上极限和下极限

数学分析I

第26讲

December 7, 2022

我们考虑的主要是有界数列. 设数列$\{x_n\}$有界, 那么对于每一个正整数k, 集合$X_k=\{x_n|n\geqslant k\}$都有界, 因而都有上确界和下确界. 我们记

$$\beta_k=\sup X_k=\sup\{x_k,x_{k+1},x_{k+2},\ldots\}=\sup_{n\geqslant k}\{x_n\};$$

$$\alpha_k=\inf X_k=\inf\{x_k,x_{k+1},x_{k+2},\ldots\}=\inf_{n\geqslant k}\{x_n\}.$$

这样我们得到两个新的数列$\{\alpha_k\}$和$\{\beta_k\}$.

从定义直接可以看出数列$\{\alpha_k\}$递增, 而$\{\beta_k\}$递减. 并且对每个k, 成立$\alpha_1\leqslant\alpha_k\leqslant\beta_k\leqslant\beta_1$, 这表明两个新数列都有界.

有的书中，称数列$\{\alpha_k\}$是数列$\{x_n\}$的下数列，数列$\{\beta_k\}$是数列$\{x_n\}$的上数列.

由单调收敛定理, 我们可以记

$$H=\lim_{k\to\infty}\beta_k=\lim_{k\to\infty}\sup_{n\geqslant k}\{x_n\};$$

$$h=\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\lim_{k\to\infty}\inf_{n\geqslant k}\{x_n\}.$$

显然地, $H\geqslant h$.

我们把上面的极限H和h分别称为数列$\{x_n\}$的上极限和下极限, 记为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=H=\lim_{k\to\infty}\beta_k,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=h=\lim_{k\to\infty}\alpha_k.$$

我们知道, 有界的数列不一定有极限, 但如上定义的上极限和下极限却总是存在的. 例如, 数列$\{(-1)^n\}$的极限不存在, 但它的上极限为1, 下极限为-1.

注意到，在上面的定义中，数列$\{x_n\}$的有界性不是必须的．只要数列$\{x_n\}$有上界，我们就可以如上定义递减数列$\{\beta_k\}$．这时候即使$\{x_n\}$无下界，我们仍可以定义上极限$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{k\to\infty} \beta_k$，甚至在$\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = -\infty$时，也写成$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$．

同理，如果$\{x_n\}$有下界，我们同样定义$\{\alpha_k\}$和$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k$．

约定

若数列$\{x_n\}$无上界，$\{\beta_k\}$无定义，我们形式上记$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$；若$\{x_n\}$无下界，则记为$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$．

例 1

设$x_n = n + (-1)^n n\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$, 则$\{x_n\}$无上界, $\{\beta_k\}$无定义, 而$\alpha_k = 0\ (k = 1, 2, 3, \ldots)$. 因此, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$.

设$x_n = (-1)^n + \sin\dfrac{n\pi}{4}$, 则$x_n = \begin{cases} 1 + \sin\dfrac{m\pi}{2}, & n = 2m, \\ -1 + \sin\dfrac{(2m-1)\pi}{4}, & n = 2m-1, \end{cases}$ $n = 1, 2, \cdots$. 于是$\alpha_k = \inf\limits_{n\geqslant k} x_n = -1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 故 $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = -1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 注意: $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} (-1)^n = -1$, $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{n\pi}{4} = -1$, 因此, $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n \neq \underline{\lim}\limits_{n\to\infty} (-1)^n + \underline{\lim}\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{n\pi}{4}$.

设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是两个有界数列且有正整数N, 使当$n > N$时, 就有$x_n \leqslant y_n$, 则有

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} y_n, \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

约定：对任意实数a, 有$-\infty < a < +\infty$. 在这个约定下，任意数列的上极限和下极限具有保序性.

设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是两个数列且有正整数N, 使当$n > N$时, 就有$x_n \leqslant y_n$, 则有

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} y_n, \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

判断下面的命题是否成立.

设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都是有界数列，如果$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n < \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$, 则存在正整数$N$, 使得当$n > N$时，有$x_n < y_n$.

(A) 成立

(B) 不成立

定理 1

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = H$(有限或$\pm\infty$)的充分必要条件是：

(1) H是有限的情形. 对任意$\varepsilon > 0$, 在$(H-\varepsilon, H+\varepsilon)$内都含有$\{x_n\}$的无穷多项; 而在$[H+\varepsilon, +\infty)$中只含有$\{x_n\}$的有穷多项.

(2) $H = +\infty$的情形. 对任意$M > 0$, 在$\{x_n\}$中必有无穷多项大于M.

(3) $H = -\infty$的情形. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

设$H \in \mathbb{R}$, 则$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \leqslant H$的充分必要条件是对任意$\varepsilon > 0$, 在$[H+\varepsilon, +\infty)$中只含有$\{x_n\}$的有穷多项；$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \geqslant H$的充分必要条件是对任意$\varepsilon > 0$, 在$(H-\varepsilon, +\infty)$中都含有$\{x_n\}$的无穷多项.

思考题

设$H \in \mathbb{R}$, 则$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n < H$和$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n > H$的充分必要条件分别是什么？

下极限的充分必要条件

定理 2

设 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = h$(有限或$\pm\infty$)的充分必要条件是：

(1) h是有限的情形. 对任意$\varepsilon > 0$, 在$(h-\varepsilon, h+\varepsilon)$内都含有$\{x_n\}$的无穷多项; 而在$(-\infty, h-\varepsilon]$中只含有$\{x_n\}$的有穷多项.

(2) $h = -\infty$的情形. 对任意$M > 0$, 在$\{x_n\}$中必有无穷多项小于$-M$.

(3) $h = +\infty$的情形. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

设$h \in \mathbb{R}$, 则 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant h$的充分必要条件是对任意$\varepsilon > 0$, 在$(-\infty, h-\varepsilon]$中只含有$\{x_n\}$的有穷多项； $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant h$的充分必要条件是对任意$\varepsilon > 0$, 在$(-\infty, h+\varepsilon)$内都含有$\{x_n\}$的无穷多项.

思考题

设$h \in \mathbb{R}$, 则 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n > h$和 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n < h$的充分必要条件分别是什么？

定理 3

设$\{x_n\}$是有界数列, 且 $\overline{\lim_{n\to\infty}} = H$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} = h$. 则

(1) 存在$\{x_n\}$的一个子列收敛于H;
(2) 存在$\{x_n\}$的一个子列收敛于h;
(3) 对于$\{x_n\}$的任一收敛子列, 若其极限为A, 则有$h \leqslant A \leqslant H$.

推论 1

设$\{x_n\}$是有界数列, 则它的所有收敛子列的极限构成的数集必有最大值和最小值.

定理 4

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$(有限或$\pm\infty$)的充分必要条件是:

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = A = \varliminf_{n\to\infty} x_n.$$

应用定理4证明数列$\{x_n\}$收敛时，需验证：
(1) 数列$\{x_n\}$有界；
(2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

习题6(B)第12题

设$f(x)$在点x_0的某空心邻域$\mathring{B}_\eta(x_0)$有界. 对于$0 < \delta < \eta$, 令

$$\overline{y}_\delta = \sup_{0<|x-x_0|\leqslant\delta} f(x), \quad \underline{y}_\delta = \inf_{0<|x-x_0|\leqslant\delta} f(x),$$

(1) 证明极限 $\lim\limits_{\delta\to0^+} \underline{y}_\delta$ 和 $\lim\limits_{\delta\to0^+} \overline{y}_\delta$都存在, 分别称它们为函数$f(x)$在点$x_0$的下极限和上极限, 相应地记为 $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x)$和 $\varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)$;

(2) 证明函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充分必要条件是上、下极限都存在且相等, 亦即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$当且仅当

$$\varlimsup_{x\to x_0} f(x) = A = \varliminf_{x\to x_0} f(x).$$