

# Queda de uma mola ideal suspensa com massas distribuídas regularmente

João Santos <sup>2</sup> João Esteves <sup>2</sup> José Amoreira <sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Laboratório de Instrumentação e Física Experimental de Partículas

<sup>2</sup>Universidade da Beira Interior

<sup>3</sup>Centro de Matemática e Aplicações (CMAUBI)

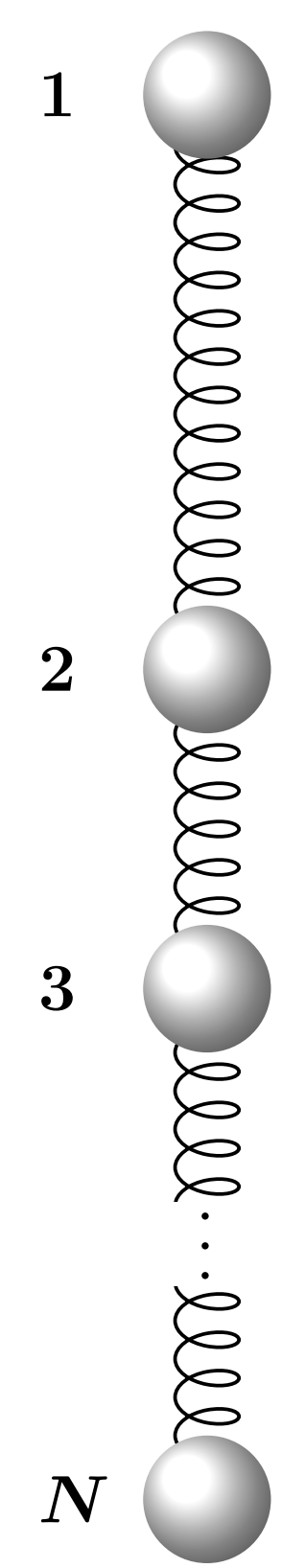
## Motivação/Introdução

Vários vídeos disponíveis na plataforma YouTube [1, 2, 3] mostram a queda de uma mola elástica a partir de uma situação de repouso estático em que ela se encontra na vertical, suspensa da sua extremidade superior. Estes vídeos são interessantes porque mostram a extremidade inferior da mola como que a aguardar que a extremidade superior a atinja, antes de começar o seu movimento de queda propriamente dito.

Este comportamento é facilmente compreendido nos termos da teoria da elasticidade de um meio contínuo. A onda de deformação gerada na extremidade superior da mola no momento em que é solta propaga-se longitudinalmente com uma velocidade finita, e só quando atinge a extremidade inferior, alterando aí o estado de deformação inicial, se modifica o equilíbrio de forças (peso e força elástica) que mantinham esta extremidade em repouso.

Claramente, o modelo elementar de mola ideal, em que se despreza a sua massa, é insuficiente para enquadrar esta explicação, uma vez que não tendo massa, (1) não tem inércia; assim, a sua deformação é sempre uniforme, logo, a força sobre a extremidade inferior altera-se instantaneamente assim que a extremidade superior inicia a sua queda, e (2) a mola não tem peso, ou seja, nem sequer cai! Mas será possível dar conta deste comportamento das molas reais considerando molas ideais com massas distribuídas regularmente ao longo do seu comprimento? Com este trabalho pretendeu-se dar resposta a esta questão.

## Formalismo



Descrevemos uma mola ideal com constante elástica  $K$ , comprimento natural  $L$  e massa  $M$  como um sistema de  $N$  massas  $m = M/N$  ligadas sequencialmente por  $N - 1$  molas ideais com comprimento natural  $l = L/(N - 1)$  e constante elástica  $k = K(N - 1)$ .

Em equilíbrio estático, as posições das várias massas são dadas por:

$$y_i^0 = y_1^0 - (i - 1) \left[ l + \left( N - \frac{i}{2} \right) \frac{mg}{k} \right], \quad i > 1$$

A partir do instante em que se solta a massa na extremidade superior da mola, as acelerações das várias massas são dadas por  $(x_i(t) = y_i(t) - y_i^0)$ ,  $\ddot{x}_i = \ddot{y}_i$ ,  $\omega^2 = k/m$ :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -Ng - \omega^2(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_i &= \omega^2(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}), \quad i = 2, \dots, N-1 \\ \ddot{x}_N &= \omega^2(x_{N-1} - x_N) \end{aligned}$$

Este sistema de equações, com o estado inicial  $x_i = 0$ ,  $\dot{x}_i = 0$ , foi resolvido em Python/Numpy [4], usando a função `solve_ivp` da biblioteca SciPy [5].

## Procedimento experimental

Para verificar a validade das soluções obtidas numericamente, estudou-se o movimento de queda de uma mola de aço com bolas de ténis dispostas regularmente ao longo do seu comprimento. As bolas de ténis usadas têm massa  $56,6 \pm 0,1$  g. A massa da mola usada tem o valor  $37,5 \pm 0,1$  g; determinou-se a sua constante elástica por regressão linear dos valores do alongamento sob diferentes tensões, tendo-se obtido o valor de  $0,44 \pm 0,01$  N/m. O movimento de queda foi filmado a 120 fps e a posição das bolas foi obtida fotograma a fotograma usando o programa Tracker [6]. Analizaram-se os casos  $N = 2$  (uma massa em cada extremidade da mola) e  $N = 3$  (a massa adicional no centro da mola). Os resultados estão apresentados na Figura 2.

Verifica-se genericamente bom acordo entre os resultados numéricos e os valores observados experimentalmente, o que valida o modelo.



Figura 1. Procedimento usado para gravar a queda da bola.

## Resultados

Na Figura 2 estão representados gráficos da posição calculada e observada de cada massas como funções do tempo, para os casos  $N = 2$  e  $N = 3$ . É patente o bom acordo entre os valores calculados e observados. As discrepâncias mais significativas ocorrem no final do intervalo de tempo representado, quando as espiras da mola se comprimem umas contra as outras, devido ao movimento de queda mais rápido das massas mais acima, efeito que altera a dinâmica puramente elástica e gravítica do modelo numérico.

É interessante notar a discrepância no movimento da massa na extremidade da mola, mais patente no caso  $N = 2$  que para  $N = 3$ . Cremos que esta discrepância está relacionada com o modelo de mola ideal. Com apenas duas bolas de ténis fixadas na mola, é mais discutível considerar-se desprezável a sua massa. Logo, é mais expectável que o modelo adotado não se adeque tão precisamente ao comportamento do sistema estudado.

Esta conjectura é apoiada por cálculos do valor da aceleração do centro de massa do conjunto das bolas. O valor obtido a partir dos dados laboratoriais é naturalmente inferior a  $g$ , uma vez que não inclui a contribuição do movimento das molas. De facto, os valores obtidos são  $8,27$  m/s<sup>2</sup> para  $N = 2$  e  $9,11$  m/s<sup>2</sup> para  $N = 3$ . A variação da discrepância nestes dois casos sugere que se trata de uma função decrescente do número de bolas dispostas ao longo da mola. Ou seja, que a sua magnitude será tanto menor quanto menor for a importância relativa da massa da mola; ou seja ainda, quanto mais “ideal” ela for.

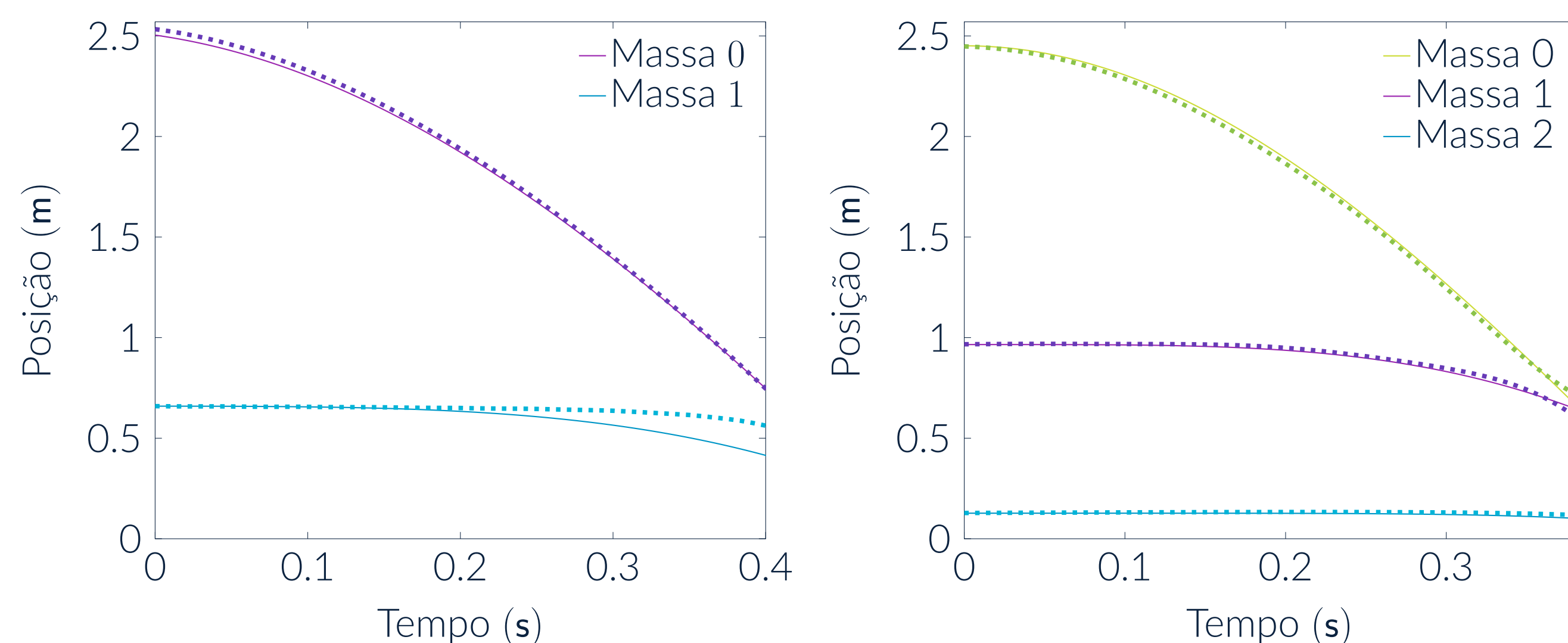


Figura 2. Deslocamentos das massas na queda de uma mola com 2 e 3 massas. A tracejado estão as curvas observadas e a contínuo estão as soluções numéricas.

Na Figura 3 está representada a posição da massa na extremidade inferior da mola, como função do tempo, para diferentes números (2, 3, 4 e 5) de massas dispostas na mola. Nota-se quanto maior for o número de massas, maior é o atraso no início do movimento da última massa. Este facto sugere que o comportamento de queda das molas demonstrado nos vídeos referidos resulta da densidade de massa finita das molas reais.

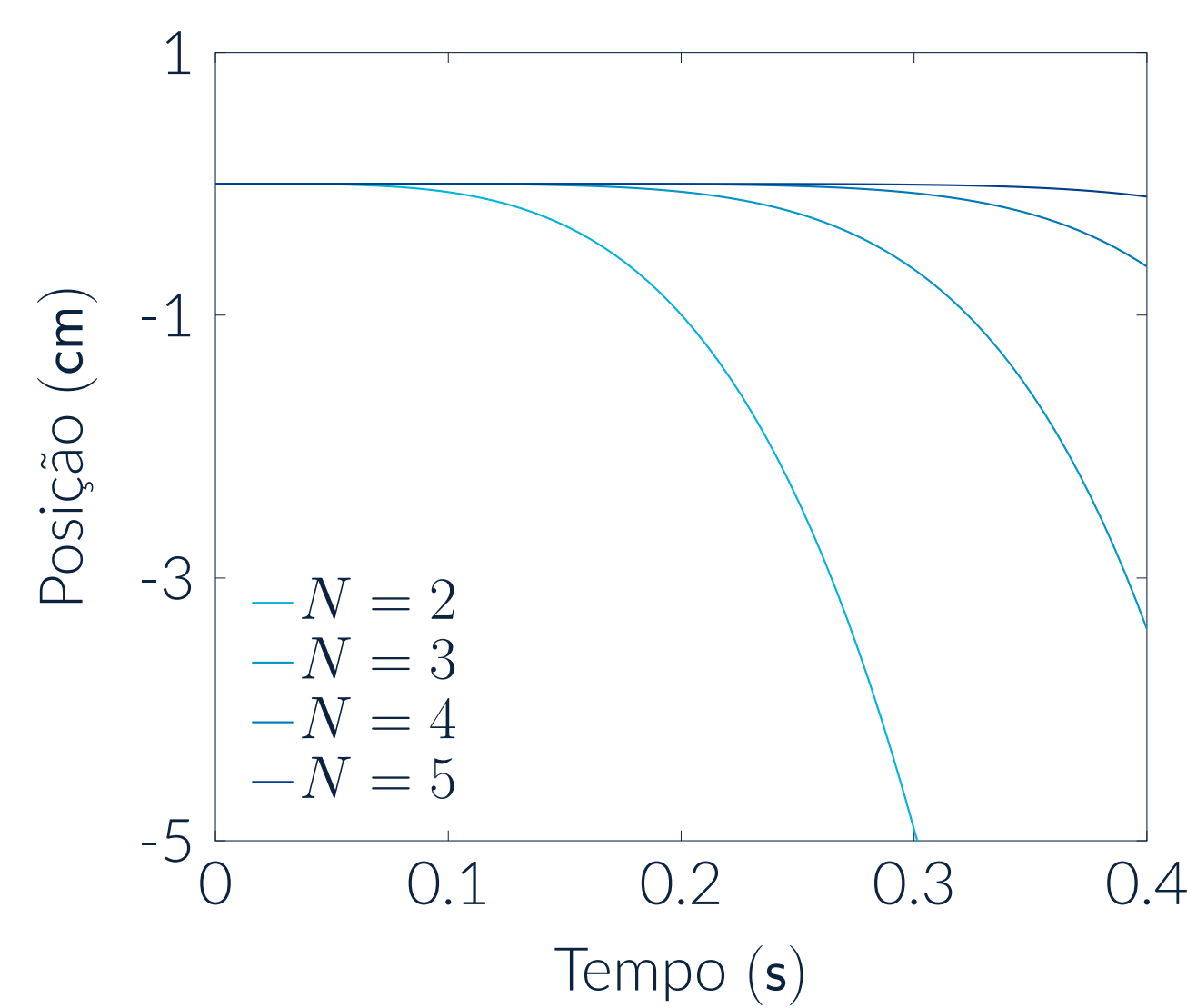


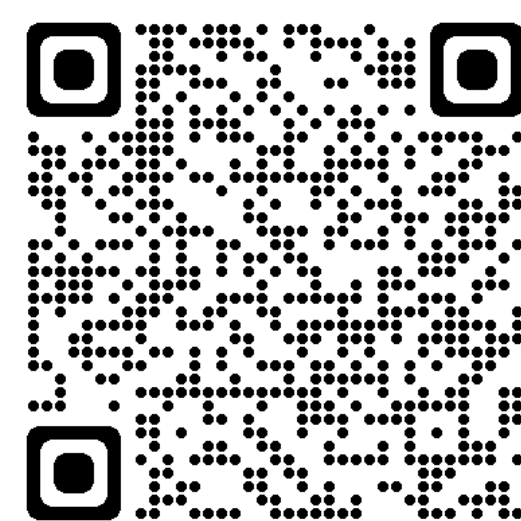
Figura 3. Posição da massa na extremidade inferior da mola (relativamente à sua posição inicial) em função do tempo, para diferentes valores de  $N$ .

## Conclusões

O movimento de queda de molas elásticas reais ilustrado nos vídeos referidos na Introdução pode ser descrito aproximadamente usando um modelo de mola ideal com massas pontuais dispostas regularmente ao longo do seu comprimento, apesar de ser uma manifestação do carácter contínuo da distribuição de massa das molas elásticas usadas nas demonstrações. Estas massas são indispensáveis para dotar o modelo de mola ideal com peso e inércia e, assim, promover as molas ideais ao estatuto de objetos dinâmicos.

A descrição do movimento torna-se mais exata quanto maior for o número de massas pontuais considerada, o que concorda com a ideia de uma mola real como limite contínuo de uma mola ideal com massas pontuais distribuídas ao longo do seu comprimento.

Todos os ficheiros produzidos neste trabalho (vídeos, ficheiros de dados, programas) estão disponíveis em <https://github.com/ljmamoreira/fslinky> (acesso possível também pelo QR code abaixo).



## Referências

- [1] Veritasium. Does a falling slinky defy gravity? URL: <https://rb.gy/aqkiwr>.
- [2] Adam Shomsky. Slow motion slinky drop 1000fps. URL: <https://rb.gy/eau3eb>.
- [3] ActionLabShorts. Anti-gravity slinky. URL: <https://rb.gy/lfu3mw>.
- [4] Charles R. Harris et al. Array programming with NumPy. *Nature*, 585(7825):357–362, September 2020.
- [5] Pauli Virtanen et al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 17:261–272, 2020.
- [6] Open Source Physics (OSP). Tracker. URL: <https://physlets.org/tracker/>.