

Queda de uma mola ideal suspensa com massas distribuídas regularmente

João Santos² João Esteves² José Amoreira^{1,2,3}

¹Laboratório de Instrumentação e Física Experimental de Partículas

²Universidade da Beira Interior

³Centro de Matemática e Aplicações (CMAUBI)

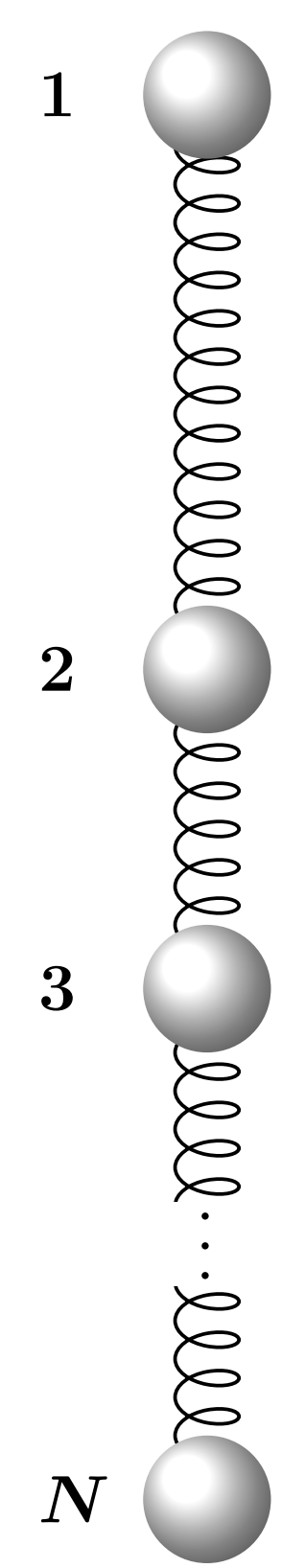
Motivação/Introdução

Vários vídeos disponíveis na plataforma YouTube mostram a queda de uma mola elástica a partir de uma situação de repouso estático em que ela se encontra na vertical, suspensa de uma das suas extremidades. Estes vídeos são interessantes poque mostram a extremidade inferior da mola como que a aguardar que a extremidade superior a atinja, antes de começar o seu movimento de queda propriamente dito.

A explicação deste comportamento é dada pela teoria da elasticidade de um meio contínuo. A onda de deformação gerada na extremidade superior da mola quando é solta propaga-se longitudinalmente com uma velocidade finita, e só quando atinge a extremidade inferior, alterando aí o estado de deformação inicial, se modifica o equilíbrio de forças (peso e força elástica) que mantinham esta extremidade em repouso.

Claramente, o modelo elementar de mola ideal, em que se despreza a sua massa, é insuficiente para enquadrar esta explicação, uma vez que não tendo massa, (1) a sua deformação é sempre uniforme; logo, a força sobre a extremidade inferior altera-se instantaneamente assim que a extremidade superior inicia a sua queda, e (2) a mola não fica sujeita à gravidade, ou seja, nem sequer cai! Mas será possível dar conta deste comportamento das molas reais considerando molas ideais com massas distribuídas regularmente ao longo do seu comprimento? Com este trabalho pretendeu-se dar resposta a esta questão.

Formalismo



Mola ideal com comprimento natural L com constante elástica K , com N partículas pontuais iguais com massa $m = M/N$, dispostas regularmente ao longo da mola.

$$\begin{aligned} l &= L/(N-1) && \rightarrow \text{Comprimento de cada segmento} \\ k &= K(N-1) && \rightarrow \text{Constante elástica de cada segmento} \\ m &= M/N && \rightarrow \text{Massa de cada partícula} \end{aligned}$$

Posições de equilíbrio iniciais:

$$y_i^0 = y_1^0 - (i-1) \left[l + \left(N - \frac{i}{2} \right) \frac{mg}{k} \right], \quad i > 1$$

Acelerações ($x_i = y_i - y_i^0$, $\omega^2 = k/m$):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -Ng - \omega^2(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_i &= \omega^2(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}), \quad i = 2, \dots, N-1 \\ \ddot{x}_N &= \omega^2(x_{N-1} - x_N) \end{aligned}$$

Este sistema de equações foi resolvido em Python/Numpy, usando a função `solve_ivp` da biblioteca SciPy.

Procedimento experimental

Para verificar a validade das soluções obtidas numericamente, estudou-se o movimento de queda de uma mola de aço com bolas de ténis dispostas regularmente ao longo do seu comprimento. As bolas de ténis usadas têm massa $56,6 \pm 0,1$ g. A massa da mola usada tem o valor $37,5 \pm 0,1$ g; determinou-se a sua constante elástica por regressão linear dos valores do alongamento sob diferentes tensões, tendo-se obtido o valor de $0,44 \pm 0,01$ N/m. O movimento de queda foi filmado a 120 fps e a posição das bolas foi obtida fotograma a fotograma usando o programa Tracker [1]. Analizaram-se os casos $N = 2$ (uma massa em cada extremidade da mola) e $N = 3$ (a massa adicional no centro da mola). Os resultados estão apresentados na Figura 2.

Verifica-se genericamente bom acordo entre os resultados numéricos e os valores observados experimentalmente, o que valida o modelo.



Figura 1. Procedimento usado para gravar a queda da bola.

Resultados

Na Figura 2 estão representados gráficos da posição calculada e observada de cada massas como funções do tempo, para os casos $N = 2$ e $N = 3$. É patente o bom acordo entre os valores calculados e observados. As discrepâncias mais significativas ocorrem no final do intervalo de tempo representado, quando as espiras da mola se comprimem umas contra as outras, devido ao movimento de queda mais rápido das massas mais acima, efeito que altera a dinâmica puramente elástica e gravítica do modelo numérico.

É interessante notar a discrepância no movimento da massa na extremidade da mola, mais patente no caso $N = 2$ que para $N = 3$. Cremos que esta discrepância está relacionada com o modelo de mola ideal. Com apenas duas bolas de ténis fixadas na mola, é mais discutível considerar-se desprezável a sua massa. Logo, é mais expectável que o modelo adotado não se adeque tão precisamente ao comportamento do sistema estudado.

Esta conjectura é apoiada por cálculos do valor da aceleração do centro de massa do conjunto das bolas. O valor obtido a partir dos dados laboratoriais é naturalmente inferior a g , uma vez que não inclui a contribuição do movimento das molas. De facto, os valores obtidos são $8,27$ m/s² para $N = 2$ e $9,11$ m/s² para $N = 3$. Nota-se que esta “discrepância” é tanto menor quanto mais bolas dispomos ao longo da mola, ou seja, quanto menor for a importância relativa da massa da mola; ou seja ainda, quanto mais “ideal” ela for.

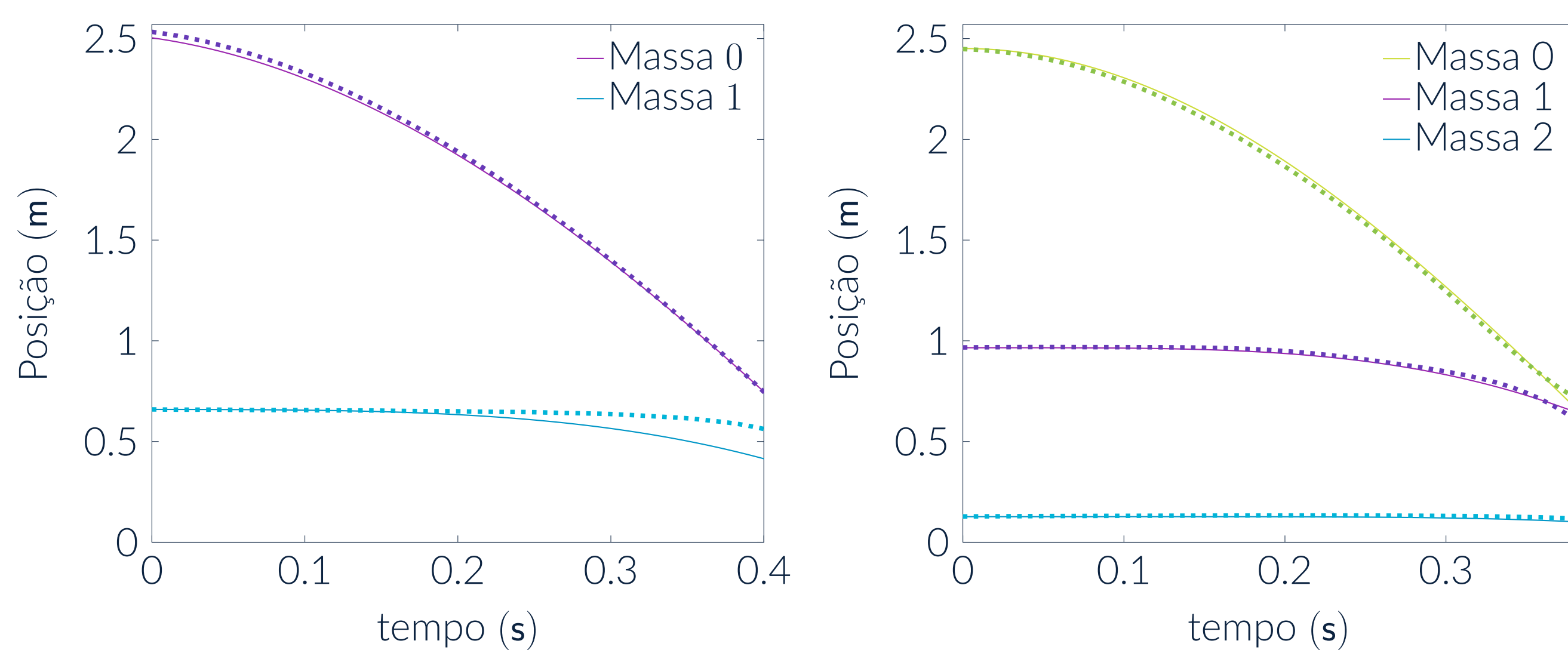


Figura 2. Deslocamentos das massas na queda de uma mola com 2 e 3 massas. A tracejado estão as curvas observadas e a contínuo estão as soluções numéricas.

Na Figura 3 está representada a posição da massa na extremidade inferior da mola, como função do tempo, para diferentes números (2, 3, 4 e 5) de massas dispostas na mola. Nota-se quanto maior for o número de massas, maior é o atraso no início do movimento da última massa. Este facto sugere que o comportamento de queda das molas demonstrado nos vídeos referidos resulta da densidade de massa finita das molas reais.

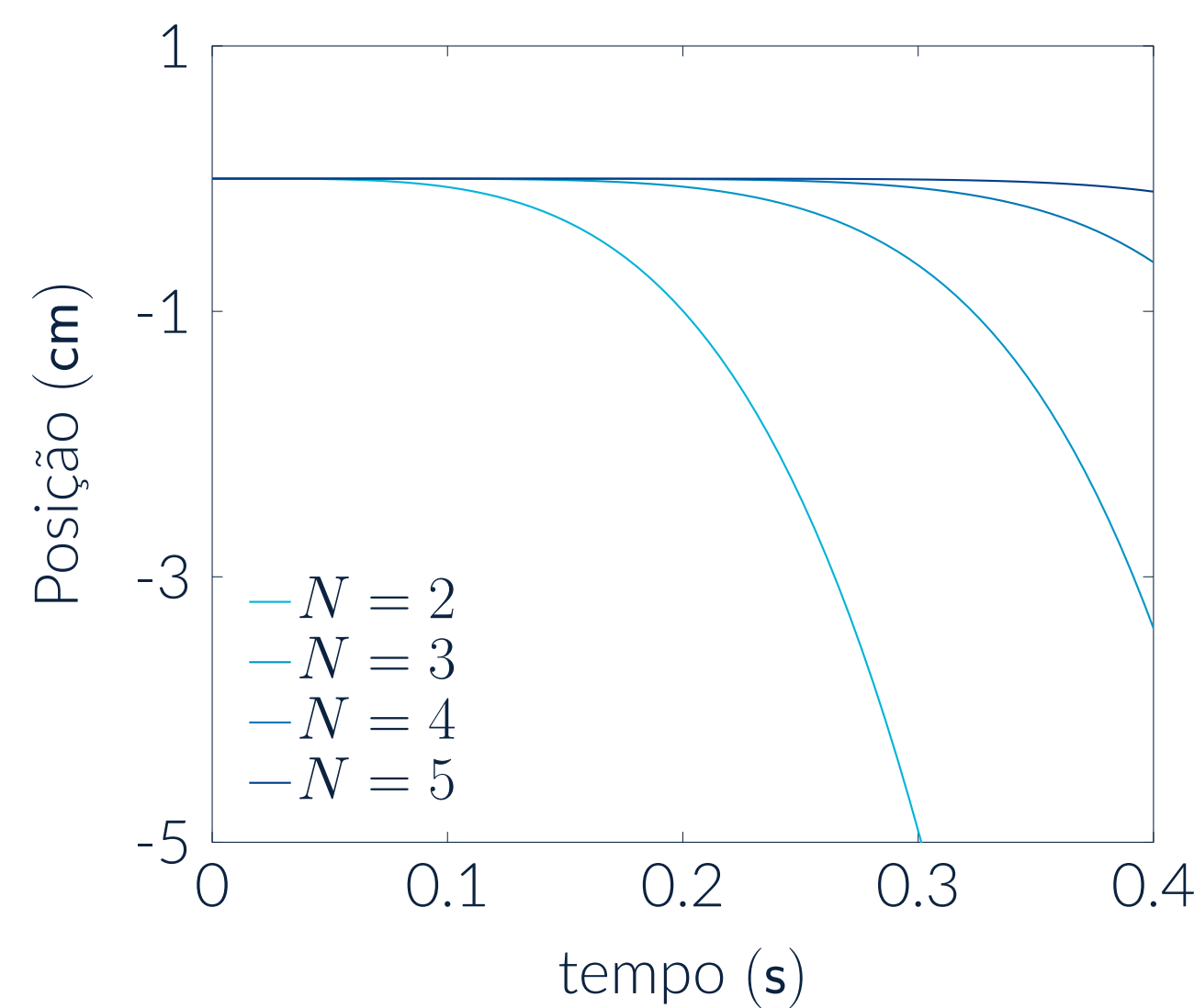


Figura 3. Posição da massa na extremidade inferior da mola, em função do tempo, para diferentes valores de N .

Conclusões

O movimento de queda de molas elásticas reais ilustrado nos vídeos referidos pode ser descrito aproximadamente usando um modelo de mola ideal com massas pontuais dispostas regularmente ao longo do seu comprimento. Estas massas são indispensáveis para dotar o modelo de mola ideal com peso e inércia e, assim, promover as molas ideais ao estatuto de objetos dinâmicos.

A descrição do movimento torna-se mais exata quanto maior for o número de massas pontuais considerada, o que concorda com a ideia de uma mola real como limite contínuo de uma mola ideal com massas pontuais distribuídas ao longo do seu comprimento.

Este problema (com a abordagem que propomos) parece-nos um contexto adequado para a ilustração das teorias de campo como limites contínuos de teorias de massas pontuais.

Referências

[1] Open Source Physics (OSP). Tracker. URL: <https://physlets.org/tracker/>.

[2] Veritasium. Does a falling slinky defy gravity? URL: <https://shorturl.at/T1kBC>.

[3] Adam Shomsky. Slow motion slinky drop 1000fps. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=8UimHnsWSBc>.

[4] ActionLabShorts. Anti-gravity slinky. URL: <https://shorturl.at/ujsBK>.

[5] Charles R. Harris et al. Array programming with NumPy. Nature, 585(7825):357–362, September 2020.

[6] Pauli Virtanen et al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. Nature Methods, 17:261–272, 2020.

