数学科学学院本科生2012 — 2013学年第一学期《高等代数与解析几何》课程期末考试试卷(A卷)

专业： 年级： 学号： 姓名： 成绩:

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	成绩
得分									

草 稿 区

得 分

一、(10分)计算$n+1$阶行列式$D_{n+1} = \begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{pmatrix}$.

草 稿 区

得 分

二、(10分)试把矩阵$A = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$表成形式为$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$的矩阵的乘积.

草 稿 区

得 分

三、(15分)已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + tx_2 - 4x_3 - tx_4 = 1 \\ tx_1 + 4x_3 + 8x_4 = -2 \end{cases}$$

的系数矩阵的秩为2. 求t的值并解该线性方程组.

草 稿 区

得 分

四、(20分)设线性空间$\mathbf{P}[x]_3$的两组基分别为$f_1(x)=(x-1)^2$, $f_2(x)=x-1$, $f_3(x)=1$与$g_1(x)=x^2+x+1$, $g_2(x)=x+1$, $g_3(x)=1$.

(1) 求由基$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$到基$g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$的过渡矩阵.

(2) 已知$f(x)=2x^2+3x+5$, 分别求出$f(x)$在这两组基下的坐标.

草 稿 区

得 分

五、(10分) 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$为线性方程组$AX=0$的一个基础解系, $\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$, $\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3, \cdots, \beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$, 其中$t_1, t_2$为实常数. 试问$t_1, t_2$满足什么关系时, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$也为$AX=0$的一个基础解系?

草 稿 区

得 分

六、(15分)设$u, v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $A = I_n - uv'$. 求证: (1) $\det(A) = 1 - v'u$; (2) 当A可逆时, $A^* = uv' + (1 - v'u)I_n$.

草 稿 区

得 分

七、(10分)多项式$f(x), g(x) \in P[x]$满足$(f(x), g(x)) = 1$. 记$V_1 = \{h(x) \in P(x) \mid f(x)|h(x)\}$, $V_2 = \{h(x) \in P(x) \mid g(x)|h(x)\}$. 证明: $P[x] = V_1 + V_2$, 并判断这是否直和.

得 分

八、(10分) 设A、B分别为$m \times n$和$n \times p$矩阵, 证明:

$$R(A) + R(B) \leq n + R(AB).$$

.

草 稿 区