一、计算定积分

基本方法是分部积分法和换元积分法，其理论依据是牛顿-莱布尼茨公式.

例 1 计算积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x-\sin x}{x^2+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

解 由凑微分法得

$$\int \frac{x\cos x-\sin x}{x^2+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{1+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = \arctan\left(\frac{\sin x}{x}\right)+C.$$

于是由牛顿-莱布尼茨公式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x-\sin x}{x^2+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \arctan\left(\frac{\sin x}{x}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \arctan\frac{2}{\pi}-\arctan 1 = \arctan\frac{2}{\pi}-\frac{\pi}{4}.$$ □

例 2 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$；

解 记$I=\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$, 则令$x=-t$换元，就有

$$I=\int_{\pi}^{-\pi} \frac{\cos t}{\mathrm{e}^{-t}+1}(-\mathrm{d}t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^t\cos t}{\mathrm{e}^t+1}\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^x\cos x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x.$$

故

$$2I=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=0,$$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=0.$$ □

例 3 证明$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ （m,n为正整数）.

证 记$I(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x$，则$I(m,0)=\int_0^1 x^m\mathrm{d}x=\frac{1}{m+1}(m\in\mathbb{N}^*)$，对任意正整数$n$，有

$$\begin{aligned} I(m,n) &= \int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}}{m+1}(1+x)^n\Big|_0^1 - \frac{1}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}\cdot n(1-x)^{n-1}(-\mathrm{d}x) \\ &= \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{n}{m+1}I(m+1,n-1). \end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
I(m,n) &= \frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}I(m+2)(n-2)=\cdots \\
&= \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}I(m+n,0) \\
&= \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)(m+n+1)} \\
&= \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.
\end{aligned}
$$

□

二、用定积分计算数列极限

对于这类问题，要将数列的通项与积分和数建立联系.

例 4 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[1^p+3^p+\cdots+(2n+1)^p]^{q+1}}{[2^q+4^q+\cdots+(2n)^q]^{p+1}}$ $(p>0,q>0)$.

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left[(\frac{1}{n})^p\cdot\frac{2}{n}+(\frac{3}{n})^p\cdot\frac{2}{n}+\cdots+(\frac{2n+1}{n})^p\cdot\frac{2}{n}\right]^{q+1}\cdot 2^{p+1}}{\left[(\frac{2}{n})^q\cdot\frac{2}{n}+(\frac{4}{n})^q\cdot\frac{2}{n}+\cdots+(\frac{2n}{n})^q\cdot\frac{2}{n}\right]^{p+1}\cdot 2^{q+1}} \\
&= 2^{p-q}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{[(\frac{1}{n})^p\cdot\frac{2}{n}+(\frac{3}{n})^p\cdot\frac{2}{n}+\cdots+(\frac{2n+1}{n})^p\cdot\frac{2}{n}]^{q+1}}{[(\frac{2}{n})^q\cdot\frac{2}{n}+(\frac{4}{n})^q\cdot\frac{2}{n}+\cdots+(\frac{2n}{n})^q\cdot\frac{2}{n}]^{p+1}} \\
&= 2^{p-q}\cdot\frac{\left[\int_0^2 x^p dx\right]^{q+1}}{\left[\int_0^2 x^q dx\right]^{p+1}} \\
&= 2^{p-q}\cdot\frac{(\frac{1}{p+1}2^{p+1})^{q+1}}{(\frac{1}{q+1}2^{q+1})^{p+1}} \\
&= \frac{2^{p-q}(q+1)^{p+1}}{(p+1)^{q+1}}.
\end{aligned}
$$

□

三、证明$f(x)$恒为常数的问题

在这类问题中，常会用到微积分基本定理、“若非负连续函数$f(x)$的积分为0, 则$f(x)$恒等于0”的性质. 具体问题还得具体分析，有些问题可以用反证法.

例 5 设$f(x)$在区间I上连续，对任意$[a,b]\subseteq I$, 都有$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明：$f(x)$在区间$I$上恒等于0.

证 任意取定$x_0\in I$, 令$F(x)=\displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$, $x\in I$, 则$F(x)\equiv 0$. 因此，由微积分基本定理知$f(x)=F'(x)\equiv 0$. □

例 6 设$f(x)$在区间$[a,b]$连续，对任意$[a,b]$上的连续函数$g(x)$, 都有$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$. 证明：$f(x)$在区间$[a,b]$上恒等于0.

证 令$g(x)=f(x)$, 就有$\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x = 0$. 因为$f(x)$在区间$[a,b]$连续，所以由$\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x = 0$知$[f(x)]^2$在区间$[a,b]$上恒等于0, 从而$f(x)$在区间$[a,b]$上恒等于0. □

例 7 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，对任意实数x, 有$\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t = f(x)$. 证明：$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的常数函数.

证 对任意$x\neq 0$, 令$u=xt$换元，由$\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t = f(x)$得$\int_0^x f(u)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{x} = f(x)$, 即$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = f(x)$. 记$F(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$, 则由微积分基本定理知$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可微且$F'(x)=f(x)$. 因此由$f(x)=\frac{F(x)}{x}$ $(x\neq 0)$知$f(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上可导. 等式$F(x)=xf(x)$ $(x\neq 0)$两边对x求导，得$f(x)=f(x)+xf'(x)$ $(x\neq 0)$, 从而当$x\neq 0$时就有$f'(x)=0$. 任取$x\neq 0$, 由拉格朗日中值定理知存在ξ介于0, x之间，使得$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)=0$. 因此$f(x)\equiv f(0)$, 即$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的常数函数. □

例 8 设$f(x)$在$[-1,1]$连续，对任意整数n, 有$\int_{-1}^1 f(\sin(nx))\mathrm{d}x = 0$, 证明：$f(x)$在$[-1,1]$上恒等于0.

证 令$t=nx$换元，由$\int_0^1 f(\sin(nx))\mathrm{d}x = 0$得$\int_0^n f(\sin t)\mathrm{d}t = 0$, $\forall n\in\mathbb{Z}$. 令$F(x)=\int_x^{x+1} f(\sin t)\mathrm{d}t$, 则对任意整数$n$, 有$F(n)=\int_0^{n+1} f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^n f(\sin t)\mathrm{d}t = 0$. 由$F(x+2\pi)=\int_{x+2\pi}^{x+1+2\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} f(\sin u)\mathrm{d}u$ $(u=t-2\pi)$ $=F(x)$知$F(x)$以2π为周期，从而$F(n+2k\pi)=0$, $\forall n,k\in\mathbb{Z}$. 因为$\{n+2k\pi|n,k\in\mathbb{Z}\}$在$\mathbb{R}$中稠密，所以结合$F(x)$的连续性知$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上恒等于0. 因此对任意实数$x$, 有

$$f(\sin(x+1))-f(\sin x)=F'(x)=0.$$

记$C=f(0)$, 则对任意整数n, 有$f(\sin n)=f(\sin 0)=f(0)=C$. 因为$\{\sin n|n\in\mathbb{Z}\}$在$[-1,1]$中稠密，所以结合$f(x)$的连续性知$f(x)$在$[-1,1]$上恒等于$C$, 结合$\int_0^n f(\sin t)\mathrm{d}t = 0$知$C=0$. □

四、根的存在性问题

在这类问题中，常用到介值定理、罗尔定理、积分第一中值定理等.

例 9 设$f(x)$在$[0,1]$连续，$\displaystyle\int_0^1(1-x)f(x)\mathrm{d}x=0$, 求证：存在$\xi\in(0,1)$, 使得

$$\int_0^\xi xf(x)\mathrm{d}x=\xi f(\xi).$$

证 因为$f(x)$在$[0,1]$连续，$\displaystyle\int_0^1(1-x)f(x)\mathrm{d}x=0$, 所以由积分第一中值定理知存在$\eta\in(0,1)$, 使得$(1-\eta)f(\eta)=0$, 从而$f(\eta)=0$. 若$\displaystyle\int_0^\eta xf(x)\mathrm{d}x=0$, 则取$\xi=\eta$就完成了证明. 下设$\displaystyle\int_0^\eta xf(x)\mathrm{d}x\neq0$, 不妨设$\displaystyle\int_0^\eta xf(x)\mathrm{d}x>0$ (当积分小于0时用$-f$代替f来讨论). 令$\varphi(t)=\displaystyle\int_0^t xf(x)\mathrm{d}x-tf(t)$, 则$\varphi(\eta)>0$. 取定$xf(x)$在$[0,\eta]$中的一个最大值点$x_0$, 则$\varphi(x_0)\leqslant0$. 因此由介值定理知存在$\xi\in[x_0,\eta)\subset(0,1)$, 使得$\varphi(\xi)=0$, 即$\displaystyle\int_0^\xi xf(x)\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$. □

例 10 设$f(x)$是$[0,1]$上恒大于0的连续函数.

(1) 证明：对任意正整数n, 存在唯一的$\xi_n\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$, 使得

$$\frac{1}{n}\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\xi_n}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1-\xi_n}^1f(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}n\xi_n$.

证 (1) 证 令$G(t)=\displaystyle\int_0^tf(x)\mathrm{d}x+\int_{1-t}^1f(x)\mathrm{d}x$, $t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, 则$G(t)$在$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$上连续, 且由$f(x)$在$[0,1]$上恒大于0知, $G(t)$在$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$上严格递增. 又$G(0)=0$, $G\left(\dfrac{1}{2}\right)=\displaystyle\int_0^1f(x)\mathrm{d}x$, 故由介值定理，存在$\xi_n\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$, 使得

$$\frac{1}{n}\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\xi_n}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1-\xi_n}^1f(x)\mathrm{d}x.$$

由$G(t)$的严格递增性知ξ_n是唯一的.

(2) 解 由积分第一中值定理，存在$x_n\in[0,\xi_n]$和$y_n\in[1-\xi_n,1]$, 使得

$$\frac{1}{n}\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=f(x_n)\xi_n+f(y_n)\xi_n,$$

由$f(x)$在$[0,1]$上有正的最小值可见$\xi_n=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\int_0^1f(x)\mathrm{d}x}{f(x_n)+f(y_n)}\to0\quad(n\to\infty)$, 于是$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$, 故

$$\lim_{n\to\infty}n\xi_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1f(x)\mathrm{d}x}{f(x_n)+f(y_n)}=\frac{\int_0^1f(x)\mathrm{d}x}{f(0)+f(1)}.$$ □

五、估计函数的最值

例 11 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$. 证明

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|>4.$$

证 反证. 若不然，则$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\leqslant 4$. 由

$$1=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 4\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x=1$$

可知

$$\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot(4-|f(x)|)\mathrm{d}x=1-1=0.$$

又$\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot(4-|f(x)|)$在$[0,1]$上非负连续，所以有

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|(4-|f(x)|)\equiv 0\quad(x\in[0,1]).$$

故$|f(x)|\equiv 4$，再由$f(x)$的连续性知$f(x)\equiv 4$或$f(x)\equiv -4$，这与题设$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$矛盾！ □

例 12 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=1$.

(1) 证明$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\geqslant 3$.

(2) 又知$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=0$, 证明$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\geqslant 6+3\sqrt{2}$.

证 (1) 由积分第一中值定理，存在$\xi\in[0,1]$，使得

$$\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{f(\xi)}{3}.$$

故$f(\xi)=3$，从而$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\geqslant 3$.

(2) 由

$$\int_0^1\left|\left(x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)f(x)\right|\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\left(x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)f(x)\mathrm{d}x=1$$

知存在$\xi\in[0,1]$，使得

$$|f(\xi)|\cdot\int_0^1\left|x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right|\mathrm{d}x\geqslant 1,$$

即

$$|f(\xi)|\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)\geqslant 1,$$

故$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\geqslant 6+3\sqrt{2}$. □

注 (2)的解法中的$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$是通过求使得$\displaystyle\int_0^1\left|x^2-\lambda x\right|\mathrm{d}x$最小的$\lambda$得到的.

六、杂题

例 13 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可微且恒大于0, 令$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求$\varphi'(0)$;

解

$$
\begin{aligned}
\varphi'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+xf'(x)}{f(x)+f(x)+xf'(x)}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

□

例 14 设函数f在$[a,b]$上非负连续且严格递增. 由积分中值定理和严格单调性可知, 对任意$\lambda>0$, 存在唯一的一点$x_\lambda\in[a,b]$, 使得

$$f^\lambda(x_\lambda)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^\lambda(t)\mathrm{d}t.$$

证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}x_\lambda=b.$$

证 任取$\varepsilon>0$, 有

$$f^\lambda(x_\lambda)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^\lambda(t)\mathrm{d}t>\frac{1}{b-a}\int_{b-\varepsilon}^b f^\lambda(t)\mathrm{d}t>\frac{1}{b-a}\cdot\varepsilon f^\lambda(b-\varepsilon).$$

注意到$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\dfrac{f(b-2\varepsilon)}{f(b-\varepsilon)}\right]^\lambda=0$, 可知存在$\Lambda$, 使得当$\lambda>\Lambda$时, 有

$$f^\lambda(b-2\varepsilon)<f^\lambda(b-\varepsilon)\cdot\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

于是当$\lambda > \Lambda$时, 有

$$f^{\lambda}(x_{\lambda}) > f^{\lambda}(b-2\varepsilon)$$

由f的严格递增性知当$\lambda > \Lambda$时, 有$x_{\lambda} > b-2\varepsilon$. 又$x_{\lambda} \leqslant b$, 故由极限定义得$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} x_{\lambda} = b$. □

例 15 设函数$f(x)$在$[0,1]$上两次连续可导，证明：存在$\xi \in (0,1)$, 使得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(\xi).$$

证 由分部积分法，有

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \\
= \ & (x-1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x \\
= \ & f(0) - \frac{1}{2}(x-1)^2 f'(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}(x-1)^2 f''(x)\mathrm{d}x \\
= \ & f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)^2 f''(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

根据积分第一中值定理知存在$\xi \in (0,1)$, 使得

$$\int_0^1 (x-1)^2 f''(x)\mathrm{d}x = f''(\xi)\int_0^1 (x-1)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}f''(\xi),$$

因此

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(\xi).$$ □

另证 令$F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $x \in [0,1]$, 则$F(x)$在$[0,1]$三次连续可导，$F(0) = 0$, $F'(x) = f(x)$, $F''(x) = f'(x)$, $F'''(x) = f''(x)$. 由泰勒公式知存在$\xi \in (0,1)$, 使得$F(1) = F(0) + F'(0) + \dfrac{1}{2}F''(0) + \dfrac{1}{6}F'''(\xi)$, 从而

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \frac{1}{6}F'''(\xi) = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(\xi).$$ □

例 16 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的函数，$f(x)$在任何闭区间上可积, 且对任意实数x和任意$h \neq 0$, 都有$\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = f(x)$.

(1) 证明：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导;

(2) 证明：$f'(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的常数函数.

证 (1) 令$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则由$f(x)$在任何闭区间上可积知$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续. 于是由$f(x)=\dfrac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}[F(x+1)-F(x-1)]$知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，再由微积分基本定理知$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，从而由$f(x)=\dfrac{1}{2}[F(x+1)-F(x-1)]$知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导.

(2) 由$\dfrac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t=f(x)$得$\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t=2hf(x)$, 两边对$h$求导，得

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x),$$

上式两边对h求导，得

$$f'(x+h)-f'(x-h)=0.$$

对任意$y\neq 0$, 取$x=h=\dfrac{y}{2}$, 代入上式，得

$$f'(y)-f'(0)=0.$$

因此$f'(x)\equiv f'(0)$, 即$f'(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的常数函数. □

例 17 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且对任何$x\in[0,1]$, 有$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=\dfrac{f(x)}{2}$, 求所有满足要求的函数$f(x)$.

证 取$x=0$, 则由$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=\dfrac{f(x)}{2}$得$f(0)=\dfrac{f(0)}{2}$, 故$f(0)=0$. 当$x\in(0,1]$时，令$u=tx$换元，得$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$, 从而

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\frac{f(x)}{2}.$$

由此可见$f(x)$可导，等式$2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=xf(x)$两边对$x$求导，得$2f(x)=f(x)+xf'(x)$, 化简得$f(x)-xf'(x)=0$. 令$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\in(0,1]$, 则$\varphi'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0$. 因此$\varphi(x)$恒为常数，从而存在常数$k$, 使得$f(x)=kx$. 直接计算可知$f(x)=kx$满足要求, 故$f(x)=kx$($k$为任意常数)就是所有满足要求的函数. □

例 18 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续且恒正，则由$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上严格递增且连续，知对任何自然数n, 存在唯一的分划$T^{(n)}$: $a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{n-1}^{(n)}<x_n^{(n)}=b$, 使得$\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}}f(t)\mathrm{d}t=$

$\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x_k^{(n)})=\frac{\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}.$$

证

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x_k^{(n)})-\frac{\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}\right|\\
=\ &\frac{1}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}\cdot\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\cdot f(x_k^{(n)})-\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t\right|\\
=\ &\frac{1}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}\cdot\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} f(x_k^{(n)})f(t)\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} f^2(t)\mathrm{d}t\right|\\
\leqslant\ &\frac{1}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}}|f(x_k^{(n)})-f(t)||f(t)|\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

f在$[a,b]$上连续, 故有界, 设$|f(t)|\leqslant M$ $(t\in[a,b])$. 又由f在$[a,b]$上一致连续, 知对任何$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$|x'-x''|<\delta$时, 有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 用$m$记$f$在$[a,b]$上的最小值，则当$n>\dfrac{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}{m\delta}$时, 由积分第一中值定理，有

$$x_{k+1}^{(n)}-x_k^{(n)}=\frac{\frac{1}{n}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}{f(\xi_k^{(n)})}<\delta,\qquad(\xi_k^{(n)}\in[x_k^{(n)},x_{k+1}^{(n)}]).$$

故

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x_k^{(n)})-\frac{\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}\right|\leqslant\frac{M(b-a)\varepsilon}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}.$$

由极限定义,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x_k^{(n)})=\frac{\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}$$ □

例 19 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，对任意正整数n和任意实数x, 有

$$n^2\int_x^{x+\frac{1}{n}}f(t)\mathrm{d}t=nf(x)+\frac{1}{2}.$$

求出所有满足条件的$f(x)$.

解 因为$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，所以由$n^2\displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{n}}f(t)\mathrm{d}t=nf(x)+\frac{1}{2}$可见$f(x)$可导，求导得

$$n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x).\tag{1}$$

(1)式中将n换成$2n$, 得

$$2n\left[f\left(x+\frac{1}{2n}\right)-f(x)\right]=f'(x). \tag{2}$$

(1)式乘以2再减去(2), 得

$$2n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-[f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]=f'(x). \tag{3}$$

(2)式中将x换成$x+\dfrac{1}{2n}$, 得

$$2n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\right]=f'\left(x+\frac{1}{2n}\right). \tag{4}$$

由(3)式和(4)式知对任意正整数n和任意实数x, 有

$$f'(x)=f'\left(x+\frac{1}{2n}\right). \tag{5}$$

由(2)式可见$f(x)$两次可导，对(2)式求导得

$$2n\left[f'\left(x+\frac{1}{2n}\right)-f'(x)\right]=f''(x). \tag{6}$$

再由(5)式得$f''(x)=0$. 于是存在实数a, b, 使得$f(x)=ax+b$. 将$f(x)=ax+b$代入到$n^2\displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{n}}f(t)\mathrm{d}t=nf(x)+\frac{1}{2}$中，直接计算可得$a=1$, b是任意实数. □

例 20 设$f(x)$在$[0,1]$连续，$f(0)=1$, 且对任意$x\in[0,1]$, 都有$f(f(x))=x$, 求证：

$$\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x=2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为对任意$x\in[0,1]$, 都有$f(f(x))=x$, 所以$f(x)$是单射. 又$f(x)$在$[0,1]$连续，所以$f(x)$在$[0,1]$严格单调. 因为$f(0)=1$, $f(1)=f(f(0))=0$, 所以$f(x)$在$[0,1]$严格单调递减. 一方面，曲线$y=f(x)$ $(x\in[0,1])$与直线$y=0$, $x=0$围成的曲边梯形绕x轴旋转所得的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x;$$

另一方面，由$f(x)$在$[0,1]$严格单调且$f(f(x))=x$得$f^{-1}(x)=f(x)$, $x\in[0,1]$, 该旋转体还可以看成是曲线$x=f^{-1}(y)$ $(y\in[0,1])$与直线$x=0$, $y=0$围成的曲边梯形绕x轴旋转得到的，故

$$V=2\pi\int_0^1 yf^{-1}(y)\mathrm{d}y=2\pi\int_0^1 yf(y)\mathrm{d}y=2\pi\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x.$$

由上述两个关于V的表达式即得

$$\int_0^1 [f(x)]^2 \mathrm{d}x = 2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

七、泰勒公式积分型余项的应用

例 21 证明：对任何正整数m, 有$\sum\limits_{j=0}^{m-1}\dfrac{m^j}{j!} \geqslant \mathrm{e}^{m-1}$.

证 由积分余项的泰勒公式得

$$\mathrm{e}^m = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{m^j}{j!} + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^m (m-t)^{m-1}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t.$$

令$u = m - t$换元，得

$$\frac{1}{(m-1)!}\int_0^m (m-t)^{m-1}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^m}{(m-1)!}\int_0^m u^{m-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u.$$

因此，为了证明$\sum\limits_{j=0}^{m-1}\dfrac{m^j}{j!} \geqslant \mathrm{e}^{m-1}$, 只需证明

$$\mathrm{e}^m - \frac{\mathrm{e}^m}{(m-1)!}\int_0^m u^{m-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \geqslant \mathrm{e}^{m-1}.$$

记$I_m = \displaystyle\int_0^m u^{m-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$, 即只需证明

$$I_m \leqslant (m-1)!\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right),\ m = 1, 2, \cdots. \tag{1}$$

下面对m使用数学归纳法来证明(1)式. $m = 1$时，$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$, 等式成立. 设$m = k$时(1)式成立，由分部积分公式得

$$I_k = \int_0^k u^{k-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \frac{1}{k}u^k\mathrm{e}^{-u}\Big|_0^k + \frac{1}{k}\int_0^k u^k\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \frac{k^k\mathrm{e}^{-k}}{k} + \frac{1}{k}\int_0^k u^k\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u,$$

故$m = k$时的(1)式可改写为

$$k^k\mathrm{e}^{-k} + \int_0^k u^k\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \leqslant k!\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

当$m = k+1$时，注意到$u^k\mathrm{e}^{-u}$在$[k, k+1]$上的最大值为$k^k\mathrm{e}^{-k}$, 就有$\displaystyle\int_k^{k+1} u^k\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \leqslant k^k\mathrm{e}^{-k}$, 于是有

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \int_0^{k+1} u^k\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \int_k^{k+1} u^k\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u + \int_0^k u^k\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \\ &\leqslant k^k\mathrm{e}^{-k} + \int_0^k u^k\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \leqslant k!\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right), \end{aligned}$$

即$m=k+1$时(1)式成立. 由数学归纳法知对任何正整数m, (1)式都成立. 因此，对任何正整数m, 有$\sum\limits_{j=0}^{m-1}\dfrac{m^j}{j!}\geqslant \mathrm{e}^{m-1}$. □

例 22 证明：对任意正整数n, 方程

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right)\mathrm{d}t=n$$

在区间$(n,2n)$中有实根.

证 记$F(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right)\mathrm{d}t$, 下面证明$F(n)<n$, $F(2n)>n$, 从而由根的存在定理知方程$F(x)=n$在$(n,2n)$中有实根. $F(n)<n$的证明如下.

$$F(n)=\int_0^n \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right)\mathrm{d}t<\int_0^n \mathrm{e}^{-t}\cdot\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=n.$$

$F(2n)>n$的证明如下：由带积分余项的泰勒公式得

$$\mathrm{e}^t=\sum_{j=0}^{2n}\frac{t^j}{j!}+\frac{1}{(2n)!}\int_0^t (t-u)^{2n}\mathrm{e}^u\mathrm{d}u.$$

令$v=t-u$换元，得

$$\int_0^t (t-u)^{2n}\mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\mathrm{e}^t\int_0^t v^{2n}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v.$$

于是

$$F(2n)=\int_0^{2n}\mathrm{e}^{-t}\left(\mathrm{e}^t-\frac{\mathrm{e}^t}{(2n)!}\int_0^t v^{2n}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}t=2n-\frac{1}{(2n)!}\int_0^{2n}\left(\int_0^t v^{2n}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}t,$$

故要证$F(2n)>n$, 只需证明

$$\frac{1}{(2n)!}\int_0^{2n}\left(\int_0^t v^{2n}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}t<n. \tag{1}$$

记$\varphi(t)=\displaystyle\int_0^t v^{2n}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v$, 则由分部积分公式得

$$\int_0^{2n}\varphi(t)\mathrm{d}t=t\varphi(t)\Big|_0^{2n}-\int_0^{2n}t\cdot t^{2n}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{2n}t^{2n}(2n-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \tag{2}$$

在上一题的解答中证明了不等式$\displaystyle\int_0^m t^{m-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\leqslant(m-1)!\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$, 其中$m$为正整数. 取$m=2n$，就得到$\displaystyle\int_0^{2n}t^{2n-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\leqslant(2n-1)!\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，于是由$t(2n-t)\leqslant n^2$知

$$\int_0^{2n}t^{2n}(2n-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{2n}n^2t^{2n-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\leqslant n^2(2n-1)!\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right). \tag{3}$$

由(2)式和(3)式得

$$\frac{1}{(2n)!}\int_0^{2n}\left(\int_0^t v^{2n}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{(2n)!}\int_0^{2n}t^{2n}(2n-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{(2n)!}\cdot n^2(2n-1)!\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)<\frac{n}{2}<n.$$

这就证明了(1)式成立，从而完成了本命题的证明. □

八、一些竞赛题

例 23 (第四届全国大学生数学竞赛预赛（数学类），2012年，第六题) 设$f(x)$是$[0,1]$上的可微函数，$f(0)=f(1)$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 且对任意$x\in[0,1]$, 都有$f'(x)\neq 1$, 求证：对任意正整数$n$, 有

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{1}{2}.$$

证 由罗尔定理知存在$\xi\in(0,1)$, 使得$f'(\xi)=0$. 因为对任意$x\in[0,1]$, 都有$f'(x)\neq 1$, 所以结合$f'(\xi)=0$，由达布定理知$f'(x)<1$. 令$g(x)=f(x)-x$, 则$g'(x)<0$, 从而$g(x)$在$[0,1]$严格单减. 因此有

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}&=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{n}>\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)+1\right]\\&=\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)>\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

进而得到

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{n-1}{2}\right|<\frac{1}{2}.$$ □

例 24 (第七届中国大学生数学竞赛预赛（数学类），2015年，第六题) 设$f(x)$是$\mathbb{R}$上有下界或者有上界的连续函数且存在正数a使得$f(x)+a\int_{x-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$为常数，求证：$f(x)$必为常数.

证 不妨设$f(x)$有下界，设$m=\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}f(x)$, 则$g(x)=f(x)-m$为非负连续函数，且

$$A=g(x)+a\int_{x_1}^{x}g(t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

为非负常数. 由(1)式知$g(x)$是可微函数，且

$$g'(x)+a\left[g(x)-g(x-1)\right]=0.$$

于是

$$[\mathrm{e}^{ax}g(x)]' = a\mathrm{e}^{ax}g(x-1) \geqslant 0,$$

这说明$\mathrm{e}^{ax}g(x)$是递增函数. 由(1)式得

$$\begin{aligned} A &= g(x) + a\int_{x-1}^{x} \mathrm{e}^{at}g(t)\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t \leqslant g(x) + a\mathrm{e}^{ax}g(x)\int_{x-1}^{x}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t \\ &= g(x) + \mathrm{e}^{ax}g(x)\left[\mathrm{e}^{-a(x-1)} - \mathrm{e}^{-ax}\right] = \mathrm{e}^{a}g(x). \end{aligned}$$

由此可得$g(x) \geqslant A\mathrm{e}^{-a}$. 由$g(x)$和$m$的定义知$g(x)$的下确界为0, 因此$A = 0$. 再根据(1)式和$g(x)$的非负性知$g(x)$恒等于0, 即$f(x)$为常数. □

例 25 (第二届中国大学生数学竞赛赛区赛数学类，2010年，第七题) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上黎曼可积，$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, 求证：对任何$\varepsilon > 0$, 存在只取值于0, 1的分段（段数有限）常值函数$g(x)$, 使得$\forall[\alpha,\beta] \subseteq [0,1]$, 有

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

证 对任何$\varepsilon > 0$, 取定正整数n, 使得$n > \dfrac{2}{\varepsilon}$. 定义$A_m = \left[\dfrac{m}{n}, \dfrac{m}{n} + \displaystyle\int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t\right)$, $m = 0,1,\cdots,n-1$, 令

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bigcup\limits_{m=0}^{n-1} A_m, \\ 0, & x \notin \bigcup\limits_{m=0}^{n-1} A_m. \end{cases}$$

对于$0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, 设非负整数$k \leqslant l$满足$\dfrac{k}{n} \leqslant \alpha < \dfrac{k+1}{n}$, $\dfrac{l}{n} \leqslant \alpha < \dfrac{l+1}{n}$, 则

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right| \\ \leqslant\ & \int_{\alpha}^{\frac{k+1}{n}} |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x + \left|\int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{l}{n}} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right| + \int_{\frac{l}{n}}^{\beta} |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x \\ \leqslant\ & \int_{\alpha}^{\frac{k+1}{n}} 1\mathrm{d}x + 0 + \int_{\frac{l}{n}}^{\beta} 1\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

例 26 (第七届全国大学生数学竞赛决赛，数学类，2016) 设$f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的连续函数，且满足方程

$$xf(x) = 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t + \frac{x^2}{4},$$

求$f(x)$.

解 令$g(x)=f(x)-x$, 则有

$$xg(x)=2\int_{\frac{x}{2}}^{x}g(t)\mathrm{d}t.$$

对于$x>0$, 根据积分均值定理，存在$x_1\in(0,x)$, 使得

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x}g(t)\mathrm{d}t=g(x_1)\cdot\frac{x}{2},$$

因而

$$g(x)=g(x_1).$$

设

$$x_0=\inf\left\{t\in(0,x)\middle|g(t)=g(x)\right\},$$

则有$g(x_0)=g(x)$. 若$x_0>0$, 则重复上面的过程，可知存在$y_0\in(0,x_0)$, 使得$g(y_0)=g(x_0)=g(x)$, 这与x_0的取法矛盾. 因此必有$x_0=0$, 这说明$g(x)=g(0)$.

同理，对$x<0$, 也可证明$g(x)=g(0)$.

总之，$g(x)$是常数. 于是$f(x)=x+C$, C是常数. □

例 27 (The 18th Annual Vojtěch Jarník International Mathematical Competition, 2008年，C

已知$f(x)$在$[0,1]$上连续可微且恒大于0, $\dfrac{f(1)}{f(0)}=\mathrm{e}$, $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{[f(x)]^2}+\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant 2$, 求所有满足条件的函数$f(x)$.

解 对于满足条件的函数$f(x)$, 有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_0^1\left[f'(x)-\frac{1}{f(x)}\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{[f(x)]^2}-2\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\\&\leqslant 2-2\ln f(x)\Big|_0^1=2-2\ln\frac{f(1)}{f(0)}=2-2\ln\mathrm{e}=0.\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1\left[f'(x)-\frac{1}{f(x)}\right]^2\mathrm{d}x=0.$$

结合$f(x)$在$[0,1]$上连续可微得$f'(x)-\dfrac{1}{f(x)}=0$, 即

$$f'(x)f(x)=1,\ \forall x\in[0,1].$$

于是$[f(x)]^2 = 2x + C$, 其中$C > 0$是常数，结合$f(x)$恒大于0得$f(x) = \sqrt{2x + C}$. 由$\dfrac{f(1)}{f(0)} = \mathrm{e}$得$C = \dfrac{2}{\mathrm{e}^2 - 1}$, 故满足条件的函数$f(x)$是唯一的，其表达式为

$$f(x) = \sqrt{2x + \frac{2}{\mathrm{e}^2 - 1}}.$$

$\square$