第四章 矩阵

黄利兵

数学科学学院

2022 年 11 月 13 日

主要内容

矩阵的加法

定义

设 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 都是数域 P 上的 $m\times n$ 矩阵, 定义矩阵

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}),$$

即把对应位置的元素相加. 称 $A+B$ 为 A 与 B 的和.

例

若 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$, 则 $A+B=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&6&5\end{pmatrix}$.

加法具有以下性质:

- 交换律: $A+B=B+A$;
- 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$;
- 零矩阵: 所有元素都为零的矩阵, 称为零矩阵, 记作 O. 易知 $O+A=A$;
- 负矩阵: 将矩阵 A 中每个元素变为它的相反数, 所得矩阵称为 A 的负矩阵, 记作 $-A$. 易知 $A+(-A)=O$.

矩阵的减法

定义

设 $A, B \in P^{m\times n}$, 定义 $A-B=A+(-B)$(其中 $-B$ 为 B 的负矩阵), 称 $A-B$ 为 A 与 B 的差.

由定义可知, 两个矩阵相减, 就是把对应位置的元素相减.

例

若 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, 则 $A-B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 5 & 4 & 7\end{pmatrix}$.

思考题

- (***) 设 n 阶方阵 A 的 (i,j) 元等于 $\cos((i-1)n+j)$, $1\le i,j\le n$. 是否存在秩为 1 的矩阵 B 和 C, 使得 $A=B+C$?
- (**) 设 n 阶方阵 A 的 (i,j) 元等于 $(i-j)^2$, $1\le i,j\le n$. 是否存在秩为 1 的矩阵 B 和 C, 使得 $A=B+C$?

矩阵的数乘

定义

对于 $k \in P$ 和 $A = (a_{ij}) \in P^{m\times n}$, 定义

$$kA = (ka_{ij}),$$

即将 A 中每个元素都乘以 k. 称 kA 为 k 与 A 的数量乘积, 简称数乘.

例

若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, 则 $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$.

数乘具有以下性质:

- $(kl)A = k(lA)$, $\forall k, l \in P$, $A \in P^{m\times n}$;
- $1A = A$, $\forall A \in P^{m\times n}$;
- $(k+l)A = kA + lA$, $\forall k, l \in P$, $A \in P^{m\times n}$;
- $k(A+B) = kA + kB$, $\forall k \in P$, $A, B \in P^{m\times n}$.

矩阵的乘法

定义

对于 n 维行向量 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 和 n 维列向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)'$, 定义

$$u\alpha = u_1 a_1 + u_2 a_2 + \cdots + u_n a_n.$$

即把相应位置的元素相乘再加起来.

定义

设 A, B 分别是数域 P 上的 $m \times n$ 矩阵和 $n \times r$ 矩阵. 定义 AB 为这样的 $m \times r$ 矩阵, 其 (i, j) 元等于 A 的第 i 行与 B 的第 j 列相乘. 因此, 当 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ 时, AB 的 (i, k) 元为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$.

例

若 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 矩阵, $X = (x_1, \cdots, x_n)'$ 是由未知元构成的 $n \times 1$ 矩阵, 则 AX 是 $m \times 1$ 矩阵, 它的第 i 行是 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. 这样, 若 $\beta = (b_1, \cdots, b_m)' \in P^{m\times 1}$, 则 $AX = \beta$ 就是我们在上一章讨论的线性方程组.

例

若 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, 则 $AB=\begin{pmatrix}2&-2\\5&-5\end{pmatrix}$, 且 $BA=\begin{pmatrix}-3&-3&-3\\3&3&3\\-3&-3&-3\end{pmatrix}$.

例

若 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $AB=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 且 $BA=O$.

从上面的例子可以看出, 矩阵的乘法不具有交换律.

- 当 AB 有意义时, BA 不一定有意义;
- 当 AB 和 BA 都有意义时, 它们不一定是同型矩阵;
- 当 A, B 都是 n 阶方阵时, AB 和 BA 也不一定相等.

乘法的性质

此外, 矩阵的乘法也不具有消去律: 当 $AB = O$ 时, 不一定有 $A = O$ 或 $B = O$.

命题

矩阵的乘法具有以下性质:

- 结合律:

$$(AB)C = A(BC), \quad \forall A \in P^{m\times n}, B \in P^{n\times r}, C \in P^{r\times s};$$

- 对数乘的交换律:

$$A(kB) = (kA)B = k(AB), \quad \forall k \in P, A \in P^{m\times n}, B \in P^{n\times r};$$

- 对加法的分配律:

$$A(B + C) = AB + AC, \quad \forall A \in P^{m\times n}, B, C \in P^{n\times r};$$

$$(A + B)C = AC + BC, \quad \forall A, B \in P^{m\times n}, C \in P^{n\times r};$$

证明.

- 结合律: 设 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{jk})$, $C=(c_{kl})$, 则 AB 的 (i,k) 元为 $d_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$, 从而 $(AB)C$ 的 (i,l) 元为 $\sum_{k=1}^{r}d_{ik}c_{kl}=\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}c_{kl}$.

  同时, BC 的 (j,l) 元为 $e_{jl}=\sum_{k=1}^{r}b_{jk}c_{kl}$, 从而 $A(BC)$ 的 (i,l) 元为

  $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_{jl}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}a_{ij}b_{jk}c_{kl}$.

  比较以上两个结果, 就得到 $(AB)C$ 与 $A(BC)$ 的对应元素都相等, 所以 $(AB)C=A(BC)$.
- 对数乘的交换律: 显然.
- 对加法的分配律: 以 $A(B+C)=AB+AC$ 为例. 设 A 的第 i 行为 u_i. 设 B, C 的第 j 列分别为 β_j, γ_j. 那么, $B+C$ 的第 j 列为 $\beta_j+\gamma_j$, 从而 $A(B+C)$ 的 (i,j) 元 $=u_i(\beta_j+\gamma_j)=u_i\beta_j+u_i\gamma_j$, 后者恰好是 AB 与 AC 的 (i,j) 元之和.

$\square$

定义

对角元全为 1, 而其他元素全为零的 n 阶方阵, 称为 n 阶单位矩阵, 记作 E_n 或 I_n, 在不致引起混淆的情况下也可记作 E 或 I.

容易验证, 对于 $m\times n$ 矩阵 A, 有

$$E_mA = AE_n = A.$$

在第二章我们已定义了矩阵的转置. 容易验证, 转置与加法、数乘以及乘法之间的关系如下

命题

- $(A+B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}, \forall A, B \in P^{m\times n}$;
- $(kA)^{\mathsf{T}} = kA^{\mathsf{T}}, \forall k\in P,\ A\in P^{m\times n}$;
- $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}, \forall A\in P^{m\times n},\ B\in P^{n\times r}$.

矩阵的多项式

定义

设 $A \in P^{n\times n}$. 将 r 个 A 乘起来, 所得矩阵称为 A 的 r 次方, 记作 A^r. 约定 $A^0 = E_n$. 又设 $f = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x]$, 称矩阵

$$a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E_n$$

为 A 的多项式, 记作 $f(A)$.

例

若 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$, 因此当 $f = x^2 - 4x + 1$ 时, 有 $f(A) = A^2 - 4A + E_n = O$.

思考题

(**) 设 $A \in P^{m\times m}$, $B \in P^{n\times n}$, $X \in P^{m\times n}$, $f \in P[x]$. 如果 $AX = XB$, 求证: $f(A)X = Xf(B)$.

矩阵的迹

定义

对于 $A=(a_{ij})\in P^{n\times n}$, 它的所有对角元之和

$$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

称为 A 的迹, 记作 $\mathrm{tr}(A)$.

命题

矩阵的迹具有以下性质:

- $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$;
- $\mathrm{tr}(kA)=k\cdot\mathrm{tr}(A)$;
- $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$;
- $\mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}})=\mathrm{tr}(A)$.

这里 $A,\ B\in P^{n\times n}$, $k\in P$.

证明.

其他性质都是明显的, 这里仅证明 $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$. 若 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, 则 AB 的 (i,k) 元为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$, 从而

$$\operatorname{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}.$$

同理

$$\operatorname{tr}(BA)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}.$$

容易看出两者相等, 而且结论对 $A\in P^{m\times n}$ 和 $B\in P^{n\times m}$ 成立. □

思考题

- (*) 设 $A\in P^{2\times 2}$, 求证: $A^2-\operatorname{tr}(A)A+\det(A)E_2=O$.
- (**) 若 $A, B, C\in P^{n\times n}$, 证明或否定: $\operatorname{tr}(ABC)=\operatorname{tr}(ACB)$.
- (***) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $AA^{\mathsf{T}}=A^2$, 求证: $A^{\mathsf{T}}=A$.

矩阵的秩

命题

设 $A, B \in P^{m\times n}$, 则有

$$秩(A+B) \le 秩(A \mid B) \le 秩(A) + 秩(B).$$

证明.

$A+B$ 的列向量是 A, B 的相应列向量之和, 因此 $A+B$ 的列向量组可被 $(A \mid B)$ 的列向量组线性表出, 秩$(A+B) \le$ 秩$(A \mid B)$.
又分别取 A, B 的列向量组的极大线性无关组 A_1, B_1, 那么, $(A \mid B)$ 的列向量组与 $A_1 \cup B_1$ 等价, 从而 秩$(A \mid B) =$ 秩$(A_1 \cup B_1) \le A_1 \cup B_1$ 中的向量个数, 即 秩(A) + 秩(B). □

思考题

(**) 在不等式 秩$(A+B) \le$ 秩(A) + 秩(B) 中, 等号何时成立?

命题

设 $A \in P^{m\times n}$, $B \in P^{n\times r}$, 则有

$$秩(AB) \le \min(秩(A), 秩(B)).$$

证明.

设 A 的列向量依次为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 则当 B 的第 k 列为 $(b_{1k}, b_{2k}, \cdots, b_{nk})'$ 时, 直接计算可知 AB 的第 k 列为 $b_{1k}\alpha_1 + b_{2k}\alpha_2 + \cdots + b_{nk}\alpha_n$.
因此, AB 的列向量组可被 A 的列向量组线性表出, 秩$(AB) \le$ 秩(A).
同理可证, AB 的行向量组可被 B 的行向量组线性表出, 秩$(AB) \le$ 秩(B). $\square$

思考题

- (****) 设 $A \in P^{n\times n}$, 求证: 秩$(A^n) =$ 秩(A^{n+1}).
- (****) 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 求证: 秩$(A^{\mathsf{T}}A) =$ 秩(A).
- (***) 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\beta \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, 证明线性方程组 $A^{\mathsf{T}}AX = A^{\mathsf{T}}\beta$ 一定有解.

行列式的乘法定理

定理

设 $A, B \in P^{n\times n}$, 则有 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

证明.

考虑准下三角矩阵 $C = \begin{pmatrix} A & O \\ -E_n & B \end{pmatrix}$, 它的行列式为 $\det(A)\det(B)$.

设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. 我们对 C 作如下的初等行变换: 先将第 $n+j$ 行的 a_{ij} 倍加到第 i 行, $1 \le i, j \le n$, 则左上角全变为零, 而在右上角, 第 i 行第 $n+k$ 列变为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$, 因此右上角变为 AB. 接下来, 将第 $n+i$ 行乘以 -1, 再交换第 i 行和第 $n+i$ 行, $1 \le i \le n$, 则 C 最终变为 $D = \begin{pmatrix} E_n & -B \\ O & AB \end{pmatrix}$.

易知上述初等变换不改变行列式, 所以 $\det(C) = \det(D)$, 即
$\det(A)\det(B) = \det(AB)$. □

思考题

(***) 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $AB = BA$, 求证: $\det(A^2 + B^2) \ge 0$.

可逆矩阵

定义

设 $A \in P^{n\times n}$. 如果存在 $B \in P^{n\times n}$ 使得 $AB = E_n$, 则称 A 为可逆矩阵, 这时称 B 为 A 的逆矩阵.

由定义可知, 若 A 可逆, 则有方阵 B 使得 $AB = E_n$, 取行列式可知 $\det(A)\det(B) = 1$, 所以 $\det(A) \neq 0$. 这表明, 行列式不为零是可逆的必要条件. 重要的是, 这也是充分条件.

命题

设 $A \in P^{n\times n}$ 且 $\det(A) \neq 0$, 则存在唯一的矩阵 B 使得 $AB = E_n$.

证明.

将 E_n 的第 j 列记作 ε_j, B 的第 j 列记作 β_j. 这样, $AB = E_n$ 等价于 $A\beta_j = \varepsilon_j$, $1 \leq j \leq n$. 由于 $\det(A) \neq 0$, 所以由 Cramer 法则可知, 对每个固定的 j, 线性方程组 $AX = \varepsilon_j$ 的解是存在且唯一的. 所以满足 $AB = E_n$ 的矩阵 B 存在且唯一. □

推论

设 $A \in P^{n\times n}$ 且 $\det(A) \neq 0$, 则也存在唯一的矩阵 C 使得 $CA = E_n$. 进一步, 这里的 C 与上一个命题中的 B 相等.

证明.

当 $\det(A) \neq 0$ 时, $\det(A^\mathsf{T}) \neq 0$, 由上一个命题知存在唯一的矩阵 C^T 使得 $A^\mathsf{T} C^\mathsf{T} = E_n$, 即 $CA = E_n$. 再利用结合律, 就得到
$C = C(AB) = (CA)B = B$. □

根据上面的讨论, 当 $\det(A) \neq 0$ 时, A 的逆矩阵 B 存在且唯一, 而且它满足 $AB = BA = E_n$. 反之, 满足 $AB = E_n$ 或 $BA = E_n$ 的方阵 B 就是 A 的逆矩阵. 从命题的证明可知, 若 A 的逆矩阵为 B, 则 B 的第 j 列 β_j 是线性方程组 $AX = \varepsilon_j$ 的解. 根据 Cramer 法则, β_j 中的第 i 个分量 (也就是 B 中的 (i, j) 元素) 等于 $d_{ij}/|A|$, 其中 d_{ij} 是把 A 的第 i 列换成 ε_j 所得的行列式, 也就是 A 中 (j, i) 元的代数余子式.

伴随矩阵

定义

设 $A=(a_{ij})\in P^{n\times n}$, 记 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}. 称矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵, 记作 A^*.

注

伴随矩阵的 (i,j) 元不是 a_{ij} 的代数余子式, 而是 a_{ji} 的代数余子式!

需要注意的是, 当 $\det(A)=0$ 时, A^* 也是有意义的. 不难发现, 当 A 的秩 $<n-1$ 时, 它的每个 $n-1$ 级子式都是 0, 所以 $A^*=O$; 而当 A 的秩 $\geq n-1$ 时, $A^*\neq O$.

根据伴随矩阵的定义, 我们可以把等式

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \det(A)\delta_{ij},$$
$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \det(A)\delta_{ij}$$

分别改写为矩阵乘法, 也就是

命题

$AA^* = \det(A)E_n$, $A^*A = \det(A)E_n$.

推论

当 $\det(A) \neq 0$ 时, A 的逆矩阵 B 可用 A 的伴随矩阵表示, 即 $B = \frac{1}{|A|}A^*$; 而且这时 $BA = E_n$.

由于当 A 可逆时, 逆矩阵存在且唯一, 以后我们将把 A 的逆矩阵记作 A^{-1}. 这样, Cramer 法则相当于是说, 当 A 为可逆方阵时, 线性方程组 $AX = \beta$ 有唯一解 $X = A^{-1}\beta = A^*\beta/|A|$.

例

求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

计算可知 $|A|=-1$, $A^*=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-1&2\\2&2&-3\end{pmatrix}$, 因此

$$A^{-1}=-A^*=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}.$$

思考题

(*) 如果 $A^{\mathsf{T}}=A$, 则称 A 为对称矩阵; 如果 $A^{\mathsf{T}}=-A$, 则称 A 为反对称矩阵. 如果可逆矩阵 A 是 (反) 对称的, 证明 A^{-1} 也是 (反) 对称的.

逆矩阵的性质

命题

若 A, B 都是 n 阶可逆矩阵, 则有

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

(2) $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$;

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

证明.

(1) 记 $C = A^{-1}$, 则 $AC = CA = E_n$, 可见 A 也是 C 的逆矩阵.

(2) 记 $C = A^{-1}$, 则 $CA = E_n$. 两端取转置得 $A^{\mathsf{T}}C^{\mathsf{T}} = E_n$, 可见 C^{T} 是 A^{T} 的逆矩阵.

(3) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E_n$, 所以 $B^{-1}A^{-1}$ 是 AB 的逆矩阵.

□

例

设 $A, B \in P^{n\times n}$ 且 $A-B$ 可逆, 求证: $A(A-B)^{-1}B = B(A-B)^{-1}A$.

证明.

将 $A-B$ 记为 C, 则 $A = B+C$, 待证式成为 $(B+C)C^{-1}B = BC^{-1}(B+C)$, 显然两端都等于 $BC^{-1}B+B$. □

思考题

- (**) 设 $A \in P^{n\times n}$. 如果非零多项式 $f \in P[x]$ 满足 $f(A) = O$, 则称 f 为 A 的一个零化多项式. 证明: 如果 A 有一个常数项不为零的零化多项式, 则 A 是可逆的.
- (**) 证明: 当 A 为上三角矩阵时, A 可逆当且仅当它的对角元全不为零, 而且它的逆矩阵仍是上三角矩阵.

命题

设 $A \in P^{m\times n}$, $U \in P^{m\times m}$, $V \in P^{n\times n}$. 如果 U, V 为可逆矩阵, 则有

$$秩(UA) = 秩(A) = 秩(AV).$$

证明.

记 $UA = B$. 前面已证过 $秩(B) = 秩(UA) \leq 秩(A)$. 注意 $A = U^{-1}B$, 所以又有 $秩(A) = 秩(U^{-1}B) \leq 秩(B)$. 因此 $秩(A) = 秩(B)$. 同理可证 $秩(A) = 秩(AV)$. □

思考题

- (***) 设 $A, B \in P^{n\times n}$ 可逆, 并且 $E_n - AB$ 也可逆. 证明以下矩阵都可逆:

$$E_n - BA, \quad A - B^{-1}, \quad (A - B^{-1})^{-1} - A^{-1}.$$

- (***) 设 $A \in P^{n\times n}$ 的伴随矩阵为 A^*, 证明 $\det(A^*) = \det(A)^{n-1}$.

矩阵的分块

前面我们已经有过对矩阵进行分割的想法. 例如

- 在定义矩阵 A 与 B 的乘法时, 我们把 A 分割成一个一个的行向量, 把 B 分割成一个一个的列向量, 分别让 A 中的每个行向量与 B 中的每个列向量相乘.
- 在证明秩的不等式 秩$(AB) \le$ 秩(A) 时, 我们发现 AB 的列向量可以被 A 的列向量组线性表出, 即

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix} \\
=&(b_{11}\alpha_1 + \cdots + b_{n1}\alpha_n, \cdots, b_{1r}\alpha_1 + \cdots + b_{nr}\alpha_n).
\end{aligned}
$$

- 在分析可逆矩阵的条件 $AB = E_n$ 时, 我们把 B 分成了 n 个列, 得到了等式

$$A(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_r).$$

定义

一般地, 若 $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_p$, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_q$, 则可以将 $m \times n$ 矩阵 A 划分为 pq 个小块

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,q} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,q} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{i,j}$ 为 $m_i \times n_j$ 矩阵, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$. 称 $A_{i,j}$ 为 A 的一个子矩阵或一个块, 称 $(A_{i,1} \quad \cdots \quad A_{i,q})$ 为一个块行, 类似可以定义块列.

例

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$ 和 $\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$ 是矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的两种不同分块方式.

分块矩阵的加法和数乘

如果把 $A, B \in P^{m\times n}$ 按照同样的规则分块, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,q} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{p,1} & \cdots & B_{p,q} \end{pmatrix},$$

则显然有

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & \cdots & A_{1,q} + B_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1} + B_{p,1} & \cdots & A_{p,q} + B_{p,q} \end{pmatrix}.$$

即只要将对应的子矩阵相加.
类似地, 要将矩阵 A 乘以常数 k, 只需要将每个子矩阵都乘以 k.

分块矩阵的乘法

我们先看 $1 \times n$ 矩阵与 $n \times 1$ 矩阵的分块乘法. 如果 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_q$, 则可将 $1 \times n$ 矩阵 U 和 $n \times 1$ 矩阵 V 都分为 q 块

$$U = (U_1, U_2, \cdots, U_q), \quad V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdots \\ V_q \end{pmatrix},$$

其中 U_i 是 $1 \times n_i$ 矩阵, V_j 是 $n_j \times 1$ 矩阵. 由于 UV 就是将 U 和 V 中的相应元素相乘再相加, 容易验证

$$UV = U_1 V_1 + U_2 V_2 + \cdots + U_q V_q,$$

也就是说, 只要分块的方式一致, 那么, 分块的 $1 \times n$ 矩阵与 $n \times 1$ 矩阵相乘, 相当于把对应位置的块相乘, 再加起来. 形式上, 这与普通矩阵的乘法完全一样.

再看 $f\times n$ 矩阵 F 与 $n\times g$ 矩阵 G 的分块乘法. 仍设 $n=n_1+n_2+\cdots+n_q$, 这次我们把 F 按列分为 q 个块, 把 G 按行分为 q 个块

$$F=(F_1,F_2,\cdots,F_q),\quad G=\begin{pmatrix}G_1\\G_2\\\cdots\\G_q\end{pmatrix},$$

其中 F_i 是 $f\times n_i$ 矩阵, G_j 是 $n_j\times g$ 矩阵. 显然 FG 是 $f\times g$ 矩阵, 其中的 (i,j) 元是用 F 的第 i 行与 G 的第 j 列相乘得到; 由上一页的结果, 它也等于 F_1G_1, F_2G_2, $\cdots$, F_qG_q 的 (i,j) 元之和. 因此

$$FG=F_1G_1+F_2G_2+\cdots+F_qG_q.$$

可见, 在这种情形, 分块乘法与普通乘法在形式上也是完全一致的.

最后来看一般情形. 若 $m=m_1+m_2+\cdots+m_p$, $n=n_1+n_2+\cdots+n_q$, $r=r_1+r_2+\cdots+r_s$, 我们可分别将 $A\in P^{m\times n}$ 和 $B\in P^{n\times r}$ 划分为 pq 和 qs 个小块

$$A=\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,q} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,s} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{q,1} & \cdots & B_{q,s} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{i,j}$ 是 $m_i \times n_j$ 矩阵, $B_{j,k}$ 是 $n_j \times r_k$ 矩阵. 注意 A 的列的分法与 B 的行的分法一致. 易知 AB 可划分为 ps 个小块

$$AB=\begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,s} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{p,1} & \cdots & C_{p,s} \end{pmatrix},$$

其中 $C_{i,k}$ 是块行 $\begin{pmatrix} A_{i,1} & \cdots & A_{i,q} \end{pmatrix}$ 与块列 $\begin{pmatrix} B_{1,k} \\ \cdots \\ B_{q,k} \end{pmatrix}$ 的乘积, 为 $m_i \times r_k$ 矩阵. 由上一页的结果

$$C_{i,k}=A_{i,1}B_{1,k}+\cdots+A_{i,q}B_{q,k},$$

可见, 分块乘法与普通矩阵的乘法在形式上完全一样.

例

若 $\mathbf{u}=(u_1,\cdots,u_n)$ 是 $1\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵且 B 的行向量依次为 $\mathbf{b}_1$, $\cdots$, $\mathbf{b}_n$, 则有

$$uB=(u_1,\cdots,u_n)\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1\\ \cdots\\ \mathbf{b}_n\end{pmatrix}=u_1\mathbf{b}_1+\cdots+u_n\mathbf{b}_n.$$

例

计算 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}$ 的乘积.

解

把 A, B 都划分成四个 2×2 的小块, 可以记 $A=\begin{pmatrix}E_2&O\\A_1&E_2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}$.

解 (续)

我们有 $AB=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ A_1B_1+B_3 & A_1B_2+B_4 \end{pmatrix}$. 直接计算可知

$$A_1B_1+B_3=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad A_1B_2+B_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

因此 $AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

例

若 $A\in P^{k\times k}$, $B\in P^{r\times r}$, $C\in P^{r\times k}$ 且 A, B 可逆, 求 $T=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

设它的逆矩阵为 $S=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$, 其中 X, W 分别为 k 阶和 r 阶方阵. 由 $TS=E_{k+r}$ 可得

$$AX=E_k, \quad AY=O, \quad CX+BZ=O, \quad CY+BW=E_r.$$

解得 $X=A^{-1}$, $Y=O$, $Z=-B^{-1}CA^{-1}$, $W=B^{-1}$. 因此, T 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$.

思考题

(**) 设 A, B, C 为 n 阶方阵, 求 $\begin{pmatrix} E & A & B \\ O & E & C \\ O & O & E \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

在上面的例题中取 $C=O$, 就得到: 当 A, B 都可逆时, 矩阵 $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$.

定义

一般地, 当 A_1, A_2, $\cdots$, A_k 都是方阵时, 我们把形如

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$$

的矩阵称为准对角矩阵, 记作 $\mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_k)$.

用数学归纳法不难证明

命题

准对角矩阵的行列式等于各对角块的行列式之积, 因此 $\mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_k)$ 可逆当且仅当每个对角块都可逆, 且逆矩阵为 $\mathrm{diag}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \cdots, A_k^{-1})$.

初等矩阵

现在我们来建立矩阵的初等变换与矩阵乘法的联系. 把仅有 (i,j) 元为 1, 其他所有元素都为 0 的矩阵记作 E_{ij}.

定义

由单位矩阵 E_n 经过一次初等变换得到的矩阵称为*初等矩阵*.

不难得到, 初等矩阵仅有三类:

- 交换 E_n 中的第 i 行与第 j 行 $(i \neq j)$, 所得矩阵为 $E_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, 我们把它记作 $P(i,j)$. 注意, 交换 E_n 中第 i 列与第 j 列所得的矩阵仍为 $P(i,j)$.
- 用非零常数 c 乘 E_n 的第 k 行, 所得矩阵为 $E_n + (c-1)E_{kk}$, 我们把它记作 $P(k(c))$. 用非零常数 c 乘 E_n 的第 k 列, 所得矩阵仍为 $P(k(c))$.
- 把 E_n 中第 j 行的 μ 倍加到第 i 行 $(i \neq j)$, 所得矩阵为 $E_n + \mu E_{ij}$, 我们把它记作 $P(i,j(\mu))$. 注意, 把 E_n 中第 i 列的 μ 倍加到第 j 列, 所得矩阵仍为 $P(i,j(\mu))$.

初等矩阵的性质

容易验证 $E_{ij}E_{jk} = E_{ik}$, 而当 $j \neq l$ 时 $E_{ij}E_{lk} = O$. 利用这一点我们来证明

命题

初等矩阵是可逆的，而且其逆矩阵是同类型的初等矩阵.

证明.

把 $(E_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})(E_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})$ 展开, 就会发现它等于 E_n, 从而 $P(i,j)P(i,j) = E_n$. 也就是说, $P(i,j)$ 的逆矩阵仍是 $P(i,j)$.
$P(k(c))$ 是对角矩阵, 它的逆矩阵显然是 $P(k(1/c))$.
注意 $(E_n + \mu E_{ij})(E_n - \mu E_{ij}) = E_n$, 就证明了 $P(i,j(\mu))$ 的逆矩阵为 $P(i,j(-\mu))$. □

初等变换与初等矩阵

注意 $E_{ij}A$ 是这样的矩阵, 它的第 i 行就是 A 的第 j 行, 而其他行全为零; 矩阵 AE_{ij} 的第 j 列是 A 的第 i 列, 而其他列全为零. 利用这一点, 我们来证明

定理

对矩阵 $A \in P^{m\times n}$ 作初等行变换, 相当于在 A 左边乘以相应的 m 阶初等矩阵; 对 A 作初等列变换, 相当于在 A 右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

证明.

仅证明初等行变换的情形.
$P(i,j)A = (E_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})A = A - E_{ii}A - E_{jj}A + E_{ij}A + E_{ji}A$, 可见结果相当于把 A 的第 i 行和第 j 行互换.
$P(k(c))A = (E_n + (c-1)E_{kk})A = A + (c-1)E_{kk}A$, 结果相当于把 A 的第 k 行乘以 c.
$P(i,j(\mu))A = (E_n + \mu E_{ij})A = A + \mu E_{ij}A$, 结果相当于把 A 的第 j 行的 μ 倍加到第 i 行. $\square$

矩阵可逆的充要条件

定理

设 $A \in P^{n\times n}$, 则以下三个条件等价:

(1) A 可逆;

(2) A 可经一系列初等行变换变为单位矩阵 E_n;

(3) A 可写为一些初等矩阵的乘积.

证明.

(1)$\Longrightarrow$(2): 我们知道 A 可经初等行变换化为阶梯形. 当 A 可逆时, $|A| \neq 0$, 这个阶梯形矩阵的行列式也不为零, 表明它是对角元全不为零的上三角矩阵 (秩为 n). 继续对它作初等行变换, 可以将它变为约化阶梯形, 即 E_n;
(2)$\Longrightarrow$(3): 对 A 作初等行变换, 相当于在它左边乘以相应的初等矩阵. 现在 A 可经一系列初等行变换变为单位矩阵, 说明有初等矩阵 $P_1, \cdots, P_t$, 使得 $P_t \cdots P_1 A = E_n$, 因而 $A = P_1^{-1} \cdots P_t^{-1}$ 是初等矩阵的乘积;
(3)$\Longrightarrow$(1): 注意初等矩阵都是可逆的, 行列式均不为零, 它们的乘积的行列式仍不为零. □

上述定理提供了一种求逆矩阵的方法. 若 A 是 n 阶可逆矩阵, 我们对它作一系列初等行变换, 将它变为单位矩阵, 即有初等矩阵 $P_1, \cdots, P_t$, 使得

$$P_t \cdots P_1 A = E_n.$$

可见 $A^{-1} = P_t \cdots P_1 = P_t \cdots P_1 E_n$. 这说明, 对 E_n 作同样的初等行变换, 就得到了 A 的逆矩阵. 我们把这个过程写为

$$\begin{pmatrix} A & E_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_n & A^{-1} \end{pmatrix}.$$

例

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

对 $\begin{pmatrix} A & E_3 \end{pmatrix}$ 作如下初等行变换 (这里用初等矩阵来记录变换过程): $P(2,1(-2))$, $(P(3,1(-2))$, $P(2,3(-2))$, $P(1,2(2))$, $P(3,2(-2))$, $P(1,3(2))$, $P(3(-1))$, 则左边变为 E_n, 而右边变为 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

同理可以证明, 若 A 是 n 阶可逆矩阵, 则它可经一系列初等列变换变为单位矩阵, 即有初等矩阵 $Q_1, \cdots, Q_s$, 使得

$$AQ_1 \cdots Q_s = E_n.$$

可见 $A^{-1} = Q_1 \cdots Q_s = EQ_1 \cdots Q_s$. 因此, 只要对 $\begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix}$ 作初等列变换, 将它的上半部分变为 E_n, 则下半部分就是 A^{-1}.

例

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

对 $\begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix}$ 作如下初等列变换: $P(1,2(-2))$, $P(1,3(-2))$, $P(2,1(2))$, $P(3,1(8))$, $P(3,2(5))$, $P(2(-1))$, $P(3(-1))$, 就求得 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

例

若 $A=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-3\\1&-2\end{pmatrix}$, 求 BA^{-1}.

解

对 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ 作初等列变换, 把上半部分变为 E_2, 则下半部分就是 BA^{-1}.

对于某些特殊矩阵, 也可利用其运算特点来求逆.

例

若 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解

我们把 A 写为 $E-2J$. 利用 $J^3=O$ 就得到 $A^{-1}=E+2J+4J^2$.

矩阵的相抵

定义

设 $A, B \in P^{m\times n}$. 如果 A 能经一系列初等变换变为 B, 则称 A 与 B 相抵, 记作 $A \sim B$.

由定义可知

命题

相抵是矩阵之间的一种等价关系, 即它满足反身性, 对称性和传递性.

由初等变换与初等矩阵之间的关系, 我们有

命题

设 $A, B \in P^{m\times n}$, 那么, A 与 B 相抵, 当且仅当存在 m 阶和 n 阶可逆矩阵 U, V, 使得 $A = UBV$.

相抵标准形

我们还可以把第三章介绍的相抵标准形重新叙述为

定理

若 $A \in P^{m\times n}$ 的秩为 r, 则存在 m 阶可逆方阵 U 和 n 阶可逆方阵 V, 使得
$A = U\begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix} V.$

思考题

- (***) 设 $A \in P^{m\times n}$ 的秩为 r, 证明存在两个秩为 r 的矩阵 $S \in P^{m\times r}$ 和 $T \in P^{r\times n}$, 使得 $A = ST$(这称为矩阵 A 的满秩分解).
- (****) 若 n 阶方阵 A, B 满足 秩$(ABA) =$ 秩(B), 求证: 存在 n 阶可逆方阵 P, 使得 $PAB = BAP$.
- (***) (Sylvester 不等式) 设 $A \in P^{m\times n}$, $B \in P^{n\times r}$, 求证:
秩$(AB) \geq$ 秩$(A) +$ 秩$(B) - n$.

分块初等变换

定义

对于一个分块矩阵, 如下的三种操作称为分块初等行变换

- 交换两个块行的位置;
- 将某一块行左乘一个可逆矩阵;
- 将某一块行左乘一个矩阵所得的结果加到另一块行上.

每一种分块初等行变换都是若干个初等行变换的复合.

- 交换两个块行的位置, 可以通过若干次交换两行来实现;
- 将某一块行左乘一个可逆矩阵, 相当于左乘一系列初等矩阵, 也就相当于对该块行作一系列初等行变换;
- 将某一块行左乘一个矩阵, 所得矩阵的每一行都是原块行中这些行向量的线性组合, 把这个结果加到另一块行上, 自然也相当于若干次初等行变换的复合.

分块初等列变换可以类似定义, 它与分块初等行变换统称分块初等变换.

定义

将单位矩阵适当分块后, 作一次分块初等变换所得的矩阵, 称为分块初等矩阵.

由于分块矩阵的乘法与普通矩阵的乘法在形式上是一致的, 不难证明: 作分块初等行变换, 相当于左乘相应的分块初等矩阵; 作分块初等列变换, 相当于右乘相应的分块初等矩阵.

我们以两个块行和两个块列的分块矩阵为例, 验证一下上述结论.

由单位矩阵 $\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$ 作一次分块初等变换, 得到的分块初等矩阵有以下五种情形:

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U & O \\ O & E_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & V \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_m & O \\ W & E_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_m & Z \\ O & E_n \end{pmatrix}.$$

其中 U, V 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵.

分别用这些分块初等矩阵左乘 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ (其中 $A \in P^{m\times m}$, $D \in P^{n\times n}$), 依次得到

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} U & O \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UA & UB \\ C & D \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ VC & VD \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ W & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C+WA & D+WB \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_m & Z \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+ZC & B+ZD \\ C & D \end{pmatrix}.$$

可见, 左乘分块初等矩阵, 等于作相应的分块初等行变换.

思考题

(**) 对于分块方阵, 每一种分块初等行变换会怎样改变它的行列式?

应用举例

例

若 A, D 为可逆矩阵, 求 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

将第一块行左乘 $(-CA^{-1})$ 的结果加到第二块行, 可将左下角变为零; 再将第一块行左乘 A^{-1}, 第二块行左乘 D^{-1}, 就可将它变为单位矩阵. 同样的这些变换将单位矩阵变成了 $\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$, 这就是要求的逆矩阵.

与前面的方法相比, 这种方法操作起来更简便. 但教材中未介绍分块初等变换, 建议采用矩阵乘法的形式来书写解答过程:

由于 $\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \\ & E \end{pmatrix}$, 所以该矩阵的逆矩阵为 $\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$.

例

设 $A, B, C, D \in P^{n\times n}$, 且 A 可逆, $AC = CA$, 求证: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$.

解

在左端分块矩阵中, 将第一块行的 $(-CA^{-1})$ 倍加到第二块行, 则第二块行变为 $(O \quad D - CA^{-1}B)$. 这时得到一个准上三角矩阵, 其行列式为

$$|A| \cdot |D - CA^{-1}B| = |A(D - CA^{-1}B)| = |AD - ACA^{-1}B|.$$

再利用 $AC = CA$, 就得到左端行列式等于 $|AD - CB|$.

思考题

- (*) 如何用矩阵乘法来书写上面例题的解答?
- (***) 在上面的例题中, 如果去掉 A 可逆的条件, 结论是否还成立? 如果结论成立, 该如何证明?