矩阵 复习题

黄利兵

数学科学学院

2022 年 11 月 21 日

本章总结

- 主要概念: 矩阵的加法, 数乘, 乘法, 迹, 可逆矩阵, 伴随矩阵, 分块矩阵, 初等矩阵, 分块初等变换.
- 重要算法: 初等变换法求逆矩阵.
- 基本结论: 矩阵的一元运算 (转置、取逆、取共轭、数乘等), 二元运算 (加法、乘法), 以及作用在矩阵上的函数 (迹、行列式、秩等) 之间的关系. 其中行列式的乘法定理, 乘积与秩的关系需要重点掌握. (分块) 初等变换与 (分块) 初等矩阵之间的关系.
- 核心方法: (涉及秩的问题) 利用相抵标准形; 利用线性方程组的理论; 适当构造分块矩阵; 扰动法

填空题

1. 若 4 阶方阵 A 的秩为 3, 则 A 的伴随矩阵的秩为____________.
2. 若 4 阶方阵 A 的行列式为 -2, 则 A 的伴随矩阵的行列式为____________.
3. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, 则矩阵 $(A-2E)^{-1}(A^2-4E)$ 的迹是____________.
4. 若矩阵 X 满足 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $X^{\mathsf{T}}X$ 的迹是____________.
5. 若 $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, 则 A^{100} 的第 2 行第 2 列元素是____________.
6. 若 $A \in P^{2\times 5}$, $B \in P^{5\times 2}$ 满足 $AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $E - BA$ 的行列式是____________.

解答题 (一)

7. 设 A, B 为 3 阶方阵, A 可逆, 且 $2A^{-1}B = B - 4E$, 判断 $A - 2E$ 是否可逆; 如果可逆, 求出它的逆矩阵.

解答题 (二)

8. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. 试判断是否存在矩阵 C, 使得 $A=C^{\mathsf{T}}BC$; 如果存在, 写出一个这样的 C.

解答题 (三)

9. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解答题 (四)

10. 设 A, B 分别为 3×2 和 2×3 矩阵, 且 $AB=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -9\\ 2 & 0 & 6\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$, 求 BA.

证明题 (一)

11. 在所有 2×2 复矩阵中, 考虑以下四个矩阵

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}.$$

令 $H=\{aE+bI+cJ+dK\,|\,a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$.

(1) 证明 H 关于乘法封闭.

(2) 证明 H 中非零元素一定可逆.

证明题 (二)

12. 设 $A \in P^{n\times n}$, α, $\beta \in P^{n\times 1}$, 求证: $\det(A-\alpha\beta^{\mathsf{T}}) = \det(A) - \beta^{\mathsf{T}} A^{*} \alpha$.

证明题 (三)

13. 设 A, B, C, D 为 n 阶矩阵, 且 $AB^\mathsf{T} = BA^\mathsf{T}$, $CD^\mathsf{T} = DC^\mathsf{T}$, $AD^\mathsf{T} - BC^\mathsf{T} = E_n$. 求证: $A^\mathsf{T}D - C^\mathsf{T}B = E_n$.

证明题 (四)

14. 设 $A \in P^{m\times m}$, $B \in P^{n\times n}$, $X \in P^{m\times n}$ 满足 $AX = XB$. 如果有互素的多项式 $f,\ g \in P[x]$ 使得 $f(A) = O$, $g(B) = O$, 求证: $X = O$.

补充题

A1. (Frobenius 不等式) 设 $A \in P^{m\times n}$, $B \in P^{n\times r}$, $C \in P^{r\times s}$, 求证:

$$秩(AB) + 秩(BC) \leq 秩(B) + 秩(ABC).$$

A2. 若 n 阶方阵 A, B 满足 秩$(ABA) =$ 秩(B), 求证: 存在可逆矩阵 P, 使得 $ABP = PBA$.

A3. 是否存在 $A, B, C \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, 使得 $A^2 + B^2 = C^2$? 使得 $A^4 + B^4 = C^4$ 呢? (注: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 表示行列式为 1 的二阶整数矩阵构成的集合).

A4. 设 n 阶复方阵 A, B_j, C_j 满足

$$A = \sum_{i=1}^{s}(B_iC_i - C_iB_i), \quad AB_j = B_jA, \quad 1 \leq j \leq s.$$

求证: $\mathrm{tr}(A^k) = 0$, $k = 1, 2, \cdots$.

A5. 设 A, B 为 n 阶实对称方阵, 求证: $\mathrm{tr}((AB)^2) \leq \mathrm{tr}(A^2B^2)$.

A6. 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶反对称矩阵 (n 为偶数), 证明

$$|A| = \left(\sum(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)} a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4} \cdots a_{i_{n-1} i_n}\right)^2$$

这里 $\sum$ 表示对所有满足 $i_1 < i_2, i_3 < i_4, \cdots, i_{n-1} < i_n$, 且 $i_1 < i_3 < \cdots < i_{n-1}$ 的排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 求和.