收敛数列的性质与极限的运算法则

数学分析I

第4讲

October 5, 2022

定理 1 (极限唯一性)

若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 则$a = b$.

用反证法或正面证明都可以. 证明中，先取N_1和N_2, 再令$N = \max\{N_1, N_2\}$, 这是规范严谨的表达. 对极限定义的应用熟练了之后，可以用简化的表述：因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 所以对于任给的$\varepsilon > 0$, 存在正整数$N$, 使得当$n > N$时，有$|x_n - a| < \varepsilon$且$|x_n - b| < \varepsilon$.

定理 2 (有界性)

收敛数列必有界, 即存在$M>0$, 使得$|x_n|\leqslant M$, $n=1,2,\cdots$.

找到收敛数列的一个界就可以，因此在证明中，取定正数ε.

判断题

判断下面的命题是否成立.

如果对任意$M > 0$, 都存在正整数n, 使得$|x_n| > M$, 那么对任意$M > 0$和任意正整数N, 都存在正整数$n > N$, 使得$|x_n| > M$.

(A) 成立

(B) 不成立

定理 3 (保序性)

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

(i) 若$a > b$, 则存在N, 当$n > N$时, 有$x_n > y_n$;

(ii) 若存在N, 当$n > N$时, 有$x_n \geqslant y_n$, 则$a \geqslant b$.

注意：本定理的(ii)中即使将条件$x_n \geqslant y_n$换成$x_n > y_n$, 也不能保证$a > b$. 读者可以自行举例予以验证.

教材中(ii)的证明是用反证法，借助(i)得到矛盾. 能正面证明(ii)吗？

推论 1

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

(i) 若$a > b$ (或$a < b$), 则存在N, 当$n > N$时, 有$x_n > b$ (或$x_n < b$);

(ii) 若存在N, 当$n > N$ 时, 有$x_n \geqslant b$ ($x_n \leqslant b$), 则$a \geqslant b$ (或$a \leqslant b$).

显然, 这是定理3中$y_n \equiv b$的特殊情形. 当$b = 0$时, 推论中(i)的陈述也称为保号性.

定理 4 (四则运算法则)

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. 则有

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$.

如果$b \neq 0$, 则进一步有

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$.

极限的四则运算法则表明, 收敛数列的极限运算可以与加、减、乘、除四则运算交换次序进行, 需要注意的是与除法运算换序时分母的极限不能为0. 这里强调一点: 参与运算的数列必须是收敛数列. 例如, 写 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sin n$是不对的.

(ii)的证明中，

$$|x_ny_n - ab| = |x_ny_n - ay_n + ay_n - ab| \leqslant |y_n| \cdot |x_n - a| + |a| \cdot |y_n - b|$$

的技巧是需要体会和掌握的. (iii)也可以直接证明.

两个发散数列加、减、乘、除得到的数列可以是发散的也可以是收敛的，得不出结论. 读者可以进一步考虑, 两个数列中如果一个是收敛的, 另一个是发散的, 那么两者加、减、乘、除得到的数列敛散性会怎样?

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)\\
=\ &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+n}\\
=\ &0+0+\cdots+0=0
\end{aligned}$$

的做法对吗？

判断下面的命题是否成立.

如果对任意发散数列$\{y_n\}$, 数列$\{x_n + y_n\}$都发散，则数列$\{x_n\}$收敛.

(A) 成立

(B) 不成立

例 1

设$k, m \in \mathbb{N}^*$且$k \leqslant m$, a_i, b_i都是与n无关的常数且$a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. 令

$$x_n = \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \cdots + b_m}, \ n = 1, 2, \cdots.$$

求数列$\{x_n\}$的极限.

在应用极限运算法则时，常先进行恒等变形. 解决本题的关键是改写

$$x_n = \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \cdots + b_m} = n^{k-m} \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \cdots + \dfrac{a_k}{n^k}}{b_0 + \dfrac{b_1}{n} + \cdots + \dfrac{b_m}{n^m}}.$$

应用极限四则运算法则的例题

例 2

设$a > 0$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$.

本题$a > 1$的情形在2.1节中已经讨论了，$a = 1$的情形直接就得到结果了，而借助极限运算法则，可以将$0 < a < 1$的情形化归到$a > 1$的情形.

在收敛数列中, 极限为0的数列具有特别重要的意义, 对此有下面的定义.

定义 1

极限为0的数列称为无穷小数列, 或称为无穷小量.

数列$\{x_n\}$是无穷小量当且仅当对任给的$\varepsilon > 0$, 存在正整数N, 当$n > N$时，有$|x_n| < \varepsilon$.

利用极限的四则运算法则容易得到收敛数列与无穷小量间如下的等价关系.

定理 5

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的充分必要条件为: $\{x_n - a\}$是无穷小量.

无穷小量乘有界量仍是无穷小量

下面这个定理在求极限时经常被用到, 可将其表述为“无穷小量乘有界量仍是无穷小量”.

定理 6

若$\{x_n\}$是无穷小量, $\{y_n\}$是有界数列, 则$\{x_n y_n\}$是无穷小量.

例如, 根据定理6可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \sin n = 0.$

判断下面的命题是否成立.

如果对任意发散数列$\{y_n\}$, 都有数列$\{x_n y_n\}$发散，则数列$\{x_n\}$不是无穷小量.

(A) 成立

(B) 不成立

判断下面的命题是否成立.

如果正数数列$\{x_n\}$是无穷小量，则存在正数数列$\{y_n\}$, 使得$\{y_n\}$是无穷小量且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=0$.

(A) 成立

(B) 不成立

收敛数列各项取绝对值得到的还是收敛数列

定理 7

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

利用不等式

$$\big||x_n| - |a|\big| \leqslant |x_n - a|$$

容易得到这个定理的证明. 需要指出的是$a \neq 0$时, 定理的逆命题不成立; 但是$a = 0$时, 其逆命题成立, 这表明$\{x_n\}$是无穷小数列与$\{|x_n|\}$是无穷小数列二者是等价的.