定理 1

设函数$f(x)$在$[a,b]$连续, 在(a,b)可微.

(i) $f(x)$在$[a,b]$递增的充分必要条件是在(a,b)内有$f'(x)\geqslant 0$;

(ii) $f(x)$在$[a,b]$递减的充分必要条件是在(a,b)内有$f'(x)\leqslant 0$.

定理 2

设$f(x)$在$[a,b]$连续, 在(a,b)可微. 若在(a,b)内$f'(x)$恒大于0 (恒小于0), 则$f(x)$在$[a,b]$严格递增(严格递减).

习题5(A)第11题

设$f(x)$在$[a,b]$连续, 在(a,b)可微. 证明$f(x)$在$[a,b]$严格递增(严格递减)的充分必要条件是

(i) $f'(x)$在(a,b)内非负(非正);

(ii) 对任何$(c,d)\subseteq(a,b)$, 都存在$\xi\in(c,d)$, 使得$f'(\xi)>0$ $(f'(\xi)<0)$.

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在(a,b)可导. 如果$f(x)$在(a,b)不严格单调，则存在$\xi \in (a,b)$,使得$f'(\xi) = 0$.

(A) 成立

(B) 不成立

例 1

设$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 求证$\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x$.

在应用函数单调性证明不等式时，辅助函数的构造方法未必是唯一的，例如在例1中，也可以通过讨论$g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$的单调性来证明. 应分析问题的特点，选择适当的辅助函数.

例 2

设n是自然数, 求证方程$1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2n}-\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=0$有且只有一个实根.

函数在其严格单调的区间中至多只有一个实根，这个性质结合介值定理或者罗尔定理，可以用来确定方程的实根个数.

费马定理表明, 若函数在极值点处可导，则导数为0. 因此, 求极值点时, 我们总是先求出所有导数为0的点，这种点称为函数的驻点或临界点. 此外，不可导点也可能是极值点, 例如函数$f(x) = |x|$在$x = 0$处取得极小值，但在$x = 0$处不可导.

为求函数的极值点，只需求出函数在区间内部的所有驻点和导数不存在的点，再判断函数在这些点处是否取得极值. 下面给出常用的极值点判别法.

一阶导数判别法

定理 3 (一阶导数判别法)

设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$B_\delta(x_0)$连续, 在空心邻域$\mathring{B}_\delta(x_0)$可导.

(i) 若在$(x_0-\delta, x_0)$内$f'(x) \geqslant 0$, 在$(x_0, x_0+\delta)$内$f'(x) \leqslant 0$, 则x_0为$f(x)$的极大值点;

(ii) 若在$(x_0-\delta, x_0)$内$f'(x) \leqslant 0$, 在$(x_0, x_0+\delta)$内$f'(x) \geqslant 0$, 则x_0为$f(x)$的极小值点.

如果$f(x)$在(a, b)内的驻点和导数不存在的点只有有限多个，设为$x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, 则$f(x)$的极值点只能在这些点中取，根据定理3就能判定x_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$是否为$f(x)$的极值点. 这是因为，$f'(x)$在区间(a, x_1)，(x_1, x_2)，$\cdots$, (x_m, b)恒不为0, 由达布定理，$f'(x)$在每个区间恒正或恒负，从而$f(x)$在每个区间严格单增或严格单减，由此就能判定x_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$是否为$f(x)$的极值点.

实际应用中，如果在驻点处$f(x)$两次可导，则下面的判别法经常能方便地判定该驻点是否为$f(x)$的极值点.

定理 4 (二阶导数判别法)

设函数$f(x)$在点x_0两次可导且$f'(x_0)=0$.

(i) 若$f''(x_0)<0$, 则x_0为$f(x)$的极大值点;

(ii) 若$f''(x_0)>0$, 则x_0为$f(x)$的极小值点.

例 3

求函数$f(x)=x^4-2x^2$的所有极值点.

最大值和最小值的求法

设$f(x)$在$[a,b]$连续, 则$f(x)$必能取得最大值和最小值. $f(x)$在$[a,b]$上的最值可能在(a,b)内某点x_0取得, 也可能在端点处取得. 若最大值在点$x_0\in(a,b)$取得, 则x_0必为极大值点. 因此, 将$f(x)$在(a,b)内的所有极大值与$f(a)$, $f(b)$相比较, 其中最大者即为$f(x)$在$[a,b]$上的最大值. 实际上，求最值并不需要判断极值的情况. 例如，若$x_1,x_2,\ldots,x_m$是(a,b)内所有驻点或导数不存在的点，则$f(a)$, $f(b)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_m)$中的最大者与最小者就是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值.

例 4

求$f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$在区间$[-1,2]$上的最大值和最小值.