$$



方向如图所示，故棒上的感应电动势为：

$$\varepsilon_{ac} = \int_a^b \mathbf{E}_{\text{涡}} \cdot d\mathbf{l} + \int_b^c \mathbf{E}_{\text{涡}} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \cos \alpha dl + \int_b^c \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} \cos \alpha dl$$

上式第一项中  $r \cos \alpha = h$  第二项中  $\cos \alpha dl = r d\theta$ ，故

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ac} &= \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} \int_a^b dl + R^2 \frac{dB}{dt} \int d\theta = \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} \cdot \overline{ab} + R^2 \frac{dB}{dt} \cdot \theta \\ &= \left( \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 + \frac{\pi}{12} R^2 \right) \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

感生电动势的方向从a指向c。





补充6.6一密绕长直螺线管，横截面为S，单位长度上有n匝线圈，电流为I，竖直放置。一质量为m半径为R的匀质介质环，同轴地套在螺线管外，且可在水平面内自由旋转，电量q均匀分布在环上，当螺线管中电流匀速率随时间减少时，求：环由静止开始，经过t时间后转动的角速度 $\omega$ ，旋转方向怎样？

解：  $B = \mu_0 n I$ ,  $R = \sqrt{S / \pi}$

$$E_{\text{涡}} \cdot 2\pi R = -\frac{d}{dt}(B \cdot S) = -S \frac{dB}{dt} = -\mu_0 n s \frac{dI}{dt} \quad E_{\text{涡}} = -\frac{\mu_0 n s}{2\pi R} \frac{dI}{dt}$$

$$F = qE_{\text{涡}} \quad FR = qE_{\text{涡}} R = -\frac{\mu_0 n s q}{2\pi R} \frac{dI}{dt} \cdot R = -\frac{\mu_0 n s q}{2\pi} \frac{dI}{dt}$$

$$FR = IB = mR^2 \frac{d\omega}{dt} \quad d\omega = -\frac{FR}{mR^2} dt = -\frac{\mu_0 n s q}{2\pi m R^2} \frac{dI}{dt} dt$$

$$\int_0^\omega d\omega = \int_0^t -\frac{\mu_0 n s q}{2\pi m R^2} \frac{dI}{dt} dt \quad \omega = -\mu_0 n s q \frac{dI}{dt} \frac{t}{2\pi m R^2}$$



6-12 如图所示，两长螺线管共轴，半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ ，长为 $l$  ( $l \gg R_1, l \gg R_2$ )，匝数分别为 $N_1$ 和 $N_2$ ，求互感系数 $M$ 。

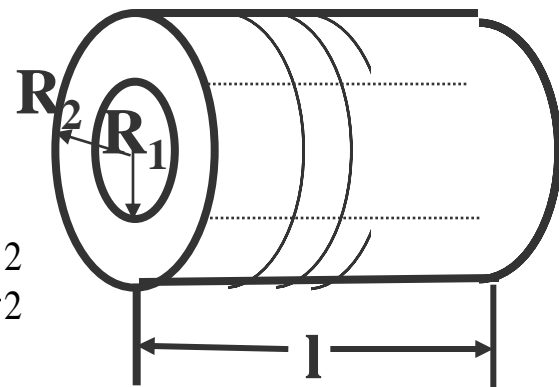
解法一：利用公式  $M = \frac{\Psi}{I}$  计算。设内螺

线管载流为 $I_2$ 时，产生的 $B = \mu_0 n_2 I_2$ 在外螺线管

的全磁通量为  $\Psi_{21} = N_1 \phi_{21} = N_1 B_2 S_2 = \mu_0 n_2 I_2 N_1 \pi R_2^2$

因而互感系数为：

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_2} = \mu_0 n_2 N_1 \pi R_2^2 = \mu_0 N_1 N_2 I_2 \pi R_2^2 / l$$



解法二：利用公式  $M = \epsilon_{21} / \frac{dI_2}{dt}$  计算。设内外螺线管的载流都可变的，则互感系数为：

$$M = \epsilon_{21} / \frac{dI_2}{dt} = \frac{d\Psi_{21}}{dt} / \frac{dI_2}{dt} = \mu_0 n_2 N_1 \pi R_2^2 = \mu_0 N_1 N_2 \pi R_2^2 / l$$



解法三： 利用公式  $\int \vec{B} \cdot \vec{H} dV = W_{\text{自}1} + W_{\text{自}2} + W_{\text{互}}$

设两螺线管载流  $I_1, I_2$  为同向流动，又因为

由公式： 
$$\int \vec{B} \vec{H} dV = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

上式中 
$$L_1 = \mu_0 n_1^2 v_1, \quad L_2 = \mu_0 n_2^2 v_2,$$

求得互感系数： 
$$M = \frac{\int \vec{B} \vec{H} dV - \frac{1}{2} L_1 I_1^2 - \frac{1}{2} L_2 I_2^2}{I_1 I_2}$$

$$\begin{aligned} \int \vec{B} \vec{H} dv &= \frac{B_1^2}{2\mu_0} (\pi R_1^2 - \pi R_2^2) \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \frac{(B_1 + B_2)^2}{\mu_0} \cdot \pi R_2^2 l \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 n_1^2 I_1^2 \pi R_1^2 l + \frac{1}{2} \mu_0 n_2^2 I_2^2 \pi R_2^2 l + \mu_0 n_1 n_2 I_1 I_2 \pi R_2^2 l \end{aligned}$$



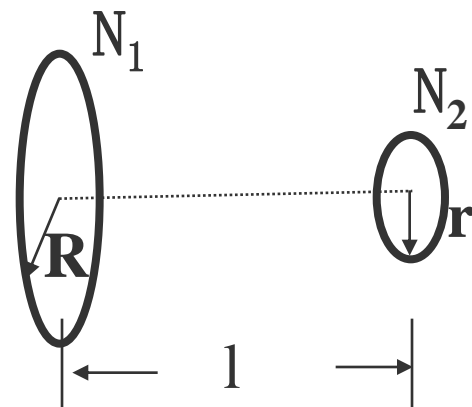
$$\mathbf{M} = \frac{\mu_0 \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2 \pi \mathbf{R}_2^2 \mathbf{l}}{\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2} = \mu_0 \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \pi \mathbf{R}_2^2 \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{l}}$$

6-13 如图所示，两个共轴圆线圈，半径分别为R和r，匝数分别为 $N_1$ 和 $N_2$ ，相距为l，设r很小，则小线圈所在处的磁场可认为是均匀的，求两线圈的互感系数M。

$$\text{解： } \mathbf{B}_{12} = \mathbf{N}_1 \frac{\mu_0 \mathbf{I}_1 \mathbf{R}^2}{2(\mathbf{R}^2 + \mathbf{l}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Phi_{12} = \mathbf{N}_2 \phi_{21} = \mathbf{N}_2 \mathbf{B}_{21} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{N}_2 \mathbf{B}_{21} \pi \mathbf{r}^2$$

$$\mathbf{M} = \frac{\Phi_{21}}{\mathbf{I}_1} = \frac{\mu_0 \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \pi \mathbf{R}^2 \mathbf{r}^2}{2(\mathbf{R}^2 + \mathbf{l}^2)^{\frac{3}{2}}}$$



6-14 一矩形线圈其边长为 $a=10$ 厘米， $b=20$ 厘米，由100匝绝缘导线绕成，放在一很长的导线旁边并与之共面，求图中两情况下，线圈与导线间的互感系数。

解：(1) 无限长导线中有 $I$ 产生  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi r}$

在矩形线圈中产生

$$\Psi = N \int \Phi = N \int_a^{2a} \mathbf{B} b dr = \frac{Nb\mu_0 I}{2\pi} \ln 2$$

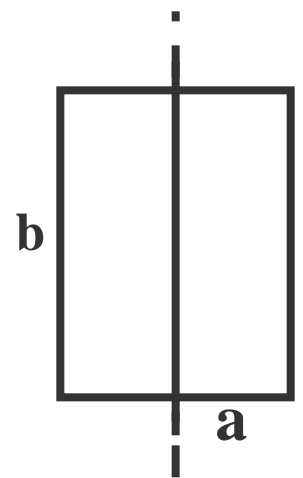
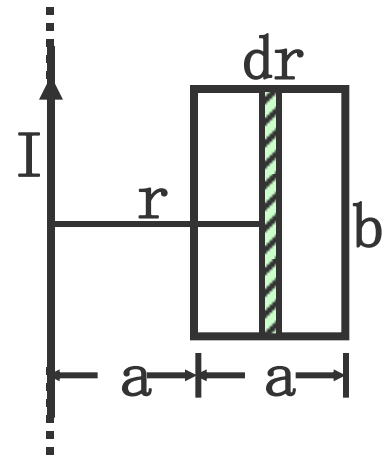
故互感系数为  $M = \frac{Nb\mu_0}{2\pi} \ln 2 = 2.7 \times 10^{-6} (\text{H})$

(2) 无限长导线中的 $I$ 产生  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi r}$

但在线圈中产生的  $\Phi$  值相反

故  $\Psi = 0$

互感系数为  $M = \Psi / I = 0$



6-15 一个矩形截面的环形密绕螺线管，尺寸如图，总匝数为N，电流为I，求：（1）穿过横截面的磁通；（2）自感系数；（3）环内的磁场能量；（4）当N=1000匝，D1=10厘米，D2=20厘米，h=1.0厘米，I=2安培时的自感系数和磁能大小。

解：由于线圈密绕，故当其中有电流I时，环内

$$\mathbf{B} = 2\pi r = \mu_0 \mathbf{N} \mathbf{I} \quad \therefore \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{N} \mathbf{I}}{2\pi r}$$

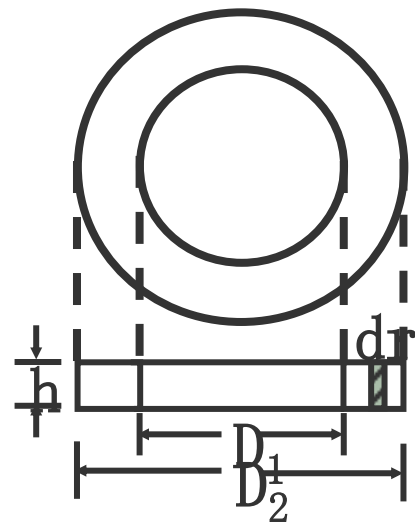
(1) 穿过横截面的磁通为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{\frac{D_1}{2}}^{\frac{D_2}{2}} \frac{\mu_0 \mathbf{N} \mathbf{I}}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 \mathbf{N} h}{2\pi} \mathbf{I} \ln \frac{D_2}{D_1}$$

(2) 自感系数为 
$$\mathbf{L} = \frac{\Psi}{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{N}\Phi}{\mathbf{I}} = \frac{\mu_0 \mathbf{N}^2 h}{2\pi} \ln \frac{D_2}{D_1}$$

(3) 环内的磁场能量为 
$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \mathbf{I}^2 = \frac{\mu_0 \mathbf{N}^2 h}{4\pi} \mathbf{I}^2 \ln \frac{D_2}{D_1}$$

(4) 带入数据计算得到 
$$\mathbf{L} = 1.39 \times 10^{-3} (\text{H}), \quad \mathbf{W} = 2.78 \times 10^{-3} (\text{J})$$



补充6.7 两平行导线，横截面的半径均为 $a$ ，中心相距 $d$ ，载有大小相等，方向相反的电流，设两导线内部的磁通均可忽略不计，证明：这样一对导线长为 $l$ 的一段自感系数为：

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

解：  $B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$

$$d\phi = B \cdot ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right) \times l \times dr$$

$$\phi = \int d\phi = \int_a^{d-a} \frac{l\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right) dr = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

$$L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$



6-16 证明：两个自感系数分别为 $L_1$ 和 $L_2$ ，互感系数为 $M$ 的线圈，当它们串联是起等效自感系数 $L=L_1+L_2 \pm 2M$ 。式中+号和-号分别表示是顺接和反接两种情况。

解：(1) 两线圈顺接时，线圈1, 2自身的磁通分别为

$$\phi_1 = L_1 I, \phi_2 = L_2 I;$$

$$\text{线圈1在2 中的磁通为} \quad \phi_{12} = MI,$$

$$\text{线圈2在1 中的磁通为} \quad \phi_{21} = MI,$$

故串联而顺接时的总磁通为：

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_{21} + \phi_{12} = (L_1 + L_2 + 2M)I$$

$$\therefore L = \frac{\phi}{I} = L_1 + L_2 + 2M$$

同理，串联反接时自感系数为：

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$





补充6.8 RL电路的电流在5秒内达到它的稳态值的1/3，问这个电路的时间常数多大？

解： 
$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$I|_{t=5} = \frac{I_0}{3} = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})|_{t=5} \quad e^{-\frac{5}{\tau}} = \frac{2}{3} \quad \therefore \tau = \frac{5}{\ln 1.5} \approx 12.3(s)$$

补充6.9 一个有电阻 $R=4$ 欧姆，电感 $L=20$ 亨利，组成为RL电路. 已知合闸的瞬间电流增长率为5安/秒，求电源电动势？(设电源无内阻)

解： 
$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\varepsilon}{R} \cdot \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \Big|_{t=0} = 5(m/s)$$

$$\varepsilon = 5L = 5 \times 20 = 100(V)$$



6-17 在图中  $\varepsilon=100$  伏,  $R_1=10$ 欧姆,  $R_2=20$ 欧姆,  $R_3=30$ 欧姆,  $L=2$ 亨利, 求在下列三种情况下  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  的值: (1) K刚接通的瞬间; (2) 接通很长时间后; (3) 接通很长时间后, 再切断的瞬间。

解: K接通时, L相当于开路

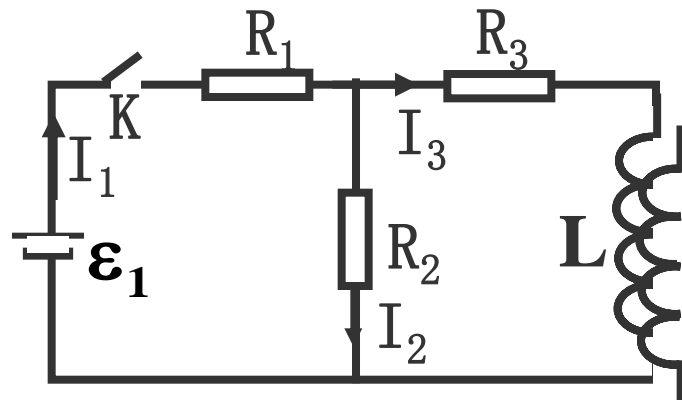
$$\text{故 } I_3 = 0 \quad I_1 = I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = 3.3(\text{A})$$

K接通很长时间后, L相当于短路

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 4.5(\text{A}) \quad I_2 = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 2.7(\text{A})$$

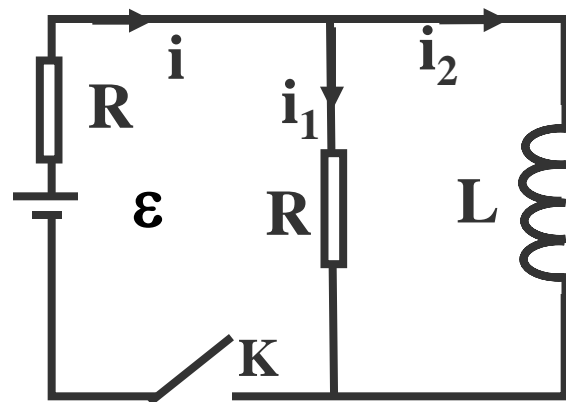
$$I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 1.8(\text{A})$$

K接通很长时间后, 再断开  $I_1 = 0 \quad I_2 = I_3 = 1.8(\text{A})$



补充6.10 如图所示, 求合闸后 $i_1$ ,  $i_2$ ,  $I$ 随时间变化的规律。

$$\text{解: } \begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ iR + i_1R - \varepsilon = 0 \\ -i_1R + L \frac{di_2}{dt} = 0 \end{cases}$$



$$\therefore i_1 = \frac{\varepsilon}{2R} e^{-\frac{R}{2L}t}, \quad i_2 = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{2L}t}), \quad i = \frac{\varepsilon}{R} (1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{R}{2L}t})$$

补充6.11 电阻 $R=10$ 欧姆, 电感 $L=2.0$ 亨利的线圈, 接入电动势 $\varepsilon=100$ 伏的电源上 (内阻不计), 在接通后 $0.1$ 秒内, 求: (1) 线圈磁场储存的磁能的增长率; (2) 线圈中产生的焦耳热产生的速率; (3) 电源释放能量的速率。



解:(1)  $I(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad w_0 = \frac{1}{2} LI^2(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= LI \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0.1} = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) e^{-\frac{R}{L}t} \Big|_{t=0.1} \\ &= \frac{100}{10} (1 - e^{-\frac{10}{20} \times 0.1}) e^{-\frac{10}{20} \times 0.1} = 238(\text{W}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad P &= I^2 R \Big|_{t=0.1} = \left[ \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \right]^2 \cdot R \Big|_{t=0.1} \\ &= \frac{100^2}{10} (1 - e^{-\frac{10}{20} \times 0.1})^2 = 152(\text{W}) \end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{dw}{dt} + p = 238 + 152 = 390(\text{W})$$



补充6.12 无限长且半径为  $R$  的直导线, 通有电流  $I$ , 电流均匀分布在整個截面上, 求单位长度内部所储存的磁能与其相应的自感系数 (设  $\mu_r=1$ )。

解法一: 有安培定理距导线中心轴  $r$  处的磁感应强度  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$

该处的磁能密度为:  $\omega_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{I^2 r^2}{8\mu_0 \pi^2 R^4}$

在导线长度为 1 的范围内, 厚度  $r-r+dr$  体元内储有磁 能:

$$d\omega_m = \omega_m \cdot dV = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4} \times 1 \times 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2 r^3}{4\pi R^4} dr$$

故求得导线内的磁能为:

$$\omega_m = \int d\omega_m = \int_0^R \frac{\mu_0 I^2 r^3}{4\pi R^4} dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

利用公式  $\omega = \frac{1}{2} LI^2$  求得自感系数为:  $L = \frac{2\omega_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi}$



解法二 利用公式  $\Phi = \mathbf{L}\mathbf{I}$  求解。在单位长度导线中，穿过  $r$ - $r+dr$  的截面的磁通量为：
$$d\Phi = \mathbf{B}dS = \mathbf{B}dr = \frac{\mu_0 \mathbf{I} r}{2\pi R^2} dr$$

这部分磁通量只套链了面积  $\pi r^2$  内的电流  $\frac{r^2}{R^2} \mathbf{I}$ ，因而在计算磁通匝链数应乘上因子  $r^2/R^2$ ，所以

$$d\psi = \frac{r^2}{R^2} d\phi = \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{\mu_0 \mathbf{I} r}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 \mathbf{I} r^3}{2\pi R^4} dr$$

故单位长度导体总磁通匝链数为：
$$\psi = \int d\psi = \int_0^R \frac{\mu_0 \mathbf{I} r^3}{2\pi R^4} dr = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{8\pi}$$

与式  $\Phi = \mathbf{L}\mathbf{I}$  比较，求得单位长度的自感系数仍为：
$$\mathbf{L} = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

从上面的计算结果不难得出

若  $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{R}_1} < 1$ ，则为不完全耦合；

若  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ ，这时  $\mathbf{k} = 1, \mathbf{M} = \sqrt{\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2}$

称这为完全耦合，也就是不存在漏磁现象。

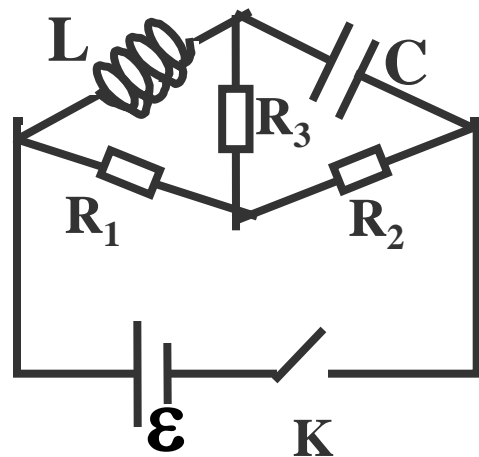


6-18 如图所示的电路里， $R_1, R_2, R_3, L, C$ 和  $\mathbf{3}$ 均为已知， $L$ 和 $C$ 为理想的电感和电容，电源内阻可以忽略，求 （1） $K$ 接通的瞬间，流过各电阻的电流；（2） $K$ 接通很久后，电阻 $R_2$ 消耗的功率和电感 $L$ 和电容 $C$ 储存的能量。

解：(1) $K$ 接通瞬间， $L$ 断路， $C$ 短路，这时电路图如下，回路电阻为：

$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{(R_2 + R_3)\varepsilon}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \\ i_2 = \frac{i_1 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_2} = \frac{R_3 \varepsilon}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \\ i_3 = i_1 - i_2 = \frac{R_2 \varepsilon}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \end{array} \right.$$



(2) K接通很久, L短路, C断路, 这时电路图如右, 电流分布仿(1)写出:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{R_3 \varepsilon}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \\ i_2 = \frac{(R_1 + R_3) \varepsilon}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \\ i_3 = \frac{R_1 \varepsilon}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \end{cases}$$

通过L的电流为 $i_3$  故它存在有确解为:

$$w = \frac{1}{2} L i_3^2 = \frac{L R_1^2 \varepsilon^2}{2(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)}$$

在 $R_2$ 上消耗功率为:  $P = i_2^2 R_2 = \frac{(R_2 + R_3)^2 R_2 \varepsilon}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)^2}$

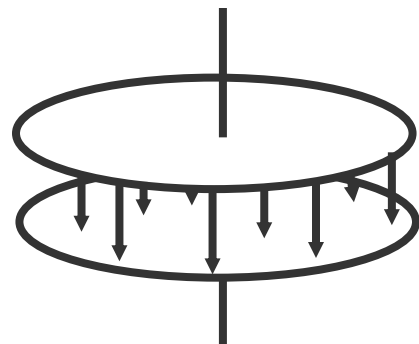
在电容C上存储的电能为:  $w = \frac{1}{2} C v_c^2 = \frac{1}{2} C \varepsilon^2$





6-19 如图一平行板电容器，两极板都是半径为5.0厘米的圆形导体板，在充电时，其电场强度的变化率 $dE/dt=1.0 \times 10^{12}$  伏/米秒。求(1)两极板间位移电流；(2)求极板边缘处的磁感应强度 $B$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: (1): } I_d &= j_d S = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \pi a^2 = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E}) \cdot \pi a^2 \\ &= \pi \epsilon_0 a^2 \frac{dE}{dt} = 6.94 \times 10^{-2} \text{ (A)} \end{aligned}$$



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_d \quad \therefore H \cdot 2\pi r = I_d \quad \therefore H = \frac{I_d}{2\pi a} = \pi \epsilon_0 a^2 \frac{dE}{dt} / 2\pi a$$

$$\therefore B = \mu_0 H = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mu_0 a \frac{dE}{dt} = 2.75 \times 10^{-7} \text{ (T)}$$

6-20 一平行板电容器，两板都是面积为 $S$ 的圆形金属片，接交流电源上，板上电荷 $q=q_m \sin \omega t$ 。(1)求电容器中位移电流密度；(2)试证两板间磁感强度： $B = (q_m r \omega \mu_0 / 2s) \cdot \cos \omega t$ ，其中 $r$ 为由圆板中心线到场点的距离。



解: (1)  $\because \mathbf{D} = \sigma = \frac{q}{s} = \frac{q_m \sin \omega t}{s}, \quad \therefore \mathbf{j}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{q_m \omega}{s} \cos \omega t.$

(2)  $\because \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_d \quad \therefore H \cdot 2\pi r = j_d \cdot \pi r^2$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{j}_d \mathbf{r}}{2} \quad \therefore \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 \mathbf{r}}{2} \mathbf{j}_d = \frac{\mu_0 \omega q_m \mathbf{r}}{2s} \cos \omega t$$

**6-21** 一平面电磁波在无界的无损耗的介质中沿x方向传播,介质的磁率和真空相同,而相对电容率(1)求波的速度, (2)如果电场强度E只有y方向的分量,且它的振幅是 10伏/米,求磁场强度的振幅及方向.

解: 
$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = 10^8 (\text{m/s})$$

$$\because \sqrt{\epsilon} \mathbf{E} = \sqrt{\mu} \mathbf{H} \quad \therefore \mathbf{H} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r}}{\sqrt{\mu_0}} \mathbf{E} = 7.96 \times 10^{-2} (\text{A/m})$$



## 第四部分

## 波 动 光 学

### 第一章 光的干涉

1-1 在杨式双缝实验中，当作如下调节时，屏幕上的干涉条纹将如何变化：(1)两缝之间的距离逐渐增大；(2)保持双缝之间的距离不变，使双缝与屏幕之间的距离逐渐减小；(3)如果把一条狭缝遮住，在屏幕中心点O的光强将发生什么变化？

解：(1)干涉条纹间距  $\Delta X = \lambda L / d$  双缝间距  $d$  增大，条纹间距变小，条纹变密，中央零级条纹位置不变。

(2)  $d$  不变，逐渐减小双缝与屏之间的距离  $L$ ，条纹间距也变小，零级明条纹位置不变。

$I = 4I_0 \cos^2(\delta/2)$ ,  $\delta$  为屏上任一点处两光相位差. 在屏幕心,  $\delta = 0, I = 4I_0$   
若挡住双缝中的一个，屏上而是单缝衍射

(3) 设双缝中每一缝产生的光强为  $I_0$ ，屏上相干光强分布为  $I_0$  中心O点光强度为  $I_0$ ，它是双缝时的1/4.

**1-2** 在杨式双缝实验中，用单色光垂直照射在两个相距为**0.5毫米**的双缝上，在与缝相距为**1.0米**的屏幕上测得中央明条纹两侧第**5级明条纹**之间的距离为**11.78毫米**，是求此单色光的波长？

解： 杨式干涉中条纹间距公式为  $\Delta x = \frac{\lambda L}{d}$ ，光程差为波长的整数倍时产生亮条纹。由题中条件知

$$d = 5 \times 10^{-4} \text{ m}, \quad L = 1.0 \text{ m}, \quad 10\Delta x = 11.78 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

$$\Delta x = 1.178 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

$$\text{因此有 } \lambda = \frac{\Delta x \cdot d}{L} = \frac{1.178 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-4}}{1 \times 10^{-3}} = 589(\text{nm}).$$

**1-3** 用白光垂直照射在两个相距为 **0.5 毫米** 的双缝上,已知缝与屏幕的距离为**1.0米**,试求第一级彩色条纹中,红色条纹 ( $\lambda=760\text{nm}$ ) 和紫色条纹 ( $\lambda=400\text{nm}$ ) 间的距离.

解： 第K级明条纹坐标： $x = k \frac{\lambda L}{d}$ .

两波长的第一级明条纹的坐标分别为：

$$x_1 = \frac{\lambda_1 L}{d} = \frac{760 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^3}{0.5 \times 10^{-3}} = 1.52 \times 10^{-3} (\text{m}),$$

$$x_2 = \frac{\lambda_2 L}{d} = \frac{400 \times 10^{-6}}{0.5 \times 10^{-3}} = 0.8 \times 10^{-3} (\text{m}).$$

两波长的第一级干涉极大距离： $x_1 - x_2 = 7.2 \times 10^{-4} \text{m} = 0.72 \text{ mm}$ .

补充1.1 以菲涅而双棱镜干涉仪,如图所示. 折射棱角 $\theta=6'$ , 狭缝S到双棱镜的距离 $L_1=20$ 厘米,棱镜材料的折射率 $n=1.5$ . 试求: (1)两虚光源的距离; (2)用波长500纳米的绿光照射狭缝S, 在距棱镜 $L_2=2$ 米的屏幕上干涉条纹的间距.

解:(1)两虚光源间距  $d=2 \theta L_1(n-1)$

其中  $\theta = 6' = 1.745 \times 10^{-3} \text{rad}$ ,  $n = 1.5$   $L_1 = 0.2\text{m}$ .

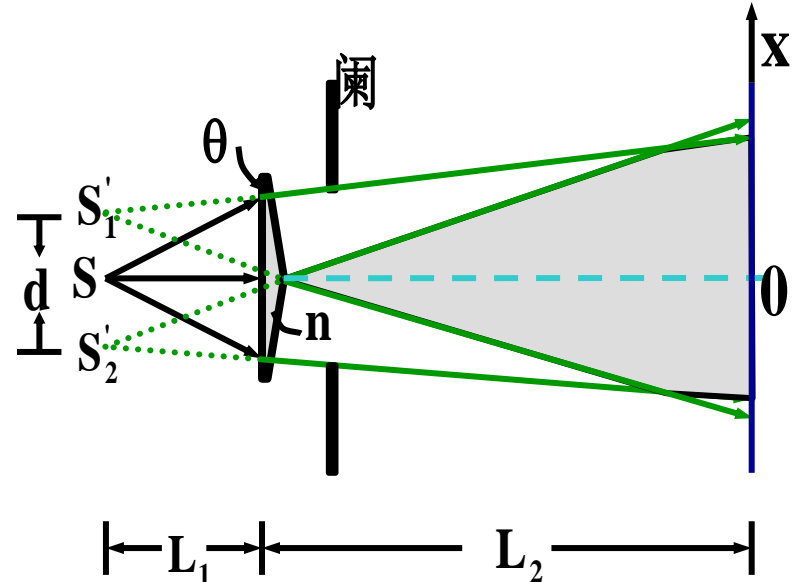
解得  $d = 2 \times 1.745 \times 10^{-3} \times 200 \times (1.5 - 1) = 0.349 (\text{mm})$ .

(2)已知:  $\lambda = 500$  纳米,  $L = L_1 + L_2$   
 $= 2 + 0.2 = 2.2(\text{m})$ .

条纹间距:

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d} = \frac{500 \times 10^{-6}}{0.349} \times 2.2 \times 10^3$$

$$= 3.15(\text{mm}).$$



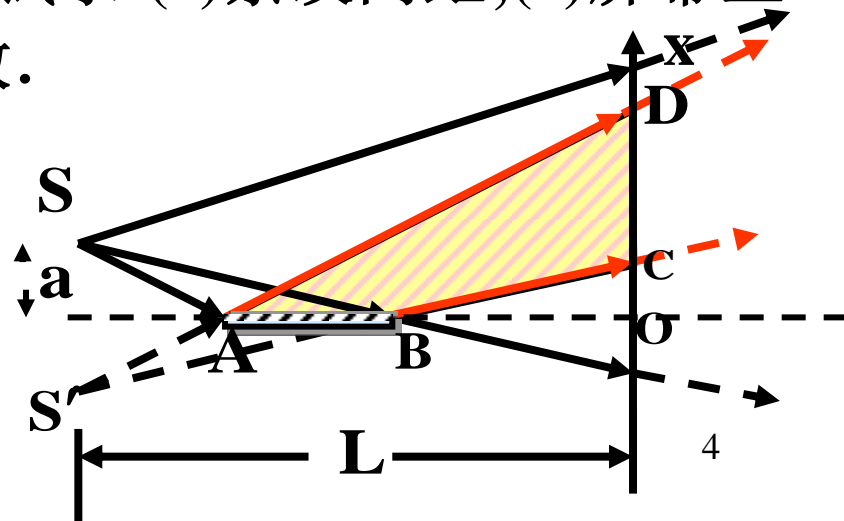
1-4 洛埃竟实验中, 如图所示点光源  $S$  在镜平面上方 2 毫米处, 反射镜位于光源与屏幕正中间, 镜长  $l = 40$  厘米, 屏到光源的距离  $L = 1.5$  米, 波长为 500 纳米. 试求:(1)条纹间距;(2)屏幕上干涉条纹的范围;(3)干涉条纹间距数.

解 (1)  $\lambda = 500\text{nm}$ ,  $a = 2\text{mm}$ ,

$L = 1.5\text{m}$ .

解得干涉条纹间距

$$\Delta x = \lambda L / 2a = 0.1875\text{mm}$$



(2)如图, CD为屏幕上干涉范围. 由几何关系:

$$\frac{DO}{S'P} = \frac{AO}{AP}, \quad DO = \frac{AO}{AP} S'P = \frac{950}{550} \times 2 = 3.45(\text{mm}).$$

同理

$$CO = \frac{BO}{BP} S'P = 1.16\text{mm}.$$

故干涉条纹在距 O 点上方1.16mm到3.45mm之间.

(3)双缝干涉为等间距条纹, 所以共有条纹数为:  $n = \frac{DC}{\Delta x} \approx 12$ 条.

补充1.2 如图所示的洛埃镜装置中, S 光源发射频率  $\nu = 6 \times 10^{14}$  秒<sup>-1</sup>的光波,  $SP = 1$  毫米,  $AB = PA = 5$  厘米,  $BO = 190$ 厘米.

(1)确定能产生干涉条纹的区域, 并计算条纹数; (2)如果在光路SQ上插入一块折射率为  $n = 1.5$  的云母片, 使最下面的干涉条纹移到原干涉条纹的最上部, 使求云母片应该有多厚?

解 (1) 干涉区在DC之间.

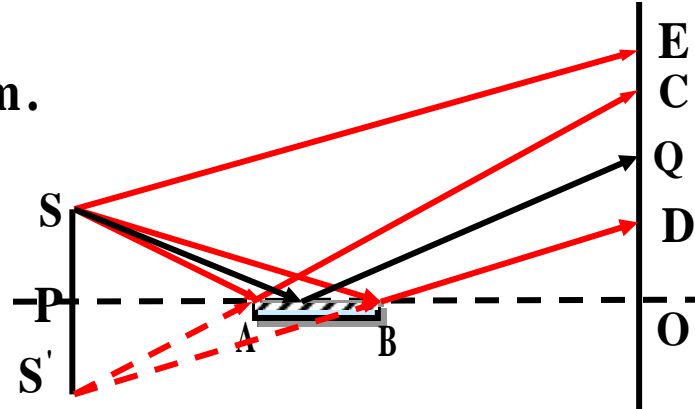
$$CO = \frac{AO}{AP} S'P = 39\text{mm}, \quad DO = \frac{BO}{BP} S'P = 19\text{mm}.$$

干涉在 O 上方19mm到39mm范围内.

$$\text{干涉条纹间距} \quad \Delta x = \frac{\lambda L}{2a}.$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = 500\text{纳米}, \quad L = PA + AB + BO = 5\text{cm} + 5\text{cm} + 190\text{cm} = 2\text{m}.$$

$$\text{所以干涉条纹数} \quad n = \frac{DC}{\Delta x} = \frac{(39 - 19) \times 2}{500 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^3} \approx 40\text{条}$$



(2)若屏幕上干涉区最下面的条纹移至干涉区的最上面, 干涉区每一点都有40个条纹移过, 如图加入云母片, 可该光束光程增加40个波长, 即  $(n - 1)d = 40\lambda$ ,

式中d为所加云母片的厚度, 代入数据解得

$$d = \frac{40\lambda}{n - 1} = \frac{40 \times 500 \times 10^{-6}}{1.5 - 1} = 4 \times 10^{-2}(\text{mm}).$$



**1-5** 用白光垂直照射在折射率为**1.40**的薄膜上，如果紫光（**400**纳米）在反射光中消失，问此薄膜的最小厚度是多少？紫光在薄膜中的波长是多少？

解（1）设薄膜在空气中，反射极小时光程差满足

$$2nd + \frac{\lambda}{2} = (k + \frac{1}{2})\lambda,$$

当  $k = 1$  时有最小厚度，由上式解得

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2 \times n} = \frac{400 \times 10^{-6}}{2 \times 1.4} = 143(\text{nm}).$$

（2）紫光在薄膜中的波长： $\lambda_n = \lambda / n = 286\text{nm}.$

**1-6** 用白光垂直照射在厚度为  $4.0 \times 10^{-5}$  厘米的透明薄膜（ $n=1.50$ ）表面上，试问在可见光范围内，什么波长的光在反射干涉时加强？

解 空气中的透明薄膜，反射光相干加强光程差应满足： 7

$$2nd + \frac{\lambda}{2} = k\lambda. \quad \lambda = \frac{2nd}{k - 1/2} = \frac{2 \times 1.5 \times 4.0 \times 10^{-5}}{k - 1/2}.$$

当  $k = 1$  时, 得  $\lambda = 2400\text{nm}$ , 不是可见光, 舍去.

当  $k = 2$  时, 得  $\lambda = 800\text{nm}$ , 不是可见光, 舍去.

当  $k = 3$  时, 得  $\lambda = 480\text{nm}$ , 是可见光, 蓝光.

**1-7** 用白光照射空气中肥皂水薄膜, 设肥皂水的折射率为 1.33, 试问: (1) 当我们的观察方向与膜面的法线方向成  $30^\circ$  角, 可看到薄膜的反射光线呈绿色 ( $\lambda=500$  纳米) 膜的最小厚度是多少?

(2) 如果从膜面的法线方向观察, 膜呈和种颜色? (设厚度不变) (3) 当膜快要破时, 从反射方向看它是暗的, 为什么?

解 (1) 入射角  $= 30^\circ$ , 由折射定律  $1.0 \sin i = n \sin \gamma$

式中  $n = 1.33$ , 解得  $\gamma = 22^\circ$ ,  $\gamma$  为膜内折射角. 相干加强条件为:

$$2nd \cos \gamma - \frac{\lambda}{2} = k\lambda. \quad \text{取 } k=0, \text{ 得膜最小厚度为 } d = \frac{\lambda}{4n \cos \gamma}.$$

在  $30^\circ$  方向上, 绿光 ( $\lambda=500$  纳米) 相干加强, 因此最小厚度为<sup>8</sup>

$$d = \frac{500 \times 10^{-6}}{4 \times 1.33 \times \cos 22^\circ} = 1.014 \times 10^2 (\text{nm}).$$

(2) 膜厚度不变, 从膜面的法线方向观察,  $\cos \gamma = 1.0$ .  
反射相干加强的波长应满足

$$2nd - \frac{\lambda}{2} = k\lambda.$$

取  $k=0, 1$ , 得  $\lambda_1 = 539.5$  纳米,  $\lambda_2 = 179.8$  纳米,

所以沿法线方向观察膜面, 看到黄绿色.

(3) 膜快要破时, 厚  $d \approx 0, 2nd \cos \gamma = 0$  由于光在上表面反射时的半波损, 使得经膜上下表面反射的两光束相位反. 因此, 不管什么波长的光, 都相干相消, 故膜快要破时, 看上去是暗的.

1-8 为了使可见光中黄绿光反射最少, 在照相机镜头表面覆盖一层折射率为1.38的氟化镁介薄膜. 照相机镜头呈蓝紫色就是因为反射光中缺少了黄绿光. 若照相机镜头的折射率为1.5, 试求氟化镁介质薄膜的最小厚度.

解 人眼对黄绿光反应最灵敏，但照相底片没有这种性能.. 为了使照片显示出人眼观察到的色彩，必须对黄绿光增透，这样照片的景色才能接近人眼观察到的景色.

对黄绿光增透, 反射光中黄绿光相干相消, 光程差公式为

$$2n_2d \cos i_2 = (k + \frac{1}{2})\lambda,$$

由于从膜的上表面到下表面, 折射率是递增的, 所以膜的上下表面无半波突变. 上式中取  $i_1 = i_2 = 0^\circ$ ,  $k = 0$ , 可见光平均波长  $\lambda = 550\text{nm}$ ,

因此膜的最小厚度为  $d = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{550}{4 \times 1.38} = 99.6(\text{nm}).$

1-9 把一细钢丝夹在两块光学平面的玻璃之间，形成空气劈尖．已知钢丝的直径  $d=0.048\text{mm}$ ，钢丝与劈尖定点的距离  $L=12.00\text{cm}$ ，用波长为  $680\text{nm}$  的平行光垂直照射在玻璃面上，如图所示．求：（1）两玻璃片间的夹角是多少？（2）相邻二明条纹间的厚度差是多少？（3）条纹间距是多少？（4）在这  $12.0\text{mm}$  内呈现多少明条纹？

解 (1) 夹角为  $\theta \approx \text{tg}\theta = d/L = \frac{0.048 \times 10^{-3}}{12 \times 10^{-3}} = 4 \times 10^{-3} (\text{rad}).$

(2) 相邻二条纹之间的厚度差  $(\Delta d)_{\Delta k=1} = \frac{\lambda}{2n} = \frac{\lambda}{2} = 340 \text{nm}.$

(3) 条纹间距  $(\Delta x)_{\Delta k=1} = \frac{\lambda}{2\theta} = 8.5 \times 10^4 \text{nm}.$

(4) 呈现条纹数  $n = \frac{L}{\Delta x} = \frac{12}{8.5 \times 10^{-2}} \approx 141.$

**1-10** 一个透明塑料( $n=1.40$ )制成的劈尖, 当用单色光垂直照射时, 观测到两相邻干涉明(或暗)条纹之间的距离为2.5毫米, 设劈尖的夹角 $\alpha=1.0 \times 10^{-4}$ 弧度, 求单色光的波长.

解 相邻两明(或暗条纹)的距离为  $\Delta x = 2.5 \text{mm}$ , 劈尖的夹角

$\alpha = 1.0 \times 10^{-4} \text{rad}$ , 又因  $\Delta x = \lambda / 2n\alpha$ ,

可求得单色光的波长为

$$\lambda = 2n\alpha\Delta x = 2 \times 1.40 \times 1.0 \times 10^{-4} \times 2.5 \times 10^{-3} = 700 (\text{nm}).$$

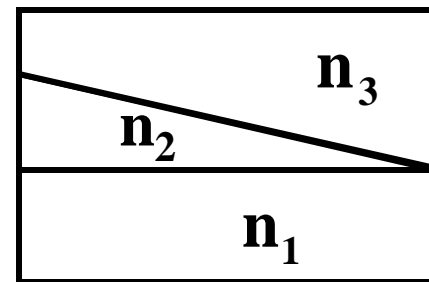
1-11 设折射率分别为 $n_1 > n_2 > n_3$ 的三种介质组成一劈形膜，如图所示．今以波长为 $\lambda$ 的单色光垂直照射时，在垂直方向上观察反射干涉条纹，在视场 $L$ 距离内可见 $N$ 条干涉明条纹．试求：

(1) 劈形膜的夹角 (2) 将介质 和 对换，视场中单位长度内干涉条纹数是否改变？为什么？

解 (1) 条纹间距  $\Delta x = \frac{L}{N}$  ,

相邻两干涉条纹厚度差为  $\Delta d = \frac{\lambda}{2n_2}$  ,

因此，劈角  $\alpha = \frac{\Delta d}{\Delta x} = \frac{\lambda N}{2n_2 L}$  .



(2)  $n_1 > n_2$ ,  $\Delta x_1 = \lambda / 2n_1 \alpha$   $\Delta x_2 = \lambda / 2n_2 \alpha$ ,  $\Delta x_1 < \Delta x_2$

可以看出对换以后，条纹间距变小，在单位长度内条纹数变多．

1-12 如图是一干涉膨胀仪示意图，CC'是用热膨胀系数很小的石英或铟钢制成的环柱，放在光学平玻璃板AB和A'B'之间，被测样品M置于该环柱内，样品的上表面稍微倾斜，与AB的下表面形成一楔形空气层．若以波长为 $\lambda$ 的单色光垂直照射到AB上，则产生等厚干涉条纹．设温度 $t_0$ 时，测得样品的长度为 $L_0$ ，温度升到 $t$ 时，测的样品的长度为 $L$ ，忽略环柱CC'的长度变化，在这一过程中数得通过视场的某一刻线的干涉条纹数目为 $N$ ，求证：被测样品材料的热膨胀系数

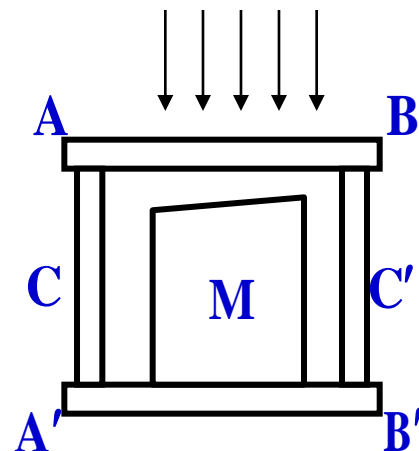
$$\beta = \frac{N\lambda}{2L_0(t-t_0)}$$

解 样品膨胀，引起楔形空气层厚度改变．是场中某一点，膜厚度每变化 $\lambda/2$ ，该处将有一个条纹移．若移过 $N$ 各条纹，则应有的厚度变化

$$\Delta l = N\lambda/2$$

因此膨胀系数为

$$\beta = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta t} = \frac{N\lambda}{2l_0 \Delta t} = \frac{N\lambda}{2l_0(t-t_0)}$$



补充1.3 牛顿环实验中，测的相邻明环的半径分别为2.0厘米和2.02厘米，求所用的平凸透镜的曲率半径．设光波波长为589纳米

解:在牛顿环干涉中,明环半径为:  $r = \sqrt{(2m-1)R\lambda/2}$ ,

$r_m$ 和 $r_{m+1}$  为相邻两明环半径,  $R$ 为曲率半径. 则有:

$$r_m^2 - r_{m+1}^2 = R\lambda, \quad 2^2 - 2.02^2 = R\lambda,$$

将  $\lambda=589\text{nm}$ 代入上式, 解得  $R = 13.65\text{m}.$

1-13 用单色光垂直照射牛顿环装置已知平凸透镜的曲率半径为3.米.从中心暗点往外数第三个明环的半径为2.1毫米,求光的波长.

解 牛顿环明条纹半径公式为

$$r_m = \sqrt{(2m-1)R\lambda/2},$$

对于第三个明环, 应有

$$2.1 = \sqrt{(2 \times 3 - 1) \times 3.0 \times 10^3 \lambda / 2},$$

解得:

$$\lambda = 588\text{nm}.$$

1-14在牛顿环装置中的透镜与玻璃片之间充以某种液体,观测到第十级明环直径由1.40厘米变成1.27厘米,试求该液体的折射率.

解:牛顿环明条纹半径为

$$r_m = \sqrt{(2m-1)R\lambda/2},$$

观测到第十级直径为1.40cm, 代入上式  $1.40 = \sqrt{(2 \times 10 - 1)R\lambda/2}.$

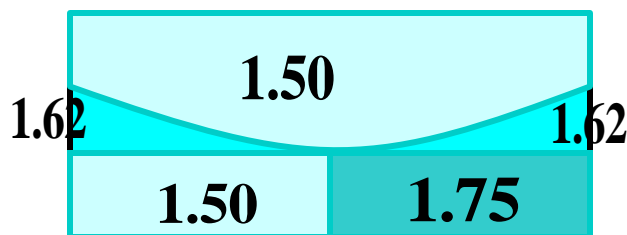
透镜与玻璃片之间充以某种液体后, 明条纹半径为



$$r_m = \sqrt{(2m-1)R\lambda / 2n}, \text{ 代入已知条件, } 1.27 = \sqrt{(2 \times 10 - 1)R\lambda / 2n},$$

求得液体的折射率  $n = 1.215$ .

**1-15** 在图中牛顿环装置中，平面玻璃板是由折射率为1.50的冕牌玻璃和折射率为1.75的火石玻璃组成，平凸透镜用冕牌玻璃制成，而透镜与玻璃板之间充满着二氧化硫（ $n=1.62$ ），试问由此而形成的牛顿环的花样如何？说明其道理？



**解** 牛顿环装置的左半部分，膜折射率为1.62，大于膜两边的折射率(1.50)因此光在膜下表面反射时有 $\pi$ 的相位变化，在中心 $d=0$ 处，为暗纹中心。右半部分膜折射率为1.62，大于平凸透镜的折射率(1.50)，小于平板玻璃的折射率(1.75)，因此光在膜上下表面反射时都有 $\pi$ 的相位变化，相位差中不计入。在 $d=0$ 处，应为明纹中心。由于膜左右两部分折射率，形状完全相同，所以形成的干涉条纹形状相同，条纹疏密的分布也相同。不同的是，左边是明环时，对应有边恰是暗环（如上右图所示）。

**1-16** 迈克尔孙干涉仪用来测量单色光的波长,反射镜 $M_1$ 移动距离为0.233毫米,某单色光的干涉条纹移过792条,求该单色光的波长.

解: 迈克尔孙干涉仪的等倾圆条纹, 每当 $M_1$ 移动半个波长时, 就有一个条纹移过, 因此有  $d = N\lambda / 2$

上式中 $d$ 为 $M_1$ 移动的距离,  $N$ 为移过的条纹数, 代入题中给定的数据, 有  $0.233 = 792\lambda / 2$ , 解得:  $\lambda = 588\text{nm}$ .

**1-17** 在迈克尔孙干涉仪的 $M_2$ 镜前插入一薄玻璃片时, 可观察到有150条干涉条纹向一方移过. 若玻璃片的折射率 $n=1.632$ , 所用单色光的波长 $\lambda=500$ 纳米, 试求玻璃片的厚度.

解:在迈克尔孙干涉仪 $M_2$ 镜前插入一玻璃片, 光两次经过它. 因此该臂光程与不插玻璃片时比较, 光程改变量为:

$$\Delta = 2(n-1)d,$$

因为光程每变化一个波长就有一个条纹移过, 今有150个条纹移过, 因此有  $2(n-1)d = 150\lambda$ .

由此解得玻璃片厚度为  $d = \frac{150\lambda}{2(n-1)} = \frac{150 \times 500 \times 10^{-6}}{2 \times (1.632 - 1)} = 0.059(\text{mm})$ .

## 第二章 光的衍射

**2-1** 在单缝衍射中，为什么衍射角 $\theta$ 越大的那些明条纹的亮度（光强）就越小？

答：屏幕中央O点明条纹，对应  $\theta=0$  的衍射角．在这个衍射方向上，单缝处波阵面上各点到O点的光程相同，各点在O点产生的光振动同相位．它们在O点相干相长，亮度最大．

至于其它各级明条纹，衍射角  $\theta$  越大，单缝边缘光束在该方向上的光程差越大，因而可划分的半波带数越多，每一半波带面积越小．奇数个半波带中，只有一个半波带在P点的振动不被抵消．光振动振幅与面积成正比，半波带面积越小，在P点产生的光振动振幅越小．因此衍射角  $\theta$  越大，对应的明条纹亮度越小．

**2-2** 用平行绿光 ( $\lambda=546$ 纳米), 单缝宽 $a=0.1$ 毫米, 紧靠缝后放一焦距为50厘米的会聚镜, 试求位于透镜焦平面处的屏幕上中央零级条纹的宽度.

解: 单缝衍射中央零级亮斑的半角宽度为  $\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}$

因此, 中央零级明条纹的线宽度为:

$$l = 2\Delta\theta \cdot f = 2 \frac{\lambda}{a} \cdot f = 2 \times \frac{546 \times 10^{-6}}{0.1} \times 500 = 5.46(\text{mm}).$$

**2-3** 在单缝衍射实验中, 如果缝宽等于入射单色光波长的 1 倍, 10倍, 100倍, 分别计算其中央明条纹的半角宽. 计算结果说明什么问题?

解 中央亮条纹的半角宽度为 $\theta$ , 则

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a}, \quad \theta = \sin^{-1} \frac{\lambda}{a}.$$

当  $a=\lambda$  时,  $\theta = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$ , 中央衍射极大遍布单缝后整个空间;

当  $a=10\lambda$  时,  $\theta = \sin^{-1} \frac{1}{10} = 5.739^\circ$ , 中央衍射极大角宽度变得很小;

当  $a=100\lambda$  时,  $\theta = \sin^{-1} \frac{1}{100} = 0.593^\circ$ , 衍射消失, 屏幕上形成狭缝的几何像.

上面的讨论说明: 单缝缝宽越小, 衍射越烈, 中央衍射极大的角宽度越大; 单缝缝宽越大, 衍射越不明显, 当缝宽比波长大很多时, 衍射消失, 屏幕上形成单缝的几何像.

**2-4** 用632.8纳米红色平行光垂直照射在一单缝上, 测得第一级暗条纹对应的衍射角为 $5^\circ$ , 试求单缝的宽度.

解 单缝衍射中, 暗条纹位置满足  $\sin \theta = k \frac{\lambda}{a}$ .

第一级暗条纹满足  $\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$ , 故单缝缝宽为

$$a = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{632.8 \times 10^{-6}}{\sin 5^\circ} = 7.26 \times 10^{-3} (\text{mm}).$$

**2-5** 波长**500**纳米的平行单色光,垂直照射到宽度**a=0.25**毫米的单缝上,紧靠单缝上放一凸透镜. 如果置于焦平面处的屏上中央零级条纹两侧的第二暗条纹之间的距离是**2**毫米, 试求透镜的焦距.

解 单缝衍射中, 衍射极小对应的衍射角满足

$$\sin \theta_k = k \frac{\lambda}{a}.$$

第二个衍射极小的衍射角为

$$\theta_2 = \sin^{-1} 2 \frac{\lambda}{a} \approx 2 \frac{\lambda}{a},$$

中央零级条纹两侧的第二暗条纹之间的距离为  $l = 2\theta_2 f'$ ,

可计算得透镜的焦距

$$f' = \frac{l}{2\theta_2} = \frac{l}{2} \cdot \frac{a}{2\lambda} = 1 \times \frac{0.25}{2 \times 500 \times 10^{-6}} = 0.25(\text{m}).$$

**补充2.1** 观察白光形成的单缝夫琅和费衍射图样，若其中某一光波的第三级明纹中心和波长 $\lambda=600$ 纳米的第二级明条纹中心重合，试求白光中所包含的这种光波的波长。分别按下列两种方法给出的公式计算：(1)菲涅尔半波带法(2)振幅矢量图法。

解 (1)菲涅尔半波带法：

在这个衍射方向上，单缝边缘光束的光程差为

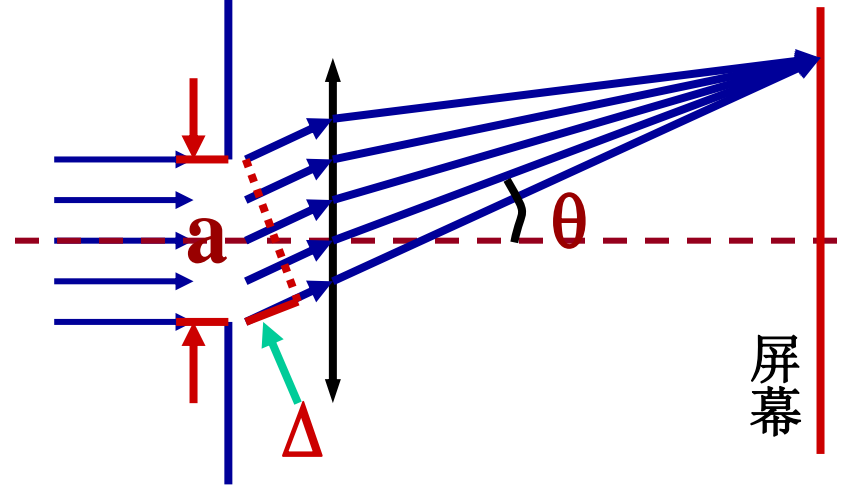
$$\Delta = a \sin \theta.$$

各级衍射极大满足

$$\Delta = a \sin \theta = \frac{1}{2} (2k + 1) \lambda.$$

上式中， $k$ 为衍射极大的级次。在个衍射方向上，同时出现 $\lambda_1$ 的第三级和 $\lambda_2$ 的第二级衍射极大，因此

$$(2 \times 3 + 1) \frac{\lambda_1}{2} = (2 \times 2 + 1) \frac{\lambda_2}{2}$$



已知 $\lambda_2=600\text{nm}$ ，代入上式求出  $\lambda_1 = 428.6\text{nm}$

(2)振幅矢量法:

屏幕上夫琅和费单缝衍射光强公式为  $I = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}$ .

式中  $u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ ，是单缝边缘光束在 $\theta$ 方向的光程差.

当  $u = 0, \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi \cdots$  时，光强取得极大值.

$\lambda_1$  的第三级明纹与 $\lambda_2=600\text{nm}$ 的第二级在同一衍射方向上,因此有

$$\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda_1} = 3.47\pi, \quad (1)$$

$$\frac{\pi a \sin \theta}{600 \times 10^{-6}} = 2.46\pi. \quad (2)$$

解方程(1)和(2)得  $\lambda_1 = 425.4\text{nm}.$



2-6 一单色平行光垂直照射在单缝上，紧靠缝放置一凸透镜，在其后焦平面上观察衍射图样．若做如下单项变动，则衍射图样将怎样变化？

- (1) 单缝在垂直于缝方向上的平移；
- (2) 单缝在垂直于光轴的平面内转动；
- (3) 单缝加宽或变窄；
- (3) 单缝沿透镜光轴方向平移．

答：(1) 单缝在垂直于缝的方向上平移，衍射图样不变．这是由于透镜的作用，使具有相同衍射角的光线，会聚在屏幕（焦平面上）同一点．这点的位置不会因单缝的横向移动而变化．

(2) 单缝在垂直于光轴的平面内转动，衍射图样也随着在垂直与光轴的平面内转动．

(3) 单缝加宽，各级明条纹中心靠拢，条纹变窄；单缝变窄，各级明条纹向两边扩展，条纹变宽．

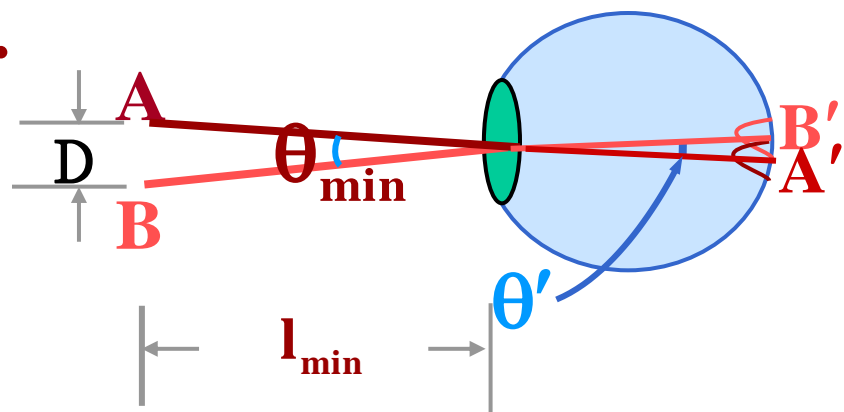
(4) 衍射图样不变．

2-7 迎面驶来的汽车上，两盏前灯相距1.2米，试问汽车离人多远的地方，眼睛恰好可分辨这两盏灯？夜间人眼瞳孔直径为5.0毫米，入射光波长500纳米。（仅考虑人眼瞳孔的衍射效应）

解 人眼圆形瞳孔的衍射为圆孔衍射。根据瑞利判据，人眼最小分辨角为：

$$\theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{d}.$$

如图所示，两车灯相距  $D$  =1.2米，当人眼恰可分辨两车灯时，车灯距离人眼

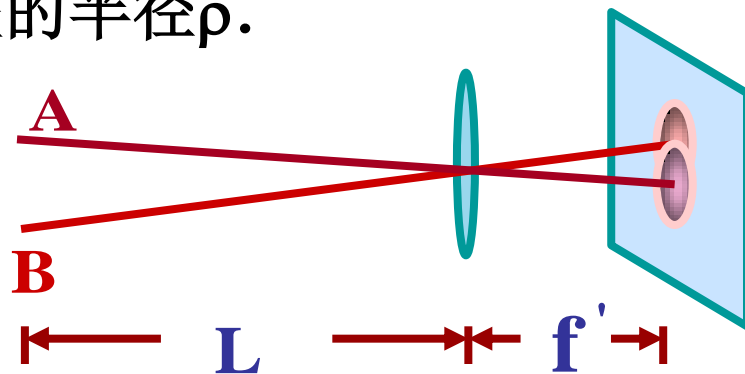


$$l_{\min} = \frac{D}{\theta_{\min}} = \frac{Dd}{1.22\lambda} = \frac{1.2 \times 5}{1.22 \times 500 \times 10^{-6}} = 983.6(\text{m}).$$

2-8 如图所示，有两光源点间隔为6.0毫米，放置在离透镜  $L$  = 50米处，在屏幕  $E$  上所形成的像恰好能分辨，已知透镜的焦距是20厘米，试问在屏幕上爱里斑的直径是多少？

解 物点距透镜 $L=50$ 米，透镜焦距 $f'=20$ 厘米， $L \gg f'$ ，可以认为该系统成像在焦平面上．若两光源在屏幕上的像恰可分辨，则屏幕上两爱里斑中心间距恰为爱里斑的半径 $\rho$ ．

由图可知 
$$\frac{AB}{L} = \frac{\rho}{f'},$$



所以爱里斑的直径为

$$D = 2\rho = 2 \frac{AB}{L} f' = 2 \times \frac{6.0 \times 10^{-3}}{50} \times 200 = 4.8 \times 10^{-2} (\text{mm}).$$

2-9 设紫外显微镜的数值孔径为0.9，所用波长为 $\lambda=253.7$ 纳米，试问它所能分辨最小间距是多少？

解  $n \sin u$ 为显微镜的数值孔径，最小分辨间距：

$$\delta y = \frac{0.61\lambda}{n \sin u} = \frac{0.61 \times 253.7 \times 10^{-6}}{0.9} = 1.72 \times 10^{-4} (\text{mm}).$$

**2-10** 一生物显微镜，物镜的标号为 **$10\times 0.25$** ，即物镜放大率为**10**，数值孔径为**0.25**；光波波长以**500**纳米计算，试问可分辨的最小间隔时多大？目镜物方焦平面上恰可分辨两物点的爱里斑中心间距是多大？

解 已知显微镜物镜放大率 **$\beta=10$** ，数值孔径  **$n\sin u=0.25$** ，光波波长  **$\lambda=550$** 纳米，可分辨得两物点最小间距为

$$\delta y = \frac{0.61\lambda}{n\sin u} = \frac{0.61 \times 550 \times 10^{-9}}{0.25} = 1.34 \times 10^{-6}(\text{m}).$$

这样的两物点经物镜成像在目镜物方焦平面上，两几何像点为恰可分辨的两爱里斑中心。所以爱里斑中心间距为

$$\delta y' = \beta \delta y = 10 \times 1.34 \times 10^{-6} = 1.34 \times 10^{-5}(\text{m}).$$

**2-11** 若要是照相机感光胶片能分辨1.22微米的最小间距，光波波长为500纳米，则要求

(1) 底片每毫米能分辨得线条数为多少？

(2) 照相机得物镜的相对孔径D/f必须大于多少？

解 因为感光胶片分辨的最小间距1.22微米，所以每毫米分辨的刻痕数为

$$\frac{1 \times 10^{-3}}{\delta y} = \frac{1 \times 10^{-3}}{1.22 \times 10^{-6}} = 820 \text{ (条/毫米)}$$

照相机每毫米分辨的线条数

$$N = \frac{1}{1.22\lambda} \cdot \frac{D}{f'}$$

求得相对孔径

$$\frac{D}{f'} = 1.22\lambda N = 1.22 \times 550 \times 10^{-9} \times 820 \times 10^3 = 0.55.$$

**2-12** 用夫琅和费衍射实验测定光栅常数. 用氦氖激光器的红光 ( $\lambda=632.8$ 纳米) 垂直照射光栅, 测得第一级明条纹出现在 $38^\circ$ 的方向上, 试求这光栅的光栅常数是多少? 一厘米内有多少条狭缝? 第二级明条纹的衍射角是多大?

解 (1) 衍射光栅第一级明条纹满足  $d\sin\theta = \lambda$ , 其中  $\theta = 38^\circ$  因此光栅常数

$$d = \frac{\lambda}{\sin\theta} = \frac{632.8 \times 10^{-9}}{\sin 38^\circ} = 1.03 \times 10^{-6} (\text{m}).$$

(2) 一厘米内的狭缝数:

$$N = \frac{1\text{cm}}{d} = \frac{0.01}{1.03 \times 10^{-6}} = 9708 (\text{条/厘米}).$$

(3) 因为

$$\sin\theta = \frac{2\lambda}{d} = \frac{2 \times 632.8 \times 10^{-9}}{1.03 \times 10^{-6}} = 1.23 > 1.$$

所以第二级明条纹不出现.

**2-13** 用白光垂直照射在平面投射光栅上,光栅刻线密度为**5000**条/厘米,试问在第四级光谱中可观察到的最大波长是多少?

解 光栅常数 
$$d = \frac{1 \times 10^{-2}}{5000} = 2 \times 10^{-6} (\text{m}).$$

由光栅方程  $d \sin \theta = k\lambda$  可知,第四级可观察到的最大波长为

$$\lambda_m = \frac{d}{4} \sin 90^\circ = \frac{d}{4} = 500 (\text{nm}).$$

第四级可观察到的最大波长为**500**纳米.

补充2.2 用钠黄光 (  $\lambda = 589.3$  纳米 ) 垂直照射一平面透射光栅,得第三级谱线的衍射角为  $10^\circ 11'$ , 而用未知波长的单色光垂直入射,其第二级谱线的衍射角为  $6^\circ 12'$ , 求此未知波的波长.

解 由光栅方程  $d \sin \theta = k\lambda$ .

第三级谱线满足  $d \sin 10^\circ 11' = 3 \times 589.3,$

未知光满足  $d \sin 6^\circ 12' = 2\lambda', \quad \therefore \lambda' = 540 \text{nm}.$

2-14 波长为600纳米的单色光垂直入射在一光栅上，第二，第三级明条纹分别出现在衍射角  $\theta$  满足  $\sin\theta = 0.20$  与  $\sin\theta = 0.30$  处，第四级缺级，试问：（1）光栅相邻两缝的间距是多大？（2）光栅狭缝的最小可能宽度  $a$  是多大？（3）按上述选定的  $a, d$  值，是列出屏幕上可能呈现的全部级数。

解(1)由光栅方程

$$d \sin \theta = k\lambda,$$

600nm的第二级明条纹满足  $0.2d = 2 \times 6 \times 10^{-9} \text{ m}.$

解得光栅相邻两缝的间距  $d = 6 \times 10^{-6} \text{ m}.$

(2) 第四级缺级，说明该方向上的干涉极大被衍射极小调制掉了，因调制掉的干涉极大级次为  $k = \frac{d}{a} k'$

$k=4$ 时,取 $k'=1$ ，得到狭缝最小宽度  $a = \frac{d}{4} = 1.5 \times 10^{-6} \text{ m}.$

(3) 取 $\sin\theta=1.0$ ，得  $k = \frac{d}{\lambda} = 10.$

可能看到的最大级次为 $\pm 9$ 。由于 $\pm 4$ ， $\pm 8$ 级缺级故可能呈现的全部级次为 $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9.$



**2-15** 试证明：当光栅的透光与不透光部分相等时，所有的偶级次的谱线都不存在（除零级外）

解 调制干涉主极大的级次为

$$k = \frac{d}{a} k' = 2k'$$

光栅透明部分与不透明部分相等，即 $d/a = 2$ ，所以 $k = \pm 2, \pm 4, \dots$ 偶数级次的谱线，被单缝衍射 $k' = \pm 1, \pm 2, \dots$ 极小调制掉了

**2-16** 一光源含有氢原子和氘原子的混合物，发射中心波长 $\lambda = 656.3$ 纳米的双红线，波长间隔 $\Delta\lambda = 0.18$ 纳米，若能用一光栅在第一级光谱中将这两条谱线分辨出来，光栅的刻痕数目至少是多少？

解 光栅色分辨本领，

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN.$$

要在第一级分辨 $\lambda = 656.3$ 纳米附近、波长间隔 $\Delta\lambda = 0.18$ 纳米的两谱线，要求分辨本领

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{656.3}{0.18} \approx 3647.$$

光栅得刻痕至少是

$$N = \frac{R}{k} = \frac{3647}{1} = 3647(\text{条}).$$

**2-17** 用白光（波长从400纳米到700纳米）垂直照射在每毫米500条刻痕的光栅上，光栅后方一焦距 $f = 320$  毫米的凸透镜，试求在透镜焦平面处光屏上第一级光谱的宽度是多少？

解 光栅每毫米有500条刻痕，光栅常数  $d = \frac{1}{500} = 0.002$ 毫米，

由光栅公式  $d \sin \theta = k\lambda$  ，可求出白光中400纳米和700纳米两波长的第一级干涉主极大的衍射角

$$\theta_{400} = \sin^{-1} \frac{k\lambda}{d} = \sin^{-1} \frac{1 \times 400 \times 10^{-9}}{0.002 \times 10^{-3}} = \sin^{-1} 0.2 = 11.537^\circ,$$

$$\theta_{700} = \sin^{-1} \frac{k\lambda}{d} = \sin^{-1} \frac{1 \times 700 \times 10^{-9}}{0.002 \times 10^{-3}} = \sin^{-1} 0.35 = 20.487^\circ.$$

第一级可见光谱角宽度为 $20.487^\circ - 11.537^\circ = 8.95^\circ = 0.1562$ 弧度。  
光栅后面正透镜焦距为320毫米，因此第一级光谱的线宽度为

$$l = f' \Delta \theta = 320 \times 0.1562 = 50(\text{mm}).$$

**2-18** 用水银蒸汽放电的光照明，正入射到一总宽  $W = 2.54$  厘米的光栅上，光栅上总共有 800 条刻痕，求蓝光谱线 435.8 纳米) (在第三级光谱中的角色散.(2)在第五级光谱中的分辨本领.(3)第五级光谱能分辨得最小波长间隔

解(1)光栅总宽 2.54 厘米，共有 800 条刻痕，光栅常数

$$d = \frac{W}{N} = \frac{0.0254}{800} = 3.175 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

在第三级光谱中  $\sin \theta = \frac{3\lambda}{d} = \frac{3 \times 435.8 \times 10^{-9}}{3.175 \times 10^{-5}} = 0.04118,$

解得  $\theta = 2.36^\circ$ . 角色散

$$D = \frac{k}{d \cos \theta_k} = \frac{3}{3.175 \times 10^{-5} \times \cos 2.36^\circ} = 9.46 \times 10^5 (1/\text{nm}).$$

(2)第五级的分辨本领  $R = kN = 5 \times 800 = 4000.$

(3)第五级能分辨最小波长间隔  $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{435.8}{4000} = 0.109(\text{nm}).$

**2-19** 试设计一平面透射光栅，当用平行光垂直照射时，可以在衍射角 $\theta=30^\circ$ 方向上观察到600纳米的第二级主极大，却看不到400纳米的第三级主极大。同时，该方向上可以分辨600纳米和600.01纳米两条谱线。

解 要求设计的光栅在 $\theta=30^\circ$ 衍射方向上观察到600纳米的第二级主极大，它应满足光栅方程  $d \sin \theta = k\lambda$ ，由此可定出光栅常数

$$d = \frac{k\lambda}{\sin \theta} = \frac{2 \times 600}{\sin 30^\circ} = 2.4 \times 10^{-4} (\text{厘米}).$$

再根据对分辨本领的要求确定N。由于在 $30^\circ$ 方向上分辨600纳米和600.01纳米两条谱线，这就要求分辨本领

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{600}{0.01} = 6 \times 10^4.$$

又因 $R=Nk$ ,故光栅刻痕数

$$N = \frac{R}{k} = \frac{6 \times 10^4}{2} = 3 \times 10^4.$$

由此可确定光栅的总宽度

$$W = Nd = 3 \times 10^4 \times 2.4 \times 10^{-4} = 7.2 (\text{厘米}).$$

最后确定光栅透光部分a和不透光部分b的值.  $(a+b)/a$ 决定缺级级次, 所以应取

$$\frac{a+b}{a} = 3,$$

这样才能满足第三级缺级, 使得400纳米的第三级在 $30^\circ$ 衍射方向上不出现. 因此有

$$a = 800 \text{ 纳米}, \quad b = 1600 \text{ 纳米}.$$

根据上面的结论指出的光栅, 完全符合设计要求.

若选  $\frac{a+b}{a} = 1.5$  第三级亦可缺级. 这时  $a = 1600$  纳米,

$b=800$  纳米. 但这种设计使得600纳米的第一级衍射极小的衍射角

$$\theta_1 = \sin^{-1} \frac{\lambda}{a} = 22^\circ < 30^\circ,$$

即600纳米的第二级干涉极大未落在中央衍射极大的包络线内, 以至能量不大, 不能使用. 所以这种设计不可取.

2-20 波长  $\lambda = 0.168$  纳米的平行X射线射在食盐晶体界面上，已知食盐的晶格常数  $d = 0.28$  纳米，试问当光线与界面分别成多大掠射角时，可观察到第一，二级反射主极大谱线？

解 由布喇格公式  $2d \sin \varphi = k\lambda$

第一级主极大掠射角  $\sin \varphi = \frac{\lambda}{2d} = \frac{0.168}{2 \times 0.28} = 0.3 \Rightarrow \varphi = 17.46^\circ,$

第二级主极大掠射角  $\sin \varphi = \frac{2\lambda}{2d} = \frac{2 \times 0.168}{2 \times 0.28} = 0.6 \Rightarrow \varphi = 36.87^\circ.$

补充2.3—已知波长  $\lambda = 0.097$  纳米的X射线，以  $28^\circ 42'$  掠射角射向某一晶体表面时，出现第三级反射极大。当一未知X射线以  $14^\circ 42'$  掠射角射向同一晶体表面时，给出第一级反射极大，求晶体晶格常数及未知X射线的波长。

解 由布喇格公式和已知条件可得方程

$$2d \sin 28^\circ 42' = 3 \times 0.097, \quad 2d \sin 14^\circ 42' = \lambda'.$$

解上面两方程，得  $d = 0.303 \text{ nm}, \quad \lambda' = 0.1538 \text{ nm}.$

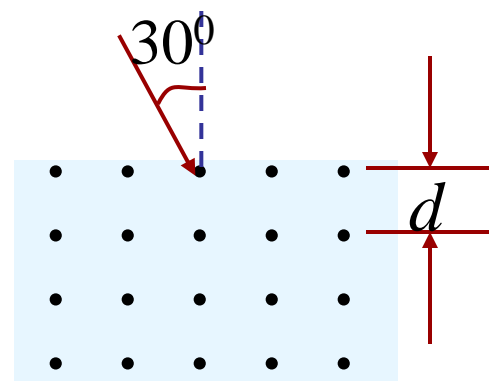
**2-21** 入射X射线束不是单色的，而是含有由0.095纳米到0.130纳米这一波带中的各种波长．晶体的晶格常数为0.281纳米，入射角为 $30^\circ$ ，试问与图中平面相联系的那些波长的X射线会产生衍射极大？

解 如图掠射角 $\varphi=60^\circ$ ，晶格常数 $d=0.281\text{nm}$ ，代入布喇格公式

$$2d \sin \varphi = k\lambda$$

得

$$2 \times \sin 60^\circ = k\lambda.$$



取不同的 $k$ 值，只有当 $k=4$ 和 $5$ ，解得x光波长分别为0.1217纳米和0.0973纳米时符合题意.

## 第三章 光的偏振

### 3-1 什么是偏振现象？为什么偏振现象说明光是横波？

答:光在晶体中的双折射现象,某些人工晶体中的二相色性,旋光现象,以及光在各向同性介质界面上反射起偏和投射起偏,都是偏振现象.

横波中, 振动方向垂直于波传播方向. 与波传播方向垂直也可以有许多不同方向, 光在这些不同的方向上, 可能具有不同的性质, 这就是造成光偏振现象的原因. 纵波中, 振动只有与波的传播方向平行的一个方向, 因而纵波不会产生偏振现象, 光波具有偏振现象, 证明光是横波.

### 3-2.光的振动方向是指什么？光的偏振态分为哪几类？哪几种？

答: 光的振动方向通常是指电矢量  $E$  的振动方向.

光的偏振态分为三类, 七种:

第一类自然光.

第二类完全偏振光:包括线偏振光, 椭圆偏振光, 圆偏振光. <sup>1</sup>



第三类部分偏振光:包括自然光+线偏振光,自然光+椭圆偏振光,自然光+圆偏振光等一切完全偏振光与自然光混合成的光.

### 3-3 自然光, 完全偏振光, 部分偏振光有什么不同?

答:自然光光振动的振幅大小,振动方向在~~各个~~各个方向上几率相等,没有那个方向占优势.光振动的相位也是随机的,无固定值.

完全偏振光:光振动方向,振幅和相位都随时间有规律地变化.

部分偏振光: 是自然光和完全偏振光的叠加. 振动方向、振幅和相位部分有序, 部分与时间有一定关系.

### 3-4 用那些方法可以获得线偏振光和检验线偏振光?

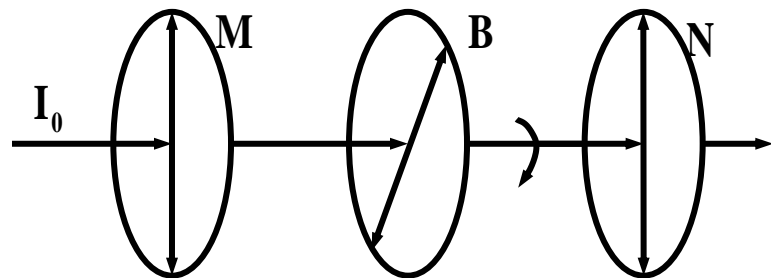
答: 自然光通过(1)偏振片时; (2)满足布儒斯特角的反射; (3)玻璃片堆满足布儒斯特角的透射; (4)双折射晶体的折射. 都可以获得线偏振光.

将偏振片迎光旋转 $360^\circ$ , 出射光为两明两零(零光强)者为线偏振光.

**3-5** 如图所示, 单色自然光垂直入射于偏振片M, 偏振M与N的透振方向相互平行, 并在M与N间平行地插入另一偏振片B, B与M透振方向夹角为 $45^\circ$ , 试求:(1)透过检偏器N后的出射强:(2)若偏振片B旋转一周, N后的出射光强将如何变化? 并画出透射光强随旋转角度变化的曲线. 设入射自然光强为 $I_0$ , 且不计算偏振片对光能量的吸收.

解:(1)强度为 $I_0$ 的单色自然光垂直通过M后, 变为强度为 $I_0/2$ 的线偏振光.由马吕斯定律知,线偏光依次垂直通过B和N后,强度为

$$I = \frac{I_0}{2} \cos^4 45^\circ = \frac{I_0}{8}$$

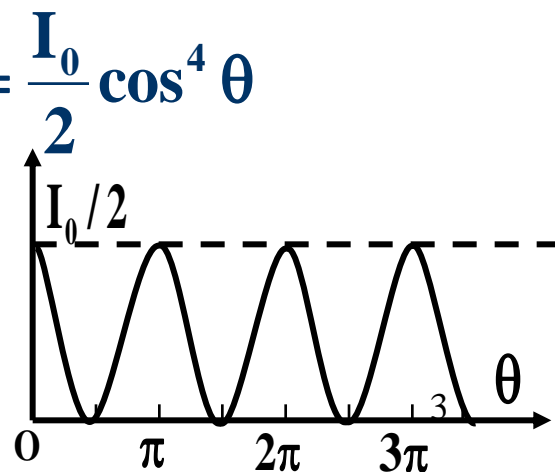


(2)若B与M透振方向夹角为 $\theta$ ,则出射光强为  $I = \frac{I_0}{2} \cos^4 \theta$

当 $\theta = 0, \pi$ 时,出射光强最大,为  $I = I_0/2$

当 $\theta = \pi/2, 3\pi/2$  时, 出射光强为零.

光强随 $\theta$  变化的曲线如图.



**3-6** 若起偏器与检偏器的透振方向之间的夹角为 $60^\circ$ , (1)假定没有吸收, 则自然光光强 $I_0$ 通过起偏器和检偏器后, 求出射光强与入射光强之比. (2)在这两个片之间再平行地插入另一偏振片, 使它的透振方向与前两个偏振片透振方向均成 $30^\circ$ 角, 试问出射光强与入射光强之比.

解: (1)由马吕斯定律, 自然光通过两偏振器后, 光强变为:

$$I = \frac{I_0}{2} \cos^2 60^\circ = \frac{I_0}{8}. \text{ 出、射光强之比为 } \frac{I}{I_0} = \frac{1}{8}.$$

(2)若中间的偏振片与两偏振片均成 $30^\circ$ 角, 由马吕斯定律得出

$$\text{射光强为: } I = \frac{I_0}{2} \cos^4 30^\circ = \frac{9I_0}{32}, \text{ 出、入射光强之比 } \frac{I}{I_0} = \frac{9}{32}.$$

**3-7** 有两种不同的介质, 折射率分别为 $n_1$ 和 $n_2$ , 自然光从第一种介质射到第二种介质时, 起偏角为 $i_{12}$ , 从第二种介质射到第一种介质时, 起偏角为 $i_{21}$ . 若 $i_{12} > i_{21}$ , 问那一种介质是光密介质?  $i_{12} + i_{21}$  等于多少?

解 两起偏角应分别满足  $\tan i_{12} = \frac{n_2}{n_1}$  和  $\tan i_{21} = \frac{n_1}{n_2}$ .

因为  $i_{12} > i_{21}$  在  $0 \sim \frac{\pi}{2}$  范围, 正切函数为增函数. 所以有

$$\frac{n_2}{n_1} > \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow n_2 > n_1.$$

因此, 第二种介质为光密介质. 由于  $\tan i_{12} \cdot \tan i_{21} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} = 1$ ,

因此  $i_{12} + i_{21} = 90^\circ$ , 两角互余.

3-8 回答下列问题(1)何谓光轴, 主平面? 沿光轴入射时, 是否一定不会产生双折射? (2)何谓寻常光线和非常光线? 他们的振动方向与各自的主平面有何关系? 试以方解石晶体为例, 指出在什么情况下 o 光的主平面和 e 光的主平面都在入射面内?

答: (1) 晶体中存在寻常光线折射率与非常光线折射率相同 (或 o 光光速与 e 光速相同) 的方向, 光在晶体中沿这个方向传播不发生双折射, 这个方向叫做晶体的光轴. 光线与光轴组成的平面叫做主平面.

沿光轴入射的光进入晶体后一般不再沿光轴传播，因此会产生双折射．只有光轴与界面法线的夹角等于折射角时，光进入晶体后才沿光轴传播，才不会发生双折射．

(2)寻常光线满足折射定律，寻常光线光振动方向总是垂直于其主平面,非常光线一般不满足折射定律（折射光线、反射线和法线一般不在同一平面内），晶体对非常光线具有各向异性．其光振动方向总是平行于它自己的主平面．当光轴在入射面内时寻常光主平面、非常光主平面和入射面重合．

3-9 如图所示，已知一束光入射到折射率 $n = 4 / 3$ 的水面上时，反射光是完全片振的，一块折射率 $n=3/2$ 的平面玻璃浸没在水面下，于是玻璃表面的反射光P也是完全片振，问玻璃表面与水面的夹角 应该是多少？

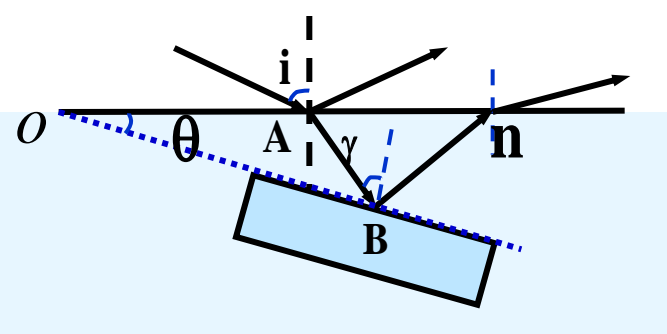
解 如图所示，水面反射光为完全片振光， $i=i_p$ ，入射角为布儒斯特角．欲使玻璃表面的反射光也是完全片振光， $\gamma = i'_p$ 也是布儒斯特角，由布儒斯特定律，有

$$i = i_p = \tan^{-1}(4/3) = 53.13^\circ,$$

$$\gamma = i'_p = \tan^{-1} \frac{3/2}{4/3} = 48.37^\circ.$$

在三角形ABO中，由几何关系得

$$\theta = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - i_p) - (90^\circ - i'_p) = i_p - i'_p - 90^\circ = 11.5^\circ.$$

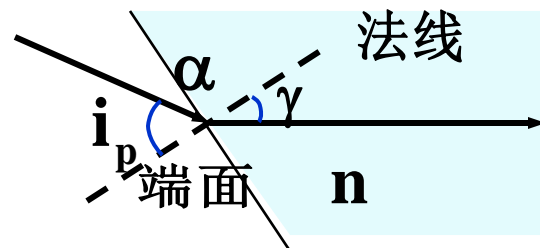


补充3.1 已知红宝石的折射率为1.76，欲使线偏振的激光通红过宝石棒时，在棒的端面上没有反射损失，光束在棒内沿棒轴方向传播。试问光束入射角*i*应为多大？棒端面对棒轴倾角应取多大？入射光的振动方向应如何？

解：要想没有反射损失，线偏振光应以布儒斯特角入射，且振动面要平行于入射面。由布儒斯特定律

$$\tan i_p = \frac{n}{1} = 1.76 \Rightarrow i_p = 60.4^\circ.$$

由折射定律有  $\frac{\sin i_p}{\sin \gamma} = n = \tan i_p$  且  $i_p + \gamma = 90^\circ$ .



由图中的几何关系得  $\alpha + \gamma = 90^\circ$   $\alpha = i_p = 60.4^\circ$ .

**3-10** 布儒斯特定律提供一种测定不透明电解质折射率的方法，今测得某一电介质的起偏角为 $57^\circ$ ，试求这一电介质的折射率。

解 由布儒斯特定律 
$$\tan i_p = \frac{n_2}{n_1}$$

其中已知起偏角为 $57^\circ$ ，空气的折射率约为1。可求得  $n_2 = \tan 57^\circ = 1.54$ 。

**3-11** 如图所示，一束自然光入射到一方解石晶体上，其光轴方向垂直于纸面 ( $n_o=1.658$   $n_e=1.486$ ) 试问：(1) 若晶体的厚度  $d = 1.0$  厘米，入射角  $i = 30^\circ$ ，p、q 两束透射光的垂直距离是多少？(2) 折射光中哪一束是寻常光？哪一束是非常光？其振动方向如何？

解 (1) 在垂直于光轴的方向上，方解石对o光和e光的折射率分别为  $n_o=1.658$   $n_e=1.486$  进入晶体后，o光比e光折弯的厉害。到了晶体的下面，分别自p点和q点沿与入射光平行的方向出射。o光和e光在垂直光轴的方向都符合折射定律。设o光和e光在晶体上表面折射角分别为  $i'$  和  $i''$ ，由折射定律：

$$1.0 \times \sin i = 1.658 \times \sin i',$$

$$1.0 \times \sin i = 1.486 \times \sin i''.$$

$$i' = 17.55^\circ, i'' = 19.66^\circ.$$

将  $i = 30^\circ$  代入，算得

由图中几何关系 算得

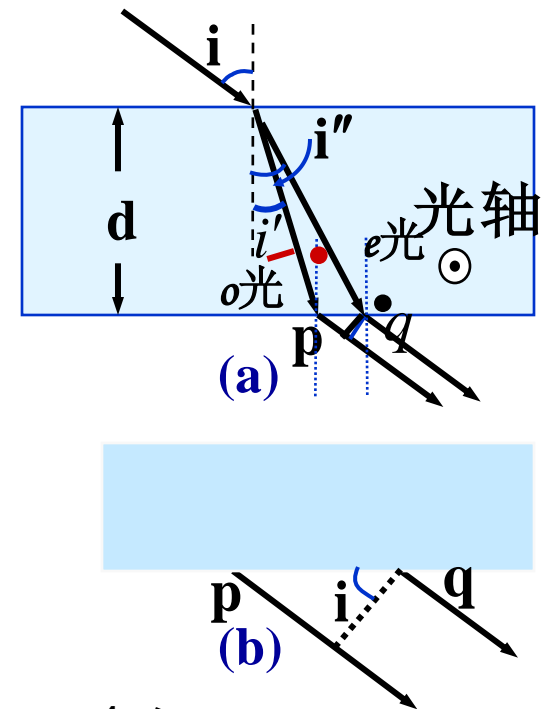
$$\overline{pq} = d(\tan i'' - \tan i')$$

$$= 1.0 \times 10^{-2} (\tan 19.66^\circ - \tan 17.55^\circ) = 4.1 \times 10^{-4} \text{ 米}$$

因此，两透射光的垂直距离为

$$D = \overline{pq} \cos i = 4.1 \times 10^{-4} \times \cos 30^\circ = 3.55 \times 10^{-4} \text{ 米}$$

(2) o光和e光的主平面不重合. o光的振动垂直于自己的主平面，图中平行于图面. e光的振动总是平行于自己的主平面，在图中垂直于图面.





3-12 分别计算用石英制造的适用于钠黄光（589.9纳米）和水银光（546.1纳米）的1/4波片的最小厚度。石英的主折射率  $n_o=1.544$ ,  $n_e=1.553$ .

解 对石英晶体，在垂直于光轴方向上  $n_e > n_o$ ，制成适用于钠黄光的1/4波片最小厚度为

$$d = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = \frac{589.3 \times 10^{-9}}{4 \times (1.553 - 1.544)} = 1.64 \times 10^{-5} (\text{m}).$$

制成适用于水银光的1/4波片最小厚度为：

$$d = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = \frac{546.1 \times 10^{-9}}{4 \times (1.553 - 1.544)} = 1.52 \times 10^{-5} (\text{m}).$$

**3-13** 线偏振光垂直入射于石英波片表面入射，已知 $n_o=1.544$ ， $n_e=1.553$ （1）若入射光振动方向与光轴成 $30^\circ$ 角，试计算通过波片后，o光、e光强度之比是多少？假设无吸收。（2）若波片的厚度为0.2毫米，透过的两光光程差是多少？

解（1）振动方向与光轴垂直的是o光，平行的是e光．按这两个方向将入射线偏振光振幅分解为

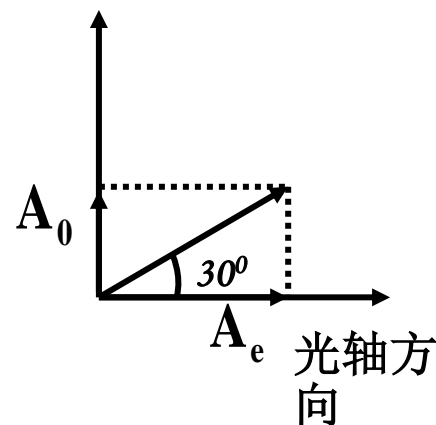
$$A_e = A \cos 30^\circ \quad A_o = A \sin 30^\circ$$

两光振动的强度分别为：

$$I_e = I \cos^2 30^\circ \quad I_o = I \sin^2 30^\circ$$

两光振动的强度比为：

$$\frac{I_o}{I_e} = \frac{I \sin^2 30^\circ}{I \cos^2 30^\circ} = \frac{1}{3}.$$

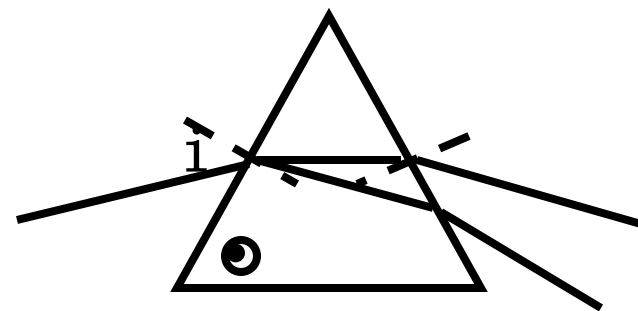


（2）波片厚度为0.2毫米，两光光程差为：

$$\Delta = (n_e - n_o)d = (1.553 - 1.544) \times 0.2 \times 10^{-3} = 1.8 \times 10^{-6} (\text{m}).$$

3-14 用方解石晶体割成一正个三角形棱镜，其光轴与 棱边平行，即与棱镜的正三角形横截面垂直，如图所示，今有一束自然光入射于棱镜，欲使棱镜内e光折射线行与棱镜的底边，问该入射光的入射角*i*应 为多少？并在图中画处o光的光路。方解石晶体的主折射率 $n_o = 1.658$ ， $n_e = 1.486$ 用这种棱镜来测定方解石主折射率 $n_o, n_e$ 的一种说法试说明之。

解：依题意作如右所示的光路图，



$$\sin i = n_e \sin 30^\circ = 1.486 \sin 30^\circ = 0.743 \quad i = 48^\circ 0'$$

$$\therefore \sin i = n_o \sin \gamma_o$$

$$\sin \gamma_o = \frac{\sin i_o}{n_o} = \frac{0.743}{1.658} = 0.4481$$

$$\therefore \gamma_o = 26^\circ 25'$$

**3-15 回答下列问题：(1)若起偏器透振方向与1/4波片光轴方向成 $30^\circ$ 角，从波片出射的光的偏振态如何？(2)怎样产生圆偏光？**

**解（1）**若起偏器与1/4波片光轴成 $30^\circ$ 角，则出射线偏振光振动面与1/4波片光轴成 $30^\circ$ 角。线偏振光在波片中分解为振动方向互相垂直的o光和e光，由于双折射，过波片后将产生 $\pi/2$ 的相位差，因此合成椭圆偏振光。

**（2）**两个振幅相等的、互相垂直的、相位差为 $\pi/2$ 的线偏振光可合成圆偏光。在（1）中将起偏器透振方向与1/4波片光轴夹成 $45^\circ$ 角，则由波片出射的就是圆偏振光。

**3-16. 怎样用一块偏振片和一块已知光轴方位的1/4波片，鉴别自然光，线偏光，圆偏振光和椭圆偏振光？**

**答：**检偏器对准四种光旋转一周，发现：（1）两明两零是线偏光；（2）两明两弱是椭圆偏光；（3）光强不变是自然光和圆偏光。对这两种光再细鉴别，在检偏片前加上 $\lambda/4$ 片，因为自然光通过 $\lambda/4$ 仍是自然光，圆偏光通过 $\lambda/4$ （ $\delta=(2k+1)\pi/2$ ）为线偏光，故检偏时，发现光强不变的为自然光，两明两零的为圆偏光。 <sup>13</sup>

**3-17** 将方解石波长片放在两正交的偏振片之间，将起偏器的透光方向与波长片光轴方向调制夹角 $\alpha=35^\circ$ ，计算：

(1) 透过波片后，o光与e光的振幅；

(2) 透过检偏片后，出射光的振幅及光强，设从起偏器射出的线偏振光振幅为A.

解:(1)由于波长片光轴与起偏器透振方向成 $35^\circ$ 角，所以线偏振光与波长片的光轴也成 $35^\circ$ 角，经波长片分解得的e光和o光的振幅分别为：

$$A_e = A \cos 35^\circ = 0.819A, \quad A_o = A \sin 35^\circ = 0.574A.$$

(2) 由于波长片对分解的o光e光产生 $2K\pi$ 的相位差，所以任何光通过波长片后，偏振态都不变化。线偏振光过波长片后仍为线偏振光，且振动方向不变。所以在与起偏振器垂直的检偏振器后光强为零。

补充3.2 在实验室内，用一块偏振片和钠光灯，如何鉴别下列片外观相同的偏振器件：(1) 偏振片；(2) 1/4波片；(3) 1/2波片。

答：利用光滑的桌面反射钠光自然光，分别取三片偏振器件，一边旋转，一边取不同的反射方向观察反射的钠光。若观察到“两明两零（零光强）”的出射光强变化，该偏振器件即为偏振片。此时的钠光入射角为布儒斯特角，反射光为线偏振光，且知振动面与入射面垂直（s分量）。这样，我们鉴别出了偏振片，并且得到了已知振动方向的线偏振光。

下面我们再来鉴别1/4波片和1/2波片。使得到的线偏振光分别垂直通过剩下的两偏振器件，用偏振片检验出射光强的变化。

若为1/4波片，旋转检偏器时，光强变化可以是“两明两零”（线偏振光），也可以强度不变（圆偏振光），但一般情况下出射光强是“两明两暗”（椭圆偏振光）。

若为1/2波片，则不论偏振片透光方向转到什么方位，出射光强都是按“两明两零”的规律变化（线偏振光）。

旋转样品，产生最大光强较亮的是1/2波片，较暗的是1/4波片。

$$\Delta\varphi = \pi + \pi \Rightarrow I_m = A^2 \qquad \Delta\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_m = \frac{1}{2} A^2 \quad 15$$

3-18 将厚度为1.0毫米且垂直于光轴切出的石英，放在两透振方向相互平行的偏振片之间。若某单色光从起偏器进入石英片，射出后振动面旋转了 $20^\circ$ ，试问石英片厚度为多少时，该单色光将完全不能从检偏器射出？

解：已知条件代入 $\theta = \alpha d$ ，得  $20^\circ = \alpha 1.0$ ，

设厚度为 $d'$ 时，该单色光不能从正交的偏振器系统射出，则线偏振光在通过厚度为 $d'$ 晶体后振动面一定转过 $90^\circ$ ，因此有  $90^\circ = \alpha d'$ 。

由上面两式解得  $d = 4.5\text{mm}$ 。

3-19 将50克含杂质的糖溶解于纯水中，制成100立方厘米的糖溶液，然后将此溶液装入10厘米的玻璃管中。今有单色线偏振光垂直于管端面沿管的中心轴线通过。从检偏器测得光的振动面旋转了 $32.34^\circ$ ，已知糖溶液的旋光系数  $\alpha = 66(\text{度} \cdot \text{厘米}^2 / \text{分米} \cdot \text{克})$ ，试计算这种糖的纯度（即含有纯糖的百分比）

解 已知条件代入： $\theta = C\alpha d$  求得  $C = 0.49\text{克} \cdot \text{厘米}^{-3}$ 。

故糖的纯度为  $\frac{49}{50} \times 100\% = 98\%$ 。

**第一章 能量量子化 波粒二象性 玻尔量子论**

1-1 改写单色辐出度  $M(T, \nu)$  为波长函数  $M(T, \lambda)$ , 通过  $\partial M(T, \lambda) / \partial T = 0$ , 证明维恩定律  $\lambda_m T = b$ , 并给出常数  $b$  的表达式; 对  $M(T, \lambda)$  从  $0 - \infty$  对波长积分证明斯特藩—玻尔兹曼定律  $M(T) = \int_0^\infty M(T, \lambda) d\lambda = \alpha T^4$ .

解: 普朗克黑体辐射公式:

$$M(T, \lambda) = \frac{c}{4} \rho(T, \lambda) = 2\pi h c^2 \lambda \frac{1}{e^{hc/k\lambda T} - 1}$$

通过对  $M(T, \lambda)$  求导  $\frac{dM(T, \lambda)}{d\lambda} = 0 \quad \therefore \lambda_m T = b$

通过对  $M(T, \lambda)$  积分  $\int_0^\infty M(T, \lambda) d\lambda = \alpha T^4$ .



1-2 测量星体表面温度是把星体看作绝对黑体, 利用维恩位移定律, 由测量的 $\lambda_M$ 来确定温度 $T$ . 实验测得, 太阳 $\lambda_M=550\text{nm}$ , 北极星: $\lambda_M=350\text{nm}$ , 天狼星: $\lambda_M=290\text{nm}$  微米, 试求这些星体的表面温度。

解: 由维恩位移定律

$$T\lambda_m = 2898\mu\text{m} \cdot \text{K}$$

可得太阳

$$T = 2898 / \lambda_m = 5.3 \times 10^3 \text{ K}$$

北极星  $T = 8.3 \times 10^3 \text{ K}$

天狼星  $T = 1.0 \times 10^4 \text{ K}$

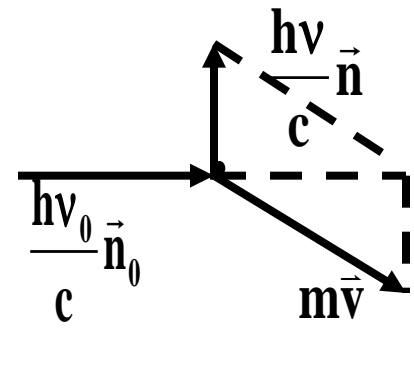
1-3 在与波长为0.02纳米的入射X射线束成某个角度 $\theta$ 的方向上, 康普顿效应引起的波长改变量为0.0024纳米 试求散射角 $\theta$  及这时传递给反冲电子的能量值。

解: 由  $\Delta\lambda = 2\lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}$   $\theta \approx 90^\circ$ , 可得

$$\text{由图可知 } h\nu_0 + m_e c^2 = h\nu + mc^2 \quad m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

则传递给反冲电子的能量为

$$E_k = mc^2 - m_e c^2 = h(\nu_0 - \nu) = hc \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \right) = 6.66 \times 10^3 (\text{eV})$$



1-4 在康普顿散射中, 入射光子波长为0.003纳米, 测得反冲电子的速度为0.6c (其中c表示光速), 求散射光子的波长及散射角。

解: 能量守恒 
$$hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) = mc^2 - m_e c^2 = m_e c^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

可得 
$$\lambda = 4.34 \times 10^{-3} (\text{nm})$$

由动量守恒 
$$(mv)^2 = \left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2 \frac{h^2}{\lambda \lambda_0} \cos \theta$$

可得 
$$\cos \theta = 0.4481 \quad \therefore \theta = 63.4^\circ$$

1-5 用能量为12.2电子伏的电子轰击氢原子, 试确定受激的氢原子所能发射谱线的波长。

解: 氢原子受激发时 
$$E_e = E_n - E_1 = hcR\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{m^2}\right)$$

得到 
$$m = \left(\frac{hcR}{hcR - E_e}\right)^{\frac{1}{2}} = 3.1 \quad \therefore m = 3$$

即受激跃迁,  $E_3 \rightarrow E_1$  
$$\lambda_{31} = \frac{1}{R(1 - \frac{1}{9})} = 102.6 (\text{nm})$$

$$E_3 \rightarrow E_2 \quad \lambda_{32} = \frac{1}{R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)} = 656.3(\text{nm})$$

$$E_2 \rightarrow E_1 \quad \lambda_{21} = \frac{1}{R(1 - \frac{1}{4})} = 121.5(\text{nm})$$

1-6 氦离子 ( $\text{He}^+$ ) 被激发到  $n > 4$  的能级上, 写出从  $n=5, 6$  向  $n=4$  跃迁的光谱公式, 并与氢原子的巴尔末系进行比较.

解: 类氢波数公式:  $\frac{1}{\lambda} = RZ^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = R\left(\frac{1}{n^2/Z^2} - \frac{1}{m^2/Z^2}\right)$

氦  $Z=2$  从  $m=5$ , 向  $n=4$  跃迁的光谱公式:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2/Z^2} - \frac{1}{m^2/Z^2}\right) = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2.5^2}\right)$$

从  $m=6$ , 向  $n=4$  跃迁的光谱公式:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2/Z^2} - \frac{1}{m^2/Z^2}\right) = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)$$

此谱线与氢原子的巴尔末系相重.

1-7 半径为 $r$ 的电子的圆轨道周长为德布罗意波长的整倍数,  
 $2\pi r = n\lambda$  证明波尔的角动量是量子化的.

证明:  $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$   $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{2\pi r}{\lambda} \hbar = n\hbar$  (说明角动量 $L$ 是量子化的)

1-8 求下列电子的德布罗意波波长: 动能为150电子伏; 加速电压为54V和36V.

解: 由公式  $E_k = \frac{p^2}{2m}$  得出电子德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_k}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 e V}} \approx \frac{1.225}{\sqrt{V}} (\text{nm})$$

$$(1) \quad E_k = 150 \text{eV}, m_0 = 9.109 \times 10^{-31} \text{kg} \quad \therefore \lambda = 0.1001 \text{nm}$$

$$(2) \quad \lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{1.225}{\sqrt{V}} = \frac{1.225}{\sqrt{54}} = 0.167 (\text{nm}) \quad (3) \quad \lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{1.225}{\sqrt{V}} = 0.205 (\text{nm})$$

1-9 求热中子( $T=300\text{K}$ )的德布罗意波长(提示:  $k_B T = k \times 300\text{K} = \frac{1}{40} \text{eV}$ ,  
 $m_n c^2 = 939.6 \times 10^6 \text{eV}$ ,  $hc = 1.24 \times 10^3 \text{eV} \cdot \text{nm}$ )

解:  $E_k = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{40} = \frac{3}{80} \text{ (eV)}$

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0 c^2}} = \frac{1.24 \times 10^3}{\sqrt{(3/80)^2 + 2 \times (3/80) \times 939.6 \times 10^6}} = 0.145 \text{ (nm)}$$

1-10 推导在相对论下, 德布罗意波长公式  $\lambda = \frac{h}{p} = hc / \sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0 c^2}$

(提示: 利用公式:  $(mc^2)^2 = (m_0 c^2)^2 + p^2 c^2$ , 和  $E^k = mc^2 - m_0 c^2$  )

解: 由公式  $(mc^2)^2 = (m_0 c^2)^2 + p^2 c^2$ ,

$$\begin{aligned} \therefore p &= \frac{1}{c} \sqrt{(mc^2)^2 - (m_0 c^2)^2} = \frac{1}{c} \sqrt{(mc^2 - m_0 c^2)^2 - 2(m_0 c^2)^2 + 2mc^2 \cdot m_0 c^2} \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{E_k^2 + 2(m_0 c^2) \cdot mc^2} = \frac{1}{c} \sqrt{E_k^2 + 2E_k \cdot m_0 c^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda = h/p = hc / \sqrt{E_k^2 + 2E_k \cdot m_0 c^2}$$

## 第二章 波函数和薛定谔方程

2-1. 作圆周运动的粒子的切向动量和角动量分别为 $p_t$ 和 $L_z = rp_t$ 。若用 $\Delta s$ 表示粒子在圆轨道上位置的统计不确定量。由不确定关系

$\Delta s \Delta p_t \geq \hbar / 2$ ，证明  $\Delta \phi \Delta L_z \geq \hbar / 2$ ，其中 $\phi$ 是粒子的角位置。

解：由测不准关系： $\Delta s \Delta p_t \geq \hbar / 2$ 。

令  $\Delta p_t = \Delta L_z / r$ ,  $\Delta s = r \Delta \phi$ . 代入有： $\Delta \phi \Delta L_z \geq \hbar / 2$

2-2 原子从某一激发态向基态跃迁时,辐射的波列长度为 $L$ (相当于干长度),把 $L$ 作为不确定度  $\Delta x$ 的大小,求光子的动量不确定度 $\Delta p_x$ 由 $E = cp$ 计算能量不确定度 $\Delta E$ ,  $\Delta E$ 正是激发态能级的宽度(所以从具有一定能级宽度的激发态向基态跃迁时,辐射的光不是单色的),它对应电子占据该激发态的寿命 $\tau$ 是有限的。证明： $\Delta E_\tau \geq \hbar / 2$

解：由  $E = cp$ ,  $\Delta x \Delta p \geq \hbar / 2$

$$\Delta x = L = c\tau, \therefore \Delta p \geq \hbar / (2\Delta x) = \hbar / (2c\tau) \quad \therefore \Delta E \geq c\hbar / (2c\tau), \therefore \Delta E_\tau \geq \hbar / 2$$

2-3 一维谐振子的基态波函数是  $\varphi_0(x) = Ae^{-a^2x^2/2}$  ( $a^2 = m\omega_0/\hbar$ )，试求：(1) 归一化系数A；(2) 基态能  $E_0$ （即零点能）（提示用哈密顿算符作用基态波函数求  $E_0$ ）；(3) 求  $\overline{\Delta x^2}$ ；(4) 借助不确定度关系，求基态零点能，提示：

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2/2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}a} \int_0^\infty x^2 e^{-a^2x^2/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}a^3}$$

解：谐振子能量本征值方程

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) \psi_n(x) = E_n \psi_n(x)$$

其中  $E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega$       对应零点能       $E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$

基态波函数  $\psi_0(x) = ce^{-a^2x^2/2}, \left( a^2 = \frac{m\omega}{\hbar} \right).$

(1) 基态波函数归一

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = 2 \int_0^{\infty} c^2 e^{-a^2 x^2} d\mathbf{x} = c^2 \cdot 2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{4a^2} = 1, \quad \therefore c = \frac{\sqrt{a}}{\pi^{1/4}}$$

(2) 由  $\hat{H}\psi_0(\mathbf{x}) = E_0\psi_0(\mathbf{x})$  求  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ .

$$(3) \quad \langle (\Delta \mathbf{x})^2 \rangle = \langle \mathbf{x}^2 \rangle - \langle \mathbf{x} \rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^2 |\psi_0|^2 d\mathbf{x} - \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x} |\psi_0|^2 d\mathbf{x} \right)^2$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \cdot 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-a^2 x^2} d\mathbf{x} - \left( \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-a^2 x^2} d\mathbf{x} \right)^2 = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \cdot 2 \frac{\sqrt{\pi}}{4a^2} = \frac{1}{2a^2}$$

$$\langle (\Delta \mathbf{p})^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4 \langle (\Delta \mathbf{x})^2 \rangle} = \frac{\hbar^2}{4} \cdot 2 \frac{m\omega}{\hbar} = \frac{1}{2} m\omega \hbar$$

$$E_0 = \frac{1}{2m} \Delta \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} R \Delta \mathbf{x}^2 = \frac{1}{4} \omega \hbar + \frac{1}{2} m\omega^2 \times \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} = \frac{1}{2} \hbar\omega$$



2-4 借助一维无限深势阱的结果，试给出粒子在三维无限深势阱中的能级和波函数（设三维阱宽分别为 $a, b, c$ ）。（提示：独立事件同时发生的概率幅是各概率幅之积）

解:在阱外  $\Psi = 0$

$$\text{在阱内} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi = E \Psi \quad (0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi(x, y, z) = E \Psi$$

$$\text{令} \quad \Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\therefore -\frac{1}{X} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} X - \frac{1}{Y} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} Y - \frac{1}{Z} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} Z = E$$

$$\therefore -\frac{1}{X} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 X}{dx^2} = E, \quad \text{或者} \quad \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} X = 0$$

解的

$$\left\{ \begin{array}{l} X(x) \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} & 0 < x < a \\ 0 & x \geq a, x \leq 0 \end{cases} \\ E_1 = \frac{\hbar^2}{8ma^2} & n_1 = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

同理计算  $y$  ,  $z$  。由上可得:

$$E = \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right);$$

$$\Psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{n_1 \pi x}{a} \sin \frac{n_2 \pi y}{b} \sin \frac{n_3 \pi z}{c}$$

**2-5 取一维无限深势阱中心为坐标原点，即势阱表示为：**

$$\mathbf{U(x) = 0} \ , \ |\mathbf{x}| < \mathbf{a/2} ; \ \mathbf{U(x) \rightarrow \infty} \quad |\mathbf{x}| > \mathbf{a/2}$$

**写出粒子的能量本征方程，求能量本征值 $E_n$ 和对应的本征函数 $\varphi_n$**

**解：**

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \psi = E\psi$$

**通解：**

$$\psi(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \quad \alpha = \left( \frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

**在  $x = \pm a/2$  处应用边界条件，给出：**

$$\begin{aligned} A \sin(\alpha a / 2) + B \cos(\alpha a / 2) &= 0 \ , \\ -A \sin(\alpha a / 2) + B \cos(\alpha a / 2) &= 0 \end{aligned}$$

**从而解得：**

$$A \sin(\alpha a / 2) = 0 \ , \ B \cos(\alpha a / 2) = 0$$

分两类解：第一类， $A=0$ ， $\cos(\alpha a/2)=0$ ；

第二类， $B=0$ ， $\sin(\alpha a/2)=0$ 。

因此有： $\alpha a / 2 = n\pi / 2$ ,

$n$ 为奇数为第一类， $n$ 为偶数为第二类。

$n$ 为奇数：
$$\psi(x) = B \cos \frac{n\pi x}{a} = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a}$$

$n$ 为偶数：
$$\psi(x) = A \sin \frac{n\pi x}{a} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$\therefore E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$

2-6 粒子在 $[0, a]$  范围内的一维无限深势阱中运动，其状态由以下波函数

$$\varphi(x) = \frac{4}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \cos^2 \left( \frac{\pi x}{a} \right)$$

求：(1) 在该态上测得的能量可能值，及相应的概率；(2) 求能量的平均值（提示：用完备正交集  $\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$  展开，其展开系数模方为测量可能值的概率）

解：将波函数  $\psi(x)$  用一维无限深方势阱的正交完备的本征方程函数

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (0 < x < a)$$

作展开表示。

$$\because \psi(x) = \sum c_n \psi_n, \quad \left( c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi(x) dx \right)$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathbf{c}_n &= \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \frac{4}{\sqrt{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \cos^2 \left( \frac{\pi x}{a} \right) dx \\ &= \sqrt{2} \delta_{n,1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{n,3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{n,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta_{n,1} + \delta_{n,3})\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{其它 } \mathbf{c}_n = \mathbf{0}, \quad |\mathbf{c}_1|^2 = |\mathbf{c}_3|^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{a}} \left( \sin \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{3\pi x}{a} \right)$$

$$\therefore |\mathbf{c}_1|^2 + |\mathbf{c}_3|^2 = 1, \quad \therefore \langle \mathbf{E} \rangle = \sum |\mathbf{c}_n|^2 \mathbf{E}_n = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

2-7 设粒子在一维无限深势阱中运动，已知粒子所处的势场

$$U(x) = \begin{cases} \infty & x \leq 0, x \geq a \\ 0 & 0 < x < a \end{cases}$$

试求：(1) 能量量子数为  $n$  的概率密度；(2) 距势阱内壁四分之一宽度内发现粒子的概率；(3)  $n$  为何值时在上述区域内发现粒子的概率最大；(4) 当时该概率的极限，并说明这一结果的物理意义。

解 (1) 
$$P_{1/4} = \int_0^{a/4} \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx + \int_{3a/4}^a \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

(2) 
$$P_{1/4} = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3\pi}, \frac{1}{2} - \frac{1}{5\pi}, \frac{1}{2} + \frac{1}{7\pi}, \dots & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ \frac{1}{2} & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

(3) 
$$P_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\pi}, \quad (n = 3) \quad \Delta = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

(4) 
$$n \rightarrow \infty, P_{1/4} = \frac{1}{2} - \frac{n\pi}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{转化为经典问题!}$$

### 第三章 原子 分子 固体

3-1 证明在原子内 $n, l$ 相同的状态(子壳层)最多可容纳 $2 \cdot (2l+1)$ 个电子; $n$ 相同的状态(壳层)最多容纳 $2n^2$ 个电子.

解: 
$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = \frac{1+2(n-1)}{2} \cdot n = n^2$$

考虑到每个态允许自旋向上向下两个态,  $\therefore 2n^2$ .

3-2 写出硼(B,  $Z=5$ ), 氩(Ar,  $Z=18$ ), 铜(Cu,  $Z=64$ ), 溴(Br,  $Z=35$ ), 原子基态的电子组态.

解:  $1s^2 2s^2 2p^1$ ;

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$ ;

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1$ ;

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^5$



3-3 试计算电子处在3d状态的轨道磁矩 $\mu_l$  及 $\mu_{lz}$ 的大小和自旋磁矩  $\mu_s$ 和 $\mu_{sz}$ 的大小.

解:

$$\vec{\mu}_l = -\frac{e}{2m} \vec{L} = \sqrt{l(l+1)} \frac{e\hbar}{2m_e} = 2.45 \times \left\{ \begin{array}{l} 0.9274 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1} \quad (\text{JT}^{-1} = \text{Am}^2) \\ 0.5788 \times 10^{-4} \text{ eV} \cdot \text{T}^{-1} \end{array} \right\}$$

$$\mu_{l_z} = \frac{e\hbar}{2m_e} m_l, \quad m_l = 2, 1, 0, -1, -2.$$

3-4 某元素X射线中 $K_\alpha$ 线波长为3.16nm, 问该元素壳层和K壳层的能量差是多少?该元素是什么元素.

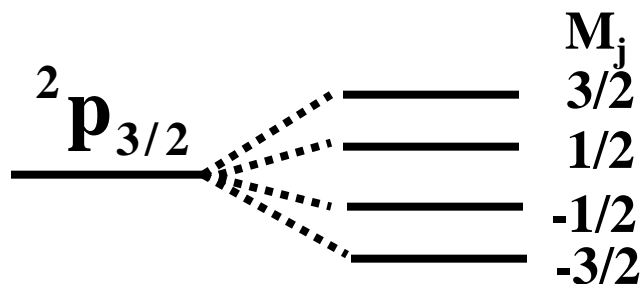
解: 
$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1.24 \text{ nm} \cdot \text{KeV}}{3.16 \text{ nm}} = 0.39 \text{ KeV}$$

$$E = h\nu = Rhc(Z-1)^2 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \approx \frac{3}{4} \times 13.6 (Z-1)^2 \text{ eV}$$

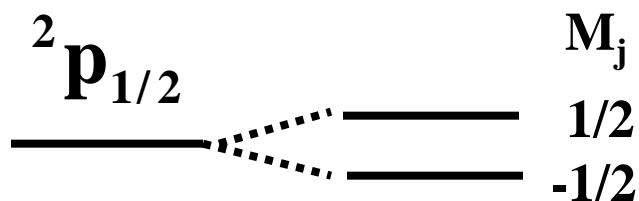
解得:  $Z=7$ , 氮 (N) 元素.

3-5 氢原子的2P态, 在无外磁场时具有双层能级(精细结构) $^2p_{3/2}$ ,  $^2p_{1/2}$ . 问在外(弱)磁场中, 这些态对应的能级分裂为几条, 以能级图示之.

解:  $^2P_{3/2}$ 在外(弱)磁场中, 这态对应的能级分裂为4条:



$^2P_{1/2}$ 在外(弱)磁场中, 这态对应的能级分裂为2条:



## 第四章 原子核和原子能的利用

4-1.  $^{16}\text{N}$ ,  $^{16}\text{C}$ ,  $^{16}\text{F}$ 的原子质量分别是16.006099u, 15.994915u和16.011465, 试计算这些原子核的结合能。

解: 用公式:  $B = ((ZM_{\text{H}} + Nm_{\text{n}}) - M)c^2$

$$= \left( \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \times 1.007825 + \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} \times 1.008649 - \begin{pmatrix} 16.006069 \\ 15.994915 \\ 16.011465 \end{pmatrix} \right) \times 931.5 \text{Mev}$$

4-2 求  $^{56}_{26}\text{Fe}$ 核的半径, 比结合能, 已知 $^{56}\text{Fe}$ 原子质量为55.4934u。

解:  $r_{\text{Fe}} = r_0 A^{1/3} = 1.2 \times 56^{1/3} = 4.6 \text{fm}$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\text{Fe}) &= ((26 \times 1.007825 - 30 \times 1.008649) - 55.4934) \\ &\times 931.5 / 56 = 8.79 \text{Mev} \end{aligned}$$

4-3 一个放射性元素平均寿命为10天，问在第五天内发生衰变的数目是原来的多少倍？

解： 
$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{N_4 - N_5}{N} = e^{-\frac{4}{10}} - e^{-\frac{5}{10}} = 0.670 - 0.606 = 0.064$$

4-4 现测得某骸骨100克碳的 $\beta$ 衰变率( $^{14}\text{C}$ 的放射性衰变率)为300次/分,问该骸骨有多久的历史？

解： 
$$N_0(^{14}\text{C}) = \frac{100}{12} \times 6.023 \times 10^{23} \times 1.3 \times 10^{-12} = 6.52 \times 10^{12}$$

$$T_{^{14}\text{C}} = 5730(\text{a}) \quad \lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{5730(\text{a})} = 1.21 \times 10^{-4} / \text{a} = (3.84 \times 10^{-12} / \text{s})$$

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \frac{0.693}{5730(\text{a})} \times 6.52 \times 10^{12} e^{-\frac{0.693}{5730}t} = 300 \times 60 \times 24 \times 365 / \text{a}$$

$$t = \frac{5730}{0.693} \ln \frac{0.693 \times 6.52 \times 10^{12}}{300 \times 60 \times 24 \times 365 \times 5730} = 1.33 \times 10^4 (\text{年})$$

4-5.  $^{232}_{90}\text{Th}$  放出 $\alpha$ 粒子后衰变成  $^{228}_{88}\text{Ra}$  ( $^{232}_{90}\text{Th} \rightarrow ^{228}_{88}\text{Th} + \alpha$ )  
从含1克  $^{232}_{90}\text{Th}$  中测得某放射性活度为4100Bg(贝可)求  $^{232}_{90}\text{Th}$  的  
半衰期 $T_{1/2}$

解:  $T_{1/2} = 0.693 \frac{N}{A_0}$        $N = \frac{m}{M_{(^{232}_{90}\text{Th})}} N_A = \frac{1}{232} 6.022 \times 10^{23} = 2.6 \times 10^{21}$

$$T_{1/2} = 0.693 \times 2.6 \times 10^{21} / 4100 = 1.4 \times 10^{10} \quad (\text{年})$$