8.3 定积分的性质

定积分的线性性质

定理 1

设函数$f(x)$和$g(x)$都在$[a,b]$上可积，λ为常数，则$\lambda f(x)$, $f(x)\pm g(x)$也都在$[a,b]$上可积，且有

(i) $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;

(ii) $\displaystyle\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

定理1的证明从定积分的定义直接可得，故略去.

用$R([a,b])$来记$[a,b]$上黎曼可积函数全体组成的集合，则$R([a,b])$是一个实线性空间.

定积分的区间可加性

定理 2

设$a < c < b$.

(i) 若$f(x)$在$[a, b]$上可积, 则$f(x)$在$[a, c]$和$[c, b]$上都可积, 且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x; \tag{1}$$

(ii) 若$f(x)$在$[a, c]$和$[c, b]$上都可积, 则$f(x)$在$[a, b]$上也可积且*(1)*式成立.

此外, 我们指出, 当(1)式中的三个积分都存在时, 对任意的a, b, c, (1)式都成立, 即不必要求$a < c < b$.

定积分的不等式性质

定理 3

若非负函数$f(x)$在$[a,b]$上可积, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

推论 1

设$f(x)$和$g(x)$都在$[a,b]$上可积且$f(x) \leqslant g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

推论 2

设非负函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, 则在$[a,b]$上$f(x) \equiv 0$.

单选题 1分

设置

判断下面的命题是否成立.

如果函数$f(x)$在$[a,b]$连续，且对$[a,b]$上每个连续函数$\varphi(x)$，都有$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0$，那么$f(x)$在$[a,b]$上恒等于0.

A 成立

B 不成立

提交

定积分不等式性质的进一步讨论

习题8(B)第4题

设$f(x)$在$[a,b]$上可积. 证明$f(x)$在$[a,b]$上至少有一个连续点. 由此推出$f(x)$的连续点集在$[a,b]$中稠密.

设非负函数$f(x)$在$[a,b]$上可积, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$的充分必要条件是$f(x)$在其连续点处取值恒为0.

习题8(B)第5题

设$f(x)$在$[a,b]$上可积且恒正. 证明$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

设$f(x)$和$g(x)$都在$[a,b]$上可积且$f(x) < g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

单选题 1分

设置

判断下面的命题是否成立.

如果函数$f(x)$在$[a,b]$非负可积且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$, 那么对任意$[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$, 存在$\xi\in[\alpha,\beta]$使得$f(\xi)=0$.

A 成立

B 不成立

提交

定积分的绝对值的放缩

定理 4

若$f(x)$在$[a,b]$上可积, 则$|f(x)|$也在$[a,b]$上可积. 且有不等式

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

注意, 这个定理的逆命题不成立. 例如函数

$$f(x) = 2D(x) - 1 = \begin{cases} 1, & x\text{为有理数}, \\ -1, & x\text{为无理数}, \end{cases}$$

$|f(x)| \equiv 1$当然在$[0,1]$上可积, 但$f(x)$在$[0,1]$上不可积.

思考题

设$[a,b]$上的函数$f(x)$具有介值性， 问能否由$|f(x)|$在$[a,b]$可积得到$f(x)$在$[a,b]$可积？

可积函数乘积的可积性

定理 5

若$f(x)$和$g(x)$都在$[a,b]$上可积, 则$f(x)g(x)$也在$[a,b]$上可积.

若函数$f(x)$在$[a,b]$可积且恒不为0, 则$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$未必可积. 这是因为$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$有可能无界. 可以证明: 设函数$f(x)$在$[a,b]$可积且恒不为0, 若$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$有界, 则$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$可积.

应用"有界函数可积的充分必要条件是其所有间断点构成勒贝格零测集"可以证明下面的命题. 设函数$f(x)$和$g(x)$都在$[a,b]$可积, 且$g(x)$恒不为0, 若$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在$[a,b]$有界, 则$\dfrac{f(x)}{g(x)}$一定在$[a,b]$可积.

复合函数的可积性

两个可积函数的复合未必可积. 例如，黎曼函数$R(x)$在$[0,1]$可积，令$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x\neq 0,\end{cases}$ 则$f(x)$在$[0,1]$可积，但$f(R(x))=D(x)$在$[0,1]$不可积. 此外，若$f(x)$在$[A,B]$上可积，$g(x)$在$[a,b]$上连续，且当$x\in[a,b]$时，有$g(x)\in[A,B]$，则复合函数$f(g(x))$未必在$[a,b]$上可积. 反例及进一步的讨论见Jitan Lu的文章“Is the composite function integrable?”（The American Mathematical Monthly, Vol.106, No. 8, pp. 763-766, 1999）

习题8(A)第1题

设$f(x)$在$[A,B]$上连续，$g(x)$在$[a,b]$上可积，且当$x\in[a,b]$时，有$g(x)\in[A,B]$. 证明复合函数$f(g(x))$在$[a,b]$上可积.

积分第一中值定理

定理 6 (积分第一中值定理)

设$f(x)$在$[a,b]$上连续, $g(x)$在$[a,b]$上可积且不变号, 则存在$\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

由证明过程可见，设$f(x)$在$[a,b]$上可积, m和M分别是$f(x)$在$[a,b]$的下确界与上确界，$g(x)$在$[a,b]$上可积且不变号, 则存在$\mu\in[m,M]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

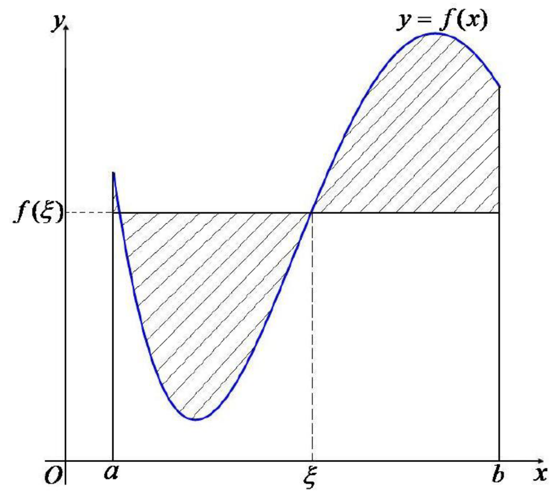
进一步讨论可知，积分第一中值定理的结论中“存在$\xi\in[a,b]$”可以加强为“存在$\xi\in(a,b)$”.

积分第一中值定理中$g(x) \equiv 1$的特殊情形

特别地, 当$g(x) \equiv 1$时, (2)式变为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a). \tag{3}$$

在(3)式中, 左端是曲边梯形的面积而右端是以$[a,b]$为底, 以$f(\xi)$为高的矩形的面积. 可见, (3)式的几何意义就是左端积分所表示的曲边梯形的面积等于以$[a,b]$为底, 以某点$\xi \in [a,b]$的函数值$f(\xi)$为高的矩形的面积.



积分均值

进一步地, (3)式又可写成

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这是算术均值在连续情形下的推广. 通常称之为函数$f(x)$在$[a, b]$上的积分均值 (简称均值).

在物理和工程等实际问题中, 有时需要求出某个函数$y = f(x)$在某个区间中连续变化时的平均值, 例如求平均速度, 平均压强, 平均功率等等. 这时要计算的平均值就是函数$f(x)$在该区间上的积分均值.

“分段估计”的方法

在对定积分的值进行估计时，“分段估计”是一种常用的方法. 如果在整个区间上的估计不能达到解决问题的要求，那么可以将区间分段，根据函数在每段区间的不同特性进行更细致的估计.

例 1

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x = 0.$

用连续函数在积分意义下逼近可积函数

例 2

设$f(x)$在$[a,b]$上可积, 证明存在一个$[a,b]$上的连续函数序列$\{\varphi_n(x)\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(x)-\varphi_n(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

习题8(A)的第4题

证明$f(x)$在$[a,b]$上可积的充分必要条件是对任意$\varepsilon>0$, 都存在$[a,b]$上的连续函数$f_1(x)$和$f_2(x)$, 使得

(1) 对所有$x\in[a,b]$, 都有$f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)$;

(2) $\displaystyle\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$.

教材下册的内容中有魏尔斯特拉斯逼近定理，由魏尔斯特拉斯逼近定理可知例2结论中的“连续函数序列”可以加强为“多项式序列”.

魏尔斯特拉斯逼近定理

魏尔斯特拉斯定理

设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数, 则对任意$\varepsilon > 0$, 都存在多项式$P(x)$, 使得

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

换句话说, 就是存在一列多项式$\{P_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$, 即对任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在正整数N, 使得当$n > N$时，对任意$x \in [a,b]$, 有$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

这里，闭区间$[a,b]$不能换成其他类型的区间. 例如，不存在多项式序列$\{P_n(x)\}$在$(0,1)$上一致收敛到$f(x) = \frac{1}{x}$; 再如，若多项式序列$\{P_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛到$f(x)$, 则$f(x)$是多项式.

用多项式在积分意义下逼近可积函数

借助魏尔斯特拉斯逼近定理，由例2和习题8(A)的第4题可以得到下面的命题.

设$f(x)$在$[a,b]$上可积, 则存在一个多项式序列$\{P_n(x)\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(x)-P_n(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

函数$f(x)$在$[a,b]$上可积的充分必要条件是对任意$\varepsilon > 0$, 都存在$[a,b]$上的多项式$P_1(x)$和$P_2(x)$, 使得

(1) 对所有$x\in[a,b]$, 都有$P_1(x)\leqslant f(x)\leqslant P_2(x)$;

(2) $\displaystyle\int_a^b P_2(x)\mathrm{d}x - \int_a^b P_1(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$.

用“函数逼近”的方法解决问题

例 3

若$f(x)$在$[A, B]$可积, $A < a < b < B$, 求证

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

先证明例3的结论对连续函数成立，借助一致连续性不难证明这一点.

再回到一般情形，利用例2的结果，用连续函数序列逼近可积函数，借助连续函数情形结论成立来得到一般情形下结论成立.

例 4

设函数$f(x)$在$[a,b]$上可积,则有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = 0.$$

可以先证明黎曼引理对阶梯函数成立，再用阶梯函数逼近可积函数来证明一般情形.

也可以先用分部积分法证明黎曼引理对连续可微函数成立，再用连续可微函数逼近可积函数来证明一般情形.