Queda de uma mola ideal suspensa com massas distribuídas regularmente

José Amoreira [1,2,3] João Santos [2] João Esteves [2]

[1]Laboratório de Instrumentação e Fisica Experimental de Particulas

[2]Universidade da Beira Interior [3]Centro de Matemática e Aplicações

Motivação/Introdução

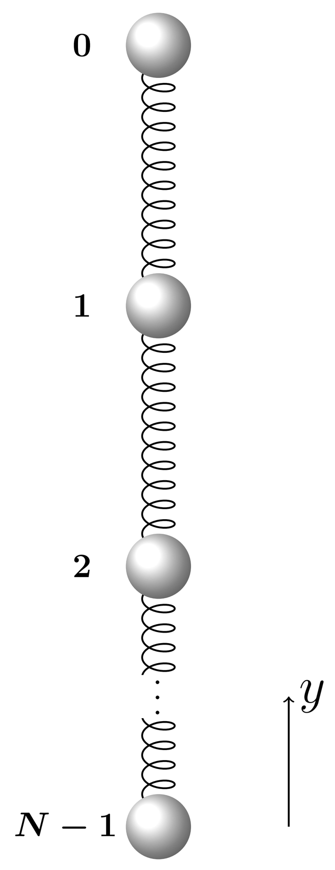
Vários vídeos disponíveis na plataforma YouTube mostram a queda de uma mola elástica a partir de uma situação de repouso estático em que ela se encontra na vertical, suspensa de uma das suas extremidades. Estes vídeos são interessantes poque mostram a extremidade inferior da mola como que a aguardar que a extremidade superior a atinja, antes de começar o seu movimento de queda propriamente dito.

A explicação deste comportamento é dada pela teoria da elasticidade de um meio contínuo. A onda de deformação gerada na extremidade superior da mola quando é solta propaga-se longitudinalmente com uma velocidade finita, e só quando atinge a extremidade inferior, alterando aí o estado de deformação inicial, se modifica o equilíbrio de forças (peso e força elástica) que mantinham esta extremidade em repouso.

Claramente, o modelo elementar de mola ideal, em que se despreza a sua massa, é insuficiente para enquadrar esta explicação, uma vez que não tendo massa, (1) a mola não fica sujeita à gravidade, ou seja, não cai e (2) a sua deformação é sempre uniforme, pelo que a força sobre a extremidade inferior altera-se instantaneamente assim que a extremidade superior inicia a sua queda. No entanto, será que um sistema de massas pontuais ligadas por molas ideiais

Com este trabalho, tentou-se descrever o movimento de queda das molas reais usando o modelo de mola ideal, com massas iguais distribuídas uniformemente sobre o seu comprimento.

Formalismo



Mola ideal com comprimento natural L com constante elástica K, com N partículas pontuais iguais com massa $m = M/N$, dispostas regularmente ao longo da mola.

$$
\begin{aligned}
l &= L/(N-1) && \rightarrow \text{Comprimento de cada segmento}\\
k &= K(N-1) && \rightarrow \text{Constante elástica de cada segmento}\\
m &= M/N && \rightarrow \text{Massa de cada partícula}
\end{aligned}
$$

Posições de equilíbrio iniciais:

$$y_i^0 = y_0^0 - i\left[l + \left(N - \frac{i+1}{2}\right)\frac{mg}{k}\right], \quad i > 0$$

Acelerações ($x_i = y_i - y_i^0$):

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_0 &= -Ng + \omega^2(x_1 - x_0)\\
\ddot{x}_i &= \omega^2(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}), \qquad i = 1, \ldots, N-2\\
\ddot{x}_{N-1} &= \omega^2(x_{N-2} - x_{N-1})
\end{aligned}
$$

Este sistema de equações foi resolvido em Python/Numpy, usando a função `solve_ivp` da biblioteca SciPy.

Procedimento experimental

Para verificar a validade das soluções obtidas numericamente, estudou-se o movimento de queda de uma mola de aço (slinky) com bolas de ténis dispostas regularmente ao longo do seu comprimento. Esse movimento foi filmado a 120 fps e a posição das bolas foi obtida fotograma a fotograma usando o programa Tracker [2]. Verificou-se um bom acordo entre os resultados númericos e os valores observados deste modo

Resultados

Na Figura A estão representados gráficos da posição calculada e observada de cada massas como funções do tempo, para o caso $N = 3$. É patente o bom acordo entre os valores calculados e observados. As discrepâncias mais significativas ocorrem no final do intervalo de tempo representado, quando as espiras da mola se comprimem umas contra as outras, devido ao movimento de queda mais rápido das massas mais acima, efeito que altera a dinâmica puramente elástica e gravítica do modelo numérico.

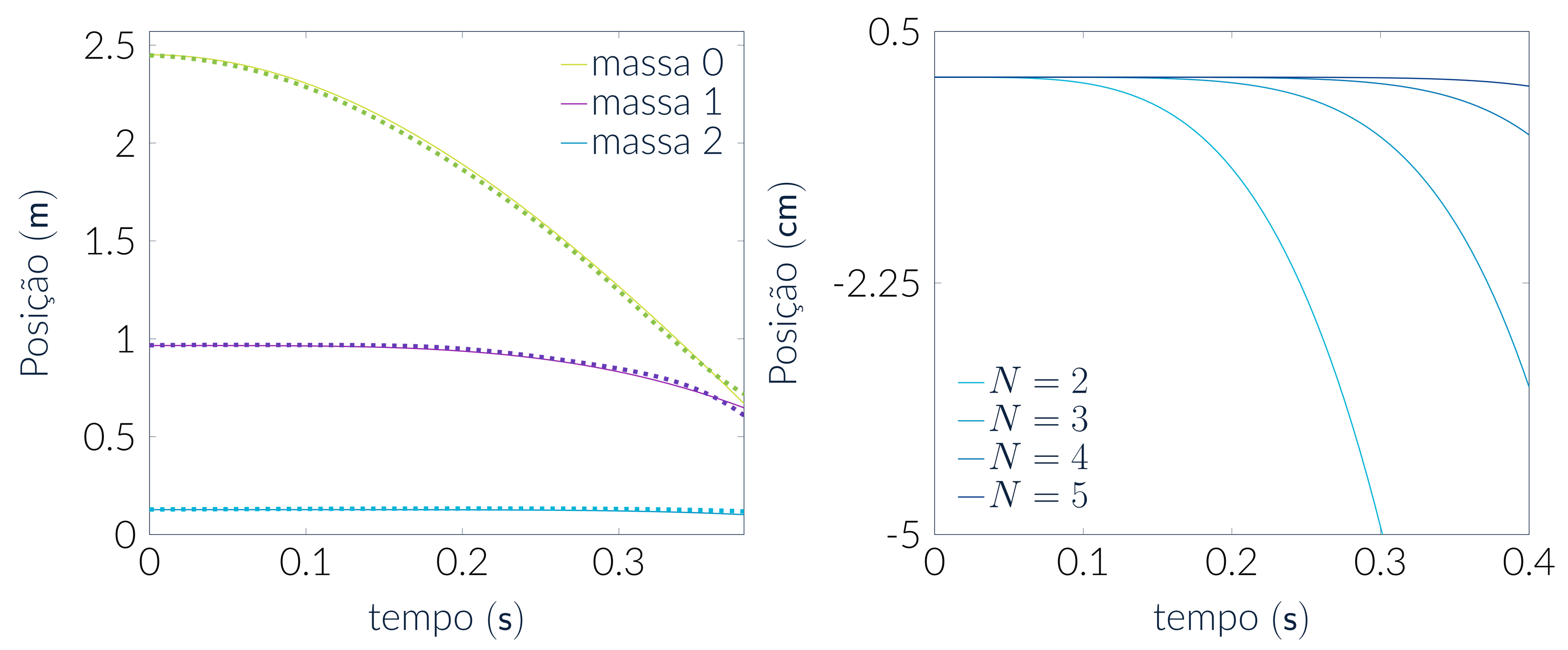
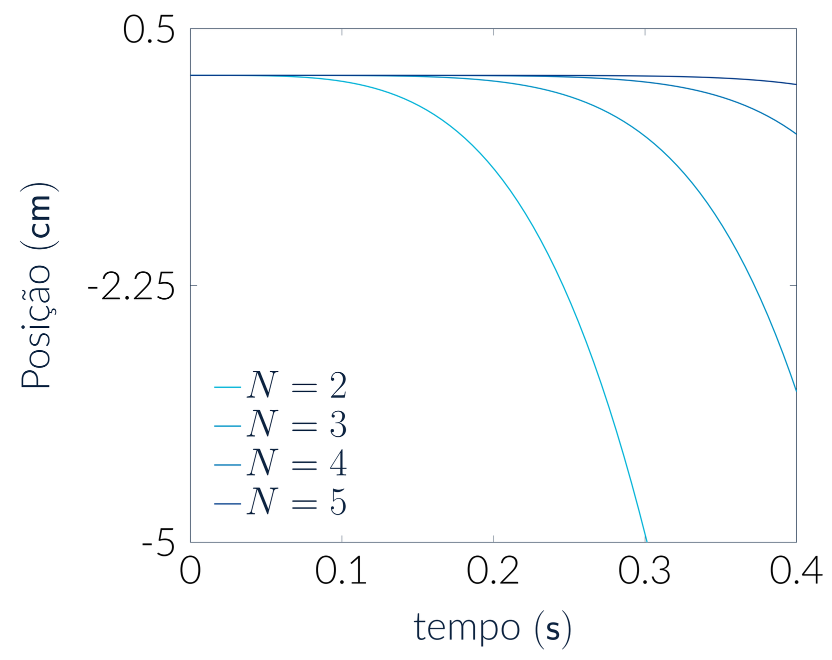


Figura 1. Deslocamentos a partir das posições de equilíbrio na queda de uma mola com 3 massas, a tracejado estão as curvas observadas e a contínuo estão as soluções numéricas.

Na Figura B está representada a posição da massa na extremidade inferior da mola, como função do tempo, para diferentes números (2, 3, 4 e 5) de massas dispostas na mola. Nota-se quanto maior for o número de massas, maior é o atraso no início do movimento da última massa. Este facto sugere que o comportamento de queda das molas demonstrado nos vídeos referidos resulta da densidade de massa finita das molas reais.



Conclusões

- Sed et augue accumsan nibh ullamcorper accumsanam dictum urna tortor, ut pretium leo eleifend.
- Donec suscipit, urna quis tempus consectetur, quam est placerat ante, et scelerisque metus velit.
- Nam dictum urna tortor, ut pretium leo eleifend efficitur.
- Praesent blandit faucibus quam, et tincidunt mauris sagittis eget 2.2%.
- Dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Mauris in nulla ultricies suscipit.

Referências

[1] ActionLabShorts.
Anti-gravity slinky.
URL: `https://www.youtube.com/shorts/xlV_DPdu8DI`.

[2] Open Source Physics (OSP).
Tracker.
URL: `https://physlets.org/tracker/`.

[3] Adam Shomsky.
Slow motion slinky drop 1000fps.
URL: `https://www.youtube.com/watch?v=8UimHnsWSBc`.

[4] Veritasium.
Does a falling slinky defy gravity?
URL: `https://www.youtube.com/watch?v=uiyMuHuCFo4`.

Mais Informações

Scan this QR code