6.1 确界原理及其应用

一、基本方法

1. 求数集的上、下确界

例 1 设$S=\left\{\dfrac{(-1)^n(m-n)}{m+n}\Big|m,n\in\mathbb{N}^*\right\}$, 求$S$的上确界和下确界.

解 $\sup S=1$, $\inf S=-1$. 这是因为，

$$\left|\frac{(-1)^n(m-n)}{m+n}\right|=\frac{|m-n|}{m+n}<\frac{m+n}{m+n}=1,$$

取$n=1$, 则

$$\frac{(-1)^n(m-n)}{m+n}=\frac{1-m}{1+m}\to-1\quad(m\to\infty),$$

故$\inf S=-1$; 取$n=2$, 则

$$\frac{(-1)^n(m-n)}{m+n}=\frac{m-2}{m+2}\to1\quad(m\to\infty),$$

故$\sup S=1$. □

2. 用确界原理解决问题

例 2 设函数$f(x)$在$[a,b]$递增且$f(a)\geqslant a$, $f(b)\leqslant b$. 证明存在点$\xi\in[a,b]$, 使得$f(\xi)=\xi$.

证 令$A=\{x|x\in[a,b],f(x)\geqslant x\}$, 则$a\in A$, 故$A$非空. 令$\xi=\sup A$, 则$\xi\in[a,b]$. 对任何$x\in A$, 由$f$的单增性有$x\leqslant f(x)\leqslant f(\xi)$, 从而$f(\xi)$是$A$的一个上界，因此有$\xi\leqslant f(\xi)$. 另一方面，由$\xi\leqslant f(\xi)$和$f$的单增性有$f(\xi)\leqslant f(f(\xi))$, 因此$f(\xi)\in A$, 于是$f(\xi)\leqslant\xi$. 合起来即得$f(\xi)=\xi$. □

3. 用区间套定理解决问题

例 3 设函数$f(x)$在$[a,b]$递增且$f(a)\geqslant a$, $f(b)\leqslant b$. 证明存在点$\xi\in[a,b]$, 使得$f(\xi)=\xi$.

证 反证. 若任意$\xi \in [a,b]$, 都有$f(\xi) \neq \xi$, 则$f(a) > a$, $f(b) < b$. 把$[a,b]$等分为两个闭区间$\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$. 分成以下两种情形:

(1) 若$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < \dfrac{a+b}{2}$, 记$[a_1, b_1] = \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$;

(2) 若$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > \dfrac{a+b}{2}$, 记$[a_1, b_1] = \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$.

总成立$f(a_1) > a_1$, $f(b_1) < b_1$. 再将$[a_1, b_1]$等分为两个闭区间$\left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. 重复以上过程, 得到闭区间列$\{[a_n, b_n]\}$, 满足: 对任意$n$, 有$f(a_n) > a_n, f(b_n) < b_n$, 并且

(i) $[a,b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$;

(ii) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0 \ (n \to \infty)$.

根据区间套定理, 有$\xi \in [a,b]$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$. 结合$f(x)$在$[a,b]$递增知$a_n < f(a_n) \leqslant f(\xi) \leqslant f(b_n) < b_n$, 根据两边夹定理得$f(\xi) = \xi$. 矛盾! □

二、例题

例 4 设X和Y是两个有界集, 令$Z = \big\{x + y |\ x \in X, y \in Y\big\}$. 证明：$\inf Z = \inf X + \inf Y$.

证 对任何$x \in X$, $y \in Y$, 有$\inf X + \inf Y \leqslant x + y$, 故$\inf X + \inf Y$ 是Z的一个下界. 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$x_\varepsilon \in X$, $y_\varepsilon \in Y$使得

$$x_\varepsilon < \inf X + \frac{\varepsilon}{2}, \quad y_\varepsilon < \inf Y + \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$x_\varepsilon + y_\varepsilon < \left(\inf X + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\inf Y + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \inf X + \inf Y + \varepsilon.$$

由确界的充要条件知$\inf Z = \inf X + \inf Y$. □

例 5 我们将$\inf\{f(x) | x \in X\}$简记为$\inf\limits_{x\in X} f(x)$. 设$f(x)$, $g(x)$是X上的非负有界函数. 证明：

$$\inf_{x\in X} \left(f(x) \cdot g(x)\right) \leqslant \inf_{x\in X} f(x) \cdot \sup_{x\in X} g(x).$$

证 若$\sup\limits_{x\in X} g(x)=0$, 则$g(x)\equiv 0$, 不等式显然成立，故下设$\sup\limits_{x\in X} g(x)>0$. 对任何$x\in X$, 有

$$\inf_{x\in X}[f(x)g(x)]\leqslant f(x)g(x)\leqslant f(x)\cdot\sup_{x\in X} g(x),$$

从而对任何$x\in X$, 有

$$\frac{\inf\limits_{x\in X}[f(x)g(x)]}{\sup\limits_{x\in X} g(x)}\leqslant f(x),$$

即$\dfrac{\inf\limits_{x\in X}[f(x)g(x)]}{\sup\limits_{x\in X} g(x)}$是$f(x)$在$X$上的一个下界，所以

$$\frac{\inf\limits_{x\in X}[f(x)g(x)]}{\sup\limits_{x\in X} g(x)}\leqslant \inf_{x\in X} f(x),$$

移项整理即得要证的不等式. □

例 6 设$f(x)$是$[a,b]$上的函数，对任意$x\in[a,b]$, 存在$\delta_x>0$, 使得$f(x)$在$(x-\delta_x,x+\delta_x)\cap[a,b]$上有界. 证明：$f(x)$在$[a,b]$上有界.

证 令$S=\big\{t\in[a,b]\big|f(x)在[a,t]上有界\big\}$, 则由$[a,a+\delta_a)\cap[a,b]\subseteq S$知$S$非空，由$S\subseteq[a,b]$知$S$是有界集. 于是由确界原理知$S$有上确界，记$\beta=\sup S$, 下证$\beta=b$. 反证. 若不然，则$\beta\in(a,b)$. 由题设知存在$\delta_\beta>0$, 使得$f(x)$在$(\beta-\delta_\beta,\beta+\delta_\beta)\cap[a,b]$上有界. 由$\beta=\sup S$知存在$t\in(\beta-\delta_\beta,\beta)\cap S$, 从而$f(x)$在$[a,t]$上有界，结合$f(x)$在$(\beta-\delta_\beta,\beta+\delta_\beta)\cap[a,b]$上有界知$f(x)$在$[a,\beta+\delta_\beta)\cap[a,b]$上有界. 因此，$[a,\beta+\delta_\beta)\cap[a,b]$ 包含于S, 但这与$\beta=\sup S$矛盾！这样就证明了$\beta=b$, 由上面的证明可知$f(x)$在$[a,b+\delta_b)\cap[a,b]=[a,b]$上有界. □

另证 反证. 若不然，则$f(x)$在$[a,b]$上无界. 令$a_1=a$, $b_1=b$, 把$[a_1,b_1]$等分为两个小的闭区间$\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$, 则$f(x)$至少在这两个小区间中的一个上无界. 将$f(x)$在其上无界的一个小区间取为$[a_2,b_2]$. 再将$[a_2,b_2]$等分为两个小的闭区间$\left[a_2,\dfrac{a_2+b_2}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a_2+b_2}{2},b_2\right]$, 重复以上过程, 一直做下去，得到闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$, 满足: 对任意$n$, $f(x)$在$[a_n,b_n]$上无界, 并且

(i) $[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$;

(ii) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^{n-1}}\to 0\ (n\to\infty)$.

根据区间套定理, 有$\xi\in[a,b]$, 使得对任意正整数n, 有$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$, 并且$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 由题设知$f(x)$在$(\xi-\delta_\xi,\xi+\delta_\xi)\cap[a,b]$上有界, 由$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 根据极限定义知存在正整数$n$, 使得$a_n,b_n\in(\xi-\delta_\xi,\xi+\delta_\xi)$, 从而$f(x)$在$[a_n,b_n]$上有界. 矛盾! □

例 7 设$f(x)$是区间I上的函数，对任意$x\in I$, 存在$\delta_x>0$, 使得$f(x)$在$(x-\delta_x,x+\delta_x)\cap I$上递增. 证明：$f(x)$在区间$I$上递增.

证 任取$a,b\in I$, $a<b$, 只需证明$f(a)\leqslant f(b)$. 令$S=\left\{t\in[a,b]\,\middle|\,f(a)\leqslant f(t)\right\}$, 则由$[a,a+\delta_a)\cap[a,b]\subseteq S$知$S$非空，由$S\subseteq[a,b]$知$S$是有界集. 于是由确界原理知$S$有上确界，记$\beta=\sup S$, 下证$\beta=b$. 反证. 若不然，则$\beta\in(a,b)$. 由题设知存在$\delta_\beta>0$, 使得$f(x)$在$(\beta-\delta_\beta,\beta+\delta_\beta)\cap I$上递增. 由$\beta=\sup S$知存在$t\in(\beta-\delta_\beta,\beta)\cap S$, 从而$f(a)\leqslant f(t)$, 令$\gamma=\min\left\{b,\beta+\dfrac{\delta_\beta}{2}\right\}>\beta$, 结合$f(x)$在$(\beta-\delta_\beta,\beta+\delta_\beta)\cap I$上递增知$f(a)\leqslant f(t)\leqslant f(\gamma)$. 因此，$\gamma\in S$, 但这与$\beta=\sup S$矛盾！这样就证明了$\beta=b$, 重复上面的证明过程，可知$f(a)\leqslant f(t)\leqslant f(\beta)=f(b)$. □

例 8 用区间套定理证明$[0,1]$是不可数无限集.

证 反证. 若不然，则$[0,1]$是可数无限集，从而可以将$[0,1]$的全体元素排成一个数列$x_1,x_2,x_3,\cdots$. 取$[a_1,b_1]=[0,1]$, 将$[a_1,b_1]$三等分，必有一个等分区间不含x_1, 将该区间取为$[a_2,b_2]$; 将$[a_2,b_2]$三等分，必有一个等分区间不含x_2, 将该区间取为$[a_3,b_3]$; 一直这样做下去，得到闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$, 满足: 对任意$n>1$, 有$[a_n,b_n]$不含x_{n-1}, 并且

(i) $[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$;

(ii) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{3^{n-1}}\to 0\ (n\to\infty)$.

根据区间套定理, 有$\xi \in [0,1]$, 使得对任意正整数n, 有$\xi \in [a_n, b_n]$. 于是，对任意n, $\xi \neq x_n$, 这与$\xi \in [0,1] = \{x_n \big| n = 1,2,3,\cdots\}$矛盾! □

6.2 子列

一、基本方法

1. 构造子列

例 1 设$\{x_n\}$为正数列且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 证明存在$\{x_n\}$的一个严格递减的子数列$\{x_{n_k}\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = 0$.

证 取$n_1 = 1$, 因为$\{x_n\}$为正数列且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 所以有$n_2 > n_1$, 使得$0 < x_{n_2} < x_{n_1}$. 依此类推，设$n_1 < n_2 < \cdots < n_k$已取定，则有$n_{k+1} > n_k$, 使得$0 < x_{n_{k+1}} < x_{n_k}$. 一直这样做下去，就得到了$\{x_n\}$的一个严格递减的子数列$\{x_{n_k}\}$. 由定理1知$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = 0$. □

2. 应用致密性定理解决问题

例 2 用致密性定理证明区间套定理.

证 任意取定一点$\xi_n \in [a_n, b_n]$, $n = 1,2,\cdots$, 则$\{\xi_n\}$是一个有界数列. 根据致密性定理，$\{\xi_n\}$有收敛子列$\{\xi_{n_k}\}$. 记$\xi = \lim\limits_{k\to\infty} \xi_{n_k}$, 对任意正整数$n$, 当$k > n$时，就有$n_k \geqslant k > n$, 从而有$a_n \leqslant \xi_{n_k} \leqslant b_n$, 令$k \to \infty$取极限，由极限的保序性得$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$. 因此，对任意$n \in \mathbb{N}^*$, 都有$\xi \in [a_n, b_n]$. 由$0 \leqslant \xi - a_n \leqslant b_n - a_n$, 根据两边夹定理知$\lim\limits_{n\to\infty}(\xi - a_n) = 0$, 故$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$; 同理可证$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$.

下面证ξ的唯一性. 若有另一个$\xi' \in [a_n, b_n], n = 1,2,3,\ldots$, 则

$$a_n \leqslant \xi' \leqslant b_n.$$

对n取极限即得$\xi \leqslant \xi' \leqslant \xi$, 亦即$\xi' = \xi$. 这就证明了满足要求的$\xi$是唯一的. □

二、例题

例 3 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$且$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, 证明：对任意实数$a > 1$, 都存在数列$\{x_n\}$的子列$\{y_n\}$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_{n+1}}{y_n} = a$.

证 对任意实数$a > 1$, 由$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$知存在正整数$N$, 当$n \geqslant N$时，有$\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| < a$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 所以不妨设当$n \geqslant N$时，有$x_n > 0$. 于是当$n \geqslant N$时，有$0 < x_{n+1} < ax_n$. 令$n_1 = N$, 因为$x_{n_1+1} < ax_{n_1}$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 所以存在$n_2 > n_1$, 使得$x_{n_2-1} < ax_{n_1} \leqslant x_{n_2}$; 一直这样做下去，得到$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$, 它满足(1) $x_{n_k} > 0$, $k = 1, 2, \cdots$, (2) $x_{n_{k+1}-1} < ax_{n_k} \leqslant x_{n_{k+1}}$, $k = 1, 2, \cdots$. 因此，

$$0 \leqslant \frac{x_{n_{k+1}}}{x_{n_k}} - a < \frac{x_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}-1}}{x_{n_k}},\ k = 1, 2, \cdots.$$

因为$x_{n_{k+1}} < ax_{n_{k+1}-1} < a^2 x_{n_k}$, 所以

$$0 \leqslant \frac{x_{n_{k+1}}}{x_{n_k}} - a < a^2 \cdot \frac{x_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}-1}}{x_{n_{k+1}}},\ k = 1, 2, \cdots.$$

因为$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}-1}}{x_{n_{k+1}}} = 1 - 1 = 0$, 所以根据两边夹定理知$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_{n_{k+1}}}{x_{n_k}} = a$. 令$y_k = x_{n_k}$, $k = 1, 2, \cdots$, 则$\{y_n\}$是$\{x_n\}$的子列，使得$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_{n+1}}{y_n} = a$. □

例 4 设$f(x)$是$[a, b]$上的连续函数, x_0是方程$f(x) = c$的唯一解. 求证如果$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, 那么$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

证 反证. 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq x_0$, 则存在$\varepsilon_0 > 0$, 对任何自然数$N$, 存在$n > N$, 使得

$$|x_n - x_0| \geqslant \varepsilon_0.$$

于是$\{x_n\}$有子列$\{x_{n_k}\}$满足$|x_{n_k} - x_0| \geqslant \varepsilon_0 (k = 1, 2, \cdots)$. 又$\{x_{n_k}\}$有界, 由致密性定理, $\{x_{n_k}\}$有收敛子列$\{x_{n_{k_j}}\}$.设$x_{n_{k_j}} \to \xi (j \to \infty)$,则$\xi \neq x_0$. 但是$f(\xi) = \lim\limits_{j\to\infty} f(x_{n_{k_j}}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$,与$x_0$是方程$f(x) = c$的唯一解矛盾！所以假设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq x_0$不成立, 有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. □

例 5 设$f(x)$在$[a,b]$可导，且$f(x)$在$[a,b]$中有无穷多个零点. 证明存在$\xi \in [a,b]$, 使得

$$f(\xi) = f'(\xi) = 0.$$

证 由$f(x)$在$[a,b]$中有无穷多个零点知有数列$\{x_n\} \subseteq [a,b]$, 使得x_n互不相等且$f(x_n)=0$, $n=1,2,\cdots$. 由致密性定理知$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$, 则由$f$的连续性知

$$f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = 0.$$

由x_{n_k}互不相等知$\{x_{n_k}\}$中至多有一项等于ξ, 故由海涅定理和导数的定义知

$$f'(\xi) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_{n_k}) - f(\xi)}{x_{n_k} - \xi} = 0.$$

□

6.3 有限覆盖定理

一、例题

用有限覆盖定理解决问题时, 要先构造适当的开覆盖.

例 1 用有限覆盖定理证明闭区间套定理.

证 先证明$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] \neq \emptyset$. 反证. 若不然，则存在区间套$\{[a_n,b_n]\}$, 使得$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] = \emptyset$. 于是对任意$x \in [a_1,b_1]$, 存在正整数$n_x$, 使得$x \notin [a_{n_x}, b_{n_x}]$, 从而存在$\delta_x > 0$, 使得$(x-\delta_x, x+\delta_x) \cap [a_{n_x}, b_{n_x}] = \emptyset$. 令$\mathfrak{I} = \left\{(x-\delta_x, x+\delta_x) \,\middle|\, x \in [a_1,b_1]\right\}$, 则$\mathfrak{I}$是$[a_1,b_1]$的一个开覆盖, 从而由有限覆盖定理知其中必有有限子覆盖

$$\mathfrak{I}_1 = \left\{(x_k-\delta_{x_k}, x_k+\delta_{x_k}) \,\middle|\, k=1,\cdots,K\right\}.$$

令$N = \max\{n_{x_1}, n_{x_2}, \cdots, n_{x_K}\}$, 则对任何$x \in [a_N, b_N]$, 都有$x \notin \bigcup \mathfrak{I}_1$, 这与$\mathfrak{I}_1$是$[a_1,b_1]$的覆盖矛盾！

再证明$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$, 其中$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 任取$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$, 有$0\leqslant x-a_n\leqslant b_n-a_n$, $n=1,2,\cdots$, 由两边夹定理得$\lim\limits_{n\to\infty}(x-a_n)=0$, 从而$x=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$; 同理可证$x=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 由极限的唯一性知$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$, 其中$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. □

另证 先证明$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\emptyset$. 反证. 若不然，则存在区间套$\{[a_n,b_n]\}$, 使得$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\emptyset$.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}((a_1-1,a_n)\cup(b_n,b_1+1))=(a_1-1,b_1+1).$$

令$\mathfrak{I}=\left\{(a_1-1,a_n)\Big|n=1,2,\cdots\right\}\cup\left\{(b_n,b_1+1)\Big|n=1,2,\cdots\right\}$, 则$\mathfrak{I}$是$[a_1,b_1]$的一个开覆盖, 从而由有限覆盖定理知其中必有有限子覆盖

$$\mathfrak{I}_1=\left\{(a_1-1,a_{n_j})\Big|j=1,\cdots,J\right\}\cup\left\{(b_{m_k},b_1+1)\Big|k=1,\cdots,K\right\}.$$

令$N=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_J,m_1,m_2,\cdots,m_K\}$, 则对任何$x\in[a_N,b_N]$, 都有$x\notin\bigcup\mathfrak{I}_1$, 这与$\mathfrak{I}_1$是$[a_1,b_1]$的覆盖矛盾！

再证明$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$, 其中$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 任取$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$, 有$0\leqslant x-a_n\leqslant b_n-a_n$, $n=1,2,\cdots$, 由两边夹定理得$\lim\limits_{n\to\infty}(x-a_n)=0$, 从而$x=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$; 同理可证$x=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 由极限的唯一性知$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$, 其中$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. □

6.4 闭区间上连续函数性质的证明

一、例题

例 1 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的非常值的连续周期函数. 证明$f(x)$有最小正周期.

证 令$S=\{T>0|T是f(x)的周期\}$, 则S非空有下界，从而由确界原理知S有下确界. 记$\alpha=\inf S$, 则$\alpha\geqslant 0$且存在数列$\{T_n\}\subseteq S$使得$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\alpha$. 若$\alpha=0$, 则对任意实数$x$, 有$x=k_nT_n+r_n$, 其中$k_n$是整数，$0\leqslant r_n<T_n$, $n=1,2,\cdots$. 由$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=0$, 根据两边夹定理

知$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty} k_n T_n = x$, 由$f$的连续性知

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(k_n T_n) = f(0).$$

因此由x的任意性知$f(x)$是常数函数. 矛盾！因此$\alpha > 0$, 由

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x + T_n) = f(x + \alpha)$$

知α也是f的周期，从而α是$f(x)$的最小正周期. □

另证 反证. 若$f(x)$没有最小正周期，则存在严格递减的数列$\{T_n\}$, 使得T_n是f的正周期. 由单调收敛定理，$\{T_n\}$收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$, 若$T > 0$, 则由

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x + T_n) = f(x + T)$$

知T也是f的周期. 令$T_n' = T_n - T$, 则无论$T = 0$还是$T > 0$, T_n'都是f的正周期且$\lim\limits_{n\to\infty} T_n' = 0$. 对任意实数$x$, 有$x = k_n T_n' + r_n$, 其中$k_n$是整数，$0 \leqslant r_n < T_n'$, $n = 1, 2, \cdots$. 由$\lim\limits_{n\to\infty} T_n' = 0$, 根据两边夹定理知$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty} k_n T_n' = x$, 由$f$的连续性知

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(k_n T_n') = f(0).$$

因此由x的任意性知$f(x)$是常数函数. 矛盾！ □

例 2 设$f(x)$在$[0, +\infty)$连续且有界，对任意$\lambda \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda$在$[0, +\infty)$至多只有有限个实根. 证明$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

证 用区间套定理来证. 设$|f(x)| \leqslant M$, 其中$M > 0$, 取$a_1 = -M$, $b_1 = M$. 因为$f(x) = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$在$[0, +\infty)$至多只有有限个实根，所以由连续函数的介值定理知存在$X_1 > 0$, 当$x > X_1$时，有$f(x)$恒大于$\dfrac{a_1 + b_1}{2}$或恒小于$\dfrac{a_1 + b_1}{2}$. 若$f(x)$恒大于$\dfrac{a_1 + b_1}{2}$, 则取$a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$, $b_2 = b_1$; 若$f(x)$恒小于$\dfrac{a_1 + b_1}{2}$, 则取$a_2 = a_1$, $b_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. 一直这样做下去，得闭区间列$\{[a_n, b_n]\}$, 满足:

(i) $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$;

(ii) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0 \ (n \to \infty)$.

(iii) 存在$X_n > 0$, 当$x > X_n$时，有$a_n \leqslant f(x) \leqslant b_n$.

根据区间套定理, 有$\xi \in [a, b]$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$. 于是对任意$\varepsilon > 0$, 存在正整数$N$, 使得$\xi - \varepsilon < a_N \leqslant \xi \leqslant b_N < \xi + \varepsilon$. 由(iii)知当$x > X_N$时，有$\xi - \varepsilon < a_N \leqslant f(x) \leqslant b_N < \xi + \varepsilon$, 按极限定义得$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \xi$. □

6.5 一致连续

一、基本方法

1. 应用一致连续的定义

例 1 设$f(x)$是区间I上的一致连续函数，$g(x)$是区间J上的一致连续函数，$g(J) \subseteq I$. 问$f(g(x))$是否在区间J上一致连续？说明理由.

解 $f(g(x))$必在区间J上一致连续. 证明如下：因为$f(x)$是区间I上的一致连续函数，所以对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta' > 0$, 当$t', t'' \in I$, $|t' - t''| < \delta'$时，就有$|f(t') - f(t'')| < \varepsilon$. 因为$g(x)$是区间$J$上的一致连续函数，所以对上述的$\delta' > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$x', x'' \in J$, $|x' - x''| < \delta$时，就有$|g(x') - g(x'')| < \delta'$. 又$g(J) \subseteq I$, 故当$x', x'' \in J$, $|x' - x''| < \delta$时，就有$|f(g(x')) - f(g(x''))| < \varepsilon$. 按定义知$f(g(x))$在区间$J$上一致连续. □

2. 应用一致连续的充分必要条件

例 2 判定下列各函数在指定区间是否一致连续？说明理由.

(1) $f(x) = x \sin x$, $(-\infty, +\infty)$; *(2)* $f(x) = \sin(x^2)$, $(-\infty, +\infty)$.

解 (1) 因为令$x_n' = n\pi$, $x_n'' = n\pi + \dfrac{1}{n\pi}$, 则$\mid x_n'' - x_n' \mid \to 0$, $n \to \infty$, 而

$$\mid f(x_n'') - f(x_n') \mid = \left(n\pi + \frac{1}{n\pi}\right)\sin\frac{1}{n\pi} \to 1 \geqslant \frac{1}{2},\ n \to \infty.$$

所以f在$(-\infty, +\infty)$非一致连续.

(2) 因为令$x_n' = \sqrt{2n\pi}$, $x_n'' = \sqrt{2n\pi} + \alpha_n$, $\alpha_n \to 0$, 则$\mid x_n'' - x_n' \mid \to 0$, $n \to \infty$, 而

$$\mid f(x_n'') - f(x_n') \mid = \mid \sin\left(2\alpha_n\sqrt{2n\pi} + \alpha_n^2\right) \mid .$$

取$\alpha_n = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2n}}$, 则$\alpha_n \to 0$且

$$\mid f(x_n'') - f(x_n') \mid \to 1 \geqslant \frac{1}{2},\ n \to \infty.$$

所以f在$(-\infty, +\infty)$非一致连续. □

二、例题

例 3 设$f(x)$和$g(x)$在区间I一致连续. 当区间I是有限区间时, 证明$f(x)g(x)$在区间I一致连续; 当区间I是无限区间时, 举出使得$f(x)g(x)$在区间I非一致连续的例子, 并自行给出一个$f(x)g(x)$在区间I一致连续的充分条件.

证 不妨设区间$I = (a, b)$. 因为f, g在I一致连续, 所以由3.5节例4知$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} g(x)$存在, 从而$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)g(x)$ 与$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)g(x)$存在. 又$f(x)g(x)$在$(a, b)$连续, 故而$f(x)g(x)$在$(a, b)$一致连续.

当区间无限时, 例如，$f(x) = g(x) = x$在$(-\infty, +\infty)$一致连续, 但$f(x)g(x) = x^2$在$(-\infty, +\infty)$非一致连续. 若$f(x)$与$g(x)$都在区间I一致连续且有界, 则$f(x)g(x)$在区间I一致连续. (请自行证明) □

例 4 设$f(x)$在$(a, b]$和$[b, c)$都一致连续(其中a是实数或$-\infty$, c是实数或$+\infty$). 证明$f(x)$在(a, c)一致连续. 若将区间$(a, b]$改为(a, b), 其它条件都不动, 结论又如何? 说明理由.

证 因为f在$(a,b]$和$[b,c)$都一致连续, 所以$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1,\delta_2>0$, 使$\forall x',x''\in(a,b]$且$|x'-x''|<\delta_1$, 有$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 以及$\forall x',x''\in[b,c)$且$|x'-x''|<\delta_2$, 有$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, $\forall x',x''\in(a,c)$且$|x'-x''|<\delta$, 不妨设$x'<x''$, 则有3种情形：x', $x''\in(a,b]$; x', $x''\in[b,c)$或$x'\in(a,b]$, $x''\in[b,c)$.

对于前2种情形显然有$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. 对于第3种情形, 因为

$$0\leqslant x''-b\leqslant x''-x'<\delta<\delta_2,\quad 0\leqslant b-x'\leqslant x''-x'<\delta<\delta_1,$$

所以

$$|f(x'')-f(b)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x')-f(b)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是,

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-f(b)|+|f(b)-f(x'')|<\varepsilon.$$

综上, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x'$, $x''\in(a,c)$且$|x'-x''|<\delta$, 都有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, 故$f(x)$在$(a,c)$一致连续.

若将区间$(a,b]$改为(a,b), 其他条件都不动, 即便$f(x)$在(a,c)连续都不能保证. 例如: $f(x)=x$, $x\in(0,1)$, $f(x)=x-1$, $x\in[1,2)$. $f(x)$在$(0,1)$与$[1,2)$均一致连续, 在$(0,2)$不是连续函数. □

例 5 证明$f(x)$在区间I一致连续的充分必要条件是对任何满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$的数列$\{x_n\}\subseteq I$和$\{y_n\}\subseteq I$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$.

证 必要性. 设$f(x)$在区间I上一致连续, 则对于任何$\varepsilon>0$, 都存在$\delta>0$, 使当$x,x'\in I$且$|x-x'|<\delta$时, 就有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

根据极限定义, 由$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$可知对上述$\delta>0$, 存在自然数$N$, 当$n>N$时, 有$|x_n-y_n|<\delta$. 于是当$n>N$时, 有

$$|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon.$$

按极限定义知$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$.

充分性. 设对任何满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$的数列$\{x_n\}\subset I$和$\{y_n\}\subset I$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$, 我们用反证法来证明$f(x)$在区间$I$上一致连续. 反证. 若$f(x)$在区间$I$上不一致连续, 则存在$\varepsilon_0>0$, 对任何$\delta>0$, 存在$x,x'\in I$满足$|x-x'|<\delta$且$|f(x)-f(x')|\geqslant\varepsilon_0$. 取$\delta=\dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,\ldots)$, 相应的x,x'记为x_n, y_n, 则

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}\text{且}|f(x)-f(x')|\geqslant\varepsilon_0.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$但$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))\neq 0$, 矛盾! □

例 6 设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$一致连续且对任意$x\geqslant a$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}f(x+n)=0.$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

若将条件"一致连续"改为"有界连续", 结论又如何? 说明理由.

证 因为函数$f(x)$在$[a,+\infty)$一致连续, 所以对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$x,y\in[a,+\infty)$且$|x-y|<\delta$时，有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 令$K=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1$, 则$\frac{1}{K}<\delta$. 令$x_k=a+\frac{k}{K}$, $k=0,1,\cdots,K$, 则由$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_k+n)=0$知存在正整数$N_k$, 使得当$n\geqslant N_k$时，有$|f(x_k+n)|<\varepsilon$, 其中$k=0,1,\cdots,K$. 令$N=\max\{N_0,N_1,\cdots,N_K\}$, 则当$n\geqslant N$时，对任意$k\in\{0,1,\cdots,K\}$, 都有$|f(x_k+n)|<\varepsilon$. 对任意$x>a+N$, 存在正整数$n\geqslant N$和$\xi\in[a,a+1)$使得$x=\xi+n$. 容易

看到存在$k\in\{1,2,\cdots,K\}$使得$\xi\in[x_{k-1},x_k]$, 于是$|x-(x_k+n)|=x_k-\xi\leqslant\frac{1}{K}<\delta$. 因此，对任意$x>a+N$, 有

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f(x_k+n)|+|f(x_k+n)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

按极限定义知$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

若将条件"一致连续"改为"有界连续", 则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$未必成立. 例如，令

$$f(x)=\begin{cases}n(x-n), & x\in\left[n,n+\frac{1}{2n}\right),n\in\mathbb{N}^*,n\geqslant2,\\ -n\left(x-n-\frac{1}{n}\right), & x\in\left[n+\frac{1}{2n},n+\frac{1}{n}\right),n\in\mathbb{N}^*,n\geqslant2,\\ 0, & x\in\left[n+\frac{1}{n},n+1\right),n\in\mathbb{N}^*,n\geqslant2.\end{cases}$$

不难证明$f(x)$在$[2,+\infty)$上有界连续. 任取$x\geqslant2$, 若x是正整数，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$; 若$x$不是正整数，则存在正整数$N\geqslant2$使得$x-[x]>\frac{1}{N}$, 于是$n\geqslant N$时，就有$f(x+n)=0$, 从而也有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$. 但由$f\left(n+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$, $n=2,3,\cdots$可见$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq0$. □

例 7 证明函数$f(x)$在有限区间I一致连续的充分必要条件是对每个柯西数列$\{x_n\}\subseteq I$, $\{f(x_n)\}$也是柯西数列.

证 "$\Longrightarrow$". 因为函数$f(x)$在有限区间I一致连续，所以对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得对任意$x,y\in I$, 只要$|x-y|<\delta$, 就有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 又因为$\{x_n\}\subseteq I$是柯西数列，所以对上述$\delta>0$, 存在正整数N, 使得对任意$n>N$, $m>N$, 都有$|x_n-x_m|<\delta$. 于是对任意$n>N$, $m>N$, 就有$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$. 按定义知$\{f(x_n)\}$是柯西数列.

"$\Longleftarrow$". 反证. 若函数$f(x)$在有限区间I不一致连续，则存在$\varepsilon_0>0$及两个数列$\{y_n\},\{z_n\}\subseteq I$, 使得$|y_n-z_n|\to0$, 而$|f(y_n)-f(z_n)|\geqslant\varepsilon_0$. 因为$I$是有限区间，所以由致密性定理，$\{y_n\}$有收敛子列$\{y_{n_k}\}$. 由$|y_n-z_n|\to0$知$\{z_{n_k}\}$也收敛且与$\{y_{n_k}\}$有相同的极限. 令$x_{2k-1}=y_{n_k}$, $x_{2k}=z_{n_k}$, $k=1,2,\cdots$, 则数列$\{x_n\}$收敛，从而$\{x_n\}$是柯西数列. 但由$|f(x_{2k-1})-f(x_{2k})|\geqslant\varepsilon_0$可见$\{f(x_n)\}$不是柯西数列. 矛盾！ □

6.6 上极限和下极限

一、基本方法

通过上、下极限相等来证明数列收敛.

例 1 设$x_n > 0,\ n = 1, 2, \cdots$ 且$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \dfrac{1}{x_n} = 1$. 证明数列$\{x_n\}$ 收敛.

证 由练习6.6的第3题，

$$1 = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n \frac{1}{x_n}) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{x_n},$$

故

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \geqslant \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{1}{x_n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n,$$

由于总有$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, 故

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n,$$

所以数列$\{x_n\}$收敛. □

二、例题

例 2 设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都是有界的非负数列，证明$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n y_n)$.

证法一 记$z_n = x_n y_n$, $\underline{x_n} = \inf\{x_m | m \geqslant n\}$, $\underline{y_n} = \inf\{y_m | m \geqslant n\}$, $\underline{z_n} = \inf\{z_m | m \geqslant n\}$. 对任何自然数$n$和任何自然数$m \geqslant n$, 有$0 \leqslant \underline{x_n} \leqslant x_m$, $0 \leqslant \underline{y_n} \leqslant y_m$, 于是

$$\underline{x_n} \cdot \underline{y_n} \leqslant x_m y_m = z_m \quad (m \geqslant n),$$

所以$\underline{x_n} \cdot \underline{y_n}$是$\{z_m | m \geqslant n\}$的一个下界，故

$$\underline{x_n} \cdot \underline{y_n} \leqslant \inf\{z_m | m \geqslant n\} = \underline{z_n}.$$

上式两边令$n\to\infty$取极限，由下极限的定义，得

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty} y_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty} z_n=\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n).$$

□

证法二 $\{x_ny_n\}$有子列$\{x_{n_k}y_{n_k}\}$收敛于下极限$\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)$. $\{x_{n_k}\}$有界，故有收敛子列$\{x_{n_{k_j}}\}$, 而$\{y_{n_{k_j}}\}$有界，从而有收敛子列$\{y_{n_{k_{j_l}}}\}$. 下极限是所有收敛子列的极限值的最小值，故

$$\lim_{l\to\infty} x_{n_{k_{j_l}}}\geqslant\varliminf_{n\to\infty} x_n\text{且}\lim_{l\to\infty} y_{n_{k_{j_l}}}\geqslant\varliminf_{n\to\infty} y_n.$$

因此有

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{k\to\infty}(x_{n_k}y_{n_k})=\lim_{l\to\infty}(x_{n_{k_{j_l}}}y_{n_{k_{j_l}}})=\lim_{l\to\infty}x_{n_{k_{j_l}}}\cdot\lim_{l\to\infty}y_{n_{k_{j_l}}}\geqslant\varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty} y_n.$$

□

证法三 设$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n=b$. 若$a=0$或$b=0$, 则由$\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)\geqslant 0$知要证的不等式成立. 下设$a>0$, $b>0$, 于是对任意$\varepsilon>0$, 不妨设$\varepsilon<\min\{a,b\}$, 存在正整数N, 当$n>N$时，有$x_n>a-\varepsilon$且$y_n>b-\varepsilon$. 于是当$n>N$时，有$x_ny_n>(a-\varepsilon)(b-\varepsilon)$, 故$\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)\geqslant(a-\varepsilon)(b-\varepsilon)$. 由$\varepsilon$的任意性得$\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\geqslant ab=\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$. □

例 3 设$x_n=(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\sin\frac{n\pi}{4}$, 求$\{x_n\}$的上极限和下极限.

解 由$x_n=\begin{cases}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\sin\frac{n\pi}{4}, & n\text{奇},\\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\sin\frac{n\pi}{4}, & n\text{偶}\end{cases}$不难看到$\{x_n\}$的收敛子列的极限组成的集合为$S=\left\{-\mathrm{e}+\frac{\sqrt{2}}{2},-\mathrm{e}-\frac{\sqrt{2}}{2},\mathrm{e},\mathrm{e}+1,\mathrm{e}-1\right\}$, 故$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=\max S=\mathrm{e}+1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=\min S=-\mathrm{e}-\frac{\sqrt{2}}{2}$. □

例 4 设数列$\{x_n\}$满足条件$\inf\limits_{n\geqslant 1} x_n>0$. 证明$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant 1$.

证 反证. 若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$, 则存在自然数$N$，当$n>N$时有$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$. 又由于$\inf\limits_{n\geq 1}x_n>0$，根据单调收敛定理，数列$\{x_n\}$收敛且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n>0$. 记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{a}{a}=1$, 与$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$矛盾！ □

例 5 设$\{x_n\}$ 是有界数列. 证明

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n.$$

并举例说明四个极限值可以都存在但互不相等.

证 记$\alpha_n=\inf\{x_m|m\geqslant n\}$, 则$\alpha_n\leqslant x_n$, 从而$\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}\leqslant\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, 故

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n&=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}\\&=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.\end{aligned}$$

不等式$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$的证明是类似的. 下面我们看一下怎样举例使得四个极限值可以都存在但互不相等. 一种思路如下：数列$\{x_n\}$由无穷多个0和无穷多个1组成，则数列$\{x_n\}$的上极限为1，下极限为0. 具体地，数列$\{x_n\}$第一项为0，第二项为1，然后是1个0，1个1，2个0，2个1，4个0，$\cdots$. 这里均值数列从第二项起取值在$[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$中，且有无穷多项等于$\frac{1}{3}$，也有无穷多项等于$\frac{1}{2}$，因此均值数列的上极限为$\frac{1}{2}$，下极限为$\frac{1}{3}$. □

例 6 设$\{x_n\}$是有界数列，对任意有界数列$\{y_n\}$, 都有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n,$$

证明数列$\{x_n\}$收敛.

证 取$y_n=-x_n$, 则由题设得$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(-x_n)=0$. 又$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(-x_n)=-\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$, 于是有$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$, 因此数列$\{x_n\}$收敛. □

例 7 设a_1, a_2是正数，$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}$, $n=1,2\ldots.$ 证明数列$\{a_n\}$收敛.

证 令$M=\max\{4,a_1,a_2\}$, $m=\min\{4,a_1,a_2\}$, 用数学归纳法不难证明$m\leqslant a_n\leqslant M$, $n=1,2,\cdots$ (请自己写出证明). 因此，数列$\{a_n\}$有界. 将数列$\{a_n\}$的上、下极限分别记为H, h, 则$h\geqslant m>0$. 不难证明数列$\{\sqrt{a_n}\}$的上、下极限分别为$\sqrt{H}$, $\sqrt{h}$ (请自己写出证明). 在$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}$两边取下极限，得

$$h=\varliminf_{n\to\infty}a_{n+2}=\varliminf_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\sqrt{a_{n+1}}+\varliminf_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=2\sqrt{h}.$$

结合$h>0$得$h\geqslant 4$. 在$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}$两边取上极限，得

$$H=\varlimsup_{n\to\infty}a_{n+2}=\varlimsup_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt{a_{n+1}}+\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=2\sqrt{H}.$$

结合$H>0$得$H\leqslant 4$. 再结合$h\leqslant H$得$h=H=4$. 因此，数列$\{a_n\}$收敛于4. $\square$

例 8 设数列$\{a_n\}$收敛于1, 数列$\{b_n\}$有界, k是一个正整数, 使得数列$\{b_n-a_nb_{n+k}\}$收敛于A. 证明：$A=0$.

证 记$h=\varliminf\limits_{n\to\infty}b_n$, $H=\varlimsup\limits_{n\to\infty}b_n$, 则$\{b_n\}$有子列$\{b_{n_j}\}$收敛于$h$, 也有子列$\{b_{m_j}\}$收敛于$H$. 由数列$\{b_n-a_nb_{n+k}\}$收敛于$A$得$\lim\limits_{j\to\infty}\left(b_{n_j}-a_{n_j}b_{n_j+k}\right)=A$, 结合$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$得$\lim\limits_{j\to\infty}b_{n_j+k}=h-A$. 于是$h\leqslant h-A$, 故$A\leqslant 0$; 类似地，由数列$\{b_n-a_nb_{n+k}\}$收敛于$A$得$\lim\limits_{j\to\infty}\left(b_{m_j}-a_{m_j}b_{m_j+k}\right)=A$, 结合$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$得$\lim\limits_{j\to\infty}b_{m_j+k}=H-A$. 于是$H-A\leqslant H$, 故$A\geqslant 0$. 合起来就得到$A=0$. $\square$

例 9 设$a_n>1$, $n=1,2,\cdots$, $\alpha=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\ln a_n}{n}$, 且

$$x_n=\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\cdots+\sqrt{a_n}}}},\quad n=1,2,\cdots,$$

证明数列$\{x_n\}$当$\alpha<\ln 2$时收敛而当$\alpha>\ln 2$时发散.

证 显然数列$\{x_n\}$严格单调递增. 当$\alpha < \ln 2$时，存在正整数N, 当$n \geqslant N$时，有$\dfrac{\ln\ln a_n}{n} < \ln 2$, 即$a_n < \mathrm{e}^{2^n}$. 于是$n \geqslant N$时，有

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_{N-1}+\sqrt{a_N+\cdots+\sqrt{a_n}}}}} \\ &< \sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_{N-1}+\sqrt{\mathrm{e}^{2^N}+\cdots+\sqrt{\mathrm{e}^{2^n}}}}}}. \end{aligned}$$

注意到

$$\sqrt{\mathrm{e}^{2^N}+\cdots+\sqrt{\mathrm{e}^{2^n}}} = \mathrm{e}^{2^{N-1}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}} < 2\mathrm{e}^{2^{N-1}},$$

记$M = \sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_{N-1}+2\mathrm{e}^{2^{N-1}}}}}$, 就有$x_n < M$. 因此$\{x_n\}$单增有上界，由单调收敛定理知$\{x_n\}$收敛.

当$\alpha > \ln 2$时，存在$\varepsilon_0 > 0$，存在$\{a_n\}$的子列$\{a_{n_k}\}$, 满足$\dfrac{\ln\ln a_n}{n} > \ln(2+\varepsilon_0)$, $k = 1,2,\cdots$, 即$a_{n_k} > \mathrm{e}^{(2+\varepsilon_0)^{n_k}}$, $k = 1,2,\cdots$. 可见

$$x_{n_k} > a_{n_k}^{\frac{1}{2^{n_k}}} > \mathrm{e}^{\left(\frac{2+\varepsilon_0}{2}\right)^{n_k}} \to +\infty\ (k\to\infty).$$

故$\{x_n\}$无上界，结合$\{x_n\}$单增知$\{x_n\}$发散. □

注 当$\alpha = \ln 2$时，不能判断$\{x_n\}$的敛散性. 例如，$a_n = \mathrm{e}^{2^n}$, 则$\alpha = \ln 2$且由$x_n = \mathrm{e}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}$可见$\{x_n\}$收敛；$a_n = \mathrm{e}^{\left[2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^n}$, 则$\alpha = \ln 2$, 由$x_n > (a_n)^{\frac{1}{2^n}} = \mathrm{e}^{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n} \to +\infty\ (n\to\infty)$可见$\{x_n\}$发散.