包含积分的极限

一、使用分段估计的方法

例 1 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上有定义，对任意$A>0$, $f(x)$在$[0,A]$可积，且有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$. 求证：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=a.$$

证 不妨设$a=0$, 否则可考虑$f(x)-a$. 于是对任何$\varepsilon>0$, 都存在X_1, 使当$x\geqslant X_1$时, 就有

$$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

利用上述的X_1, 改写

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{x}\int_0^{X_1} f(t)dt+\frac{1}{x}\int_{X_1}^x f(t)dt, \tag{2}$$

对于(2)式右端第1项, 因定积分是定值, 故有X_2, 使当$x>X_2$时, 就有

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^{X_1} f(t)dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

对于(2)式右端第2项, 由(1)式可得

$$\left|\frac{1}{x}\int_{X_1}^x f(t)dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

令$X=\max\{X_1,X_2\}$,于是当$x\geqslant X$时,由(2)-(4)得到

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right|<\varepsilon.$$

按定义知$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=a.$ □

例 2 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f\left(x^n\right)\mathrm{d}x=f(0)$.

证 由$f(x)$在$[0,1]$连续知$f(x)$在$[0,1]$有界，故不妨设$|f(x)|\leqslant M$. 对任意$\varepsilon>0$, 不妨设$\varepsilon<1$, 存在$\delta>0$, 当$0\leqslant x<\delta$时，有$|f(x)-f(0)|<\varepsilon$. 对上述$\varepsilon>0$和$\delta>0$, 存在正整数N,

当$n>N$时，有$(1-\varepsilon)^n<\delta$. 于是$n>N$时，就有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 f\left(x^n\right)\mathrm{d}x-f(0)\right|\\
=\ &\left|\int_0^1 [f\left(x^n\right)-f(0)]\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant\ &\int_0^{1-\varepsilon}|f\left(x^n\right)-f(0)|\mathrm{d}x+\int_{1-\varepsilon}^1|f\left(x^n\right)-f(0)|\mathrm{d}x\\
<\ &\int_0^{1-\varepsilon}\varepsilon\mathrm{d}x+\int_{1-\varepsilon}^1 2M\mathrm{d}x\\
<\ &(2M+1)\varepsilon.
\end{aligned}$$

由极限定义知$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f\left(x^n\right)\mathrm{d}x=f(0)$. □

二、应用微积分基本定理和洛必达法则

例 3 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

解 由洛必达法则，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}\\
=\ &\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+2x\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2}}{(2x^2+2)\mathrm{e}^{x^2}}\\
=\ &1.
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}.$$ □

三、适当放缩，使用两边夹定理

例 4 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n^3\int_n^{2n}\frac{x}{x^5+1}\mathrm{d}x.$

解 因为

$$\frac{n^3(7n^3+9n^2+3n)}{3(n+1)^3(2n+1)^3}=n^3\int_n^{2n}\frac{1}{(x+1)^4}\mathrm{d}x<n^3\int_n^{2n}\frac{x}{x^5+1}\mathrm{d}x<n^3\int_n^{2n}\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{7}{24}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(7n^3+9n^2+3n)}{3(n+1)^3(2n+1)^3}=\frac{7}{24},$$

所以由两边夹定理知

$$\lim_{n\to\infty} n^3\int_n^{2n}\frac{x}{x^5+1}\mathrm{d}x=\frac{7}{24}. \qquad \square$$

另解 由

$$\begin{aligned}&\left|n^3\int_n^{2n}\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x-n^3\int_n^{2n}\frac{x}{x^5+1}\mathrm{d}x\right|=n^3\int_n^{2n}\frac{1}{x^4(x^5+1)}\mathrm{d}x\\ \leqslant\ & n^3\int_n^{2n}\frac{1}{x^9}\mathrm{d}x\leqslant n^3\cdot\frac{1}{n^9}(2n-n)=\frac{1}{n^5}\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

即得

$$\lim_{n\to\infty} n^3\int_n^{2n}\frac{x}{x^5+1}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty} n^3\int_n^{2n}\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{7}{24}.$$

四、使用分部积分法、换元积分法

例 5 求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\cos(t^2)\mathrm{d}t=0.$

证

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\cos(t^2)\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{2t}\mathrm{d}(\sin(t^2))\\ =&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{2t}\cdot\sin(t^2)\Big|_0^x-\int_0^x\sin(t^2)\cdot\left(-\frac{1}{2t^2}\right)\mathrm{d}t\right]\\ =&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left[\frac{\sin(x^2)}{2x}+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\sin(t^2)}{t^2}\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

因为

$$\left|\frac{\sin(x^2)}{2x}+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\sin(t^2)}{t^2}\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\sin(t^2)}{t^2}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_1^x\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\sin(t^2)}{t^2}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}$$

是有界量, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\cos(t^2)\mathrm{d}t=0.$ $\square$

例 6 设函数$f(x)$在$[-1,1]$连续，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 xf\left(\sin(2n\pi x)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x.$

证 由换元积分法得

$$\int_0^1 xf\left(\sin(2n\pi x)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4n^2\pi^2}\int_0^{2n\pi}tf(\sin t)\mathrm{d}t\ (t=2n\pi x)=\frac{1}{4n^2\pi^2}\int_0^{2n\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x.$$

由积分的区间可加性得

$$\int_0^{2n\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x.$$

由换元积分法得

$$\begin{aligned}&\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}(t+2k\pi)f(\sin t)\mathrm{d}t\ (t=x-2k\pi)\\ =\ &2k\pi\int_0^{2\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi} tf(\sin t)\mathrm{d}t=2k\pi\int_0^{2\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x+\int_0^{2\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{2n\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=n(n-1)\pi\int_0^{2\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x+n\int_0^{2\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x.$$

因此，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^1 xf\left(\sin(2n\pi x)\right)\mathrm{d}x\\ =\ &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^2\pi^2}\left[n(n-1)\pi\int_0^{2\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x+n\int_0^{2\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x\right]\\ =\ &\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

五、应用积分中值定理

例 7 设$0<a<b$, 函数$f(x)$在$[0,b]$连续, 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

证 由积分第一中值定理知，对任意正整数n, 存在$\xi_n\in\left(\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right)$, 使得

$$\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=f(\xi_n)\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=f(\xi_n)\ln\frac{b}{a}.$$

因为$f(x)$在$[0,b]$连续，所以$\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=f(0)$. 于是就有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}f(\xi_n)\ln\frac{b}{a}=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

□

例 8 设$f(x)$在$[0,1]$上连续且恒正. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\mathrm{d}x\right)^n = \mathrm{e}^{\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x}.$$

证 令$g(x)=\ln f(x)$, 则$\sqrt[n]{f(x)}=\mathrm{e}^{\frac{g(x)}{n}}$, 问题就归为证明

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{g(x)}{n}}\mathrm{d}x\right)=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

由积分第一中值定理知

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{g(x)}{n}}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\mathrm{e}^{\frac{g(x)}{n}}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{\frac{g(\xi_k)}{n}},$$

其中$\xi_k\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$. 由泰勒公式知对任何$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$|x|<\delta$时，就有$|\mathrm{e}^x-1-x|\leqslant\varepsilon|x|$. 因为$g(x)$在$[0,1]$连续，所以$g(x)$在$[0,1]$有界. 设$|g(x)|\leqslant M$, 其中$M>0$是常数，于是取$N=\left[\frac{M}{\delta}\right]+1$, 则当$n>N$ 时，就有$\frac{|g(x)|}{n}<\delta$, $x\in[0,1]$. 于是当$n>N$时，有

$$\left|\mathrm{e}^{\frac{g(\xi_k)}{n}}-1-\frac{g(\xi_k)}{n}\right|\leqslant\varepsilon\cdot\frac{|g(\xi_k)|}{n}\leqslant\frac{M\varepsilon}{n},$$

进而有

$$\left|\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{\frac{g(\xi_k)}{n}}-n-\frac{\sum\limits_{k=1}^n g(\xi_k)}{n}\right|\leqslant\sum_{k=1}^n\left|\mathrm{e}^{\frac{g(\xi_k)}{n}}-1-\frac{g(\xi_k)}{n}\right|\leqslant M\varepsilon,$$

即当$n\to\infty$时，$\sum\limits_{k=1}^n \mathrm{e}^{\frac{g(\xi_k)}{n}}=n+\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n g(\xi_k)+o(1)$. 因此，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{g(x)}{n}}\mathrm{d}x\right)=\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{\frac{g(\xi_k)}{n}}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n g(\xi_k)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n g(\xi_k)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g(\xi_k)+o(1)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g(\xi_k)=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

这就完成了证明. □

六、使用函数逼近的方法

例 9 (黎曼引理) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上可积, 则有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

证 只需证明$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = 0$. 先证明黎曼引理对阶梯函数情形成立. 设$f(x)$是$[a,b]$上的阶梯函数，则存在$[a,b]$的一个分割$T=\{x_k|k=0,1,\cdots,n\}$, 使得

$$f(x)=\begin{cases}u_k, & x\in[x_{k-1},x_k), k=1,2,\cdots,n,\\ u_{n+1}, & x=b.\end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}u_k\sin\lambda x\mathrm{d}x\right|\\ &= \left|\sum_{k=1}^n u_k\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\cos\lambda x\right)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k}\right| = \frac{1}{\lambda}\left|\sum_{k=1}^n u_k\cdot(\cos\lambda x_{k-1}-\cos\lambda x_k)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^n(|u_k|\cdot(|\cos\lambda x_{k-1}|+|\cos\lambda x_k|))\leqslant\frac{2}{\lambda}\sum_{k=1}^n|u_k|.\end{aligned}$$

由两边夹定理得$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0$.

再对一般情形证明. 对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$[a,b]$上的阶梯函数$S(x)$, 使得$\int_a^b|f(x)-S(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 由上面的证明知对上述$\varepsilon>0$, 存在$\Lambda>0$, 当$\lambda>\Lambda$时，有$\left|\int_a^b S(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$. 因此，有

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b[f(x)-S(x)+S(x)]\sin\lambda x\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant\ &\left|\int_a^b[f(x)-S(x)]\sin\lambda x\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^b S(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right|\\ <\ &\int_a^b|[f(x)-S(x)]\sin\lambda x|\,\mathrm{d}x+\varepsilon\leqslant\int_a^b|f(x)-S(x)|\,\mathrm{d}x+\varepsilon\\ <\ &\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned}$$

按极限定义知$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0$. □

七、应用黎曼引理或其推广

例 10 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\cos^2 nx}\mathrm{d}x$.

解 由教材习题8(B)的第10题，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 nx}\mathrm{d}x\\
=&\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x\\
=&\ \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot 2\\
=&\ \sqrt{2}
\end{aligned}$$

□

下面的问题供大家练习，后面有练习题的参考解答.

练习(A)

练习题 1 设$f(x)$在$[0,1]$连续，求极限$\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}f(x)\mathrm{d}x$.

练习题 2 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明

$$\lim_{t\to0^+} t\int_0^1\frac{f(x)}{x^2+t^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi f(0)}{2}.$$

练习题 3 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

练习题 4 设$f(x)$在$[2,+\infty)$上单增且恒大于*0*,且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=0$,其中$F(x)=\int_2^x f(t)\mathrm{d}t$.证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{f(x)}}{\int_2^x\sqrt{f(t)}\mathrm{d}t}=0.$$

练习题 5 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续, 令$a_n=\int_0^1 f(x+n)\mathrm{d}x$, $n=1,2,\cdots$. 证明*:* 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 那么$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x=a$.

练习题 6 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$存在，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f\left(x^n\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

练习(B)

练习题 1 设函数$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上可积，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=A$, 证明：

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf(x)\cos^n x\mathrm{d}x=A.$$

练习题 2 (第二届中国大学生数学竞赛赛区赛, 数学类第四题) 设$f(x)$在$[0,1]$上可积，在$x=1$处可导，$f(1)=0$, $f'(1)=a$, 证明：

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=-a.$$

练习题 3 (72nd William Lowell Putnam Mathematical Competition, 2011年A3题)

求一个实数c与一个正数L, 使得

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{r^c\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^r\sin x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^r\cos x\mathrm{d}x}=L.$$

练习题 4 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，$f'(0)$存在，求证：

$$\int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t=f(0)+\frac{1}{n}\int_0^1\frac{f(t)-f(0)}{t}\mathrm{d}t+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

练习题 5 (South Eastern European Mathematical Olympiad for University Students, 2012年

设k是正整数，求$\lim\limits_{n\to\infty}n^{k+1}\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n x^k\mathrm{d}x$.

练习题 6 设函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续且恒大于0，对任意$x>1$, 有$\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant cx^2\ln x$, 其中$c>0$是常数，令$\varphi(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$, $x\geqslant 1$, 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$.

练习(A)参考解答

练习题 1 设$f(x)$在$[0,1]$连续，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}f(x)\mathrm{d}x$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{-nx}f(x)\mathrm{d}x\right)=f(0)$, 证明如下: 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^1\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x\right)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}(1-\mathrm{e}^{-n})=1\ \ (t=nx),$$

只需证 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right)=0$, 故不妨设$f(0)=0$. 由$f$的连续性知$f$在$[0,1]$有界，设$|f(x)|\leqslant M$. 又$f(0)=0$, 故对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta\in(0,1)$, 当$x\in[0,\delta]$时，有$|f(x)|<\varepsilon$. 于是

$$\left|n\int_0^\delta \mathrm{e}^{-nx}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant n\int_0^\delta \mathrm{e}^{-nx}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon\cdot n\int_0^\delta \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x<\varepsilon;$$

$$\left|n\int_\delta^1 \mathrm{e}^{-nx}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant n\int_\delta^1 \mathrm{e}^{-nx}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant M\cdot n\int_\delta^1 \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x<\mathrm{e}^{-n\delta}M<\varepsilon \quad (n\text{充分大}).$$

因此，n充分大时，就有

$$\left|n\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|n\int_0^\delta \mathrm{e}^{-nx}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|n\int_\delta^1 \mathrm{e}^{-nx}f(x)\mathrm{d}x\right|<2\varepsilon.$$

按极限定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}f(x)\mathrm{d}x\right)=0$. 这就完成了证明. □

练习题 2 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明

$$\lim_{t\to0^+} t\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+t^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi f(0)}{2}.$$

证 原式等价于

$$\lim_{t\to0^+} t\int_0^1 \frac{f(x)-f(0)}{x^2+t^2}\mathrm{d}x=0,$$

故不妨设$f(0)=0$. 由$f(x)$的连续性, 对于任取的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$(不妨设$\delta<1$), 使得$x\in[0,\delta]$时, 有$|f(x)|<\varepsilon$, 于是

$$\left|t\int_0^\delta \frac{f(x)}{x^2+t^2}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon\int_0^\delta \frac{t}{x^2+t^2}\mathrm{d}x=\varepsilon\arctan\frac{\delta}{t}<\frac{\pi}{2}\varepsilon.$$

另一方面, f在$[0,1]$上有界, 设$|f(x)|\leqslant M$, 则

$$\left|t\int_\delta^1 \frac{f(x)}{x^2+t^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant M\int_\delta^1 \frac{t}{x^2+t^2}\mathrm{d}x=M\left(\arctan\frac{1}{t}-\arctan\frac{\delta}{t}\right).$$

因为$\lim\limits_{t\to0^+}\left(\arctan\frac{1}{t}-\arctan\frac{\delta}{t}\right)=0$, 所以存在$\eta>0$, 当$0<t<\eta$时, 有

$$\arctan\frac{1}{t}-\arctan\frac{\delta}{t}<\frac{\varepsilon}{M}.$$

故$0<t<\eta$时, 由上可得,

$$\left|t\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+t^2}\mathrm{d}x\right|<\frac{\pi}{2}\varepsilon+M\frac{\varepsilon}{M}=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\varepsilon.$$

由极限定义知$\lim\limits_{t\to0^+} t\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+t^2}\mathrm{d}x=0$. 这就完成了证明. □

练习题 3 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

解 先求函数极限$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\displaystyle\int_1^t \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$. 由洛必达法则以及等价无穷小量替换的方法，有

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_1^t \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{t}}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=2.$$

再由海涅定理即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=2.$$ □

练习题 4 设$f(x)$在$[2,+\infty)$上单增且恒大于*0*,且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{F(x)}=0$,其中$F(x)=\displaystyle\int_2^x f(t)\mathrm{d}t$.证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{f(x)}}{\int_2^x\sqrt{f(t)}\mathrm{d}t}=0.$$

证 当$2\leqslant t\leqslant x$时, 有

$$\sqrt{f(t)}\cdot\sqrt{f(t)}\leqslant\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{f(t)}.$$

记$G(x)=\displaystyle\int_2^x\sqrt{f(t)}\mathrm{d}t$, 则上式两边对$t$积分得$F(x)\leqslant\sqrt{f(x)}\cdot G(x)$. 于是

$$0\leqslant\frac{\sqrt{f(x)}}{G(x)}\leqslant\frac{f(x)}{F(x)}.$$

由两边夹定理即知结论成立. □

练习题 5 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续, 令$a_n=\displaystyle\int_0^1 f(x+n)\mathrm{d}x$, $n=1,2,\cdots$. 证明*:* 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 那么$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x=a$.

证 令$t=x+n$, 则$a_n=\displaystyle\int_0^1 f(x+n)\mathrm{d}x=\int_n^{n+1}f(t)\mathrm{d}t$. 记$a_0=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 就有

$$a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^n f(x)\mathrm{d}x.$$

从而有

$$\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^n f(u)\mathrm{d}u\ (u=nx)=\frac{a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}}{n}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 所以由柯西命题知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}}{n}=a$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x=a$. □

练习题 6 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$存在，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f\left(x^n\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

证 记$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, 令$t=x^n$ 换元，得$n\displaystyle\int_0^1 f\left(x^n\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{\frac{1}{n}}\varphi(t)\mathrm{d}t$. 因此，为证明$\lim\limits_{n\to\infty} n\displaystyle\int_0^1 f\left(x^n\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$, 只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(1-t^{\frac{1}{n}}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t=0. \tag{1}$$

因为$\varphi(x)$在$(0,1]$连续，$\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)$存在，所以$\varphi(x)$在$(0,1]$有界，即存在$M>0$，使得$|\varphi(t)|\leqslant M$. 对任意$\varepsilon\in(0,1)$, 有

$$\left|\int_0^{\varepsilon}\left(1-t^{\frac{1}{n}}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^{\varepsilon}|\varphi(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\varepsilon}M\mathrm{d}t=M\varepsilon.$$

对任意$t\in[\varepsilon,1]$, 有$1-t^{\frac{1}{n}}\leqslant 1-\varepsilon^{\frac{1}{n}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon^{\frac{1}{n}}=1$, 所以对上述的$\varepsilon>0$, 存在正整数$N$, 当$n>N$时，有$0<1-\varepsilon^{\frac{1}{n}}<\varepsilon$. 于是当$n>N$时，有

$$\left|\int_{\varepsilon}^1\left(1-t^{\frac{1}{n}}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{\varepsilon}^1\varepsilon|\varphi(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_{\varepsilon}^1\varepsilon M\mathrm{d}t<M\varepsilon.$$

合起来，即知当$n>N$时，有

$$\left|\int_0^1\left(1-t^{\frac{1}{n}}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_0^{\varepsilon}\left(1-t^{\frac{1}{n}}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|+\left|\int_{\varepsilon}^1\left(1-t^{\frac{1}{n}}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|<M\varepsilon+M\varepsilon=2M\varepsilon.$$

按极限定义知(1)式成立. 这就完成了证明. □

练习(B)参考解答

练习题 1 设函数$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上可积，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=A$, 证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)\cos^n x\mathrm{d}x=A.$$

证 先证明命题“设函数$g(x)$在$[0,1]$上可积，$\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=A$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} n\displaystyle\int_0^1 x^n g(x)\,\mathrm{d}x=A$”. 证明如下：因为$\lim\limits_{n\to\infty} n\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty} n\displaystyle\int_0^1 x^n g(x)\mathrm{d}x=A$当且

仅当$\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n[g(x)-A]\mathrm{d}x=0$. 于是不妨设$A=0$, 否则用$g(x)-A$代替$g(x)$来讨论. 因为$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=0$，所以对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta\in(0,1)$, 当$1-\delta\leqslant x<1$时，有$|g(x)|<\varepsilon$. 从而有

$$\left|n\int_{1-\delta}^1 x^n g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant n\int_{1-\delta}^1 x^n|g(x)|\mathrm{d}x<n\int_0^1 x^n\varepsilon\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}\varepsilon<\varepsilon.$$

另一方面，由$g(x)$在$[0,1]$上可积知$g(x)$在$[0,1]$上有界，故存在$M>0$, 使得$|g(x)|\leqslant M$, 从而

$$\left|n\int_0^{1-\delta} x^n g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant n\int_0^{1-\delta} x^n|g(x)|\mathrm{d}x\leqslant n\int_0^{1-\delta} x^n M\mathrm{d}x=\frac{nM}{n+1}(1-\delta)^{n+1}<M(1-\delta)^{n+1}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\delta)^{n+1}=0$, 所以对上述$\varepsilon>0$, 存在正整数$N$, 当$n>N$时，就有$(1-\delta)^{n+1}<\varepsilon$. 于是当$n>N$时，有

$$\left|n\int_0^1 x^n g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|n\int_0^{1-\delta} x^n g(x)\mathrm{d}x\right|+\left|n\int_{1-\delta}^1 x^n g(x)\mathrm{d}x\right|<M\varepsilon+\varepsilon=(M+1)\varepsilon.$$

按极限定义知$\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n g(x)\mathrm{d}x=0$. 这就完成了该命题的证明.

回到本题，令$t=\cos x$换元，则$x=\arccos t, \mathrm{d}x=-\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, 从而有$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^1 t^n g(t)\mathrm{d}t$, 其中$g(t)=\dfrac{\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}f(\arccos t),\ t\in[0,1)$. 因为$x=\arccos t$在$[0,1]$严格递减，所以由换元积分法知$g(t)$在$[0,1]$可积. 又

$$\lim_{t\to 1^-} g(t)=\lim_{t\to 1^-}\frac{\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\lim_{t\to 1^-} f(\arccos t)=\lim_{t\to 1^-}\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}\cdot A=1\cdot A=A,$$

故由上面的命题知

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 t^n g(t)\,\mathrm{d}t=A,\quad \text{即}\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)\cos^n x\mathrm{d}x=A.$$

□

另证 注意到

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^n x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty} n\left[-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}x\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=1,$$

只需证

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}}[xf(x)-A\sin x]\cos^n x\mathrm{d}x=0,\quad \text{即}\quad \lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\sin x\cos^n x\mathrm{d}x=0,$$

其中$g(x)=\dfrac{x}{\sin x}f(x)-A$. 因为$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0^+}f(x)-A=1\cdot A-A=0$, 所以对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 当$0<x<\delta$时，有$|g(x)|<\varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^\delta g(x)\sin x\cos^n x\mathrm{d}x\right| &\leqslant n\int_0^\delta|g(x)|\sin x\cos^n x\mathrm{d}x<n\int_0^\delta\varepsilon\sin x\cos^n x\mathrm{d}x\\ <\ & n\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^n x\mathrm{d}x=n\varepsilon\int_0^1 u^n\mathrm{d}u\ (u=\cos x)=\frac{n\varepsilon}{n+1}<\varepsilon.\end{aligned}$$

因为$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上可积，所以$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上有界，从而由$|g(x)|\leqslant\dfrac{\pi}{2}|f(x)|+|A|$知$g(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上有界，即存在$M>0$, 使得对任意$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, 都有$|g(x)|\leqslant M$. 于是

$$\left|n\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}g(x)\sin x\cos^n x\mathrm{d}x\right|\leqslant n\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}|g(x)|\sin x\cos^n x\mathrm{d}x<n\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}M\cos^n\delta\mathrm{d}x<nM\cos^n\delta\cdot\frac{\pi}{2}.$$

因为$\cos\delta\in(0,1)$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}n\cos^n\delta=0$. 于是对上述的$\varepsilon>0$, 存在正整数$N$, 当$n>N$时，就有$n\cos^n\delta<\dfrac{2\varepsilon}{\pi M}$. 因此，当$n>N$时，有

$$\left|n\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)\sin x\cos^n x\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|n\int_0^\delta g(x)\sin x\cos^n x\mathrm{d}x\right|+\left|n\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}g(x)\sin x\cos^n x\mathrm{d}x\right|<2\varepsilon.$$

按数列极限定义知$\lim\limits_{n\to\infty}n\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)\sin x\cos^n x\mathrm{d}x=0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf(x)\cos^n x\mathrm{d}x=A.$$

□

练习题 2 (第二届中国大学生数学竞赛赛区赛, 数学类第四题) 设$f(x)$在$[0,1]$上可积，在$x=1$处可导，$f(1)=0$, $f'(1)=a$, 证明：

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=-a.$$

证　令$R(x)=f(x)-a(x-1)$, 则$R(x)$在$[0,1]$上可积，在$x=1$处可导，$R(1)=R'(1)=0$. 因为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n^2\int_0^1 x^nR(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}n^2\int_0^1 x^nf(x)\mathrm{d}x-\lim_{n\to\infty}an^2\int_0^1 x^n(x-1)\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to\infty}n^2\int_0^1 x^nf(x)\mathrm{d}x+a\end{aligned}$$

所以为了证明$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = -a$, 只需证明$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\int_0^1 x^n R(x)\mathrm{d}x = 0$. 由带皮亚诺余项的泰勒公式得$R(x) = o(x-1)$ $(x\to 1^-)$, 故对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta\in(0,1)$, 使得当$1-\delta\leqslant x<1$时，有$|R(x)|<\varepsilon(1-x)$. 于是

$$\begin{aligned}\left|n^2\int_{1-\delta}^1 x^n R(x)\mathrm{d}x\right| &< n^2\int_{1-\delta}^1 x^n\cdot\varepsilon(1-x)\mathrm{d}x < n^2\varepsilon\int_0^1 x^n(1-x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{n^2\varepsilon}{(n+1)(n+2)}<\varepsilon.\end{aligned}$$

由$R(x)$在$[0,1]$上可积知$R(x)$在$[0,1]$上有界，设$|R(x)|\leqslant M$, 就有

$$\left|n^2\int_0^{1-\delta} x^n R(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant n^2\int_0^{1-\delta} Mx^n\mathrm{d}x=\frac{Mn^2(1-\delta)^{n+1}}{n+1}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(1-\delta)^n}{n+1}=0$, 所以对上述的$\varepsilon>0$, 存在正整数$N$, 当$n>N$时，有$\dfrac{n^2(1-\delta)^n}{n+1}<\varepsilon$. 因此，当$n>N$时，有

$$\begin{aligned}\left|n^2\int_0^1 x^n R(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|n^2\int_0^{1-\delta} x^n R(x)\mathrm{d}x\right|+\left|n^2\int_{1-\delta}^1 x^n R(x)\mathrm{d}x\right|\\ &< M\varepsilon+\varepsilon=(M+1)\varepsilon.\end{aligned}$$

按数列极限定义知$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\int_0^1 x^n R(x)\mathrm{d}x=0$. 这就完成了证明. □

练习题 3 (72nd William Lowell Putnam Mathematical Competition, 2011年A3题)

求一个实数c与一个正数L, 使得

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{r^c\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^r\sin x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^r\cos x\mathrm{d}x}=L.$$

解 记$f(r)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^r\sin x\mathrm{d}x$, 一方面，

$$f(r)<\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^r\mathrm{d}x=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+1}}{r+1};$$

另一方面，

$$f(r)>\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^r\cdot\frac{2x}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+1}}{r+2}.$$

由此即知当$r\to+\infty$时，$f(r)$与$\dfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+1}}{r}$是等价的无穷大量. 由分部积分法得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^r\cos x\mathrm{d}x=\frac{x^{r+1}}{r+1}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^{r+1}}{r+1}(-\sin x\mathrm{d}x)=\frac{f(r+1)}{r+1}.$$

因此，应用等价无穷大量替换的方法，得

$$L=\lim_{r\to+\infty}\frac{r^c\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^r\sin x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^r\cos x\mathrm{d}x}=\lim_{r\to+\infty}\frac{r^c\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+1}}{r}}{\frac{1}{r+1}\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+2}}{r+1}}=\frac{2}{\pi}\cdot\lim_{r\to+\infty}r^{c+1}.$$

由此可见唯一的解是$c=-1$, $L=\dfrac{2}{\pi}$. □

练习题 4 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，$f'(0)$存在，求证：

$$\int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t=f(0)+\frac{1}{n}\int_0^1\frac{f(t)-f(0)}{t}\mathrm{d}t+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

证 令$g(t)=\begin{cases}\dfrac{f(t)-f(0)}{t}, & x\in(0,1],\\ f'(0), & x=0,\end{cases}$ 则$g(t)$在$[0,1]$连续. 令$G(t)=\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$, 则$G(0)=0$, $G(1)=\displaystyle\int_0^1\frac{f(t)-f(0)}{t}\mathrm{d}t$. 记$I_n=\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t$, 则只需证明

$$\lim_{n\to\infty}n[I_n-f(0)]=G(1).$$

由分部积分法得

$$\begin{aligned}n[I_n-f(0)]&=n\int_0^1[f(t^n)-f(0)]\mathrm{d}t=n\int_0^1 t^n g(t^n)\mathrm{d}t\\ =&\int_0^1 t\mathrm{d}G(t^n)=tG(t^n)\Big|_0^1-\int_0^1 G(t^n)\mathrm{d}t=G(1)-\int_0^1 G(t^n)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由例2知$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 G(t^n)\mathrm{d}t=G(0)=0$, 故而

$$\lim_{n\to\infty}n[I_n-f(0)]=G(1)-\lim_{n\to\infty}\int_0^1 G(t^n)\mathrm{d}t=G(1).$$

这就完成了证明. □

练习题 5 (South Eastern European Mathematical Olympiad for University Students, 2012年 设k是正整数，求$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{k+1}\int_0^1\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n x^k\mathrm{d}x$.

解 令$t=\dfrac{1-x}{1+x}$, 则$x=\dfrac{1-t}{1+t}$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{2\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$, 于是

$$n^{k+1}\int_0^1\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n x^k\mathrm{d}x=n^{k+1}\int_0^1 t^n\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^k\cdot\frac{2\mathrm{d}t}{(1+t)^2}=2n^{k+1}\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t,$$

其中$f(t)=\dfrac{(1-t)^k}{(1+t)^{k+2}}$. 注意到$f(1)=f'(1)=\cdots=f^{(k-1)}(1)=0$, 对$\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$分部积分$k$次，得

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t &= \frac{t^{n+1}}{n+1}f(t)\bigg|_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\mathrm{d}t\\ &= \cdots\\ &= \frac{(-1)^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\int_0^1 t^{n+k}f^{(k)}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

再做一次分部积分，得

$$\begin{aligned}&\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t\\ =\ &\frac{(-1)^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k+1)}\left[t^{n+k+1}f^{(k)}(t)\bigg|_0^1-\int_0^1 t^{n+k+1}f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t\right]\\ =\ &\frac{(-1)^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k+1)}\left[f^{(k)}(1)-\int_0^1 t^{n+k+1}f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t\right].\end{aligned}$$

因为$f^{(k+1)}$在$[0,1]$连续，所以$f^{(k+1)}$在$[0,1]$有界. 设$\left|f^{(k+1)}(t)\right|\leqslant M$, 则

$$\left|\int_0^1 t^{n+k+1}f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1 Mt^{n+k+1}\mathrm{d}t=\frac{M}{n+k+2}.$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 t^{n+k+1}f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t=0$, 从而

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}2n^{k+1}\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t\\ =\ &\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{k+1}\cdot(-1)^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k+1)}\left[f^{(k)}(1)-\int_0^1 t^{n+k+1}f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t\right]\\ =\ &2(-1)^k f^{(k)}(1).\end{aligned}$$

记$u(x)=(1-t)^k$, $v(x)=\dfrac{1}{(1+t)^{k+2}}$, 则$f(t)=u(t)v(t)$. 因为$u(1)=u'(1)=\cdots=u^{(k-1)}(1)=0$, 所以由高阶导数的Leibniz公式得

$$f^{(k)}(1)=u^{(k)}(1)v(1)=\frac{(-1)^k k!}{2^{k+2}}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}n^{k+1}\int_0^1\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n x^k\mathrm{d}x=2(-1)^k f^{(k)}(1)=\frac{k!}{2^{k+1}}.\qquad\square$$

练习题 6 设函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续且恒大于0，对任意$x>1$, 有$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant cx^2\ln x$, 其中$c>0$是常数，令$\varphi(x)=\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$, $x\geqslant 1$, 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$.

证 对任意正整数k, 由柯西-施瓦茨不等式得

$$\int_{2^{k-1}}^{2^k} f(t)\mathrm{d}t \int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant \left(\int_{2^{k-1}}^{2^k} 1\mathrm{d}t\right)^2 = 2^{2k-2}.$$

结合

$$\int_{2^{k-1}}^{2^k} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{2^k} f(t)\mathrm{d}t \leqslant c2^{2k}\ln(2^k) = ck2^{2k}\ln 2,$$

就得到

$$\int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{4ck\ln 2}.$$

于是对任何正整数n, 有

$$\varphi\left(2^n\right) = \sum_{k=1}^n \int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{4c\ln 2}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k}=+\infty$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi\left(2^n\right)=+\infty$, 从而$\varphi(x)$在$[1,+\infty)$无上界. 由函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续且恒大于0知$\varphi(x)=\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$在$[1,+\infty)$严格递增，故由$\varphi(x)$在$[1,+\infty)$无上界得$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$. 这就完成了证明. $\square$