解析几何 (一)

黄利兵

数学科学学院

2022 年 11 月 26 日

主要内容

过渡矩阵

在中学我们已经知道, 如果在平面上取不共线的两个向量 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, 则它们构成平面向量的一组基, 即平面上任一向量 $\mathbf{a}$ 可以唯一地写为 $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$. 我们称列向量 $(a_1, a_2)'$ 为向量 $\mathbf{a}$ 在这组基下的坐标. 可以形式地写

$$\mathbf{a} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

在基向量已经指定的情况下, 有时我们也写 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)'$.

定义

设 $\mathrm{I} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ 和 $\mathrm{II} = (\widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2)$ 是平面向量的两组基, 且 $\widetilde{\mathbf{e}}_i$ 在基 I 下的坐标为 $(a_{1i}, a_{2i})'$, $i = 1, 2$. 称矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 为从基 I 到基 II 的过渡矩阵.

如果从基 I 到基 II 的过渡矩阵为 A, 则形式上我们可以写

$$(\widetilde{\mathbf{e}}_1 \quad \widetilde{\mathbf{e}}_2) = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2)A.$$

不难看出, 过渡矩阵 A 总是可逆的; 从基 II 到基 I 的过渡矩阵就是 A^{-1}.

平面的定向

定义

在平面上取定一组基 $\mathrm{I} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, 我们也称 I 诱导了平面的一个定向. 如果两组基之间的过渡矩阵行列式 > 0, 则称它们诱导的定向是相同的, 否则称定向是相反的.

由上述定义可知

- $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ 与 $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$ 诱导的定向相反;
- 平面恰有两个定向;
- 定向与基向量的长度无关, 而只与基向量的方向有关.

通常, 当我们正对一个平面时, 分别取向右的单位向量 ε_1 和向上的单位向量 ε_2, 称 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 所诱导的定向为正定向. 另一个定向则称为负定向.

命题

在平面上任取一个三角形 OAB. 如果 O, A, B 沿逆时针排列, 则 $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ 诱导的是正定向, 否则是负定向.

空间的定向

空间中不共面的三个向量 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 也构成所有空间向量的一组基. 任一向量 $\mathbf{a}$ 有唯一的方式写为

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,$$

称 $(a_1, a_2, a_3)'$ 为 $\mathbf{a}$ 在这组基下的坐标. 有时也写 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)'$.
对于两组基 $\mathrm{I} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ 和 $\mathrm{II} = (\widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2, \widetilde{\mathbf{e}}_3)$, 由 $\widetilde{\mathbf{e}}_i$ 在基 I 下的坐标所排成的矩阵 A 称为从基 I 到基 II 的过渡矩阵. 如果 $\det(A) > 0$, 则称 I 和 II 在空间中诱导的定向是相同的, 否则称它们诱导的定向是相反的.
如果把右手拇指和食指自然张开, 中指弯曲, 则这三根手指所指的方向构成空间的一组基, 规定它们所诱导的定向为正定向, 也称为右手定向; 与之相反的定向则称为负定向或左手定向. 诱导正 (负) 定向的基也称为右 (左) 手系.

数量积

在中学已学过向量的数量积.

定义

若向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ, 则定义它们的数量积 (也称内积或点乘) 为 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$, 记作 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

命题

数量积具有以下性质:

- *对称性:* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;
- *线性:* $(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$;
- *正定性:* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\geq 0$, *并且* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=0$ *的充要条件是* $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

任取一组基 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, 设向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 在这组基下的坐标分别为 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)'$, $\beta = (b_1, b_2, b_3)'$, 那么

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \cdot (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$$

称 $M = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$ 为这组基的度量矩阵, 也称 Gram 矩阵. 这样上述结果可以写为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha^T M \beta.$$

如果向量 ε_1, ε_2, ε_3 两两垂直, 且长度均为 1, 则称它们构成标准正交基. 易知标准正交基的度量矩阵为单位矩阵. 若向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 在标准正交基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 下的坐标分别为 $(a_1, a_2, a_3)'$ 和 $(b_1, b_2, b_3)'$, 则

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

向量积

定义

设 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 为空间向量, 定义向量 $\mathbf{c}$ 如下

(1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$, 其中 θ 为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角;

(2) 若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线, 则 $\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 都垂直, 且 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 构成右手系.

称 $\mathbf{c}$ 为 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的向量积, 也称为外积或叉乘, 记作 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

如果标准正交基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 构成右手系, 则由定义可知

$$\varepsilon_1 \times \varepsilon_2 = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_2 \times \varepsilon_3 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 \times \varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

向量积的性质

引理

若 $\mathbf{c} \neq 0$, 且 $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, 其中 $\mathbf{b}_1 // \mathbf{c}$, $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{c}$, 那么 $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}_2 \times \mathbf{c}$.

证明.

易知 $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ 与 $\mathbf{b}_2 \times \mathbf{c}$ 的方向相同, 长度也相同. □

命题

向量积具有以下性质:

- 反交换性: $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$;
- 线性: $(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

证明.

反交换性, 与数乘的交换性都可以通过定义来验证, 从略. 下面证明外积对加法的分配律. 若 $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则两端都为零. 以下设 $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. 由引理, 可以不妨设 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 都垂直于 $\mathbf{c}$. 这时, 与 $\mathbf{c}$ 作外积相当于先将向量乘以 $|\mathbf{c}|$ 再绕 $\mathbf{c}$ 旋转 $90°$. 于是易知结论成立. □

任取一组基 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, 设向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 在这组基下的坐标分别为 $(a_1, a_2, a_3)'$ 和 $(b_1, b_2, b_3)'$, 那么

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)\times(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3)\\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

特别地, 当 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ 为右手系标准正交基时, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 在这组基下的坐标为

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)'.$$

二重外积公式

命题

$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$.

证明.

设 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 在某个右手系标准正交基下的坐标分别为 $(a_1,a_2,a_3)'$, $(b_1,b_2,b_3)'$, $(c_1,c_2,c_3)'$. 设 $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 的坐标为 $(d_1,d_2,d_3)'$, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 的坐标为 $(h_1,h_2,h_3)'$. 那么

$$\begin{aligned}h_1&=a_2d_3-a_3d_2=a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3)\\&=b_1(a_2c_2+a_3c_3)-c_1(a_2b_2+a_3b_3)\\&=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})b_1-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})c_1.\end{aligned}$$

同理可得 $h_i=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})b_i-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})c_i$, $i=2,3$. 因此命题得证. □

根据这个命题, 容易得到

- $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=-\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$.
- 一般而言, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\neq(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$. 也就是说, 外积不满足结合律.

混合积

定义

称 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ 为向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 的混合积.

易知 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$ 表示以 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 如果 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} > 0$, 则 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{c}$ 的夹角为锐角; 由于 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ 构成右手系, 所以 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 也构成右手系. 类似地, 若 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} < 0$, 则 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 构成左手系.

命题

混合积具有以下性质:

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$ *的充要条件是* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *共面;*
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$;
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

利用外积的坐标计算公式和混合积的性质，直接展开计算可得

命题

任取一组基 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. 设向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 在这组基下的坐标分别为 $(a_1, a_2, a_3)'$, $(b_1, b_2, b_3)'$, $(c_1, c_2, c_3)'$, 则有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3.$$

命题

对任意四个向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, 有

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}.$$

证明.

注意 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$, 利用二重外积公式，展开即证. □

思考题

- (***) 设向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 不共面. 如果向量 $\mathbf{x}$ 满足 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=a_0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}=b_0$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}=c_0$, 证明:

$$\mathbf{x}=\frac{a_0\,\mathbf{b}\times\mathbf{c}+b_0\,\mathbf{c}\times\mathbf{a}+c_0\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}.$$

- (****) 已知向量 $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ 共面, 向量 $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ 也共面. 设

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1&=(\mathbf{a}_2\times\mathbf{b}_3)\times(\mathbf{a}_3\times\mathbf{b}_2),\\ \mathbf{c}_2&=(\mathbf{a}_3\times\mathbf{b}_1)\times(\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_3),\\ \mathbf{c}_3&=(\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_2)\times(\mathbf{a}_2\times\mathbf{b}_1),\end{aligned}$$

证明: $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ 共面.

空间仿射坐标系

定义

取定空间向量的一组基 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, 再取定一点 O, 称 $[O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ 为空间的一个仿射标架, 也称为仿射坐标系. 称 O 为原点, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 为基向量.

取定仿射标架 $[O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$. 由于空间的点 P 可以一一对应于向量 $\overrightarrow{OP}$, 我们把向量 $\overrightarrow{OP}$ (在基 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 下) 的坐标也称为点 P 的坐标. 例如 O 点的坐标为 $(0, 0, 0)'$.
平面的仿射标架可以类似定义.

空间中的平面

取定仿射标架 $[O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$. 我们来讨论空间中的平面的方程.
几何上看, 以下几种方式都可以确定一个平面.

- 不共线的三点;
- 一个点以及两个不共线的向量 (即该平面上的一个仿射标架);
- 一个点以及一个法向量.

其中, 不共线三点 P, Q, R 确定了平面上的一个仿射标架 $[P; \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}]$, 所以下面先讨论第二种方式.

命题

在仿射标架下, 平面的参数方程形如
$(x, y, z)' = (x_0 + su_1 + tv_1, y_0 + su_2 + tv_2, z_0 + su_3 + tv_3)'$, 其中 s, t 为参数; 一般方程形如 $Ax + By + Cz + D = 0$.

证明.

在该平面上取仿射标架 $[P; \mathbf{u}, \mathbf{v}]$. 这时, 点 M 在该平面上 $\iff$ $\overrightarrow{PM}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 三个向量共面 $\iff$ 存在 s, t 使得 $\overrightarrow{PM} = s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v}$ $\iff$ 它们的坐标排成的三阶行列式为零 $\iff$ M 的坐标 $(x, y, z)'$ 满足一个一次方程. □

例

在仿射标架下，求经过点 $M_0(1,-2,0)'$，并经过平面 $2x-y+z-3=0$ 与 $x+2y-z+1=0$ 的交线的平面方程.

解

解法一: 在交线上取两点 $M_1(1,-1,0)'$, $M_2(0,2,5)'$. 点 $M(x,y,z)'$ 在该平面上, 当且仅当 $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$ 共面, 当且仅当

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y+2 & 1 & 4 \\ z & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

整理得 $5x+z-5=0$.

解法二: 任取实数 k, 则所给的交线总在平面 $k(2x-y+z-3)+(x+2y-z+1)=0$ 上. 令这个平面经过点 M_0, 得到 $k=2$. 因此所求平面方程为 $5x+z-5=0$.

命题

在仿射标架下，设平面 π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，向量 $\mathbf{w}$ 的坐标为 $(w_1, w_2, w_3)'$. 那么，$\mathbf{w}//\pi$ 的充要条件是 $Aw_1+Bw_2+Cw_3=0$.

证明.

不妨把向量 $\mathbf{w}$ 的起点取在平面 π 上. 这时 $\mathbf{w}//\pi$ 的充要条件是它的终点也在平面 π 上. $\square$

推论

在仿射标架下，若平面 π, π' 的方程分别为 $Ax+By+Cz+D=0$ 和 $A'x+B'y+C'z+D'=0$，那么 $\pi//\pi'$ 的充要条件是 (A,B,C) 与 (A',B',C') 成比例.

思考题

在仿射标架下，设平面 π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，点 P_1, P_2 的坐标分别为 $(x_1,y_1,z_1)'$ 和 $(x_2,y_2,z_2)'$. 求证：当且仅当 $Ax_1+By_1+Cz_1+D$ 与 $Ax_2+By_2+Cz_2+D$ 同号时，P_1 与 P_2 在平面 π 的同侧.

空间直角坐标系

定义

在空间仿射标架 $[O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]$ 中, 如果 $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ 构成标准正交基, 则称 $[O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]$ 为直角标架, 也称为直角坐标系.

现在固定一个直角标架, 设平面 π 经过一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)'$, 且法向量为 $\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3)'$. 那么, 点 $P(x,y,z)'$ 在平面 π 上当且仅当 $P_0P\perp\mathbf{n}$, 当且仅当 $\overrightarrow{P_0P}\cdot\mathbf{n}=0$, 即

$$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0.$$

这也称为平面的点法式方程. 由此可得

命题

如果平面 π 在直角标架下的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$, 则 π 的一个法向量的坐标是 $(A,B,C)'$.

点到平面的距离

由内积的几何意义可知

命题

如果平面 π 经过点 P_0 且法向量为 $\mathbf{n}$, 那么, 点 P 到平面 π 的距离为 $|\overrightarrow{P_0P}\cdot\mathbf{n}|/|\mathbf{n}|$.

如果平面 π 在直角标架下的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$, 则可取法向量 $\mathbf{n}=(A,B,C)'$. 若 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 在平面 π 上, 则点 $P(x_1,y_1,z_1)$ 到 π 的距离为

$$\frac{|\overrightarrow{P_0P}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(y_1-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

思考题

(***) 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中, 过每条棱的中点作一个平面与它的对棱垂直, 证明: 所作的这六个平面交于一点. 这个点称为四面体的 Monge 点 (Gaspard Monge, 1746-1818), 它恰好是外接球球心关于重心的中心对称点. 如果分别以每条棱为直径作球, 则 Monge 点对这六个球的幂相等.

空间中的直线

几何上看, 以下几种方式都可以确定一条直线:

- 不重合的两点;
- 一点以及一个非零向量 (即直线上的仿射标架);
- 两个不平行的平面.

不重合的两点 P, Q 确定了直线上的仿射标架 $[P; \overrightarrow{PQ}]$. 因此我们先讨论第二种方式.

在仿射标架下, 设直线 ℓ 经过一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)'$, 且平行于向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)'$(称为该直线的方向向量). 那么, 点 $P(x, y, z)'$ 在直线 ℓ 上, 当且仅当 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\mathbf{u}$ 共线, 即存在实数 t 使得 $\overrightarrow{P_0P} = t\,\mathbf{u}$. 由此可知

命题

在仿射标架下, 直线的参数方程形如 $(x, y, z)' = (x_0 + tu_1, y_0 + tu_2, z_0 + tu_3)'$, 其中 t 为参数; 标准方程形如 $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$.

从标准方程中可直接读出直线上一点和方向向量的坐标, 所以也称为点向式方程.

若平面 π_i 的方程为 $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$, $i=1,2$, 那么, 当 π_1 与 π_2 相交时, 它们的交线 ℓ 的方程为 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$ 这也称为直线 ℓ 的一般方程.

由于交线 ℓ 的方向向量 $\mathbf{u}$ 既平行于 π_1, 也平行于 π_2, 所以 $\mathbf{u}$ 的坐标 $(u_1,u_2,u_3)'$ 满足

$$A_1u_1+B_1u_2+C_1u_3=A_2u_1+B_2u_2+C_2u_3=0.$$

通常可以取

$$u_1=\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}, \quad u_2=\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}, \quad u_3=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}.$$

注意这在仿射标架下也成立 (在直角标架下当然可以解释为外积).

例

已知直线 ℓ_1 与 ℓ_2 异面, 且 ℓ_i 过点 P_i, 方向向量为 $\mathbf{u}_i$, $i=1,2$. 点 M 不在 ℓ_1, ℓ_2 上. 若直线 ℓ 经过点 M, 且与直线 ℓ_1 和 ℓ_2 都相交, 求直线 ℓ 的方程.

解

设点 M 与直线 ℓ_i 决定的平面为 π_i, 则 ℓ 就是 π_1 与 π_2 的交线. 注意 π_i 过点 M, 且平行于向量 $\overrightarrow{MP_i}$ 和 $\mathbf{u}_i$, 容易得到 π_i 的方程.

思考题

(**) 已知向量 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 不共面. 直线 ℓ_1 过点 P_1, 方向向量为 $\mathbf{u}$; 平面 π 过点 P_2 且平行于 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$. 如果直线 ℓ 过点 P_3, 平行于 π, 且与 ℓ_1 相交, 求 ℓ 的方程.

命题

若直线 ℓ 经过点 P_0, 方向向量为 $\mathbf{u}$, 则点 P 到直线 ℓ 的距离为 $|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{u}|/|\mathbf{u}|$.

证明.

在直线 ℓ 上取点 Q, 使得 $\overrightarrow{P_0Q} = \mathbf{u}$. 则点 P 到 ℓ 的距离等于三角形 P_0PQ 中 P_0Q 边上的高. 注意 $|\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0Q}|$ 等于 P_0PQ 面积的 2 倍, 即证. □

命题

设直线 ℓ_i 经过点 P_i, 方向向量为 $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$. 那么, 直线 ℓ_1 与 ℓ_2 共面的充要条件是 $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ 共面, 也即 $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = 0$.

命题

设直线 ℓ_i 经过点 P_i, 方向向量为 $\mathbf{u}_i$, $i=1,2$. 那么, 当 ℓ_1 与 ℓ_2 异面时, 它们之间的距离为 $|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2|/|\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2|$.

证明.

过 P_1 作直线 ℓ 平行于 ℓ_2, 则 ℓ 与 ℓ_1 决定一个平面 π. 直线 ℓ_2 与 ℓ_1 之间的距离等于 ℓ_2 到 π 的距离, 从而也等于 P_2 到 π 的距离.
注意 π 的法向量可取为 $\mathbf{n}=\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2$, 于是 P_2 到 π 的距离为 $|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\mathbf{n}|/|\mathbf{n}|$. □

例

给定两条异面直线 ℓ_1 和 ℓ_2, 其中 ℓ_i 过点 P_i, 方向向量为 $\mathbf{u}_i$, $i=1, 2$. 动直线 ℓ 与 ℓ_1, ℓ_2 都相交, 且 $\ell \perp \ell_2$. 求 ℓ 的轨迹.

解

显然 ℓ_1 和 ℓ_2 上的点都在轨迹上. 在 ℓ 上任取一点 P, 不妨设它不在 ℓ_1, ℓ_2 上. 设 P 与 ℓ_i 决定的平面为 π_i, $i=1, 2$, 则 ℓ 就是 π_1 与 π_2 的交线. 由于 π_i 的法向量为 $\mathbf{n}_i = \overrightarrow{P_iP} \times \mathbf{u}_i$, 所以 ℓ 的方向向量为 $\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$. 由条件 $\ell \perp \ell_2$ 就得到 P 点满足的方程为 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_2 = 0$, 即

$$(\overrightarrow{P_1P} \times \mathbf{u}_1) \times (\overrightarrow{P_2P} \times \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_2 = 0.$$

这就是要求的轨迹方程.

例

给定两条异面直线 ℓ_1 和 ℓ_2, 其中 ℓ_i 过点 P_i, 方向向量为 $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2$. 求 ℓ_1 与 ℓ_2 的公垂线 (即与 ℓ_1, ℓ_2 都垂直相交的直线) 的方程.

解

设公垂线 ℓ 与 ℓ_i 决定的平面为 π_i, $i = 1, 2$, 则 ℓ 就是 π_1 与 π_2 的交线. 注意 ℓ 的方向向量为 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$, 所以 π_i 的法向量为

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{u} \times \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2.$$

结合 π_i 过点 P_i, 容易得到 π_i 的方程.

例

设点 P 和点 Q 分别在空间中作匀速直线运动, 求直线 PQ 的轨迹.

解

设点 P 运动的初始位置为 P_0, 运动的速度向量为 $\mathbf{u}$; 点 Q 运动的初始位置为 Q_0, 速度向量为 $\mathbf{v}$. 在 t 时刻, 设 P, Q 运动到的位置分别为 P_t, Q_t, 那么 $\overrightarrow{P_0P_t} = t\mathbf{u}$, $\overrightarrow{Q_0Q_t} = t\mathbf{v}$.

设 M 为直线 P_tQ_t 上一点, 则平面 P_0P_tM 的法向量为 $\overrightarrow{P_0M} \times \mathbf{u}$. 从而

$$\overrightarrow{P_0M} \times \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{P_0Q_t} = 0,$$

也即

$$\overrightarrow{P_0M} \times \mathbf{u} \cdot (\overrightarrow{P_0Q_0} + t\mathbf{v}) = 0.$$

同理 $\overrightarrow{Q_0M} \times \mathbf{v} \cdot (\overrightarrow{Q_0P_0} + t\mathbf{u}) = 0$. 从这两式中消去 t, 就得到了 M 点所满足的方程.

例

给定三条两两异面的直线 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, 求这样的直线 ℓ 的轨迹, 使得 ℓ 与 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 分别都共面.

解

设 ℓ_i 经过点 P_i, 方向向量为 $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, 3$. 设 M 是 ℓ 上任意一点. 不妨设 M 不在 ℓ_i 上 $(i = 1, 2, 3)$. 点 M 与直线 ℓ_i 所决定的平面为 π_i, 则 ℓ 是三个平面 π_1, π_2, π_3 的公共交线, 因而这三个平面的法向量共面, 于是得到 M 满足的方程为

$$(\overrightarrow{P_1M} \times \mathbf{u}_1) \times (\overrightarrow{P_2M} \times \mathbf{u}_2) \cdot (\overrightarrow{P_3M} \times \mathbf{u}_3) = 0.$$

例

设 ℓ_1, ℓ_2 是异面直线, M 是它们的公垂线段的中点. 设 A_1, A_2 分别是 ℓ_1, ℓ_2 上的动点, 且 $MA_1 \perp MA_2$, 求直线 A_1A_2 的轨迹.

解

设 B_1B_2 为公垂线段. 又设直线 ℓ_1, ℓ_2 的单位方向向量分别为 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, 则可设 $\overrightarrow{B_1A_1} = t\mathbf{u}_1$, $\overrightarrow{B_2A_2} = s\mathbf{u}_2$.

若 X 为 A_1A_2 上任意一点, 则平面 XB_2A_2 的法向量为 $\overrightarrow{B_2X} \times \mathbf{u}_2$, 我们有

$$\overrightarrow{B_2X} \times \mathbf{u}_2 \cdot \overrightarrow{B_2A_1} = 0,$$

即 $\overrightarrow{B_2X} \times \mathbf{u}_2 \cdot (\overrightarrow{B_2B_1} + t\mathbf{u}_1) = 0$. 由此即可解出 t. 类似可解出 s.

代入 $(\overrightarrow{MB_1} + t\mathbf{u}_1) \cdot (\overrightarrow{MB_2} + s\mathbf{u}_2) = 0$, 就得到了 X 满足的方程.

两个平面的位置关系

考虑两个平面 $\pi_1: \ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ 和 $\pi_2: \ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$. 它们的交集可以用线性方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$ 的解集来表示.

记线性方程组的系数矩阵为 A, 增广矩阵为 $\overline{A}$.

- 当 秩$(A)=1$ 时, 两个方程的一次项系数成比例. 这时
  - 若 秩$(\overline{A})=1$, 则两个方程的所有系数都成比例, 从而两个平面重合. 相应地, 线性方程组的解集依赖于 2 个自由未知量.
  - 若 秩$(\overline{A})=2$, 则两个平面平行. 相应地, 线性方程组无解.
- 当 秩$(A)=2$ 时, 两个平面相交, 交集是一条直线. 相应地, 线性方程组的一般解依赖于 1 个自由未知量.

三个平面的位置关系

考虑三个平面 π_i : $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. 它们的交集可以

用线性方程组 $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \end{cases}$ 的解集来表示.

记线性方程组的系数矩阵为 A, 增广矩阵为 $\overline{A}$.

- 当 秩$(A) = 1$ 时, 三个平面的法向量共线. 这时
  - 如果 秩$(\overline{A}) = 1$, 则三个平面重合;
  - 如果 秩$(\overline{A}) = 2$, 则三个平面互相平行 (可能有两个重合).
- 当 秩$(A) = 2$ 时, 三个平面的法向量共面. 这时
  - 如果 秩$(\overline{A}) = 2$, 则三个平面有一条公共的交线;
  - 如果 秩$(\overline{A}) = 3$, 则三个平面没有公共点.
- 当 秩$(A) = 3$ 时, 三个平面的法向量不共面. 这时三个平面有唯一的公共点.

两条直线的位置关系

考虑两条直线 $\ell_1:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$ 和

$\ell_2:\begin{cases}a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0\\a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0\end{cases}$. 它们的交集可以用线性方程组

$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\\a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0\\a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0\end{cases}$ 的解集来表示.

记线性方程组的系数矩阵为 A, 增广矩阵为 $\overline{A}$.

- 当 秩$(A)=2$ 时, 四个平面的法向量共面, 因此两条直线的方向向量共线.
  - 若 秩$(\overline{A})=2$, 则两条直线重合;
  - 若 秩$(\overline{A})=3$, 则两条直线平行.
- 当 秩$(A)=3$ 时, 四个平面中有 3 个平面交于一点.
  - 若 秩$(\overline{A})=3$, 则两条直线相交;
  - 若 秩$(\overline{A})=4$, 则两条直线异面.

例

设 $L_1:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases}a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0,\\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0\end{cases}$ 是两条不同的直线, 证明 L_1 与 L_2 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=0.$$

解

考虑齐次线性方程组 $a_ix+b_iy+c_iz+d_iw=0(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. 系数行列式为零的充要条件是它有非零解 (x_0,y_0,z_0,w_0). 如果 $w_0\neq 0$, 则 $(x_0/w_0,y_0/w_0,z_0/w_0,1)$ 也是解, 这时 $(x_0/w_0,y_0/w_0,z_0/w_0)$ 是直线 L_1 和 L_2 的公共点; 如果 $w_0=0$, 向量 (x_0,y_0,z_0) 与四个平面 $a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0$ 都平行, 从而 L_1 与 L_2 都平行于该向量.