不定式

当$f(x)\to 0$且$g(x)\to 0$或者$f(x)\to\infty$且$g(x)\to\infty$时，比值$\frac{f(x)}{g(x)}$的极限状态极为复杂，这两种极限分别被称为$\frac{0}{0}$型不定式和$\frac{\infty}{\infty}$型不定式。此外还有另外五种不定式: $\infty-\infty$，$0\cdot\infty$，0^0，1^∞，∞^0型.

如果极限$\lim u(x)^{v(x)}$是0^0，1^∞或∞^0型不定式，则由$\lim u(x)^{v(x)}=e^{\lim v(x)\ln(u(x))}$就化为$0\cdot\infty$型不定式.

如果极限$\lim f(x)g(x)$是$0\cdot\infty$型不定式，则由$\lim f(x)g(x)=\lim\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$或$\lim f(x)g(x)=\lim\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$就化为$\dfrac{0}{0}$型不定式或$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式.

如果极限$\lim[f(x)-g(x)]$是$\infty-\infty$型不定式，则由$\lim[f(x)-g(x)]=\lim\dfrac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$就化为$\dfrac{0}{0}$型不定式.

洛必达(L'Hospital)法则以导数为工具，给出了一定条件下$\frac{0}{0}$型不定式和$\frac{\infty}{\infty}$型不定式的计算方法.

定理 1 (洛必达法则)

设函数$f(x)$和$g(x)$都在点x_0的一个空心邻域$\mathring{B}(x_0)$可导且$g'(x) \neq 0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (A \in \mathbb{R} \text{ 或 } A = \pm\infty).$$

(i) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$;

(ii) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$ 也成立.

由证明过程可见，洛必达法则对于单侧极限同样成立.

定理 2 (洛必达法则)

设$f(x)$和$g(x)$都在$|x| > a > 0$时可导且$g'(x) \neq 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \ \ (A \in \mathbb{R} \text{ 或 } A = \pm\infty).$$

(i) 若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, 则$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$;

(ii) 若$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, 则$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$ 也成立.

由证明过程可见, 若把极限过程 “$x \to \infty$” 换成 “$x \to +\infty$” 或 “$x \to -\infty$” , 则定理2照样成立.

判断下面的命题是否成立.

设$f(x)$在$(a,+\infty)$可导， $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(A) 成立

(B) 不成立

判断下面的命题是否成立.

设$f(x)$在$(a,+\infty)$单调且可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 则$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(A) 成立

(B) 不成立

例 1

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}, \quad \alpha>0.$

在使用洛必达法则求极限之前或求解运算中，一定要认真检验其条件是否都已被满足，只有在确认条件都已满足之后才能应用或继续运算，否则就有可能得到错误的结果.

例 2

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

这是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式，但是不能应用洛必达法则.

在使用洛必达法则求极限时，要注意与其它方法相结合以简化计算.

例 3

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\arctan x}-\mathrm{e}^{x}}{\tan^3 x}$.

这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式, 直接用洛必达法则不如将洛必达法则与等价无穷小量替换的方法结合起来.

对于$0\cdot\infty$型不定式，利用等式$f(x)g(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$可以将其化为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式.

例 4

求极限$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x,\quad \alpha>0.$

计算$\infty-\infty$型不定式的例题

对于$\infty-\infty$型不定式，利用等式$f(x)-g(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\dfrac{1}{\frac{1}{g(x)}}$, 再通分可以将其化为$\dfrac{0}{0}$型不定式. 实际上，经常$\infty-\infty$型不定式本身就能通分.

例 5

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

对于0^0，1^∞，∞^0型不定式，利用等式$u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$，可以将其归为$0\cdot\infty$型不定式$v(x)\ln u(x)$极限的计算.

例 6

求极限$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

例 7

求极限$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan x^{\tan 2x}$.

对于数列极限，可以先考虑对应的函数极限，应用洛必达法则计算出极限值后，根据海涅定理就得出数列极限.

例 8

求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\mathrm{e}-(1+\frac{1}{n})^n\right]$.

例 9

设$f(x)$在$(a,+\infty)$中可微且$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$, 求证$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

参考题

设$f(x)$在$(0,+\infty)$上可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\dfrac{f'(x)}{x}\right)=0$, 求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.