第三章 连续函数

难题选解

例 1 设$f(x)$在区间I上的间断点都是可去间断点，令$g(x)=\lim\limits_{t\to x}f(t)$, $x\in I$. 证明$g(x)$在区间I连续.

证 任取$x_0\in I$, 因为$\lim\limits_{t\to x_0}f(t)=g(x_0)$, 所以对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得当$t\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I$时，就有$|f(t)-g(x_0)|<\varepsilon$. 于是任取$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I$, 在$|f(t)-g(x_0)|<\varepsilon$两边令$t\to x$取极限，由极限的保序性，有$|g(x)-g(x_0)|\leqslant\varepsilon$. 因此，$g(x)$在点$x_0$处连续. 由点$x_0\in I$的任意性知$g(x)$在区间$I$连续. □

例 2 设$f:(-\infty,+\infty)\to[0,+\infty)$是双射.

(1) 证明：$f(x)$不是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数；

(2) 证明：$f(x)$有无穷多个间断点.

证 (1) 反证. 若不然，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续. 因为f是双射，所以由命题"若$f(x)$在区间I上连续且是单射，则$f(x)$在I上严格单调"知f在$(-\infty,+\infty)$上严格单调. 不妨设f在$(-\infty,+\infty)$上严格单增，由$f:(-\infty,+\infty)\to[0,+\infty)$是双射知存在$x_0$, 使得$f(x_0)=0$, 从而$f(x_0-1)<f(x_0)=0$, 与$f$取值于$[0,+\infty)$矛盾!

(2) 反证. 若不然，则$f(x)$只有有限多个间断点. 由(1)知$f(x)$至少有1个间断点，不妨设$f(x)$的间断点一共有n个，由小到大依次为x_1, x_2, $\cdots$, x_n. 记$I_1=(-\infty,x_1)$, $I_k=(x_{k-1},x_k)$, $k=2,3,\cdots,n$, $I_{n+1}=(x_n,+\infty)$, 则对任意$k\in\{1,2,\cdots,n+1\}$, 由f在I_k上是连续单射知f在I_k上严格单调. 因为$f(x)$是连续函数，所以$f(I_k)$是区间或单点集. 又由f在I_k上严格单调以及I_k是不含端点的区间知$f(I_k)$也是不含端点的区间（若$f(I_k)$是含端点的区间，则用反证法类似于(1)中的证明不难导出矛盾）. 因为$f:(-\infty,+\infty)\to[0,+\infty)$是双射, 所以$f(I_k)$是开区间或形如$(a,+\infty)$的区间，并且$f(I_k)$彼此不交. 因为只

有$x_1,x_2,\cdots,x_n$这n个点不在$\bigcup\limits_{k=1}^{n+1}I_k$中，所以$[0,+\infty)$除去$f(I_1)$, $\cdots$, $f(I_{n+1})$之外只有有限多个点，从而$f(I_1)$, $\cdots$, $f(I_{n+1})$在数轴上按从左到右的顺序必然依次为$(0,y_1)$, (y_1,y_2), $\cdots$, (y_{n-1},y_n), $(y_n,+\infty)$的形式. 因为$f:(-\infty,+\infty)\to[0,+\infty)$是双射，所以$f$是$I_k$与$f(I_k)$之间的一一对应，$k=1,2,\cdots,n+1$. 因此$f$是$(-\infty,+\infty)\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n+1}I_k$到$[0,+\infty)\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n+1}f(I_k)$之间的一一对应，即$f$是$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$与$\{0,y_1,y_2,\cdots,y_n\}$之间的一一对应，但集合$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$有$n$个元素，集合$\{0,y_1,y_2,\cdots,y_n\}$有$n+1$个元素，它们不可能一一对应，矛盾！ □

例 3 设函数$f(x)$在$(0,1]$上有界且$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$. 证明存在$[0,1]$上单调递增的连续函数$g(x)$, 使得$g(0)=0$, 且对任意$x\in(0,1]$, 都有$f(x)\leqslant g(x)$.

证 设$M>0$是$f(x)$的一个上界. 因为$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$, 所以对$\varepsilon_1=\dfrac{M}{2}$, 存在$\delta_1\in(0,1)$, 使得当$0<x\leqslant\delta_1$时，有$|f(x)|\leqslant\varepsilon_1=\dfrac{M}{2}$. 同理，对$\varepsilon_2=\dfrac{M}{3}$, 存在$\delta_2\in\left(0,\dfrac{\delta_1}{2}\right)$, 使得当$0<x\leqslant\delta_2$时，有$|f(x)|\leqslant\varepsilon_2=\dfrac{M}{3}$. 以此类推，我们得到数列$\{\delta_n\}\subseteq(0,1)$, 对任意正整数$n$, 有

$$0<\delta_{n+1}<\frac{\delta_n}{2}\text{且}|f(x)|\leqslant\frac{M}{n+1},\ \forall x\in(0,\delta_n].$$

由$0<\delta_{n+1}<\dfrac{\delta_n}{2}$知$\{\delta_n\}$严格递减收敛于0. 令

$$g(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \frac{\frac{M}{n}-\frac{M}{n+1}}{\delta_n-\delta_{n+1}}(x-\delta_{n+1})+\frac{M}{n+1}, & \delta_{n+1}<x\leqslant\delta_n,\ n=1,2,\cdots,\\ M, & \delta_1<x\leqslant1.\end{cases}$$

因为在$[\delta_{n+1},\delta_n]$上，$g(x)$严格递增，$g(\delta_{n+1})=\dfrac{M}{n+1}$, $g(\delta_n)=\dfrac{M}{n}$, 又$g(0)=0$, $g(x)=M$, $x\in(\delta_1,1]$, 所以$g(x)$在$[0,1]$上单调递增. 函数$g(x)$在$(0,1]$上连续是显而易见的. 对任意$\varepsilon>0$, 存在正整数n, 使得$\dfrac{M}{n}<\varepsilon$, 于是当$x\in(0,\delta_n]$时，有$|g(x)|\leqslant\dfrac{M}{n}<\varepsilon$. 按定义知$g(x)$在0点处也连续. 当$\delta_{n+1}<x\leqslant\delta_n$时，有$f(x)\leqslant|f(x)|\leqslant\varepsilon_n=\dfrac{M}{n+1}=g(\delta_{n+1})\leqslant g(x)$; 当$\delta_1<x\leqslant1$时，有$f(x)\leqslant M=g(x)$. 因此，对任意$x\in(0,1]$, 都有$f(x)\leqslant g(x)$. □

例 4 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，常数$c\in\left(0,\frac14\right]$. 对一切实数$x$，都有$f(x)=f(x^2+c)$, 证明: $f(x)$是常数函数.

证 设$r_1 \leqslant r_2$是$x^2-x+c=0$的两个实根，则易见$c<r_1$.

当$x>r_2$时，令$x_1=x$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n-c}$ $(n=1,2,\cdots)$, 则用归纳法可证$r_2<x_{n+1}<x_n$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=r_2$, 从而$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(r_2)$. 又$f(x)=f(x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$, 故$f(x)=f(r_2)$, 即$f(x)$在$[r_2,+\infty)$上是常数.

设$x\in(r_1,r_2)$, 令$x_1=x$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n-c}$ $(n=1,2,\cdots)$, 则$x_n<x_{n+1}<r_2$. 同理可证$f(x)=f(r_2)$, 结合$f(x)$的连续性即知$f(x)$在$[r_1,r_2]$上也是常数.

最后，当$x<r_1$时，令$x_1=x$, $x_{n+1}=x_n^2+c$ $(n=1,2,\cdots)$, 则当$x_n<r_1$时，有$x_{n+1}>x_n$. 若对所有n, 都有$x_n<r_1$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=r_1$, 同理可证$f(x)=f(r_1)$; 若存在$n$使得$x_n\geqslant r_1$, 则$f(x_n)=f(r_1)$, 于是$f(x)=f(x_n)=f(r_1)$. 因此$f(x)$在$(-\infty,r_1]$上也是常数.

综合以上讨论即得$f(x)$是常数函数. □

例 5 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且有下界，求证：存在实数x_0, 使得对任意$x\neq x_0$, 都有

$$f(x)>f(x_0)-|x-x_0|.$$

证 令$g(x)=f(x)+\dfrac{|x|}{2}$, 则由$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且有下界知$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=+\infty$. 因此$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有最小值，设$x_0$是$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的一个最小值点，则对任意实数$x$, 有$f(x)+\dfrac{|x|}{2}\geqslant f(x_0)+\dfrac{|x_0|}{2}$. 于是对任意$x\neq x_0$, 都有

$$f(x)\geqslant f(x_0)-\frac{|x|-|x_0|}{2}\geqslant f(x_0)-\frac{|x-x_0|}{2}>f(x_0)-|x-x_0|.$$

□

例 6 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的函数. 求出所有满足条件“对任意实数$a<b$, $f\left([a,b]\right)$是长度为$b-a$的闭区间”的$f(x)$.

解 $f(x)=x+c$和$f(x)=-x+c$(其中c是常数)显然满足条件，下面证明这是仅有的满足条件的函数. 设$f(x)$满足条件，则对任意x和y, 有$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$, 故$f(x)$连续. 任意取定$x<y$, 令$a\in[x,y]$是$f$在$[x,y]$上的最大值点，$b\in[x,y]$是$f$在$[x,y]$上的最小值点，

则$f([x,y])=[f(b),f(a)]$. 由$y-x=f(a)-f(b)\leqslant|a-b|\leqslant y-x$知$f(a)-f(b)=|a-b|=y-x$, 故要么$a=x$且$b=y$, 要么$a=y$且$b=x$. 无论哪种情形都有$f(x)\neq f(y)$, 故$f$是单射，结合$f$的连续性知$f$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调. 若$f$在$(-\infty,+\infty)$上严格递增，则对任意$x<y$, 有$f(x)-f(y)=x-y$, 即$f(x)-x=f(y)-y$, 从而有常数$c$, 使得$f(x)-x=c$, 即$f(x)=x+c$; 若$f$在$(-\infty,+\infty)$上严格递减，则对任意$x<y$, 有$f(x)-f(y)=y-x$, 即$f(x)+x=f(y)+y$, 从而有常数$c$, 使得$f(x)+x=c$, 即$f(x)=-x+c$. □

例 7 是否存在$\mathbb{R}$上的连续函数$f(x)$, 使得$f(x)$在有理点上取值为无理数, 在无理点上取值为有理数?

答 不存在这样的函数. 否则, 假设$f(x)$为$\mathbb{R}$上的连续函数且在有理点上取值为无理数, 在无理点上取值为有理数. 令$g(x)=f(x)-x$, 则$g(x)$在$\mathbb{R}$上连续且在任一点取值都为无理数，根据介值定理知$g(x)$在$\mathbb{R}$上恒为常数. 设$g(x)\equiv c$, 则$f(x)=x+c$. 由$f(0)=c$知c是无理数，于是$f(c)=c+c=2c$也是无理数，与$f(x)$在无理点上取值为有理数矛盾！ □

例 8 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(f(x))=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=-\infty$, 证明：$f(x)$不是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数.

证 反证. 若不然，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续. 又因为$\lim\limits_{x\to\infty}f(f(x))=\infty$, 所以根据3.4节的例3知$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. 对$M=1$, 存在$X>0$, 当$x>X$时，有$|f(x)|>M=1$. 因此根据介值定理，当$x>X$时，$f(x)$恒大于1或恒小于$-1$. 于是$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$或$-\infty$. 同理可证，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$或$-\infty$. 下面分情形讨论.

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$的情形. 这时$\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=+\infty$, 与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=-\infty$矛盾.

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$的情形. 这时$\lim\limits_{x\to-\infty}f(f(x))=-\infty$, 与$\lim\limits_{x\to-\infty}f(f(x))=+\infty$矛盾.

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$的情形. 这时$\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=+\infty$, 与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=-\infty$矛盾.

综上所述，无论如何总有矛盾，因此假设不成立. 这就证明了$f(x)$不是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数. $\square$

补充题3

(A)

1. 求函数$f(x)=[x^2]\sin(\pi x)$的间断点并指出间断点的类型，其中$[\cdot]$是取整函数.

2. 给出满足下面要求的函数的例子.

(1) $[0,1]$上处处不连续的无界函数$f(x)$；

(2) 定义域是$(0,1)$, 值域是$[0,1]$的连续函数$f(x)$;

(3) $f(x)$是$(0,1)$上的连续函数，值域是$(0,+\infty)$且对任何$y>0$都有无穷多个$x\in(0,1)$使得$f(x)=y$.

3. 证明：若函数$g(x)$在(a,b)单调且值域是$(-\infty,+\infty)$, 则函数$g(x)$在(a,b)连续.

4. 设$f(x)=x\mathrm{e}^x\ (x\geqslant 0)$.

(1) 证明：$f(x)$在$[0,+\infty)$上存在严格递增且连续的反函数$f^{-1}(y)$;

(2) 证明：$\lim\limits_{y\to+\infty}f^{-1}(y)=+\infty$;

(3) 求$\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(y)}{\ln y}$.

5. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，并且对任意有理数r和任意正整数n, 有$f\left(r+\frac{1}{n}\right)=f(r)$, 证明：$f(x)$是常数函数.

6. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，并且任意开区间(a,b)的象集$f\left((a,b)\right)=\{f(x)|x\in(a,b)\}$仍是开区间，证明：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调.

7. (1) 证明：对任意正整数n, 方程$\mathrm{e}^x+nx-2=0$有唯一正根;

(2) 记方程$\mathrm{e}^x+nx-2=0$的唯一正根为a_n, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$;

(3) 求$\lim\limits_{n\to\infty}n(na_n-1)$.

8. 设$p(x)$是一个非零的实系数多项式，证明：方程$\mathrm{e}^x=|p(x)|$至少有一个实根.

9. 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续且非负，n是正整数，$x_k\in[a,b]$, $k=1,2,\cdots,n$, 证明：存在$\xi\in[a,b]$, 使得$f(\xi)=\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$.

10. 设n是大于1的整数，$f(x)$在$[0,n]$上连续，$f(0)=0$, 求证：存在$\xi\in[0,n-1]$, 使得$n[f(\xi+1)-f(\xi)]=f(n)$.

11. 设函数$f(x)$和$g(x)$都在$(-\infty,+\infty)$上连续，对任意实数x, 都有$f(g(x))=g(f(x))$, 证明：如果方程$f(f(x))=g(g(x))$有实根，那么方程$f(x)=g(x)$也有实根.

12. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续且对任何实数x, 都有$f(x)+f(2x)=0$, 证明：$f(x)\equiv 0$.

(B)

1. 求证：存在$[0,+\infty)$上不恒等于0的连续函数$f(x)$, 使得对任意$x\geqslant 0$, 都有$f(4x)=f(2x)+f(x)$.

2. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，对任意实数x, 都有$\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}=0$, 证明：$f(x)$是常数函数.

3. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)$在$[0,1]$的任何子区间上都不单调，求证：$f(x)$的极小值点的集合在$[0,1]$中稠密.

4. 设$f_1(x)=x$, $f_{n+1}(x)=f_n(x)\left[f_n(x)+\frac{1}{n}\right]$, $n=1,2,\cdots$, 证明：存在唯一的$a>0$, 使得对一切正整数n, 都有

$$0<f_n(a)<f_{n+1}(a)<1.$$

5. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，n是奇数，对任意实数x, 成立$(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n个f})(x)=-x$, 证明：$f(x)=-x$.

6. 设$f(x)$和$g(x)$都是$(-\infty,+\infty)$上的函数，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，求证：不存在$(-\infty,+\infty)$上的连续函数$\varphi(x)$, 使得对任何实数x和y, 都有

$$\varphi(f(x)+g(y))=xy.$$

7. 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，对任何实数x,y都有$f(x+y)=f(x)+f(y)+\lambda xy$, 其中$\lambda$是常数，求所有满足条件的$f(x)$.

8. 设函数$f(x)$在$[-1,1]$上连续，对任何$x\in[-1,1]$, 有$f(2x^2-1)=2xf(x)$, 求证：$f(x)\equiv 0$.

9. 设$f(x)$在$[-1,1]$上连续，满足

(i) $f(x)=\dfrac{2-x^2}{2}f\left(\dfrac{x^2}{2-x^2}\right)$, $\forall x\in[-1,1]$;

(ii) $f(0)=1$,

证明满足要求的$f(x)$是唯一的，并求$f(x)$的显式表达式.

10. 设$a>0$, $b\leqslant -a^2$, 求证：不存在$(-\infty,+\infty)$上具有介值性的函数$f(x)$, 使得

$$f(f(x))=af(x)+bx,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

11. 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，$a,b\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 对任何实数$x$, 有$f(f(x))=af(x)+bx$.

(1) 证明：$f(x)$是从$(-\infty,+\infty)$到$(-\infty,+\infty)$的双射；

(2) 证明：$f(0)=0$;

(3) 证明：存在实数k, 使得$f(x)=kx$, $\forall x\in\mathbb{R}$.