Ejercicios resueltos de cálculo

Leonardo Andrés Jofré Flor

March 23, 2016

1 Integral doble sobre un rectángulos

Calcular $I = \int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 x \cos z + 3yzdxdydz$
Integral de Riemman en 3 variables
Coordenadas cilindricas

2 Integral múltiple sobre dominios más generales

Problem 1. Evalue $\int \int_D (x + 2y)\, dA$ donde D es la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$

La integral queda definida como

$$\int_{-1}^{1} \int_{2x}^{1+x^2} (x + 2y)\, dydx$$

Problem 2. Encuentre el volumen de sólido que yace debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región la región D en el plano xy acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$

La integral queda definida como

$$V = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \left(x^2 + y^2\right) dydx$$

o alternativamente

$$V = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{2}} x^2 + y^2 dxdy$$

Problem 3. Evalue $\int \int_D xydA$, donde D es la región acotada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$

$$\int_{-2}^{4} \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xydxdy$$

Problem 4. Encuentre el volumen del tetraedro acotado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$

La integral es

$$V = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - 2x - 2y)\, dydx$$

Problem 5. Evalue la integral

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin\left(y^2\right) dydx$$

Respuesta

$$\int_0^1 \int_0^y \sin\left(y^2\right) dxdy$$

3 Integrales en coordenadas polares

Problem 6. Evalue $\int\int_R \left(3x + 4y^2\right) dA$, donde R es la región en el semiplano superior acotado por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$

$$\int_0^\pi \int_1^2 \left(3r\cos(\theta) + 4r^2 \sin^2\theta\right) rdrd\theta = \frac{15\pi}{2}$$

Problem 7. Encuentre el volumen del sólido acotado por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ en coordenadas rectangulares y polares

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - r^2\right) rdrd\theta = \frac{\pi}{2}$$

Problem 8. Use la integral doble para ahllar el área encerrada por un pétalo de la rosa de cuadro hojas $r = \cos 2\theta$

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} rdrd\theta = \frac{\pi}{8}$$

Problem 9. Encuentre el volumen del sólido que yace debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$, arriba del plano xy y dentro del cilindro $x^{2‘} + y^2 = 2x$

$$V = \int\int_D x^2 + y^2 dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2 rdrd\theta = \frac{3\pi}{2}$$

4 Integrales triples

4.1 coordenadas rectangulares

Problem 10. Evalue la integral triple $\iiint_B xyz^2 dV$ donde B es la caja rectangular $B = \{(x, y, z)\, /0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$

$$\int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyzdxdydz = \frac{27}{4}$$

Problem 11. Evalue $\iiint_E zdV$ donde E es el tetrahedro solido acotado por los cuatro planos $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} zdzdydx = \frac{1}{24}$$

4.2 coordenadas cilindricas

Problem 12. Describa la superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $z = r$

Problem 13. Un sólido E se encuentra dentro de un cilindro $x^2 + y^2 = 1$, por debajo del plano $z = 4$ y por encima del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. La densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia del eje del cilindro. Encuentre la masa de E

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 Krrdzdrd\theta = \frac{12\pi K}{5}$$

Problem 14. Evalue $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 \left(x^2 + y^2\right) dzdydx$

Respuesta $-2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2$ que es equivalente a $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 2$

4.3 coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\phi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned}$$

Problem 15. Evalúe $\iiint_B e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dV$, donde B es la bola unitaria

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \sin\phi d\rho d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi\left(e - 1\right)$$

Problem 16. Use coordenadas esféricas para hallar el volumen del sólido que yace ariba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z \equiv \rho = \cos\phi$ la ecuación del cono se puede escribir como $\rho\cos\phi = \rho\sin\phi$ que es equivalente a $\phi = \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\phi} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi}{8}$$

5 Suma de Riemman

Aproximación de un volumen mediante suma de rectángulos

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x^2+y^2+z^2 dxdydz &= \lim_{m,n,r\to\infty}(x_i+y_i+z_i)\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{r}\\ &= \lim_{m,n,r\to\infty}\left(\frac{i}{n}+\frac{j}{m}+\frac{k}{r}\right)\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{r}\end{aligned}$$