线性空间

黄利兵

数学科学学院

2023 年 2 月 27 日

主要内容

线性空间的定义

回顾前面讨论过的三种对象: 多项式, 矩阵及向量. 每个对象的元素之间有加法, 每个对象的元素与某个数域的数之间有乘法. 将这两种运算的共同规律抽象出来, 有 8 条是最基本的, 构成了 “线性空间” 这一最重要最基本的概念.

设 P 为数域, V 为非空集合. 对于 V 中的任何两个元素 α, β, 有唯一的 V 中元素与它们对应, 称为 α 与 β 的和, 记为 $\alpha+\beta$, 即在 V 中定义了加法. 又对 P 中的任一个数 k 与 V 中任一个元素 α 有唯一的 V 中元素与它们对应, 叫做 k 与 α 的积, 记为 $k\alpha$, 即定义了 V 的元素与数的乘积 (简称纯量积), 该运算称为纯量乘法或者数乘. 如果这两种运算满足下面 8 个条件:

(1) 加法交换律 $\alpha+\beta=\beta+\alpha, \forall \alpha, \beta \in V$;

(2) 加法结合律 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma), \forall \alpha, \beta, \gamma \in V$;

(3) $\exists \mathbf{0} \in V$, s.t. $\mathbf{0}+\alpha=\alpha, \forall \alpha \in V$;

(4) $\forall \alpha \in V, \exists -\alpha \in V$, s.t. $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$;

(5) $1 \cdot \alpha=\alpha, \forall \alpha \in V$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha, \forall k, l \in P, \alpha \in V$;

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha, \forall k, l \in P, \alpha \in V$;

(8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta, \forall k \in P, \alpha, \beta \in V$;

则称 V 是数域 P 上的线性空间或向量空间，V 中的元素称为向量，P 叫做 V 的基域.

线性空间的性质

- 满足条件 (3) 的元素是唯一的.
  事实上, 若还有 $\mathbf{0}' \in V$ 也满足 $\mathbf{0}' + \alpha = \alpha, \forall \alpha \in V$, 则有
  $$\mathbf{0}' = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$
  我们称 $\mathbf{0}$ 为 V 的零元素或零向量.
- 对于 $\forall \alpha \in V$, 满足条件 (4) 的元素是唯一的. 称 $-\alpha$ 为 α 的负元素或者负向量.
  事实上, 若 $\beta \in V$ 满足 $\alpha + \beta = 0$, 则
  $$\beta = \mathbf{0} + \beta = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = (-\alpha) + (\alpha + \beta) = -\alpha.$$
- 消去律：若 $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, 则 $\beta = \gamma$.
  $$\beta = \mathbf{0} + \beta = (-\alpha) + \alpha + \beta = (-\alpha) + \alpha + \gamma = \gamma.$$

线性空间的性质 (二)

- $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$; $0\alpha=\mathbf{0}$; $(-1)\alpha=-\alpha$. 其中 $k\in P$, $\alpha\in V$.
  因为 $\mathbf{0}+k\mathbf{0}=k\mathbf{0}=k(\mathbf{0}+\mathbf{0})=k\mathbf{0}+k\mathbf{0}$, 故 $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$.
  因为 $\mathbf{0}+0\alpha=0\alpha=(0+0)\alpha=0\alpha+0\alpha$, 故 $0\alpha=\mathbf{0}$.
  因为 $\alpha+(-1)\alpha=(1+(-1))\alpha=0\alpha=\mathbf{0}=\alpha+(-\alpha)$, 故 $(-1)\alpha=-\alpha$.
- 若有 $k\in P$, $\alpha\in V$ 使得 $k\alpha=\mathbf{0}$, 则 $k=0$ 或 $\alpha=\mathbf{0}$.
  若 $k\neq 0$, 则 $\alpha=\left(\frac{1}{k}k\right)\alpha=\frac{1}{k}(k\alpha)=\frac{1}{k}\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

线性空间的例子 (一)

例

数域 P 对于它自身的加法与乘法构成 P 上的一个线性空间.

例

$P[x]$ 对于多项式的加法, 多项式与数的乘法构成 P 上的线性空间.
$P[x]_n = \{f(x) \in P[x] | \deg f(x) < n\} \bigcup \{0\}$ 对于多项式的加法与多项式与数的乘法构成 P 上的线性空间.

例

$P^{m\times n}$ 对于矩阵加法, 矩阵与数的乘法构成 P 上的线性空间. 特别地, n 维行向量空间 $P^{1\times n}$ 和 m 维列向量空间 $P^{m\times 1}$ 是我们已经接触过的.

线性空间的例子 (二)

例

几何空间中所有的自由向量构成的集合对于向量的加法, 向量与数的乘法构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

例

设 V 是所有收敛的实数数列的集合, 即

$$V = \{\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \mid \lim_{n\to\infty} a_n \text{存在}\}.$$

则对于数列的加法, 数列与实数的乘法, V 构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

例

$C[a, b]$ 表示所有在闭区间 $[a, b]$ 上连续的实值函数的集合. 对于函数的加法, 函数与实数的乘法, $C[a, b]$ 构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

线性子空间

设 W 为数域 P 上线性空间 V 的子集. 如果 $\forall \alpha, \beta \in W$, 有 $\alpha+\beta \in W$, 则称 W 对于 V 的加法封闭; 如果 $\forall k \in P$, $\alpha \in W$, 有 $k\alpha \in W$, 则称 W 对 V 的数乘封闭.

定义

设 W 是线性空间 V 的非空子集. 如果 W 对于 V 的加法, 数乘, 也构成一个线性空间, 则称 W 是 V 的线性子空间, 简称子空间.

对于 V 的非空子集 W, 由于 W 上的加法和数乘是从 V 上继承来的, 所以自然满足相关的运算律. 要验证 W 是子空间, 只需验证它对这两种运算封闭. 即有

命题

设 W 是线性空间 V 的非空子集, 则下面三个条件等价: (1) W 是 V 的子空间; (2) W 对 V 的加法, 数乘封闭; (3) $\forall k, l \in P$, $\alpha, \beta \in W$, 有 $k\alpha + l\beta \in W$.

注

在子空间的定义中, 要求 W 中的两种运算要与 V 的两种运算一致. 如果在 V 的非空子集 W_1 中另外定义加法与数乘使 W_1 为线性空间, 此时 W_1 不能叫做 V 的子空间.

例

$R^{1\times 3}$ 的子集 $W_1 = \{(x,y,1)|x,y\in R\}$ 对于 $R^{1\times 3}$ 的加法与数乘均不封闭, 故 W_1 不是 $R^{1\times 3}$ 的子空间. 但我们仍可以在 W_1 中重新定义加法和数乘

$$(x,y,1)+'(x_1,y_1,1)=(x+x_1,y+y_1,1);\quad k*(x,y,1)=(kx,ky,1).$$

易知 $\{W_1\}$ 对这两种运算构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

子空间的例子

设 V 是 P 上的线性空间, 则 V 与 $\{\mathbf{0}\}$ 都是 V 的子空间, 它们称为 V 的平凡子空间.

例

$P[x]_n$ 关于多项式的加法和数乘封闭, 所以它是 $P[x]$ 的子空间.

例

在自由向量构成的线性空间中, 平行于同一平面的那些向量关于加法和数乘封闭, 所以构成一个子空间.

例

齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解集对于 $P^{n\times 1}$ 中的加法与数乘封闭, 所以它是 $P^{n\times 1}$ 的子空间, 称为该方程组的解空间.

例

设 V 是 P 上的线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in V$, 则 V 的子集

$$\left\{ \sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i \,\middle|\, k_i \in P \right\}$$

是 V 的子空间, 称为由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 生成的子空间, 记作 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$. 它是包含向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的最小的 V 的子空间. 例如, 在 $P[x]$ 中, $P[x]_n$ 是由 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 生成的子空间.

定义

设 V 是数域 P 上的线性空间, $k_1, \cdots, k_s \in P$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in V$. 称 $\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个线性组合.

线性相关与线性无关

线性相关与线性无关的概念来源于自由向量的共线, 共面.

- 若 α, β 是两个共线的向量, 则有不全为零的实数 k_1, k_2 使得 $k_1\alpha + k_2\beta = \mathbf{0}$;
- 若 α, β, γ 是三个共面的向量, 则有不全为零的实数 k_1, k_2, k_3 使得 $k_1\alpha + k_2\beta + k_3\gamma = \mathbf{0}$;
- 反之, 若 α, β 不共线, 则使得 $k_1\alpha + k_2\beta = \mathbf{0}$ 成立的实数 k_1, k_2 只有 $k_1 = k_2 = 0$;
- 若 α, β, γ 是三个不共面的向量, 则使得 $k_1\alpha + k_2\beta + k_3\gamma = \mathbf{0}$ 成立的实数 k_1, k_2, k_3 只有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

把自由向量的共线, 共面, 推广到抽象的线性空间中, 就是向量的线性相关. 不共线, 不共面, 就是线性无关.

定义

设 V 是数域 P 上的线性空间. 对于 V 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 如果有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s \in P$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0},$$

则称该向量组线性相关; 否则称为线性无关.

从定义可以看出, 所谓 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 是指: 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$$

成立的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 只有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$.

注

上述定义中的的有限向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可以换成无限向量组 A. 如果 A 中有一个有限部分组是线性相关的, 则称 A 线性相关; 否则称 A 线性无关.

例

$1, x, x^2, \cdots, x^n$ 是 $P[x]$ 中的线性无关向量组. 又若 $f(x) \in P[x]$, 且 $\deg f(x) \leq n$, 则 $1, x, x^2, \cdots, x^n, f(x)$ 线性相关.

例

设 $V = P^{2\times 2}$, 则 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 线性无关. 再任取 $A \in P^{2\times 2}$, 则 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, A$ 线性相关.

下面介绍线性相关与线性无关的一些简单性质.

- 单个向量 α 组成的向量组线性无关当且仅当 $\alpha \neq 0$.
- $s \geq 2$ 个向量构成的向量组线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中有一个向量是其他向量的线性组合, 或说可被其他向量线性表出.
- 一个向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 它的任何部分组线性无关.

命题

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha$ 线性相关，则 α 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出，且表示方式是唯一的.

证明.

由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha$ 线性相关可知：存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, $k \in P$ 使得 $\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i + k\alpha = \mathbf{0}$.
易知 $k \neq 0$, 因而 $\alpha = \sum_{i=1}^{s} \frac{-k_i}{k}\alpha_i$, 即 α 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出.
若有另一表示方式 $\alpha = \sum_{i=1}^{s} l_i\alpha_i$, 则 $\sum_{i=1}^{s}(\frac{-k_i}{k} - l_i)\alpha_i = \mathbf{0}$. 由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关知 $l_i = \frac{-k_i}{k}$, $1 \leq i \leq s$. 因而表示方式是唯一的. $\square$

命题

若向量 α 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 且表示方式唯一, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

证明.

由于 α 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 可设

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s.$$

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关, 则有不全为零的数 $l_1, l_2, \cdots, l_s$ 使得

$$\mathbf{0} = l_1\alpha_1 + \cdots + l_s\alpha_s.$$

以上两式相加, 就得到

$$\alpha = (k_1 + l_1)\alpha_1 + \cdots + (k_s + l_s)\alpha_s.$$

这与表示方式唯一矛盾，故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关. □

线性等价

设 V 为数域 P 上的线性空间, A, B 为 V 中的两个向量组. 如果 A 中的每个元素可以被 B 中的一个有限部分组线性表出, 则称 A 可被 B 线性表出.
如果 A 可被 B 线性表出, B 也可被 A 线性表出, 则称 A, B 线性等价, 简称等价, 记为 $A \sim B$. 等价具有下面三个性质:

- 反身性: 每个向量组都与自身等价, $A \sim A$;
- 对称性: 如果 $A \sim B$, 则也有 $B \sim A$;
- 传递性: 如果 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$.

定义

向量组 A 的部分组 A_1 若满足: (1) A_1 线性无关; (2) $A_1 \sim A$, 则称 A_1 是 A 的极大线性无关组.

例

在 $P^{1\times 3}$ 中考虑向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1, 0)$, $\alpha_3 = (0, 0, 1)$, $\alpha_4 = (-1, -1, -1)$. 易知 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \mathbf{0}$, 故该向量组线性相关. 显然 α_1, α_2, α_3 线性无关, 且与原向量组等价, 故为原向量组的一个极大线性无关组. 实际上，去掉这四个向量中的任意一个得到的向量组都是这个向量组的极大线性无关组.

命题

在线性空间中，有限个向量构成的向量组一定存在极大线性无关组.

证明.

用筛选法. 将有限个向量排序为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$. 如果它们全为零, 则极大线性无关组为 $\emptyset$. 否则, 按顺序检查这些向量, 先将第一个非零向量放入向量组 S. 再依次检查后面的每个向量, 如果它不能被 S 线性表出, 就将它放入 S. 全部检查完后, S 就是极大线性无关组. □

引理

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，且可被 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 线性表出，则 $m \leq n$.

证明.

参考线性方程组一章. □

定理

有限向量组 A 的任何两个极大线性无关组等价, 且包含相同个数的向量, 此数称为 A 的秩.

证明.

设 A_1, A_2 为 A 的两个极大线性无关组，由定义知, A_1, A_2 均与 A 等价, 故 A_1 与 A_2 等价. 线性无关的向量组 A_1 可由向量组 A_2 线性表出, 由引理知 $|A_1| \leq |A_2|$. 同理, $|A_2| \leq |A_1|$. 故 $|A_1| = |A_2|$. □

推论

等价向量组的秩相等.

若一个向量组中含有无限多个线性无关的向量, 则规定其秩为 ∞. 又规定由零向量构成的向量组的秩为 0.

维数和基

定义

线性空间 V 作为向量组的秩称为 V 的维数, 记为 $\dim V$. V 的极大线性无关组称为 V 的基.

除去个别例子, 我们一般讨论有限维线性空间. 因而, 我们不对维数特别声明时, 总假定是有限的.

从上面讨论知: V 的任何两组基等价; 基中包含 $\dim V$ 个向量; $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的基当且仅当它们满足下面两个条件:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关;

(2) $\forall \alpha \in V$ 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出.

例

$1,\ x,\ x^2,\ \cdots$ 为线性空间 $P[x]$ 的基, $\dim P[x] = \infty$. $1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^{n-1}$ 为 $P[x]_n$ 的基, $\dim P[x]_n = n$.

例

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为 $P^{1\times n}$ 的基, 因而 $\dim P^{1\times n} = n$. $\varepsilon_1^{\mathsf{T}}, \varepsilon_2^{\mathsf{T}}, \cdots, \varepsilon_n^{\mathsf{T}}$ 为 $P^{n\times 1}$ 的基, 因而 $\dim P^{n\times 1} = n$.

例

$\{E_{ij} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ 为 $P^{m\times n}$ 的基, 因而 $\dim P^{m\times n} = mn$.

例

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in V$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大线性无关组就是 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 的基, 因而向量组的秩就是它们生成的线性子空间的维数.

例

齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 就是解空间的一组基; 基础解系中的向量个数, 就是解空间的维数, 等于未知数个数减去 A 的秩.

命题

在有限维线性空间中, 子空间的一组基可以扩充为整个空间的一组基.

证明.

将子空间的基写在前面, 整个空间的一组基写在后面, 它们构成一个向量组, 用筛选法找出这个向量组的极大线性无关组. □

坐标

定义

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为线性空间 V 的一组基. 这时 $\forall \beta \in V$ 可唯一地表示为

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i.$$

我们称列向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathsf{T}} \in P^{n\times 1}$ 为 β 在这组基下的坐标.

取定一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 后, V 中的向量与其坐标之间有下面的对应关系 (假设 $\alpha, \beta \in V$ 的坐标分别为 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$):

- $\alpha = \beta$ 当且仅当 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$;
- $\alpha + \beta$ 的坐标, 等于 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$;
- $k\alpha$ 的坐标, 等于 $k\mathbf{a}$, $\forall k \in P$.

利用上述对应关系, 不难看出: V 中向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_k$ 线性相关当且仅当它们的坐标 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_k$ 在 $P^{n\times 1}$ 中线性相关.

过渡矩阵

定义

设 I: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 II: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是线性空间 V 的两组基. 将 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 在基 I 下的坐标排成 $n \times n$ 矩阵, 称为从基 I 到基 II 的过渡矩阵.

换句话说, 如果 β_i 在基 I 下的坐标为 $(b_{1i}, b_{2i}, \cdots, b_{ni})^{\mathsf{T}}$, 则从基 I 到基 II 的过渡矩阵为 (b_{ij}). 我们也可以形式地写

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

坐标变换

下面讨论同一个向量在不同基下坐标的关系.

定理

设 I 与 $I\!I$ 是线性空间 V 的两组基, 且从 I 到 $I\!I$ 的过渡矩阵为 T. 又设 $\gamma \in V$ 在这两组基下的坐标分别为 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$, 则

$$\mathbf{x} = T\mathbf{y}.$$

证明.

采用形式的乘法, 我们有 $\gamma = I\mathbf{x}$ 和 $\gamma = I\!I\mathbf{y}$. 将 $I\!I = IT$ 代入后一式, 再与前一式比较, 就得到 $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$. □

定理

设 I, $I\!I$, $I\!I\!I$ 是线性空间 V 的三组基, 且从 I 到 $I\!I$ 的过渡矩阵为 T, 从 $I\!I$ 到 $I\!I\!I$ 的过渡矩阵为 S, 则从 I 到 $I\!I\!I$ 的过渡矩阵为 TS.

证明.

由 $I\!I = IT$, $I\!I\!I = I\!I S$ 立即得到 $I\!I\!I = ITS$. □

推论

如果从基 I 到基 $I\!I$ 的过渡矩阵为 T, 则从 $I\!I$ 到 I 的过渡矩阵为 T^{-1}.

例

求 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in P^{1\times n}$ 在基 $\alpha_1 = (1, 1, \cdots, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, \cdots, 1)$, $\cdots$, $\alpha_n = (0, \cdots, 0, 1)$ 下的坐标.

解答.

直接求解线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \alpha$, 即可得到 α 的坐标为 $(a_1, a_2 - a_1, \cdots, a_n - a_{n-1})^\mathsf{T}$.

例

在 $P^{1\times 4}$ 中有两组基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = (1,1,1,1),\ \alpha_2 = (1,1,-1,-1),\\
&\alpha_3 = (1,-1,1,-1),\ \alpha_4 = (1,-1,-1,1);\\
&\beta_1 = (1,1,0,1),\ \beta_2 = (2,1,3,1),\\
&\beta_3 = (1,1,0,0),\ \beta_4 = (0,1,-1,-1).
\end{aligned}$$

求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的过渡矩阵.

解答

把 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 写为列向量, 它们排成矩阵 A; 再把 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 也写为列向量, 它们排成矩阵 B. 接下来, 只需对 $(A\ \ B)$ 作初等行变换, 将它变为 $(I\ \ T)$, 则 T 就是要求的过渡矩阵.

子空间的交与和

定义

设 W_1, W_2 为线性空间 V 的两个子空间. 两者的交集 $W_1 \cap W_2$, 也是一个子空间, 称为 W_1 与 W_2 的交; 两者的并集, 一般而言不是子空间, 但如下定义的集合

$$W_1 + W_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 \,|\, \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$$

是一个子空间, 称为 W_1 与 W_2 的和.

例

设 V 是几何空间中所有自由向量构成的线性空间. π_1, π_2 是两个相交的平面, 它们的交线为 ℓ. 所有平行于 π_i 的自由向量构成 V 的子空间 W_i, $i = 1, 2$; 所有平行于 ℓ 的自由向量构成 V 的子空间 L. 容易看出, $W_1 \cap W_2 = L$, $W_1 + W_2 = V$, 而 $W_1 \cup W_2$ 不是 V 的子空间.

交与和的性质

容易验证:

- 若 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间, 则下面条件等价:
  (1) $V_1 \subseteq V_2$;
  (2) $V_1 + V_2 = V_2$;
  (3) $V_1 \cap V_2 = V_1$.
- 设 V_1, V_2, W 都是 V 的子空间, 且 $V_1 \subseteq W$, $V_2 \subseteq W$, 则 $V_1 + V_2 \subset W$.

维数公式

定理

设 V_1, V_2 都是有限维线性空间 V 的子空间, 则

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

证明.

取 $V_1 \cap V_2$ 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$.
将它扩充为 V_1 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_p$; 也可将它扩充为 V_2 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \gamma_1, \cdots, \gamma_q$.
显然 $V_1 + V_2$ 中每个元素都可被向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_p, \gamma_1, \cdots, \gamma_q$ 线性表出. 为了证明定理, 只需证明这组向量是 $V_1 + V_2$ 的一组基, 也即它们线性无关.

证明 (续).

如果有一组数 x_i, y_j, z_k 使得

$$x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s+y_1\beta_1+\cdots+y_p\beta_p+z_1\gamma_1+\cdots+z_q\gamma_q=\mathbf{0},$$

那么

$$z_1\gamma_1+\cdots+z_q\gamma_q=-(x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s+y_1\beta_1+\cdots+y_p\beta_p)\in V_1,$$

可见 $z_1\gamma_1+\cdots+z_q\gamma_q\in V_1\cap V_2$, 即它可被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出. 但 α_1, $\cdots$, α_s, γ_1, $\cdots$, γ_q 线性无关, 可知 $z_1=\cdots=z_q=0$.
同理 $y_1=\cdots=y_p=0$. 进而得到 $x_1=\cdots=x_s=0$. 因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$, $\beta_1,\cdots,\beta_p,\gamma_1,\cdots,\gamma_q$ 线性无关, 它们是 V_1+V_2 的一组基. □

推论

若子空间 V_1, V_2 的维数之和大于整个线性空间的维数, 则 $V_1\cap V_2\neq\{\mathbf{0}\}$.

子空间的直和

定理

设 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间, 则下面条件等价:

(1) $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$;

(2) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$;

(3) $\forall \alpha \in V_1 + V_2$, 存在唯一的 $\beta \in V_1, \gamma \in V_2$, 使得 $\alpha = \beta + \gamma$, 即把 α 分解为 V_1, V_2 中元素和的方式是唯一的;

(4) 若 $\beta \in V_1, \gamma \in V_2$ 使得 $\beta + \gamma = \mathbf{0}$, 则 $\beta = \gamma = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{0}$ 的分解方式是唯一的.

如果两个子空间 V_1, V_2 满足上述任意一个条件, 则称它们的和 $V_1 + V_2$ 为 直和, 记为 $V_1 \oplus V_2$.

证明.

由维数公式可知 (1) 与 (2) 等价. 下面证明 (1)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(1).

证明 (续).

(1)$\Rightarrow$(3). 设 $\alpha = \beta + \gamma = \beta_1 + \gamma_1$, $\beta, \beta_1 \in V_1$, $\gamma, \gamma_1 \in V_2$, 则

$$\beta - \beta_1 = \gamma_1 - \gamma \in V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

故 $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$, 即分解式唯一.

(3)$\Rightarrow$(4). 显然.

(4)$\Rightarrow$(1). 设 $\beta \in V_1 \cap V_2$, 则 $-\beta \in V_1 \cap V_2$. 这时 $\mathbf{0} = \beta + (-\beta)$ 是 $\mathbf{0}$ 的一种分解方式, 于是 $\beta = -\beta = \mathbf{0}$, 故 $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$. $\square$

推论

设 W 为线性空间 V 的一个子空间, 则一定存在子空间 U 使得 $V = W \oplus U$ (称 U 为 W 的补子空间, 它一般不是唯一的).

证明.

取 W 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$, 将其扩充为 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$, $\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n$. 令 $U = L(\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n)$ 即可. 因为基的扩充一般不唯一, 所以补子空间也不唯一. $\square$

与上述定理的证法类似, 我们可以证明

定理

设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 为线性空间 V 的子空间, 又设 $W = V_1 + V_2 + \cdots + V_s$, 则下面条件等价:

(1) W 中任意向量分解为为 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 中元素之和的方式是唯一的;

(2) 零向量的分解方式是唯一的, 即若 $\alpha_i \in V_i$, $1 \le i \le s$ 且 $\sum_{i=1}^s \alpha_i = \mathbf{0}$, 则 $\alpha_i = \mathbf{0}$, $1 \le i \le s$;

(3) $V_i \cap \sum_{j \ne i} V_j = \{\mathbf{0}\}$, $1 \le i \le s$;

(4) $\dim W = \sum_{i=1}^s \dim V_i$.

如果子空间 $V_1, V_s, \cdots, V_s$ 满足上述任意一个条件, 则称它们的和为直和, 记作 $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$, 或 $\oplus_{i=1}^s V_i$.

同余和同余类

商空间可以看作是整数、多项式等代数体系中同余类概念的推广.

定义

设 W 是线性空间 V 的子空间. 若 $\alpha, \beta \in V$, 且 $\alpha - \beta \in W$, 则称 α, β 模 W 同余, 记为 $\alpha \equiv \beta \pmod W$. V 中所有与 α 同余的向量的集合

$$\overline{\alpha} = \{\beta \mid \beta \equiv \alpha \pmod W\}$$

称为 α 模 W 的同余类. 类中任一个向量称为此类的代表.

由于 $\overline{\alpha} = \{\alpha + \beta \mid \beta \in W\} = \alpha + W$, 也称 $\overline{\alpha}$ 为 α 关于 W 的陪集.

例

取 $V = P[x]$. 设 $g \in P[x]$, 则 g 的所有倍式构成的集合 $W = \langle g \rangle = \{gh \mid h \in P[x]\}$ 是 V 的子空间.
设 $u, v \in P[x]$, 则 $u \equiv v \pmod{W}$ 等价于 $u - v \in W$, 即 $u - v$ 是 g 的倍式, 这也等价于 $u \equiv v \pmod{g}$.

容易证明同余是等价关系:

- $\alpha \equiv \alpha \pmod{W}$;
- $\alpha \equiv \beta \pmod{W} \;\Rightarrow\; \beta \equiv \alpha \pmod{W}$;
- $\alpha \equiv \beta, \beta \equiv \gamma \;\Rightarrow\; \alpha \equiv \gamma \pmod{W}$.

此外, $\overline{\alpha} = \overline{\beta} \Leftrightarrow \overline{\alpha} \cap \overline{\beta} \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta \pmod{W}$.
这条性质说明: 两个同余类要么相等, 要么交集为空. 因此整个线性空间可以划分成同余类的不交并.

命题

设 W 是线性空间 V 的子空间, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in V$, $k \in P$, 且 $\alpha_i \equiv \beta_i \pmod{W}$, $i = 1, 2$. 则有

$$\alpha_1 + \alpha_2 \equiv \beta_1 + \beta_2 \pmod{W}, \quad k\alpha_1 \equiv k\beta_1 \pmod{W}.$$

证明.

因为 $\alpha_i \equiv \beta_i \pmod{W}$, 故 $\alpha_i - \beta_i \in W$, $i = 1, 2$. 从而有

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) \in W, \\ k\alpha_1 - k\beta_1 = k(\alpha_1 - \beta_1) \in W. \end{aligned}$$

命题得证. □

商空间

定理

设 W 是线性空间 V 的子空间, 将所有模 W 的同余类的集合记作 V/W, 即 $V/W = \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in V\}$. 在 V/W 上定义加法和数量乘法如下:

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \overline{\alpha + \beta}, \quad \forall \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in V/W;$$
$$k\,\overline{\alpha} = \overline{k\alpha}, \quad \forall \overline{\alpha} \in V/W, k \in P.$$

则 V/W 构成数域 P 上的线性空间, 称为 V 对 W 的商空间.

证明.

首先证明上述两种运算是合理的, 即这两种运算与代表元的选取无关.
以加法为例. 如果 $\overline{\alpha} = \overline{\alpha'}$, $\overline{\beta} = \overline{\beta'}$, 则 $\alpha \equiv \alpha'$, $\beta \equiv \beta'$, 从而 $\alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta'$, 这就证明了 $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha' + \beta'}$.
再验证上述两种运算满足线性空间的八个条件即可, 此处从略. 需要注意的是, V/W 中的零向量为 $\overline{\mathbf{0}} = W$. □

定理

设 V 为数域 P 上的有限维线性空间, W 为 V 的子空间, 则 $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

证明.

将 W 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 扩充为 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n$. 只要能证明 $\overline{\alpha}_{k+1}, \cdots, \overline{\alpha}_n$ 构成 V/W 的一组基, 就可得到
$\dim V/W = n - k = \dim V - \dim W$.
事实上, 任取 $\overline{\alpha} \in V/W$, 设 $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i\alpha_i$, 则 $\alpha - \sum_{i=k+1}^n x_i\alpha_i \in W$, 从而

$$\overline{\alpha} = \overline{x_{k+1}\alpha_{k+1} + \cdots + x_n\alpha_n} = x_{k+1}\overline{\alpha_{k+1}} + \cdots + x_n\overline{\alpha_n}.$$

从上述计算中还可看出, 若 $x_{k+1}\overline{\alpha_{k+1}} + x_n\overline{\alpha_n} = \overline{\mathbf{0}}$, 则 $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$. 因此, $\overline{\alpha_{k+1}}, \cdots, \overline{\alpha_n}$ 是 V/W 的一组基.

在定理的证明中, 我们从 W 的基出发可以构造出 V/W 的基. 反过来构造也是可以的:

命题

设 W 是线性空间 V 的子空间. 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 是 W 的基, $\overline{\alpha_{k+1}}, \cdots, \overline{\alpha_n}$ 为 V/W 的基, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的基.

证明.

由条件, $\dim W = k$, $\dim V/W = n-k$, 所以 $\dim V = n$.
任取 $\alpha \in V$, 则 $\overline{\alpha} \in V/W$. 因此可设

$$\overline{\alpha} = x_{k+1}\overline{\alpha_{k+1}} + \cdots + x_n\overline{\alpha_n} = \overline{x_{k+1}\alpha_{k+1} + \cdots + x_n\alpha_n}.$$

这样, $\alpha - (x_{k+1}\alpha_{k+1} + \cdots + x_n\alpha_n) \in W$, 从而 α 可被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n$ 线性表出. □

线性空间的同态与同构

定义

设 V, W 都是数域 P 上的线性空间. 从 V 到 W 的映射 f 若满足:

- (保持向量的加法) $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta), \forall \alpha, \beta \in V$;
- (保持数量乘法) $f(k\alpha)=kf(\alpha), \forall \alpha \in V, k \in P$.

则称 f 是同态或者线性映射. 又若 f 还是一一对应, 则称 f 是 V 到 W 的同构映射. 此时, 称 V 与 W 线性同构.

特例:

- 零映射 $0: V \mapsto W$ 将 V 中的任意元素映到 W 中的零向量 $(0(\alpha)=\mathbf{0}, \forall \alpha \in V_1)$;
- 恒等映射 $1: V \mapsto V$ 将 V 中的任意元素映到自身 $(1(\alpha)=\alpha, \forall \alpha \in V)$;

例

设 $A \in P^{m\times n}$, 定义 $f\colon\ P^{n\times 1} \to P^{m\times 1}$ 如下:

$$f(\alpha) = A\alpha, \quad \forall \alpha \in P^{n\times 1},$$

则 f 为同态映射.

例

设映射 $f\colon\ P^{m\times n} \to P^{n\times m}$ 定义如下:

$$f(A) = A^{\mathsf{T}}, \quad \forall A \in P^{m\times n},$$

则 f 为同构映射, 故 $P^{m\times n}$ 与 $P^{n\times m}$ 线性同构.

例

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为数域 P 上的线性空间 V 的一组基. 考虑映射 $\mathrm{crd}:\ V \to P^{n\times 1}$ 如下: $\forall \alpha \in V$, $\mathrm{crd}(\alpha)$ 是 α 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标. 易知 crd 为同构映射, 故 V 与 $P^{n\times 1}$ 线性同构.

线性映射的性质

设 f: $V \to W$ 为线性映射, 则有

- f 保持零元素和负元素, 即 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $f(-\alpha) = -f(\alpha)$;
- f 保持线性组合, 即对 $\alpha_i \in V_1$, $k_i \in P$, $1 \leq i \leq r$, 有

$$f(\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i) = \sum_{i=i}^{k} k_i f(\alpha_i).$$

思考题

设 f: $V \to W$ 为线性映射.

- (*) 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 在 V 中线性相关, 证明 $f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_k)$ 在 W 中线性相关.
- (*) 反之, 若 $f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_k)$ 在 W 中线性相关, $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 在 V 中是否线性相关呢?

线性映射的像与核

定义

设 $f\colon V\to W$ 为线性映射. 称集合 $f(V)=\{f(\alpha)|\alpha\in V\}$ 为 f 的像, 也称为值域. 称集合 $f^{-1}(\mathbf{0})=\{\alpha\in V|\,f(\alpha)=\mathbf{0}\}$ 为 f 的核.

f 的像有时也记作 $\operatorname{im} f$ 或 $\operatorname{Im} f$; f 的核有时也记作 $\ker f$ 或 $\operatorname{Ker} f$. 容易验证, f 的像是 W 的子空间, f 的核是 V 的子空间.

命题

设 $f\colon V\to W$ 为线性映射. 那么, f 是满射的充要条件是 $f(V)=W$; f 是单射的充要条件是 $f^{-1}(\mathbf{0})=\{\mathbf{0}\}$.

推论

若线性映射 $f\colon V\to W$ 是单射, 则 V 中任意线性无关向量组被映为 W 中线性无关向量组.

秩与零度

定义

设 $f: V \to W$ 为线性映射, 把 f 的像的维数称为 f 的秩, 把 f 的核的维数称为 f 的零度.

定理

设 $f: V \to W$ 为线性映射, 则 f 的秩与零度的和, 恰等于 V 的维数.

证明.

取 $f^{-1}(0)$ 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$, 再取 $f(V)$ 的一组基 $f(\beta_1), \cdots, f(\beta_r)$. 我们来证明 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_r$ 是 V 的一组基.
如果 $\sum x_i\alpha_i + \sum y_j\beta_j = \mathbf{0}$, 则 $f(\sum x_i\alpha_i + \sum y_j\beta_j) = \mathbf{0}$, 这样 $\sum y_j f(\beta_j) = \mathbf{0}$, 可知 $y_j = 0$, 进而 $x_i = 0$. 这就证明了 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性无关.
任取 $\gamma \in V$, 则可设 $f(\gamma) = k_1 f(\beta_1) + \cdots + k_r f(\beta_r)$. 这样 $\gamma - k_1\beta_1 - \cdots - k_r\beta_r \in f^{-1}(\mathbf{0})$, 可知 γ 能被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性表出. $\square$

例

设 $V = P^{n\times 1}$, $W = P^{m\times 1}$, $A \in P^{m\times n}$. 定义同态映射 $f\colon\ V \mapsto W$ 如下

$$f(\alpha) = A\alpha, \quad \forall \alpha \in V,$$

这时, $f^{-1}(\mathbf{0})$ 就是线性方程组 $A\alpha = \mathbf{0}$ 的解空间, f 的零度就是解空间的维数; 而 $f(V)$ 就是 A 的列向量组所张成的子空间, f 的秩就是 A 的秩.

同构

同构是线性空间之间的一种等价关系, 即它满足

- 反身性: 每个线性空间总 (通过恒等映射) 与自身同构;
- 对称性: 若 V 与 W 同构, 则 W 也与 V 同构;
- 传递性: 若 V 与 W 同构, W 与 U 同构, 则 V 与 U 同构.

现在我们尝试将数域 P 上的线性空间按同构关系进行分类. 完成分类后, 在同一个同构类中只要找一个具有代表性、我们熟悉的线性空间进行研究即可.

前面我们已经看到, 若 $\dim V = n$, 则 $\mathrm{crd}: V \to P^{n\times 1}$ 是同构映射. 因此有

定理

数域 P 上有限维线性空间同构的充分必要条件是维数相等.

推论

设 V, W 是数域 P 上的线性空间, 且 $\dim V = \dim W$. 又设 $f: V \to W$ 是线性映射, 则 f 为单射的充要条件是 f 为满射.

证明.

当 f 是单射时, $f^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$, 因而 $\dim f(V) = \dim V = \dim W$, 结合 $f(V) \subseteq W$ 可知 $f(V) = W$, 即 f 是满射.
当 f 是满射时, $\dim f(V) = \dim W = \dim V$, 因而 $\dim f^{-1}(\mathbf{0}) = 0$, 即 f 是单射. $\square$

同态基本定理

定理

若 f: $V \to W$ 为满同态, π : $V \to V/f^{-1}(\mathbf{0})$ 为自然映射, 即 $\pi(\alpha) = \bar{\alpha}$, $\forall \alpha \in V$. 那么, 存在唯一的同构映射 $\bar{f}$: $V/f^{-1}(\mathbf{0}) \to W$, 使得 $f = \bar{f} \circ \pi$.

证明.

当 $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ 时, $\alpha - \beta \in f^{-1}(\mathbf{0})$, 所以 $f(\alpha) = f(\beta)$. 这表明, 由 $\bar{f}(\bar{\alpha}) = f(\alpha)$ 定义的映射 $\bar{f}$: $V/f^{-1}(\mathbf{0}) \to W$ 是合理的.
注意

$$\begin{aligned}
\bar{f}(k_1\bar{\alpha}_1 + k_2\bar{\alpha}_2) &= \bar{f}(\overline{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2}) \\
&= f(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) = k_1 f(\alpha_1) + k_2 f(\alpha_2) \\
&= k_1\bar{f}(\bar{\alpha}_1) + k_2\bar{f}(\bar{\alpha}_2),
\end{aligned}$$

所以 $\bar{f}$ 是线性映射. 由于 f 是满射, 所以 $\bar{f}$ 也是满射. 结合 $\dim V/f^{-1}(\mathbf{0}) = \dim f(V) = \dim W$ 可知 $\bar{f}$ 是同构. □

线性函数

定义

设 V 是数域 P 上的线性空间, 从 V 到 P 的线性映射, 称为 V 上的线性函数. 将 V 上全体线性函数构成的集合记为 V^*.

例

设 $V = P^{n\times n}$, 则迹函数 $\mathrm{tr} : V \to P$ 满足

$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B), \quad \mathrm{tr}(kA) = k\,\mathrm{tr}(A),$$

所以 tr 是线性函数.

例

设 $V=P[x]$. 固定 $a\in P$, 定义映射 $\mathrm{EV}_a: V\to P$ 如下

$$\mathrm{EV}_a(g(x))=g(a),\quad \forall g(x)\in P[x].$$

换言之, EV_a 就是在 a 处取值. 易知它是线性函数.

作为线性映射, V 上的线性函数 f 显然有如下性质

- $f(\mathbf{0})=0$, $f(-\alpha)=-f(\alpha)$;
- $f(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1f(\alpha_1)+\cdots+k_sf(\alpha_s)$.

下面我们证明, 线性函数 f 由它在一组基处的值唯一决定.

命题

设 V 是数域 P 上的线性空间, $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基, $a_1,\cdots,a_n\in P$. 则存在唯一的线性函数 f, 使得 $f(\varepsilon_i)=a_i$, $1\le i\le n$.

证明.

存在性: 令 $f(x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$. 易知 f 是线性函数.
唯一性: 若线性函数 f 满足 $f(\varepsilon_i)=a_i$, 则它必定满足

$$f(x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n.$$

$\square$

从证明中可以看到, 线性函数 f 总形如 $f(x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$, 即它是变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的一次齐次多项式. 线性函数也称为 1 次型或 1 形式.

思考题

(***) 若 $f_1,\cdots,f_s$ 是线性空间 V 上的非零线性函数, 证明: 存在向量 $\alpha\in V$, 使得 $f_1(\alpha),\cdots,f_s(\alpha)$ 都不为零.

对偶空间

显然两个线性函数的和仍是线性函数, 线性函数的倍数仍是线性函数, 且函数的加法和数乘满足交换律、结合律等相关的运算律. 于是容易得到

命题

线性空间 V 上全体线性函数构成的集合 V^* 是一个线性空间, 称为 V 的对偶空间.

现在设 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组基. 那么, 存在唯一的线性函数 f_i, 使得

$$f_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

事实上, $f_i(x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n) = x_i$, 说明 f_i 作用在任一向量上就是取它在这组基下的第 i 个坐标分量.

命题

上述 $f_1, \cdots, f_n$ 是对偶空间 V^* 的一组基, 称为 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 的对偶基.

证明.

先证明 $f_1, \cdots, f_n$ 线性无关. 若 $k_1f_1 + \cdots + k_nf_n = 0$, 则有 $(k_1f_1 + \cdots + k_nf_n)(\varepsilon_i) = 0$, 即 $k_i = 0$, $1 \le i \le n$.
再证明任意线性函数 f 可被 $f_1, \cdots, f_n$ 线性表出. 事实上, 若 $f(\varepsilon_i) = a_i$, $1 \le i \le n$, 则线性函数 f 与 $a_1f_1 + \cdots + a_nf_n$ 在 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 处的值都相等, 说明

$$f = a_1f_1 + \cdots + a_nf_n.$$

这样, 就证明了 $f_1, \cdots, f_n$ 是 V^* 的一组基. □

这个命题告诉我们, 有限维线性空间 V 与其对偶空间 V^* 的维数相同.
对于向量 $\alpha \in V$ 和线性函数 $f \in V^*$, 有时我们也将 $f(\alpha)$ 写为 $f\alpha$. 这样, $f_1, \cdots, f_n$ 是 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 的对偶基的条件也可采用矩阵 “乘法” 写为

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\varepsilon_1 & \cdots & f_1\varepsilon_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n\varepsilon_1 & \cdots & f_n\varepsilon_n \end{bmatrix} = E_n.$$

命题

设线性空间 V 的基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 到另一组基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 的过渡矩阵为 T. 设它们的对偶基分别为 $f_1, \cdots, f_n$ 和 $g_1, \cdots, g_n$, 那么, 从基 $g_1, \cdots, g_n$ 到基 $f_1, \cdots, f_n$ 的过渡矩阵为 T^{T}.

证明.

采用形式的矩阵乘法, 我们有 $(\eta_1, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)T$, 两端左“乘”$(f_1, \cdots, f_n)^{\mathsf{T}}$, 可得

$$(f_1, \cdots, f_n)^{\mathsf{T}}(\eta_1, \cdots, \eta_n) = T.$$

设从基 $g_1, \cdots, g_n$ 到基 $f_1, \cdots, f_n$ 的过渡矩阵为 S, 即 $(f_1, \cdots, f_n) = (g_1, \cdots, g_n)S$, 将之代入上式, 可得

$$S^{\mathsf{T}}(g_1, \cdots, g_n)^{\mathsf{T}}(\eta_1, \cdots, \eta_n) = T,$$

也即 $S^{\mathsf{T}} = T$. 因此 $S = T^{\mathsf{T}}$. □

设 V^* 是线性空间 V 的对偶空间. 对每个给定的向量 $\alpha \in V$, 可定义函数 $\alpha^{**}: V^* \to P$ 如下

$$\alpha^{**}(f) = f(\alpha), \quad \forall f \in V^*.$$

容易验证, α^{**} 是 V^* 上的线性函数

- $\alpha^{**}(f+g) = (f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) = \alpha^{**}(f) + \alpha^{**}(g)$;
- $\alpha^{**}(kf) = (kf)(\alpha) = kf(\alpha) = k\alpha^{**}(f)$.

因此, α^{**} 是 V^* 的对偶空间 V^{**} 中的元素.

命题

若 V 是有限维线性空间, 则从 V 到 V^{**} 的映射 $\alpha \mapsto \alpha^{**}$ 是线性同构.

证明.

注意 $(\alpha+\beta)^{**}(f) = f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta) = \alpha^{**}(f) + \beta^{**}(f)$, 可知映射 $\alpha \mapsto \alpha^{**}$ 保持加法. 同理它也保持数乘, 因此它是线性映射.

证明 (续).

现在取 V 的基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 及其对偶基 $f_1, \cdots, f_n$. 注意 $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$, 要证明前述映射 $\alpha \mapsto \alpha^{**}$ 是同构, 只需证明它是单射.

若有某个 $\alpha \in V$ 被映为 0, 即 $\alpha^{**} = 0$, 则 $\alpha^{**}(f_i) = 0$, $f_i(\alpha) = 0$, $1 \le i \le n$. 这表明 α 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标为零, 从而 $\alpha = 0$. 因此, 映射 $\alpha \mapsto \alpha^{**}$ 是单射, 从而是线性同构. □

注

当 V 是无穷维线性空间时, 映射 $\alpha \mapsto \alpha^{**}$ 仍是线性的单射, 但不一定是满射, 因此这时 V^{**} 不一定与 V 同构.

由定理中的同构, 我们可将 α^{**} 与 α 等同起来, 这时 V^{**} 等同于 V, 即 V 也是 V^* 的对偶空间. 对于向量 $\alpha \in V$ 和线性函数 $f \in V^*$, 通常约定

$$\langle f, \alpha \rangle = f(\alpha),$$

称 $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : V^* \times V \to P$ 为 V 与 V^* 之间的配对.

双线性函数

定义

设 V 是数域 P 上的线性空间. 如果函数 $f\colon V\times V\to P$ 满足

- f 对第一个分量是线性的:
  $f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta)$;
- f 对第二个分量也是线性的:
  $f(\beta,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1f(\beta,\alpha_1)+k_2f(\beta,\alpha_2)$;

则称 f 为 V 上的**双线性函数**.

例

若把数域 P 看作 P 上的 1 维线性空间, 则乘法是双线性函数.

例

若 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{2\times 1}$, 则行列式 $\det(\alpha,\beta)$ 关于两个分量都是线性的, 从而是双线性函数.

度量矩阵

现在, 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基. 对于双线性函数 f, 令 $a_{ij} = f(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$, $1 \leq i, j \leq n$. 称 $n \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 为 f 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的度量矩阵.

命题

给定 $A \in P^{n\times n}$, 则存在唯一的双线性函数 f, 使得 f 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的度量矩阵为 A. 进一步, 若向量 α, β 在这组基下的坐标分别为 a, b, 则 $f(\alpha, \beta) = a^{\mathsf{T}} A b$.

证明.

存在性: 对 $\alpha, \beta \in V$, 令 $f(\alpha, \beta) = a^{\mathsf{T}} A b$, 则 f 是双线性函数, 且 $f(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ 恰好等于 A 的 (i, j) 元.
唯一性: 若 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n$, $\beta = b_1\varepsilon_1 + \cdots + b_n\varepsilon_n$, 则有

$$f(\alpha, \beta) = \sum a_i b_j f(\varepsilon_i, \varepsilon_j).$$

可见, 度量矩阵唯一地决定了双线性函数 f. □

命题

同一双线性函数在不同基下的度量矩阵是合同的.

证明.

设双线性函数 f 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的度量矩阵为 A, 在基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 下的度量矩阵为 B, 并设从前一组基到后一组基的过渡矩阵为 T. 那么, T 的第 i 列 t_i 是 η_i 在前一组基下的坐标, 我们有

$$f(\eta_i, \eta_j) = t_i^{\mathsf{T}} A t_j,$$

可见, 度量矩阵 $B = T^{\mathsf{T}} A T$. □

反过来, 容易证明, 合同的两个矩阵可以看作同一双线性函数在不同基下的度量矩阵.

思考题

如果 V 上的双线性函数 f 和 g 满足 $f(\alpha, \beta) = g(\beta, \alpha), \forall \alpha, \beta \in V$, 那么, 它们在同一组基下的度量矩阵有什么关系?

非退化的双线性函数

定义

设 f 是线性空间 V 上的双线性函数. 对于 $\alpha \in V$, 如果线性函数 $f(\alpha, \cdot)$ 为零, 即

$$f(\alpha, \beta) = 0, \quad \forall \beta \in V,$$

则称 α 为 f 的一个左根向量. 所有左根向量构成的子空间称为 f 的左根. 类似可以定义右根向量和右根.

命题

设 f 是 n 维线性空间 V 上的双线性函数. 则以下条件等价

(1) f 的左根为零;

(2) f 在任一组基下的度量矩阵是可逆的;

(3) f 的右根为零.

证明.

设 f 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的度量矩阵为 A. 并设向量 α, β 在这组基下的坐标分别为 x, y. 那么

$$f(\alpha, \beta) = x^{\mathsf{T}} A y.$$

可见, f 的左根为零

$\iff$ 使得 $f(\alpha, \beta) = 0$ 对任意 β 成立的向量 α 只有零

$\iff$ 使得 $x^{\mathsf{T}} A y = 0$ 对任意 y 成立的列向量 x 只有零

$\iff$ 线性方程组 $x^{\mathsf{T}} A = 0$ 只有零解

$\iff$ 矩阵 A 可逆.

同理可证, f 的右根为零 $\iff$ 矩阵 A 可逆. □

如果双线性函数 f 满足上述任意一个条件, 则称为非退化的或 满秩的.

思考题

(**) 证明 $P^{n \times n}$ 上的双线性函数 $f(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$ 是非退化的.

非退化的双线性函数有很好的性质.

引理 (表示引理)

若 f 是有限维线性空间 V 上的非退化双线性函数, 则对任意 $u \in V^*$, 存在 $\alpha \in V$, 使得 $u(\beta) = f(\alpha, \beta)$, $\forall \beta \in V$.

证明.

考虑线性映射 $\Phi : V \to V^*$ 如下: $\Phi(\alpha) = f(\alpha, \cdot)$. 由于 f 非退化, 使得线性函数 $f(\alpha, \cdot)$ 为零的 α 只有零, 所以 Φ 的核为零. 这表明 Φ 是单射. 结合 $\dim V = \dim V^*$ 可知 Φ 是满射. □

思考题

(*) 若 f 是有限维线性空间 V 上的非退化双线性函数, 则对任意 $u \in V^*$, 存在 $\beta \in V$, 使得 $u(\alpha) = f(\alpha, \beta)$, $\forall \alpha \in V$.

给定双线性函数 f. 如果向量 α 与 β 满足 $f(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α 与 β 是正交的. 注意这时不一定有 $f(\beta, \alpha) = 0$, 即 β 与 α 不一定是正交的.

反对称双线性函数

定义

如果线性空间 V 上的双线性函数 f 满足

$$f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha),\quad \forall\alpha,\beta\in V,$$

则称 f 为反对称的.

容易看出, f 是反对称的, 当且仅当 f 在任意一组基下的度量矩阵是反对称的: 事实上, 若 f 是反对称的, 则 $f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=-f(\varepsilon_j,\varepsilon_i)$, 表明 f 的度量矩阵是反对称的; 反之, 若度量矩阵 A 是反对称的, 则由 $a^{\mathsf T}Ab=(a^{\mathsf T}Ab)^{\mathsf T}=b^{\mathsf T}A^{\mathsf T}a=-b^{\mathsf T}Aa$ 可知 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$.

例

如果 u 和 v 是 V 上的线性函数, 则如下定义的双线性函数 $u\wedge v$ 是反对称的

$$(u\wedge v)(\alpha,\beta)=u(\alpha)v(\beta)-v(\alpha)u(\beta),\quad \forall\alpha,\beta\in V.$$

例

若 f 是双线性函数, 则如下定义的双线性函数 F 是反对称的

$$F(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\big(f(\alpha,\beta)-f(\beta,\alpha)\big),\quad \forall \alpha,\beta\in V.$$

称 F 为 f 的反对称化.

例

在 $\mathbb{R}^3$ 中取定向量 γ, 定义双线性函数 $f(\alpha,\beta)=(\alpha\times\beta)\cdot\gamma$, 则 f 是反对称的.

为了讨论反对称双线性函数的结构, 我们采用分解的思路.

引理 (分解引理)

设 f 是有限维线性空间 U 上的双线性函数, S 是 U 的子空间, 且 $f|_S$ 是非退化的, 则 $U = S \oplus S^{\perp}$, 其中

$$S^{\perp} = \{\alpha \in U \,|\, f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in S\}.$$

证明.

由于 $f|_S$ 非退化, 表示引理告诉我们, S 上的每个线性函数一定可以写为 $f(\gamma, \cdot\,)$ 的形式.

现在, 任取 $\alpha \in U$, 则 $f(\alpha, \cdot)$ 是 S 上的线性函数, 从而存在某个 $\gamma \in S$, 使得 $f(\alpha, \cdot\,) = f(\gamma, \cdot\,)$, 即 $f(\alpha, \beta) = f(\gamma, \beta)$ 对任意 $\beta \in S$ 成立. 令 $\eta = \alpha - \gamma$, 则 $f(\eta, \beta) = 0$ 对任意 $\beta \in S$ 成立, 表明 $\eta \in S^{\perp}$. 于是 $\alpha = \gamma + \eta \in S + S^{\perp}$. 这就证明了 $U = S + S^{\perp}$.

最后, 若 $\alpha \in S \cap S^{\perp}$, 则由 $S^{\perp}$ 的定义知 $f(\alpha, \beta) = 0$ 对任意 $\beta \in S$ 成立. 由 $f|_S$ 非退化可知 $\alpha = 0$. 因此 $U = S \oplus S^{\perp}$. □

命题

设 f 是有限维线性空间 U 上的非退化反对称双线性函数, 则存在 U 的一组基, 使得 f 在这组基下的度量矩阵为 $\mathrm{diag}(J,\cdots,J)$, 其中 $J=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$. 特别地, U 的维数一定是偶数.

证明.

任取 U 中非零向量 η, 则由 f 非退化可知线性函数 $f(\eta,\cdot):U\to P$ 不为零, 从而是满射. 因此存在 $\xi\in U$ 使得 $f(\eta,\xi)=1$. 易知 η,ξ 线性无关, 从而它们张成一个 2 维的子空间 S, $f|_S$ 在基 η,ξ 下的度量矩阵恰好是 J. 特别地, $f|_S$ 是非退化的.

由分解引理可知, $U=S\oplus S^{\perp}$, 其中 $S^{\perp}=\{\alpha\in U\,|\,f(\alpha,\gamma)=0,\forall\gamma\in S\}$. 由于 f 是反对称的, 我们有 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)=0$, $\forall\alpha\in S$, $\beta\in S^{\perp}$. 这样, 只需继续考虑 $f|_{S^{\perp}}$.

注意 $f|_{S^{\perp}}$ 仍是非退化的, 于是反复使用上面的推理, 就完成了命题的证明. □

弄清了非退化情形, 一般情形就比较简单了.

现在, 设 f 是 V 上的反对称双线性函数, W 是它的左根 (从而也是右根). 任取 W 在 V 中的补子空间 U, 则 f 限制在 U 上是非退化的反对称双线性函数. 利用上面的结论, 就得到了

定理

若 f 是有限维线性空间 V 上的反对称双线性函数, 则存在 V 的一组基, 使得 f 在这组基下的度量矩阵为 $\operatorname{diag}(J, \cdots, J, 0, \cdots, 0)$, 其中 $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

这个结论也可叙述为反对称矩阵的性质: 若 $A \in P^{n\times n}$ 是反对称的, 则 A 合同于 $\operatorname{diag}(J, \cdots, J, 0, \cdots, 0)$.

思考题

(***) 若 f 是有限维线性空间 V 上的反对称双线性函数, 则存在 V^* 的一组基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$, 使得

$$f = v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4 + \cdots + v_{2r-1} \wedge v_{2r}.$$

对称双线性函数

定义

线性空间 V 上的双线性函数 f 若满足

$$f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha),\quad \forall\alpha,\beta\in V,$$

则称 f 是对称的.

容易看出, f 是对称的, 当且仅当 f 在任意一组基下的度量矩阵是对称的.

例

若 v 是线性空间 V 上的线性函数, 定义 $v\cdot v$ 为如下二元函数

$$(v\cdot v)(\alpha,\beta)=v(\alpha)v(\beta),\quad \forall\alpha,\beta\in V.$$

则 $v\cdot v$ 是对称的双线性函数.

例

对于任意双线性函数 f, 定义

$$F(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\big(f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)\big),\quad \alpha,\beta\in V,$$

则 F 是对称的, 称为 f 的对称化.

与反对称情形一样, 我们可运用分解引理来弄清对称双线性函数的结构. 其关键仍是先弄清非退化情形.

引理

若 f 是线性空间 U 上的非退化对称双线性函数, 则存在 $\alpha\in U$, 使得 $f(\alpha,\alpha)\neq 0$.

证明.

由 f 的对称性可知极化恒等式 $f(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}\big(f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-f(\alpha-\beta,\alpha-\beta)\big)$ 成立. 如果 $f(\alpha,\alpha)=0$ 对任意 $\alpha\in U$ 成立, 则 f 恒为零, 与 f 非退化矛盾. $\square$

定理

若 f 是有限维线性空间 V 上的对称双线性函数，则存在 V 的一组基，使得 f 在这组基下的度量矩阵为对角矩阵.

证明.

由于 f 是对称的，所以它的左根 W 也是右根. 任取 W 在 V 中的补子空间 U, 则 $f|_U$ 是非退化的.

由引理知存在 $\alpha \in U$ 使得 $f(\alpha,\alpha) \neq 0$, 因此 f 限制在 $S = L(\alpha)$ 上是非退化的，分解引理告诉我们 $U = S \oplus S^{\perp}$. 这时 $f|_{S^{\perp}}$ 仍是非退化的，反复运用上述推理，就找到了想要的一组基. $\square$

这个结论也可叙述为对称矩阵的性质：若 $A \in P^{n\times n}$ 是对称矩阵，则 A 合同于对角矩阵.

思考题

(**) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，f 是 V 上的对称双线性函数，则存在 V^* 的一组基 $v_1, \cdots, v_n$ 以及 $d_1, \cdots, d_n \in P$, 使得

$$f = d_1\, v_1 \cdot v_1 + \cdots + d_n\, v_n \cdot v_n.$$

二次齐次函数

定义

设 f 是 n 维线性空间 V 上的对称双线性函数, 这时 V 上的函数 $q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$ 称为与 f 对应的二次齐次函数, 也称为二次型.

由 f 的双线性性质可知 $q(k\alpha) = k^2 q(\alpha), \forall \alpha \in V, k \in P$.
此外, 我们可利用极化恒等式从二次型 q 恢复出对称双线性函数 f, 即

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}\big(q(\alpha + \beta) - q(\alpha - \beta)\big).$$

例

在 $P^{n\times n}$ 上, 定义对称双线性函数 $f(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$, 则与 f 对应的二次型是 $q(A) = \mathrm{tr}(A^2)$.

例

设 v 是线性空间 V 上的线性函数, 则 $v\cdot v$ 是对称双线性函数, 与它对应的二次型记作 v^2, 即 $v^2(\alpha)=(v(\alpha))^2, \forall\alpha\in V$.

思考题

(**) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, q 是 V 上的二次型. 证明存在 V^* 的一组基 $v_1,\cdots,v_n$ 及 $d_1,\cdots,d_n\in P$, 使得

$$q=d_1v_1^2+\cdots+d_nv_n^2.$$

现在, 设 f 是 V 上的对称双线性函数, q 是与 f 对应的二次型. 如果取定 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$, 设 f 在这组基下的度量矩阵为 A, 向量 α 在这组基下的坐标为 $x\in P^{n\times 1}$, 则

$$q(\alpha)=f(\alpha,\alpha)=x^{\mathsf{T}}Ax.$$

可见 q 是坐标 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathsf{T}}$ 的二次齐次多项式, 也就是上一章所说的二次型, 它是上述抽象概念的具体化.