多项式矩阵复习题

黄利兵

数学科学学院

2023 年 4 月 6 日

本章总结

- 主要概念: 多项式矩阵, 秩, 可逆, 相抵标准形, 不变因子, 行列式因子, 初等因子, 有理标准形.
- 基本结论: 可逆的判别; 相抵标准形的存在唯一性; 矩阵相似的条件; 初等因子与 Jordan 块的对应.
- 常用算法: 相抵标准形的求法; Jordan 标准形/有理标准形的计算.

判断题

(1) 如果 $A(\lambda) \in P[\lambda]^{n\times n}$ 的秩为 n, 则它可逆.

(2) 如果 $A \in P^{n\times n}$ 可逆, $f(\lambda) = \mathrm{tr}(\lambda A - B)$, 则 $f(BA^{-1}) = 0$.

(3) 可逆的多项式矩阵可以写为初等多项式矩阵的乘积.

(4) 如果 $A \in P^{n\times n}$ 的不变因子 $d_1(\lambda) \neq 1$, 则 A 是数量矩阵.

(5) 多项式矩阵 $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda+1 \\ \lambda^2-\lambda & \lambda^2-1 \end{bmatrix}$ 与 $B(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是相抵的.

(6) 如果 $A(\lambda), B(\lambda) \in P[\lambda]^{n\times n}$ 的次数分别为 k 和 l, 则 $A(\lambda)B(\lambda)$ 的次数为 $k+l$.

填空题

(1) 若 $A \in P^{n\times n}$, 则 $\lambda E_n - A$ 的所有不变因子的次数之和为____________.

(2) 如果 $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ 的初等因子为 $(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1), (\lambda^2+1)^2, (\lambda^2+1)^2$, 则矩阵 $A - E_n$ 的秩是____________.

(3) 若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ a & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ 不相似, 则 a 的值是____________.

(4) 多项式矩阵 $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2(\lambda-1)^2 & & \\ & \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) & \\ & & \lambda(\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$ 的不变因子是____________.

(5) 若 3×3 矩阵 A 的最小多项式为 $(\lambda-1)^2$, 则 A 的不变因子是____________.

计算题

(1) 求矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的不变因子和行列式因子.

(2) 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 & 12 \\ 3 & -2 & 3 & -9 \\ -4 & 8 & -9 & 24 \\ -3 & 5 & -6 & 16 \end{bmatrix}$ 的 Jordan 标准形.

证明题 (一)

设 λ_0 是矩阵 $A \in P^{n\times n}$ 的特征值. 如果在 A 的初等因子中, 有 k 个以 λ_0 为根, 证明: λ_0 的几何重数为 k.

证明题 (二)

设 $A \in P^{n\times n}$ 满足 $\det(A) = 0$. 证明: $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^2)$ 的充分必要条件是所有以 0 为根的初等因子都是 1 次的.

证明题 (三)

设 V 是有理数域上的有限维线性空间, T 是 V 上的可逆线性变换, 且 $T^{-1} = T^2 + T$. 求证: $\dim V$ 是 3 的倍数.

证明题 (四)

设 $A = J_n(-1)$ 是对角元为 -1 的 n 阶 Jordan 块, $B = A^2$. 证明: B 相似于 $J_n(1)$.

证明题 (五)

设 $A, B \in P^{n\times n}$. 如果任意与 A 交换的矩阵都与 B 交换, 证明存在 $\varphi(x) \in P[x]$, 使得 $B = \varphi(A)$.