函数极限的性质与运算法则

数学分析I

第7讲

October 13, 2022

函数极限的性质与数列极限的性质极为相似, 而且证明过程也类似. 为避免重复和节省篇幅, 对于有些定理将只叙述而不证明. 函数极限的自变量变化过程有六种不同情形, 教材讲述函数极限的性质时以$x \to x_0$的过程为例, 课件中我们用$x \to \alpha$来表示六种自变量变化过程中的一种.

定理 1 (极限唯一性)

若$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = B$, 则$A = B$.

定理 2 (局部有界性)

若 $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$存在, 则$f(x)$在$x \to \alpha$相应的某一“空心邻域”中有界.

注意：本定理指出函数在一点有极限可以保证它在该点的某个较小范围内(不包括这一点)有界, 但是不能保证在整个定义域有界. 一般地, 将函数在某点的小邻域内具有的性质称为局部性质.

定理 3 (局部保序性)

设 $\lim_{x\to\alpha} f(x)=A$, $\lim_{x\to\alpha} g(x)=B$.
(i) 若$A>B$, 则存在$x\to\alpha$相应的一个“空心邻域”, 使在此“空心邻域”中有$f(x)>g(x)$;
(ii) 若存在$x\to\alpha$相应的一个“空心邻域”, 使在此“空心邻域”中有$f(x)\geqslant g(x)$, 则$A\geqslant B$.

推论 1

设 $\lim_{x\to\alpha} f(x)=A, B\in\mathbb{R}$.
*(i)*若$A>B$ (或$A<B$), 则存在$x\to\alpha$相应的一个“空心邻域”, 使在此“空心邻域”中有$f(x)>B$ ($f(x)<B$);
(ii) 若存在$x\to\alpha$相应的一个“空心邻域”, 使在此“空心邻域”中有$f(x)\geqslant B$ (或$f(x)\leqslant B$), 则$A\geqslant B$ ($A\leqslant B$).

定理 4 (四则运算法则)

设 $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=B$, 则有

(i) $\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\pm\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=A\pm B$;

(ii) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=A\cdot B$.

若$B\neq 0$, 则进一步有

(iii) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

应用四则运算法则的例题

例 1

求极限 $\lim_{x\to 3} \dfrac{5x-15}{2x^2-x-15}$.

自变量变化过程$x \to 3$意味着可以假设$x \neq 3$, 从而分子分母可以约去$x-3$.

例 2

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x-7}{2x^2-x+1}$.

本题完全仿照数列极限时的做法.

考虑

$$g(x) \equiv 0, \quad f(y) = \begin{cases} 1, & \text{当} y \neq 0, \\ 0, & \text{当} y = 0. \end{cases}$$

于是$f(g(x)) \equiv 0$. 易见, $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$但是$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 0$.

这是因为，$\lim_{y\to 0} f(y)$与$f(0)$的取值无关，而在上面的例子中，当$x \neq 0$而x很靠近0时, 不满足$g(x) \neq y_0 = 0$, 故$\lim_{x\to 0} f(g(x))$与$f(0)$的取值有关，由$g(x) \equiv 0$得到了$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = f(0) \neq \lim_{y\to 0} f(y)$.

定理 5 (复合函数的极限)

设 $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$且存在$\delta > 0$, 使当$0 < |x - x_0| < \delta$时, 有$g(x) \neq y_0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A$.

本定理的证明不难，熟练了极限定义的应用就可以顺利地写出证明.

注

由证明过程可见，当$A = f(y_0)$, 即函数f在点y_0处连续时，就不需要“存在$\delta > 0$, 使当$0 < |x - x_0| < \delta$时, 有$g(x) \neq y_0$”的条件了.

其他情形下复合函数的极限

x_0, y_0和A可以是无穷大量，$x \to x_0, y \to y_0$也可以换成单侧极限. 下面举两种情形，其余情形的陈述与证明请大家自行思考.

设$\lim\limits_{y \to y_0^-} f(y) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = y_0$且存在$\delta > 0$, 使当$x \in (x_0, x_0 + \delta)$时，有$g(x) < y_0$, 则$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(g(x)) = A$.

设$\lim\limits_{y \to -\infty} f(y) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, 则$\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = A$.

变量代换的方法

复合函数的极限法则表明, 在求函数极限时可以采用变量代换的方法. 比如求极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$时, 可设$y = g(x)$. 如果$x \to x_0$时, $y \to y_0$; $x \neq x_0$时, $y \neq y_0$并且 $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)$存在, 则根据定理有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to y_0} f(y)$.

例 3

求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arcsin x}$.

用$y = \arcsin x$换元，就将本例中的极限化归为重要极限 $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin y}{y}$. 注意需要验证存在$x \to 0$相应的“空心邻域”，使得当$x$在此“空心邻域”中，就有$y \neq 0$.

另一个应用变量替换计算极限的例题

例 4

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$.

用$y=\dfrac{1}{x}$换元，就将本例中的极限化归为重要极限$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}$. 注意需要验证存在$x\to\infty$相应的“空心邻域”，使得当$x$在此“空心邻域”中，就有$y\neq 0$. 由于$y\neq 0$是显然的，教材中就没有提这个验证.

幂指函数的极限

称形如$u(x)^{v(x)}$(其中$u(x)>0$)的函数为幂指函数. 因为对任意实数x_0, 有$\lim\limits_{x\to x_0}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{x_0}$, 所以若$\lim\limits_{x\to\alpha}v(x)\ln u(x)=A\in\mathbb{R}$, 则

$$\lim_{x\to\alpha}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to\alpha}\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\alpha}v(x)\ln u(x)}=\mathrm{e}^A.$$

因为$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$, 所以若$\lim\limits_{x\to\alpha}v(x)\ln u(x)=-\infty$, 则

$$\lim_{x\to\alpha}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to\alpha}\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}=0.$$

例如，因为$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$, 所以

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=\mathrm{e}^0=1.$$

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在x_0的某空心邻域中恒大于0, $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, 则$\lim_{x \to x_0} f(x)^{\arcsin f(x)} = 1$.

(A) 成立

(B) 不成立

定义 1

如果在自变量的某种变化过程下函数的极限为0, 则称该函数为在相应过程下的无穷小量.

与数列情形不同的是, 由于函数自变量的变化过程有六种情形, 所以对函数无穷小量必须指明自变量的变化过程. 函数无穷小量有类似于无穷小数列的相应定理.

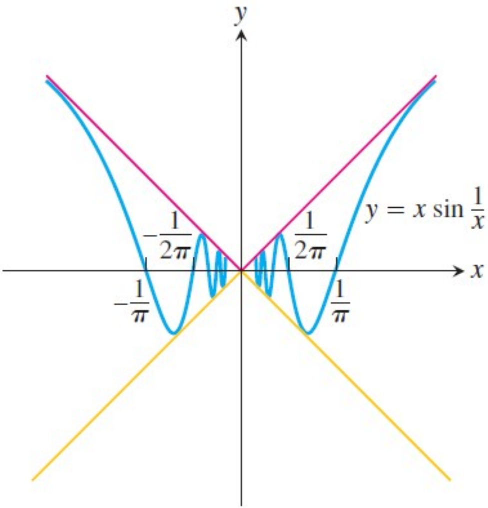
定理 6

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$的充分必要条件为: $f(x) - A$当$x \to \alpha$时是无穷小量.

定理 7

设$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$, $g(x)$在$x \to \alpha$相应的某个“空心邻域”中有界, 则$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x) = 0$.

应用定理7的一个例子：$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$



（图片取自Thomas' Calculus）