费马定理、罗尔定理、拉格朗日中值定理

定理 1 (费马定理)

设点x_0是函数$f(x)$的一个极值点且$f(x)$在点x_0可导，则$f'(x_0) = 0$.

定理 2 (罗尔定理)

设$f(x)$在$[a, b]$连续，在(a, b)可导，且$f(a) = f(b)$，则存在$\xi \in (a, b)$，使得$f'(\xi) = 0$.

定理 3 (拉格朗日中值定理)

设$f(x)$在$[a, b]$连续，在(a, b)可导，则存在$\xi \in (a, b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

判断题

判断下面的命题是否成立.

设$f(x)$在(a,b)上可导，则$f(x)$在(a,b)上有界当且仅当$f'(x)$在(a,b)上有界.

(A) 成立

(B) 不成立

判断题

判断下面的命题是否成立.

设$f(x)$在(a,b)上可导，$f'(x)$在(a,b)上单调递增，则$\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$当且仅当$\lim\limits_{x\to b^-} f'(x) = +\infty$.

(A) 成立

(B) 不成立

定理 4 (柯西中值定理)

设$f(x)$和$g(x)$都在$[a, b]$连续, 在(a, b)可导，且当$x \in (a, b)$时, $g'(x) \neq 0$, 则存在$\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

拉格朗日中值定理可以看作柯西中值定理当$g(x) = x$时的特殊情形. 从几何上看, 柯西中值定理和拉格朗日中值定理说的是同一件事，即光滑曲线上两点A、B之间必有另一点, 使曲线在该点的切线平行于弦$\overline{AB}$. 在拉格朗日中值定理中，曲线是函数$y = f(x)$的图象; 在柯西中值定理中，曲线由参数方程$x = g(t)$, $y = f(t)$给出.

令$H(x)=[g(b)-g(a)]f(x)-[f(b)-f(a)]g(x)$, 则函数$H(x)$在$[a,b]$连续, 在$(a,b)$可导, 且$H(a)=f(a)g(b)-f(b)g(a)=H(b)$, 从而由罗尔定理知存在$\xi\in(a,b)$, 使得$H'(\xi)=0$. 又因

$$H'(x)=[g(b)-g(a)]f'(x)-[f(b)-f(a)]g'(x)$$

所以有

$$[g(b)-g(a)]f'(\xi)-[f(b)-f(a)]g'(\xi)=0.$$

若$g(a)=g(b)$, 则由罗尔定理知存在$\xi\in(a,b)$, 使得$g'(\xi)=0$, 与已知$g'(x)\neq 0$矛盾, 故$g(b)-g(a)\neq 0$, 从而要证的等式右端有意义. 又由$g'(x)\neq 0$, 得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

在柯西中值定理的证明的前半部分，应用罗尔定理证明了存在$\xi \in (a,b)$, 使得

$$[g(b)-g(a)]f'(\xi)-[f(b)-f(a)]g'(\xi)=0.$$

在这段证明中，没有使用“当$x \in (a,b)$时，$g'(x) \neq 0$”的条件. 如果去掉“当$x \in (a,b)$时，$g'(x) \neq 0$”的条件，那么分析上式，能得出什么结论？由此考虑是否能够将柯西中值定理中“当$x \in (a,b)$时，$g'(x) \neq 0$”的条件减弱.

柯西中值定理

设$f(x)$和$g(x)$都在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，$g(a) \neq g(b)$，且当$x \in (a,b)$时, $f'(x)$和$g'(x)$不同时为0, 则存在$\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

定理 5 (达布定理)

设$f(x)$在$[a,b]$可导且$f'(a) \neq f'(b)$, 则对介于$f'(a)$与$f'(b)$之间的任何实数η, 必存在$\xi \in [a,b]$, 使得$f'(\xi) = \eta$.

达布定理表明导函数$f'(x)$具有介值性. 当函数$f(x)$在$[a,b]$可导时，$f'(x)$在$[a,b]$未必连续, 故不能从连续函数的介值定理直接得出达布定理.

达布定理的证明

先证特殊情形：当$f'(a)$与$f'(b)$异号时，必存在$\xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi) = 0$. 不妨设$f'(a) > 0$，$f'(b) < 0$. 因为

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0,$$

故有$\delta > 0$，使当$a < x < a + \delta$时，就有

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

因$x - a > 0$，所以$f(x) - f(a) > 0$，即当$a < x < a + \delta$时，$f(x) > f(a)$，从而$f(a)$不是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值. 类似地可以证明$f(b)$也不是$f(x)$的最大值. $f(x)$在$[a,b]$可导必连续，故$f(x)$在某点$\xi \in (a,b)$处取得最大值. 由费马定理知$f'(\xi) = 0$.

回到一般情形, 不妨设$f'(a) > \eta > f'(b)$. 令

$$F(x) = f(x) - \eta x,$$

于是$F(x)$在$[a, b]$可导且$F'(a) = f'(a) - \eta > 0$, $F'(b) = f'(b) - \eta < 0$. 由前段证明知存在$\xi \in (a, b)$, 使得$F'(\xi) = 0$，即$f'(\xi) - \eta = 0$, 所以$f'(\xi) = \eta$.

练习5.1的第10题

设$f(x)$在(a,b)可导. 证明若$x_0 \in (a,b)$是$f'(x)$的一个间断点，则x_0必为$f'(x)$的第二类间断点.

由此可知，如果$f(x)$在(a,b)上处处有定义，且$f(x)$在(a,b)上存在可去间断点或第一类间断点，那么不存在$F(x)$, 使得$f(x)$是$F(x)$的导函数.

设$f(x)$在区间I上可导. 若$f'(x)$在区间I上恒不为0, 则$f'(x)$在区间I上恒大于0或恒小于0, 于是$f(x)$在区间I上严格单调.

设$f(x)$在区间I上可导. 若$f'(x)$是单射, 则$f'(x)$在区间I上严格单调.

设$f(x)$在区间I上可导. 若$f'(x)$在区间I上单调，则$f'(x)$在区间I上连续.

判断题

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在区间I可导，如果$|f'(x)|$在区间I连续，则$f'(x)$在区间I连续.

(A) 成立

(B) 不成立

20级数学分析I月考2的一道试题

设$f(x)$在$[a,b]$连续，$f'_+(a)$存在，且$f'_+(a) > \lambda > \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 求证：存在$\xi \in (a,b)$使得$\lambda = \dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi - a}$.

你是怎么证明上面的命题的？证明了上面的命题之后，有什么进一步的思考？

例 1

设$a_1, a_2, \ldots, a_n$为实数，求证函数$f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx$在$(0, \pi)$内必有零点.

2015年普特南数学竞赛的B1题

设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上三次可导，$f(x)$至少有5个不同的实零点，证明：$f(x) + 6f'(x) + 12f''(x) + 8f'''(x)$至少有2个不同的实零点.

你是怎么证明上面的竞赛题的？证明了上面的竞赛题之后，对于罗尔定理在零点问题中的应用有什么启发？能给出更一般情形的结论吗？

例 2

若$f(x)$在(a,b)可导且$f'(x)\equiv 0$, 则$f(x)$在(a,b)恒为常数.

例 3

证明当$x>0$时，有$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

练习5.1的第5题

设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，问是否对任意$\xi\in(a,b)$，总有$x_1,x_2\in[a,b]$，$x_1<\xi<x_2$，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)?$$

结论是否定的．你能举出反例吗？进一步思考，探寻增加条件使得结论成立的思路．你能给出结论成立的一种充分条件吗？

如果将结论减弱为“对任意$\xi\in(a,b)$，总有$x_1,x_2\in[a,b]$，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1).\text{”}$$

你能给出这个结论成立的较弱一点的充分条件吗？