第十一章 多元函数的微分学

难题选解

例 1 设函数$f(X)$是$\mathbb{R}^n$上连续可微的凸函数，$f(O)=0$. 证明：存在常数α和β, 使得对任意$X\in\mathbb{R}^n$, 都有$f(X)\geqslant\alpha|X|+\beta$.

证 因为$f\in C^1(\mathbb{R}^n)$, $S=\{X\in\mathbb{R}^n\big||X|=1\}$是紧集，所以$\langle\nabla f(X),X\rangle$与$f(X)-\langle\nabla f(X),X\rangle$在$S$上取得最值. 令

$$\alpha=\min_{X\in S}\langle\nabla f(X),X\rangle,\quad \beta=\min_{X\in S}\left(f(X)-\langle\nabla f(X),X\rangle\right),$$

下证α和β满足要求.

对任何$X\in\mathbb{R}^n$, $X\neq O$，令$Y=\dfrac{X}{|X|}$, 则$Y\in S$, 由凸函数的性质得

$$\begin{aligned}f(X)&\geqslant f(Y)+\langle\nabla f(Y),X-Y\rangle=\langle\nabla f(Y),X\rangle+f(Y)-\langle\nabla f(Y),Y\rangle\\&=\langle\nabla f(Y),Y\rangle|X|+(f(Y)-\langle\nabla f(Y),Y\rangle)\geqslant\alpha|X|+\beta.\end{aligned}$$

对任意$X\in S$, 有$0=f(O)\geqslant f(X)+\langle\nabla f(X),-X\rangle=f(X)-\langle\nabla f(X),X\rangle$, 故$\beta\leqslant 0$. 因此对于$X=O$, 也成立$f(X)\geqslant\alpha|X|+\beta$. 这就完成了证明. □

例 2 设$f(X)$是$\mathbb{R}^n$上可微的凸函数，存在常数$L>0$, 对任意$X,Y\in\mathbb{R}^n$, 都有$|\nabla f(X)-\nabla f(Y)|\leqslant L|X-Y|$, 证明：对任意$X,Y\in\mathbb{R}^n$, 都有

$$|\nabla f(X)-\nabla f(Y)|^2\leqslant L\langle\nabla f(X)-\nabla f(Y),X-Y\rangle.$$

证 对任意固定的$X_0\in\mathbb{R}^n$, 令

$$g(X)=f(X)-f(X_0)-\langle\nabla f(X_0),X-X_0\rangle,$$

则$g(X)$是$\mathbb{R}^n$上可微的凸函数，对任意$X,Y\in\mathbb{R}^n$, 都有$|\nabla g(X)-\nabla g(Y)|\leqslant L|X-Y|$. 根据凸性，$g(X)$在$X_0$处取得最小值0. 下面证明

$$g(X)\geqslant\frac{1}{2L}|\nabla g(X)|^2.\tag{1}$$

设$Y_0 = X - \dfrac{1}{L}|\nabla g(X)|$, $y(t) = Y_0 + t(X - Y_0)$, 则$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(y(t)) = \langle \nabla g(y(t)), X - Y_0\rangle$, 于是有

$$
\begin{aligned}
g(X) &= g(Y_0) + \int_0^1 \langle \nabla g(y(t)), X - Y_0\rangle \,\mathrm{d}t \\
&= g(Y_0) + \langle \nabla g(X), X - Y_0\rangle - \int_0^1 \langle \nabla g(X) - \nabla g(y(t)), X - Y_0\rangle \,\mathrm{d}t \\
&\geqslant 0 + \frac{1}{L}|\nabla g(X)|^2 - \int_0^1 |\nabla g(X) - \nabla g(y(t))| \cdot |X - Y_0| \mathrm{d}t \\
&\geqslant \frac{1}{L}|\nabla g(X)|^2 - |X - Y_0| \int_0^1 L|X - y(t)| \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{L}|\nabla g(X)|^2 - L|X - Y_0|^2 \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2L}|\nabla g(X)|^2.
\end{aligned}
$$

这就证明了(1)式. 将$g(X) = f(X) - f(X_0) - \langle \nabla f(X_0), X - X_0\rangle$代入(1)式，得

$$f(X) - f(X_0) - \langle \nabla f(X_0), X - X_0\rangle \geqslant \frac{1}{2L}|\nabla f(X) - \nabla f(X_0)|^2,$$

用Y代替X_0, 上式就写成

$$f(X) - f(Y) - \langle \nabla f(Y), X - Y\rangle \geqslant \frac{1}{2L}|\nabla f(X) - \nabla f(Y)|^2. \tag{2}$$

(2)式中交换变量X和Y, 就得到

$$f(Y) - f(X) - \langle \nabla f(X), Y - X\rangle \geqslant \frac{1}{2L}|\nabla f(Y) - \nabla f(X)|^2. \tag{3}$$

(2)式与(3)式相加，得

$$2\langle \nabla f(X) - \nabla f(Y), X - Y\rangle \geqslant \frac{1}{L}|\nabla f(X) - \nabla f(Y)|^2,$$

即得

$$|\nabla f(X) - \nabla f(Y)|^2 \leqslant L\langle \nabla f(X) - \nabla f(Y), X - Y\rangle.$$

□

例 3 设$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$为$C^1$映射，对任意$X \in \mathbb{R}^n$, F的雅可比矩阵$J_F(X)$非奇异. 对任意$\mathbb{R}^n$中的紧集K, 其完全原像$F^{-1}(K)$也是紧集. 证明：对任意$Y_0 \in \mathbb{R}^n$, 存在$X_0 \in \mathbb{R}^n$使得$F(X_0) = Y_0$.

证　因为F连续，所以$F(\mathbb{R}^n)$是连通集. 要证的结论是$F(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$, 故由$F(\mathbb{R}^n)$连通以及$F(\mathbb{R}^n)$非空知只需证明$F(\mathbb{R}^n)$既开又闭. 因为对任意$X\in\mathbb{R}^n$, F的雅可比矩阵$J_F(X)$非奇异，$\mathbb{R}^n$是开集，所以由11.5节的定理4知$F(\mathbb{R}^n)$是开集. 为了证明$F(\mathbb{R}^n)$是闭集，只需验证$F(\mathbb{R}^n)$是列闭集. 任取$F(\mathbb{R}^n)$中一个收敛点列$\{Y_m\}$, 则有$X_m\in\mathbb{R}^n$使得$Y_m=F(X_m)$, $m=1,2,\cdots$. 设$Y=\lim\limits_{m\to\infty}Y_m$, 令$K=\big\{Y_m\big|m=1,2,\cdots\big\}\cup\{Y\}$, 则$K$是$\mathbb{R}^n$中的紧集. 于是由题设知$F^{-1}(K)$是紧集. 因为$\{X_m\}\subseteq F^{-1}(K)$, 所以由$F^{-1}(K)$的列紧性知$\{X_m\}$有收敛到$F^{-1}(K)$中点的子列$\{X_{m_k}\}$. 设$X=\lim\limits_{k\to\infty}X_{m_k}$, 由$F$的连续性得

$$Y=\lim_{k\to\infty}Y_{m_k}=\lim_{k\to\infty}F(X_{m_k})=F\left(\lim_{k\to\infty}X_{m_k}\right)=F(X).$$

故$Y\in F(\mathbb{R}^n)$, 从而知$F(\mathbb{R}^n)$是列闭集. 这就完成了证明. □

例 4 设$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上可微，$f(0,0)=0$, 对任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 有$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leqslant 2|x-y|$和$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant 2|x-y|$, 求证：$|f(5,4)|\leqslant 1$.

证　因为对任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 有$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leqslant 2|x-y|$和$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant 2|x-y|$, 所以对任何实数$x$, 有$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)\right|\leqslant 0$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right|\leqslant 0$, 由此得到$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)\equiv 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x)\equiv 0$. 由多元函数的微分中值定理知存在$\xi\in(0,4)$, 使得

$$f(4,4)=f(4,4)-f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\xi)\cdot(4-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\xi)\cdot(4-0)=0.$$

因为$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,4)\right|\leqslant 2|x-4|$, 所以有

$$\begin{aligned}|f(5,4)|&=|f(5,4)-f(4,4)|=\left|\int_4^5\frac{\partial f}{\partial x}(x,4)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_4^5\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,4)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_4^5 2|x-4|\mathrm{d}x=1.\end{aligned}$$

□

例 5 设$D=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$, $f(x,y)$和$g(x,y)$都在D内二次连续可微，$\lim\limits_{x^2+y^2\to 1}f(x,y)=+\infty$, $g(x,y)$在D内有界，在D内处处成立$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^f$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}\geqslant\mathrm{e}^g$. 证明：$f(x,y)\geqslant g(x,y)$在$D$内处处成立.

证 令$h(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$, $(x,y)\in D$, 则由$\lim\limits_{x^2+y^2\to 1} f(x,y)=+\infty$以及$g(x,y)$在$D$内有界知$\lim\limits_{x^2+y^2\to 1} h(x,y)=+\infty$. 结合$h(x,y)$的连续性知$h(x,y)$在$D$中取得最小值. 设$(x_0,y_0)$是$h(x,y)$的一个最小值点，则$(x_0,y_0)\in D$是$h(x,y)$的极小值点. 于是黑塞矩阵$H_h(x_0,y_0)$半正定，由此得$\mathrm{Tr}H_h(x_0,y_0)\geqslant 0$, 故由题设得

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{f(x_0,y_0)}-\mathrm{e}^{g(x_0,y_0)}\geqslant\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right)-\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0,y_0)+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right)\\ =\ &\mathrm{Tr}H_h(x_0,y_0)\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此$f(x_0,y_0)\geqslant g(x_0,y_0)$, 即$h(x_0,y_0)\geqslant 0$, 从而对任何$(x,y)\in D$, 有$h(x,y)\geqslant h(x_0,y_0)\geqslant 0$, 即$f(x,y)\geqslant g(x,y)$. □

例 6 对于$\triangle ABC$, 求$3\sin A+4\sin B+18\sin C$的最大值.

解 三角形三个角A, B, C的取值范围为

$$(A,B,C)\in D=\left\{(\alpha,\beta,\gamma)\middle|\alpha+\beta+\gamma=\pi,\alpha>0,\beta>0,\gamma>0\right\}.$$

首先考虑$3\sin A+4\sin B+18\sin C$在D的闭包

$$E=\left\{(\alpha,\beta,\gamma)\middle|\alpha+\beta+\gamma=\pi,\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0,\gamma\geqslant 0\right\}$$

上的最大值. 我们有

$$\begin{aligned}&\max_{(A,B,C)\in E}(3\sin A+4\sin B+18\sin C)=\max_{\substack{A+C\leqslant\pi\\ A,C\geqslant 0}}(3\sin A+4\sin(A+C)+18\sin C)\\ =\ &\max_{0\leqslant C\leqslant\pi}\max_{0\leqslant A\leqslant\pi-C}\big((3+4\cos C)\sin A+4\sin C\cos A+18\sin C\big)\\ =\ &\max_{0\leqslant C\leqslant\pi}\left(\sqrt{(3+4\cos C)^2+16\sin^2 C}+18\sin C\right)\\ =\ &\max_{0\leqslant C\leqslant\pi}\left(\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C\right).\end{aligned}$$

考虑$f(C)=\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C$, $0\leqslant C\leqslant\pi$, 易见$f(C)\geqslant f(\pi-C)$, $\forall C\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 直接计算得

$$f'(C)=18\cos C-\frac{12\sin C}{\sqrt{25+24\cos C}},$$

计算得$f'(C)=0$等价于

$$(8\cos C-1)(27\cos^2 C+32\cos C+4)=0,$$

从而$f(C)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$中有唯一驻点$C_0=\arccos\dfrac{1}{8}$. 因此有

$$\max_{0\leqslant C\leqslant \pi} f(C)=\max_{0\leqslant C\leqslant \frac{\pi}{2}} f(C)=\max\left\{f(C_0),f(0),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{35\sqrt{7}}{4},$$

即

$$\max_{(A,B,C)\in E}(3\sin A+4\sin B+18\sin C)=\frac{35\sqrt{7}}{4}.$$

另一方面，不难看到$3\sin A+4\sin B+18\sin C$在E的边界上(A, B, C之一为零)的最大值为22. 因此，所求最大值为$\dfrac{35\sqrt{7}}{4}$. □

例 7 设$p(x_1,\cdots,x_n)$是n元实系数多项式，$x_1^2+\cdots+x_n^2$整除$p(x_1,\cdots,x_n)$, 并且

$$\Delta\, p(x_1,\cdots,x_n)\equiv 0,\ \text{其中}\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\text{是}\mathbb{R}^n\text{中的拉普拉斯算子},$$

求证：$p(x_1,\cdots,x_n)\equiv 0$.

证 记$q(x_1,\cdots,x_n)=x_1^2+\cdots+x_n^2$, 则由$q$是齐次的知$q$整除$p$当且仅当$q$整除$p$的每个齐次分支. 因此不妨设$p$是齐次的，于是$p$可以写成$q^m r$, 其中$m$是正整数，$r$是齐次多项式且$q$不整除$r$. 设$\deg\, r=k$, 则由欧拉定理知

$$\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial r}{\partial x_i}=kr.$$

计算偏导数得到

$$\begin{aligned}&\Delta\, p\\=\;&2m(n+2m-2)q^{m-1}r+4mq^{m-1}\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial r}{\partial x_i}+q^m\Delta\, r\\=\;&2m(n+2m-2)q^{m-1}r+4mkq^{m-1}r+q^m\Delta\, r\\=\;&2m(n+2m+2k-2)q^{m-1}r+q^m\Delta\, r.\end{aligned}$$

于是由$\Delta\, p\equiv 0$得$2m(n+2m+2k-2)r+q\Delta\, r\equiv 0$，因此$q$整除$r$, 矛盾！ □

例 8 设$D=[0,1]\times[0,1]$, $f(x,y)$在D上连续，在D°上连续可微. 令$a=\int_0^1 f(0,y)\mathrm{d}y$, $b=\int_0^1 f(1,y)\mathrm{d}y$, $c=\int_0^1 f(x,0)\mathrm{d}x$, $d=\int_0^1 f(x,1)\mathrm{d}x$. 证明或否定：存在$(x_0,y_0)\in D^\circ$, 使得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=b-a\text{且}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=d-c.$$

解 未必存在满足要求的(x_0,y_0). 一个例子如下：取

$$f(x,y)=3(1+y)(2x-1)^2-y,$$

则由$f(0,y)=f(1,y)$知$a=b$, 由

$$\begin{aligned}c&=\int_0^1 3(2x-1)^2\,dx=1,\\ d&=\int_0^1 (6(2x-1)^2-1)\,dx=1\end{aligned}$$

知$c=d$. 求偏导，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)&=3(1+y_0)(8x_0-4),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)&=3(2x_0-1)^2-1.\end{aligned}$$

若$(x_0,y_0)\in D^\circ$满足要求，则由$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=b-a=0$得$x_0=\frac{1}{2}$, 从而$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=3\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)^2-1=-1$, 与$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=d-c=0$矛盾！ □

注 本题是在否定二元函数中值定理一种潜在的推广. 有很多反例，如$y\sin(2\pi x)$, $x^{1/3}y^{2/3}$, $xy(1-y)$, 等等.

例 9 设$f(x,y)$是$\mathbb{R}^2$上的连续可微函数，$f(0,0)=0$, 求证：存在$\mathbb{R}^2$上的连续函数$g_1(x,y)$和$g_2(x,y)$, 使得

$$f(x,y)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y),\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

证 由牛顿-莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)-f(x,0)+f(x,0)-f(0,0)\\ &=\int_0^y\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{\partial f}{\partial x}(s,0)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

作变量替换$s=xu$, $t=yv$, 得

$$f(x,y)=x\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(xu,0)\mathrm{d}u+y\int_0^1\frac{\partial f}{\partial y}(x,yv)\mathrm{d}v.$$

令$g_1(x,y)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(xu,0)\mathrm{d}u$, $g_2(x,y)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial y}(x,yv)\mathrm{d}v$, 则$f(x,y)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y)$. 由$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$在闭区间上的一致连续性可以证明$g_1(x,y)$和$g_2(x,y)$是$\mathbb{R}^2$上的连续函数（请自证），这就完成了证明. $\square$

习题11(B)的第13题和第14题讨论的是函数相关性，下面的内容取自黄玉民、李成章的《数学分析》.

作为隐函数定理的一个应用, 我们在此讨论一组函数是否相关的问题. 设D是$\mathbb{R}^n$上的一个开区域和定义于D内的一组函数

$$y_i=y_i(x_1,\cdots,x_n),\quad i=1,\cdots,m.$$

将$(y_1,\cdots,y_m)$视为R^m中的点, 这一组函数就定义了一个从D到$\mathbb{R}^m$的映射F, 其值域为

$$F(D)=\{(y_1,\cdots,y_n)\in R^m;\quad y_i=y_i(x_1,\cdots,x_n),$$

$$i=1,\cdots,m,\quad (x_1,\cdots,x_n)\in D\}.$$

如果存在$\mathbb{R}^m$中的开区域Ω和函数$\varphi\in C^1(\Omega)$且$\nabla\varphi\neq 0$, 使得$F(D)\subseteq\Omega$且

$$\varphi(y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_m(x_1,\cdots,x_n))=0,\quad \forall(x_1,\cdots,x_n)\in D,$$

则称$y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_m(x_1,\cdots,x_n)$在$D$内函数相关. 如果这组函数在$D$的任何子区域都不相关, 则称它们在$D$内函数独立. 从几何上看$y_1,\cdots,y_m$在$D$内函数相关,则$F(D)$在$\mathbb{R}^n$中的一张光滑曲面上.

例子1 设函数组$y_i=y_i(x_1,\cdots,x_n)\in C^1(R^n), i=1,\cdots,n$且Jacobi行列式$\frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}$在$R^n$上处处不等于0. 由这组函数定义的映射记为$F$, 则$F\in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. 利用逆映射定理可

知F把$\mathbb{R}^n$的任何开子集映射成$\mathbb{R}^n$的开子集, 从而根据函数相关的几何意义易知这组函数在$\mathbb{R}^n$内函数独立.

例子2 设

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1+x_2+x_3+x_4-1, \\ y_2 &= x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1+x_2+x_3+x_4, \\ y_3 &= x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4. \end{aligned}$$

显然

$$(y_1+1)^2+y_1-y_2-2y_3=0.$$

从而函数组y_1, y_2, y_3在$\mathbb{R}^4$内函数相关.

下面给出判断一组函数相关或独立的条件.

定理1 设$F=(f_1,\cdots,f_m)^T$是区域$D\subseteq\mathbb{R}^n$内定义的C^1向量值函数. 区域$\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$满足$F(D)\subseteq\Omega$, 若$f_1,f_2,\cdots,f_m$在$D$内函数相关，即存在函数$\varphi\in C^1(\Omega)$使$\nabla\varphi\neq 0$且

$$\varphi(f_1(X),\cdots,f_m(X))=0,\ \forall X\in D,$$

则$J_F(X)$的秩在D内处处小于m.

证 由假设存在$\varphi\in C^1$使得$\nabla\varphi\neq 0$, 且

$$\varphi(y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_m(x_1,\cdots,x_n))=0,\quad \forall(x_1,\cdots,x_n)\in D,$$

从而

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}=0,\quad i=1,\cdots,n,$$

即

$$\nabla\varphi\cdot\frac{\partial(y_1,\cdots,y_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=0.$$

由于$\nabla\varphi\neq 0$, 所以$\dfrac{\partial(y_1,\cdots,y_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$的秩小于$m$. □

定理2 设$F=(f_1,\cdots,f_m)^T$是区域$D\subseteq\mathbb{R}^n$内定义的C^1向量值函数，求证：若$\mathrm{rank}J_F(X)\leqslant r<m$并且存在点$X_0\in D$使$\mathrm{rank}J_F(X_0)=r$, 则存在$X_0$的小邻域$U\subseteq D$, 使得$f_1,f_2,\cdots,f_m$在$D$内函数相关，即存在函数$\varphi\in C^1(\Omega)$使$F(U)\subseteq\Omega$, $\nabla\varphi\neq 0$以及

$$\varphi(f_1(X),\cdots,f_m(X))=0,\ \forall X\in U.$$

证 显然$1\leqslant r<m$且$r\leqslant n$. 不妨设Jacobi行列式

$$\frac{D(y_1,\cdots,y_r)}{D(x_1,\cdots,x_r)}(x^0)\neq 0$$

记$y_i^0=y_i(x_1^0,\cdots,x_n^0)$. 由隐函数定理可知存在$(x_1^0,\cdots,x_r^0)\in R^r$的开邻域$U_1$, $(x_{r+1}^0,\cdots,x_n^0)\in R^{n-r}$的开邻域$U_2$以及$(y_1^0,\cdots,y_r^0)\in R^r$的开邻域$V_1$, 和唯一的函数

$$x_i=\varphi_i(y_1,\cdots,y_r,x_{r+1},\cdots,x_n)\in C^1(V_1\times U_2),i=1,\cdots,r,$$

使得

$$(\varphi_1(y_1,\cdots,y_r,x_{r+1},\cdots,x_n),\cdots,\varphi_r(y_1,\cdots,y_r,x_{r+1},\cdots,x_n))\in U_1,$$

$$x_i^0=\varphi_i(y_1^0,\cdots,y_r^0,x_{r+1}^0,\cdots,x_n^0),i=1,\cdots,r,$$

且

$$y_i\equiv y_i(\varphi_1(y_1,\cdots,y_r,x_{r+1},\cdots,x_n),\cdots,\varphi_r(y_1,\cdots,y_r,x_{r+1},\cdots,x_n),x_{r+1},\cdots,x_n),\tag{1}$$

其中$i=1,\cdots,r$.对于$k=r+1,\cdots,m$, 令

$$\psi_k(y_1,\cdots,y_r,x_{r+1},\cdots,x_n)=y_k(\varphi_1(y_1,\cdots,y_r,x_{r+1},\cdots,x_n),$$

$$\cdots,\varphi_r(y_1,\cdots,y_r,x_{r+1},\cdots,x_n),x_{r+1},\cdots,x_n),$$

则当$r<n$时有

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial y_k}{\partial x_j},\quad j=r+1,\cdots,n.\tag{2}$$

由(1)可得

$$0=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial y_l}{\partial x_j}, l=1,\cdots,r, j=r+1,\cdots,n. \tag{3}$$

由于$\dfrac{\partial(y_1,\cdots,y_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$的秩在$D$内处处不大于$r$, 从而Jacobi行列式$\dfrac{D(y_1,\cdots,y_r,y_k)}{D(x_1,\cdots,x_r,x_j)}\equiv 0$. 由于$\dfrac{D(y_1,\cdots,y_r)}{D(x_1,\cdots,x_r)}(x^0)\neq 0$, 不妨设$\dfrac{D(y_1,\cdots,y_r)}{D(x_1,\cdots,x_r)}\neq 0$, $\forall x\in U_1\times U_2$. 于是存在$\lambda_i=\lambda_i(x)\in R^1$, $i=1,\cdots,r$, 使得

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i}(x)=\sum_{l=1}^{r}\lambda_l(x)\frac{\partial y_l}{\partial x_i}(x),\ \ i=1,\cdots,r,j,\ \ x\in U_1\times U_2. \tag{4}$$

综合(2), (3), (4)可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}(y_1,\cdots,y_r,x_{r+1},\cdots,x_n)\\
=\ &\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\sum_{l=1}^{r}\lambda_l\frac{\partial y_l}{\partial x_i}+\sum_{l=1}^{r}\lambda_l\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\\
=\ &\sum_{l=1}^{r}\lambda_l\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\right)\\
=\ &0,
\end{aligned}$$

其中$(y_1,\cdots,y_r,x_{r+1},\cdots,x_n)\in V_1\times U_2, j=r+1,\cdots,n$. 从而$\psi_k$不依赖于$x_{r+1},\cdots,x_n$. 于是存在$x^0$的邻域$U$, 使得$x=(x_1,\cdots,x_n)\in U\Rightarrow(x_1,\cdots,x_r)\in U_1$, $(x_{r+1},\cdots,x_n)\in U_2$, 且$(y_1,\cdots,y_r)\in V_1$, 其中$y_i=y_i(x_1,\cdots,x_n)$, $i=1,2,\cdots,r$. 由隐函数的唯一性可知

$$x_i=\varphi_i(y_1,\cdots,y_r,x_{r+1},\cdots,x_n),\quad i=1,\cdots,r.$$

于是可得$\forall(x_1,\cdots,x_n)\in U$有

$$y_k(x_1,\cdots,x_n)=\psi_k(y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_r(x_1,\cdots,x_n)).$$

令

$$\varphi(y_1,\cdots,y_m)=-\psi_{r+1}(y_1,\cdots,y_r)+y_{r+1},$$

则

$$\varphi(y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_m(x_1,\cdots,x_n))=0,$$

$\forall (x_1,\cdots,x_n)\in U$,即$y_1,\cdots,y_m$在$U$内函数相关.

$r=n$的情况证明类似. $\square$

补充题11

(A)

1. 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

(1) 函数$f(x,y)$在$(0,0)$点是否连续？证明你的结论.

(2) 函数$f(x,y)$在$(0,0)$点是否可微？证明你的结论.

(3) 设$\vec{l}$=(1,2), 求方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0)$.

2. 设常数$\alpha>0$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^\alpha|y|^\alpha}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

(1) 讨论$f(x,y)$在$(0,0)$点处的连续性.

(2) 讨论$f(x,y)$在$(0,0)$点处的可微性.

3. 设$f(x,y)=\ln(\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^y)$, $\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$, 其中$\theta\in[0,2\pi)$, 求$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0)$.

4. 在自变量和因变量的变换$u=\dfrac{x}{y}$, $v=x$, $w=xz-y$下, 将$z=z(x,y)$的方程$y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{x}$变换为$w=w(u,v)$的方程.

5. 在自变量和因变量的变换$u=x^2+y^2$, $v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, $w=\ln z-(x+y)$下, 将$z=z(x,y)$的方程$y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$变换为$w=w(u,v)$的方程.

6. 写出函数$f(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos y}$在$(0,0)$点邻近的二阶泰勒展开式.

7. 设z为由方程$z^3-xz-y=0$确定的x, y的隐函数，求z''_{xy}.

8. 设x为由方程$x^2y+\mathrm{e}^{2x}+z=0$在$(0,1,-1)$的一个邻域内确定的y,z的隐函数，求$\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2}$在$(x,y,z)=(0,1,-1)$处的值.

9. 设$y=y(x)$, $z=z(x)$为由方程组$\begin{cases}x^2+y^2-z^2=0,\\ x^2+2y^2+3z^2=4\end{cases}$ 在$(1,0,1)$的一个邻域内确定的隐函数，求$\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}$在$(x,y,z)=(1,0,1)$ 处的值.

10. 设$f(x)$, $g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可微，$f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$. 证明：存在$\delta>0$, 使得方程$f(x)+tg(x)=0$在$(-\delta,\delta)$上有唯一连续解$x=x(t)$, 使得$x(0)=0$.

11. 在曲线$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=\mathrm{e}^t$上求一点，使得该曲线在此点的切线平行于平面$\sqrt{3}x+y-4=0$.

12. 求函数$f(x,y,z)=x-2y+2z$在有界闭区域$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|x^2+y^2+z^2\leqslant 9\right\}$上的最大值与最小值.

13. 设函数$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上两次连续可微，对任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 都有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)>0.$$

证明：函数$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上无极大值.

14. 设D是R^n中有界闭区域，$f\in C^1(D)$且对任意$X\in\partial D$，有$f(X)=0$. 证明存在$X_0\in D^\circ$，使得$\nabla f(X_0)=0$.

15. 求函数$f(x,y)=\sin^2 x+\sin^2 y$在条件$y-x=\dfrac{\pi}{4}$下的条件极值点.

16. 设$f\in C^2(\mathbb{R}^n)$，$X_0\in\mathbb{R}^n$，$\tau\in R^n$，令$\phi_\tau(t)=f(X_0+t\tau)$，$t\in\mathbb{R}$. 求证如果对任意$\tau\neq 0$，都有$\phi_\tau''(0)>0$，那么海森矩阵$H_f(X_0)$正定.

17. 设$f\in C^1(R^2)$且$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}$处处成立，对任意$x\in R$，有$f(x,0)>0$. 求证对任意$(x,y)\in R^2$，都有$f(x,y)>0$.

(B)

1. 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$为$C^1$映射且存在$\lambda>0$使得

$$|f(X)-f(Y)|\geqslant\lambda|X-Y|,\quad\forall X,Y\in\mathbb{R}^n.$$

证明：任给$Y_0\in\mathbb{R}^n$, 存在唯一的$X_0\in\mathbb{R}^n$使得

$$f(X_0)=Y_0.$$

2. 设D是$\mathbb{R}^n$中的凸开区域，$F:D\to\mathbb{R}^n$是可微映射，对任意$X\in D$, 雅可比矩阵$J_F(X)$都是正定矩阵，证明：F是单射.

3. 设$f(x,y)$, $g(x,y)$在$\mathbb{R}^2$中区域D上连续可微且对任意$(x,y)\in D$, 有$\dfrac{D(f,g)}{D(x,y)}(x,y)\neq 0$, 又设$\Omega\subset D$是有界闭区域. 证明：在$\Omega$中满足方程组$\begin{cases} f(x,y)=0\\ g(x,y)=0\end{cases}$的点$(x,y)$只有有限个.