数学分析讲义（省身班）

段华贵

数学科学学院

2023年5月26日

第12.1节

重积分的概念与性质

对$\mathbb{R}^n$中的标准长方体

$$\begin{aligned} H &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ &= \{(x_1, \cdots, x_n) |\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \cdots, n\}, \end{aligned}$$

定义其n维体积或若尔当测度为

$$V(H) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

显然$n = 2$时，标准长方体的2维体积其实就是长方形的面积.
对$\mathbb{R}^n$中的任意有界集合E，把E放置于某个标准长方体H内，并用n组与坐标轴垂直的超平面将H分割成若干小标准长方体，称其为对H的一个分割$T = \{H_1, \cdots, H_k\}$.

(i) 小长方体$H_i \subseteq E^\circ$, 小长方体全部含在集合E内.

(ii) 小长方体$H_s \cap \partial E \neq \emptyset$, 小长方体之并恰恰覆盖$E$的边界.

(iii) 小长方体$H_j \cap \overline{E} = \emptyset$, 小长方体全部在集合$E$的外面.

- $V_{\text{int}}(T)$ =第(i)类体积的总和.
- $V_{\text{out}}(T)$ =第(i)类和第(ii)类n维体积的总和.
- $V_{\text{int}}(T)$和$V_{\text{out}}(T)$与分割T有关.
- 记$V_*(E) = \sup_T V_{\text{int}}(T) \leq V^*(E) = \inf_T V_{\text{out}}(T)$.
- (Jordan可测定义) 若$V_*(E) = V^*(E)$, 则称集合E是J可测的, 称这个值为集合E的n维体积或若尔当测度, 记为$V_J(E)$.

称集合E为若尔当零测集, 如果$V_J(E)=0$, 即对任意$\varepsilon>0$, 存在标准长方体$H_1, H_2, \cdots, H_k$, 使$E\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{k}H_i$, $\sum\limits_{i=1}^{k}V(H_i)<\varepsilon$.

问题：设A是$\mathbb{R}^n$中的有界闭集, $f(X)$在A上连续,记

$$B=\{(X,y)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid X\in A, y=f(X)\}.$$

则B是Jordan零测集.

(i) 若$V_*(E) = V^*(E) = V_J(E)$, 则

$$\lim_{d(T)\to 0} V_{\mathrm{int}}(T) = \lim_{d(T)\to 0} V_{\mathrm{out}}(T) = V_J(E),$$

其中$d(T) = \max_{H_i \cap \overline{E} \neq \emptyset} d(H_i)$.

(ii) 有界集$E \subseteq \mathbb{R}^n$, J可测 $\Leftrightarrow V_J(\partial E) = 0$.

(iii) E是J可测 $\Rightarrow E^\circ, \overline{E}$是$J$可测的, 且有

$$V_J(E^\circ) = V_J(E) = V_J(\overline{E}).$$

问题：(iii)的逆命题成立吗？即, $E^\circ, \overline{E}$是J可测 $\Rightarrow E$是J可测.

(iv) (单调性)对于两个J可测集E_1与E_2，若$E_1 \subseteq E_2$，则有

$$V_J(E_1) \leqslant V_J(E_2).$$

(v) (次可加性)若E_1，E_2是J可测集，
则$E_1 \cap E_2$，$E_1 \cup E_2$，$E_1 \backslash E_2$也是J可测集，且有

$$V_J(E_1 \cup E_2) \leqslant V_J(E_1) + V_J(E_2).$$

有限次可加性：E_i，$i = 1, 2, \cdots, k$都J可测，则

$$V_J\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} V_J(E_i).$$

问题：无穷次可加性呢？

对$\mathbb{R}^n$中J可测的有界闭区域D, 称有限集$T=\{\Omega_1,\cdots,\Omega_k\}$为$D$的一个**分割**, 如果

(i) 每个Ω_i都是有界闭J可测集,

(ii) $\Omega_i^\circ\cap\Omega_j^\circ=\emptyset$, $i\neq j$,

(iii) $\bigcup\limits_{i=1}^{k}\Omega_i=D$.

Definition

设D为$\mathbb{R}^n$中J可测的有界闭区域.对D的一个分割$T=\{\Omega_1,\cdots,\Omega_k\}$, 将$\Omega_i$的$n$维体积记为$\Delta\Omega_i$, 记$d(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} d(\Omega_i)$. 任取$P_i\in\Omega_i$, 积分和$\sum\limits_{i=1}^{k} f(P_i)\Delta\Omega_i$(与分割与取法有关). 如果存在实数$I$, 对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 对于任意分割$T$, 只要$d(T)<\delta$, 无论点$P_i$在$\Omega_i$上如何选取, 恒有

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(P_i)\Delta\Omega_i - I\right| < \varepsilon,$$

则称$f(X)$在D黎曼可积, 称I为$f(X)$在D的n重积分, 记为$I=\int_D f(X)\mathrm{d}\Omega$.

Theorem (线性)

若$f(X)$和$g(X)$在D可积, 则对任意常数a和b, $af(X)+bg(X)$ 也在D可积, 且

$$\int_D [af(X)+bg(X)]\,\mathrm{d}\Omega = a\int_D f(X)\mathrm{d}\Omega + b\int_D g(X)\mathrm{d}\Omega.$$

Theorem (区域可加性)

设$D=D_1\cup D_2$, 其中D_1和D_2均J可测并且无公共内点.
若$f(X)$在D可积, 则$f(X)$在D_1和D_2都可积, 且

$$\int_D f(X)\mathrm{d}\Omega = \int_{D_1} f(X)\mathrm{d}\Omega + \int_{D_2} f(X)\mathrm{d}\Omega.$$

反之, 若$f(X)$在D_1和D_2可积, 则$f(X)$在D可积, 且上述等式成立.

Theorem (单调性)

若$f(X)$和$g(X)$都在D可积, 且

$$f(X) \leqslant g(X), \qquad \forall X \in D,$$

则

$$\int_D f(X)\mathrm{d}\Omega \leqslant \int_D g(X)\mathrm{d}\Omega.$$

Theorem

若$f(X)$在D可积, 则$|f(X)|$在D可积, 且

$$\left|\int_D f(X)\mathrm{d}\Omega\right| \leqslant \int_D |f(X)|\mathrm{d}\Omega.$$

Theorem (积分中值定理)

设$f(X)$在D连续，则存在$\xi \in D$使得

$$\int_D f(X)\mathrm{d}\Omega = f(\xi)V_J(D).$$

Theorem

设$f(X)$在D可积，$g(X)$在D有界．若存在$\mathbb{R}^n$中的J零测集E，使$f(X) = g(X)$, $\forall X \in D\backslash E$, 则$g(X)$在$D$可积，且

$$\int_D f(X)\mathrm{d}\Omega = \int_D g(X)\mathrm{d}\Omega.$$

设D是$\mathbb{R}^n$中的有界闭区域, $f(X)$在D有界,
$T=\{\Omega_1,\cdots,\Omega_k\}$是$D$的一个分割. 记

$$m_i=\inf_{X\in\Omega_i} f(X),\ M_i=\sup_{X\in\Omega_i} f(X),\ \omega_i=M_i-m_i,$$

则定义f的达布(Darboux)上和与下和分别为

$$S(T)=\sum_{i=1}^{k} M_i\Delta\Omega_i,$$

$$s(T)=\sum_{i=1}^{k} m_i\Delta\Omega_i.$$

定义f的上、下积分为

$$I^*=\inf_T S(T),\ I_*=\sup_T s(T).$$

Theorem (达布定理)

设D是$\mathbb{R}^n$中的有界闭区域, $f(X)$在D有界, 则

$$\lim_{d(T)\to 0} s(T) = I_*, \quad \lim_{d(T)\to 0} S(T) = I^*.$$

Theorem

设D是$\mathbb{R}^n$中的有界闭区域, $f(X)$在D有界, 则下列条件相互等价

(i) $f(X)$在D可积;

(ii) $\lim_{d(T)\to 0}(S(T) - s(T)) = 0$;

(iii) 对任意$\varepsilon > 0$, 存在D的一个分割$T = \{\Omega_1, \cdots, \Omega_k\}$, 使

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i \Delta\Omega_i < \varepsilon;$$

(iv) $I^* = I_*$.

Theorem

设D是$\mathbb{R}^n$中的有界闭区域, $f(X)$在D有界，且在D的间断点集为E. 若$V_J(E)=0$, 则$f(X)$在D可积.

证明 由于$V_J(E)=0 \Rightarrow \forall\ \varepsilon>0$, 存在长方体$H_1,\cdots,H_k$使

$$E\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}H_i\equiv Q,\ \sum_{i=1}^{k}V_J(H_i)<\frac{\varepsilon}{4M},$$

$H_i^\circ\cap H_j^\circ=\emptyset\ (i\neq j)$, $M=\sup\limits_{X\in D}|f(X)|$. 记$D_1=D\backslash Q^\circ$, 则$D_1$为有界闭集. $f(X)$在D_1连续从而一致连续, 因此存在$\delta>0$, 当$X_1,X_2\in D_1$且$|X_1-X_2|<\delta$时, 有

$$|f(X_1)-f(X_2)|<\frac{\varepsilon}{2V_J(D)}.$$

设$T'=\{\Omega_1',\cdots,\Omega_m'\}$是$D_1$的一个分割, $d(T')<\delta$,

$$T''=\{\Omega_1'',\cdots,\Omega_k''\},\ \Omega_i''=D\cap H_i,\ i=1,\cdots,k,$$

则$T=T'\cup T''$是D的一个分割. 对于此分割

$$\sum_T \omega_i\Delta\Omega_i=\sum_{T'}\omega_i'\Delta\Omega_i'+\sum_{T''}\omega_i''\Delta\Omega_i'',$$

而

$$\omega_i'\leqslant\frac{\varepsilon}{2V_J(D)},\quad \omega_i''\leqslant 2M,$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_T \omega_i\Delta\Omega_i &\leqslant \frac{\varepsilon}{2V_J(D)}\sum_{T'}\Delta\Omega_i'+2M\sum_{T''}\Delta\Omega_i''\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+2M\sum_{i=1}^k V_J(H_i)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

故$f(X)$在D可积.

练习

1. 设$f(X)$在可求面积的有界闭区域D连续, 且在D上$f(X) \geqslant 0$, $f(X) \not\equiv 0$, 求证: $\int_D f(X) \mathrm{d}\Omega > 0$.

2. 设$f(X)$在可求面积的有界闭区域D连续, $g(X)$在D可积且不变号, 证明: 存在$\xi \in D$, 使

$$\int_D f(X) g(X) \mathrm{d}\Omega = f(\xi) \int_D g(X) \mathrm{d}\Omega.$$

第12.2节

二重积分的计算

Theorem

设$f(x,y)$在$H=\{(x,y)|\ a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$可积, 并
且$x\in[a,b]$, $f(x,y)$关于y在$[c,d]$上可积,
则$\psi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$在$[a,b]$上可积, 且

$$\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x=\iint_H f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

即

$$I=\iint_H f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

$$D=\{(x,y)|\ a\leqslant x\leqslant b,\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\},$$

其中$y_1(x)$和$y_2(x)$均在$[a,b]$连续, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

D为y型区域

$$D = \{(x,y) | \ c \leqslant y \leqslant d, \ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\},$$

其中$x_1(y)$和$x_2(y)$均在$[c,d]$连续,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

问题: 请举例说明，累次积分存在且相等，但重积分不存在.

D为y型区域

$$D=\{(x,y)|\ c\leqslant y\leqslant d,\ x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)\},$$

其中$x_1(y)$和$x_2(y)$均在$[c,d]$连续,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

问题: 请举例说明，累次积分存在且相等，但重积分不存在.

$$\iint_D f(X)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

(i) 区域D可以表示为θ型区域;

(ii) 区域D可以表示为r型区域.

$$\iint_D f(X)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

(i) 区域D可以表示为θ型区域;

(ii) 区域D可以表示为r型区域.

$$\iint_D f(X)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

(i) 区域D可以表示为θ型区域;

(ii) 区域D可以表示为r型区域.

Example

写出$\iint_D f(X)\mathrm{d}\sigma$在极坐标系下的两个累次积分，其中$D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leqslant y,\ x\geqslant 0\}$.

$$\begin{aligned} D &= \left\{(r,\theta)|\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\sin\theta\right\} \\ &= \left\{(r,\theta)|\ 0\leqslant r\leqslant 1,\ \arcsin r\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Example

写出$\displaystyle\iint_D f(X)\mathrm{d}\sigma$在极坐标系下的两个累次积分, 其中$D=\{(x,y)|\ 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a\}$.

θ型区域

$$D_1=\left\{(r,\theta)|\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant r\leqslant\frac{a}{\cos\theta}\right\},$$

$$D_2=\left\{(r,\theta)|\ \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\frac{a}{\sin\theta}\right\}.$$

r型区域

$$D_3=\{(r,\theta)|\ 0\leqslant r\leqslant a,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\},$$
$$D_4=\{(r,\theta)|\ a\leqslant r\leqslant\sqrt{2}a,\ \arccos\frac{a}{r}\leqslant\theta\leqslant\arcsin\frac{a}{r}\}.$$

Example

$$I=\iint_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中D为$x^2+y^2\leqslant a^2$, $a>0$.

注记:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

Example

求三叶线$(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)\quad(a>0)$所围图形的面积.

注记： 极坐标下$r=a\cos 3\theta$, 注意到$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.

设D与D'分别是xy平面与uv平面上有确定面积的有界闭区域，变换

$$F:\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \end{cases}\qquad (u,v)\in D'$$

建立了D与D'的所有点之间的一一对应，并且

$$x(u,v),y(u,v)\in C^1(D'),\quad J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v)\neq 0,\qquad \forall (u,v)\in D'.$$

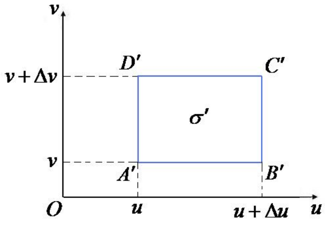
又设$f(x,y)$在D连续，那么成立**(换元公式)**

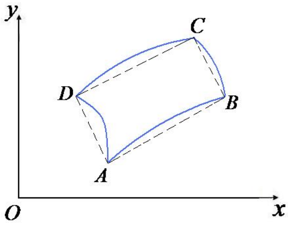
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Lemma

设在uv平面有一块包含点(u,v)的区域σ'，在变换F下点(u,v)对应xy平面的点(x,y)，区域σ'对应xy平面上包含点(x,y)的区域σ. 那么当区域σ'无限地向点(u,v)收缩，

即$d(\sigma')\to 0$时，$\dfrac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma'}\to\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v)\right|$.





若忽略高阶无穷小,

则$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (x'_u(u,v)\Delta u, y'_u(u,v)\Delta u, 0)$,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (x'_v(u,v)\Delta v, y'_v(u,v)\Delta v, 0)$

$$
\begin{aligned}
A: \quad & x_1 = x(u,v), y_1 = y(u,v),\\
B: \quad & x_2 = x(u+\Delta u, v) = x(u,v) + x'_u(u,v)\Delta u + o(\Delta u),\\
& y_2 = y(u+\Delta u, v) = y(u,v) + y'_u(u,v)\Delta u + o(\Delta u),\\
C: \quad & x_3 = x(u+\Delta u, v+\Delta v)\\
& \quad = x(u,v) + x'_u(u,v)\Delta u + x'_v(u,v)\Delta v + o(\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}),\\
& y_3 = y(u+\Delta u, v+\Delta v)\\
& \quad = y(u,v) + y'_u(u,v)\Delta u + y'_v(u,v)\Delta v + o(\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}),\\
D: \quad & x_4 = x(u, v+\Delta v) = x(u,v) + x'_v(u,v)\Delta v + o(\Delta v),\\
& y_4 = y(u, v+\Delta v) = y(u,v) + y'_v(u,v)\Delta v + o(\Delta v).
\end{aligned}
$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v)\right| \Delta u \Delta v,$$

于是曲边四边形$ABCD$的面积

$$\Delta\sigma \approx \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v)\right| \Delta\sigma',$$

即

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma'} \approx \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v)\right|.$$

设$T'=\{\sigma'_1,\cdots,\sigma'_n\}\longrightarrow T=\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}$.

取$(u_k,v_k)\in\sigma'_k\longrightarrow(x_k,y_k)\in\sigma_k$.

$$\lim_{d(T')\to 0}\frac{\Delta\sigma_k}{\Delta\sigma'_k}=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u_k,v_k)\right|,$$

即有

$$\Delta\sigma_k=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u_k,v_k)\right|\Delta\sigma'_k+o(\Delta\sigma'_k).$$

$$\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)\Delta\sigma_k=\sum_{k=1}^{n}f(x(u_k,v_k),y(u_k,v_k))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u_k,v_k)\right|\Delta\sigma'_k$$
$$+\sum_{k=1}^{n}f(x(u_k,v_k),y(u_k,v_k))o(\Delta\sigma'_k).$$

Example

$$I=\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leqslant x+y\}$.

Example

$$I=\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中D为由曲线$a^2y=x^3, b^2y=x^3, p^2x=y^3, q^2x=y^3 (0<a<b, 0<p<q)$所围成的两个曲边四边形.

Example

化$I = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$为定积分，其中$a, b$不全为0.

对称性

第12.3节

三重积分的计算

Theorem

设$H=V\times W=\{(X,Y)\in\mathbb{R}^n|\ X\in V,\ Y\in W\}$,其中

$$V=\{X=(x_1,\cdots,x_k)|\ a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ i=1,\cdots,k\},$$
$$W=\{Y=(y_1,\cdots,y_{n-k})|\ c_i\leqslant y_i\leqslant d_i,\ i=1,\cdots,n-k\}.$$

若$f(X,Y)$在H可积, 且对任意$X\in V$, $f(X,Y)$关于Y在W可积,则$\displaystyle\int_W f(X,Y)\mathrm{d}\Omega_Y=\varphi(X)$在$V$可积, 且有

$$\int_H f(X,Y)\mathrm{d}\Omega=\int_V\varphi(X)\mathrm{d}\Omega_X=\int_V\mathrm{d}\Omega_X\int_W f(X,Y)\mathrm{d}\Omega_Y,$$

其中$\mathrm{d}\Omega_X=\mathrm{d}X=\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k$, $\mathrm{d}\Omega_Y=\mathrm{d}Y=\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_{n-k}$.

$n=3$情形: "先一后二"

如果V可以表示为

$$V=\{(x,y,z)|\ (x,y)\in D,\ z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\}\,,$$

其中D为V在xy平面上的投影, $z_1(x,y), z_2(x,y)$在D上连续, 则

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

$n = 3$情形: “先二后一”

如果区域V可以表示为

$$V = \{(x,y,z) |\ a \leqslant z \leqslant b,\ (x,y) \in D(z)\},$$

其中$D(z)$是随z连续变化平行于xy平面的有界闭区域, 那么

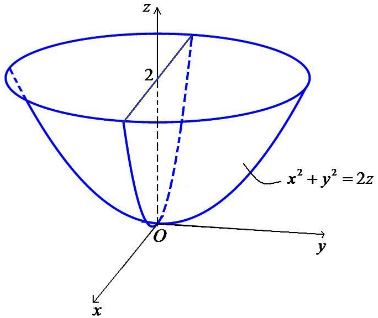
$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}z \iint_{D(z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Example

计算

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中V为由曲面$x^2 + y^2 = 2z$和平面$z = 2$所围成的区域.

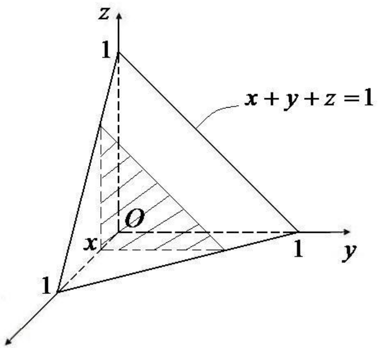


Example

计算

$$I = \iiint_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中V为由平面$x+y+z=1$和三个坐标面所围成的区域.

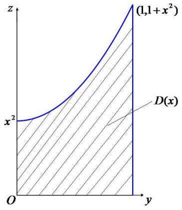


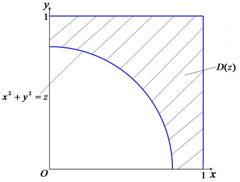
Example

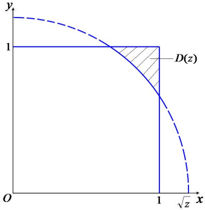
将积分

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

化为先y次z后x与先x次y后z次序的积分.

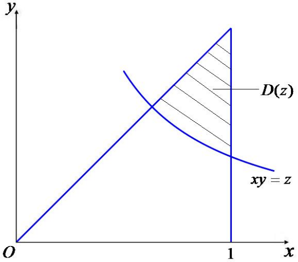


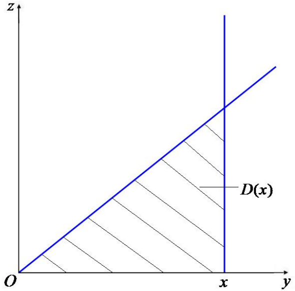




Example

将积分$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$写成先$y$次$x$后$z$与先$z$次$y$后$x$次序的累次积分，其中$V$为由$y=x$，$z=0$，$x=1$和$z=xy$所围成的区域.





设V为空间闭区域, $f(x,y,z)$在V连续. 设变换

$$\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w), \end{cases} \qquad (u,v,w) \in V'$$

建立了区域V与区域V'之间点的一一对应, 并且

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \neq 0, \qquad \forall (u,v,w) \in V'.$$

那么

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ = & \iiint_{V'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$$

其中$r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 由于

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\varphi,$$

三重积分在直角坐标与球面坐标之间的互换公式为

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_{V'} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$$

其中$r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $z \in R$, $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = r$.

三重积分在直角坐标与柱面坐标之间的互换公式为

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

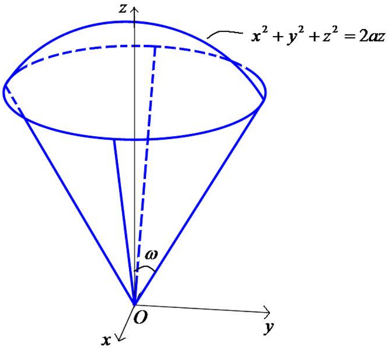
仿射变换：线性变换+平移

(1) 平移变换：$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$定义 $\varphi(x) = x + x_0$.

(2) 伸缩变换：$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$定义
$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \cdots, \lambda_n x_n)$.

Example

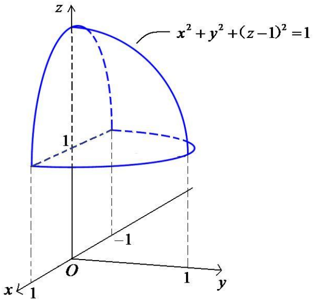
设V是由$x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$ 和$z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}\cot\omega$所确定的立体, 其中$a>0$, $\omega\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$为常数, 求$V$的体积.



Example

计算

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}z.$$



Example

求

$$I=\iiint_V \sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\text{其中}V:\begin{cases} x^2+y^2+z^2\leqslant a^2 \\ x^2+y^2\leqslant ax \end{cases}\qquad (a>0).$$

Example

求曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = ax$$

所围区域的体积V, 其中$a, b, c > 0$为常数.

Example

设$f(x)=\sum\limits_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$, 其中$A=(a_{ij})$为正定对称矩阵,求

$$I=\iiint_{f(x)\le 1}e^{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3.$$

第12.4节

重积分的应用

Example

设$\mathbb{R}^n$中n维单形的体积

$$D = \{(x_1, \cdots, x_n) \,|\, x_1 + \cdots + x_n \le 1, x_i \ge 0, i = 1, \cdots, n\}.$$

$$
\begin{aligned}
\int_D \mathrm{d}\Omega &= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{1-x_1} \mathrm{d}x_2 \int_0^{1-x_1-x_2} \mathrm{d}x_3 \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}} \mathrm{d}x_n \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{1-x_1} \mathrm{d}x_2 \int_0^{1-x_1-x_2} \mathrm{d}x_3 \\
&\quad \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}} (1-x_1-\cdots-x_{n-1})\mathrm{d}x_{n-1} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{1-x_1} \mathrm{d}x_2 \int_0^{1-x_1-x_2} \mathrm{d}x_3 \\
&\quad \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-3}} \frac{1}{2}(1-x_1-\cdots-x_{n-2})^2 \mathrm{d}x_{n-2} \\
&= \cdots \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{1-x_1} \frac{1}{(n-2)!} (1-x_1-x_2)^{n-2} \, \mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(n-1)!} (1-x_1)^{n-1} \, \mathrm{d}x_1 = \frac{1}{n!}.
\end{aligned}
$$

例题2

Example

设$\mathbb{R}^n$中球体的体积(记$\omega_n(r)$)

$$B_n(r)=\{(x_1,\cdots,x_n)\,|\,x_1^2+\cdots+x_n^2\le r^2\}.$$

证明$\omega_n(r)=\omega_n r^n$,其中单位球体积$\omega_n=\frac{2^n}{n!!}(\frac{\pi}{2})^{[n/2]}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\dfrac{\pi}{2}, & n=2k,\\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n=2k+1.\end{cases}$$

证明: 数学归纳法.

$$\begin{aligned}
\omega_n(r) &= \int_{B_n(r)} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&= \int_{-r}^{r} \mathrm{d}x_n \int_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2 \leqslant r^2-x_n^2} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1} \\
&= \int_{-r}^{r} \omega_{n-1}(r^2 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}x_n \quad (\text{由归纳假设}) \\
&= r^n 2\omega_{n-1} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}t \quad (\text{令} t = \frac{x_n}{r}).
\end{aligned}$$

记$\omega_n = 2\omega_{n-1} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}t,\ n = 2, 3, \cdots,$

从而$\omega_n(r) = \omega_n r^n$.

$$
\begin{aligned}
\text{(由归纳假设)}\quad \omega_{n-1} &= \frac{2^{n-1}}{(n-1)!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}, \\
\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数}, \end{cases}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\omega_n &= \begin{cases} \dfrac{2^n}{n!!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}, & n\text{为偶数}, \\ \dfrac{2^n}{n!!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}, & n\text{为奇数}, \end{cases} \\
&= \frac{2^n}{n!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}.
\end{aligned}
$$

考虑$\mathbb{R}^n$中的球坐标

$$
\begin{cases}
x_1 = r\ \cos\theta_1, \\
x_2 = r\ \sin\theta_1\cos\theta_2, \\
x_3 = r\ \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\
\qquad \cdots \\
x_{n-1} = r\ \sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\
x_n = r\ \sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1},
\end{cases}
$$

其中$r \geqslant 0, 0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi, i = 1, \cdots, n-2, 0 \leqslant \theta_{n-1} < 2\pi$.

则$\dfrac{D(x_1, \cdots, x_n)}{D(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})} == r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}$.

(1) 设曲面S由函数

$$z = z(x, y) \in C^1(\sigma_{xy}), \ (x, y) \in \sigma_{xy}$$

表示,其中S在xy平面的投影σ_{xy}(有确定的面积).

思路：分割，用对应的切平面的面积代替时间面积，取极限.

记在$M_i(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) \in S$处的切平面$\pi_i$的法向量与$z$轴正向的夹角为$\gamma_i$, 则

$$|\cos \gamma_i| = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2(\xi_i, \eta_i) + z_y'^2(\xi_i, \eta_i)}}.$$

由于
$$\Delta S_i^* = \frac{\Delta\sigma_i}{|\cos\gamma_i|},$$
故
$$\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i^* = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+z_x'^2(\xi_i,\eta_i)+z_y'^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i.$$
上式右端是连续函数$\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}$在区域$\sigma_{xy}$上的积分和，于是令$d\to 0$得到
$$S=\iint_{\sigma_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
或
$$S=\iint_{\sigma_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\cos\gamma|},$$
其中γ为曲面的法向量与z轴正向的夹角.

(2) 曲面S由方程$F(x,y,z)=0$确定,其中F具有连续偏导数,且$F_z\neq 0$, S上的点$\leftrightarrow D_{xy}$中的点一一对应. 由一一对应关系知,方程$F(x,y,z)=0$确定一个函数关系$z=z(x,y)$, $\forall\ (x,y)\in D_{xy}$.

由隐函数定理知, $z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}$, $z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}$, 故

$$
\begin{aligned}
S &= \iint_D \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\
&= \iint_D \sqrt{1+\frac{F'^2_x}{F'^2_z}+\frac{F'^2_y}{F'^2_z}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \iint_D \frac{|\nabla F|}{|F'_z|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Example

求球面$x^2 + y^2 + z^2 = 2az\ (a > 0)$包含在锥面$z^2 = 3(x^2 + y^2)$内的部分的表面积.

(3) 曲面参数方程表示：

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad \forall\ (u,v) \in D, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

其中D是uv平面上有确定面积的闭区域.

光滑简单曲面S:

(i) $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^1(D)$,

(ii) S上无奇点, 即

$$\operatorname{rank}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} = 2, \qquad \forall\ (u,v) \in D.$$

(iii) S上无自交点,

即$(u,v) \in D$与$(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in S$一一对应.

$$\overrightarrow{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$
$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)},\ B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)},\ C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)},$$

那么条件(ii)等价于(A,B,C)在D处处不为零向量. 由于

$$|\overrightarrow{r}'_u \times \overrightarrow{r}'_v| = \sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

所以条件(ii)等价于

$$\overrightarrow{r}'_u \times \overrightarrow{r}'_v \neq 0,\ \forall (u,v) \in D.$$

设任意$S \ni M \leftrightarrow M' \in D$. 若在$M'$处$C \neq 0$, 由逆映射存在定理得$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$, $\forall (x,y,z) \in S_M$, 小曲面块S_M 可表示为$z = z(u(x,y), v(x,y)), (x,y) \in \sigma_{xy}$. 因此小曲面块$S_M$的面积

$$\Delta S_M = \iint_{\sigma_{xy}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\cos\gamma|}.$$

由于曲面S上每点处的法向量为(A,B,C), 故

$$|\cos\gamma| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

设σ是uv平面上与S_M对应的区域, 应用二重积分的换元公式得

$$\Delta S_M = \iint_{\sigma} \frac{1}{|\cos\gamma|} |C| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_{\sigma} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

$$S=\iint_D\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_D|\overrightarrow{r}'_u\times\overrightarrow{r}'_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

记曲面的第一基本量：

$$\begin{aligned} E &= |\overrightarrow{r}'_u|^2=x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2,\\ G &= |\overrightarrow{r}'_v|^2=x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2,\\ F &= \langle\overrightarrow{r}'_u,\overrightarrow{r}'_v\rangle=x'_ux'_v+y'_uy'_v+z'_uz'_v,\end{aligned}$$

可知

$$|\overrightarrow{r}'_u\times\overrightarrow{r}'_v|=\sqrt{|\overrightarrow{r}'_u|^2|\overrightarrow{r}'_v|^2-\langle\overrightarrow{r}'_u,\overrightarrow{r}'_v\rangle^2}=\sqrt{EG-F^2},$$

则面积公式为

$$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

如果存在uv平面上的约尔当零测集E使得

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq 0,\ \text{或}\sqrt{EG-F^2} \neq 0, \quad \forall (u,v) \in D \backslash E,$$

且当$(u,v) \in D\backslash E$时, $\vec{r}(u,v)$是单射, 则表面积公式仍然成立.

(1) 球面表面积：

$$\begin{aligned} E &= x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi = R^2, \\ G &= x'^2_\theta + y'^2_\theta + z'^2_\theta = R^2 \sin^2\varphi, \\ F &= x'_\varphi x'_\theta + y'_\varphi y'_\theta + z'_\varphi z'_\theta = 0, \\ \sqrt{EG-F^2} &= R^2 \sin\varphi, \end{aligned}$$

$$S = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} R^2 \sin\varphi \mathrm{d}\theta = 4\pi R^2.$$

(2) 圆锥面面积S: $x^2+y^2=z^2,\ 0\leqslant z\leqslant 1$, 原点是$S$的奇点, S的参数方程

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \quad (r,\theta)\in D=[0,1]\times[0,2\pi]. \\ z=r, \end{cases}$$

$$E=x_r'^2+y_r'^2+z_r'^2=2,$$

$$G=x_\theta'^2+y_\theta'^2+z_\theta'^2=r^2,$$

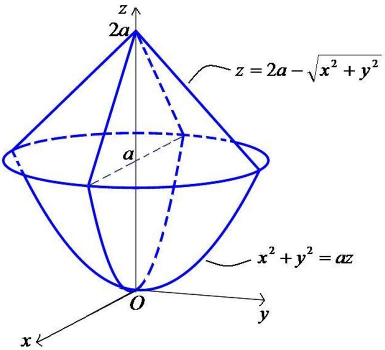
$$F=x_r'x_\theta'+y_r'y_\theta'+z_r'z_\theta'=0,$$

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{2}r,$$

$$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\sqrt{2}r\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}\pi.$$

Example

求由曲面$x^2+y^2=az$和$\sqrt{x^2+y^2}=2a-z\ (a>0)$所围立体的表面积.



Example

设$0 < b < a$, 求yz平面上的圆周$(y-a)^2+z^2=b^2$绕z轴旋转一周所得圆环面S的面积.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = \sqrt{b^2-(r-a)^2}, \end{cases} \qquad a-b \le r \le a+b,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

定积分计算旋转体面积

$$A = 2\pi \int_{-b}^{b} y_1 \sqrt{1 + y_{1z}'^2} dz + 2\pi \int_{-b}^{b} y_2 \sqrt{1 + y_{2z}'^2} dz,$$

其中$y_1 = a - \sqrt{b^2 - z^2}$, $y_2 = a + \sqrt{b^2 - z^2}$.

(1) 设物体的密度为$\rho(x,y,z)$，质心坐标为$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$，则

$$\overline{x}=\frac{\iiint_D x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},$$

$$\overline{y}=\frac{\iiint_D y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},$$

$$\overline{z}=\frac{\iiint_D z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}.$$

(2) 物体关于z轴, x轴和y轴的转动惯量分别为J_z, J_x, J_y, 则

$$J_z = \iiint_D \left(x^2 + y^2\right) \rho(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$J_x = \iiint_D \left(y^2 + z^2\right) \rho(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$J_y = \iiint_D \left(z^2 + x^2\right) \rho(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

一般地, 设l为一空间直线, 该物体上任一点(x, y, z)到l的距离为$r(x, y, z)$, 则该物体关于l的转动惯量

$$J_l = \iiint_D r^2(x, y, z)\rho(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(3) 设$P=(x_0,y_0,z_0)$为空间任一点, 在P点有一单位质量的质点M, 该物体对P点的万有引力为

$$\vec{F}=G\iiint_D \frac{\rho(x,y,z)\vec{r}}{r^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中$\vec{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$,
$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, G为引力常数.

练习1

Example

求由柱面$x^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = R^2$ $(R > 0)$所围部分的面积.

练习2

Example

计算$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le a^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}} \quad (b>a).$

练习3

Example

求由曲面$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2}$ 与$x_n = a_n$所围锥体的体积.

Example

设$f(x,y)$在单位圆内有连续的偏导数,且在边界上取值为零, 证明

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\iint_D \frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-f(0,0).$$

其中$D:\epsilon^2\le x^2+y^2\le 1.$

Example

设$f(x,y)$, $f'_y(x,y)$在$D=\{(x,y)|a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$上连续，其中$\varphi_1,\varphi_2$是$[a,b]$上的连续函数，$f(x,\varphi_1(x))=0$. 证明存在常数$C$,使得

$$\iint_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le C\iint_D\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$