解析几何 (一) 复习题

黄利兵

数学科学学院

2022 年 12 月 16 日

本章总结

- 主要概念: 向量积 (外积), 混合积.
- 重要算法: 平面方程/直线方程的求法 (注意利用几何特征, 选择方程的合适形式 (一般方程或标准方程)).
- 基本结论: 外积的性质, 二重外积公式, 直线/平面相关度量关系的计算, 线性方程组理论与直线/平面位置关系的判定.
- 核心方法: 运用基本结论.

填空题

1. 点 $(-2,1,0)$ 在平面 $x+y+z=2$ 上的投影点是______________.
2. 点 $(1,3,-2)$ 到直线 $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$ 的距离是______________.
3. 直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{0}$ 与直线 $\frac{x-1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 的位置关系是______________.
4. 直线 $x=y=z$ 与 $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 之间的距离是______________.
5. 直线 $\begin{cases} x-y-2z=1 \\ x-y-z=3 \end{cases}$ 与平面 $x+2y-2z=3$ 夹角的正弦值是______________.
6. 若直线 ℓ 与直线 $x=2y=z$ 关于平面 $x-y-2z=3$ 对称, 则直线 ℓ 的方程是______________.
7. 平面 π 经过直线 $\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ x+y-3z=-2 \end{cases}$ 且与平面 $x+y+z=1$ 垂直, 则平面 π 的方程是______________.

解答题 (一)

8. 将直线 $x = y = 2z$ 绕直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = z$ 旋转 180°, 求所得直线的方程.

解答题 (二)

9. 求直线 $\begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$ 的公垂线的方程.

解答题 (三)

10. 已知 $A(1,0,1)$, $B(1,1,2)$, $C(1,-1,-2)$, $D(3,1,0)$, $E(3,1,2)$. 直线 ℓ 过点 E, 平行于平面 ABC, 且垂直于直线 AD. 求直线 ℓ 的方程.

解答题 (四)

11. 已知点 P 和点 Q 分别在空间中作匀速直线运动, 它们在 t 时刻的坐标分别为 $(t+2, 2-t, 1)$ 和 $(2t-1, 1+t, t)$, 求直线 PQ 的轨迹.

证明题 (一)

12. 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中, 棱 A_iA_j 的长为 d_{ij}. 证明它的体积 V 满足

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^3 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

证明题 (二)

13. 设平面 π 的法向量为 $\mathbf{n}$, 四个点 A, B, C, D 在平面 π 上的投影点分别为 A_0, B_0, C_0, D_0. 求证: A_0, B_0, C_0, D_0 四点共圆, 当且仅当

$$
\begin{aligned}
&(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n})(\overrightarrow{BC} \times \mathbf{n}) \cdot (\overrightarrow{BD} \times \mathbf{n}) \\
=&(\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} \cdot \mathbf{n})(\overrightarrow{AC} \times n) \cdot (\overrightarrow{AD} \times \mathbf{n}).
\end{aligned}
$$