稠密性

定义 1 设A和B都是数集，如果对任意$a \in A$和任意$\varepsilon > 0$, 都存在$b \in B$, 使得$|a-b| < \varepsilon$, 则称B是稠密于A的.

这里并不要求B是A的子集. 当B是A的子集且B是稠密于A的时候，则称B是A的稠密子集，或者说B在A中稠密. 由实数系的公理出发可以证明下面的定理1.

定理 1 有理数集$\mathbb{Q}$和无理数集$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$都是实数集$\mathbb{R}$的稠密子集.

定理 2 (Dirichlet逼近定理) 对任意给定的实数x和正整数$N > 1$, 都存在整数p和q, 满足$0 < q \leqslant N$且$|qx - p| < \dfrac{1}{N}$.

证 令$a_k = kx - [kx]$, $k = 0, 1, 2, \cdots, N$, 则$a_k \in [0, 1)$. 由抽屉原理，存在$i, j \in \{0, 1, \cdots, N\}$, $i < j$, 使得a_i, a_j属于$\left[0, \frac{1}{N}\right)$, $\left[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right)$, $\cdots$, $\left[\frac{N-1}{N}, 1\right)$这$N$个区间中的同一个区间，从而$|a_j - a_i| < \frac{1}{N}$. 注意到

$$a_j - a_i = (j-i)x - ([jx] - [ix]),$$

取$q = j - i$, $p = [jx] - [ix]$, 则整数p和q满足$0 < q \leqslant N$且$|qx - p| < \dfrac{1}{N}$. □

推论 1 对任意无理数x, 存在无穷多个有理数$\dfrac{p}{q}$ (p是整数，q是正整数)使得$\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$.

证 反证. 若满足要求的有理数只有有限多个，则不妨设它们为r_1, r_2, $\cdots$, r_m. 令$\delta = \min\{|x - r_1|, |x - r_2|, \cdots, |x - r_m|\} > 0$, 取$N = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 2$, 则$N > 1$且$\frac{1}{N} < \delta$. 由例3知存在整数$p$和$q$满足$0 < q \leqslant N$且$|qx - p| < \dfrac{1}{N}$, 故

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN} \leqslant \frac{1}{q^2},$$

由此可见$\dfrac{p}{q}$是满足要求的有理数. 但是由$\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{qN} < \delta$可见$\dfrac{p}{q} \notin \{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$, 与满足要求的有理数只有$r_1$, r_2, $\cdots$, r_m矛盾！ □

命题 1 设α是一个无理数，则集合$A = \{n + m\alpha | m, n \in \mathbb{Z}\}$在$\mathbb{R}$中稠密.

证 任取实数$x<y$, 令$\varepsilon=y-x>0$, 取正整数$N>1$, 使得$\frac{1}{N}<\varepsilon$. 由Dirichlet逼近定理知存在整数p和q满足$0<q\leqslant N$且$|q\alpha-p|<\frac{1}{N}<\varepsilon$. 因为$\alpha$是一个无理数，所以$|q\alpha-p|>0$. 于是当$q\alpha-p>0$时取$a=q\alpha-p$, 当$q\alpha-p<0$时取$a=-q\alpha+p$, 就有$a\in A$且$0<a<\varepsilon$. 因为区间$(x,y)$的长度为$y-x$, 所以$\{ka|k\in\mathbb{Z}\}\cap(x,y)\neq\emptyset$, 即有$k_0\in Z$, 使得$k_0a\in(x,y)$. 又$k_0a\in A$, 故$A$在$\mathbb{R}$中稠密. □

下面定理3以及命题2 7是有关稠密性的一些命题，请自行证明.

命题 2 集合$\Big\{\dfrac{m}{2^n}\Big|n\in\mathbb{N},m\in\mathbb{Z}\Big\}$在$\mathbb{R}$中稠密.

命题 3 集合$\big\{\sqrt[n]{m}\big|m,n\in\mathbb{N}^*\big\}$在$[1,+\infty)$中稠密.

定理 3 (Kronecker定理) 设α是一个无理数，则集合$\big\{\{n\alpha\}\big|n\in\mathbb{N}^*\big\}$在$(0,1)$中稠密.

注 这是一维情形的Kronecker定理，这个定理可以推广到高维情形. Hardy的书“An introduction to the theory of numbers”（该书有中译本：人民邮电出版社出版的《哈代数论》）的第23章讨论Kronecker 定理，给出了多种证明.

命题 4 集合$\big\{\cos n\big|n\in\mathbb{N}^*\big\}$在$[-1,1]$中稠密.

命题 5 集合$\big\{\sin n\big|n\in\mathbb{Z}\big\}$在$[-1,1]$中稠密.

命题 6 对任意正整数n, 存在唯一的$r_n\in[0,2\pi)$和自然数k_n, 使得$n=2k_n\pi+r_n$, 则集合$\big\{r_n\big|n\in\mathbb{N}^*\big\}$在$[0,2\pi]$中稠密. 换句话说，在单位圆周上，以任一点为起始点计量弧度时，所有取正整数弧度的点组成的集合是稠密于该圆周的.

命题 7 集合$\big\{\sin n\big|n\in\mathbb{N}^*\big\}$在$[-1,1]$中稠密.

下面的命题8给出了数列$\{x_n\}$的小数部分在$[0,1)$中稠密的一种充分条件.

命题 8 设数列$\{x_n\}$满足以下两个条件：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 即对任意$\varepsilon>0$, 存在正整数$N$, 当$n>N$时，有$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$;

(ii) 对任意$\varepsilon\in(0,1)$和任意正整数N, 存在$m>N$和$n>N$, 使得$|x_m-x_n|>1-\varepsilon$,

则集合$\big\{\{x_n\}\big|n=1,2,\cdots\big\}$在$[0,1)$中稠密，其中$\{x_n\}$是$x_n$的小数部分.

证 只需证明对任意$(a,b)\subseteq(0,1)$, 都存在正整数k, 使得$\{x_k\}\in(a,b)$. 令$\varepsilon=b-a\in(0,1)$, 由(i)知存在正整数N, 当$n>N$时，有$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$. 再由(ii)知对上述的$\varepsilon$和$N$, 存在$m>N$和$n>N$, 使得$|x_m-x_n|>1-\varepsilon$. 不妨设$m<n$且$x_m<x_n$(其他情形的证明是类似的)，则由区间$[x_m,x_n]$的长度大于$1-\varepsilon$知存在整数$l$, 使得$[x_m,x_n]\cap(l+a,l+b)\neq\emptyset$. 下证存在$k\in\{m,m+1,\cdots,n\}$, 使得$x_k\in(l+a,l+b)$. 反证. 若不然，则对任意$k\in\{m,m+1,\cdots,n\}$, 都有$x_k\notin(l+a,l+b)$, 从而有$x_m\leqslant l+a$, $x_n\geqslant l+b$. 令$j=\max\big\{k\big|k\in\{m,m+1,\cdots,n\},x_k\leqslant l+a\big\}$, 则$j\leqslant n-1$, 且$x_j\leqslant l+a$, $x_{j+1}\geqslant l+b$. 于是$|x_{j+1}-x_j|=x_{j+1}-x_j\geqslant b-a=\varepsilon$, 与$|x_{j+1}-x_j|<\varepsilon$矛盾！因此，这就证明了存在$k\in\{m,m+1,\cdots,n\}$, 使得$x_k\in(l+a,l+b)$, 从而$\{x_k\}\in(a,b)$. □

请自行验证下面的命题成立.

命题 9 集合$\big\{\{\ln n\}\big|n=2,3,\cdots\big\}$在$(0,1)$中稠密. 更一般地，设$p(x)$是一个实系数多项式，$\deg p(x)\geqslant 1$, $p(x)$的首项系数是正数，正整数n_0大于$p(x)$的所有零点，则集合
$\big\{\{\ln p(n)\}\big|n=n_0,n_0+1,\cdots\big\}$在$[0,1)$中稠密.

命题 10 集合$\big\{\{n^\alpha\lambda\}\big|n=1,2,\cdots\big\}$在$[0,1)$中稠密，其中$\alpha\in(0,1)$, λ是非零常数.

命题 11 集合$\big\{\{\sin(n^\alpha)\}\big|n=1,2,\cdots\big\}$在$[0,1)$中稠密，其中$\alpha\in(0,1)$.

命题 12 集合$\big\{\{\sin(\log_a n)\}\big|n=1,2,\cdots\big\}$在$[0,1)$中稠密，其中$a>0$, $a\neq 1$.