基本初等函数的连续性

利用上一节连续函数的性质, 我们首先讨论基本初等函数在它们各自的定义域上的连续性.

常数函数的连续性

常数函数显然是连续的.

三角函数的连续性

3.1节例1证明了$\sin x$在定义域$\mathbb{R}$连续. 由复合函数的连续性知, $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$在定义域$\mathbb{R}$连续. 再由连续函数除法运算的连续性知, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$在$\cos x \neq 0$的所有点都连续. 因为当$x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$时$\cos x \neq 0$, 所以$\tan x$在定义域连续. 同理, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$也在各自的定义域连续.

反三角函数的连续性

$\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$严格递增且连续, 由反函数的连续性知, 反三角函数$\arcsin x$在定义域$[-1,1]$连续. 同理, $\arccos x$在定义域$[-1,1]$连续.

反三角函数的连续性

下面证明$\arctan y$在定义域$\mathbb{R}$连续. 对于任意的$y_0 \in \mathbb{R}$, 记$x_0 = \arctan y_0$. 因为$x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以存在$a$, b使得$x_0 \in (a,b)$且$[a,b] \subseteq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 由于$\tan x$在$[a,b]$严格递增且连续, 由反函数的连续性知, $\arctan y$在$[\tan a, \tan b]$连续. $y_0 = \tan x_0 \in (\tan a, \tan b)$, 故而$\arctan y$在$y_0$连续, 再由$y_0$在$\mathbb{R}$中的任意性知, $\arctan y$在定义域$\mathbb{R}$连续.

基本初等函数的连续性

指数函数的连续性

由3.1节的例2知a^x $(a>0,\ a\neq 1)$在定义域$\mathbb{R}$连续.

对数函数的连续性

利用反函数的连续性, 类似于证明$\arctan x$连续性的过程可得, 对数函数$\log_a x$在定义域$(0,+\infty)$连续.

幂函数的连续性

设μ为任意非零实数, 当$x>0$时, 幂函数$x^\mu=e^{\mu\ln x}$. 由于e^u在$\mathbb{R}$连续, $u=\mu\ln x$在$x>0$连续, 由复合函数的连续性知, 幂函数$x^\mu=e^{\mu\ln x}$在$x>0$连续. 当$\mu>0$时, 还有$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\mu=0=0^\mu$. 故而, 当$\mu<0$时, 幂函数$x^\mu$在$(0,+\infty)$连续, 当$\mu>0$时, 幂函数$x^\mu$在$[0,+\infty)$ 连续. 对于更细致的情况, 利用幂函数的奇偶性可进一步得到幂函数在相应的定义域连续, 具体的讨论请读者自行完成.

至此, 我们证明了基本初等函数在它们各自的定义域上的连续性. 由初等函数的定义, 函数四则运算的连续性与复合函数的连续性进一步得到下述定理.

定理 1

所有初等函数在它们各自的定义域上都是连续的.

例 1

讨论函数$y=\dfrac{x}{\tan x}$的间断点.

解答

函数$y=\dfrac{x}{\tan x}$是初等函数, 故它的间断点只能是无定义的点, 为$n\pi+\dfrac{\pi}{2}$与$n\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 由于$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1$,

$$\lim_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}=0,\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\lim_{x\to n\pi}\frac{x}{\tan x}=\infty,\ (n=\pm1,\pm2,\cdots)$$

故而, $n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$与0是可去间断点; $n\pi$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$是第二类间断点.

例 2

讨论函数$y=x[x]$的间断点.

解答

由函数乘法的连续性, 若函数$[x]$连续, 则必有函数$y=x[x]$连续, 故函数$y=x[x]$可能的间断点只能是$[x]$的间断点, 即整数点n. 由于$\lim_{x\to 0} x[x]=0=0[0]$, 所以, $x=0$是连续点. $n\neq 0$时, $\lim_{x\to n^+} x[x]=n^2\neq n(n-1)=\lim_{x\to n^-} x[x]$, 所以, $x=n\neq 0$是第一类间断点.

换个角度来看，$y=x[x]$可以用分段定义的方式表示为$y=nx$, 其中$x\in[n,n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$. 如果分段定义的函数在每一段上都是初等函数，那么根据初等函数的连续性，间断点只可能是分段点. 因此，函数$y=x[x]$可能的间断点只能是整数点n, 只需判断函数在整数点n是否连续，若为间断点则指出间断点的类型.

例 3

求幂指函数的极限 $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$.

解答

设 $y=(1+\sin x)^{\cot x}$, 则 $\ln y=\cot x\ln(1+\sin x)$. 利用等价无穷小替换与三角函数的连续性, 有

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\cot x\ln(1+\sin x)=\lim_{x\to 0}\cot x\sin x=\lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

再由指数函数的连续性, 有

$$y=\mathrm{e}^{\ln y}\to\mathrm{e}^1=\mathrm{e},\quad x\to 0.$$

连续函数的整体性质

- 有界定理

连续函数的整体性质

- 有界定理
- 最大最小值定理

连续函数的整体性质

- 有界定理
- 最大最小值定理
- 介值定理以及根的存在定理.

- 有界定理
- 最大最小值定理
- 介值定理以及根的存在定理.

本章第二节主要讨论了连续函数的一些局部性质, 本节讨论闭区间上连续函数的整体性质. 闭区间在拓扑学里属于“紧集”, 是十分重要的集类, “紧集”上的“连续映射”有许多重要的性质, 具体到这里就是闭区间上连续函数的性质. 开区间与闭区间虽仅是端点之差, 但是在拓扑学里属于不同的集类, 连续函数在闭区间上具有的性质, 在开区间上通常不成立. 这些性质的证明将放在第六章进行, 在此只需理解这些性质并能熟练地加以运用.

定理 2 (有界定理)

闭区间上的连续函数必有界.

定理 2 (有界定理)

闭区间上的连续函数必有界.

若闭区间$[a, b]$上的某个连续函数$f(x)$无界，则直观上，存在$x_0 \in [a, b]$, 使得$f(x)$在x_0邻近无界，即存在x_0的某个邻域$B(x_0)$, 使得$f(x)$在$B(x_0) \cap [a, b]$上无界. 这与连续函数$f(x)$的局部有界性矛盾！

定理 2 (有界定理)

闭区间上的连续函数必有界.

若闭区间$[a, b]$上的某个连续函数$f(x)$无界，则直观上，存在$x_0 \in [a, b]$，使得$f(x)$在x_0邻近无界，即存在x_0的某个邻域$B(x_0)$，使得$f(x)$在$B(x_0) \cap [a, b]$上无界. 这与连续函数$f(x)$的局部有界性矛盾！

上面给出的是一种证明有界定理的思路，但并非证明. 直观上成立的命题是否真的成立要用演绎推理来验证. 若命题成立则要给出证明，若命题不成立则要给出反例. 大家在第六章学习了实数理论之后，就可以应用致密性定理来证明上面的直观上成立的命题.

其他类型区间的情形

命题 1

若区间I上的任何连续函数都有界，则区间I必为闭区间.

其他类型区间的情形

命题 1

若区间I上的任何连续函数都有界，则区间I必为闭区间.

$(-\infty,+\infty)$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$的情形

容易看到，连续函数$f(x)=x$在这样的区间上无界.

其他类型区间的情形

命题 1

若区间I上的任何连续函数都有界，则区间I必为闭区间.

$(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$的情形

容易看到，连续函数$f(x) = x$在这样的区间上无界.

(a, b), $(a, b]$的情形

容易看到，连续函数$f(x) = \dfrac{1}{x-a}$在这样的区间上无界.

命题 1

若区间I上的任何连续函数都有界，则区间I必为闭区间.

$(-\infty,+\infty)$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$的情形

容易看到，连续函数$f(x)=x$在这样的区间上无界.

(a,b), $(a,b]$的情形

容易看到，连续函数$f(x)=\dfrac{1}{x-a}$在这样的区间上无界.

$[a,b)$的情形

容易看到，连续函数$f(x)=\dfrac{1}{x-b}$在这样的区间上无界.

(a,b)上连续函数有界的一个充分必要条件

命题 2

设函数$f(x)$在(a,b)连续，则$f(x)$在(a,b)有界的充分必要条件是$f(x)$在a和b处局部有界，即存在$\delta > 0$, 使得$f(x)$在$(a, a+\delta) \cup (b-\delta, b)$有界.

(a,b)上连续函数有界的一个充分必要条件

命题 2

设函数$f(x)$在(a,b)连续，则$f(x)$在(a,b)有界的充分必要条件是$f(x)$在a和b处局部有界，即存在$\delta > 0$，使得$f(x)$在$(a, a+\delta) \cup (b-\delta, b)$有界.

思考

设函数$f(x)$在$(a,b]$连续且无界，是否必有$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$?

命题 2

设函数$f(x)$在(a,b)连续，则$f(x)$在(a,b)有界的充分必要条件是$f(x)$在a和b处局部有界，即存在$\delta > 0$, 使得$f(x)$在$(a,a+\delta)\cup(b-\delta,b)$有界.

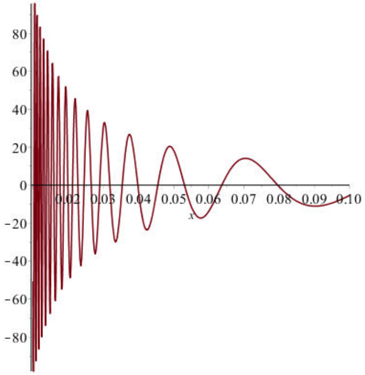
思考

设函数$f(x)$在$(a,b]$连续且无界，是否必有$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$?

解答

上面问题的答案是否定的. 例如，$f(x)=\dfrac{1}{x-a}\sin\dfrac{1}{x-a}$在$(a,b]$连续且无界，但$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\neq\infty$.

函数$f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$的图象



从函数图象就可以看到，$f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在$(0, a]$连续且无界，但$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \infty$.

例 4

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且$\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))=\infty$. 证明$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

例 4

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且$\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))=\infty$. 证明$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

证明

用反证法. 假设$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\neq\infty$, 则存在$M_0>0$, 对任意$X>0$, 存在$x$, 使得$|x|>X$且$|f(x)|\leqslant M_0$. 依次取$X=1,2,\cdots$, 将相应的$x$依次记为$x_1,x_2,\cdots$, 则由$|x_n|>n\ (n=1,2,\cdots)$知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

例 4

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且$\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))=\infty$. 证明$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

证明

用反证法. 假设$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\neq\infty$, 则存在$M_0>0$, 对任意$X>0$, 存在$x$, 使得$|x|>X$且$|f(x)|\leqslant M_0$. 依次取$X=1,2,\cdots$, 将相应的$x$依次记为$x_1,x_2,\cdots$, 则由$|x_n|>n\ (n=1,2,\cdots)$知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

证明（续）

一方面, 因为$\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))=\infty$, 所以由海涅定理知$\lim\limits_{n\to\infty} f(f(x_n))=\infty$; 另一方面, 根据有界定理可知$f(x)$在$[-M_0,M_0]$上有界, 故由$\{f(x_n)\}\subseteq[-M_0,M_0]$知数列$\{f(f(x_n))\}$有界. 矛盾!

对于例1做更深入的探讨

例 1

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且$\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))=\infty$. 证明$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

对于例1做更深入的探讨

例 1

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且$\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))=\infty$. 证明$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

由本题的结论及复合函数的极限定理可知：对于$(-\infty,+\infty)$上的连续函数$f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))=\infty$当且仅当$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

对于例1做更深入的探讨

例 1

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且$\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))=\infty$. 证明$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

由本题的结论及复合函数的极限定理可知：对于$(-\infty,+\infty)$上的连续函数$f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))=\infty$当且仅当$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

除了学习证明方法之外，我们可以做进一步的思考与探讨. 由连续函数的介值定理可知：对于$(a,+\infty)$上的连续函数$f(x)$, 若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$, 则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$或$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. 因此，我们可以分情形讨论.

通过探讨得到新的结果

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x))$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

通过探讨得到新的结果

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x))$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

由此就得到下面的命题.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x))$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

由此就得到下面的命题.

命题 3

不存在$(-\infty,+\infty)$上的连续函数$f(x)$，使得$\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x)) = +\infty$且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = -\infty$.

命题 3

不存在$(-\infty,+\infty)$上的连续函数$f(x)$，使得$\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x)) = +\infty$且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = -\infty$.

命题 3

不存在$(-\infty,+\infty)$上的连续函数$f(x)$，使得$\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x)) = +\infty$且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = -\infty$.

从函数方程的角度，上面的命题说明：对于函数方程$f(f(x)) = h(x)$，其中$h(x)$是一个给定的$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，若$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$且$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$，则该函数方程没有连续解.

命题 3

不存在$(-\infty,+\infty)$上的连续函数$f(x)$，使得$\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x)) = +\infty$且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = -\infty$.

从函数方程的角度，上面的命题说明：对于函数方程$f(f(x)) = h(x)$，其中$h(x)$是一个给定的$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，若$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$且$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$, 则该函数方程没有连续解.

于是下面的问题就可以加强其结论：函数方程$f(f(x)) = -x^3 + x^2 + 1$不仅没有可微的解，实际上该方程也没有连续解.

命题 3

不存在$(-\infty,+\infty)$上的连续函数$f(x)$，使得$\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x)) = +\infty$且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = -\infty$.

从函数方程的角度，上面的命题说明：对于函数方程$f(f(x)) = h(x)$，其中$h(x)$是一个给定的$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，若$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$且$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$, 则该函数方程没有连续解.

于是下面的问题就可以加强其结论：函数方程$f(f(x)) = -x^3 + x^2 + 1$不仅没有可微的解，实际上该方程也没有连续解.

教材习题4(B)的第3题

是否存在实轴上的可微函数$f(x)$满足条件$f(f(x)) = -x^3 + x^2 + 1$? 说明理由.

定理 3 (最大最小值定理)

闭区间上的连续函数必能取得最大值和最小值.

定理 3 (最大最小值定理)

闭区间上的连续函数必能取得最大值和最小值.

命题 4

若区间I上的任何连续函数都能取得最大值和最小值，则区间I必为闭区间.

定理 3 (最大最小值定理)

闭区间上的连续函数必能取得最大值和最小值.

命题 4

若区间I上的任何连续函数都能取得最大值和最小值，则区间I必为闭区间.

如$f(x) = \dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$无上界, $f(x) = x$在区间$(0,1)$虽然有界, 但是既无最大值也无最小值. 其他类型区间的情形请自行举例.

例 2

设$f(x)$在$[a,b]$连续且对任何$x \in [a,b]$，都存在$y \in [a,b]$，使得$|f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x)|$. 证明存在点$\xi \in [a,b]$，使得$f(\xi) = 0$.

例 2

设$f(x)$在$[a,b]$连续且对任何$x\in[a,b]$, 都存在$y\in[a,b]$, 使得$|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|$. 证明存在点$\xi\in[a,b]$, 使得$f(\xi)=0$.

一种容易想到但存在困难的思路

容易想到，任意取定$x_1\in[a,b]$, 则由题设条件知存在$x_2\in[a,b]$, 使得$f(x_2)\leqslant\frac{1}{2}|f(x_1)|$, 再由题设条件知存在$x_3\in[a,b]$, 使得$f(x_3)\leqslant\frac{1}{2}|f(x_2)|$, 依此类推，就得到数列$\{x_n\}\subseteq[a,b]$, 满足$f(x_{n+1})\leqslant\frac{1}{2}|f(x_n)|$, $n=1,2,\cdots$. 若数列$\{x_n\}$收敛于点$\xi\in[a,b]$, 则$f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$. 但是，困难在于数列$\{x_n\}$未必收敛.

例 2

设$f(x)$在$[a,b]$连续且对任何$x \in [a,b]$, 都存在$y \in [a,b]$, 使得$|f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x)|$. 证明存在点$\xi \in [a,b]$, 使得$f(\xi)=0$.

例 2

设$f(x)$在$[a,b]$连续且对任何$x\in[a,b]$, 都存在$y\in[a,b]$, 使得$|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|$. 证明存在点$\xi\in[a,b]$, 使得$f(\xi)=0$.

用最大最小值定理的证明

因为f在$[a,b]$连续, 所以$|f(x)|$在$[a,b]$连续. 于是$|f(x)|$在$[a,b]$有最小值m. 设$|f(\xi)|=m$, $\xi\in[a,b]$. 由已知得: $\exists y\in[a,b]$, 使$|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(\xi)|=\frac{m}{2}$. 若$m\neq 0$, 这与$m$为$|f(x)|$ 的最小值矛盾, 故$|f(\xi)|=m=0$. 于是$f(\xi)=0$.

定理 4 (根的存在定理)

设$f(x)$在$[a,b]$上连续并且$f(a)f(b)<0$, 则在(a,b)中必有方程$f(x)=0$的根.

定理 4 (根的存在定理)

设$f(x)$在$[a,b]$上连续并且$f(a)f(b)<0$, 则在(a,b)中必有方程$f(x)=0$的根.

定理 5 (介值定理)

设函数$f(x)$在$[a,b]$连续且$f(a)\neq f(b)$, 则对介于$f(a)$与$f(b)$之间的任何实数C, 必存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f(\xi)=C$.

定理 4 (根的存在定理)

设$f(x)$在$[a,b]$上连续并且$f(a)f(b)<0$, 则在(a,b)中必有方程$f(x)=0$的根.

定理 5 (介值定理)

设函数$f(x)$在$[a,b]$连续且$f(a)\neq f(b)$, 则对介于$f(a)$与$f(b)$之间的任何实数C, 必存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f(\xi)=C$.

不难看到，根的存在定理是介值定理的特殊情形. 实际上，这两个定理是等价的，也可以利用根的存在定理证明介值定理.

根的存在定理以及介值定理

定理 4 (根的存在定理)

设$f(x)$在$[a,b]$上连续并且$f(a)f(b)<0$, 则在(a,b)中必有方程$f(x)=0$的根.

定理 5 (介值定理)

设函数$f(x)$在$[a,b]$连续且$f(a)\neq f(b)$, 则对介于$f(a)$与$f(b)$之间的任何实数C, 必存在$\xi\in(a,b)$, 使得$f(\xi)=C$.

不难看到，根的存在定理是介值定理的特殊情形. 实际上，这两个定理是等价的，也可以利用根的存在定理证明介值定理.

令$g(x)=f(x)-C$, 则$g(x)$在$[a,b]$连续且$g(a)g(b)<0$. 据根的存在定理知, 存在$\xi\in(a,b)$, 使得$g(\xi)=0$, 即$f(\xi)=C$.

介值定理的推论

介值定理指出，若$f(x)$在$[a,b]$连续，不妨设$f(a) < f(b)$，则$f(x)$在$[a,b]$内必能取得$f(a)$与$f(b)$之间的一切值，即$[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b])$. 由此，结合最大最小值定理不难得到下面的推论.

介值定理的推论

介值定理指出，若$f(x)$在$[a,b]$连续，不妨设$f(a)<f(b)$，则$f(x)$在$[a,b]$内必能取得$f(a)$与$f(b)$之间的一切值，即$[f(a),f(b)]\subseteq f([a,b])$. 由此，结合最大最小值定理不难得到下面的推论.

推论 1

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，M和m分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值，则$f(x)$的值域是$[m,M]$.

介值定理的推论

介值定理指出，若$f(x)$在$[a,b]$连续，不妨设$f(a) < f(b)$，则$f(x)$在$[a,b]$内必能取得$f(a)$与$f(b)$之间的一切值，即$[f(a),f(b)] \subseteq f([a,b])$. 由此，结合最大最小值定理不难得到下面的推论.

推论 1

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，M和m分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值，则$f(x)$的值域是$[m,M]$.

设I是数集，则I是区间的充分必要条件是I至少包含两个元素，且对任意$a,b \in I$，$a < b$，都有$[a,b] \in I$. 请大家自行验证这个命题和下面的推论.

介值定理指出，若$f(x)$在$[a,b]$连续，不妨设$f(a) < f(b)$，则$f(x)$在$[a,b]$内必能取得$f(a)$与$f(b)$之间的一切值，即$[f(a),f(b)] \subseteq f([a,b])$。由此，结合最大最小值定理不难得到下面的推论.

推论 1

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，M和m分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值，则$f(x)$的值域是$[m,M]$.

设I是数集，则I是区间的充分必要条件是I至少包含两个元素，且对任意$a,b \in I$，$a < b$，都有$[a,b] \in I$。请大家自行验证这个命题和下面的推论.

推论 2

设$f(x)$在区间I上连续且不恒为常数，则$f(x)$的值域是区间.

例题

例 3

证明任一实系数奇次方程至少有一个实根.

例题

例 3

证明任一实系数奇次方程至少有一个实根.

证明

不妨设方程为$f(x)=x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$, a_i, $i=1,2,...,2n+1$为实数. 因为$x\neq 0$时, 有

$$f(x)=x^{2n+1}\left(1+a_1\frac{1}{x}+\cdots+a_{2n}\frac{1}{x^{2n}}+a_{2n+1}\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

所以, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. 由无穷大量的定义知, 存在$X>0$使$f(X)>0$, $f(-X)<0$. 显然, $f(x)$在$[-X,X]$连续, 应用根的存在定理知, 在$(-X,X)$内方程$f(x)=0$至少有一个根.

例题

例 4

设函数$f(x)$在区间I上连续且是单射, 证明$f(x)$在I上严格单调.

例题

例 4

设函数$f(x)$在区间I上连续且是单射, 证明$f(x)$在I上严格单调.

证明

用反证法. 假设$f(x)$在I上不是严格单调的, 则存在$x_1, x_2, x_3 \in I$满足$x_1 < x_2 < x_3$,

$$(f(x_1) - f(x_2))(f(x_2) - f(x_3)) \leqslant 0,$$

$f(x)$单射意味着$f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$互不相等, 据此不妨设$f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_2) < f(x_3)$.

例 4

设函数$f(x)$在区间I上连续且是单射, 证明$f(x)$在I上严格单调.

例 4

设函数$f(x)$在区间I上连续且是单射, 证明$f(x)$在I上严格单调.

证明（续）

于是存在实数C满足

$$f(x_2) < C < \min\{f(x_1), f(x_3)\}.$$

在$[x_1, x_2]$与$[x_2, x_3]$上分别应用介值定理, 则存在$\xi_1 \in (x_1, x_2)$, $\xi_2 \in (x_2, x_3)$, 使得

$$f(\xi_1) = C = f(\xi_2).$$

这与$f(x)$单射矛盾. 所以$f(x)$在I上严格单调.

例4结论的应用

例 4

设函数$f(x)$在区间I上连续且是单射, 证明$f(x)$在I上严格单调.

例 4

设函数$f(x)$在区间I上连续且是单射, 证明$f(x)$在I上严格单调.

例4的结论在解决问题中时常会被使用. 在一些关于连续函数的问题中，当看到连续函数是单射，就可以由例4的结论知该连续函数是严格单调，这往往给进一步分析问题和解决问题带来很大的方便. 大家自行思考一下下面关于函数方程的命题的证明.

例 4

设函数$f(x)$在区间I上连续且是单射, 证明$f(x)$在I上严格单调.

例4的结论在解决问题中时常会被使用. 在一些关于连续函数的问题中，当看到连续函数是单射，就可以由例4的结论知该连续函数是严格单调，这往往给进一步分析问题和解决问题带来很大的方便. 大家自行思考一下下面关于函数方程的命题的证明.

若$h(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且严格单调递减，则函数方程$f(f(x)) = h(x)$没有连续解.

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，若任意有理数$r \in [a,b]$都是$f(x)$的最值点，则$f(x)$是$[a,b]$上的常数函数.

(A) 成立

(B) 不成立

判断题

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$f(0) = 0$, $f(1) = 1$. 若对任意实数x和y, $x - y$是有理数当且仅当$f(x) - f(y)$是有理数, 则对任意实数x, 都有$f(x) = x$.

(A) 成立

(B) 不成立