柯西方程

函数方程是分析学中一个有着悠久历史的研究领域，达朗贝尔、欧拉、高斯、柯西、阿贝尔、魏尔斯特拉斯、达布、希尔伯特等著名数学家都研究过函数方程及其解法. 下面是一个简单的函数方程问题.

例 1 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，且对任意实数x, 都有$f(x)=f(2x+1)$, 证明$f(x)$恒等于常数.

证 由已知得: $\forall y>0$, 有

$$f(y)=f(y^{\frac{1}{2}})=\cdots=f(y^{\frac{1}{2^n}}).$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty} y^{\frac{1}{2^n}}=1$, f在$y=1$连续, 故

$$f(y)=\lim_{n\to\infty} f(y^{\frac{1}{2^n}})=f(1).$$

$\square$

我们在这里主要讨论柯西方程以及可以通过柯西方程求解的一些函数方程.

例 2 (柯西方程) 设函数$f(x)$在点0连续且对任何$x,y\in(-\infty,+\infty)$都有$f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明

(1) $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数;

(2) 存在常数a, 使得$f(x)=ax$.

证 (1) 显然$f(0)=0$. $\forall x,y\in\mathbb{R}$, 有

$$f(x+y)-f(x)=f(y)\to f(0)=0,\ \ y\to 0,$$

即f在$(-\infty,+\infty)$连续.

(2) 由已知：$\forall q\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$f(qx)=qf(x),$$

再若$p\in\mathbb{Z}^+$, 则

$$pf(1)=f(p)=f\left(q\cdot\frac{p}{q}\right)=qf\left(\frac{p}{q}\right),$$

即

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}f(1).$$

显然f为奇函数, 故

$$f\left(-\frac{p}{q}\right)=-f\left(\frac{p}{q}\right)=-\frac{p}{q}f(1).$$

于是, $\forall r\in\mathbb{Q}$, 有$f(r)=rf(1)$. 记$a=f(1)$, 得$f(r)=ar$. 若x为无理数, 则$\exists r_n\in\mathbb{Q}$, 使$r_n\to x$, $n\to\infty$, 由f在x连续知:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}ar_n=ax.$$

□

注 柯西方程$f(x+y)=f(x)+f(y)$可以有不连续的解，但其构造需要本课程之外的知识（承认选择公理，借助Hamel基来构造）.

例 3 (柯西方程) 设对任何$x,y\in(-\infty,+\infty)$都有$f(x+y)=f(x)+f(y)$, 且存在闭区间$[a,b]$, 使得$f(x)$在$[a,b]$有界（实际上，有下界即可），证明存在常数λ, 使得$f(x)=\lambda x$.

证 设$|f(x)|\leqslant M$, $\forall x\in[a,b]$, 则对任意$x\in[0,b-a]$, 有

$$|f(x)|=|f(x+a)-f(a)|\leqslant|f(x+a)|+|f(a)|\leqslant M+|f(a)|,$$

即$f(x)$在$[0,b-a]$上有界. 记$c=b-a$, 令$\lambda=\dfrac{f(c)}{c}$, $\varphi(x)=f(x)-\lambda x$, 则对任何$x,y\in(-\infty,+\infty)$都有$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$. 注意到$\varphi(c)=f(c)-\lambda c=0$, 就可知对任意实数$x$, 有$\varphi(x+c)=\varphi(x)+\varphi(c)=\varphi(x)$, 即$\varphi(x)$是一个以$c$为周期的周期函数. 于是由$\varphi(x)$在$[0,c]$上有界知$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界. 为证明$f(x)=\lambda x$, 只需证明$\varphi(x)\equiv 0$. 反证. 若不然，则存在实数$x_0$, 使得$\varphi(x_0)\neq 0$. 因为$\varphi(nx_0)=n\varphi(x_0)$, $n=1,2,\cdots$, 所以由$\varphi(x_0)\neq 0$ 知$\{\varphi(nx_0)\}$无界，与$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界矛盾！ □

注 这个例题的结论较为一般，由它可以推出柯西方程在某些函数类上的解形如$f(x)=ax$. 例如，它的一个推论如下：若$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的单调函数，对任何$x,y\in(-\infty,+\infty)$都有$f(x+y)=f(x)+f(y)$, 则存在常数a, 使得$f(x)=ax$.

一些函数方程可以通过柯西方程来求解.

例 4 (詹森方程) 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，对任何实数x,y都有$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$, 证明存在常数$a$和$b$ 使得$f(x)=ax+b$.

证 令$g(x)=f(x)-f(0)$, 则对任何实数x,y都有$g\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{g(x)+g(y)}{2}$. 取$y=0$, 由$g(0)=0$得$g\left(\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{g(x)}{2}$. 于是有

$$\frac{g(x+y)}{2}=g\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{g(x)+g(y)}{2},$$

因此$g(x)$满足柯西方程. 又$g(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，故存在常数a, 使得$g(x)=ax$. 记$b=f(0)$, 就有$f(x)=g(x)+f(0)=ax+b$. □

例 5 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上不恒为0的连续函数，对任何实数x,y都有$f(x+y)=f(x)f(y)$, 证明存在常数$a>0$, 使得$f(x)=a^x$.

证 先证$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上恒不为0. 反证. 若不然，则存在x_0, 使得$f(x_0)=0$. 于是对任何实数x, 有$f(x)=f(x-x_0)f(x_0)=0$, 与$f(x)$不恒为0矛盾！

进而，由$f(x)=\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2$知$f(x)$恒大于0. 令$g(x)=\ln f(x)$, 则$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且满足柯西方程. 于是存在常数$\lambda$, 使得$g(x)=\lambda x$. 令$a=\mathrm{e}^\lambda>0$, 即知$f(x)=\mathrm{e}^{g(x)}=a^x$. □

例 6 设$f(x)$是$(0,+\infty)$上的连续函数，对任何正数x,y都有$f(xy)=f(x)f(y)$, 求所有满足条件的$f(x)$.

解 所有满足条件的$f(x)$为$f(x)\equiv 0$与$f(x)=x^k$, 其中k为常数. 证明如下. 令$g(x)=f\left(\mathrm{e}^x\right)$, 则由$f(xy)=f(x)f(y)$得$g(u+v)=g(u)g(v)$, 其中$u=\ln x$, $v=\ln y$. 由上个例题知$g(x)\equiv 0$或$g(x)=a^x$, 其中$a>0$, 记$k=\ln a$, 则得到相应的$f(x)$为$f(x)\equiv 0$或$f(x)=g(\ln x)=x^k$. □

思考题 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，对任何实数x,y都有$f(ax+by+c)=pf(x)+qf(y)+r$, 其中a,b,c,p,q,r是常数. 问a,b,c,p,q,r满足什么条件时函数方程$f(ax+by+c)=pf(x)+qf(y)+r$有解，解的一般形式是什么？