2.1 数列极限的定义

一、基本方法

1. 用$\varepsilon-N$定义证明数列的极限主要用适当放大$|x_n-a|$的方法. 不妨假设$\varepsilon>0$充分小，限定N足够大，适当放大$|x_n-a|$. 要点是适当放大得到$|x_n-a|\leqslant y_n$, 这里y_n以0为极限，不等式$y_n<\varepsilon$容易求解. 例如，如果当$n>N_1$时有$|x_n-a|\leqslant \dfrac{C}{n^p}$, 其中$C$和$p$都是正的常数，则取$N=\max\left\{N_1,\left[\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}\right]\right\}$, 当$n>N$时，就有

$$|x_n-a|\leqslant \frac{C}{n^p}<\varepsilon.$$

例 1 按定义证明$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

证 注意到

$$(n!)^2=(1\cdot n)(2\cdot(n-1))\cdots(k\cdot(n-k+1))\cdots(n\cdot 1).$$

$1\leqslant k\leqslant n$时, $k\cdot(n-k+1)\geqslant n$. 故有

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1\cdot n)(2\cdot(n-1))\cdots(k\cdot(n-k+1))\cdots(n\cdot 1)\\ &\geqslant \underbrace{n\cdot n\cdots n}=n^n.\end{aligned}$$

或者

$$\sqrt[n]{n!}\geqslant\sqrt{n}.$$

于是

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

所以对任意$\varepsilon>0$, 取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$, 则当$n>N$时, 就有$\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon$. 由定义知$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$. □

2. 证明数列发散主要有以下方法.

(1) 用极限定义的否定证明：对于任何实数, 数列的极限都不是该实数.

(2) 使用反证法. 假设数列收敛, 引出矛盾.

例 2 证明数列$\{\sin n\}$发散.

证 反证. 设数列$\{\sin n\}$收敛, 极限值记为a, 于是对$\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在正整数$N$, 使得当$n > N$时, 有$|\sin n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$. 对任何正整数$k$, 由于$\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{4}\right]$, $\left[2k\pi + \frac{5\pi}{4}, 2k\pi + \frac{7\pi}{4}\right]$区间长度都大于1, 故存在正整数$n_k \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{4}\right]$, $m_k \in \left[2k\pi + \frac{5\pi}{4}, 2k\pi + \frac{7\pi}{4}\right]$. 取$k = N$, 那么$n_k > N$, 从而$|\sin n_k - a| < \frac{1}{2}$, 由$\sin n_k \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$可见$a > 0$; 同理由$m_k > N$得$|\sin m_k - a| < \frac{1}{2}$, 从$\sin m_k \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$可知$a < 0$. 矛盾! □

注 用这里的解题思想，可以不使用反证法，直接用极限定义的否定来证明.

二、例题

例 3 设$x_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$ 且$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = a.$$

举例说明逆命题不真.

证 由$x_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$, 知道$a \geqslant 0$.

(i) 若$a > 0$, 那么$\forall \varepsilon > 0$, 不妨设$\varepsilon < a$, $\exists N_1$, $\forall n \geqslant N_1$, 有$a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1}}{x_n} < a + \frac{\varepsilon}{2}$. 所以对于任意的$n > N_1$时, 有

$$x_{N_1} \cdot \left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_1} < x_n = x_{N_1} \cdot \frac{x_{N_1+1}}{x_{N_1}} \cdot \cdots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} < x_{N_1} \cdot \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N_1},$$

即

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt[n]{\frac{x_{N_1}}{\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}} < \sqrt[n]{x_n} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt[n]{\frac{x_{N_1}}{\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}},$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt[n]{\frac{x_{N_1}}{\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}}=a-\frac{\varepsilon}{2}>a-\varepsilon\ \ ,\ \ \lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt[n]{\frac{x_{N_1}}{\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}}=a+\frac{\varepsilon}{2}<a+\varepsilon,$$

所以$\exists N_2, n>N_2$时,

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt[n]{\frac{x_{N_1}}{\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}}>a-\varepsilon,\text{并且}\ \left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt[n]{\frac{x_{N_1}}{\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{N_1}}}<a+\varepsilon.$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$, 则$\forall n>N$, 有$|\sqrt[n]{x_n}-a|<\varepsilon$, 于是$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a$.

(ii)当$a=0$时, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $\forall n\geqslant N$, 有$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 所以对于任意的$n>N$有

$$\sqrt[n]{x_n}<\sqrt[n]{\frac{x_N}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^N}}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\to\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\ n\to\infty.$$

类似的知道存在$\bar N$, $\forall n>\bar N$, 有$\sqrt[n]{x_n}<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=0$.

逆命题不真. 反例: $x_n=\begin{cases}1, & n\text{奇},\\ 4, & n\text{偶},\end{cases}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1$, 而$\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$不收敛. □

点评 对于给定的$\varepsilon>0$, 找N时, 可以分为多步寻找. 这正体现了找N时, ε的给定性(确定性).

2.2 收敛数列的性质与极限的运算法则

一、基本方法

1. 用四则运算法则求极限.

2. 用无穷小量的性质求极限.

例 1 求下列各极限*:*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}\qquad(|a|<1,|b|<1)$*;*

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right)\qquad(a>1)$*.*

解 (1)

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-a^{n+1})(1-b)}{(1-a)(1-b^{n+1})} = \frac{1-b}{1-a}.$$

(2) 记$x_n = \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \cdots + \frac{n}{a^n}$, 则$ax_n = 1 + \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2} + \cdots + \frac{n}{a^{n-1}}$, 相减得

$$(a-1)x_n = \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^{n-1}}\right) - \frac{n}{a^n} = \frac{1-\frac{1}{a^n}}{1-\frac{1}{a}} - \frac{n}{a^n}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$, 故有

$$\lim_{n\to\infty} (a-1)x_n = \frac{1-0}{1-\frac{1}{a}} - 0 = \frac{a}{a-1},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \cdots + \frac{n}{a^n}\right) = \frac{a}{(a-1)^2}.$$

□

二、例题

例 2 设$\left\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\}$收敛. 证明$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

证 令$x_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 并设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 则得

$$nx_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$(n-1)x_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

两式相减后所得的等式两边再除以n, 得

$$\frac{a_n}{n} = x_n - x_{n-1} + \frac{x_{n-1}}{n}.$$

所以,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} x_{n-1} + \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1}}{n} = 0.$$

□

点评 我们一般习惯于从简单的表达式出发, 计算出复杂的表达式. 本题相反, 已知条件中的表达式复杂, 结论中的表达式简单. 遇到这种情况, 可以考虑引入新的记号代替已知条件中的复杂表达式, 计算出结论中的表达式, 而后, 再做进一步分析.

例 3 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1) = ab.$$

证 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 从而可以设$x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. 利用2.1节的例题5可以知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}{n} = 0.$$

由于

$$\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n} = ab + a\frac{\beta_1 + \cdots + \beta_n}{n} + b\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} + \frac{\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n},$$

下面只需要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_1\beta_n + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n} = 0$ 即可.

由于$\{\beta_n\}$有界, 所以存在$M > 0$, 使$|\beta_n| \leqslant M$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$知对于任意的$\varepsilon > 0$, $\exists N$, 当$n > N$时有$|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$, 于是有

$$\left|\frac{\alpha_1\beta_n + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}\right| \leqslant \frac{|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_N|}{n}M + \varepsilon\frac{n-N}{n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_N|}{n} = 0$, 所以对于上述$\varepsilon > 0, \exists \bar{N}, \forall n > \bar{N}$, 有$\dfrac{|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_N|}{n} < \dfrac{\varepsilon}{M}$. 取$N' = \max\{N, \bar{N}\}$, 则$\forall n > N'$时, 有

$$\left|\frac{\alpha_1\beta_n + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}\right| < 2\varepsilon.$$

根据定义知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1\beta_n + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n} = 0. \qquad \square$$

点评 利用无穷小量与一般的收敛数列之间的转化关系, 将关于收敛数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$的命题, 转化为关于无穷小量$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$的命题, 使证明变得简单明晰. 这种处理方法是数学分析中常用的方法.

2.3 数列敛散的判别定理

一、基本方法

1. 用两边夹定理证明或者求数列极限.

2. 用单调收敛定理证明数列收敛.

3. 用柯西收敛原理证明数列收敛和发散.

例 1 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k}$.

证 因为

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} &\geqslant \frac{n\cdot n+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\frac{3n^2+n}{2(n^2+n)}\to\frac{3}{2},\ n\to\infty,\\ \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} &\leqslant \frac{n\cdot n+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}=\frac{3n^2+n}{2(n^2+1)}\to\frac{3}{2},\ n\to\infty.\end{aligned}$$

由两边夹定理可以知道$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k}=\dfrac{3}{2}$. □

点评 此题目数列的通项是n项和, 求和的项数随着变量n变化, 不能应用四则运算法则. 四则运算法则仅能推广到有限项和与积的情况. 遇到此类问题可以考虑应用两边夹定理, 或者先写出数列通项的递推关系式再做进一步分析.

例 2 利用单调收敛定理判定数列$x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$的收敛性.

解 因为

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-(2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n})=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<0,$$

所以$\{x_n\}$递减. 又因为

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}},$$

所以

$$x_n-x_1=(x_n-x_{n-1})+\cdots+(x_2-x_1)>\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}-1>-1.$$

由此得$x_n>x_1-1=-2$, 根据单调收敛定理知$\{x_n\}$收敛. □

例 3 给定数列$\{a_n\}$, 记$A_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}|a_{k+1}-a_k|$, $n=2,3,\cdots$. 证明若数列$\{A_n\}$有界, 则数列$\{a_n\}$收敛.

证 显然$\{A_n\}$单调递增, 由$\{A_n\}$有界, 所以$\{A_n\}$收敛.

由Cauchy准则可以知道: $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N$ 与$p\in\mathbb{N}^+$, 有

$$|A_{n+p}-A_n|<\varepsilon,$$

所以

$$|a_{n+p}-a_n|\leqslant\sum_{k=n}^{n+p-1}|a_{k+1}-a_k|=A_{n+p}-A_n<\varepsilon.$$

由Cauchy准则知道$\{a_n\}$收敛. □

二、例题

例 4 设对任何正整数n, 都有$0<x_n<1$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=1$当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}=1$.

证 “$\Leftarrow$”. 因为对任何正整数n, 都有$0<x_n<1$, 所以$x_n>x_n^2$, $n=1,2,\cdots$, 于是有

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}<\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}<1.$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}=1$, 故由两边夹定理得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=1$.

"$\Rightarrow$". 由柯西不等式得$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\leqslant n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$, 于是有

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2\leqslant\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}.$$

因为对任何正整数n, 都有$0<x_n<1$, 所以

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}<1.$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=1$得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2=1$, 从而由两边夹定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}=1.$$

□

例 5 设$\{a_n\}$是一个正数数列，且数列$\{n^2a_n\}$有界，令$x_1=1$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n^2+a_n}$, $n=1,2,\cdots$, 证明：数列$\{x_n\}$收敛.

证 由$\{a_n\}$是一个正数数列和$x_1=1$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n^2+a_n}$容易看到$x_n>0$, $n=1,2,\cdots$, 再由$x_{n+1}=\sqrt{x_n^2+a_n}>\sqrt{x_n^2}=x_n$可见$\{x_n\}$严格递增. 因为数列$\{n^2a_n\}$有界，所以存在$M>0$, 使得对任意正整数$n$，都有$a_n\leqslant\frac{M}{n^2}$. 因为

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n^2+a_n}-x_n=\frac{a_n}{\sqrt{x_n^2+a_n}+x_n}<\frac{a_n}{2x_n}\leqslant\frac{a_n}{2},\ n=1,2,\cdots.$$

所以就有

$$\begin{aligned}x_n&=\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)+x_1<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{2}+x_1\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{M}{2k^2}+x_1\\&<\ \sum_{k=1}^{n-1}\frac{M}{2(k-1)k}+x_1<\frac{M}{2}+x_1.\end{aligned}$$

由此可见$\{x_n\}$有上界，根据单调收敛定理知$\{x_n\}$收敛. □

例 6 设$x_1=a$, $x_2=b$, $x_{n+2}=\dfrac{x_n+x_{n+1}}{2}$, $n=1,2,\cdots$. 证明数列$\{x_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 由$x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}+x_n}{2}$得$x_{n+2}-x_{n+1}=\dfrac{x_n-x_{n+1}}{2}$, 于是

$$x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)=(-\frac{1}{2})^2(x_n-x_{n-1})=\cdots=(-\frac{1}{2})^n(x_2-x_1).$$

从而

$$x_n=x_1+\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1})=x_1+\sum_{k=2}^{n}(-\frac{1}{2})^{k-2}(x_2-x_1)=x_1+\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{1-(-\frac{1}{2})}(x_2-x_1).$$

由此即得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_1+\frac{1-0}{1-(-\frac{1}{2})}(x_2-x_1)=\frac{x_1+2x_2}{3}.$$

□

点评 如果数列的通项由递推关系式给出, 一般先判断数列的单调性, 具有单调性后再判定有界性, 二者也可能同时交叉进行. 如果数列不具有单调性, 一般应改用柯西原理判定数列的收敛性. 本题数列不具备单调性, 虽然可以用柯西原理证明数列收敛, 但是, 考虑到题目还需要求出极限值, 而本题的递推关系式两边取极限是得不到极限值的. 故而, 只能力图写出数列通项的具体表示式.

2.4 函数极限的定义

一、基本方法

1. 按定义证明函数在给定点的极限主要用适当放大$|f(x)-A|$的方法：限定δ足够小，适当放大$|f(x)-A|$.

2. 用左右极限考察函数在给定点的极限.

例 1 按定义证明下列各极限:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2+x-12}=\frac{6}{7}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x_0}$.

证 (1) 对于$x \neq 3$, 有

$$\left|\frac{x^2-9}{x^2+x-12}-\frac{6}{7}\right|=\frac{|x-3|}{7|x+4|}.$$

限定$0<|x-3|<1$, 那么$|x+4|>6$, 于是

$$\left|\frac{x^2}{x^2+x-12}-\frac{6}{7}\right|<\frac{|x-3|}{42}.$$

所以$\forall \varepsilon>0$, 取$\delta=\min\{1,42\varepsilon\}$, 那么$\forall x: 0<|x-3|<\delta$, 有$\left|\dfrac{x^2-9}{x^2+x-12}-\dfrac{6}{7}\right|<\varepsilon$. 根据定义可知$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2+x-12}=\dfrac{6}{7}$.

(2) 仅对$x_0\neq 0$的情况进行证明, $x_0=0$的情况略去. 当$x\neq x_0$时有

$$|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}|=\frac{|x-x_0|}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{xx_0}+(\sqrt[3]{x_0})^2}=\frac{|x-x_0|}{\left(\sqrt[3]{x}+\frac{\sqrt[3]{x_0}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2}\leqslant\frac{4|x-x_0|}{3\sqrt[3]{x_0^2}}.$$

所以$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}\varepsilon$, 那么$\forall x: 0<|x-x_0|<\delta$, 有$|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}|<\varepsilon$. 根据定义知$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x_0}$. □

点评 (2)题用不等式$\left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}\right|\leqslant\sqrt[3]{|x-x_0|}$更简便一些, 不需要分情形讨论.

例 2 求极限: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin|x|}{x}$.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1.$$

左、右极限不相等. 所以, 极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin|x|}{x}$不存在. □

二、例题

例 3 证明对任意$x_0\in\mathbb{R}$, 均有$\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$, 其中$R(x)$是黎曼函数.

证 对任给的$\varepsilon > 0$, 我们来考察x_0的空心邻域$(x_0-1, x_0)\cup(x_0, x_0+1)$中的点$x$处的函数值$R(x)$. 若$x$是无理数, 则$R(x) = 0$; 若$x$为有理数, 设$x = \dfrac{q}{p}$ (其中p, q互素, p是正整数, q是整数), 则$R(x) = \dfrac{1}{p}$. 但在空心邻域$(x_0-1, x_0)\cup(x_0, x_0+1)$中, 使得$\dfrac{1}{p} \geqslant \varepsilon$的有理数$x = \dfrac{q}{p}$只有有限多个. 因此存在$\delta \in (0,1)$使得空心邻域$N(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$中不包含这些数. 于是当$0 < |x-x_0| < \delta$时, 无论$x$是有理数还是无理数, 总有$|R(x)-0| = R(x) < \varepsilon$. 按定义知$\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0$. □

2.5 函数极限的性质与运算法则

一、基本方法

1. 用四则运算法则求极限.

2. 用变量替换求极限.

3. 用重要极限$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$求极限.

4. 用无穷小量的性质求极限.

例 1 求下列各极限*:*

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} \qquad (m, n \in \mathbb{N}^*)$*;*

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

解 (1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\cdots+\sqrt[n]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\cdots+\sqrt[m]{x}+1)} = \frac{n}{m}.$$

(2)

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}} = 1.$$

□

点评 分母的极限不存在或者极限为零时,不能直接利用四则运算法则, 需要先进行适当的处理. 比如为了去除零因子进行因式分解、根式有理化; 为了去除无穷大量, 分子分母同时除以x的相同幂次.

例 2 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\dfrac{\pi x}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 (1) 做变换$x-1=y$.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{y\to 0}y\cot\frac{\pi y}{2}=\frac{2}{\pi}\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{2}}\cdot\lim_{y\to 0}\cos\frac{\pi y}{2}=\frac{2}{\pi}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\sin x=0.$ □

二、例题

例 3 求极限: $\lim\limits_{x\to 0}\left(2[x]+\dfrac{\mathrm{e}^{1/\mathrm{x}}+2}{\mathrm{e}^{2/\mathrm{x}}+1}\right)$.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\left(2[x]+\frac{\mathrm{e}^{1/\mathrm{x}}+2}{\mathrm{e}^{2/\mathrm{x}}+1}\right)=2\lim_{x\to 0^+}[x]+\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{-1/\mathrm{x}}+2\mathrm{e}^{-2/\mathrm{x}}}{1+\mathrm{e}^{-2/\mathrm{x}}}=0-0=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(2[x]+\frac{\mathrm{e}^{1/\mathrm{x}}+2}{\mathrm{e}^{2/\mathrm{x}}+1}\right)=2\lim_{x\to 0^-}[x]+\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{1/\mathrm{x}}+2}{\mathrm{e}^{2/\mathrm{x}}+1}=-2+2=0.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(2[x]+\frac{\mathrm{e}^{1/\mathrm{x}}+2}{\mathrm{e}^{2/\mathrm{x}}+1}\right)=0.$$

□

2.6 函数极限存在的判别准则

一、基本方法

1. 用两边夹定理证明或者求函数的极限.

2. 用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$和$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$求极限.

3. 海涅定理的应用有以下基本方法.

(1) 证明函数的极限不存在.

(2) 通过函数的极限求数列的极限.

4. 用柯西收敛原理证明函数极限存在.

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^s}{a^x}=0 \quad (a>1, s>0).$

证 不妨设$x>1$. 因为$[x]^s\leqslant x^s<([x]+1)^s, a^{[x]}\leqslant a^x<a^{[x]+1}$, 所以

$$\frac{[x]^s}{a\cdot a^{[x]}}<\frac{x^s}{a^x}<\frac{([x]+1)^s\cdot a}{a^{[x]+1}}.$$

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^s}{a^n}=0$，根据函数极限的定义不难证明上式左右两端的极限为0, 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^s}{a^x}=0.$ □

例 2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1})^{\sqrt{n}}.$

解 令$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1})^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}})^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1+x_n}{1-x_n})^{\frac{1}{x_n}},$$

所以,利用海涅定理先求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+x}{1-x})^{\frac{1}{x}}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1})^{\sqrt{n}}=\lim_{x\to 0}(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{1}{x}}.$$

令$y=\dfrac{2x}{1-x}$, 则$\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{2}{y}$. 于是

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\frac{2x}{1-x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{1+\frac{2}{y}}=\lim_{y\to 0}(1+y)\cdot\lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^2=\mathrm{e}^2.$$

因而,

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1})^{\sqrt{n}}=\mathrm{e}^2.$$ □

二、例题

例 3 设$f(x)$在$(x_0,x_0+\delta)$中有定义. 对$(x_0,x_0+\delta)$中任何严格递减的以x_0为极限的数列$\{x_n\}$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$. 证明$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

证 反证. 若$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq A$, 则存在$\varepsilon_0>0$, 使对任何$\eta\in(0,\delta)$, 都存在$x_\eta$, 使得

$$x_0<x_\eta<x_0+\eta,\text{并且}|f(x_\eta)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

取$\eta_1=\dfrac{\delta}{2}$, 就有x_1, 满足

$$x_0<x_1<x_0+\eta_1,\text{并且}|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

取$\eta_2=\min\left\{\dfrac{\delta}{3},x_1-x_0\right\}$, 就有$x_2$, 满足

$$x_0<x_2<x_0+\eta_2,\text{并且}|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

一直这样做下去，一般地，设x_{n-1}已取定，令$\eta_n=\min\left\{\dfrac{\delta}{n+1},x_{n-1}-x_0\right\}$, 就有$x_n$, 满足

$$x_0<x_n<x_0+\eta_n,\text{并且}|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

这样就得到数列$\{x_n\}$, 使得

$$x_0<x_n<x_0+\min\left\{\frac{\delta}{n+1},x_{n-1}-x_0\right\},\text{并且}|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

由$x_n<x_{n-1}$知$\{x_n\}$是$(x_0,x_0+\delta)$中的一个严格递减数列，由$0<x_n-x_0<\dfrac{\delta}{n+1}$知$\{x_n\}$以$x_0$为极限，而$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$, 这与假设矛盾. 从而必有$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$. □

点评 本题的结论是关于函数的极限, 条件是关于满足某种条件的任何数列的极限, 结论相对于条件更宽泛、一般. 从较窄内容的命题向宽泛的一般内容的命题推理, 采用反证法是一个好的选择. 通过否定结论, 构造一个与条件矛盾的特例是容易实现的. 本题的证明思路类似于教材中证明海涅定理的思路, 只不过这里需要构造一个严格递减的数列, 思考起来更深刻细致.

例 4 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的周期函数. 证明若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 则$f(x)\equiv 0$.

证 设$T>0$为$f(x)$的一个周期, 所以$\forall x\in\mathbb{R}$, 如果令$x_n=x+nT$, 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 而$x_n\to+\infty$, $n\to\infty$, 所以由海涅定理知$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$. 又因为$f(x)=f(x_n)$, 于是$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$. □

点评 海涅定理建立了函数极限和数列极限之间的联系, 关于它的应用多种多样. 教材中给出了海涅定理的两个应用：一是证明函数极限不存在, 二是通过函数的极限求数列的极限. 本题证明函数是常值函数, 思路为：$\forall x$, 先构造等式$f(x)=f(x_n)$, 然后两边对于n取极限. x相对于变量n是常数, 故而, 左边的极限为常数$f(x)$; 由海涅定理知, 右边复合数列的极限值为相应的函数值0. 再由数列极限的唯一性, 命题得证.

例 5 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$单调且恒大于*0*, 并满足$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$. 证明对任意$a>0$, 有$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$.

证 由已知得到$\forall n\in\mathbb{N}^+$有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2^n x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2^n x)}{f(2^{n-1})}\cdots\frac{f(2x)}{f(x)}=1.$$

令$y=\dfrac{x}{2^n}$, 则又有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\frac{x}{2^n})}{f(x)}=\lim_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{f(2^n y)}=1.$$

由于$\forall a>0,\exists N$, 使得$\dfrac{1}{2^N}\leqslant a<2^N$, 不妨设$f$单调递增, 那么$\forall x>0$有

$$f(\frac{x}{2^N})\leqslant f(ax)\leqslant f(2^N x),$$

于是有

$$\frac{f(\frac{x}{2^N})}{f(x)}\leqslant\frac{f(ax)}{f(x)}\leqslant\frac{f(2^N x)}{f(x)}.$$

所以, 令$x\to+\infty$, 由两边夹定理可以知道结论成立. □

点评 本题的关键是注意到$\forall a>0,\exists N$, 使得$\dfrac{1}{2^N}\leqslant a<2^N$. 再由$f$单调递增, 将结论的表达式与已知的表达式联系起来.

2.7 无穷大量与无穷小量

一、基本方法

1. 用定义证明无穷大量

2. 用等价无穷小量替换求极限.

例 1 证明$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{x-1}=-\infty$.

证 因为$x<0$时,

$$\frac{x^2+x}{x-1}=x+2+\frac{2}{x-1}<x+2,$$

所以$\forall M>0$, 由$x+2<-M$得到$x<-(M+2)$. 取$X=M+2$, 那么$\forall x<-X$有

$$\frac{x^2+x}{x-1}<x+2<-M.$$

按照定义知$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{x-1}=-\infty$. □

例 2 求下列各极限:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\sin^2x)-x}{\ln(\mathrm{e}^{2x}+\arcsin^2x)-2x}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(x\sin\tfrac{1}{x})\ln x$.

解 (1)

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\frac{\sin^2x}{\mathrm{e}^x})}{\ln(1+\frac{\arcsin^2x}{\mathrm{e}^{2x}})}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2x}{\mathrm{e}^x}}{\frac{\arcsin^2x}{\mathrm{e}^{2x}}}=1.$$

(2) 令$y=\dfrac{1}{x}$.

$$原式=\lim_{y\to0^+}\left[-\ln\frac{\sin y}{y}\ln y\right]=\lim_{y\to0^+}\left[-(\frac{\sin y}{y}-1)\ln y\right].$$

又因为

$$0 < 1 - \frac{\sin y}{y} < 1 - \cos y \sim \frac{y^2}{2}, \quad \lim_{y\to 0^+} y^2 \ln y = 0,$$

所以

$$原式 = \lim_{y\to 0^+}\left(1 - \frac{\sin y}{y}\right)\ln y = 0.$$

□

点评 (1)题通过等价无穷小量替换剥离了外层函数ln, 使求极限的过程针对内层函数进行就可以了. (2)题除了进行等价无穷小量替换还应用了两边夹定理. 应该注意综合运用前面已经介绍的各种求极限的方法.

二、例题

例 3 设$\{a_n\}$是单调数列且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

证 不妨设$\{a_n\}$单调递增, 下面证明$\{a_n\}$有上界, 则知$\{a_n\}$收敛. 由已知并且利用2.1节的例题5可以进一步知道$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

反证. 假设$\{a_n\}$没有上界, 则$\forall G > 0, \exists N$, 有$a_N > G$, 因为$\{a_n\}$单调递增, 所以$\forall n > N$有$a_n \geqslant a_N > G$, 于是

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} > \frac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{n} + G\frac{n-N}{n}.$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{n} = 0,$$

所以对于上述$G > 0, \exists \bar{N}, \forall n > \bar{N}$ 有

$$|\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}| < \frac{G}{4},$$

取$N' = \max\left(2N, \bar{N}\right)$, 那么$\forall n > N'$, 有

$$\frac{a_1+a_2\cdots+a_n}{n} > -\frac{G}{4} + \frac{G}{2} = \frac{G}{4},$$

根据定义知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty$, 矛盾. 所以$\{a_n\}$ 有上界. $\square$

点评 反证时, 假设$\{a_n\}$没有上界, 在此之前还假设$\{a_n\}$单调递增, 故而知$\{a_n\}$是$+\infty$大量. 猜测这个数列的算术平均数列$\{\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\}$也是$+\infty$大量, 向着这个目标证明就与已知矛盾, 命题得证.