函数极限存在的判别准则

数学分析I

第8讲

October 17, 2022

本节中的某些定理类似于数列的相应定理, 其中证明过程基本相同的定理的证明将被省略.

定理 1 (两边夹定理)

设函数$f(x), g(x), h(x)$满足下列条件:

(i) 在$x \to \alpha$相应的某“空心邻域”上恒有$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$;

(ii) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = A$,

则$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = A$.

两边夹定理在一些英文教材中也称为“Sandwich Theorem”

THEOREM 4 The Sandwich Theorem

Suppose that $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ for all x in some open interval containing c, except possibly at $x = c$ itself. Suppose also that

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L.$$

Then $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

（图片取自Thomas’ Calculus）

两边夹定理的示意图

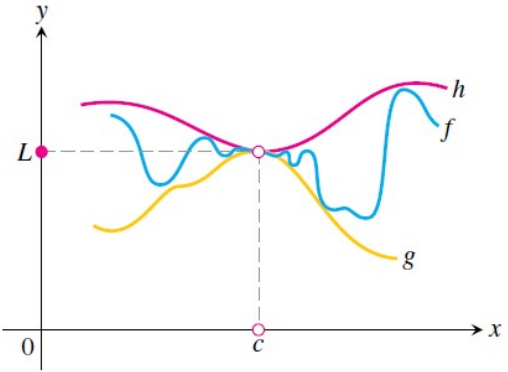
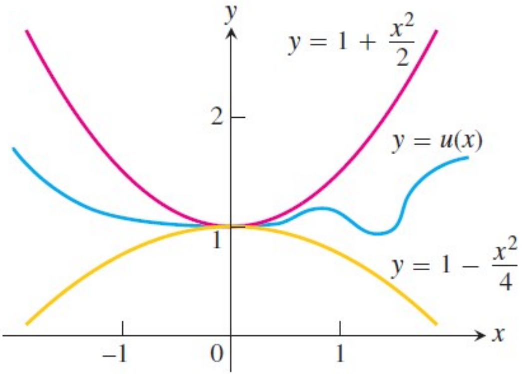


FIGURE 2.9 The graph of f is sandwiched between the graphs of g and h.

（图片取自Thomas' Calculus）

两边夹定理的示意图



（图片取自Thomas' Calculus）

例 1

求证 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$

注意：本例中的极限是一个重要极限，它的等价形式是 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$ 今后可以利用它们计算函数的极限.

由数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$，用数列极限与函数极限的定义不难证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{[x]}\right)^{[x]}=\mathrm{e}.$ 再由两边夹定理可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$ 最后用变量替换的方法得到 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$

下面这个定理叙述了函数极限和数列极限之间的关系, 被称为海涅定理或归结原则.

定理 2 (海涅定理)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$的充分必要条件是对任何数列$\{x_n\}: x_n \to x_0\ (n\to\infty)$且$x_n \neq x_0,\ n = 1, 2, \cdots$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

充分性的证明使用的是反证法，从正面证明难以入手，然后通过构造数列来导致矛盾. 要理解和掌握这种逐项构造数列的方法.

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在0点的某空心邻域U中有定义，对任意$x \in U$，都有$\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) = 0$，则$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

(A) 成立

(B) 不成立

应用海涅定理的例题

例 2

试证狄利克雷函数$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ 在任何点x_0都没有极限.

这里应用了有理数和无理数在实数中的稠密性，对于任意实数x_0, 都存在有理数数列趋于x_0，也存在无理数数列趋于x_0. 同理可知狄利克雷函数$D(x)$在任何点x_0都没有左极限与右极限.

应用海涅定理的例题

例 3

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$.

借助海涅定理，可以考虑通过函数极限来计算数列极限. 在学习了导数之后，我们有洛必达法则和泰勒公式这样强大的工具来计算函数极限.

定理 3 (海涅定理)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充分必要条件是对任何数列$\{x_n\}$: $x_n \to x_0$ $(n\to\infty)$且$x_n \neq x_0$, $n=1,2,\cdots$, $\{f(x_n)\}$都收敛.

必要性由定理2就得到了.

为证明充分性，由定理2知只需证明存在A, 使得对任何数列$\{x_n\}: x_n \to x_0$ $(n\to\infty)$且$x_n \neq x_0$, $n=1,2,\cdots$, $\{f(x_n)\}$都收敛于A.

证明思路是取定一个满足条件的数列$\{x_n\}$, 记$A=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, 再任取一个满足条件的数列$\{x_n'\}$, 去证明$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=A$.

所用的一个技巧是将$\{x_n\}$与$\{x_n'\}$分别作为一个数列的奇数项子列与偶数项子列，从而建立起联系.

定理 4 (柯西收敛原理)

函数$f(x)$在点x_0有极限的充分必要条件为: 对任何$\varepsilon > 0$, 都存在$\delta > 0$, 使当$0 < |x - x_0| < \delta$及$0 < |x' - x_0| < \delta$时, 有$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

充分性的证明中，教材的做法是：任意取定一个满足条件$x_n \to x_0 (n \to \infty)$且$x_n \neq x_0 (\forall n \in \mathbb{N}^*)$的数列$\{x_n\}$, 证明数列$\{f(x_n)\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, 用函数极限定义来证明$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. 学习了海涅定理的另一种形式（定理3）之后，在证明了数列$\{f(x_n)\}$收敛之后，用定理3就直接得到了$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在.

作为本节的结束我们指出，与数列的单调收敛定理相比，函数在某个定点的极限并没有相应的结论. 如符号函数sgn x在点0的邻域内是单增有界的，但是在点0没有极限. 然而单侧极限有对应的结论.

设$f(x)$在(a,b)递增，那么对任意$x_0 \in (a,b)$, $f(x)$在x_0处有左、右极限，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

设$f(x)$在(a,b)递增，那么 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$存在与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$存在的充分必要条件分别是什么？