第三章 线性方程组

黄利兵

数学科学学院

2022 年 11 月 7 日

主要内容

线性方程组

现在讨论如下更一般的线性方程组 (I), 其中变元个数与方程个数不一定相同:

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}
$$

这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是未知量 (也称为变元), s 是方程的个数, a_{ij} 称为方程组的系数, b_j 称为常数项.

如果当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别用数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 代入各个方程后, 每个等式都变成恒等式, 则称列向量 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)'$ 为该方程组的一个解.

如果两个方程组的解的集合 (简称解集) 相同, 则称它们同解.

增广矩阵

常见的消元法就是通过反复地将一个方程的倍数加到另一个方程上, 从而逐步消去一些变元, 最终实现求解. 在上一章我们已经看到, 如果把变元隐藏起来, 则每个方程可以用一个 $n+1$ 维行向量来代表. 整个方程组就可以用矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

来表示. 这时对方程所做的操作, 就相当于对矩阵进行初等行变换. 这个矩阵称为前述线性方程组的*增广矩阵*. 其中前 n 列排成的矩阵, 也就是所有系数排成的矩阵, 称为*系数矩阵*.

消元法与初等行变换

定理

设线性方程组 (I) 的增广矩阵为 A, 线性方程组 (II) 的增广矩阵为 B, 如果 A 经过一系列初等行变换能变为 B, 则方程组 (I) 和 (II) 同解.

证明.

只需证明, 若 A 经一次初等行变换变为 B, 则相应的两个线性方程组同解. 事实上, 将 A 中某一行变为原来的非零常数倍, 等价于将 (I) 中某个方程乘以非零常数; 交换 A 中两行相当于交换 (I) 两个方程的位置, 这两种操作都不会改变方程组的解. 将 A 中一行的倍数加到另一行上时, 相当于把 (I) 中一个方程的倍数加到另一个方程上, 因此 (I) 的解一定满足这个新方程, 即 (I) 的解都是 (II) 的解. 同理可证 (II) 的解都是 (I) 的解. □

我们用一系列初等行变换将前述线性方程组的增广矩阵 A 变为阶梯形矩阵 C. 设 C 中非零的行有 r 个, 则可能存在两种情况:

- C 中第 r 行仅有第 $n+1$ 列不为零: 相应的方程组中, 第 r 个方程左端为零, 而右端不为零, 这意味着我们得到了一个矛盾方程, 因而方程组无解;
- C 中第 r 行的前 n 列有非零数: 相应的方程组形如

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2,u_2}x_{u_2} + \cdots \quad \cdots \quad \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{r,u_r}x_{u_r} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r. \end{cases}$$

其中系数 $c_{11}, c_{2,u_2}, \cdots, c_{r,u_r}$ 不为零. 这时除 $x_1, x_{u_2}, \cdots, x_{u_r}$ 以外的变元可以任意取值 (称它们为自由未知量), 而 $x_{u_r}, \cdots, x_{u_2}, x_1$ 可以用它们表示出来 (从最后一个方程开始, 逐个解出这些变元). 特别地, 当 $r=n$ 时, 没有自由未知量, 这时方程组有唯一解; 而当 $r<n$ 时, 方程组有无穷多个解.

约化阶梯形

当方程组有解时，为了方便地写出解，通常还可对阶梯形矩阵 C 作初等行变换，使得第 u_i 列仅有 c_{i,u_i} 不为零，$1 \le i \le r$. 进一步，还可将每一行乘以非零常数，使得 (i, u_i) 元变为 1. 这样的行阶梯形矩阵也称为约化阶梯形.

例

解方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$

解

对增广矩阵作初等行变换，得到阶梯形 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解答 (续)

进一步变换, 可得到约化阶梯形 $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

因此原方程组与 $\begin{cases} x_1 - x_2/2 = 7/2, \\ x_3 = -2 \end{cases}$ 同解. 其一般解为 $x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}x_2$, $x_3 = -2$, 其中 x_2 为自由未知量.

在上面这个例子中, 将自由未知量 x_2 重新命名为 t, 则方程组的解也可写为如下形状

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 + t/2 \\ t \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

齐次线性方程组

当线性方程组的右端全为零时, 称为齐次线性方程组. 这时它一定有解 (即所有变元都取零). 对系数矩阵经初等行变换之后, 设所得的阶梯形矩阵有 r 个非零行, 则当 r 与变元个数 n 相等时, 方程组有唯一解; 当 $r < n$ 时, 方程组有无穷多解.

命题

在齐次线性方程组中, 如果方程的个数小于变元的个数, 则它一定有非零解.

证明.

因为阶梯形矩阵中非零行的个数不超过矩阵的行数, 即方程的个数. □

线性组合

定义

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$ 都是数域 P 上的 m 维列向量. 如果存在 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in P$, 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n,$$

则称 β 为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的一个 线性组合, 也称 β 可被向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 线性表出.

例

如果取 $\varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0)'$, $\varepsilon_2 = (0, 1, \cdots, 0)'$, $\cdots$, $\varepsilon_m = (0, 0, \cdots, 1)'$, 则任意向量 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_m)'$ 都可被向量组 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m\}$ 线性表出, 因为

$$\beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_m\varepsilon_m.$$

线性等价

定义

对于两个向量组 A 和 B, 如果向量组 A 中每个向量都可被向量组 B 线性表出, 则称 A 可被 B 线性表出. 如果两个向量组可以互相线性表出, 则称它们 线性等价, 简称等价.

例

取 $\alpha_1 = (1,1,1)'$, $\alpha_2 = (1,2,0)'$; $\beta_1 = (1,0,2)'$, $\beta_2 = (0,1,-1)'$. 那么, $\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2$, $\alpha_2 = \beta_1 + 2\beta_2$, 所以向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 可被向量组 $\{\beta_1, \beta_2\}$ 线性表出. 类似可以验证, 向量组 $\{\beta_1, \beta_2\}$ 也可被向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 线性表出, 所以它们是等价的.

线性等价是向量组之间的等价关系.

线性相关

对于任一向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$, 它总有一个线性组合会得到零向量 $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0)'$, 即

$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_n = \mathbf{0}.$$

我们称之为平凡组合.

定义

如果向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 有非平凡组合为零向量, 则称该向量组线性相关, 否则称该向量组 线性无关.

由定义可知, 向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 线性无关, 就是指线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathbf{0}$$

只有零解.

例

如果 $\alpha_1 = (2, -1, 3, 1)'$, $\alpha_2 = (4, -2, 5, 4)'$, $\alpha_3 = (2, -1, 4, -1)'$, 判断向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是否线性相关.

解

考虑线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\mathbf{0}$. 应用消元法可知它有无穷多组解, 例如一组非零解是 $(x_1,x_2,x_3)=(3,-1,-1)$. 因此这个向量组是线性相关的.

命题

设 A 和 B 是两个向量组, 且向量组 A 线性无关. 如果向量组 A 可被向量组 B 线性表出, 则 B 中的向量个数 $\geq A$ 中的向量个数.

证明

设向量组 $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$; 向量组 $B=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$. 由于 A 能被 B 线性表出, 可设

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{s}A_{ji}\beta_j,\quad 1\leq i\leq n.$$

现在, 我们考虑线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\mathbf{0}$,

证明 (续)

它也等价于

$$\sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{n}A_{ji}x_i\Big)\beta_j=\mathbf{0}.$$

如果 $s<n$, 则齐次线性方程组 $\sum_{i=1}^{n}A_{ji}x_i=0,\ 1\le j\le s$ 的方程个数小于变元个数, 因此一定有非零解. 这与向量组 A 线性无关矛盾. □

推论

在 m 维列向量空间 $P^{m\times 1}$ 中, 线性无关的向量组中至多只有 m 个向量.

证明.

因为这个向量组可被向量组 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m\}$ 线性表出. □

推论

两个线性无关的等价的向量组, 必含有相同个数的向量.

极大线性无关组

定义

向量组 A 的部分组 A_1 若满足: (1) A_1 是线性无关的; (2) A 可被 A_1 线性表出, 则称 A_1 为 A 的极大线性无关组.

例

设 $\alpha_1 = (2, -1, 3, 1)'$, $\alpha_2 = (4, -2, 5, 4)'$, $\alpha_3 = (2, -1, 4, -1)'$. 在向量组 $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 中, α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = 3\alpha_1 - \alpha_2$, 因此 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 是 A 的一个极大线性无关组. 易知 $\{\alpha_1, \alpha_3\}$ 也是它的一个极大线性无关组.

例

如果把 $P^{n\times 1}$ 看作一个向量组, 则 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ 是它的极大线性无关组.

如果 (有限) 向量组 A 中有非零向量, 则可以递推地找到它的极大线性无关组:

- 先将 A 中的向量排序为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 使得 $\alpha_1 \neq \mathbf{0}$, 并取 $B_1 = \{\alpha_1\}$;
- 当已找到 B_i 时, 如果 α_{i+1} 能被 B_i 线性表出, 则令 $B_{i+1} = B_i$, 否则令 $B_{i+1} = B_i \cup \{\alpha_{i+1}\}$;
- 集合 B_n 中的向量就构成 A 的一个极大线性无关组.

由于排序方式不唯一，向量组的极大线性无关组一般并不唯一. 但我们有

定理

向量组的任意两个极大线性无关组都含有相同个数的向量. 这个数目称为该向量组的秩.

证明.

因为这两个极大线性无关组都与原向量组等价，又都线性无关. □

命题

如果向量组 A 能被向量组 B 线性表出，则向量组 B 的秩 $\geq$ 向量组 A 的秩.

证明.

分别取 A, B 的极大线性无关组 A_1, B_1，则 A_1 能被 B_1 线性表出. 又由于 A_1 线性无关，所以 B_1 中的向量个数 $\geq A_1$ 中的向量个数. □

推论

等价的向量组有相同的秩.

矩阵的行秩和列秩

前面的讨论都是基于列向量, 把它换成行向量显然也是可行的.

定义

设 A 为数域 P 上的 $m \times n$ 矩阵. A 的 m 个行向量所构成的向量组的秩, 称为 A 的行秩, 它的列向量组的秩称为它的列秩.

例

阶梯形矩阵的行秩, 等于它的非零行的个数.

引理

矩阵的初等行变换不改变它的行秩, 也不改变它的列秩.

证明.

行秩: 经一次初等行变换后, 新矩阵的行向量组与原来等价.
列秩: 考虑相应的齐次线性方程组, 作初等行变换不改变它的解集. 如果原来的列向量组有某组系数组合为零, 则变换之后的列向量组用同样的系数组合仍为零. 因此, 列向量组的极大线性无关组, 变换之后仍是极大线性无关组. □

矩阵的相抵标准形

同理可证, 初等列变换也不改变矩阵的行秩和列秩.

命题

任一 $m \times n$ 矩阵 A 总可经一系列初等变换变为形如 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的矩阵, 称为 A 的相抵标准形.

证明.

先用初等行变换, 将 A 化为约化阶梯形; 再用初等列变换, 即可化为相抵标准形. □

定理

任一矩阵的行秩与列秩相等, 都等于它的相抵标准形中 1 的个数.

证明.

由于相抵标准形的行秩和列秩相等, 所以原矩阵的行秩与列秩也相等. □

以后将矩阵的行秩和列秩统称为矩阵的秩.

秩与行列式

定义

设 $A \in P^{m\times n}$. 在 A 中选定 k 行和 k 列, 在这些行和列交叉位置的 k^2 个数按原来的次序排成的 k 级行列式, 称为 A 的 k 阶子式.

例

矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 中, 选定第 1, 2 行和第 2, 3 列, 得到 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$. 它的 3 阶子式只有一个, $|A| = 0$.

引理

设矩阵 A 经初等变换变为 B. 如果 A 的所有 k 阶子式全为零, 则 B 的所有 k 阶子式全为零; 如果 A 有一个 k 阶子式不为零, 则 B 也有某个 k 阶子式不为零.

证明.

只需考虑 A 经一次初等行变换变为 B 这种情况. 易知 B 的每个 k 阶子式可以写为 A 的至多两个 k 阶子式的线性组合, 因此, 当 A 的所有 k 阶子式全为零时, B 的所有 k 阶子式也全为零. 由于 B 也可经一次初等行变换变回 A, 所以如果 B 的 k 阶子式全为零, 则 A 的 k 阶子式也全为零. □

定理

矩阵 A 的秩为 r, 当且仅当 A 有一个 r 阶子式不为零, 而所有 $r+1$ 阶子式 (如果有的话) 全为零.

证明.

用初等变换将 A 变为相抵标准形 B. 若 A 的秩为 r, 则 B 中有 r 个 1, 显然 B 有一个 r 阶子式不为零, 而所有 $r+1$ 阶子式全为零, 从而由引理知 A 也有同样的性质. 反之, 若 A 有一个 r 阶子式不为零, 而所有 $r+1$ 阶子式全为零, 则 B 也有同样的性质, 从而 B 中一定恰有 r 个 1, A 的秩为 r. □

推论

n 阶方阵 A 的秩为 n, 当且仅当 $\det(A) \neq 0$.

线性方程组有解判别定理

现在我们应用秩的概念重新来讨论线性方程组.

定理

线性方程组有解的充要条件是其系数矩阵与增广矩阵的秩相等.

证明.

将系数矩阵的各列分别记为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 右端的常数项构成的列向量记作 β, 则线性方程组可写为

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta.$$

它有解的充要条件是 β 可被 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 线性表出, 也即向量组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 与 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta\}$ 等价. $\square$

齐次线性方程组解的性质

对于齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathbf{0},$$

不难观察到

- 两个解的和仍是解: 若 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)'$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)'$ 都是解, 即

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = \mathbf{0},$$
$$b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n = \mathbf{0}.$$

  相加得

$$(a_1 + b_1)\alpha_1 + (a_2 + b_2)\alpha_2 + \cdots + (a_n + b_n)\alpha_n = \mathbf{0},$$

  可见 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)'$ 也是解.

- 一个解的倍数还是解: 若 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)'$ 是解, 则 $k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)'$ 仍是解.

自然的问题是, 这个方程组的所有解, 作为一个向量组, 是否存在极大线性无关组?

基础解系

定义

齐次线性方程组的解 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 如果满足

(1) $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性无关;

(2) 方程组的任意一个解都可被 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性表出,

则称它们构成该方程组的一个*基础解系*.

定理

如果 n 元齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 r, 且 $r < n$, 则它有基础解系, 且基础解系中含有 $n - r$ 个向量.

证明.

对系数矩阵作初等行变换, 将它变为约化阶梯形, 则其中有 r 个非零行. 这时可将变元重新命名, 使得 $y_1, \cdots, y_r$ 为主变元, 而 $y_{r+1}, \cdots, y_n$ 为自由未知量.

证明 (续)

由此可知, 原方程组的一般解形如

$$y_i = c_{i,r+1}y_{r+1} + \cdots + c_{i,n}y_n, \quad 1 \le i \le r.$$

这也可用向量形式写为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,r+1}y_{r+1} + \cdots + c_{1,n}y_n \\ \vdots \\ c_{r,r+1}y_{r+1} + \cdots + c_{r,n}y_n \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_{r+1}\begin{pmatrix} c_{1,r+1} \\ \vdots \\ c_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + y_n\begin{pmatrix} c_{1,n} \\ \vdots \\ c_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

记上式右端以 y_j 为系数的列向量为 η_j, $r+1 \le j \le n$, 则上式告诉我们, 原方程组的每个解都可被 $\eta_{r+1}, \cdots, \eta_n$ 线性表出. 进一步, 容易看出 $\eta_{r+1}, \cdots, \eta_n$ 是线性无关的, 因而构成原方程组的基础解系. □

线性方程组解的结构

如果把线性方程组 (I)

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

的常数项换成零, 就得到齐次线性方程组 (II)

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \mathbf{0}.$$

称方程组 (II) 为方程组 (I) 的导出组.
容易看出

- (I) 的任意两个解的差, 是导出组 (II) 的一个解;
- (I) 的一个解, 加上 (II) 的一个解, 仍是 (I) 的一个解.

定理

如果 η_0 是方程组 (I) 的一个特解, $\eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$ 是其导出组的基础解系, 则方程组 (I) 的一般解为

$$\eta_0 + k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}.$$