第一章 预备知识

1.1 实数、集合和函数

一、有界集与无界集

例 1 证明集合$\left\{\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}\middle|x\in\mathbb{R}\right\}$有界.

证 因为

$$\left|\frac{x^2-1}{2x^2+1}\right|=\frac{|x^2-1|}{2x^2+1}\leqslant\frac{x^2+1}{2x^2+1}\leqslant 1,$$

所以集合$\left\{\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}\middle|x\in\mathbb{R}\right\}$有界. □

例 2 证明集合$\left\{\dfrac{x^2+1}{\sin x}\middle|x\in(-1,0)\right\}$无界.

证 对任意$M>0$, 取$x_M=-\arcsin\dfrac{1}{M+2}$, 则$x_M\in\left(-\arcsin\dfrac{1}{2},0\right)$. 因为$\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}<1$, 所以$x_M\in(-1,0)$. 再由

$$\left|\frac{x_M^2+1}{\sin x_M}\right|>\frac{1}{|\sin x_M|}=\frac{1}{\frac{1}{M+2}}=M+2>M$$

知集合$\left\{\dfrac{x^2+1}{\sin x}\middle|x\in(-1,0)\right\}$无界. □

例 3 证明函数$f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$在任何形如$(0,a)$的开区间都无界, 其中$a>0$.

证 对任意$M>0$, 令$n_0=\max\left\{[M],\left[\frac{1}{a}\right]\right\}+1$, 则$2n_0\pi>n_0>\max\left\{M,\frac{1}{a}\right\}$. 令$x_M=\frac{1}{2n_0\pi}\in(0,a)$, 则有

$$f(x_M)=\frac{1}{x_M}\cos\frac{1}{x_M}=2n_0\pi>M.$$

按定义，函数$f(x)$在开区间$(0,a)$中无界. □

例 4 设$X\subseteq\mathbb{R}$是无穷集, a是正常数, 且对任何$x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$, 都有$|x_1-x_2|\geqslant a$. 证明X是无界集.

证 反证. 若X是有界集，则存在$M>0$, 使得对任意$x\in X$, 都有$|x|\leqslant M$. 令$n=\left[\dfrac{2M}{a}\right]+1$, 则$[-M,M]\subseteq[-M,-M+na)$. 因为对任何$x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$, 都有$|x_1-x_2|\geqslant a$, 所以$[-M,-M+a)$, $[-M+a,-M+2a)$, $\cdots$, $[-M+(n-1)a,-M+na)$这n个区间中每一个区间至多只包含X的一个元素, 从而由$X\subseteq[-M,-M+na)$知集合X至多有n个元素，与X是无穷集矛盾！ □

注 反证法不是必需的，也可以正面证明.

二、不等式

例 5 证明对任意实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，有

$$|a_1|-\sum_{i=2}^{n}|a_i|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|.$$

证 先用数学归纳法证明$\left|\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|$. $n=1$的情形等式成立. $n=2$的情形已证. 设n时$\left|\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|$成立，则$n+1$时，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}a_i+a_{n+1}\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|+|a_{n+1}|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|+|a_{n+1}|=\sum_{i=1}^{n+1}|a_i|.$$

由数学归纳法知对任意正整数n, $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|$成立. 再由

$$|a_1|=\left|\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=2}^{n}a_i\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|+\left|\sum_{i=2}^{n}a_i\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|+\sum_{i=2}^{n}|a_i|$$

即得

$$|a_1|-\sum_{i=2}^{n}|a_i|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|.$$

□

例 6 对任意非负实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

其中等式成立的充分必要条件是$a_1=a_2=\cdots=a_n$.

证 $n=1$时，等式成立. $n=2$时，由$(a_1-a_2)^2\geqslant 0$得$(a_1+a_2)^2\geqslant 4a_1a_2$, 故$\dfrac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2}$, 并且等式成立当且仅当$a_1-a_2=0$, 即$a_1=a_2$. 下设$n$时均值不等式成立，则$n+1$时，不妨设$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}$. 当$a_1=0$时，不等式显然成立，且等式成立当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_{n+1}=0$; 当$a_1=a_2=\cdots=a_{n+1}$时，等式成立. 故下设$0<a_1<a_{n+1}$, 记$\sigma_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 则$a_{n+1}>\sigma_n$. 由

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}=\frac{n\sigma_n+a_{n+1}}{n+1}=\sigma_n+\frac{a_{n+1}-\sigma_n}{n+1}$$

得

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(\sigma_n+\frac{a_{n+1}-\sigma_n}{n+1}\right)^{n+1}>\sigma_n^{n+1}+(n+1)\sigma_n^n\cdot\frac{a_{n+1}-\sigma_n}{n+1}\\ &= a_{n+1}\sigma_n^n\geqslant a_{n+1}\left(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)^n=a_1a_2\cdots a_na_{n+1},\end{aligned}$$

所以

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}>\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}}.$$

这就证明了$n+1$时均值不等式成立，且等式成立当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n=a_{n+1}$，从而完成了数学归纳法的证明. □

例 7 证明伯努利*(Bernoulli)*不等式: 设$n\in\mathbb{N}^*$，$\lambda>-1$，则有

$$(1+\lambda)^n\geqslant 1+n\lambda,$$

其中等式成立的充分必要条件是$n=1$或$\lambda=0$.

证 对$(1+\lambda)^n$和$n-1$个1共n个数使用均值不等式，得

$$\frac{(1+\lambda)^n+(n-1)}{n}=\frac{(1+\lambda)^n+1+\cdots+1}{n}\geqslant\sqrt[n]{(1+\lambda)^n}=1+\lambda,$$

整理即得

$$(1+\lambda)^n\geqslant 1+n\lambda.$$

$n=1$时等式成立，当$n>1$时，由均值不等式中等式成立的充要条件知$n>1$时等式成立当且仅当$(1+\lambda)^n=1$, 即$\lambda=0$. $\square$

注 也可以用数学归纳法证明伯努利不等式.

例 8 证明对任意正整数n，有

$$(\sqrt{n})^n \leqslant n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

证 一方面，由均值不等式，有

$$(n!)^2=(1\cdot n)(2\cdot(n-1))\cdots(n\cdot 1)\leqslant \left(\frac{1+n}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{2+(n-1)}{2}\right)^2\cdots\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n},$$

故

$$n!\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

另一方面，由$(n!)^2=(1\cdot n)(2\cdot(n-1))\cdots(n\cdot 1)\geqslant n^n$得$n!\geqslant(\sqrt{n})^n$. $\square$

例 9 对任意实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

柯西不等式中，等式成立的充分必要条件是$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$或存在实数λ, 使得$\lambda a_i+b_i=0$, $i=1,2,\cdots,n$.

证 (1) 若$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$, 则等式成立；若$a_1,a_2,\cdots,a_n$不全为0, 则对任意实数λ, 有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\lambda^2+2\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)\lambda+\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)=\sum_{i=1}^n(\lambda a_i+b_i)^2\geqslant 0,$$

故其判别式小于等于0, 即

$$\Delta=4\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2-4\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)\leqslant 0.$$

由此即得柯西不等式.

(2) 由(1)的证明可见，等式成立的充分必要条件是$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$或存在实数λ, 使得$\lambda a_i+b_i=0$, $i=1,2,\cdots,n$. □

例 10 证明对任意实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证 记$A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$, $B=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$, 则由柯西不等式，有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=A+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+B\leqslant A+2\sqrt{AB}+B=(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2.$$

故

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{A}+\sqrt{B}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

例 11 证明对任意实数a和b，有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

证 因为函数$f(x)=\dfrac{x}{1+x}=1-\dfrac{1}{1+x}$在$[0,+\infty)$上严格递增，所以

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&=f(|a+b|)\leqslant f(|a|+|b|)=\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\\&=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

□

三、函数与映射

例 12 设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上有定义. 证明f在$\mathbb{R}$上是一个单射的充分必要条件是对任意$\mathbb{R}$上的函数$g(x)$和$h(x)$，若$f\circ g=f\circ h$，则$g=h$.

证 “$\Longrightarrow$”. 设f在$\mathbb{R}$上是一个单射，若$f\circ g=f\circ h$，即$f(g(x))=f(h(x)), \forall x\in\mathbb{R}$, 则由$f$是单射知$g(x)=h(x), \forall x\in\mathbb{R}$, 故$g=h$.

“$\Longleftarrow$”. 反证. 若f在$\mathbb{R}$上不是单射，则存在实数a, b, $a\neq b$, 使得$f(a)=f(b)$. 令$g(x)=a$, $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=b$, $x\in\mathbb{R}$, 则$f\circ g=f\circ h$但$g\neq h$. 矛盾！ $\square$

例 13 *(1)* 若映射$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$满足$g\circ f:X\to Z$是单射，则f是单射.

(2) 若映射$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$满足$g\circ f:X\to Z$是满射，则g是满射.

证 (1) 反证. 若f不是单射，则存在$x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$, 使得$f(x_1)=f(x_2)$, 从而$g(f(x_1))=g(f(x_2))$, 与$g\circ f:X\to Z$是单射矛盾.

(2) 反证. 若g不是满射，则$g(f(X))\neq Z$, 与$g\circ f:X\to Z$是满射矛盾. $\square$

例 14 设常数$a>0$, 映射$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$满足函数方程$f(f(x))=x+a$, 证明：

(1) f是双射；

(2) f不是单调递减函数.

证 (1) 反证. 若不然，则f不是单射或f不是满射. 若f不是单射，则存在实数$x_1\neq x_2$, 使得$f(x_1)=f(x_2)$, 从而$x_1+a=f(f(x_1))=f(f(x_2))=x_2+a$, 与$x_1\neq x_2$矛盾；若$f$不是满射，则存在实数$y_0$, 使得$y_0$不属于$f$的值域，这与$f(f(y_0-a))=y_0$矛盾！

(2) 反证. 若不然，则f是单调递减函数. 于是$f(x+a)=f(f(f(x)))=f(x)+a>f(x)$, 这与$f$单调递减矛盾！ $\square$

例 15 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上有定义且$y=f(x)$的图象分别关于点$A(x_0,y_0)$和直线$x=b$（$b\neq x_0$）都对称. 证明$f(x)$是$\mathbb{R}$上的周期函数.

证 对任意实数x, 有

$$f(x)=f(2b-x)=2y_0-f(x+2x_0-2b).$$

在等式$f(x)=2y_0-f(x+2x_0-2b)$中将x换成$x+2x_0-2b$, 得

$$f(x+2x_0-2b)=2y_0-f(x+4x_0-4b).$$

故对任意实数x, 有

$$f(x)=f(x+4x_0-4b),$$

即$f(x)$是$\mathbb{R}$上以$4x_0-4b$为周期的周期函数. □

例 16 设函数$y=f(x)$的定义域是X, 值域是Y, 函数$z=g(y)$的定义域是Y, 值域是Z. 证明函数$z=g(f(x))$有反函数的充分必要条件是$f(x)$和$g(y)$都有反函数，并且证明在条件满足时有$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

证 充分性. 设$f(x)$和$g(y)$都有反函数，任取$z\in Z$, 由$z=g(f(x))$得$f(x)=g^{-1}(z)$, 进而$x=(f^{-1}\circ g^{-1})(z)$, 故知存在唯一的$x=(f^{-1}\circ g^{-1})(z)$使得$z=g(f(x))$. 所以由反函数的定义知函数$z=g(f(x))$有反函数且$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

必要性. 设函数$z=g(f(x))$有反函数. 如果$f(x)$没有反函数，则存在$x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$但$f(x_1)=f(x_2)$, 于是$g(f(x_1))=g(f(x_2))$, 与$z=g(f(x))$有反函数矛盾；如果$g(y)$没有反函数，则存在$y_1,y_2\in Y$, $y_1\neq y_2$但$g(y_1)=g(y_2)$, 于是有$x_1,x_2\in X$, 使得$f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$. 由$y_1\neq y_2$知$x_1\neq x_2$, 但$g(f(x_1))=g(y_1)=g(y_2)=g(f(x_2))$, 与$z=g(f(x))$有反函数矛盾. 因此$f(x)$和$g(y)$都有反函数. 由充分性的证明知$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$. □

例 17 若存在x^*使得$f(x^*)=x^*$, 则称x^*为$f(x)$的一个不动点. 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上有定义. 证明若$f(f(x))$存在唯一的不动点，则$f(x)$也存在唯一的不动点.

证 先证$f(x)$存在不动点. 设x^*为$f(f(x))$的唯一的不动点，则$f(f(x^*))=x^*$, 于是有

$$f(f(f(x^*)))=f(x^*).$$

因此$f(x^*)$是$f(f(x))$的不动点，由$f(f(x))$不动点的唯一性知$f(x^*)=x^*$，即x^*也是$f(x)$的不动点. 再证$f(x)$只有唯一的不动点x^*. 这个结论由$f(x)$的不动点必为$f(f(x))$的不动点和$f(f(x))$存在唯一的不动点就立刻得到了. $\square$

1.2 初等函数

例 1 设$f(x)$和$g(x)$都是$\mathbb{R}$上的初等函数，令$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 证明$\varphi(x)$也是初等函数.

解 因为$\varphi(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}+\dfrac{|f(x)-g(x)|}{2}$, 所以$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 也是初等函数. $\square$

例 2 设$f(x)$是初等函数且$f(x)$的定义域包含$\mathbb{Z}$, 证明$f(x)$在$\mathbb{Z}$上的限制也是初等函数.

解 用$g(x)$来记$f(x)$在$\mathbb{Z}$上的限制，则由$g(x)=f(x)+\sqrt{-\sin^2(\pi x)}$知$g(x)$是初等函数. $\square$

例 3 证明函数$f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0\\ \cos x, & x\geqslant 0\end{cases}$是初等函数.

证 由$f(x)=2^{\frac{x-|x|}{2}}+\cos\left(\frac{x+|x|}{2}\right)-1$可见$f(x)$是初等函数. $\square$

1.3 分情形定义的函数

例 1 找定义在$\mathbb{R}$上的函数, 它是从$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的一一对应, 但在任何开区间(a,b)上都不是单调函数.

解

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ -x, & \text{当 } x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

$\square$

例 2 找定义在$\mathbb{R}$上严格递减的函数, 但它没有不动点.

解

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<0,\\ -x-1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

$\square$

例 3 证明对任意$x \in \mathbb{R}$和$n \in \mathbb{N}^*$都有

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

证 令$f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx]$, 则对任意实数$x$, 有

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{1}{n}\right) &= \left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+[x+1]-\left[n\left(x+\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+[x]+1-[nx]-1 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

故$f(x)$是$\mathbb{R}$上以$\frac{1}{n}$为周期的周期函数. 当$x \in \left[0,\frac{1}{n}\right)$时, $f(x)=0$, 于是由周期性知$f(x)\equiv 0$. 因此

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

□

注 体会上面的证明中周期性的应用. 此外，也可以直接验证.

1.4 平面曲线

例 1 将极坐标方程$r^2=a^2\cos 2\theta$化成直角坐标方程.

解 由$r^2=a^2\cos 2\theta$得$r^4=a^2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$. 又$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 故得

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

这就是所要求的直角坐标方程. □

例 2 将星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$化成参数方程.

解 由性质$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, 可得星形线参数方程$x=a\cos^3\theta$, $y=a\sin^3\theta$. □

例 3 在极坐标系下，设θ的取值范围是$[0,2\pi)$, 给定直角坐标原点O之外的一点(x,y), 写出θ的显式表达式.

解 $\theta=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x>0,y\geqslant 0,\\ \pi+\arctan\frac{y}{x}, & x<0,\\ 2\pi+\arctan\frac{y}{x}, & x>0,y<0,\\ \frac{\pi}{2}, & x=0,y>0,\\ \frac{3\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases}$ □

例 4 求半径为a, 圆心为$C(r_0,\theta_0)$的圆的极坐标方程.

解 由该圆的直角坐标方程$(x-r_0\cos\theta_0)^2+(y-r_0\sin\theta_0)^2=a^2$得

$$(r\cos\theta-r_0\cos\theta_0)^2+(r\sin\theta-r_0\sin\theta_0)^2=a^2.$$

整理，得

$$r^2-2r_0\cos(\theta-\theta_0)r+r_0^2-a^2=0.$$

这就是所要求的极坐标方程. □

例 5 设方程$y+\arctan y-x=0$是函数$y=f(x)$的隐函数表示, 证明$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的严格递增函数.

解 $f(x)$是$\varphi(y)=y+\arctan y$的反函数, $\varphi(y)$严格递增且值域为$(-\infty,+\infty)$, 故$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的严格递增函数. □