数学分析讲义（伯苓班）

段华贵

数学科学学院

2022年3月

第十章
多元函数的极限与连续
§10.1 n维欧氏空间

一、n维欧氏空间

二、点列收敛

三、集合与区域

四、集合的紧性

五、集合的连通性

$\mathbb{R}$: 实数轴上的点与全体实数一一对应.

$\mathbb{R}^2$: 坐标平面上的点与所有有序实数对(x, y)一一对应.

$\mathbb{R}^3$: 空间中的点在建立空间直角坐标系之后与有序三元实数组(x, y, z) 一一对应.

$\mathbb{R}^n$: 一般来说, 把有序n元实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$所组成的集合称为n维欧几里得(Euclid)空间, 简称n维**欧氏空间**, 记为$\mathbb{R}^n$, 即

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) |\, x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

记$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 其中$x_i(i=1,2,\cdots,n)$称为$X$的第$i$个分量.

(i) (加法) $\forall X=(x_1,x_2,\cdots,x_n), Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$X+Y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n).$$

(ii) (数乘) $\forall X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$和实数$\lambda$，定义

$$\lambda X=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n).$$

按上述加法和数乘, 可知$\mathbb{R}^n$成为一个n维实线性空间.

$\forall X=(x_1,x_2,\cdots,x_n), Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义内积

$$X\cdot Y=\langle X,Y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

向量的内积满足

(1) $\langle X,X\rangle\geqslant 0$, 其中等式成立当且仅当$X=O$.

(2) $\langle X,Y\rangle=\langle Y,X\rangle$.

(3) $\langle X,Y+Z\rangle=\langle X,Y\rangle+\langle X,Z\rangle$.

(4) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\langle\lambda X,Y\rangle=\lambda\langle X,Y\rangle$.

(5) $\langle X,Y\rangle^2\leqslant\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle$(柯西不等式).

可用**内积**定义一个向量的模长(范数)$|X| = \sqrt{\langle X, X\rangle}$, 满足

(i) $|X| \geqslant 0$, 其中等式成立当且仅当$X = O$.

(ii) $|\lambda X| = |\lambda| \cdot |X|, \lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) 三角不等式: $|X + Y| \leqslant |X| + |Y|$.

$$\begin{aligned} \langle X+Y, X+Y\rangle &= |X|^2 + |Y|^2 + 2\langle X, Y\rangle \\ &\leqslant |X|^2 + |Y|^2 + 2|X| \cdot |Y| = (|X| + |Y|)^2. \end{aligned}$$

设X, Y为非零向量, 则存在唯一$\varphi \in [0, \pi]$使得

$$\cos\varphi = \frac{\langle X, Y\rangle}{|X| \cdot |Y|}.$$

称φ为向量X, Y的**夹角**.

令

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1,0,\cdots,0), \\ \vec{e}_2 &= (0,1,\cdots,0), \\ &\cdots, \\ \vec{e}_n &= (0,0,\cdots,1), \end{aligned}$$

$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$ 则$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$构成$\mathbb{R}^n$的标准正交基. 任意元素$X \in \mathbb{R}^n$可表示为

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i.$$

注记：在标准正交基下，线性变换$A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$对应于矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \end{pmatrix}.$$

矩阵A的范数定义为$|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$, 则由柯西不等式有

$$|AX^T| \leqslant |A| \cdot |X|.$$

满足条件$\langle AX^T, AY^T\rangle = \langle X, Y\rangle$的线性变换$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$为正交变换,

正交变换把标准正交基变为标准正交基.

一个$n \times n$矩阵A为**正交矩阵**当且仅当$A^T A = E$.

设$X,Y\in\mathbb{R}^n$, 可用**范数**定义两点的**欧氏距离**为

$$d(X,Y)=|X-Y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

满足

(i) 正定性: $\forall X,Y\in\mathbb{R}^n$, $d(X,Y)\geqslant 0$，且$d(X,Y)=0$ 的充要条件是$X=Y$.

(ii) 对称性: $d(X,Y)=d(Y,X),\forall X,Y\in\mathbb{R}^n$.

(iii) 三角形不等式:

$$d(X,Z)\leqslant d(X,Y)+d(Y,Z),\forall X,Y,Z\in\mathbb{R}^n.$$

则$(\mathbb{R}^n,d)$为一度量空间.

$$d_1(X,Y) = |X-Y|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,$$
$$d_2(X,Y) = |X-Y|_\infty = \max\{|x_1-y_1|, \cdots, |x_n-y_n|\}$$

满足公理(i)-(iii), 并且有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|X-Y|_1 \overset{\text{柯西不等式}}{\leqslant} |X-Y| \leqslant |X-Y|_1, \tag{1}$$

$$|X-Y|_\infty \leqslant |X-Y| \leqslant \sqrt{n}|X-Y|_\infty. \tag{2}$$

??? $d_3(X,Y) = \min\{|x_1-y_1|, \cdots, |x_n-y_n|\}$.

等价的范数*

设$||\cdot||_1$和$||\cdot||_2$是线性空间X上的两个范数，如果存在两个正数A 和B，使得对任意$x \in X$，有

$$A||x||_2 \leq ||x||_1 \leq B||x||_2$$

则称$||\cdot||_1$和$||\cdot||_2$是X中的两个等价范数。

Theorem

有限维赋范线性空间的任意两个范数等价.

定义： 设$\{X_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$无穷点列，$X_0 \in \mathbb{R}^n$，称点列$\{X_m\}$ 收敛于X_0 或X_0是点列$\{X_m\}$的极限，记为 $\lim\limits_{m\to\infty} X_m = X_0$ ，如果

$$\lim_{m\to\infty} |X_m - X_0| = 0,$$

即$\forall \varepsilon > 0$ ，$\exists M$,使得当$m > M$时总有$|X_m - X_0| < \varepsilon$.

$B_r(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^n | \, |X - X_0| < r\}$ 称为X_0的半径为r的**邻域**，也简记为$B(X_0)$.

注1：点列收敛等价于点列的每个分量对应收敛.

注2：极限点是唯一性.

定义： $\mathbb{R}^n$中的点列$\{X_m\}$称为**基本列或柯西列**, 如果任给$\varepsilon > 0$，存在正整数M, 使得只要$m, n > M$就有

$$|X_m - X_n| < \varepsilon.$$

Theorem (柯西收敛原理)

$\mathbb{R}^n$中的点列$\{X_m\}$ 收敛$\Leftrightarrow$ $\{X_m\}$为基本列.

设$A, B \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) A在$\mathbb{R}^n$中的余集(补集)$A^c = \{X \in \mathbb{R}^n | \ X \notin A\}$.

(2) $A \setminus B = A \cap B^c = \{X \in \mathbb{R}^n | \ X \in A, \ X \notin B\}$.

(3) 德・摩根(De Morgan)定律:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

- **内点**: 若存在点X的一个邻域$\subseteq A$, A的所有内点集合记为A°.
- **外点**: 若存在X的一个邻域$\subseteq A^c$.
- **边界点**: 若任意邻域$U(X)$, $U(X)\cap A\neq\emptyset, U(X)\cap A^c\neq\emptyset$.
  A的所有边界点集合记为∂A(边界).

- **触点**: 任意邻域$U(X)$, $U(X)\cap A\neq\emptyset$. A的所有触点组成的集合称为A的**闭包**, 记为$\overline{A}$.
- **聚点(或极限点)**: 任意邻域$U(X)$, $U(X)\cap(A\setminus\{X\})\neq\emptyset$. A的所有聚点组成的集合称为A的**导集**, 记为A'.
- **孤立点**: 存在某邻域$U(X)$,使得$U(X)\cap A=\{X\}$.

注：X是A的聚点$\Leftrightarrow$存在互异点列$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq A$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X$.

设$A \subseteq \mathbb{R}^n$,

- **开集** 若$A = A^\circ$.
- **闭集** 若$A = \overline{A}$ 或者A^c为开集.
- （例题）$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- （例题）$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

假如$A \subseteq \mathbb{R}^n$，A既开又闭，且$A \neq \emptyset, A \neq \mathbb{R}^n$. 则$A^c$既开又闭，且$A^c \neq \emptyset, A^c \neq \mathbb{R}^n$.

取$x_0 \in A, y_0 \in A^c$，令

$$\sigma(t) = (1-t)x_0 + ty_0, t \in [0,1],$$

$$E_1 = \{t \in [0,1] |\, \sigma(t) \in A\},\ E_2 = \{t \in [0,1] |\, \sigma(t) \in A^c\}.$$

显然$E_1 \neq \emptyset$，$E_2 \neq \emptyset$，$E_1 \cap E_2 = \emptyset$，$E_1 \cup E_2 = [0,1]$. 定义

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in E_1 \\ 0, & t \in E_2. \end{cases}$$

断言: $f(t)$是$[0,1]=E_1\cup E_2$上的连续函数.

(1) 当$t\in E_1$, 即$\sigma(t)\in A$. 因A为开集, 则$\exists\delta>0$, 使得当$s\in(t-\delta,t+\delta)\cap[0,1]$(即$|s-t|<\delta$且$s\in[0,1]$)时, $\sigma(s)\in A$, 故$s\in E_1$, 从而$f(s)=1$. 故f在t点连续.

(2) 当$t\in E_2$时,A^c是开集,同理可证f在t点的连续性.

从而这与闭区间上连续函数的介值定理矛盾.

开集与闭集

- （命题）有限多个开集的交是开集，任意多个开集的并是开集.
- 举例说明“无穷个开集的交不是开集”和“无穷个闭集的并不是闭集”.
- (对偶)有限多个闭集的并是闭集，任意多个闭集的交是闭集.

命题：A为闭集$\Leftrightarrow$ $\forall\{X_m\}\subseteq A$, 若 $\lim\limits_{m\to\infty} X_m = X_0$, 则$X_0\in A$.

PROOF. "$\Rightarrow$": (反证) 假设$X_0\in A^c$开集,即X_0是A^c的内点,从而存在某邻域$B_\delta(X_0)\subseteq A^c$,这与$x_n\to X_0$矛盾.

"$\Leftarrow$": 须证$\overline{A}\subseteq A$. 任取触点$X_0\in\overline{A}$, $\forall n\geq 1$有$B_{1/n}(X_0)\cap A\neq\emptyset$, 即存在$X_n\in B_{1/n}(X_0)\cap A$. 也就是$X_n\in A$且$|X_n-X_0|<\frac{1}{n}$. 从而$x_n\to x_0$. 故$X_0\in A$.

设$A \subseteq \mathbb{R}^n$.

- **凸集**: 若对任意$X_1, X_2 \in A$，都有$\{X \in \mathbb{R}^n | X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2, 0 \le \lambda \le 1\} \subseteq A$,
- **道路连通集**: 对任意$X_1, X_2 \in A$，存在一条A中的连续道路$\gamma : [0,1] \to A$(即$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))$中的每个函数$\gamma_i(t)$均是连续的), 使$\gamma(0) = X_1$，$\gamma(1) = X_2$.
- **区域**: 称$\mathbb{R}^n$中的道路连通开集为(开)**区域**, 区域的闭包为**闭区域**.

四、有界集

- 有界集的定义.
- 引理(Bolzano-Weierstrauss,波尔查诺-魏尔斯特拉斯):
  设$\{X_m\}$是$\mathbb{R}^n$中的有界序列, 则它必有收敛的子序列.

- **(自)列紧集**: 若$A \subseteq \mathbb{R}^n$中任意点列,都有收敛于A中点的子列.
- **定理**: 在$\mathbb{R}^n$中, 列紧集 $\Leftrightarrow$ 有界闭集.

Proof. 列紧集 $\Leftarrow$ 有界闭集:

设A是有界闭集. 任取点列$\{X_m\} \subseteq A$, 由波尔查诺-魏尔斯特拉斯引理可知$\{X_m\}$收敛子列$\{X_{m_k}\}$, 记$X_0 = \lim\limits_{k\to\infty} X_{m_k}$. 因为$A$是闭集, $X_{m_k} \in A$,故$X_0 \in A$.

列紧集 $\Rightarrow$ 有界、闭

- 集合的**开覆盖**和**子覆盖**的定义.
- **紧集**: 如果$A \subseteq \mathbb{R}^n$的任一开覆盖都存在有限子覆盖.
- **引理**(闭方体套定理) 设闭方体

$$Q_j = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n |\, a_{ji} \leqslant x_i \leqslant b_{ji}, i = 1, \cdots, n\},\ j \in \mathbb{N}^*$$

满足条件

(i) (方体套) $Q_{j+1} \subseteq Q_j,\ \forall j \in \mathbb{N}^*$;

(ii) (所有边长收敛到零) $\lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (b_{ji} - a_{ji})^2 = 0$.

则存在唯一点$X_0 \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$.

$$\Omega(r)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n|\ -r\leqslant x_i\leqslant r, i=1,2,\cdots,n\}.$$

- (反证) 假设存在$\Omega(r)$的一个开覆盖$\{O_i\}_{i\in I}$不存在有限子覆盖.
- $(n=2)$ 连接对边中点把$Q_1=\Omega(r)$分成4个闭子集,则至少存在一个闭子集Q_2不能被有限子覆盖.
- 以此类推, 存在序列$\{Q_j\}$满足闭方体套定理条件，且每个Q_j被$\{O_i\}_{i\in I}$覆盖但不能被有限子覆盖.
- 由引理，存在唯一点$X_0\in\bigcap_{j=1}^{\infty}Q_j\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i$. 则存在$i_0\in I$使得$X_0\in O_{i_0}$，因$O_{i_0}$为开集，存在$\delta>0$ 使得$B_\delta(X_0)\subseteq O_{i_0}$.
- 另一方面,j_0足够大时,Q_{j_0}的所有边长的平方和$<\delta^2$, 从而有$X_0\in Q_{j_0}\subseteq B_\delta(X_0)$.
- 则$Q_{j_0}\subseteq O_{i_0}$,矛盾.

$\mathbb{R}^n$中的闭方体是紧集

$$\Omega(r) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | -r \leqslant x_i \leqslant r, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

- (反证) 假设存在$\Omega(r)$的一个开覆盖$\{O_i\}_{i\in I}$不存在有限子覆盖.
- ($n=2$) 连接对边中点把$Q_1 = \Omega(r)$分成4个闭子集,则至少存在一个闭子集Q_2不能被有限子覆盖.
- 以此类推, 存在序列$\{Q_j\}$满足闭方体套定理条件, 且每个Q_j被$\{O_i\}_{i\in I}$覆盖但不能被有限子覆盖.
- 由引理, 存在唯一点$X_0 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$. 则存在$i_0 \in I$使得$X_0 \in O_{i_0}$, 因$O_{i_0}$为开集, 存在$\delta > 0$ 使得$B_\delta(X_0) \subseteq O_{i_0}$.
- 另一方面,j_0足够大时,Q_{j_0}的所有边长的平方和$< \delta^2$, 从而有$X_0 \in Q_{j_0} \subseteq B_\delta(X_0)$.
- 则$Q_{j_0} \subseteq O_{i_0}$,矛盾.

$$\Omega(r) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | -r \leqslant x_i \leqslant r, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

- (反证) 假设存在$\Omega(r)$的一个开覆盖$\{O_i\}_{i\in I}$不存在有限子覆盖.
- $(n = 2)$ 连接对边中点把$Q_1 = \Omega(r)$分成4个闭子集,则至少存在一个闭子集Q_2不能被有限子覆盖.
- 以此类推, 存在序列$\{Q_j\}$满足闭方体套定理条件，且每个Q_j被$\{O_i\}_{i\in I}$覆盖但不能被有限子覆盖.
- 由引理，存在唯一点$X_0 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$. 则存在$i_0 \in I$使得$X_0 \in O_{i_0}$, 因$O_{i_0}$为开集，存在$\delta > 0$ 使得$B_\delta(X_0) \subseteq O_{i_0}$.
- 另一方面,j_0足够大时,Q_{j_0}的所有边长的平方和$< \delta^2$, 从而有$X_0 \in Q_{j_0} \subseteq B_\delta(X_0)$.
- 则$Q_{j_0} \subseteq O_{i_0}$,矛盾.

$$\Omega(r) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | -r \leqslant x_i \leqslant r, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

- (反证) 假设存在$\Omega(r)$的一个开覆盖$\{O_i\}_{i\in I}$不存在有限子覆盖.
- $(n = 2)$ 连接对边中点把$Q_1 = \Omega(r)$分成4个闭子集,则至少存在一个闭子集Q_2不能被有限子覆盖.
- 以此类推, 存在序列$\{Q_j\}$满足闭方体套定理条件，且每个Q_j被$\{O_i\}_{i\in I}$覆盖但不能被有限子覆盖.
- 由引理，存在唯一点$X_0 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$. 则存在$i_0 \in I$使得$X_0 \in O_{i_0}$, 因$O_{i_0}$为开集，存在$\delta > 0$ 使得$B_\delta(X_0) \subseteq O_{i_0}$.
- 另一方面,j_0足够大时,Q_{j_0}的所有边长的平方和$< \delta^2$, 从而有$X_0 \in Q_{j_0} \subseteq B_\delta(X_0)$.
- 则$Q_{j_0} \subseteq O_{i_0}$,矛盾.

$$\Omega(r) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | -r \leqslant x_i \leqslant r, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

- (反证) 假设存在$\Omega(r)$的一个开覆盖$\{O_i\}_{i\in I}$不存在有限子覆盖.
- ($n = 2$) 连接对边中点把$Q_1 = \Omega(r)$分成4个闭子集,则至少存在一个闭子集Q_2不能被有限子覆盖.
- 以此类推, 存在序列$\{Q_j\}$满足闭方体套定理条件，且每个Q_j被$\{O_i\}_{i\in I}$覆盖但不能被有限子覆盖.
- 由引理，存在唯一点$X_0 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$. 则存在$i_0 \in I$使得$X_0 \in O_{i_0}$, 因$O_{i_0}$为开集，存在$\delta > 0$ 使得$B_\delta(X_0) \subseteq O_{i_0}$.
- 另一方面,j_0足够大时,Q_{j_0}的所有边长的平方和$< \delta^2$, 从而有$X_0 \in Q_{j_0} \subseteq B_\delta(X_0)$.
- 则$Q_{j_0} \subseteq O_{i_0}$,矛盾.

$\mathbb{R}^n$中的闭方体是紧集

$$\Omega(r)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n|\ -r\leqslant x_i\leqslant r, i=1,2,\cdots,n\}.$$

- (反证) 假设存在$\Omega(r)$的一个开覆盖$\{O_i\}_{i\in I}$不存在有限子覆盖.
- ($n=2$) 连接对边中点把$Q_1=\Omega(r)$分成4个闭子集,则至少存在一个闭子集Q_2不能被有限子覆盖.
- 以此类推, 存在序列$\{Q_j\}$满足闭方体套定理条件，且每个Q_j被$\{O_i\}_{i\in I}$覆盖但不能被有限子覆盖.
- 由引理，存在唯一点$X_0\in\bigcap_{j=1}^{\infty}Q_j\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i$. 则存在$i_0\in I$使得$X_0\in O_{i_0}$, 因$O_{i_0}$为开集，存在$\delta>0$ 使得$B_\delta(X_0)\subseteq O_{i_0}$.
- 另一方面,j_0足够大时,Q_{j_0}的所有边长的平方和$<\delta^2$, 从而有$X_0\in Q_{j_0}\subseteq B_\delta(X_0)$.
- 则$Q_{j_0}\subseteq O_{i_0}$,矛盾.

定理(Heine-Borel,海涅-博雷尔): 在$\mathbb{R}^n$中,紧集与有界闭集等价.

"$\Rightarrow$": 只须证明A列紧. (反证)假设存在$\{X_m\} \subseteq A$, 使得没有收敛于A中点的子列, 则$\forall X \in A$ 都不是$\{X_m\}$的聚点,则存在邻域$B(X)$和自然数$N(X)$, 使得当$m > N(X)$时

$$X_m \notin B(X).$$

显然$\{B(X)\}_{X \in A}$是A的一个开覆盖, 由A的紧性知存在子覆盖

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(Y_i).$$

令$N = \max\{N(Y_1), N(Y_2), \cdots, N(Y_k)\}$, 则当$m > N$时$X_m \notin A$, 这与$\{X_m\} \subseteq A$矛盾. 从而$A$列紧,即得$A$有界闭.

定理(Heine-Borel,海涅-博雷尔): 在$\mathbb{R}^n$中,紧集与有界闭集等价.

"$\Rightarrow$": 只须证明A列紧. (反证)假设存在$\{X_m\} \subseteq A$, 使得没有收敛于A中点的子列, 则$\forall X \in A$ 都不是$\{X_m\}$的聚点,则存在邻域$B(X)$和自然数$N(X)$, 使得当$m > N(X)$时

$$X_m \notin B(X).$$

显然$\{B(X)\}_{X\in A}$是A的一个开覆盖, 由A的紧性知存在子覆盖

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(Y_i).$$

令$N = \max\{N(Y_1), N(Y_2), \cdots, N(Y_k)\}$, 则当$m > N$时$X_m \notin A$, 这与$\{X_m\} \subseteq A$矛盾. 从而$A$列紧,即得$A$有界闭.

(1) 任取一点$x \in A$,则$\{B(x,m)\}_{m=1}^{+\infty}$构成$A$的一个开覆盖. 因为$A$是紧集，故存在$A$的有限子覆盖$\{B(x,m_i)\}_{i=1}^{k}$.
令$N = \max\{m_1,\cdots,m_k\}$,则$A \subset B(x,N)$,即$A$有界.

(2) 证A^c为开集即可. $\forall x_0 \in A^c$, 则

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} = \bigcup_{m=1}^{+\infty}\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,x_0) > \frac{1}{m}\}.$$

同理，由A是紧集可得$A \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,x_0) > \frac{1}{N}\}$,故

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,x_0) \le \frac{1}{N}\} \subseteq A^c,$$

即x_0为A^c的内点,故A^c为开集.

(1) 任取一点$x \in A$,则$\{B(x,m)\}_{m=1}^{+\infty}$构成$A$的一个开覆盖. 因为$A$是紧集，故存在$A$的有限子覆盖$\{B(x,m_i)\}_{i=1}^{k}$.
令$N = \max\{m_1, \cdots, m_k\}$,则$A \subset B(x,N)$,即$A$有界.

(2) 证A^c为开集即可. $\forall x_0 \in A^c$, 则

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,x_0) > \frac{1}{m}\}.$$

同理，由A是紧集可得$A \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,x_0) > \frac{1}{N}\}$,故

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,x_0) \leq \frac{1}{N}\} \subseteq A^c,$$

即x_0为A^c的内点,故A^c为开集.

"$\Leftarrow$": 设A有界闭,则存在$r > 0$, 使得$A \subseteq \Omega(r)$闭方体. 设$\{O_i\}_{i\in I}$是A的开覆盖. 由于A闭知A^c为$\mathbb{R}^n$中的开集.

则$\Omega(r) \subseteq \mathbb{R}^n \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i \cup A^c$. 由$\Omega(r)$的紧性可知存在有限子集$J \subseteq I$, 使得$\{O_i\}_{i\in J} \cup \{A^c\}$是$\Omega(r)$的开覆盖. 于是$\{O_i\}_{i\in J}$是$A$的开覆盖, 所以$A$是紧集.

1. 设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$为有界函数,定义其图像

$$\mathrm{Graph}(f)=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2\mid x\in[a,b]\}.$$

证明：f连续 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Graph}(f)$为闭集.

2. 设$A=(a_{ij})$为$n\times n$阶实方阵，可将其视为$\mathbb{R}^{n^2}$中的点. 记$O(n,\mathbb{R})$为n阶实正交矩阵构成的集合，$O^+(n,\mathbb{R})$为行列式等于1的n 阶实正交矩阵构成的集合. 则

(1) $O(n,\mathbb{R})$为$\mathbb{R}^{n^2}$中的有界闭集.

(2) $O^+(n,\mathbb{R})$道路连通.

Example

设A是$\mathbb{R}^n$中的有界闭集, $\{O_i\}_{i\in I}$是A的某一开覆盖. 则存在$\delta > 0$, 使得对于任意满足

$$B \cap A \neq \emptyset, \quad d(B) = \sup_{X,Y\in B} |X - Y| < \delta$$

的集合$B \subset \mathbb{R}^n$,总存在$i \in I$使得$B \subseteq O_i$.

δ称为开覆盖$\{O_i\}_{i\in I}$的**勒贝格(Lebesgue)数**.

证明一(A紧)

$\forall X \in A$, 存在$i \in I$和$r(X) > 0$使得$B(X, r(X)) \subseteq O_i$. 显然$\left\{B\left(X, \frac{1}{2}r(X)\right)\right\}_{X\in A}$是$A$的开覆盖. 由$A$的紧性可得$X_1$, X_2, $\cdots$, X_l, 使得$\left\{B\left(X_k, \frac{1}{2}r(X_k)\right)\right\}_{k=1,2,\cdots,l}$是$A$的有限子覆盖.
取$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}r(X_1), \frac{1}{2}r(X_2), \cdots, \frac{1}{2}r(X_l)\right\} > 0$.

如果$B \subseteq \mathbb{R}^n$满足$B \cap A \neq \emptyset$, $d(B) < \delta$, 取$X \in B \cap A$, 则存在$j_0 \in \{1, 2, \cdots, l\}$, 使得$X \in B\left(X_{j_0}, \frac{1}{2}r(X_{j_0})\right)$. 由于$X \in B$且$d(B) < \delta \leqslant \frac{1}{2}r(X_j)$, 所以

$$B \subseteq B(X_{j_0}, r(X_{j_0})).$$

则存在$i_0 \in I$, 使得$B \subseteq O_{i_0}$.

对于任意$\frac{1}{m}$, 存在$\mathbb{R}^n$的子集列$B_1, \cdots, B_m, \cdots$,尽管满足

$$B_m \cap A \neq \emptyset, \quad d(B_m) < \frac{1}{m},$$

但$B_m \not\subseteq O_i, \forall i \in I$. 取$X_m \in B_m \cap A, \forall m$.

则由A列紧知存在子列$\{X_{m_k}\}$收敛到$X_0 \in A$,所以存在$i \in I$, 使得$X_0 \in O_i$. 由O_i是开集, 可知存在$r > 0$使得$B_r(X_0) \subseteq O_i$. 所以k充分大时

$$|X_{m_k} - X_0| < \frac{r}{2}, \quad \frac{1}{m_k} < \frac{r}{2}.$$

则对于任意$X \in B_{m_k}$都满足

$$|X - X_0| \leq |X - X_{m_k}| + |X_{m_k} - X_0| < \frac{1}{m_k} + \frac{r}{2} < r.$$

故$X_{m_k} \in B_{m_k} \subseteq B_r(X_0) \subseteq O_i$, 矛盾.

设$B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$.

- **B为A的相对开集**: 如果存在开集$U \subseteq \mathbb{R}^n$, 使得$B = A \cap U$ $\Leftrightarrow$ 对任意$P \in B$, 存在$r > 0$, 使$A \cap B_r(P) \subseteq B$.
- **相对闭集**: A的相对开集在A中的余集.
- **连通集**: 如果A的相对开且相对闭的子集只有空集与A本身, 则称A连通. $\Leftrightarrow$ A不能分成两个非空的不相交的相对开子集之并.
- **例子** $\mathbb{R}^n$不能表示为两个非空不相交的开集的并,因此是连通的.

道路连通 $\Rightarrow$ 连通, 反之,不成立。

反例

$G=\left\{(x,\sin\frac{1}{x})\mid x\in(0,1]\right\}$,

$L=\{(0,y)\mid y\in[-1,1]\}$,

$X=G\cup L=\overline{G}$连通,但不是道路连通的.

注记 $\mathbb{R}^n$中的区域(道路连通的开集)都是连通的.

习题：不存在$[0,1]$到圆周上的一一连续映射.

第10.2节

多元函数的极限与连续

设$f(X)$是n元函数, D为其定义域, X_0是D的聚点.

Definition

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当$X \in D$且$0 < |X - X_0| < \delta$时, 就有

$$|f(X) - a| < \varepsilon,$$

则称a是$X \to X_0$时$f(X)$的**极限**, 记为$\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = a$.

用极限定义证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+2y}{x^2+y^2} = 1$

注记: X_0为聚点, $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=a \Leftrightarrow$ 对于D中任意收敛于X_0但异于X_0的点列$\{X_m\}$均有$\lim\limits_{m\to\infty} f(X_m)=a$.

Theorem (柯西收敛原理)

$\lim_{X\to X_0} f(X)$收敛 $\Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 当$X, Y \in D$,

且$0 < ||X - X_0|| < \delta,\ 0 < ||Y - X_0|| < \delta$时,

有$|f(X) - f(Y)| < \varepsilon$.

Example

讨论$f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$在$(x,y)\to(0,0)$时的极限.

Example

求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

Definition

如果$\forall \varepsilon > 0$, $\exists K > 0$, 使得当$X \in D$且$x^2 + y^2 > K$时，有$|f(x, y) - a| < \varepsilon$, 则称$a$是$x^2 + y^2 \to +\infty$时$f(x, y)$的极限，记为$\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x, y) = a$.

Definition

如果$\forall M>0$, $\exists K>0$, 使得当$X\in D$且$|x|>K$, $|y|>K$时，有$|f(x,y)|>M$, 则称$x\to\infty$, $y\to\infty$时$f(x,y)$是无穷大量, 记为$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)=\infty$.

Example

求极限 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

极限的例题4

Example

求极限 (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

(1) 先$x \to x_0$, 后$y \to y_0$ 的**累次极限**, 记 $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$.

(2) 先$y \to y_0$, 后$x \to x_0$的**累次极限**, 记 $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$.

两个累次极限都存在相等不能保证二元极限存在.

(1) 若

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0, \end{cases}$$

则$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$, $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$不存在.

(2) 若

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

则$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=1$, $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=-1$.

二元极限存在不能保证累次极限存在.

(3) 若

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2},$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$. 但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在.

(4) 若

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}$$

显然 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$均不存在. 但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$.

Theorem (二元极限存在,第一次极限存在,可知对应累次极限存在)

设$f(x,y)$定义在(x_0,y_0)的一个空心邻域, 且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=a$. 如果对于任意$y\neq y_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$, 则 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$存在, 且等于$a$, 即 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$存在, 且等于$a$.

设$D \subseteq \mathbb{R}^n$，且D是函数$f(X)$的定义域,$X_0 \in D$.

Definition

如果$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当$X \in D$且$|X - X_0| < \delta$时，有

$$|f(X) - f(X_0)| < \varepsilon,$$

称$f(X)$在X_0**连续** $\Leftrightarrow$ $\lim_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$.

当X_0是D的孤立点时，$f(X)$必在X_0连续.

向量值函数$g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$在$Y_0=(y_1,\cdots,y_m)$连续

$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$||Y-Y_0||<\delta$,总成立

$$||g(Y)-g(Y_0)||<\varepsilon.$$

Theorem

设$f(X)$的定义域为$D \subseteq \mathbb{R}^n$, 且f在$X_0 = (x_{01}, \cdots, x_{0n})$连续.
$g_1(Y), \cdots, g_n(Y)$的定义域均为$\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, 且
在$Y_0 = (y_{01}, \cdots, y_{0m})$连续. 进一步
设$g_i(y_{01}, \cdots, y_{0m}) = x_{0i}, i = 1, \cdots, n$,
且$\{(g_1(Y), \cdots, g_n(Y)) | \ Y \in \Omega\} \subseteq D$, 则复合函
数$h(Y) = f(g_1(Y), \cdots, g_n(Y))$在$Y_0$连续.

练习

讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+xy)}{x} & x\neq 0,\\ y, & x=0.\end{cases}$在$(0,0)$点的连续性.

Definition

若$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当$X,Y\in D$且$|X-Y|<\delta$时, 有

$$|f(X)-f(Y)|<\varepsilon,$$

则称$f(X)$在D上**一致连续**.

若存在常数$M>0$, 使得

$$|f(X)-f(Y)|\leqslant M|X-Y|,\quad \forall X,Y\in D,$$

则称$f(X)$在D**利普希茨连续**.

Example

设$f(X)$在D上一致连续, $X_0 \in \mathbb{R}^n$是D的聚点，则$\lim\limits_{X \to X_0} f(X)$存在.

Example

设$A \subseteq \mathbb{R}^n$非空，对$\forall P \in \mathbb{R}^n$，令$f(P) = \mathrm{dis}(P, A) = \inf\limits_{Q \in A} |P - Q|$，即点$P$到集合$A$的距离，则$f(P)$在$\mathbb{R}^n$上利普希茨连续.

Definition

设$D\subseteq\mathbb{R}^n$为凸集, $f(X)$为定义在D上的函数, 若

$$f(\lambda X+(1-\lambda)Y)\leqslant\lambda f(X)+(1-\lambda)f(Y),\quad\forall X,Y\in D,\lambda\in[0,1],$$

则称$f(X)$是D上的**凸函数**.

Example

$\mathbb{R}^n$上的凸函数必在$\mathbb{R}^n$上连续(局部Lipschitz连续的).

- $f(X)$把有界集合映成有界集:
  证明在闭方体上$\Omega(r)$上
  (1) 既有上界(实际上被函数在闭方体的顶点处的最大值控制)
  (2) 又有下界（反证）
- $f(X)$是局部Lipschitz连续的.

压缩映射: 对于映射$f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$, 存在常数$0\le\alpha<1$,使得$|f(X_1)-f(X_2)|\le\alpha|X_1-X_2|$, $\forall\ X_1,X_2\in\mathbb{R}^n$.

Theorem

设$f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$为一压缩映射,则存在唯一的不动点$\bar{X}\in\mathbb{R}^k$,即$f(\bar{X})=\bar{X}$.

Proof. **存在性**: 任取$X_0\in\mathbb{R}^n$,如下构造迭代序列$\{X_n\}\subseteq\mathbb{R}^k$

$$X_n=f(X_{n-1}),\quad n=1,2,\cdots. \tag{1}$$

对于任意$m>n$可得

$$\begin{aligned}|X_m-X_n| &\le |X_m-X_{m-1}|+\cdots+|X_{n+1}-X_n|\\ &\le (\alpha^{m-1}+\alpha^{m-2}+\cdots+\alpha^n)|X_1-X_0|\\ &\le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|X_1-X_0|\to 0\quad (n\to\infty),\end{aligned}$$

即$\{X_m\}$为$\mathbb{R}^k$中的柯西列,则其极限$\bar{X}\in\mathbb{R}^k$.

$$\begin{aligned}|f(\bar{X})-\bar{X}| &\le |f(\bar{X})-f(X_n)|+|f(X_n)-\bar{X}|\\ &\le \alpha|\bar{X}-X_n|+|X_{n+1}-\bar{X}|\to 0\ (n\to\infty),\end{aligned}$$

蕴含$f(\bar{X})=\bar{X}$.

唯一性：假设$\bar{X},\bar{Y}\in\mathbb{R}^k$是两个不动点,则

$$|\bar{X}-\bar{Y}|=|f(\bar{X})-f(\bar{Y})|\le\alpha|\bar{X}-\bar{Y}|,$$

蕴含$\bar{X}=\bar{Y}$.

第10.3节

连续函数的性质

练习1

设函数$f(x,y)$对每个自变量都是(一元)连续的,且关于其中一个变量是单调的,则函数$f(x,y)$（二元）连续的.

Theorem

设f为$\mathbb{R}^n$中有界闭集D上的连续函数,则$f(D)$有界集.

Proof. (反证) 假设$f(X)$在D上无界, 则存在D中点列$\{X_m\}$, 使得当$m \to \infty$时$|f(X_m)| \to +\infty$. 由于D列紧, 从而存在子列$\{X_{m_k}\}$和$X_0 \in D$, 使得$\lim_{k\to\infty} X_{m_k} = X_0$. 由$f$的连续性知

$$|f(X_0)| = \lim_{k\to\infty} |f(X_{m_k})| = +\infty,$$

矛盾.

Theorem

设f为$\mathbb{R}^n$中有界闭集D上的连续函数,则$f(D)$有界集.

Proof. 由f连续知，对$\varepsilon = 1$, 任意$X \in D$,都存在$\delta_X > 0$,使得当$Y \in B(X, \delta_X) \cap D$时，总有

$$|f(Y) - f(X)| \leq 1, \quad \forall\, Y \in B(X, \delta_X).$$

显然$\{B(X, \delta_X)\}_{X \in D}$为$D$的一个开覆盖.

因为D紧, 则$D \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B(X_k, \delta_{X_k})$. 令

$$M = \max\{|f(X_1)| + 1, \cdots, |f(X_k)| + 1\}.$$

则$|f(Y)| \leq M$, $\forall\, Y \in D$.即$f(D)$为有界集.

Theorem

$\mathbb{R}^n$中有界闭集D上的连续函数$f(X)$在D有最大值和最小值.

Proof. 令$M = \sup_{X\in D} f(X)$, $m = \inf_{X\in D} f(X)$.

由上确界可知, 存在D中点列$\{X_k\}$, 使得$\lim\limits_{k\to\infty} f(X_k) = M$. 由于$D$是列紧集, 所以存在子列$\{X_{k_j}\}$和$X_0 \in D$, 使得

$$\lim_{j\to\infty} X_{k_j} = X_0.$$

由f的连续性知$f(X_0) = M$.

同理可证存在$Y_0 \in D$, 使得$f(Y_0) = m$.

Theorem

$\mathbb{R}^n$中有界闭集D上的连续函数$f(X)$必在D一致连续.

Proof. 反证法, 设$f(X)$在D上不一致连续, 则存在$\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意$\frac{1}{m}$, 存在$X_m, Y_m \in D$,满足$|X_m - Y_m| < \frac{1}{m}$但有

$$|f(X_m) - f(Y_m)| \geq \varepsilon_0.$$

由于D列紧,故(不失一般性)存在子列$\{X_{m_k}\}$和$\{Y_{m_k}\}$和$X, Y \in D$, 使得$\lim\limits_{k\to\infty} X_{m_k} = X$, $\lim\limits_{k\to\infty} Y_{m_k} = Y$. 由于$\lim\limits_{k\to\infty} |X_{m_k} - Y_{m_k}| = 0$, 故$X = Y$.

由f的连续性可得

$$\lim_{k\to\infty} f(X_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} f(Y_{m_k}) = f(X).$$

因此

$$\lim_{k\to\infty} |f(X_{m_k}) - f(Y_{m_k})| = 0.$$

这与$|f(X_{m_k}) - f(Y_{m_k})| \geq \varepsilon_0$矛盾.

Theorem

设$f(X)$是道路连通（或开、或闭区域）$D \subseteq \mathbb{R}^n$上的连续函数, 如果$X_1, X_2 \in D$且$f(X_1) < f(X_2)$, 则对于任意满足$f(X_1) < c < f(X_2)$实数c,存在$X_0 \in D$, 使得$f(X_0) = c$.

Proof. 若D是闭区域，则存在开区域U使得$D=\overline{U}$.
由连续性，存在X_1的邻域$B(X_1)$和X_2的邻域$B(X_2)$，使得

$$f(X)<c,\ \forall X\in B(X_1),\quad f(X)>c,\ \forall X\in B(X_2).$$

因为$D=\overline{U}$,故$B(X_1)\cap U\neq\emptyset$,$B(X_2)\cap U\neq\emptyset$. 任取$P_1\in B(X_1)\cap U, P_2\in B(X_2)\cap U$, 则$f(P_1)<c<f(P_2)$.

练习2

设f在$\mathbb{R}^n$上连续，若$\lim\limits_{|X|\to+\infty} f(X)$存在(有限)，则$f$在$\mathbb{R}^n$上一致连续.

设$f(x,y)$是$\mathbb{R}^2$上的连续函数, $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=+\infty$, 证明: $f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上有最小值.

范数公理：

(i) $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|X\| \geqslant 0$且$\|X\| = 0 \iff X = O$;

(ii) $\|\lambda X\| = |\lambda|\|X\|, \ \forall X \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$;

(iii) (三角不等式) $\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|X\|, \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$;

则称$\|X\|$为$\mathbb{R}^n$上的**范数**. 给定范数的线性空间称为**赋范线性空间**.

$\mathbb{R}^n$中范数的例子

$$\|X\|_2 = (\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 < p < +\infty)$$

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|X\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|$$

设$f(x)$为$\mathbb{R}^n$上的连续函数, 满足:(1) 对于$X \neq 0$, $f(X) > 0$; (2)对于任意$X \in \mathbb{R}^n$和常数$\lambda > 0$,成立$f(\lambda X) = \lambda f(X)$. 则存在正常数$M_1, M_2$,使得$M_1|X| \leq f(X) \leq M_2|X|$.

Example

$\mathbb{R}^n$上的任一范数$\|\cdot\|$与欧氏范数$|\cdot|$等价，即存在常数$M>0$，使得

$$M^{-1}|X| \leq \|\cdot\| \leq M|X|, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

证明思路：

（1）利用标准正交基证明范数是$\mathbb{R}^n$上的连续函数（实际上是利普希茨连续的）；

（2）连续函数在单位球$\{X \in \mathbb{R}^n \mid |X| = 1\}$上是有界的.

满足三个条件的函数$d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$称为$\mathbb{R}^n$的**距离函数**：

(1) $d(X,Y)\geqslant 0$, 等号成立当且仅当$X=Y$;

(2) $d(X,Y)=d(Y,X)$;

(3) $d(X,Z)\leqslant d(X,Y)+d(Y,Z)$.

这时称$d(X,Y)$为X,Y之间的距离.

注 $\mathbb{R}^n$的任意范数$\|\cdot\|$可诱导一个距离: $d(X,Y)=\|X-Y\|$.

Example

设$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上连续，则对于任意$r \geqslant 0$，存在$(x,y) \in \mathbb{R}^2$使得$x^2+y^2=r^2$，且$f(x,y)=f(-x,-y)$.

证明 若$r=0$显然成立．设$r>0$，令

$$g(x,y)=f(x,y)-f(-x,-y),$$

则$g(r,0)=-g(-r,0)$．如果$g(r,0)=0$，显然$(r,0)$使结论成立．若$g(r,0)\neq 0$，不妨设$g(r,0)>0$．则$g(-r,0)<0$．在$\mathbb{R}^2$上考虑半圆周$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2=r^2, y\geqslant 0\}$．显然$S$是$\mathbb{R}^2$上的道路连通集．由$g$的连续性和介值定理知存在$(x,y)\in S$使得$g(x,y)=0$，即

$$f(x,y)=f(-x,-y).$$

Theorem

设$f(X)$在连通子集$D \subseteq \mathbb{R}^n$上连续, 如果$X_1, X_2 \in D$且$f(X_1) < f(X_2)$, 则对于任意满足$f(X_1) < c < f(X_2)$的实数c, 存在$X_0 \in D$, 使得$f(X_0) = c$.

证明 （反证）假设$f(X) \neq c, \forall X \in D$. 令

$$X_1 \in A = \{X \in D |\ f(X) < c\}, \quad X_2 \in B = \{X \in D |\ f(X) > c\}.$$

显然$A \cap B = \emptyset, A \cup B = D$.

下证: A, B都是D的相对开子集.

事实上, 由于f连续，故对任意$X \in A$, 则存在X 的开邻域U_X,
使得当$Y \in U_X \cap D$时, 有$f(Y) < c$, 即$U_X \cap D \subseteq A$.

同理对任意$X \in B$, 存在X的开邻域U_X, 使得$U_X \cap D \subseteq B$.

从而D不连通, 矛盾!

第10.4节

向量值函数的连续性

$$F(X) = (F_1(X), \cdots, F_m(X)),\quad F(B(X_0,\delta)) \subseteq B(F(X_0),\varepsilon)$$

Theorem

设D是$\mathbb{R}^n$中的开集, 则$F: D \to \mathbb{R}^m$连续 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^m$中的任意开集G, 其原象集$F^{-1}(G) = \{X \in D |\ F(X) \in G\}$是$\mathbb{R}^n$的开子集.

练习5

设f为$\mathbb{R}^n$上的函数,则f连续 $\Leftrightarrow$ 对于$\mathbb{R}^n$中任意子集D,有$f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)}$.

任取$F(D)$中一个点列$\{Y_k\}$, 则存在$\{X_k\} \subseteq D$, 使得$Y_k = F(X_k)$, $k = 1, 2, \cdots$.

因为D是紧集, 所以D是列紧集, 从而点列$\{X_k\}$有收敛于D中点的子列$\{X_{k_l}\}$. 设$\lim\limits_{l\to\infty} X_{k_l} = X_0 \in D$, 令$Y_0 = F(X_0)$, 则$Y_0 \in F(D)$.

因为F连续，所以$\lim\limits_{l\to\infty} Y_{k_l} = \lim\limits_{l\to\infty} F(X_{k_l}) = F(X_0) = Y_0$.

因此$F(D)$中任意点列都有收敛到$F(D)$中点的子列，即知$F(D)$是$\mathbb{R}^m$ 中的列紧集，从而为紧集.

证明 设$\{G_\alpha|\ \alpha\in I\}$是$F(D)$的一个开覆盖，由连续性知$\{F^{-1}(G_\alpha)\}$是$D$的相对开覆盖. 设$\mathbb{R}^n$的开集$O_\alpha$使得$F^{-1}(G_\alpha)=O_\alpha\cap D$，则$\{O_\alpha\}$是$D$的开覆盖，由$D$是紧的，从中存在有限个开集$O_i$，$i\in J\subseteq I$,即$D\subseteq\bigcup_{i\in J}O_i$. 注意到

$$F^{-1}(\bigcup_{i\in J}G_i)=\bigcup_{i\in J}F^{-1}(G_i)=\bigcup_{i\in J}(O_i\cap D)=D\cap(\bigcup_{i\in J}O_i)=D.$$

故$F(D)\subseteq\bigcup_{i\in J}G_i$,即$\{G_i|\ i\in J\}$构成$F(D)$的有限子覆盖.

Theorem

设$D \subseteq \mathbb{R}^n$为连通集，若$F: D \to \mathbb{R}^m$是连续映射,则其象集$F(D)$是$\mathbb{R}^m$中的连通集.

证明 (反证) 假设$F(D)$不连通，则存在$\mathbb{R}^m$的开子集O_1，O_2，使得$A = F(D) \cap O_1 \neq \emptyset, B = F(D) \cap O_2 \neq \emptyset$，$F(D) = A \cup B$，$A \cap B = \emptyset$.

因F连续，故$U_i = F^{-1}(O_i \cap F(D)) = F^{-1}(O_i)$都是$D$的相对开子集，并且$U_i \neq \emptyset$，$U_1 \cap U_2 = \emptyset$，$D = U_1 \cup U_2$，从而$D$不连通，矛盾.