

Ejercicios resueltos de cálculo

Leonardo Andrés Jofré Flor

March 25, 2016

Cada problema requiere una pequeña explicación de lo que entendió del ejercicio

1 Integral doble sobre un rectángulos

Problem 1. Evalúe las siguientes integrales iteradas

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx$$

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y dy dx$$

Problem 2. Evalúe la integral doble $\iint_R (x - 3y^2) dA$ donde $R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$

Problem 3. Evalúe $\iint_R y \sin(xy) dA$, donde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$

Problem 4. Encuentre el volumen del sólido S acotado por el paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, los planos $x = 2$ y $y = 2$ y los tres planos coordenados.

Problem 5. Si $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, entonces $\iint_R \sin(x) \cos(y) dA$

2 Integral múltiple sobre regiones generales

Problem 6. Evalúe $\iint_D (x + 2y) dA$ donde D es la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$

La integral queda definida como

$$\int_{-1}^1 \int_{2x}^{1+x^2} (x + 2y) dy dx$$

Problem 7. Encuentre el volumen de sólido que yace debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región la región D en el plano xy acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$

La integral queda definida como

$$V = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx$$

o alternativamente

$$V = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} x^2 + y^2 dx dy$$

Problem 8. Evalúe $\iint_D xy dA$, donde D es la región acotada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$

$$\int_{-2}^4 \int_{\frac{1}{2}y^2 - 3}^{y+1} xy dx dy$$

Problem 9. Encuentre el volumen del tetraedro acotado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$

La integral es

$$V = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - 2x - 2y) dy dx$$

Problem 10. Evalúe la integral

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx$$

Respuesta

$$\int_0^1 \int_0^y \sin(y^2) dx dy$$

3 Integrales en coordenadas polares

Problem 11. Evalúe $\iint_R (3x + 4y^2) dA$, donde R es la región en el semiplano superior acotado por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$

$$\int_0^\pi \int_1^2 (3r \cos(\theta) + 4r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta = \frac{15\pi}{2}$$

Problem 12. Encuentre el volumen del sólido acotado por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ en coordenadas rectangulares y polares

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Problem 13. Use la integral doble para ahllar el área encerrada por un pétalo de la rosa de cuadro hojas $r = \cos 2\theta$

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r dr d\theta = \frac{\pi}{8}$$

Problem 14. Encuentre el volumen del sólido que yace debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$, arriba del plano xy y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$

$$V = \int \int_D x^2 + y^2 dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2 r dr d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

4 Integrales triples

4.1 coordenadas rectangulares

Problem 15. Evalúe la integral triple $\iiint_B xyz^2 dV$ donde B es la caja rectangular $B = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$

$$\int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz dx dy dz = \frac{27}{4}$$

Problem 16. Evalúe $\iiint_E z dV$ donde E es el tetraedro sólido acotado por los cuatro planos $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z dz dy dx = \frac{1}{24}$$

4.2 coordenadas cilíndricas

Problem 17. Describa la superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $z = r$

Problem 18. Un sólido E se encuentra dentro de un cilindro $x^2 + y^2 = 1$, por debajo del plano $z = 4$ y por encima del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. La densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia del eje del cilindro. Encuentre la masa de E

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 K r r dz dr d\theta = \frac{12\pi K}{5}$$

Problem 19. Evalúe $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx$

Respuesta $-2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2$ que es equivalente a $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 2$

4.3 coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\z &= \rho \cos \phi\end{aligned}$$

Problem 20. Evalúe $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$, donde B es la bola unitaria

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi(e-1)$$

Problem 21. Use coordenadas esféricas para hallar el volumen del sólido que yace arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z \equiv \rho = \cos \phi$ la ecuación del cono se puede escribir como $\rho \cos \phi = \rho \sin \phi$ que es equivalente a $\phi = \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi}{8}$$

5 Suma de Riemman

Aproximación de un volumen mediante suma de rectángulos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x^2 + y^2 + z^2 dx dy dz &= \lim_{m,n,r \rightarrow \infty} (x_i + y_i + z_i) \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r} \\&= \lim_{m,n,r \rightarrow \infty} \left(\frac{i}{n} + \frac{j}{m} + \frac{k}{r} \right) \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r}\end{aligned}$$

References

[1] Cálculo en varias variables, Stewart 7 edición.