本章概述

导数是微分学的核心概念. 许多实际问题，例如物理学中求瞬时速度的问题与几何学中求曲线上某点处的切线的问题，都需要从数学上精确刻画变量的变化率. 从这些问题的研究中数学家抽象出导数的定义.

本章概述

导数是微分学的核心概念. 许多实际问题，例如物理学中求瞬时速度的问题与几何学中求曲线上某点处的切线的问题，都需要从数学上精确刻画变量的变化率. 从这些问题的研究中数学家抽象出导数的定义.

主要概念

基本概念：导数、微分
派生概念：高阶导数、高阶微分

导数是微分学的核心概念. 许多实际问题，例如物理学中求瞬时速度的问题与几何学中求曲线上某点处的切线的问题，都需要从数学上精确刻画变量的变化率. 从这些问题的研究中数学家抽象出导数的定义.

主要概念

基本概念：导数、微分
派生概念：高阶导数、高阶微分

基本定理

可导的必要条件
导数的四则运算法则、复合函数求导法、反函数求导法
高阶导数的莱布尼茨公式
可微的充分必要条件

费马（Pierre de Fermat），1601-1665

费马的求极值的方法

第一个真正对微分作出明确预言的，可追溯到费马1629年所陈述的思想，不过这些思想直至八、九年后才较多地为人所知．费马提出了求解极大值或极小值的方法，那时候还没有导数的概念，他的方法等价于假设$f(x)$在极值点处的导数等于0.

费马定理

设点x_0是函数$f(x)$的一个极值点且$f(x)$在点x_0可导，则$f'(x_0) = 0$.

费马的求极值的方法

第一个真正对微分作出明确预言的，可追溯到费马1629年所陈述的思想，不过这些思想直至八、九年后才较多地为人所知．费马提出了求解极大值或极小值的方法，那时候还没有导数的概念，他的方法等价于假设$f(x)$在极值点处的导数等于0.

费马定理

设点x_0是函数$f(x)$的一个极值点且$f(x)$在点x_0可导，则$f'(x_0) = 0$.

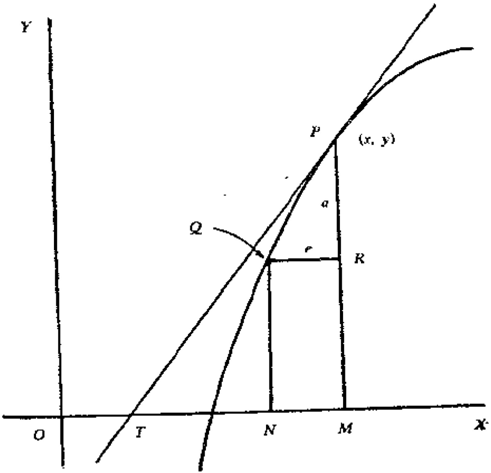
费马没有认识到，函数$f(x)$的导数等于0只是普通极大值或极小值存在的必要条件而并非充分条件．此外，费马方法也不区分极大值和极小值．

巴罗1630年生于伦敦，毕业于剑桥大学．他在数学、物理、天文和神学方面都有造诣，也是当时研究希腊的著名学者．1677年巴罗逝世于剑桥．

他是最早发现和认识到牛顿的杰出才能的人之一，牛顿是他的学生. 他是第一个担任剑桥大学卢卡斯讲座教授席位的人．为了支持牛顿，1669年他辞去了他的教授席位，将其让给了牛顿.

巴罗最重要的数学著作是他的《光学和几何学讲义》，它是在他辞去了剑桥大学教授职务后发表的．文章的前言表示对牛顿致谢，因为他提供了书中某些材料，很可能是有关光学的部分．在这本书中我们能找到非常接近于近代微分过程的步骤.

巴罗的求切线方法的示意图



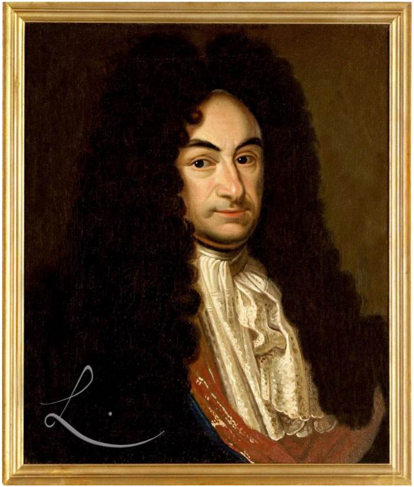
问题推动数学的发展

发明新的数学方法的最初刺激是来自一些用已有的方法难以解决的问题．其实，不断出现未解决的问题是维持数学的成长和健康的力量源泉．

寻求某个面积、体积和弧长的问题引起了求和过程，导致积分学的产生．求作曲线的切线问题、求函数的极大值和极小值问题、物理上求瞬时变化率等问题导致微分学的产生．

牛顿和莱布尼茨各自在前人思想和工作的基础上独立创造了微积分学. 牛顿声称：“如果我看得比其他人远些，那是因为我站在巨人的肩上”．

莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz），1646-1716

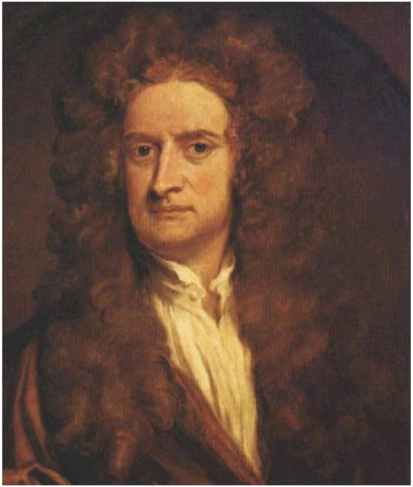


莱布尼茨的工作

莱布尼兹是德国伟大的数学家和哲学家. 在1684年的《教师学报》杂志上莱布尼茨发表了一篇题为“适用于有理数和无理数的最大值、最小值和切线的新方法以及它们的一种值得注意的计算方法”的论文，在此论文中他简明地解释了他的微分学，其中用公式表示的部分所标的日期是1676年. 尽管论文有某些含糊之处和疏忽的错误，但事实证明，它是数学发展进程中具有里程碑意义的事件. 莱布尼茨在这篇论文中所给出的微分学符号和计算导数的许多一般法则一直沿用到今天.

莱布尼茨在选择合适的符号方面有独到之处. 他不但为我们提供了今天正在使用的一套非常灵巧的微分学符号，而且在1675年他还引入了现代的积分符号.

牛顿（Issac Newton），1642-1727



牛顿的流数法

牛顿在1665年（那时候他还是学生）就发明了他的流数法，最初只是想把它应用于物理问题．只有同他接近的少数几个同行才知道他的这一创造．他直到1687年才公布他的工作．

牛顿在1665年（那时候他还是学生）就发明了他的流数法，最初只是想把它应用于物理问题．只有同他接近的少数几个同行才知道他的这一创造．他直到1687年才公布他的工作．

牛顿是以物理的观点来对待微积分的．他认为曲线是由点的连续运动生成的．因此，生成点的横坐标和纵坐标一般来说都是变化着的量．他把这个变化着的量称为流（流动的量），而把流的变化率称为流数．

牛顿的流数法

牛顿在1665年（那时候他还是学生）就发明了他的流数法，最初只是想把它应用于物理问题．只有同他接近的少数几个同行才知道他的这一创造．他直到1687年才公布他的工作．

牛顿是以物理的观点来对待微积分的．他认为曲线是由点的连续运动生成的．因此，生成点的横坐标和纵坐标一般来说都是变化着的量．他把这个变化着的量称为流（流动的量），而把流的变化率称为流数．

牛顿考虑了两种类型的问题．第一种是，给定了一些流之间的关系，求这些流和它们的流数之间的关系．这就是微分的过程．第二种是，给定一些流和它们的流数之间的关系，求单独的流之间的关系．这是一个反问题，等价于求解一个微分方程．牛顿用他的理论来确定极大值和极小值、曲线的切线、曲线的曲率、拐点和曲线的凹凸性，还对许多曲线求面积和长度．在对一些微分方程积分时，他表现出非凡的才能．

问题

设一个质点做变速直线运动，已知位移与时间的关系为$s = s(t)$，如何计算这个质点在时刻t_0的瞬时速度？

变速直线运动一段时间内的平均速度

问题

设一个质点做变速直线运动，已知位移与时间的关系为$s = s(t)$，如何计算这个质点在时刻t_0的瞬时速度？

平均速度

从时刻t_0到时刻$t_0 + \Delta t$这一段时间内质点的位移为

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0),$$

因此这一段时间内质点的平均速度是

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

变速直线运动的瞬时速度

问题

设一个质点做变速直线运动，已知位移与时间的关系为$s = s(t)$，如何计算这个质点在时刻t_0的瞬时速度？

问题

设一个质点做变速直线运动，已知位移与时间的关系为$s = s(t)$，如何计算这个质点在时刻t_0的瞬时速度？

瞬时速度

从时刻t_0到时刻$t_0 + \Delta t$这一段时间内的平均速度是

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

这个平均速度是质点在时刻t_0的瞬时速度的一个近似值，从极限的观点来看，当$\Delta t \to 0$时，平均速度的极限才可以作为质点在时刻t_0的瞬时速度. 因此，如果极限

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

存在，则这个极限值就是质点在时刻t_0的瞬时速度.

问题

设函数$f(x)$在$[a,b]$连续，则函数$y=f(x)$的图象是一条连续曲线. 设$x_0\in(a,b)$，怎样对曲线上点$A(x_0,f(x_0))$处的切线作出定义？当切线存在时，如何求该切线的方程？

问题

设函数$f(x)$在$[a,b]$连续，则函数$y=f(x)$的图象是一条连续曲线. 设$x_0\in(a,b)$，怎样对曲线上点$A(x_0,f(x_0))$处的切线作出定义？当切线存在时，如何求该切线的方程？

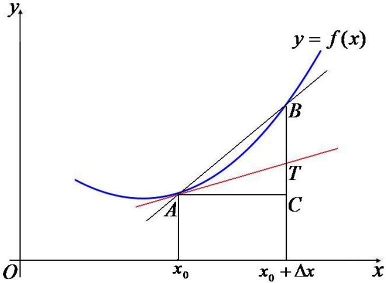
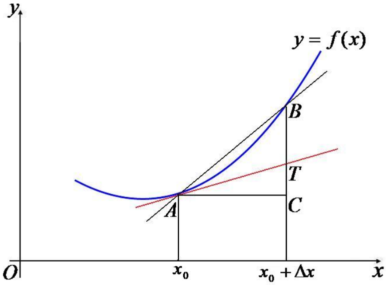


Figure: 图4-1

曲线的切线的定义



如图4-1所示，点$A(x_0, f(x_0))$为曲线$y = f(x)$上一定点，点$B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$为曲线$y = f(x)$上一动点．当$\Delta x \to 0$时，点$B$沿曲线$y = f(x)$趋于点$A$，如果割线$AB$趋于一条直线，那么这条极限位置的直线就是点$A(x_0, f(x_0))$处的切线.

如果曲线$y = f(x)$在点$A(x_0, f(x_0))$处切线存在，那么当$\Delta x \to 0$时，割线AB的斜率$\tan\angle BAC$就趋向于切线AT的斜率$\tan\angle TAC$，其中点C是$(x_0+\Delta x, f(x_0))$．割线AB的斜率是$k_{AB} = \tan\angle BAC = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，因此切线$AT$的斜率为

$$k_{AT} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果曲线$y = f(x)$在点$A(x_0, f(x_0))$处切线存在，那么当$\Delta x \to 0$时，割线AB的斜率$\tan\angle BAC$就趋向于切线AT的斜率$\tan\angle TAC$，其中点C是$(x_0+\Delta x, f(x_0))$．割线AB的斜率是$k_{AB} = \tan\angle BAC = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，因此切线$AT$的斜率为

$$k_{AT} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

故当上面的极限存在时，曲线$y = f(x)$在点$A(x_0, f(x_0))$处有不垂直于x轴的切线AT，其方程为

$$y = f(x_0) + k_{AT}(x - x_0).$$

我们称Δx为自变量的改变量，并相应地称$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$为函数值在$x_0$处的改变量，称$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$为$f(x)$在$x_0$处相对于$\Delta x$的平均变化率，也称为$f(x)$在$x_0$处的差商.

上面的两个问题，虽然其背景不同，但本质上都涉及求平均变化率的极限.

上面的两个问题，虽然其背景不同，但本质上都涉及求平均变化率的极限.

定义 1

设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数$f(x)$在点x_0可导, 并把极限值称为$f(x)$在点x_0的导数, 记为$f'(x_0)$, 即有

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

$f'(x_0)$有时也记作$y'\Big|_{x=x_0}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$.

我们说函数$f(x)$在点x_0可导，是指定义1中差商的极限存在，这个极限当然是有限值. 若差商的极限为无穷大量，则$f(x)$在点x_0是不可导的. 例如，对于函数$f(x) = \sqrt[3]{x}$，y轴是曲线$y = \sqrt[3]{x}$在点$(0,0)$处的切线，但由$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = +\infty$知$f(x)$在点0处不可导.

我们说函数$f(x)$在点x_0可导，是指定义1中差商的极限存在，这个极限当然是有限值. 若差商的极限为无穷大量，则$f(x)$在点x_0是不可导的. 例如，对于函数$f(x) = \sqrt[3]{x}$, y轴是曲线$y = \sqrt[3]{x}$在点$(0,0)$处的切线，但由$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = +\infty$知$f(x)$在点0处不可导.

若记$x = x_0 + \Delta x$，则$\Delta x = x - x_0$，这时$\Delta y = f(x) - f(x_0)$，从而导数也可写作

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

导数是差商$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的极限，有时也称为微商.

导数的$\varepsilon-\delta$定义

函数$f(x)$在点x_0可导就是“极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在”，由此就可以写出导数的$\varepsilon-\delta$定义

函数$f(x)$在点x_0可导就是“极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在”，由此就可以写出导数的$\varepsilon-\delta$定义

设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域有定义. 若存在实数A, 对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时，就有

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-A\right|<\varepsilon,$$

则称函数$f(x)$在点x_0可导，并把极限值A称为$f(x)$在点x_0的导数，记为$f'(x_0)$, 即有

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

$f'(x_0)$有时也记作$y'\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$.

例 1

求函数$f(x) = x^3$在点x_0的导数.

例题

例 1

求函数$f(x)=x^3$在点x_0的导数.

解答

按定义, 有

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^3+3x_0^2\Delta x+3x_0\Delta x^2+\Delta x^3-x_0^3}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+\Delta x^2)\\
&= 3x_0^2.
\end{aligned}$$

可导的必要条件

定理 1

若函数$f(x)$在点x_0可导, 则它在点x_0连续.

定理 1

若函数$f(x)$在点x_0可导, 则它在点x_0连续.

解答

因为$f(x)$在点x_0可导, 所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

又$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, 故

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0).$$

按定义知$f(x)$在点x_0连续.

判断下面的命题是否成立.

若函数$f(x)$在点x_0可导，则存在$\delta > 0$, 使得$f(x)$在$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$有界.

(A) 成立

(B) 不成立

判断下面的命题是否成立.

设函数$f(x)$在点x_0可导，则存在$\delta > 0$, 使得$f(x)$在$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$连续.

(A) 成立

(B) 不成立

Δy的一个公式

设函数$y = f(x)$在点x_0可导，令

$$\alpha(\Delta x) = \begin{cases} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0), & \Delta x \neq 0, \\ 0, & \Delta x = 0, \end{cases}$$

则由导数定义，$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$，并且由$\alpha(\Delta x)$的定义，可见对任意$\Delta x$ (无论Δx是否为0), 总有

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

设函数$y=f(x)$在点x_0可导，令

$$\alpha(\Delta x)=\begin{cases}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0), & \Delta x\neq 0,\\ 0, & \Delta x=0,\end{cases}$$

则由导数定义，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$，并且由$\alpha(\Delta x)$的定义，可见对任意$\Delta x$ (无论Δx是否为0), 总有

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x.$$

当$\Delta x\to 0$时，由上式可见

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0).$$

有了微分的概念后，上式就说明可导蕴涵可微.

定义 2

(1) 设函数$f(x)$在一个以点x_0为右端点的闭区间有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数$f(x)$在点x_0左可导, 并称这个极限值为$f(x)$在点x_0的左导数, 记为$f'_-(x_0)$;

定义 2

(1) 设函数$f(x)$在一个以点x_0为右端点的闭区间有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数$f(x)$在点x_0左可导, 并称这个极限值为$f(x)$在点x_0的左导数, 记为$f'_-(x_0)$;

(2) 设函数$f(x)$在一个以点x_0为左端点的闭区间有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数$f(x)$在点x_0右可导, 并称这个极限值为$f(x)$在点x_0的右导数, 记为$f'_+(x_0)$.

显然, $f(x)$在点x_0可导的充分必要条件是$f(x)$在点x_0既左可导又右可导且左右导数相等. 容易看到：若$f(x)$在点x_0左可导，则$f(x)$在点x_0左连续；若$f(x)$在点x_0右可导，则$f(x)$在点x_0右连续. 因此，若$f(x)$在点x_0既左可导又右可导(左右导数未必相等)，则$f(x)$在点x_0连续.

显然, $f(x)$在点x_0可导的充分必要条件是$f(x)$在点x_0既左可导又右可导且左右导数相等. 容易看到：若$f(x)$在点x_0左可导，则$f(x)$在点x_0左连续；若$f(x)$在点x_0右可导，则$f(x)$在点x_0右连续. 因此，若$f(x)$在点x_0既左可导又右可导(左右导数未必相等)，则$f(x)$在点x_0连续.

对于分段定义的函数，在分段点处是否可导，可以通过两个单侧导数是否相等来判断.

说明“连续未必可导”的例题

例 2

求函数$f(x) = |x|$在点0的左导数和右导数.

例 2

求函数$f(x)=|x|$在点0的左导数和右导数.

解答

按定义, 有

$$
\begin{aligned}
f'_{-}(0) &= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|0+\Delta x|-0}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}\\
&= -1;\\
f'_{+}(0) &= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|0+\Delta x|-0}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

例 3

已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在点0右可导，求α的取值范围.

例 3

已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在点0右可导, 求α的取值范围.

解答

由右导数的定义，$f(x)$在点0右可导当且仅当右极限

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}$$

存在.

得到“$f(x)$在点0右可导当且仅当右极限 $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}$存在”之后，就是用分类的思想根据$\alpha$的取值进行分类讨论.

解答（续）

当$\alpha<1$时, $\alpha-1<0$, 函数$x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}$在点0的任何空心邻域中都无界, 当然没有极限; 当$\alpha=1$时, 函数$\sin\dfrac{1}{x}$在点0也没有极限; 当$\alpha>1$时, $x^{\alpha-1}$为无穷小量, $\sin\dfrac{1}{x}$有界, 故有

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}=0.$$

因此α的取值范围为$(1,+\infty)$.