无穷大量与无穷小量

数学分析I

第9讲

October 19, 2022

$\{(-1)^n\}$ 和$\{n\}$ 都是发散数列, 前者的值总在振动, 没有任何固定的趋势而后者的值不断增大, 有着固定的趋势.

定义 1

设$\{x_n\}$ 是一个数列.

(i) 如果对于任何$M > 0$, 都存在自然数N, 使当$n > N$ 时, 就有$x_n > M$, 则称$\{x_n\}$ 为正无穷大量或称$\{x_n\}$ 的极限值为$+\infty$, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;

(ii) 如果对于任何$M > 0$, 都存在自然数N, 使当$n > N$ 时, 就有$x_n < -M$, 则称$\{x_n\}$ 为负无穷大量 或称$\{x_n\}$ 的极限值为$-\infty$, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$;

(iii) 如果对于任何$M > 0$, 都存在自然数N, 使当$n > N$ 时, 就有$|x_n| > M$, 则称$\{x_n\}$ 为无穷大量 或称$\{x_n\}$ 的极限值为∞ , 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

上述三种数列统称为无穷大数列或无穷大量.

无穷大数列要注意的问题

第一, 符号$+\infty$与$-\infty$并不是数轴上的点, 此处$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$仅是一种变化趋势的记号, 并不是极限存在. 事实上, 利用极限定义的否定可以证明无穷大数列是发散的, 没有极限.

第二, 无穷大数列与无界数列的关系. 无穷大数列一定是无界的, 但是无界数列不一定是无穷大量, 如数列$\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}n\right\}$无界, 但非无穷大量.

例 1

设$|q|>1$, 求证$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\infty$.

对于例1这样简单的数列，可以通过直接解不等式$|x_n|>M$来找到N.

例 2

设$x_n=\dfrac{2n^3-5n-1}{5n^2+4n+4}$, 求证$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

一般来说，对复杂问题常采用适当缩小$|x_n|$的技巧.

读者可以进一步证明数列$\{\log_a n\}$ $(a>1)$, $\{n^\alpha\}$ $(\alpha>0)$, $\{q^n\}$ $(q>1)$, $\{n!\}$, $\{n^n\}$都是正无穷大数列.

类似于数列的情形, 对于函数来讲, 如果在自变量的某种极限过程中, 函数值$f(x) \to +\infty$, $f(x) \to -\infty$, $f(x) \to \infty$, 就称该函数是在相应极限过程下的无穷大量.

由于自变量的极限过程共有六种不同情形: $x \to x_0$, $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$, 函数的极限值是无穷大有三种不同情形, 所以函数无穷大量的定义有十八种不同情形. 下面, 我们举几种定义作为示范, 其余情形请读者自行给出.

$\lim_{x\to\alpha} f(x) = A$的统一刻画

自变量有六种不同的变化状态，A有$A \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$, $A = -\infty$, $A = \infty$四种情形，$\lim_{x\to\alpha} f(x) = A$的定义可以统一陈述如下.

对于A的任何“邻域”V, 都存在$x \to \alpha$相应的“空心邻域”U, 当$x \in U$时，就有$f(x) \in V$.

- $A \in \mathbb{R}$的“邻域”为$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, 即$B_\varepsilon(A)$;
- $A = +\infty$的“邻域”为$(M, +\infty)$;
- $A = -\infty$的“邻域”为$(-\infty, -M)$;
- $A = \infty$相应的“空心邻域”为$(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$.

定义 2

(i) 设函数$f(x)$在点x_0的一个空心邻域中有定义. 如果对于任何$M > 0$, 都存在$\delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时, 就有$f(x) > M$, 则称$f(x)$当$x \to x_0$时是正无穷大量, 记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$或者$f(x) \to +\infty \ (x \to x_0)$.

(ii) 设函数$f(x)$在(a, x_0)有定义. 如果对于任何$M > 0$, 都存在$\delta > 0$, 当$x_0 - \delta < x < x_0$时, 就有$f(x) < -M$, 则称$f(x)$当$x \to x_0^-$时是负无穷大量, 记为$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$或者$f(x) \to -\infty \ (x \to x_0^-)$.

(iii) 设函数$f(x)$在(x_0, b)有定义. 如果对于任何$M > 0$, 都存在$\delta > 0$, 当$x_0 < x < x_0 + \delta$时, 就有$|f(x)| > M$, 则称$f(x)$当$x \to x_0^+$时是无穷大量, 记为$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$或者$f(x) \to \infty \ (x \to x_0^+)$.

定义 3

(i) 设函数$f(x)$在一个形如$(a,+\infty)$的区间有定义. 如果对于任何$M>0$, 都存在$X>0$, 当$x>X$时, 就有$|f(x)|>M$. 则称$f(x)$当$x\to+\infty$时是无穷大量, 记为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$或者$f(x)\to\infty\ \ (x\to+\infty)$.

(ii) 设函数$f(x)$在一个形如$(-\infty,b)$的区间有定义. 如果对于任何$M>0$, 都存在$X>0$, 当$x<-X$时, 就有$f(x)>M$, 则称$f(x)$当$x\to-\infty$时是正无穷大量, 记为$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$或者$f(x)\to+\infty\ (x\to-\infty)$.

例 3

求证$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$.

无穷大量的性质

不难由定义证明无穷大量的如下一些性质，我们以函数在$x \to x_0$的过程下为例叙述这些性质, 其他情形请读者自行给出.

定理 1

设函数$f(x), g(x)$在x_0的某个空心邻域有定义.

(i) 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, 则 $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = +\infty$;

(对于$-\infty$的情形有相应的结论)

(ii) 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $g(x)$在x_0的某个空心邻域有界, 则 $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \infty$;

(iii) 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, 存在常数$c > 0$使得在$x_0$的某个空心邻域有$|g(x)| \geqslant c$, 则 $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \infty$;

(iv) 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, 则 $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$;

(v) 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, 在x_0的某空心邻域中$f(x) \neq 0$, 则 $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

例 4

设$k, m \in \mathbb{N}^*$且$k > m$, a_i, b_i 都是与x无关的常数且$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$,

$$f(x) = \frac{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m}.$$

求证$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

根据定理中表明的无穷大量与无穷小量之间的关系, 今后可以将对无穷大量的研究转化为对无穷小量的研究.

判断题

判断下面的命题是否成立.

设$\{x_n\}$是一个无穷大数列，则对任意发散数列$\{y_n\}$, 数列$\{x_ny_n\}$都无界.

(A) 成立

(B) 不成立

判断题

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在点x_0的某空心邻域中有定义，如果对任意在点x_0的某空心邻域中有定义且$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$不存在的函数$g(x)$, 极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$都不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 其中$A=\infty$或$A$为非零实数.

(A) 成立

(B) 不成立

复合函数的极限

设 $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$且存在$\delta>0$, 使当$0<|x-x_0|<\delta$时, 有$g(x)\neq y_0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A$.

实际上，x_0, y_0, A也可以是无穷大量. 下面举两个例子，其他情形请读者自行给出.

定理 2

设 $\lim\limits_{y\to\infty} f(y)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A$.

定理 3

设 $\lim\limits_{y\to-\infty} f(y)=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(g(x))=\infty$.

函数极限与数列极限的关系

海涅定理

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$的充分必要条件是对任何数列$\{x_n\}$: $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$且$x_n \neq x_0$, $n = 1, 2, \cdots$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

实际上，对于无穷大量，也成立类似的结论. 下面举两个例子，其他情形请读者自行给出.

定理 4

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$当且仅当对任何正无穷大数列$\{x_n\}$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

定理 5

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$的充分必要条件是对任何数列$\{x_n\}$: $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$且$x_n < x_0$, $n = 1, 2, \cdots$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$.

为了比较无穷小量之间趋于0的快慢程度, 我们有如下定义.

定义 4

设$y(x)$与$z(x)$是在自变量的同一个极限过程下的无穷小量. 在这种极限过程下,

(i) 若$\dfrac{y}{z} \to 0$, 则称y是z的高阶无穷小, 记为$y = o(z)$.

(ii) 若存在$A > 0,\ B > 0$, 使$A \leqslant \left|\dfrac{y}{z}\right| \leqslant B$, 则称$y$是$z$的同阶无穷小, 记为$y = \Theta(z)$.

(iii) 若$\dfrac{y}{z} \to 1$, 则称y是z的等价无穷小, 记为$y \sim z$.

注意: 通常, 将存在$B > 0$, 使$\left|\dfrac{y}{z}\right| \leqslant B$的情形记为$y = O(z)$. 由上述定义可知, 等价无穷小是同阶无穷小的特殊情形, 而$y = o(z)$与$y = \Theta(z)$都是$y = O(z)$的特殊情形.

等价无穷小量的例子

由于自变量的六种极限过程在适当的变换下都可以转化为$x\to 0$的过程, 因此对于这一过程下无穷小量的讨论尤显重要. 当$x\to 0$时, 读者可以自行证明如下等价无穷小量.

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},$$

$$\arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\quad \mathrm{e}^x-1\sim x,\quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\ (\alpha\neq 0).$$

大家可以在平时学习中积累遇到的等价无穷小量. 例如，在数列极限的情形，有如下等价无穷小量.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\sim\frac{1}{\ln n}\ (n\to\infty),\quad \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\sim\frac{\mathrm{e}}{n}\ (n\to\infty).$$

无穷小量阶的比较在数学分析中有重要的意义. 在此, 我们只给出等价无穷小量在求极限时的应用, 仍以$x \to x_0$的过程为例叙述下面的定理. 它表明, 在求极限时, 对解析式中的因式可以用它的等价无穷小量替换.

定理 6

设$f(x)$与$g(x)$为无穷小量且$f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$, 并且假定$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)g(x) = A$ (或$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{h(x)}{g(x)} = A$). 那么$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)f(x) = A$ (或$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{h(x)}{f(x)} = A$).

等价无穷小量替换的例子

例 5

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{(x+x^2)\sin x}$.

在计算极限时，应用等价无穷小量替换是常见的做法.

需要注意的是, 利用等价无穷小量替换求极限, 基于定理6的结论, 对解析式中的因式进行替换是可以的, 但是对其它部分进行替换不能保证结果正确.

例如求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$, 下面的做法是错误的:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

正确的做法为:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(-\frac{x^2}{2})}{x^3}=-\frac{1}{2}.$$

等价无穷大量

类似于等价无穷小量，我们可以定义等价无穷大量. 设$y(x)$与$z(x)$是在自变量的同一个极限过程下的无穷大量. 在这种极限过程下, 若$\dfrac{y}{z} \to 1$, 则称y是z的等价无穷大, 记为$y \sim z$.

例如，在数列极限情形，有如下等价无穷大量.

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n \ (n \to \infty),$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \ (n \to \infty) \ (\text{斯特林(Stirling)公式}).$$

在求极限时，解析式中的因式若是无穷大量，则可以用它的等价无穷大量替换. 例如，由斯特林公式，有

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\cdot\sqrt{n}} \\
= & \lim_{n\to\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!\cdot\sqrt{n}} \\
= & \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\cdot\sqrt{n}} \\
= & \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\cdot 2\pi n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\cdot\sqrt{n}} \\
= & \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

判断下面的命题是否成立.

设$\{x_n\}$是一个正数数列，如果$x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to \infty)$, 那么

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} x_k = 0.$$

(A) 成立

(B) 不成立

判断下面的命题是否成立.

设$x_{ij} > 0$, $i, j \in \mathbb{N}^*$, 如果对每个正整数i, 都有$x_{ij} = o\left(\frac{1}{j}\right)$ $(j \to \infty)$, 那么

$$\lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{j} x_{ij} = 0.$$

(A) 成立

(B) 不成立