Ejercicios resueltos de cálculo

Leonardo Andrés Jofré Flor, Academia Politécnica Militar

March 30, 2016

ljofre@dim.uchile.cl

Cada problema requiere una pequeña explicación de lo que entendió del ejercicio

1 Derivadas direccionales

Una derivada direccional es

$$D_{\mathbf{u}}f = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h}$$

y su interpretación es la de la pendiente de la recta tangente a f con respecto un corte vertical definido por el plano que contiene a la recta que pasa en el punto $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ y que tiene dirección $\mathbf{u}$

Su cálculo se puede simplificar mediante

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

Problem 1. Determine la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f$ si $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ y u es el vector unitario dado por $\theta = \frac{\pi}{6}$ ¿Qué valor tiene $D_{\mathbf{u}}f(1,2)$

hint:
$\left(3x^2 - 3y, 6y, -3x\right) \cdot \mathbf{u}$ donde $\mathbf{u} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

2 Integral doble sobre un rectángulos

Problem 2. Evalúe las siguientes integrales iteradas

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx \qquad \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dy dx$$

Problem 3. Evalue la integral doble $\iint_R \left(x - 3y^2\right) dA$ donde $R = \{(x,y) / 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$

Problem 4. Evalúe $\iint_R y \sin(xy)\, dA$, donde $R = [1,2] \times [0,\pi]$

Problem 5. Encuentre el volumen del sólido S acotado por el paraboloide elíptico $x^2+2y^2+z=16$, los planos $x=2$ y $y=2$ y los tres planos coordenados.

Problem 6. Si $R=[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$, entonces $\iint_R \sin(x)\cos(y)\,dA$

3 Integral múltiple sobre regiones generales

Problem 7. Evalue $\int\int_D (x+2y)\,dA$ donde D es la región acotada por las parábolas $y=2x^2$ e $y=1+x^2$

La integral queda definida como

$$\int_{-1}^{1}\int_{2x}^{1+x^2}(x+2y)\,dydx$$

Problem 8. Encuentre el volumen de sólido que yace debajo del paraboloide $z=x^2+y^2$ y sobre la región la región D en el plano xy acotada por la recta $y=2x$ y la parábola $y=x^2$

La integral queda definida como

$$V=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}\left(x^2+y^2\right)dydx$$

o alternativamente

$$V=\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{2}}x^2+y^2dxdy$$

Problem 9. Evalue $\int\int_D xydA$, donde D es la región acotada por la recta $y=x-1$ y la parábola $y^2=2x+6$

$$\int_{-2}^{4}\int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1}xydxdy$$

Problem 10. Encuentre el volumen del tetraedro acotado por los planos $x+2y+z=2$, $x=2y$, $x=0$, $z=0$

La integral es

$$V=\int_0^1\int_{x/2}^{1-x/2}(2-2x-2y)\,dydx$$

Problem 11. Evalue la integral

$$\int_0^1\int_x^1\sin\left(y^2\right)dydx$$

Respuesta

$$\int_0^1\int_0^y\sin\left(y^2\right)dxdy$$

4 Integrales en coordenadas polares

Problem 12. Evalue $\int\int_R \left(3x+4y^2\right) dA$, donde R es la región en el semiplano superior acotado por las circunferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$

$$\int_0^{\pi}\int_1^2 \left(3r\cos\left(\theta\right)+4r^2\sin^2\theta\right) r dr d\theta = \frac{15\pi}{2}$$

Problem 13. Encuentre el volumen del sólido acotado por el plano $z=0$ y el paraboloide $z=1-x^2-y^2$ en coordenadas rectangulares y polares

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1-r^2\right) r dr d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Problem 14. Use la integral doble para ahllar el área encerrada por un pétalo de la rosa de cuadro hojas $r=\cos 2\theta$

$$A=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\cos 2\theta} r dr d\theta = \frac{\pi}{8}$$

Problem 15. Encuentre el volumen del sólido que yace debajo del paraboloide $z=x^2+y^2$, arriba del plano xy y dentro del cilindro $x^2+y^2=2x$

$$V=\int\int_D x^2+y^2 dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2 r dr d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

5 Integrales triples

5.1 coordenadas rectangulares

Problem 16. Evalue la integral triple $\iiint_B xyz^2 dV$ donde B es la caja rectangular $B=\left\{(x,y,z)\,/ 0\leq x\leq 1, -1\leq y\leq 2, 0\leq z\leq 3\right\}$

$$\int_0^3\int_{-1}^2\int_0^1 xyz dx dy dz = \frac{27}{4}$$

Problem 17. Evalue $\iiint_E z dV$ donde E es el tetrahedro solido acotado por los cuatro planos $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} z dz dy dx = \frac{1}{24}$$

5.2 coordenadas cilindricas

Summary 18. Para las coordenadas cilíndricas el cambio de variable requerido es

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

lo que nos lleva a que

$$\begin{aligned} r &= x^2 + y^2 \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

el jacobiano es $J = r$

Problem 19. Describa la superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $z = r$

Problem 20. Un sólido E se encuentra dentro de un cilindro $x^2 + y^2 = 1$, por debajo del plano $z = 4$ y por encima del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. La densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia del eje del cilindro. Encuentre la masa de E

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 Krrdzdrd\theta = \frac{12\pi K}{5}$$

Problem 21. Evalue $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}\left(x^2+y^2\right)dzdydx$

Respuesta $-2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2$ que es equivalente a $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 2$

5.3 coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\phi\cos\theta \\ y &= \rho\sin\phi\sin\theta \\ z &= \rho\cos\phi \end{aligned}$$

Problem 22. Evalúe $\iiint_B e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dV$, donde B es la bola unitaria

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{\rho^3}\rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi\left(e-1\right)$$

Problem 23. Use coordenadas esféricas para hallar el volumen del sólido que yace ariba del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y debajo de la esfera $x^2+y^2+z^2 = z \equiv \rho = \cos\phi$ la ecuación del cono se puede escribir como $\rho\cos\phi = \rho\sin\phi$ que es equivalente a $\phi = \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\phi}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi}{8}$$

6 Suma de Riemman

Aproximación de un volumen mediante suma de rectángulos

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x^2+y^2+z^2 dxdydz &= \lim_{m,n,r\to\infty}(x_i+y_i+z_i)\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{r} \\ &= \lim_{m,n,r\to\infty}\left(\frac{i}{n}+\frac{j}{m}+\frac{k}{r}\right)\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{r}\end{aligned}$$

References

[1] Cálculo en varias variables, Stewart 7 edición.