分部积分法

数学分析I

第29讲

December 14, 2022

设$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, 即$F'(x) = f(x)$, 由求导公式$[F(x)g(x)]' = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$以及$\int [F(x)g(x)]'\mathrm{d}x = F(x)g(x) + C$, 易得

$$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

上式也可以写成

$$\int g(x)\mathrm{d}F(x) = F(x)g(x) - \int F(x)\mathrm{d}g(x). \tag{2}$$

公式(1)或(2)叫做分部积分公式. 它的实质就是通过把被积函数看成为两个函数之积, 其中一个函数$f(x)$看成是某个函数$F(x)$的导数, 然后通过交换求导的位置, 实现完成积分的目的. 为求$F(x)$, 须先对$f(x)$积分, 这就是分部积分的含义. 公式(2)有第一换元法的“凑微分”的技巧.

设$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, 那么

$$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

成立的条件是什么呢?

由(1)式的推导过程可见，(1)式成立当且仅当$f(x)g(x)$和$F(x)g'(x)$中的一个有原函数（这时就保证了另一个也有原函数）. 由“连续函数有原函数”可以得到分部积分公式成立的充分条件.

设$f(x)$在区间I上有原函数，$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, 又设$g(x)$在区间$I$上连续可导，则$F(x)g'(x)$在区间$I$上有原函数. 于是$f(x)g(x)$在区间$I$上有原函数，且(1)式成立.

公式(2)也可以写成

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u,$$

这样更方便记忆.

练习题1

设$f(x)$是$(-\infty, +\infty)$上的函数，$f(x)\sin x$和$f(x)\cos x$都在$(-\infty, +\infty)$上有原函数. 证明：$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上有原函数.

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有原函数，则$|x|f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有原函数.

(A) 成立

(B) 不成立

例题

例 1

求 $\displaystyle\int \ln x \, \mathrm{d}x$.

按分部积分公式, 有

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int \ln x \mathrm{d}(x) = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$= x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x + C.$$

例1的一般化

$$
\begin{aligned}
\int \ln^m x\,dx &= x\ln^m x - m\int \ln^{m-1} x\,dx \\
&= \frac{x}{m+1}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k(m+1)m(m-1)\cdots(m-k+1)\ln^{m-k} x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int x^n \ln^m x\,dx &= \frac{x^{n+1}\ln^m x}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n \ln^{m-1} x\,dx \\
&= \frac{x^{n+1}}{m+1}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k(m+1)m(m-1)\cdots(m-k+1)\frac{\ln^{m-k} x}{(n+1)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

这里和后面给出的一般化公式都取自Elsevier Inc.的《Table of Integrals, Series, and Products》，其结果中略去了“$+C$”. 大家在解题中务必要“$+C$”.

例题

例 2

求 $\int x \cos x \mathrm{d}x$.

按分部积分公式, 有

$$\begin{aligned}\int x\cos x\mathrm{d}x &= \int x\mathrm{d}\sin x = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x \\ &= x\sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

例2的一般化

$$\int x^{2n}\sin x\,dx=(2n)!\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!}\cos x+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)!}\sin x\right\}$$

$$\int x^{2n+1}\sin x\,dx=(2n+1)!\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!}\cos x+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!}\sin x\right\}$$

$$\int x^{2n}\cos x\,dx=(2n)!\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!}\sin x+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)!}\cos x\right\}$$

$$\int x^{2n+1}\cos x\,dx=(2n+1)!\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!}\sin x+\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!}\cos x\right\}$$

下面的积分也是应用同样的方法.

$$\int x^n e^{ax}\,dx=\frac{x^n e^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$$

$$\int x^n e^{ax}\,dx=e^{ax}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k k!\binom{n}{k}}{a^{k+1}}x^{n-k}\right)$$

例 3

求 $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \mathrm{d}x$.

分部积分两次, 有

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int \cos bx \, \mathrm{d}\mathrm{e}^{ax} \\
= \ & \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} \int \sin bx \mathrm{d}\mathrm{e}^{ax} \\
= \ & \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

上式右端第二项的积分与左端积分的相同, 移项并整理, 得到

$$\int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C.$$

在例3的基础上拓展

$$\int x^p e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{x^p e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{p}{a^2+b^2}\int x^{p-1} e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)\, dx$$
$$= \frac{x^p e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+t) - \frac{p}{\sqrt{a^2+b^2}}\int x^{p-1} e^{ax}\sin(bx+t)\, dx$$

$$\int x^p e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{x^p e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) - \frac{p}{a^2+b^2}\int x^{p-1} e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)\, dx$$
$$= \frac{x^p e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+t) - \frac{p}{\sqrt{a^2+b^2}}\int x^{p-1} e^{ax}\cos(bx+t)\, dx$$

$$\int x^n e^{ax} \sin bx \, dx = e^{ax}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1} n! x^{n-k+1}}{(n-k+1)!\,(a^2+b^2)^{k/2}} \sin(bx+kt)$$

$$\int x^n e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1} n! x^{n-k+1}}{(n-k+1)!\,(a^2+b^2)^{k/2}} \cos(bx+kt)$$

练习题2

求$\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sin x}\cdot\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{e}^{\sin x}\cdot\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\\
=\ &\int \mathrm{e}^{\sin x}x\cos x\mathrm{d}x-\int \mathrm{e}^{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\\
=\ &\int x\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\sin x}\right)-\int \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\\
=\ &x\mathrm{e}^{\sin x}-\int \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}+\int \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x\\
=\ &x\mathrm{e}^{\sin x}-\mathrm{e}^{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}+C\\
=\ &\mathrm{e}^{\sin x}(x-\sec x)+C.
\end{aligned}
$$

有时能直接看出原函数

$$\begin{aligned}
&\int e^{\sin x} \cdot \frac{x\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx \\
= &\int e^{\sin x} x\cos x dx - \int e^{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \\
= &\int e^{\sin x}(x\cos x + 1) dx - \int e^{\sin x} \cdot \left(1 + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) dx \\
= &\int d\left(xe^{\sin x}\right) - \int d\left(e^{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) \\
= &e^{\sin x}(x - \sec x) + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx \\
= &\int d\left(xe^{x+\frac{1}{x}}\right) \\
= &xe^{x+\frac{1}{x}} + C.
\end{aligned}$$

例 4

求$\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x$, $a>0$.

分部积分, 得到

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x &= x\sqrt{x^2-a^2}-\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x\\ &= x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x-a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.\end{aligned}$$

例4的拓展

$$u=\sqrt{a+cx^2}.$$

$$\int u^5\,dx=\frac{1}{6}xu^5+\frac{5}{24}axu^3+\frac{5}{16}a^2xu+\frac{5}{16}a^3I_1$$

$$\int u^3\,dx=\frac{1}{4}xu^3+\frac{3}{8}axu+\frac{3}{8}a^2I_1$$

$$\int u\,dx=\frac{1}{2}xu+\frac{1}{2}aI_1$$

$$\int\frac{dx}{u}=I_1$$

$$\begin{aligned} I_1&=\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(x\sqrt{c}+u\right) && [c>0]\\ &=\frac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin x\sqrt{-\frac{c}{a}} && [c<0 \text{ and } a>0] \end{aligned}$$

$$\int x^2u^3\,dx=\frac{1}{6}\frac{xu^5}{c}-\frac{1}{24}\frac{axu^3}{c}-\frac{1}{16}\frac{a^2xu}{c}-\frac{1}{16}\frac{a^3}{c}I_1$$

$$\int x^2u\,dx=\frac{1}{4}\frac{xu^3}{c}-\frac{1}{8}\frac{axu}{c}-\frac{1}{8}\frac{a^2}{c}I_1$$

$$\int\frac{x^2}{u}\,dx=\frac{1}{2}\frac{xu}{c}-\frac{1}{2}\frac{a}{c}I_1$$

$$\int\frac{x^2}{u^3}\,dx=-\frac{x}{cu}+\frac{1}{c}I_1$$

例 5

求不定积分$I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

利用分部积分法来推导递推关系, 进而解决问题. 当$n > 1$时，改写后利用分部积分, 得到

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)a^2}\int x\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]'\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right] \\
&= \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

例 6

求不定积分$I_n = \int \sin^n x \mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}^*$.

当$n > 1$时，改写后利用分部积分, 得到

$$\begin{aligned} I_n &= -\int \sin^{n-1} x \mathrm{d} \cos x \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

由此可得递推式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x.$$

例题

例 7

求 $\int \tan^n x\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2.$

利用三角公式和第一换元积分法, 有

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^n x\mathrm{d}x = \int \tan^{n-2} x\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \tan^{n-2} x\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\ &= \int \tan^{n-2} x\mathrm{d}\tan x - \int \tan^{n-2} x\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}. \end{aligned}$$

我们得到一个递推公式.

例 8

求 $\displaystyle\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}&\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int \arcsin x\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}\\&=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\int \sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C.\end{aligned}$$

令 $x=\sin t$, $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 有

$$\begin{aligned}\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x&=\int t\sin t\mathrm{d}t=-t\cos t+\int \cos t\mathrm{d}t\\=&\quad -t\cos t+\sin t+C=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C.\end{aligned}$$

补充积分表

- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\quad a \neq 0;$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\quad a \neq 0;$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\quad a > 0;$
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C;$
- $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C,\quad a > 0;$
- $\displaystyle\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C;$

补充积分表

- $\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$;
- $\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$;
- $\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$;
- $\int \csc x \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$.