专 稿

曲线论

——陈省身先生《微积分及其应用》之第三讲(2001.10.26)

编者按 本刊总第94,95期刊出了白承铭同志‘数学大师的风采——记陈省身先生讲授《微积分及其应用》’一文的最初部分对这次系列演讲的简介,以及陈先生演讲的第一讲。应读者要求,总第96期刊出了第二讲。本期继续刊出第三讲。讲稿由白承铭、宋敏、云保奇、赵志根等同志记录整理,未经陈先生寓目。刊出时只作了个别文字性处理。

(Ⅰ)平面曲线

我想这几次跟大家讲一点微积分在几何上的应用。这是非常要紧的发展。那么,从最简单的情况开始,我们就讲平面上的曲线。

假设平面上有一条曲线 $X(t)=(x_1(t),x_2(t))$,用微积分的话呢,就是这条曲线有条切线。切线有个切矢量。对于切矢量,我们取这个矢量是单位矢量,它的长度是1,也就是取为单位切矢量。于是我们知道假使把坐标 x 表示成弧长 s 的函数的话,这就表示这个单位切矢量就是 x 对 s 的微分$\frac{dx}{ds}$,即单位切矢量为 $e_1=(\frac{dx_1}{ds},\frac{dx_2}{ds})$,$(e_1,e_1)=1$,$s$ 是弧长。那么怎么样研究这条切线呢?很简单,那就是有了一个单位矢量之后,并假设如果平面是定向的,即有一个转动的方向,那么它就有一个单位法向量,也就是跟它垂直的那个单位矢量。现在,我叫 e_1 是单位切矢量,e_2 是单位法矢量。于是要得到这条切线的性质,第一件事情就是把 e_1 这个函数对于 s 再求微分。那么再求微分之后,当然这是一个新的矢量。因为 e_1 是一个单位矢量,所以$(e_1,e_1)=1$。那么把它微分一下子,我们就得到$\frac{de_1}{ds}$同 e_1 垂直,所以它一定在法线的方向。因此,我们就有$\frac{de_1}{dx}$等于单位法矢量 e_2 的倍数。这个倍数是弧长的一个函数,我们叫 $k(s)$。这个倍数满足

$$\frac{de_1}{ds}=ke_2,\quad e_2\text{ 是单位法矢量},\quad (e_1,e_2)=0。$$

k 这个函数一般叫做曲率,是这条曲线在这个平面里头最要紧的一个性质,是弧长的一个函数。

习题 对于给定的曲线方程,给出曲率 k 的公式。(提示:k 是曲线方程的一阶和二阶微分的一个函数)

(Ⅱ)空间曲线

从平面曲线再进一步怎么样呢?我们看看空间的情形。假设我们现在有一条曲线是空间的曲线 $X(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$。在3维空间里有切线,所以这个空间的坐标 x,y 就表示为参数 t 的函数。这些东西你们大概都知道,我再温习一下子。所以 $X(t)$是一个矢量,它的分量就是点的坐标,而点是 t 的函数。于是它就作一条切线,这3个分量叫做 $x_i(t)(i=1,2,3)$。$X(t)$是一个矢量,是参数 t 的函数,它的3个分量就是把点的坐标表示为 t 的函数,那么怎么进行呢?

同样的方法就是对这条曲线用微积分。假定曲线有切线,并且在切线上面有单位矢量,即有单位切矢量。对曲线有个方向,一直这么走,沿着一个方向,比如说参数 t 是增加的一个方向。总而

言之,我们就有一个单位切矢量,叫它 e_1,那么跟平面同样的情况,把 e_1 这个函数对 s 再求微分,就等于说对 s 求二阶的微分。因为 e_1 是单位矢量,所以得到的这个微分跟 e_1 是垂的。而对于一条空间中的曲线,它的切线是一条,它的法线有无数个。其实经过这一点跟切线垂直的法线有无数个,那么其中有一个是$\frac{de_1}{ds}$,它是不完全确定的。由于同样的理由,我把这个方向的单位矢量叫做 e_2,那么它就是 ke_2,即可以写成$\frac{de_1}{ds}=ke_2$。e_2 是其中一条法线,我们叫它为主法线(principal normal),而 k 这个函数与平面的情形一样,叫做曲线的曲率,所以现在,我有一个切线的方向和一个主法线方向。在三维空间就有另外一个方向跟这两个方向垂直,我们通常叫它 binormal。总而言之,存在另外一个法线,所以它有两个法线。那么这两个法线所成的平面就是法平面。曲线是 1 维的,切线是 1 维的,所以法线是 2 维的,是个平面。那么有一个 $e_3=e_1\times e_2$,其中 $e_1\times e_2$ 是矢量积。对于两个方向的话,有一个确定的第三个方向是跟它们垂直的,并且使得 e_1,e_2,e_3 成一个正交系统。我们假定这个空间是定向的,右手,左手都有一个确定的方向。通常我们都用右手,所以就有一个确定的 e_3 满足$(e_i,e_j)=(\delta_{ij})$。

因此在研究三维几何的时候,这样的三个互相垂直的单位矢量所成的图形非常要紧。这是为什么呢?这样一个东西我叫它标架。你把一个标架搬到另一个标架的运动是完全确定的。那么三维空间最要紧的性质就是三维空间的运动。我们要研究的几何性质是经过运动不变的。所以就要知道什么时候你可以把这个东西搬到另外一个位置,什么时候它的位置相差在于一个运动,而标架就是这个运动解析的表示的方法。你要能够搬过去就表示这个标架搬到另外一个标架的运动是完全确定的。显然,只有一个运动并且一定有一个运动把一个标架变为另外一个标架。因为要研究空间经过运动不变的性质,所以解析的方法就是利用标架。

那么假使我现在有一条曲线,我不只有一个标架,这些标架是时间的函数,在那里运动。因此 e_i 这三个作为标架的矢量都是时间 t 的函数,于是我可求它的微分$\frac{de_i}{dt}$。$\frac{de_i}{dt}$是个矢量。因为(e_1,e_2,e_3)是个标架,所以任何一个矢量就可以写成 e_1,e_2,e_3 这 3 个矢量的线性组合。那么我把它稍微推广一点,就把它写成 de_i 等于 e_j 的线性组合:$de_i=\omega_{ij}e_k$。这个组合的系数是一次微分,这是因为我现在做了一下微分,由这函数便得到一次微分式,那么这样的一次微分式我叫它 ω_{ij},这就表示两个相邻的标架的关系。你有一个 e_i 的标架,旁边有个相邻的标架 e_i+de_i,那么 de_i 表为 e_i 的函数的时候,它的组合的系数就是一次微分式。ω_{ij}是一次微分式,在这里,我的指标 i,j 都是从 1 到 3,3 是我们空间的维数,所以 ω_{ij}一共有 9 个,i,j 每一个从 1 到 3,所以一共有 9 个。这 9 个一次微分式是有关系的,它不是完全任意的。这个关系就是 $\omega_{ij}+\omega_{ji}=0$。所以假使你把 ω_{ij}看成一个 3×3 的方阵的元素的话,这个方阵是反对称的。这一组方程很容易从 e_i,e_j 的内积等于 δ_{ij}得到:把这个关系$(e_i,e_j)=\delta_{ij}$微分的话,就立刻得到这一组性质。这就是说(ω_{ij})是一个 3×3 方阵的元素,这个方阵的元素都是一次微分式,并且这个方阵整个是反对称的,换句话说,这个方阵主角线上的元素是 0. 其它呢,由于反对称,有 $\omega_{12}=-\omega_{21}$等,是反对称的。

因此我们现在有一个单位切矢量,有一个主法矢量,还有一个与它们垂直的成一个标架的 $e_3=e_1\times e_2$(矢量积). 对于这个标架,我把它的三个方程都对弧长求函数(微分)。就可以把这个函数表示为 e_1,e_2,e_3 的一个线性组合。这个组合是这样的一组方程:第一个方程是 $de_1=ke_2$. 因为我们的方阵是反对称的,主对角线上的元素都是 0,所以 $\omega_{13}=0$. 但是其他的元素要注意 e_3 的位置,由于 e_1,e_2 选择的关系,ω_{13}是等于 0 的,因此 ω_{31}也等于 0。所以这个方阵写出来,就是我下面的 3 个方程:

$$\frac{de_1}{ds}=ke_2,\quad \frac{de_2}{ds}=-ke_1+\omega e_3,\quad \frac{de_3}{ds}=-\omega e_2.$$

这组方程是当年曲线论发展的时候最早的一组方程。我们通常叫它 Frenet 方程,Frenet 是法国的一个数学家。我想这是他的博士论文。他不一定是头一个给出这个方程,当时有几个人做出这个工作。从我讲的,你们可以看出来得这个方程并不太困难。因此我除了曲率以外,还有另一个函数 ω。ω 就是方程中的挠率(torison),也是弧长的函数,是表示空间的曲线在运动群下的性质。所以空间曲线有两个函数,一个是曲率,另一个是挠率。挠率就是描写它怎么样不是一条平面曲线,它是在空间弯曲的一个矢量。所以空间曲线是用两个函数来描写的,它们解析地描写这空间的性质。这两个函数显然很重要,因为它们要是等于 0 的时候,就表示了曲线很简单的性质。

要是 $k=0$ 的话,这曲线就成为直线。这很容易证明,我下面给出证明:因为 $k=0$,所以 $de_1=0$。因此单位切矢量 e_1 是一个常数,因为这样它的微分才等于 0。那么你把这个 $e_1=C$ 代入到 $e_1=\frac{dx}{ds}$ 中,再把它积分一下子就得到 x 是 s 的一次函数:$x=Cs$。所以这就是一条直线。反过来很容易能证明如果你有一条直线的话,它的曲率 k 是等于 0 的。因此 $k=0$ 代表曲线的最简单的性质,就是直线。

那么要注意的是在定挠率的时候,一定要 $k\neq 0$. 若是 $k=0$,于是 $\frac{de_1}{ds}=0$,也就是直线了。这时它就没有法子定主法线。一条直线跟它垂直的是一个平面,这个平面里头所有跟此直线垂直的方向都是有同样的性质,所以就没有主法线,因此也不能定挠率。挠率一定要在这点的曲率 $k\neq 0$ 的时候才有意义。

而当挠率等于 0 的时候,当然就是表示这条曲线是在平面上一条曲线。下面我也给了一个简单的证明。因为挠率这个函数是在 Frenet 公式的第三个公式里。所以由 $\omega=0$ 可知此时 e_3 是个常数的矢量。对于 e_3 这个常数矢量,由于 e_3 是一个法线,并且因为法线跟切线是永远垂直的,所以 e_3 跟$\frac{dx}{ds}$的内积是永远等于 0。因此 e_3 要是等于常数的话,我就可以把方程$(e_3,\frac{dx}{ds})=0$ 积分。因为 e_3 是一个常数,所以这积分就是 e_3 跟 x 的内积等于一个常数。因此它是一条平面曲线,于是 $\omega=0$ 表示曲线是个平面曲线。反过来,可以很容易证明平面曲线的挠率是 0,所以曲率和挠率两个函数都有简单的几何性质。

另外一种很有意思的曲线是 k 与 ω 都不为 0,但都是常数。那么在这个情形之下,可以证明曲线是个螺线。就是这样简单的微积分的应用在生物化学上有重要的意义。因为我们知道生物化学的一个主要的化合物是 DNA。DNA 是两条螺线,是个双螺线,这是生物上非常基本之现象。在生物上,这样的曲线就跑出来了。因此,曲线论在生物化学中有重要的应用,也就是大家要知道曲线的性质如何影响 DNA 的化学性质,所以数学就很重要了。曲线的性质影响到化学的性质,尤其是在化学里头,有时候你把 DNA 切断了,它的性质就改变了。所以切断之后,数学性质就发生改变,它的化学性质也改变,讨论它们如何改变,这在 DNA 的研究及生物化学方面是非常基本的问题,大家做了很多的工作。现在拿一本微生物化学的书要翻开来的话,就看见有一个基本的公式,叫做 White 公式。White 是我的一个学生的学生,他做这个工作是他博士论文的一个结果。他运气很好,他这个结果变为生物化学的一个基本公式。我现在不打算讲这个结果。

(Ⅲ)Feuchll 不等式,Crofton 积分公式和 Fary-Milnor 定理

做这个几何研究的时候,有些重要性质要讨论。通常重要的性质往往是整体几何的性质,在曲线的情况也不是研究一小段的几何。我们现在把上面的这个叫做局部的几何,即研究一小段的几

何性质,这时 k,ω 都是弧长的函数,用它们研究它的性质,是怎么样弯曲。不过更重要的是研究整条曲线。

假使有一条曲线是封闭的,看这条曲线有什么样的性质。这里有个非常要紧的公式。对于这条封闭的曲线,每点有个曲率。因为封闭了,我就研究全曲率,即把这个曲率沿整条曲线求它的积分,于是就有所谓 Feuchll 公式 $\int_c kds \geq 2\pi$。就是说这个积分有个下界,一定是 2π。这个直觉讲起来就是如果你一点曲率都没有,这条曲线就直线走下去,是不会封闭起来。你要直线走下去能够封闭的话,总要把它弯过来,弯过来就要有曲率。那么如果能够弯过来,与原来地方对上来的话,那么曲率在整个曲线上的积分有一个固定的下界,这个下界是 2π。这就是所谓的 Feuchll 公式。

我要证明这个公式。为什么讲全曲率要有一个下界?证明这个公式的方法就是讨论这条曲线的单位切矢量,即在切线的方向的一个单位矢量。主要观念就是利用高斯映射(Gauss map)。

对于这样一个单位切矢量,在固定点取跟这个切矢量是平行的那些单位矢量,所以你有许多单位矢量是 $e_1(s)$,它是长等于 1 的一个矢量。所以你假使把它看成空间一个点,它就是在单位球上的一个点。因此你取一个单位球,将 $e_1(s)$看成单位球上的一个点,那么当你这个点沿原来的曲线走一圈的时候,$e_1(s)$在单位球上成一条曲线。这是高斯映射的意思,即所谓的高斯映射。这条曲线 $e_1(s)$在单位球上所成的曲线不是原来的曲线,换了一种了,因为它的方程是 $e_1(s)$,不是 $x(s)$。$e_1(s)$满足 :$\frac{d\sigma^2}{ds^2}=(\frac{de_1}{ds},\frac{de_1}{ds})=k^2$,$\sigma$ 是$e_1(s)$的孤长。

单位球面如果有一个大圆,那么这个大圆有一个极点,我叫它 y。也就是说,大圆是子午圆,y 是这个大圆的极点。把这个极点当成顶上的一点,那么曲线就有个高度,这个高度被取成是$y(x)$。是个内积。这个高度可以看成曲线上的一个函数,那么曲线在空间里就有了一个高度。

我们这曲线是封闭的,当然有个最高点,有个最低点。在最高点,因为它是最高的,显然它的切线是平的。在最低点,切线也是平的。所以就有两个临界点,一个是代表高度最高的,一个是最低的,而与 y 这个点垂直的那个大圆,一定跟单位球上的曲线相交。因为(y,dx)这个内积是 0。所以 y 跟球面的$e_1(s)$在一点相交。因此在单位球上的曲线跟这个单位圆相交。但是 y 是任意方向,所以我们球上的高斯映射的曲线是跟球上的什么圆都相交,这是因为 y 是任意一个点,于是 y 的那个子午圆交我们这条曲线。我想高斯曲线我叫它 γ,它跟 y 的子午圆相交,因此跟任意单位圆相交,这是很要紧的一个性质。所以 γ 这条曲线一定要相当长,它在球上不是一条任何的曲线,它在球上是一条跟所有的圆周(大圆)都相交的曲线。

那么我还是需要证明它有 2π 这个下界,下面来说明这个问题。我这条曲线 γ 是$e_1(s)$,叫同位圆。$e_1(s)$就是空间曲线的一个高斯映射,它是切线的方向在单位球上所成的曲线,而这条曲线叫做 γ,它跟球上的任何单位圆都相交。那么一般地,这条曲线相当长了,如果太短,它没有这个性质。说它有一个 2π 的下界,是 Crofton 公式 :$\iint = 4L$.

Crofton 的文章也很有意思,不是一个正式的数学文章。英国的百科全书(Encyclopaedia)请他写一篇文章,是关于几何概率的。他是在写(几何)概率的文章时候把他的结果写在里头了。这个结果很要紧,换句话说,就在平面上讲,曲线的长度可以表为跟它相交的直线的度量。长度,就是直线的度量,这个意思在探物学里,近代在医学都有应用。有时候,你身体上的东西,要问它有多大,也不能把人切开,是不好量的。于是就是用看相交这个东西的线作为度量,来量这个身体上的某一部分的大小。这一部分数学一般叫做积分几何,不是微分几何。积分几何就是研究这些积分的关系与性质。积分几何在医学上有很大的应用,有很多机器采用这理论。因为你要看人的病体,也不

能拿这个病体来量,就拿线射它,按射它的效果来看病的大小及其它的性质。这就是积分几何。

那么我现在说,$\iint = 4L$ 是 Crofton 公式,就是说球面上边也有几何,是球面几何。它的点我都知道,它的直线就是大圆。所以现在我在球面上有条曲线,跟所有大圆都相交。那么,这种直线的个数有一个量度,Crofton 公式讲,它是等于 4 倍它的量度。

Fouchll 公式是球面上 Crofton 公式的一个结果。因为 Crofton 公式说它的量度是 4 倍于它的四边路长,所以就利用这条曲线跟每一个大圆都相交的性质就得到 Feuchll 公式。因此问题就是说什么是球面上大圆的量度。球面上的大圆是球面上非欧几何的直线。而对于直线,我也有个量度(measure)。在球面上的量度很简单,这是因为球面上的直线跟极点有个简单的对偶关系:因为你有一个大圆,它有一个极点,因此这条直线跟这个极点有个对偶关系。于是这个大圆的量度就取为这个极点的量度。

所以我现在大概讲一讲怎么样证明球面上的 Crofton 公式。这个证明其实很简单,不过要小心一点,就是想法子换换坐标就行了。现在比方说,γ 这条曲线跟一个大圆相交,那么这个大圆可以换坐标。如果换坐标,由于 $e_1(s)$ 这条曲线跟这个大圆相交,而大圆有个极点 y,所以要换 y 的坐标。那么换坐标换什么呢?这个大圆与直线相交,而大圆是 2 维的空间,所以要有两个坐标。我就取这条曲线的弧长 s 作为一个坐标。

还缺一个坐标是什么呢?大圆有一个极点,这个极点是 y。显然 y 是与 e_1 垂直的,所以 y 一定在 e_2,e_3 所成的圆周上,这是因为 e_2,e_3 是跟 e_1 垂直的。因此 y 就是在 e_2,e_3 的圆周上,于是 y 就可以表为 $y = \cos\theta e_2(s) + \sin\theta e_3(s)$. 实际上,$y$ 是 e_2,e_3 的一个线性组合。又因为它是个单位矢量,所以可以写成这样的形状。因此 y 这点有两个坐标,我可以取为 s,θ。那么现在的问题是求 y 在这个面积元素(element area)的度量,是要把 y 这点的度量看成是大圆的度量。

通常这不难求。y 是一个点,你就求 dy。y 是在单位球上的一点,于是下面来求 dy。把这个 dy 写为跟 y 垂直的两个方向的函数,那么这两个单位矢量系数的外积就是 y 的度量。所以我现在这么做,e_1,e_2,e_3 是标架,它们三个矢量是互相垂直的单位矢量,它们也都是 s 的函数。所以我把它的公式写出来:

$$\frac{de_1}{ds} = a_2 e_2 + a_3 e_3, \quad \frac{de_2}{ds} = -a_2 e_1 + a_1 e_3, \quad \frac{de_3}{ds} = -a_3 e_1 - a_1 e_2$$

无论如何,这公式里头的系数成一个反对称的方阵。这就做下去,很简单地,如果算一算 dy,就得到 dy 一个公式:$dy = (-\sin\theta e_2 + \cos\theta e_3)(d\theta + a_3 ds) - e_1(a_1\cos\theta + a_3\sin\theta) ds$. 于是我们有

$$\text{面积元素} = (a_2\cos\theta + a_3\sin\theta) d\theta \wedge ds.$$

若命 $a_2 = \cos\tau$,$a_3 = \sin\tau$,则

$$\text{面积元素} = \cos(\tau - \theta) d\theta \wedge ds.$$

即最后 $\cos(\tau - \theta) d\theta \wedge ds$ 是球面上的面积元素。为了要求这个球面上的面积,求这个东西的重积分,也就是求这个式子的重积分。那么我数这个点的时候,是考虑完全绝对值,来求这个绝对值的这个重积分。我刚才假设有两个变数 s 跟 θ,那么就对它们来求积分。积分的时候先固定 s,取 cos 的绝对值来求积分。假使角度转一圈的话,$|\cos|$ 一共变了多少呢?cos 的绝对值的积分是 4。这是因为当 cos 从 0 到 π 时是从 1 到 -1,一共是 4 次 1,所以是 4。因此这样你就求到跟曲线相交的大圆度量,即有多少个大圆。这个度量是求这个重积分,把它算出来。算出来之后,你只要求一次对 θ 的积分就可以了,剩下的是曲线的弧长。所以 Crofton 问题就能从这个计算得到。

因此 Crofton 公式说 γ 这条曲线至少有多长。它把这个曲线跟任何大圆相交的性质表为一个

度量的性质,即有多长。由这个我就得到 Feuchll 定理。这是很漂亮的一个定理 :我们假使这个流形是封闭的,在 2 维的情形,就是封闭的曲线。对于封闭的曲线,它的总曲率有一个一定的下限。什么时候这个下限能达到?显然当这条曲线是平面曲线并且是一条完备(complete)曲线时是可以达到的。根据上面讨论也可以证明这个结论。

更有意思的一个结果是所谓的 Fray - Milnor 定理 :如果曲线 C 有结,则 $\int_C kds \geq 4\pi$。我想 Milnor 是近些年来美国最优秀的一个拓扑学者。他做这个定理的时候,就跟你们一样。上课时,老师谈到这个问题。他给出一个条件什么时候一条封闭的曲线能打成一个结。假使有结的话,显然我们推测需要曲率更多一些,因为打结就得转转。不过 Fray - Milnor 定理就是讲假使这个封闭的曲线有一个结的话,它的全曲率的积分至少为 4,所以全曲率一定就大于 4。

这个证明很简单,因为如果它小于 4 倍的话,一定有个方向,在这个方向上的高度只有一个极大跟一个极小点。所以我这条曲线一定是连接这个极大点与极小点的两个弧。那么中间就没有极大点和极小点,所以中间那些平行的平面跟曲线相交的话,都相交于两点。那么用一条线段把这两点连起来,于是它这曲线就围成一个区域。显然曲线就可以缩成一点,所以就不是结。所以如果这全曲率小于 4 的话,它这条曲线的结就可以解开。因此如果曲线有个结的话,它的全曲率一定$\geq$4。于是立刻得出来 Fray - Milnor 定理。

下面我讲讲与阵国才的工作的关系。陈国才的工作是讨论这个结,讨论不只一条曲线,可以有好几条曲线,即所谓 link 的研究,讨论什么时候这个 link 能绕过来曲率是挠率。这个问题物理学家很感兴趣,最近,做了很多这方面的工作。

不过,推广 Fary - Milnor 定理有个可能性,就是讨论切线的曲率跟挠率对于陈国才的不变式有什么影响。陈国才是研究曲线的对偶同调的性质跟微分式的关系,所以真正用在这个方面,你不见得能把这个结解开。但是有可能当曲线的曲率与挠率有某种性质的时候,他所定的这个不变式会等于 0。所以有些问题研究的时候可以想一想。如果有人听了 Harris 教授的课的话,他就在讲陈国才的工作。陈国才是近几年来中国产生的一个非常优秀的数学家。他没有名,不愿与媒介有什么关系,一个人做他的领域,做非常特殊,非常创新的工作。

数学奖项

国际工业与应用数学联合会理事会设立苏步青奖

2003 年 7 月 7 日至 7 月 11 日在澳大利亚悉尼举行了第五届国际工业与应用数学大会。会后举行的工业与应用数学国际联合会理事年会上,由李大潜院士代表中国工业与应用数学学会于 2001 年提出的设立 *ICIAM* 苏步青奖的建议经讨论顺利通过。该奖的宗旨是 :奖励在数学对经济腾飞和人类发展的应用方面做出杰出贡献的人。从此 *ICIAM* 苏步青奖和另外四个奖项 :*ICIAM* 拉格朗日奖、*ICIAM* 柯拉兹奖、*ICIAM* 先锋奖、*ICIAM* 马克斯韦尔奖一起成为 *ICIAM* 的五个官方大奖之一。这是以我国数学家名字命名的第一个国际性数学大奖。从此苏步青先生的名字在国际数学舞台上与马克斯韦尔、拉格朗日等大师并列。苏步青奖每四年在国际工业与应用学大会上颁发一次,得奖者不超过一人。得奖者将获 1000 美元奖金和参加大会的一切费用资助。

在理事年会上,李大潜院士当选为国际工业与应用数学联合会理事会的五人领导成员之一。

据悉,中国工业与应用数学会将设立 *CSIAM* 苏步青奖,奖励在数学对我国经济、科技及社会发展的应用方面做出杰出贡献的工业与应用数学工作者。 (谭永基)