如果函数$f(x)$在开区间$(a,b)$处处可导，则称$f(x)$在$(a,b)$可导；如果函数$f(x)$在$(a,b)$可导且在点$a$右可导，在点$b$左可导，则称$f(x)$在$[a,b]$可导，这时就用$f'(a)$和$f'(b)$分别表示$f'_+(a)$和$f'_-(b)$. 类似地可以给出函数在其它类型的区间可导的定义.

**定义 1**

如果函数$f(x)$在区间$I$可导，那么对于每个$x \in I$，都有导数$f'(x)$与它对应，这就定义了区间$I$上的一个函数，称之为函数$y = f(x)$在区间$I$上的**导函数**，简称导数. 函数$y = f(x)$的导函数记为$f'(x)$, $y'$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$等等.

显然常数函数在任一点的导数均为0.

**例 1**

求三角函数$y=\sin x$和$y=\cos x$的导数.

**例 2**

求指数函数$y = a^x \ (a>0, a\neq 1)$和对数函数$y=\log_a x \ (a>0, a\neq 1, x>0)$ 的导函数.

特别地, 当$a=\mathrm{e}$时, $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$，表明函数$\mathrm{e}^x$在求导运算之下是不变的，这正是指数函数$y=\mathrm{e}^x$比其它指数函数重要的原因所在；当$a=\mathrm{e}$时, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，将以e为底数的对数称为自然对数, 原因正在于此.

## 定理 1

设函数$u(x)$和$v(x)$都在点$x$可导, 则有

(i) $[Cu(x)]' = Cu'(x)$, 其中 $C$ 为常数;

(ii) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$;

(iii) $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

(iv) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$, 其中$v(x) \neq 0$.

教材给出的证明方法是使用导数的定义，(iii)的证明使用了分子减一项加一项的技巧，也可以应用4.1节中的公式$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$来证明导数的四则运算法则.

由(iii)不难得出：对于有限个可导函数$u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, $\cdots$, $u_n(x)$的乘积，有$[u_1 u_2 u_3 \cdots u_n]' = u_1' u_2 u_3 \cdots u_n + u_1 u_2' u_3 \cdots u_n + u_1 u_2 u_3' \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 u_3 \cdots u_n'$.

# 行列式求导法则

设
$$f(x)=\begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & \cdots & u_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) & \cdots & u_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1}(x) & u_{n2}(x) & \cdots & u_{nn}(x) \end{vmatrix}$$
这里$u_{ij}(x)$都是可微函数, $i,j=1,2,\cdots,n$, 证明$f'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}D_k(x)$, 其中$D_k(x)$是$f(x)$的行列式中第$k$行的每个元素求导而其余行的元素保持不变所得到的行列式, 即
$$D_k(x)=\begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & \cdots & u_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{k-1,1}(x) & u_{k-1,2}(x) & \cdots & u_{k-1,n}(x) \\ u'_{k1}(x) & u'_{k2}(x) & \cdots & u'_{kn}(x) \\ u_{k+1,1}(x) & u_{k+1,2}(x) & \cdots & u_{k+1,n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1}(x) & u_{n2}(x) & \cdots & u_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

# 判断题

**判断下面的命题是否成立.**

如果函数$f(x)$在点$x_0$可导，$g(x)$在点$x_0$不可导，则$f(x)g(x)$在点$x_0$不可导.

(A) 成立

(B) 不成立

**例 3**

求下列各三角函数的导数: (i) $\tan x$; (ii) $\cot x$; (iii) $\sec x$; (iv) $\csc x$.

**定理 2**

设函数$y=f(x)$在$(a,b)$严格单调且连续，在点$x_0\in(a,b)$处可导且$f'(x_0)\neq 0$，$x=\varphi(y)$为$y=f(x)$的反函数，则$x=\varphi(y)$在点$y_0=f(x_0)$处可导且有

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

借助函数图象不难看到：设函数$y=f(x)$在$(a,b)$严格单调且连续，在点$x_0\in(a,b)$处可导且$f'(x_0)=0$，$x=\varphi(y)$为$y=f(x)$的反函数，则$x=\varphi(y)$在点$y_0=f(x_0)$处不可导. 请自行给出证明.

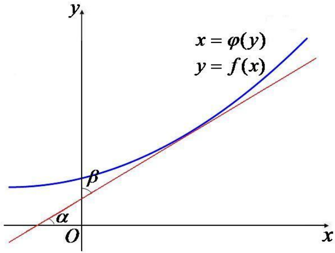


**Figure:** 图4-2

从几何上看，反函数求导法的意义很清楚. 例如，在图4-2中，函数$y = f(x)$和函数$x = \varphi(y)$的图像是同一条曲线，故

$$f'(x_0) = \tan\alpha, \quad \varphi'(y_0) = \tan\beta.$$

因为$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, 所以

$$\varphi'(y_0) = \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**例 4**

求下列各反三角函数的导数:

(i) $\arcsin x$; (ii) $\arccos x$; (iii) $\arctan x$.

**定理 3**

设函数$y=\varphi(x)$在点$x_0$可导且$y_0=\varphi(x_0)$，函数$z=f(y)$在点$y_0$可导，则复合函数$z=f(\varphi(x))$在点$x_0$可导且有

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f'(y_0)\varphi'(x_0).$$

注意：在

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

两边令$\Delta x\to$取极限来证明是不严格的. 这个证明思路在哪里不严格？

# 判断题

**判断下面的命题是否成立.**

如果函数$g(x)$在点$x_0$可导，$y_0 = g(x_0)$，函数$f(y)$在点$y_0$不可导，则$f(g(x))$在点$x_0$不可导.

(A) 成立

(B) 不成立

**例 5**

求幂函数$y = x^\alpha \ \ (\alpha \neq 0, x > 0)$的导数.

易见, 上一节例1是本例中$\alpha = 3$的特殊情形. 当然, 由于那时$\alpha = 3$是正整数, 函数的定义域是$(-\infty, +\infty)$, 而现在$\alpha$为任意非零实数, 函数的定义域只能暂时限制为$(0, +\infty)$. 事实上, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$这个公式在$x^{\alpha-1}$有定义的点处都成立.

# 基本初等函数的导数的公式列表

1. $(C)' = 0$，其中 $C$ 为常数;
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$，$\alpha \neq 0$;
3. $(a^x)' = a^x \ln a$，$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$，$a > 0$;
4. $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}$，$(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}$，$a > 0$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(\tan x)' = \sec^2 x$;
8. $(\cot x)' = -\csc^2 x$;
9. $(\sec x)' = \tan x \sec x$;
10. $(\csc x)' = -\cot x \csc x$;
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

初等函数的导数可以用本节给出的求导法则及上述公式来计算.

**例 6**

求函数

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \quad (a > 0)$$

的导数.

要注意初等函数在其定义域内未必处处可导. 例如，$f(x) = |x|$是初等函数，其定义域是$(-\infty, +\infty)$, 而$f(x)$在$x = 0$处不可导.

**判断下面的命题是否成立.**

如果函数$f(x)$和$g(x)$都在点$x_0$可导，则$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$在点$x_0$可导.

(A) 成立

(B) 不成立

**例 7**

设$u(x)>0$, 且函数$u(x)$, $v(x)$皆可导. 求函数$y=u(x)^{v(x)}$的导数.

形如$y=u(x)^{v(x)}$的函数通常称为幂指函数，例7给出了计算幂指函数的导数的公式. 另外，也可按对数求导法的格式来解例7，即由$y=u(x)^{v(x)}$两边取对数得$\ln y=v(x)\ln u(x)$, 再两边对$x$求导，得

$$\frac{y'}{y}=\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right),$$

由此求得$y'$. 此外，对数求导法也可用于求有限个函数的乘积的导数.

**例 8**

设$y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\ (-1 < x < 1)$, 求$y'$.

注意：教材中的解答是在$x \in (-1,0)\cup(0,1)$的情况下用对数求导法计算$y'$, 并没有给出$y'(0)$的计算过程. 实际上，可以使用导数的定义来计算$y'(0)$:

$$y'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 0}{x-0} = 1.$$

因此，对数求导法得到的$y'$的表达式$y' = h(x) = \dfrac{1-x-x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ $(x \in (-1,0)\cup(0,1))$也适用于$x = 0$的情形. 这并不是巧合，这里$h(x)$是$(-1,1)$上的连续函数，由练习5.1的第9题(1)知$y'(0)$存在且$y'(0) = h(0)$.

# 对于分段定义的函数，分段点处的导数应按照导数定义来求

**例 9**

求函数

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-1, & -1<x<0 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x\geqslant 0 \end{cases}$$

的导数.

**判断下面的命题是否成立.**

如果函数$f(x)$在$[a, b]$可导，则$f'(x)$在$[a, b]$有界.

(A) 成立

(B) 不成立

# 隐函数表示法

对于抛物线$y^2 = 2px\ (p > 0)$, 我们可以认为它是函数$x = \dfrac{y^2}{2p}$的图象, 也可以认为它是以下两个函数图象之并集$y = \sqrt{2px}$, $\quad y = -\sqrt{2px}$. 同理, 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a, b > 0)$是以下两个函数图象之并集

$$y = y_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = y_2(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

我们把上面的方法称为函数的隐函数表示法. 例如, 椭圆方程$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$或者$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ 在$y \geqslant 0$和$y \leqslant 0$的条件下, 分别表示两个隐函数$y = y_1(x)$和$y = y_2(x)$. 而$y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$和$y = -\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$则是这两个隐函数的显式表示.

# 隐函数方程

隐函数还可以表示更复杂的函数. 例如, 函数

$$y = x + \arctan x$$

是定义在$(-\infty, +\infty)$上的严格递增函数, 因此存在反函数$x = f(y)$. 我们难以写出$f(y)$的显式表达式, 但我们可以认为方程

$$x + \arctan x - y = 0$$

是$x = f(y)$的隐函数表示.

关于隐函数的更完整的理论, 我们要到多元函数部分才能详细介绍.

# 隐函数的导数的求法

前面讨论函数的导数的时候，函数都有解析表达式$y = f(x)$. 然而, 函数的表示方法并不限于解析表达式. 下面我们讨论隐函数的导数以及参数方程所确定的函数的导数的求法.

隐函数的存在性和可导性将在多元函数微分学中讨论. 这里, 我们总是假定隐函数存在且可导, 在此前提下给出从方程$F(x, y) = 0$求导数的方法.

**例 10**

求由方程$x^2 + xy + y^2 = 1$所确定的隐函数$y = y(x)$的导数.

这个例子中的方法具有一般性. 在计算中要注意$y$是$x$的函数，本例中$y^2$对$x$求导的结果是$2yy'$而不是$2y$.

设曲线由参数方程给出, 即$x$和$y$都是变量$t$的函数:

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad t \in I,$$

其中$t$称为参数. 对于每个固定的$t$, 都可由参数方程得到一组$(x, y)$的值. 令这里的$x$对应于$y$, 便建立了一个对应. 如果在区间$I$上$x = u(t)$有反函数, 则这个对应是单值的, 从而它就确定了函数$y = f(x)$, 称之为由参数方程确定的函数. 将$t = u^{-1}(x)$代入到$y = v(t)$中, 即得

$$y = v(u^{-1}(x)).$$

这表明由参数方程给出的函数$y = f(x)$就是$y = v(t)$与$x = u(t)$的反函数$t = u^{-1}(x)$的复合函数.

若$u(t)$和$v(t)$在区间$I$可导，$x = u(t)$在区间$I$上有反函数，则由复合函数求导法和反函数求导法，在$u'(t) \neq 0$时，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{v'(t)}{u'(t)}.$$

**例 11**

求由参数方程

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \qquad 0 < t < \pi$$

所确定的函数的导数并求这条曲线过点$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$的切线方程.

显然, 这个参数方程所确定的曲线是上半椭圆. 利用隐函数求导或直接写成显函数再求导, 与这里的结果是完全一致的.