第十章 多元函数的极限与连续

10.1 n维欧氏空间

例 1 对R^2中的集合$A=\left\{(\frac{n-1}{n},\frac{m+1}{m})\,|m,n\right\}$，求$A^\circ$，$A'$和$\bar{A}$.

解 $A'=\{(1,\frac{m+1}{m})|m$为正整数$\}\cup\{(\frac{n-1}{n},1)|n$为正整数$\}\cup\{(1,1)\}$.

$\overline{A}=A\cup A'$

$A^\circ=\varnothing$

$\partial A=\overline{A}\setminus A^\circ=\overline{A}=\{(\frac{n-1}{n},\frac{m-1}{m})|m,n$为正整数$\}\cup\{(1,\frac{m+1}{m})|m$ 为正整数$\}\cup\{(\frac{n-1}{n},1)|n$为正整数$\}\cup\{(1,1)\}$. □

证明A是闭集可以尝试以下想法：(1)证明$A=\overline{A}$或$A'\subseteq A$; (2)证明A^c是开集；(3)证明A是列闭集.

例 2 设A是$\mathbb{R}^n$的子集，证明：*(1)* $(A')'\subseteq A'$; *(2)* A'是闭集.

证 A'是闭集$\Leftrightarrow A'=\overline{A'}\Leftrightarrow A'=A'\cup(A')'\Leftrightarrow(A')'\subseteq A'$. 因此只需证明(1)和(2)中的一个即可. 下面证明(2)，只需证明A'列闭. 任取A'中一个收敛点列$\{X_m\}$, 设$\lim\limits_{m\to\infty}X_m=X_0$, 若$X_0$等于某个$X_m$, 则$X_0\in A'$, 下设$X_m\neq X_0$, $m=1,2,\cdots$. 因为$X_m\in A'$, 所以$B\left(X_m,r_m\right)\cap(A\setminus\{X_m\})\neq\emptyset$, 其中$r_m=\frac{1}{2}|X_m-X_0|>0$. 任意取定一点$Y_m\in B\left(X_m,r_m\right)\cap(A\setminus\{X_m\})$, 则$Y_m\in A$, 由$|Y_m-X_0|\geqslant|X_m-X_0|-|X_m-Y_m|>\frac{1}{2}|X_m-X_0|>0$知$Y_m\neq X_0$, $m=1,2,\cdots$. 再由$|Y_m-X_0|\leqslant|X_m-X_0|+|X_m-Y_m|<\frac{3}{2}|X_m-X_0|$和$\lim\limits_{m\to\infty}X_m=X_0$知$\lim\limits_{m\to\infty}Y_m=X_0$. 因此$X_0\in A'$. 这就证明了$A'$列闭，从而$A'$是闭集. □

例 3 设A和B都是$\mathbb{R}^n$的子集, 求证: 如果$A'\subseteq B\subseteq A$, 则B是闭集.

证 因为$B\subseteq A$, 所以$B'\subseteq A'$. 于是$B'\subseteq B$, 故B是闭集. □

例 4 设A是$\mathbb{R}^m$中的闭集, B是$\mathbb{R}^n$中的闭集，求证: $A\times B$是$\mathbb{R}^{m+n}$中的闭集.

证 任取$A\times B$中的一个收敛点列$\{(X_k,Y_k)\}$, 其中$X_k\in A$, $Y_k\in B$, $k=1,2,\cdots$, 则$\{X_k\}$是A中的收敛点列，$\{Y_k\}$是B中的收敛点列. 由A和B是闭集知A和B是列闭集，从而$\{X_k\}$收敛于A中点X_0, $\{Y_k\}$收敛于B中点Y_0. 因此，$\{(X_k,Y_k)\}$收敛于$A\times B$中点(X_0,Y_0). 由此知$A\times B$是列闭集，故$A\times B$是$\mathbb{R}^{m+n}$中的闭集. □

例 5 判断下列命题是否成立，说明理由.

(1) 设A是$\mathbb{R}^n$的非空子集，如果A中任意基本列的极限仍属于A，则A是闭集.

(2) 设A和B都是$\mathbb{R}^n$的子集，如果A和B都是道路连通集且$A\cap B$非空，则$A\cup B$也是道路连通集.

(3) 设A和B都是$\mathbb{R}^n$中的区域，如果$A\cap B$非空，则$A\cup B$和$A\cap B$也都是$\mathbb{R}^n$中的区域.

(4) 如果$\mathbb{R}^n$的子集A是无限集，则A的任意无限子集都有聚点的充分必要条件是A有界.

(5) 如果A是$\mathbb{R}^n$的非空真子集，则$\partial A\neq\emptyset$.

(6) 如果A是$\mathbb{R}^n$的非空真子集，则必有$A'\neq A^\circ$.

答 (1) 成立. 因为A中任意基本列的极限仍属于A，所以由柯西收敛原理知A中任意收敛点列的极限仍属于A，即A列闭，从而A是闭集.

(2) 成立. 取定一点$P\in A\cap B$, 对任意$X\in A$, $Y\in B$，有A中从X到P的道路$\gamma_1(t)$和B中从P到Y的道路$\gamma_2(t)$. 令$\gamma(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t), & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},\\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2}<t\leqslant 1,\end{cases}$ 则由γ_1, γ_2的连续性以及$\gamma_1(1)=P=\gamma_2(0)$知$\gamma(t)$在$[0,1]$连续. 又$\gamma(0)=X$, $\gamma(1)=Y$, $\gamma(t)\in A\cup B$, $\forall t\in[0,1]$, 故$\gamma(t)$是$A\cup B$中连接X和Y的道路. 因此$A\cup B$是道路连通集.

(3) 不成立. $A\cup B$和$A\cap B$都是$\mathbb{R}^n$中的开集，由(2)知$A\cup B$是道路连通集，故$A\cup B$是区域. 但$A\cap B$未必是区域，例如在$\mathbb{R}^2$中，$A=\{(x,y)|4<x^2+y^2<9\}$, $B=\{(x,y)|-4<x<4,-1<y<1\}$, 则不难看到$A\cap B$不是道路连通集.

(4) 成立. “$\Rightarrow$”. 反证. 若A无界，任取$X_1\in A$, 利用A的无界性可知, 存在$X_2\in A$, 使得

$$|X_2-X_1|\geqslant 1.$$

再由A的无界性可知, 存在X_3, 使得

$$|X_3 - X_2| \geqslant 1, \ \ |X_3 - X_1| \geqslant 1.$$

依此类推, 用归纳法易证, 存在A中的点列$\{X_m\}, m = 1, 2, 3, \cdots$, 使得对于任意$i \neq j$均有

$$|X_i - X_j| \geqslant 1.$$

不难看到$\{X_m | m = 1, 2, \cdots\}$是$A$的无限子集且没有聚点. 矛盾!

"$\Leftarrow$". 设A有界，则对A的任意无限子集B, 取B中无穷多点排成点列$\{X_m\}$, 由Bolzano-Weierstrass定理知$\{X_m\}$有收敛子列$\{X_{m_k}\}$. 设$\xi = \lim\limits_{k \to \infty} X_{m_k}$, 则$\xi$的任何邻域都有$B$中无穷多点. 因此$B$有聚点$\xi$.

(5) 成立. 反证. 若$\partial A = \emptyset$, 则$A^\circ = A \setminus \partial A = A$，故$A$是非空开集. 同理可证$A^c$也是非空开集, 从而$A$既开又闭. 但$A$不是$\emptyset$和$\mathbb{R}^n$, 矛盾!

(6) 不成立. 例如，在$\mathbb{R}^n$中，取A是单点集, 则A'和A°都是空集. □

对于$\mathbb{R}^n$的有界子集A, 我们定义它的直径为

$$d(A) = \sup\{|X - Y| \mid X, Y \in A\}.$$

不难看到，若B是$\mathbb{R}^n$的有界子集，$A \subseteq B$, 则$d(A) \leqslant d(B)$.

例 6 设A是$\mathbb{R}^n$的有界子集, 求证: $d(A) = d(\overline{A})$.

证 因为$A \subseteq \overline{A}$, 所以$d(A) \leqslant d(\overline{A})$. 因为$A$是$\mathbb{R}^n$的有界子集, 所以$\overline{A}$是有界闭集. 由练习题3知存在$X, Y \in \overline{A}$, 使得$d(\overline{A}) = |X - Y|$. A中有收敛于X的点列$\{X_m\}$和收敛于Y的点列$\{Y_m\}$, 从而由练习题3的证明过程知$\lim\limits_{m \to \infty} |X_m - Y_m| = |X - Y|$. 由极限的保序性得$\lim\limits_{m \to \infty} |X_m - Y_m| \leqslant d(A)$, 故$d(\overline{A}) = |X - Y| \leqslant d(A)$. 因此$d(A) = d(\overline{A})$. □

思考 设A是$\mathbb{R}^n$的有界子集, 是否必有$d(A) = d(\partial A)$?

例 7 设$S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_m \supseteq \cdots$, 且每一个$S_m$均是$\mathbb{R}^n$中非空闭集, $\lim\limits_{m\to\infty} d(S_m) = 0$, 求证：存在$\xi \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} S_m = \{\xi\}.$$

证 先证明$\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} S_m \neq \emptyset$. 反证. 若$\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} S_m = \emptyset$, 则$\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} S_m^c = \mathbb{R}^n$, 从而$S_1 \subseteq \bigcup\limits_{m=2}^{\infty} S_m^c$, 即$\{S_m^c\}_{m=2}^{\infty}$是$S_1$的一个开覆盖. 因为$S_1$是紧集，所以有有限子覆盖$\left\{S_{m_k}^c \middle| k = 1, 2, \cdots, K\right\}$. 不妨设$m_1 < m_2 < \cdots < m_K$, 则由$S_1 \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{K} S_{m_k}^c$知$S_1 \cap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{K} S_{m_k}^c\right) = \emptyset$, 即$S_{m_K} = \emptyset$, 矛盾！

然后结合$\lim\limits_{m\to\infty} d(S_m) = 0$即知存在$\xi \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} S_m = \{\xi\}.$$

$\square$

另证 先证明$\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} S_m \neq \emptyset$. 任意取定一点$X_m \in S_m$, 则$\{X_m\}$是$S_1$中的有界点列，由$S_1$有界知$\{X_m\}$有收敛子列$\{X_{m_k}\}$. 设$X_{m_k} \to \xi\ (k \to \infty)$, 则对任意正整数$m$, $\{X_{m_k}\}$除有限项外都在S_m中. 由$S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_m \supseteq \cdots$和$S_m$都是闭集知$\xi \in S_m$, $m = 1, 2, \cdots$. 因此$\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} S_m \neq \emptyset$.

然后结合$\lim\limits_{m\to\infty} d(S_m) = 0$即知存在$\xi \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} S_m = \{\xi\}.$$

$\square$

注 设$S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_m \supseteq \cdots$, 且每一个$S_m$均是$\mathbb{R}^n$中非空有界闭集, 那么

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} S_m \neq \emptyset,$$

如果仅假定每一个S_m都是非空闭集, 结论未必成立. 例如，在$\mathbb{R}^1$中，$S_m = [m, +\infty)$ $(m = 1, 2, \cdots)$是一族满足题设的非空闭集，但$\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} S_m = \emptyset$.

设A是$\mathbb{R}^n$的非空子集, X是$\mathbb{R}^n$中的一个点，点X到集合A的距离是$d(X, A) = \inf\limits_{Y\in A} |X - Y|$.

例 8 设A是$\mathbb{R}^n$中的一个闭集, X是$\mathbb{R}^n$中的一个点，求证存在$Y \in A$, 使得$d(X, A) = |X - Y|$.

证 由$d(X,A)=\inf\limits_{Y\in A}|X-Y|$知存在点列$\{Y_m\}\subseteq A$, 使得$\lim\limits_{m\to\infty}|X-Y_m|=d(X,A)$. 因为收敛数列必有界，所以$\{|X-Y_m|\}$有界. 于是由$|Y_m|\leqslant|X-Y_m|+|X|$知$\{Y_m\}$有界，故$\{Y_m\}$有收敛子列$\{Y_{m_k}\}$. 设$\lim\limits_{k\to\infty}Y_{m_k}=Y$, 则由$A$闭知$Y\in A$. 因为$\lim\limits_{k\to\infty}|Y-Y_{m_k}|=0$, 所以由$\big||X-Y_{m_k}|-|X-Y|\big|\leqslant|Y-Y_{m_k}|$知$\lim\limits_{k\to\infty}|X-Y_{m_k}|=|X-Y|$. 因此结合$\lim\limits_{m\to\infty}|X-Y_m|=d(X,A)$就得到$d(X,A)=|X-Y|$. □

注 设A是$\mathbb{R}^n$的非空子集, X是$\mathbb{R}^n$中的一个点，不难证明：$X\in\overline{A}$当且仅当$d(X,A)=0$, $X\in A'$当且仅当$d(X,A\setminus\{X\})=0$.

空集与A本身是A的相对开且相对闭的子集, 如果A的相对开且相对闭的子集只有这两个, 则称A是$\mathbb{R}^n$中的连通集. 也就是说若A是连通的, 则A不能分成两个非空的不相交的相对开子集之并(请读者自己证明这两个说法的等价性). 因此，A不连通当且仅当存在$\mathbb{R}^n$中的开集O_1, O_2, 使得$A\cap O_1\neq\emptyset$, $A\cap O_2\neq\emptyset$, $A\cap O_1\cap O_2=\emptyset$, $(A\cap O_1)\cup(A\cap O_2)=A$.

例 9 设A是$\mathbb{R}$的非空子集，证明：A是连通集当且仅当A是区间或单点集.

证 “$\Rightarrow$”. 反证. 若A不是区间或单点集，则存在$a,b\in A$和$c\notin A$, 使得$a<c<b$. 记$O_1=(-\infty,c)$, $O_2=(c,+\infty)$, 由$A\cap O_1\neq\emptyset$, $A\cap O_2\neq\emptyset$, $A\cap O_1\cap O_2=\emptyset$, $(A\cap O_1)\cup(A\cap O_2)=A$知$A$不连通. 矛盾！

“$\Leftarrow$”. 单点集显然是连通集，由区间是道路连通集知区间也是连通集. □

例 10 设D是闭区域，证明：D°是区域.

证 反证. 若D°不是区域，则由D°开知D°不连通. 因此存在开集O_1, O_2, 使得$O_1\neq\emptyset$, $O_2\neq\emptyset$, $O_1\cap O_2=\emptyset$, $D^\circ=O_1\cup O_2$. 因为D是闭区域，所以存在区域U, 使得$D=\overline{U}$. 由$U\subseteq D^\circ$和U连通知$U\subseteq O_1$或$U\subseteq O_2$ (否则，$U\cap O_1\neq\emptyset$, $U\cap O_2\neq\emptyset$, $U\cap O_1\cap O_2=\emptyset$, $U=(U\cap O_1)\cup(U\cap O_2)$, 与$U$连通矛盾). 不妨设$U\subseteq O_1$, 则$D=\overline{U}\subseteq\overline{O_1}$. 注意到$\overline{O_1}\subseteq O_2^c$, 故$D\cap O_2=\emptyset$, 与$O_2\subseteq D^\circ$矛盾！ □

例 11 设A和B都是R^n的子集且A是开集，证明$A\cap\overline{B}$是$\overline{A\cap B}$的子集.

证 任取$x\in A\cap B$，任取x的领域U，由于A是开集，$U\cap A$也是x 的领域，

由$x\in\overline{B}$知

$$(U\cap A)\cap B\neq\varnothing,$$

即

$$U\cap(A\cap B)\neq\varnothing,$$

所以由触点的定义，$x\in\bar{(}A\cap B)$，因此$A\cap\overline{B}\subset\bar{(}A\cap B)$. □

例 12 证明: 如果$\mathbb{R}^n$的子集A是无限集, 则A的任意无限子集都有聚点当且仅当A是有界集.

证 "$\Leftarrow$". 任取A的无限子集B, 则B中有无穷点列$\{X_m\}$满足X_m两两不同, 由A是有界集知$\{X_m\}$是有界点列. 由波尔查诺-魏尔斯特拉斯引理可知$\{X_m\}$有在$\mathbb{R}^n$中收敛的子序列$\{X_{m_k}\}$, 记$X_0=\lim\limits_{k\to\infty}X_{m_k}$, 则由$X_m$两两不同知$X_0$是$B$的聚点. 因此，$A$的任意无限子集都有聚点.

"$\Rightarrow$". 反证. 若不然，则A是无界集. 任取$X_1\in A$, 利用A的无界性可知, 存在$X_2\in A$, 使得

$$|X_2-X_1|\geqslant 1.$$

再由A的无界性可知, 存在X_3, 使得

$$|X_3-X_2|\geqslant 1,\ \ |X_3-X_1|\geqslant 1.$$

依此类推, 用归纳法易证, 存在A中的点列$\{X_m\},m=1,2,3,\cdots$, 使得对于任意$i\neq j$均有

$$|X_i-X_j|\geqslant 1.$$

令$B=\big\{X_m\big|m=1,2,\cdots\big\}$, 则$B$是$A$的无限子集. 对任意点$P\in\mathbb{R}^n$, 以$P$为中心，$\frac{1}{2}$为半径的开球中至多只含$B$中1个元素，故$P$不是$B$的聚点. 因此，$A$的无限子集$B$没有聚点，矛盾！ □

例 13 设S是$\mathbb{R}^n$的子集，S的内部与S的外部都非空. 证明：对S的任何内点P和S的任何外点Q, 存在$t \in (0,1)$, 使得$(1-t)P+tQ$是S的边界点.

证 反证. 若不然，则存在S的内点P和外点Q, 使得对任意$t \in (0,1)$, 点$(1-t)P+tQ$不是S的边界点，从而对任意$t \in [0,1]$, 点$(1-t)P+tQ$是S的内点或者外点. 令$a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $P_1 = (1-a_1)P + a_1Q$, $Q_1 = (1-b_1)P + b_1Q$, 考虑点$\dfrac{P_1+Q_1}{2}$. 若$\dfrac{P_1+Q_1}{2}$是S的内点，则令$a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 = b_1$; 若$\dfrac{P_1+Q_1}{2}$是S的外点，则令$a_2 = a_1$, $b_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$. 令$P_2 = (1-a_2)P + a_2Q$, $Q_2 = (1-b_2)P + b_2Q$, 考虑点$\dfrac{P_2+Q_2}{2}$. 若$\dfrac{P_2+Q_2}{2}$是S的内点，则令$a_3 = \dfrac{a_2+b_2}{2}$, $b_3 = b_2$; 若$\dfrac{P_2+Q_2}{2}$是S的外点，则令$a_3 = a_2$, $b_3 = \dfrac{a_2+b_2}{2}$. 一般地，设$a_1, a_2, \cdots, a_n$, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 已取好，令$P_n = (1-a_n)P + a_nQ$, $Q_n = (1-b_n)P + b_nQ$, 考虑点$\dfrac{P_n+Q_n}{2}$. 若$\dfrac{P_n+Q_n}{2}$是S的内点，则令$a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = b_n$; 若$\dfrac{P_n+Q_n}{2}$是S的外点，则令$a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$. 一直这样做下去，就得到闭区间的序列$\{[a_n, b_n]\}$, 满足

(i) $[0,1] = [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$;

(ii) $b_n - a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \to 0\ (n \to \infty)$;

(iii) P_n是S的内点，Q_n是S的外点，其中$P_n = (1-a_n)P + a_nQ$, $Q_n = (1-b_n)P + b_nQ$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

由区间套定理，有唯一的$\xi \in [0,1]$使得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$. 记$K = (1-\xi)P + \xi Q$, 则$K$是$S$的内点或者外点，且$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} Q_n = K$. 对$K$的任意邻域$B(K)$, 都存在正整数$N$, 使得当$n > N$时，$P_n$和$Q_n$都属于$B(K)$. 又$P_n \in S$, $Q_n \in S^c$, $n = 1, 2, \cdots$, 故对于K的任意邻域$B(K)$, 有$B(K) \cap S \neq \emptyset$且$B(K) \cap S^c \neq \emptyset$. 按定义知$K$是$S$的边界点，与$K$是$S$的内点或者外点矛盾！ □

例 14 设A和B都是$\mathbb{R}$的非空子集. 证明：如果A和B都是紧集，那么$A \times B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in A, y \in B\}$是$\mathbb{R}^2$中的紧集.

证 因为A和B都是紧集，所以A和B都是列紧集. 任取点列$\{(x_m, y_m)\} \subseteq A \times B$, 则$\{x_m\} \subseteq$

A, $\{y_m\} \subseteq B$. 由A列紧知$\{x_m\}$有收敛于A中点的子列$\{x_{m_k}\}$, 设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = a$. 由$B$列紧知$\{y_{m_k}\}$有收敛于$B$中点的子列$\{y_{m_{k_l}}\}$, 设$\lim\limits_{l\to\infty} y_{m_{k_l}} = b$. 于是$\{(x_m, y_m)\}$有子列$\{(x_{m_{k_l}}, y_{m_{k_l}})\}$收敛于$(a,b) \in A \times B$, 故$A \times B$是$\mathbb{R}^2$中的列紧集，从而$A \times B$是$\mathbb{R}^2$中的紧集. □

10.2 多元函数的极限与连续

若(x,y)沿某条曲线趋于(x_0,y_0)时$f(x,y)$的极限不存在或者(x,y)沿两条曲线趋于(x_0,y_0)时$f(x,y)$的极限不相等，则二元极限不存在.

此外，若两个累次极限都存在但不相等，则二元极限不存在.

求多元函数极限比求一元函数的极限要复杂得多, 通常要应用不等式的性质, 两边夹定理等, 把问题转化为一个一元函数的极限.

例 1 判断下列极限是否存在, 如果存在并求其值.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^x$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\ y\to0^+}} x^y$.

解 (1) 因为当$x>0$, $y>0$时有

$$0 \leqslant \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^x \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

所以由两边夹定理得 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^x = 0$.

(2) 因为(x,y)沿$y=0$趋于$(0,0)$时$f(x,y) = \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y}$的极限为$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x^3)}{x^2} = 0$, (x,y)沿$y = x^3 - x^2$趋于$(0,0)$时$f(x,y)$的极限为$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x^3+(x^3-x^2)^3)}{x^3} = 1$, 所以二元极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y}$不存在.

(3) 由 $\lim\limits_{x\to0^+} x^y = 0$得 $\lim\limits_{y\to0^+} \lim\limits_{x\to0^+} x^y = 0$, 由 $\lim\limits_{y\to0^+} x^y = 1$得 $\lim\limits_{x\to0^+} \lim\limits_{y\to0^+} x^y = 1$. 因为两个累次极限都存在但不相等，所以二元极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\ y\to0^+}} x^y$不存在. □

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

这个例子说明$f(x,y)$分别对x,y连续不能保证$f(x,y)$的连续性. 事实上，$f(x,y)$在$(0,0)$点不连续.

例 2 设$(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)$定义在(x_0,y_0)的一个开邻域$U=\{(x,y)|\ |x-x_0|<\eta,|y-y_0|<\eta\}$内且分别对每一自变量$x$与$y$是一元连续函数，$f(x,y)$关于$x,y$中的一个是单调的, 求证: $f(x,y)$作为二元函数在(x_0,y_0)连续.

证 不妨设对任意固定的y, $f(x,y)$是x的单调函数. 对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta_1>0$, 当$|x-x_0|\leqslant\delta_1$时，有$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$. 特别地，有$|f(x_0-\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$, $|f(x_0+\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$. 对上述的$\varepsilon$和$\delta_1$, 存在$\delta_2>0$, 当$|y-y_0|<\delta_2$时，有$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0-\delta_1,y_0)|<\varepsilon$, $|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0+\delta_1,y_0)|<\varepsilon$. 于是$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0,y_0)|<2\varepsilon$, $|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0,y_0)|<2\varepsilon$. 令$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$, 当$|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$时，由单调性知$f(x,y)$的值介于$f(x_0-\delta_1,y)$与$f(x_0+\delta_1,y)$之间，从而$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<2\varepsilon$, 按定义知$f(x,y)$作为二元函数在$(x_0,y_0)$连续. □

例 3 设$(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)$定义在(x_0,y_0)的一个开邻域$U=\{(x,y)|\ |x-x_0|<\eta,|y-y_0|<\eta\}$内且分别对每一自变量$x$与$y$是一元连续函数，$f(x,y)$关于一个变量的连续性对另一个变量是一致的, 例如关于x的连续性对于y一致, 即对于任何$\tilde{x}\in(x_0-\eta,x_0+\eta)$和任给的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得当$x\in(x_0-\eta,x_0+\eta)$且$|x-\tilde{x}|<\delta$时, 对所有的$y\in(y_0-\eta,y_0+\eta)$有

$$|f(x,y)-f(\tilde{x},y)|<\varepsilon.$$

求证: $f(x,y)$作为二元函数在(x_0,y_0)连续.

证 因为$f(x,y)$对y是一元连续函数，所以对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta_1>0$, 当$|y-y_0|<\delta_1$时，有$|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$. 又因为$f(x,y)$关于$x$的连续性对于$y$一致，所以对上述的$\varepsilon$和$\delta_1$,

存在$\delta_2 > 0$, 当$|x - x_0| < \delta_2$时, 对所有的$y \in (y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1)$, 有$|f(x,y) - f(x_0,y)| < \varepsilon$. 令$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, 当$|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$时，就有$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leqslant |f(x,y) - f(x_0,y)| + |f(x_0,y) - f(x_0,y_0)| < 2\varepsilon$. 按定义知$f(x,y)$作为二元函数在$(x_0,y_0)$连续. □

例 4 设$f(x,y)$是$\mathbb{R}^2$上的函数，对任意实数y_0, $f(x,y_0)$作为x的函数在$(-\infty,+\infty)$连续，对任意实数x_0, $f(x_0,y)$作为y的函数在$(-\infty,+\infty)$连续，对任意$\mathbb{R}^2$中的紧集K, $f(K)$是$\mathbb{R}$中的紧集，证明：$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上连续.

证 不失一般性，只需证明$f(x,y)$在$(0,0)$连续((x_0,y_0)处连续的一般情形可以通过平移变换归为$(0,0)$处连续的情形), 并且不妨设$f(0,0)=0$(否则用$f(x,y)-f(0,0)$代替$f(x,y)$来讨论). 反证. 若$f(x,y)$在$(0,0)$处不连续，则存在$\varepsilon_0 > 0$, 存在$\{(x_m,y_m)\}$满足$(x_m,y_m) \to (0,0)$ $(m \to \infty)$且$|f(x_m,y_m)| \geqslant \varepsilon_0$. 因为$f(x,0)$作为$x$的函数在$(-\infty,+\infty)$连续，所以对上述的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$|x| < \delta$时，就有$|f(x,0)| < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$. 由$(x_m,y_m) \to (0,0)$ $(m \to \infty)$知$\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \lim\limits_{m\to\infty} y_m = 0$. 于是对上述的$\delta > 0$, 存在正整数$M$, 当$m > M$时，就有$|x_m| < \delta$. 因此当$m > M$时，就有$|f(x_m,0)| < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$. 因为当$m > M$时，$f(x_m,y)$作为$y$的函数在$(-\infty,+\infty)$连续，$|f(x_m,0)| < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$, $|f(x_m,y_m)| \geqslant \varepsilon_0$, 所以由介值定理知存在$z_m$介于$y_m$与0之间，使得$f(x_m,z_m) = \dfrac{m\varepsilon_0}{m+1}$. 由两边夹定理知$\lim\limits_{m\to\infty} z_m = 0$, 故$(x_m,z_m) \to (0,0)$ $(m \to \infty)$. 令

$$K = \{(x_m,z_m)|m > M\} \cup \{(0,0)\},$$

则K是$\mathbb{R}$中的有界闭集，从而K是$\mathbb{R}$中的紧集，因此$f(K)$是$\mathbb{R}$中的紧集. 不难看到

$$f(K) = \left\{\frac{m\varepsilon_0}{m+1}\middle| m > M\right\} \cup \{0\},$$

ε_0是$f(K)$的聚点且$\varepsilon_0 \notin f(K)$, 故$f(K)$不是闭集，与$f(K)$是$\mathbb{R}$中的紧集矛盾！ □

例 5 设$D = (-\infty,+\infty) \times [0,1]$, 函数$f(x,y)$在$D$上一致连续，对任意实数$x$, 令$g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$, 求证：$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证 因为函数$f(x,y)$在D上一致连续，所以对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 对任何$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$, 只要$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta$, 就有$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$. 于是对任何实数$x_1$, x_2, 当$|x_1-x_2|<\delta$时，对任何$y\in[0,1]$, 都有$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|<\varepsilon$. 因此，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有

$$\begin{aligned}|g(x_1)-g(x_2)|&=\left|\int_0^1 f(x_1,y)\mathrm{d}y-\int_0^1 f(x_2,y)\mathrm{d}y\right|=\left|\int_0^1[f(x_1,y)-f(x_2,y)]\mathrm{d}y\right|\\ &\leqslant \int_0^1|f(x_1,y)-f(x_2,y)|\mathrm{d}y<\int_0^1\varepsilon\mathrm{d}y=\varepsilon.\end{aligned}$$

按定义知$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续. □

10.3 连续函数的重要性质

应用有界闭集上连续函数的性质与一元函数的情形完全类似.

例 1 设函数$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上连续，$\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)$存在. 证明：函数$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上一致连续.

证 设$\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=a$, 则对任意$\varepsilon>0$, 存在$r>0$, 当$x^2+y^2>r^2$时，有$|f(x,y)-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 由$A=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant(r+1)^2\right\}$是紧集知$f$在$A$上一致连续，从而对上述的$\varepsilon>0$, 存在$\delta_1>0$, 当$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A$且$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta_1$时，就有$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$. 令$\delta=\min\{\delta_1,1\}$, 则当$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta$时，要么$(x_1,y_1)$, (x_2,y_2)都在A中，从而$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$；要么$(x_1,y_1)$, (x_2,y_2)至少有一个不在A中，不妨设(x_1,y_1)不在A中，那么$x_1^2+y_1^2>(r+1)^2$, 故由$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<1$知$x_2^2+y_2^2>r^2$, 从而$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<|f(x_1,y_1)-a|+|a-f(x_2,y_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 按一致连续的定义知$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上一致连续. □

注 由本题就不难解决(A)组的第7题:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在$\mathbb{R}^2$上一致连续.应用有界闭集上连续函数的性质与一元函数的情形完全类似.

例 2 设$D_1 \subseteq D$且D的每个点均是D_1的聚点. 设$f_1(X)$在D_1一致连续，求证: 存在D上唯一的连续函数$f(X)$, 使得

$$f(X) = f_1(X), \quad \forall X \in D_1,$$

且$f(X)$在D上一致连续.

证 任取$X_0 \in D$, 由10.2节例3的结论知$\lim\limits_{X \to X_0} f_1(X)$存在，令$f(X_0) = \lim\limits_{X \to X_0} f_1(X)$. 对任意$X_0 \in D_1$, 有$f(X_0) = \lim\limits_{X \to X_0} f_1(X) = f_1(X_0)$. 下面证明$f(X)$在$D$上一致连续. 因为$f_1(X)$在$D_1$一致连续，所以对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$X, Y \in D_1$, $|X - Y| < \delta$时，有$|f_1(X) - f_1(Y)| < \varepsilon$. 对任意$P, Q \in D$, $|P - Q| < \frac{\delta}{2}$, 由$P$, Q是D_1的聚点以及$f(P) = \lim\limits_{X \to P} f_1(X)$, $f(Q) = \lim\limits_{X \to Q} f_1(X)$, 知存在$X, Y \in D_1$, 使得$|P - X| < \frac{\delta}{4}$且$|f(P) - f_1(X)| < \varepsilon$, $|Q - Y| < \frac{\delta}{4}$且$|f(Q) - f_1(Y)| < \varepsilon$. 因此$|X - Y| \leqslant |X - P| + |P - Q| + |Q - Y| < \delta$, 从而有

$$|f(P) - f(Q)| \leqslant |f(P) - f_1(X)| + |f_1(X) - f_1(Y)| + |f_1(Y) - f(Q)| < 3\varepsilon.$$

按定义知$f(X)$在D上一致连续.

$f(X)$的唯一性由其连续性和极限的唯一性就可以得到. □

注 由练习题4可知D上的一致连续函数可以唯一地延拓为$\overline{D}$上的一致连续函数. 由此不难解决(A)组的第10题: 设$f(X)$是$\mathbb{R}^n$中有界集D上的一致连续函数, 求证: $f(X)$ 在D上有界.

1934年E. J. McShane在“Extension of range of functions”一文中证明了D上有界的一致连续函数可以延拓为$\mathbb{R}^n$上的一致连续函数且保持函数的界不变.

例 3 设A和B都是$\mathbb{R}$中的有界闭集，$f(x,y)$在$A \times B$上连续，$m(x) = \sup\limits_{y \in B} f(x,y)$, $x \in A$. 证明：$m(x)$在A上一致连续.

证 因为A和B都是$\mathbb{R}$中的有界闭集，所以A和B都是紧集，故由上题知$A \times B$是$\mathbb{R}^2$中的紧集. 因为$f(x,y)$在$A \times B$上连续，所以由康托尔定理知$f(x,y)$在$A \times B$上一致连续，即对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B$且$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$时，就

有$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$. 对任意$x_1,x_2\in A$, $|x_1-x_2|<\delta$, 有$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|<\varepsilon$, $\forall y\in B$. 由$f(x_1,y)$作为y的函数在B上连续和B是有界闭集知$f(x_1,y)$在B上取得最大值，故存在$y_1\in B$, 使得$f(x_1,y_1)=m(x_1)$. 于是有

$$m(x_2)\geqslant f(x_2,y_1)>f(x_1,y_1)-\varepsilon=m(x_1)-\varepsilon.$$

同理可得

$$m(x_1)>m(x_2)-\varepsilon.$$

因此对任意$x_1,x_2\in A$, $|x_1-x_2|<\delta$, 有

$$|m(x_1)-m(x_2)|<\varepsilon.$$

按定义知$m(x)$在A上一致连续. □

10.4 向量值函数(映射)及其连续性

与连续函数的情形没有本质差别，只是更加一般化了.

例 1 设$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是连续的向量值函数.

(1) 求证: 对任意$\mathbb{R}^n$的子集D, 都有$F(\overline{D})\subseteq\overline{F(D)}$;

(2) 举例说明$F(\overline{D})=\overline{F(D)}$未必成立;

(3) 对于$F(D^\circ)$与$(F(D))^\circ$, 有类似于(1)的结果吗？

证 (1) 任取$X_0\in\overline{D}$, 则存在$\{X_m\}\subseteq D$, 使得$\lim\limits_{m\to\infty}X_m=X_0$. 因为$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是连续的向量值函数，所以$\lim\limits_{m\to\infty}F(X_m)=F(X_0)$. 因此$F(X_0)\in\overline{F(D)}$, 由$X_0$的任意性知$F(\overline{D})\subseteq\overline{F(D)}$.

(2) 例如，取$n=m=1$, 令$F(x)=\mathrm{e}^x$, $D=(-\infty,+\infty)$, 则$F(\overline{D})=(0,+\infty)\neq[0,+\infty)=\overline{F(D)}$.

(3) 对于$F(D^\circ)$与$(F(D))^\circ$, 没有类似于(1)的结果. 例如，取$n=m=1$, 令$F(x)=x^2$, 则

对$D_1=(-1,1)$, 有$F(D_1^\circ)=[0,1)\supset(0,1)=(F(D_1))^\circ$; 对$D_2=((-1,0)\setminus Q)\cup((0,1)\cap Q)$, 有$F(D_2^\circ)=\emptyset\subset(0,1)=(F(D_2))^\circ$. $\square$

例 2 设A和B都是$\mathbb{R}$的非空子集，$A\times B$是$\mathbb{R}^2$中的紧集，$f(x,y)$在$A\times B$上连续.

(1) 求证: A和B都是$\mathbb{R}$中的紧集.

(2) 令$m(x)=\max\limits_{y\in B}f(x,y)$, $x\in A$, 求证：$m(x)$在A上一致连续.

(3) 求证：$\max\limits_{x\in A}m(x)=\max\limits_{(x,y)\in A\times B}f(x,y)$.

证 (1) 令$\varphi(x,y)=x$, $(x,y)\in A\times B$, 则由初等函数的连续性知φ在$A\times B$上连续. 因为$\varphi(A\times B)=A$, 所以根据连续映射把紧集映为紧集知A是$\mathbb{R}$中的紧集. 同理可证B是$\mathbb{R}$中的紧集.

(2) 因为$f(x,y)$在$A\times B$上连续，所以由康托尔定理知$f(x,y)$在$A\times B$上一致连续，即对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A\times B$且$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta$时，就有$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$. 对任意$x_1,x_2\in A$, $|x_1-x_2|<\delta$, 有$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|<\varepsilon$, $\forall y\in B$. 由$f(x_1,y)$作为y的函数在B上连续和B是有界闭集知$f(x_1,y)$在B上取得最大值，故存在$y_1\in B$, 使得$f(x_1,y_1)=m(x_1)$. 于是有

$$m(x_2)\geqslant f(x_2,y_1)>f(x_1,y_1)-\varepsilon=m(x_1)-\varepsilon.$$

同理可得

$$m(x_1)>m(x_2)-\varepsilon.$$

因此对任意$x_1,x_2\in A$, $|x_1-x_2|<\delta$, 有

$$|m(x_1)-m(x_2)|<\varepsilon.$$

按定义知$m(x)$在A上一致连续.

(3) 一方面，易见对任意$x\in A$, 有$m(x)=\max\limits_{y\in B}f(x,y)\leqslant\max\limits_{(x,y)\in A\times B}f(x,y)$, 故$\max\limits_{x\in A}m(x)\leqslant\max\limits_{(x,y)\in A\times B}f(x,y)$; 另一方面，由$A\times B$是$\mathbb{R}^2$中的紧集和$f(x,y)$在$A\times B$上连续知存在$(a,b)\in$

$A \times B$, 使得$f(a,b) = \max\limits_{(x,y)\in A\times B} f(x,y)$, 从而

$$\max_{x\in A} m(x) \geqslant m(a) \geqslant f(a,b) = \max_{(x,y)\in A\times B} f(x,y).$$

合起来即得$\max\limits_{x\in A} m(x) = \max\limits_{(x,y)\in A\times B} f(x,y)$. □

例 3 设$F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$是连续映射，存在常数$L>0$，使得对任何$X, Y \in \mathbb{R}^n$, 有$|F(X) - F(Y)| \geqslant L|X-Y|$, 求证：对$\mathbb{R}^n$中的任意紧集$K$, 其完全原像$F^{-1}(K)$也是$\mathbb{R}^n$中的紧集.

证 只需证明$F^{-1}(K)$是$\mathbb{R}^n$中的列紧集. 任取点列$\{X_m\} \subseteq F^{-1}(K)$, 令$Y_m = F(X_m)$, 则$Y_m \in K$. 因为$K$是$\mathbb{R}^n$中的紧集，所以$K$是$\mathbb{R}^n$中的列紧集. 于是$\{Y_m\}$有收敛于$K$中点$Y_0$的子列$\{Y_{m_k}\}$. 因为$\{Y_{m_k}\}$收敛，所以$\{Y_{m_k}\}$是柯西列，从而对任意$\varepsilon>0$, 存在正整数$K$, 当$k>K$, $l>K$时，有$|Y_{m_k} - Y_{m_l}| < \varepsilon$, 即$|F(X_{m_k}) - F(X_{m_l})| < \varepsilon$. 因为对任何$X, Y\in\mathbb{R}^n$, 有$|F(X)-F(Y)| \geqslant L|X-Y|$, 所以当$k>K$, $l>K$时，有

$$|X_{m_k} - X_{m_l}| \leqslant \frac{1}{L}\left|F(X_{m_k}) - F(X_{m_l})\right| < \frac{\varepsilon}{L}.$$

故$\{X_{m_k}\}$是柯西列，由柯西收敛原理知$\{X_{m_k}\}$收敛. 设$\lim\limits_{k\to\infty} X_{m_k} = X_0$, 则由$F$的连续性得$\lim\limits_{k\to\infty} F(X_{m_k}) = F(X_0)$, 即$\lim\limits_{k\to\infty} Y_{m_k} = F(X_0)$. 因此$F(X_0) = Y_0$, 再由$Y_0\in K$知$X_0 \in F^{-1}(K)$. 于是$\{X_m\}$有收敛于$F^{-1}(K)$中点$X_0$的子列$\{X_{m_k}\}$, 按定义知$F^{-1}(K)$是$\mathbb{R}^n$中的列紧集. □

例 4 设$B = \left\{X\in\mathbb{R}^n \middle| |X|<1\right\}$, $F\colon B\to B$是连续映射，对任意$X\in B\setminus\{O\}$, 有$|F(X)| < |X|$. 任意取定$X_1\in B$, 令$X_{k+1} = F(X_k)$, $k=1,2,\cdots$. 证明：$\lim\limits_{k\to\infty} X_k = O$.

证 因为对任意$X\in B\setminus\{O\}$, 有$|F(X)|<|X|$, 所以由两边夹定理知$\lim\limits_{X\to O}|F(X)| = 0$. 又$F\colon B\to B$是连续映射，故$F(O) = \lim\limits_{X\to O} F(X) = O$. 若某个$X_k = O$, 则后面的项全为$O$, 从而$\lim\limits_{k\to\infty} X_k = O$. 下面设$X_k \neq O$, $k=1,2,\cdots$. 因为$|X_{k+1}| = |F(X_k)| < |X_k|$, $k=1,2,\cdots$, 所以$\{|X_k|\}$严格递减. 又$\{|X_k|\}$有下界0, 故由单调收敛定理知$\lim\limits_{k\to\infty}|X_k|$存在, 记$r = \lim\limits_{k\to\infty}|X_k|$. 由波尔查诺-魏尔斯特拉斯引理知$\{X_k\}$有收敛的子序列$\{X_{k_l}\}$, 记$P = \lim\limits_{l\to\infty} X_{k_l} \in B$, 则有

$$|P| = \left|\lim_{l\to\infty} X_{k_l}\right| = \lim_{l\to\infty}|X_{k_l}| = r = \lim_{l\to\infty}|X_{k_l+1}| = \lim_{l\to\infty}|F(X_{k_l})| = \left|\lim_{l\to\infty} F(X_{k_l})\right| = |F(P)|.$$

因此，$P=O$, 从而$r=0$, 故$\lim\limits_{k\to\infty}X_k=O$. $\square$

例 5 设D是$\mathbb{R}^n$中的开集，$f:D\to\mathbb{R}^n$是从D到$\mathbb{R}^n$的双射，f在D上一致连续，f^{-1}在$\mathbb{R}^n$上连续，证明：$D=\mathbb{R}^n$.

证 因为$\mathbb{R}^n$中既开又闭的集合只有$\mathbb{R}^n$和空集，所以由D是$\mathbb{R}^n$中的非空开集知为证$D=\mathbb{R}^n$，只需证D是闭集，又只需证D列闭. D列闭的证明如下：任取D中的收敛子列$\{X_m\}$，设$\lim\limits_{m\to\infty}X_m=X_0$, 则$\{X_m\}$是柯西列. 因为$f$在$D$上一致连续，所以对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$X,Y\in D$, $|X-Y|<\delta$时，有$|f(X)-f(Y)|<\varepsilon$. 由$\{X_m\}$是柯西列知对上述的$\delta>0$, 存在正整数M, 当$m>M$, $k>M$时，就有$|X_m-X_k|<\delta$. 于是当$m>M$, $k>M$时，就有$|f(X_m)-f(X_k)|<\varepsilon$, 故$\{f(X_m)\}$也是柯西列. 由柯西收敛原理知$\{f(X_m)\}$收敛，设$\lim\limits_{m\to\infty}f(X_m)=Y_0$, 则由$f:D\to\mathbb{R}^n$是从$D$到$\mathbb{R}^n$的双射，$f^{-1}$在$\mathbb{R}^n$上连续得

$$f^{-1}(Y_0)=f^{-1}\left(\lim_{m\to\infty}f(X_m)\right)=\lim_{m\to\infty}f^{-1}(f(X_m))=\lim_{m\to\infty}X_m=X_0.$$

因此$X_0\in D$. 这就证明了D列闭. $\square$

例 6 设$F\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是连续单射. 证明：$F$是闭映射（即$F$把$\mathbb{R}^n$中的闭集映为$\mathbb{R}^m$中的闭集）当且仅当对$\mathbb{R}^m$中的任意紧集$K$, $F^{-1}(K)$是$\mathbb{R}^n$中的紧集.

证 “$\Leftarrow$”. 设对$\mathbb{R}^m$中的任意紧集K, $F^{-1}(K)$是$\mathbb{R}^n$中的紧集，下证F是闭映射. 任取$\mathbb{R}^n$中的闭集A, 任取收敛点列$\{Y_k\}\subseteq F(A)$, 由F是单射知存在唯一的$X_k\in A$, 使得$Y_k=F(X_k)$. 记$\lim\limits_{k\to\infty}Y_k=Y_0$, 令$K=\big\{Y_k\big|k=0,1,2,\cdots\big\}$, 则$K$是$\mathbb{R}^m$中的紧集，从而$F^{-1}(K)$是$\mathbb{R}^n$中的紧集. 因为$\{X_k\}\subseteq F^{-1}(K)$, 所以$\{X_k\}$有收敛子列$\{X_{k_l}\}$, 将其极限记为$X_0$, 由$A$是闭集知$X_0\in A$. 于是由$F$连续知

$$Y_0=\lim_{l\to\infty}Y_{k_l}=\lim_{l\to\infty}F(X_{k_l})=F(X_0)\in F(A).$$

故$F(A)$是$\mathbb{R}^m$中的列闭集，从而$F(A)$是$\mathbb{R}^m$中的闭集. 按定义知F是闭映射.

“$\Rightarrow$”. 设F是闭映射，任取$\mathbb{R}^m$中的紧集K, 下证$F^{-1}(K)$是$\mathbb{R}^n$中的紧集. 令$B = F(\mathbb{R}^n)$, 则B是$\mathbb{R}^m$中的闭集. 由$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是单射知$F$有逆映射$G : B \to \mathbb{R}^n$. 任取$\mathbb{R}^n$中的闭集$A$, 由$G^{-1}(A) = F(A)$以及$F(A)$是$\mathbb{R}^m$中的闭集可知$G^{-1}(A)$是$B$的相对闭子集，从而$G$是连续映射. 由$K$是$\mathbb{R}^m$中的紧集以及$B$是$\mathbb{R}^m$中的闭集知$K \cap B$是$\mathbb{R}^m$中的紧集, 因此，$F^{-1}(K) = F^{-1}(K \cap B) = G(K \cap B)$是$\mathbb{R}^n$中的紧集. □