下凸函数与上凸函数的概念

考虑函数$y = f(x)$的图象，曲线的升降是基本属性之一, 描述它的是函数的单调性. 曲线的弯曲方向也是基本属性之一, 描述它的就是函数的凸性.

定义 1

设函数$f(x)$在区间I有定义.

(i) 若对任何$x_0, x_1 \in I$, $x_0 < x_1$, 任何$t \in (0, 1)$, 都有

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leqslant (1-t)f(x_0) + tf(x_1),$$

则称$f(x)$在区间I下凸; 若上式中的不等号是严格的, 则称$f(x)$在区间I严格下凸;

(ii)若把(i)中式子的不等号反过来, 则分别称$f(x)$在区间I上凸和严格上凸.

不难看到凸性的几何意义. 图5-2的左图中画的是下凸函数, 右图中是上凸函数. 当用A, B分别来记点$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$时, 参数方程

$$x = (1-t)x_0 + tx_1, \quad y = (1-t)f(x_0) + tf(x_1), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

所代表的恰为弦AB. 由凸性的定义, 连结下凸曲线上任何两点的弦都在曲线的上方，连结上凸曲线上任何两点的弦都在曲线的下方.

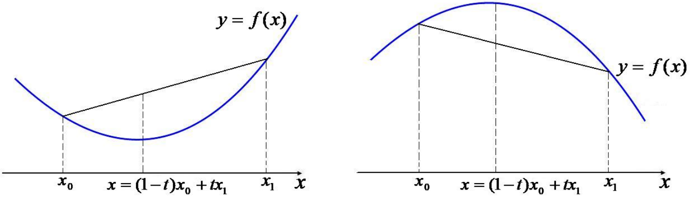

Figure: 5-2

例子

例如，$f(x)=x^2$在$(-\infty,+\infty)$严格下凸，这可由定义验证如下：对任何实数$x_0,x_1,\ x_0<x_1$, 任何$t\in(0,1)$, 都有

$$[(1-t)x_0+tx_1]^2=(1-t)x_0^2+tx_1^2-(1-t)t(x_0-x_1)^2<(1-t)x_0^2+tx_1^2.$$

例子

例如，$f(x) = x^2$在$(-\infty, +\infty)$严格下凸，这可由定义验证如下：对任何实数x_0, x_1, $x_0 < x_1$, 任何$t \in (0, 1)$, 都有

$$[(1-t)x_0 + tx_1]^2 = (1-t)x_0^2 + tx_1^2 - (1-t)t(x_0 - x_1)^2 < (1-t)x_0^2 + tx_1^2.$$

不难验证$f(x) = ax + b$在$(-\infty, +\infty)$上既是下凸函数也是上凸函数.

判断下面的命题是否成立.

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上既是下凸函数也是上凸函数，则存在常数a和b, 使得$f(x)=ax+b$.

(A) 成立

(B) 不成立

一些性质

由定义容易看到：下凸函数与正的常数相乘，乘积仍是下凸函数；两个区间I上的下凸函数的和仍是区间I上的下凸函数.

一些性质

由定义容易看到：下凸函数与正的常数相乘，乘积仍是下凸函数；两个区间I上的下凸函数的和仍是区间I上的下凸函数.

设$g(x)$在区间I下凸，$f(x)$在区间J下凸且单调递增，$f(J) \subseteq I$, 则复合函数$f \circ g$在区间I下凸.

一些性质

由定义容易看到：下凸函数与正的常数相乘，乘积仍是下凸函数；两个区间I上的下凸函数的和仍是区间I上的下凸函数.

设$g(x)$在区间I下凸，$f(x)$在区间J下凸且单调递增，$f(J) \subseteq I$, 则复合函数$f \circ g$在区间I下凸.

若$f(x)$是区间I上严格递增的下凸函数，值域为J, 则反函数f^{-1}是J上严格递增的上凸函数.

判断下面的命题是否成立.

设$f(x)$和$g(x)$都是区间I上的下凸函数，则$f(x)g(x)$也是区间I上的下凸函数.

(A) 成立

(B) 不成立

判断下面的命题是否成立.

设$f(x)$和$g(x)$都在区间I下凸，令$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $x \in I$, 则$\varphi(x)$也在区间I下凸.

(A) 成立

(B) 不成立

引理 1

若函数$f(x)$在区间I下凸，则对任何$x_1, x_2, x_3 \in I$，$x_1 < x_2 < x_3$, 都有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2};$$

反之，若对任何$x_1, x_2, x_3 \in I$，$x_1 < x_2 < x_3$,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

中的一个恒成立，则函数$f(x)$在区间I下凸.

三弦引理的示意图

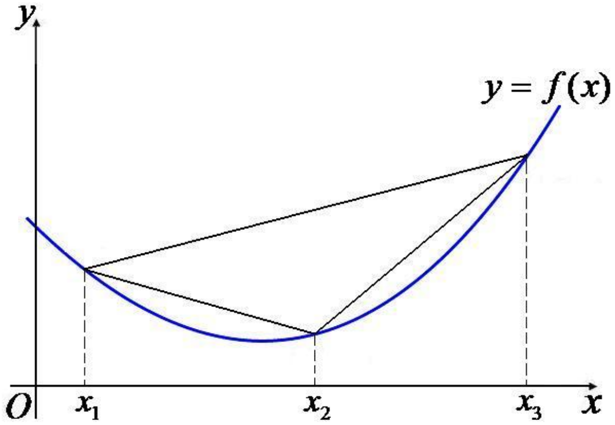

Figure: 5-3

设$f(x)$是区间(a,b)上的下凸函数，则对任意$x \in (a,b)$，左右导数$f'_-(x)$和$f'_+(x)$都存在且有$f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$.

设$f(x)$是区间(a,b)上的下凸函数，则对任意$x \in (a,b)$，左右导数$f'_-(x)$和$f'_+(x)$都存在且有$f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$.

由上面单侧导数存在性的结论可知，若$f(x)$在区间I下凸，且区间I没有端点，则$f(x)$在区间I连续. 注意：若区间I有端点，则$f(x)$在区间I的端点处未必连续.

定理 1

设$f(x)$在$[a,b]$连续, 在(a,b)可导, 则下列三个命题等价:

(i) $f(x)$在$[a,b]$下凸*(*上凸*);*

(ii) $f'(x)$在(a,b)递增*(*递减*);*

(iii) 对任何$u\in(a,b)$, 曲线$y=f(x)$在点$(u,f(u))$的切线位于曲线的下方*(*上方*)*, 亦即对任何$x\in[a,b]$, 都有

$$f(x)\geqslant(\leqslant)f'(u)(x-u)+f(u).$$

可导函数下凸的充分必要条件

定理 1

设$f(x)$在$[a,b]$连续, 在(a,b)可导, 则下列三个命题等价:

(i) $f(x)$在$[a,b]$下凸*(*上凸*);*

(ii) $f'(x)$在(a,b)递增*(*递减*);*

(iii) 对任何$u\in(a,b)$, 曲线$y=f(x)$在点$(u,f(u))$的切线位于曲线的下方*(*上方*)*, 亦即对任何$x\in[a,b]$, 都有

$$f(x)\geqslant(\leqslant)f'(u)(x-u)+f(u).$$

注

若将定理1的(i)中的下凸, (ii)中的递增和(iii)中的不等式(这时要有$x\neq u$)同时加强为严格的, 则3个命题仍然等价.

定理1的推论

推论 1

设$f(x)$在$[a,b]$连续, 在(a,b)两次可导.
(i) 若在(a,b)内$f''(x)$非负(恒正), 则$f(x)$是$[a,b]$上的下凸(严格下凸)函数;
(ii) 若在(a,b)内$f''(x)$非正(恒负), 则$f(x)$是$[a,b]$上的上凸(严格上凸)函数.

定理1的推论

推论 1

设$f(x)$在$[a,b]$连续, 在(a,b)两次可导.
(i) 若在(a,b)内$f''(x)$非负*(*恒正*)*, 则$f(x)$是$[a,b]$上的下凸*(*严格下凸*)*函数*;*
(ii) 若在(a,b)内$f''(x)$非正*(*恒负*)*, 则$f(x)$是$[a,b]$上的上凸*(*严格上凸*)*函数*.*

由推论1容易得出: e^x在$(-\infty,+\infty)$严格下凸，$\ln x$在$(0,+\infty)$严格上凸, $\sin x$在$[0,\pi]$严格上凸，在$[\pi,2\pi]$严格下凸.

例 1

研究函数$f(x) = x^4 - 2x^2$的凸性.

例 1

研究函数$f(x) = x^4 - 2x^2$的凸性.

例 2

设$a_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 则a_1, a_2, ..., a_n的算术均值大于等于它们的几何均值，即

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

例题

例 1

研究函数$f(x) = x^4 - 2x^2$的凸性.

例 2

设$a_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 则a_1, a_2, ..., a_n的算术均值大于等于它们的几何均值，即

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

利用凸性证明不等式是一种基本方法. 凸函数的定义就包含了不等式，其推广就是詹森(Jensen)不等式：设$p_i \geqslant 0$，$i = 1, \cdots, n$且$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$，$f(x)$下凸，则

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i).$$

定义 2

若存在点x_0的邻域$B_\delta(x_0)$, 使得函数$f(x)$在$(x_0-\delta, x_0]$和$[x_0, x_0+\delta)$上具有相反的凸性, 则称点$P(x_0, f(x_0))$为$f(x)$的拐点.

定义 2

若存在点x_0的邻域$B_\delta(x_0)$, 使得函数$f(x)$在$(x_0-\delta, x_0]$和$[x_0, x_0+\delta)$上具有相反的凸性, 则称点$P(x_0, f(x_0))$为$f(x)$的拐点.

例如, $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$都是例1中的函数$f(x)=x^4-2x^2$的拐点; $(n\pi, 0)$ $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$都是$\sin x$的拐点. 从几何上看, $f(x)$的拐点是曲线$y=f(x)$的上凸部分与下凸部分的分界点.

拐点的必要条件与判定方法

定理 2

设$(x_0, f(x_0))$为$f(x)$的拐点且$f''(x_0)$存在, 则$f''(x_0) = 0$.

定理 2

设$(x_0, f(x_0))$为$f(x)$的拐点且$f''(x_0)$存在, 则$f''(x_0) = 0$.

注

实际应用中，可以用下面的判别法判定拐点：“若$f(x)$在点x_0三次可导且$f''(x_0) = 0$，$f'''(x_0) \neq 0$, 则$(x_0, f(x_0))$为$f(x)$的拐点.”

函数作图的步骤

这里所说的函数作图, 不是指用数学软件借助计算机精确地描出函数的图形，而是指画出函数的较为精细的草图, 即需要给出函数在各种特殊点的值及函数单调性、凸性、渐近线等信息，从而帮助我们了解函数的几何形态. 其主要步骤如下:

函数作图的步骤

这里所说的函数作图, 不是指用数学软件借助计算机精确地描出函数的图形， 而是指画出函数的较为精细的草图, 即需要给出函数在各种特殊点的值及函数单调性、凸性、渐近线等信息，从而帮助我们了解函数的几何形态. 其主要步骤如下:

(i) 确定函数$f(x)$的定义域;
(ii) 判定$f(x)$是否具有奇偶性,周期性及其它对称性;
(iii) 确定函数的单调区间及极值点;
(iv) 确定函数的上凸与下凸区间及拐点;
(v) 求出函数在各特殊点的值, 其中包括$y = f(x)$与两条坐标轴的交点的位置;
(vi) 确定$y = f(x)$是否有渐近线并求出所有的渐近线;
(vii) 依据上述各条信息, 较为准确的作出函数图形.

定义 3

(i) 若有 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$或有 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$, 则称直线$y=a$或$y=b$为$y=f(x)$的水平渐近线;

(ii) 若有 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty$或 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty$, 则称直线$x=x_0$为$y=f(x)$的竖直渐近线;

(iii) 若有$a\neq 0$, 使 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$或 $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$, 则称直线$y=ax+b$为$y=f(x)$的斜渐近线.

渐近线的求法

显然, 函数的水平渐近线和竖直渐近线均易求出. 下面介绍斜渐近线的求法.

显然, 函数的水平渐近线和竖直渐近线均易求出. 下面介绍斜渐近线的求法.

设直线$y = ax + b$是函数$y = f(x)$当$x \to +\infty$时的渐近线, 于是有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0.$$

由此可得

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x) - ax - b}{x} = 0.$$

因为a和b都是常数, 所以$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. 进而$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax]$. 这样就求得了斜渐近线. 同理可判断$x \to -\infty$时是否有渐近线并在存在渐近线时求出渐近线.

例题

例 3

求函数$f(x) = 2x + \arctan x + 1$的渐近线.

例 3

求函数$f(x) = 2x + \arctan x + 1$的渐近线.

例 4

求作函数$y = \dfrac{1-2x}{x^2} + 1 \ \ (x > 0)$的图形.

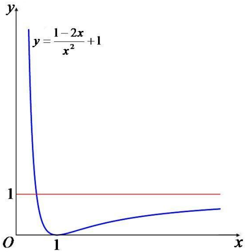

Figure: 5-4