



Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Av. Blanco Encalada 2120

Santiago, Chile

Fono: 978 4525

Fax: 688 9705

Un estudio para la determinación de la superficie de quiebre en una mina subterránea en El Teniente

Informe Final

Raúl Manásevich (director)

Roger Bustamante

Javier Ruiz

Duvan Henao

Matias Courdurier

Claudia Vallejos

Matias Valdenegro

Lenardo (Apoyo a Duvan)

Lenardo Jofré

Mael (apoyo de Duvan.....)

Cristian Jara

Mario Fernández

20 de diciembre de 2012

Índice

1. Resumen Ejecutivo	2
2. Línea FEM (Duvan Henao)	3
2.1. Resumen	3
2.2. El Modelo	3
2.3. Descripción Software	3
2.4. Casos de estudio	3
2.4.1. Caso Pilar Norte	3
2.4.2. Caso Esemeralda	3
2.5. Resultados Generales	3
2.6. Extensiones futura	3
2.7. Manual de Uso	3
3. Línea FEM (Roger Bustamante)	4
3.1. Resumen	4
3.2. El Modelo	4
3.3. Descripción Software	4
3.4. Casos de estudio	4
3.4.1. Caso Pilar Norte	4
3.4.2. Caso Esemeralda	4
3.5. Resultados Generales	4
3.6. Extensiones futura	4
3.7. Manual de Uso	4
4. Línea Time Reversal (Matias Courdurier. Leonardo Jofré)	5
4.1. Resumen Estimación y Clasificación de Fuentes	5
4.2. Casos de Estudio	5
4.2.1. Estimación de las Fuentes	5

4.2.2.	Input	6
4.2.3.	Output	12
4.3.	Test de Reconstrucción de Fuentes	27
4.3.1.	Clasificación de las Fuentes	29
4.3.2.	Output	29
4.4.	Conclusión Estimación y Clasificación de Fuentes	44
4.5.	Resumen Time-reversal	44
4.6.	Casos de Estudio	45
4.6.1.	Input	45
4.6.2.	Output	45
4.7.	Conclusiones en Time Reversal	49
4.8.	Modelos	49
4.8.1.	Ecuación de Ondas Elástica	49
4.8.2.	Modelo de Time-Reversal	50
4.8.3.	Estimación de Fuentes Utilizando Mínimos Cuadrados.	51
4.8.4.	Clasificación de Fuentes Reconstruidas.	52
4.9.	Descripción del Software y Manual de Uso	53
4.9.1.	Forma de importar los datos al sistema	53
4.9.2.	Descripción de estructuras de datos	53
4.9.3.	Resumen de implementacion (En Matlab y Python)	53
4.9.4.	Manual de uso	54
4.9.5.	Funciones principales	58
4.9.6.	Otras funciones	59
4.9.7.	Importar desde los set de datos	59
4.9.8.	Importar información a los objetos matlab	60
4.9.9.	Construcción de las fuentes para cada evento	60
4.9.10.	Rotar una señal filtrada para conocer el tipo de fuente	60
5.	Linea Sismica	62
5.1.	Resumen	62
5.2.	El Modelo	62
5.3.	Descripción Software	62
5.4.	Casos de estudio	62
5.4.1.	Caso Pilar Norte	62
5.4.2.	Caso Esemeralda	62

5.5. Resultados Generales	62
5.6. Extensiones futura	62
5.7. Manual de Uso	62
6. Linea DEM	63
6.1. Resumen	63
6.2. El Modelo	63
6.3. Descripción Software	63
6.4. Casos de estudio	63
6.4.1. Caso Pilar Norte	63
6.4.2. Caso Esemeralda	63
6.5. Resultados Generales	63
6.6. Extensiones futura	63
6.7. Manual de Uso	63
7. Linea Geométrica (CME3D)	64
7.1. Resumen	64
7.2. El Modelo	64
7.3. Descripción Software	64
7.4. Casos de estudio	64
7.4.1. Caso Pilar Norte	64
7.4.2. Caso Esemeralda	64
7.5. Resultados Generales	64
7.6. Extensiones futura	64
7.7. Manual de uso	64
8. Bibliografía	65

Capítulo 1

Resumen Ejecutivo

El presente informe da cuenta de los resultados del proyecto *Un estudio para la determinación de la superficie de quiebre en una mina subterránea en El Teniente*, realizado por académicos e ingenieros de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, agrupados en torno al Laboratorio de Modelamiento Matemático para Geomecánica (MMGeo) perteneciente al Centro de Modelamiento Matemático (CMM), y con el apoyo en recursos humanos y financieros de la Superintendencia de Geomecánica de la División El Teniente, Codelco.

El proyecto tiene como objetivo la evaluación de factibilidad de distintos métodos de estimación de la superficie de quiebre. Estos métodos son:

Capítulo 2

Línea FEM (Duvan Henao)

2.1. Resumen

2.2. El Modelo

2.3. Descripción Software

2.4. Casos de estudio

2.4.1. Caso Pilar Norte

El primer ejemplo que se presenta, consiste en ...

Input

Output

Visualización

Análisis de los resultados

2.4.2. Caso Esemeralda

El primer ejemplo que se presenta, consiste en ...

Input

Output

Visualización

Análisis de los resultados

2.5. Resultados Generales

2.6. Extensiones futura

2.7. Manual de Uso

Capítulo 3

Línea FEM (Roger Bustamante)

3.1. Resumen

3.2. El Modelo

3.3. Descripción Software

3.4. Casos de estudio

3.4.1. Caso Pilar Norte

El primer ejemplo que se presenta, consiste en ...

Input

Output

Visualización

Análisis de los resultados

3.4.2. Caso Esemeralda

El primer ejemplo que se presenta, consiste en ...

Input

Output

Visualización

Análisis de los resultados

3.5. Resultados Generales

3.6. Extensiones futura

3.7. Manual de Uso

Capítulo 4

Linea Time Reversal (Matias Courdurier. Leonardo Jofré)

4.1. Resumen Estimación y Clasificación de Fuentes

Se propone una reconstrucción de las fuentes sísmicas, como una fuerza, a partir de las mediciones sísmicas. Luego se propone una clasificación de las fuentes reconstruidas, separándolas en fuentes contenidas principalmente en un plano o fuentes con componentes comparables en todas las direcciones.

El estudio de las fuentes sísmicas se realiza con la intención de identificar propiedades que permitan caracterizar fuentes sísmicas cercanas a la superficie de quiebre. Lograr esta caracterización permitiría ocupar la localización de las fuentes sísmicas para ubicar la superficie de quiebre.

4.2. Casos de Estudio

4.2.1. Estimación de las Fuentes

Para la lista de eventos

'1998_aug_02_07_30_40.d5g'
'1998_aug_07_16_24_33.i6b'
'1998_aug_09_21_49_22.4n3'
'1998_aug_10_07_42_08.2l6'
'1998_aug_20_08_37_39.ery'
'1998_jul_04_13_49_28.6bt'
'1998_jul_05_02_34_05.5hj'
'1998_jul_06_12_14_55.e8j'
'1998_jun_26_10_12_59.2ia'
'1998_jun_27_06_14_09.2jt'
'1998_jun_28_12_21_02.exs'
'1998_jun_29_22_24_21.jp6'
'1998_nov_01_22_40_34.7rv'
'1998_nov_02_14_15_20.j34'
'1998_nov_07_21_23_08.ji5'

```

'1998_nov_13_06_30_43.00d'
'1998_oct_10_16_00_15.fzn'
'1998_oct_15_22_38_44.11n'
'1998_oct_20_16_06_43.byq'
'1998_oct_21_17_20_29.8mp'
'1998_oct_21_18_22_44.h9e'
'1998_oct_21_20_10_32.kxv'
'1998_oct_27_19_38_10.1o0'
'1998_oct_29_18_22_05.2ph'
'2011_apr_10_02_27'
'2011_apr_10_04_56'
'2011_apr_10_06_00'
'2011_apr_10_06_16'
'2011_apr_10_07_52'

```

realizamos la reconstrucción de las fuentes sísmicas como una fuerza mediante un método de mínimos cuadrados descrito más adelante.

4.2.2. Input

Para cada evento se usó el archivo procesado en python con el mismo nombre del evento. Estos archivos contienen la posición y el tiempo estimado del evento sísmico, y además una serie de datos importantes, como por ejemplo, la frecuencia de muestreo de cada uno de los sensores. El detalle se puede ver en el siguiente ejemplo del primer evento de la lista como objeto matlab.

```

name: {'1998_aug_02_07_30_40.d5g'}
beta_est: 3500
alpha_est: 5600
alpha_ind: []
beta_ind: []
gss: [1x7 Geosensor]
alpha: 5600
beta: 3500
rho: 2700
first_time: 40.5227
last_time: 41.5579
count: 7
LocR: [1x3 double]

```

```

origin_time: 40.5655
  tail_per: 0
    error: 0.0196
      xi: -892.7790
      xf: -20.2270
      yi: -1.5404e+03
      yf: -715.6420
      zi: -2.2857e+03
      zf: -1.9726e+03
      dx: 14.7890
      dy: 13.9790
      dz: 34.7967
      dt: []
      nx: []
      ny: []
      nz: []
      nt: []
    n_rsmp1: []
  max_norm: []
    x_axis: [1x60 double]
    y_axis: [1x60 double]
    z_axis: [1x10 double]
    t_axis: [1x50 double]
  X_domain: []
  Y_domain: []
  Z_domain: []
  T_domain: []
origin_time_est: 40.5655
  LocR_est: [1x3 double]
    r0: []
  all_est: []
alpha_ind_post: []
beta_ind_post: []
  src: [100x4 double]
  filtsrc: [100x4 double]

```

```

e: []
v1: 0.4784
v2: 0.2860
v3: 0.2356
vr1: 0.1808
vr2: 0.2440
vr3: 0.5752
A: []
U: [1x73395 double]
indices: []
alphas: []

```

cada evento tiene un conjunto de sensores que pueden ser velocímetros o acelerómetros. A modo de ejemplo se muestran a continuación el gráfico de cada una de las mediciones que contiene el evento 1998_aug_02_07_30_40.d5g.

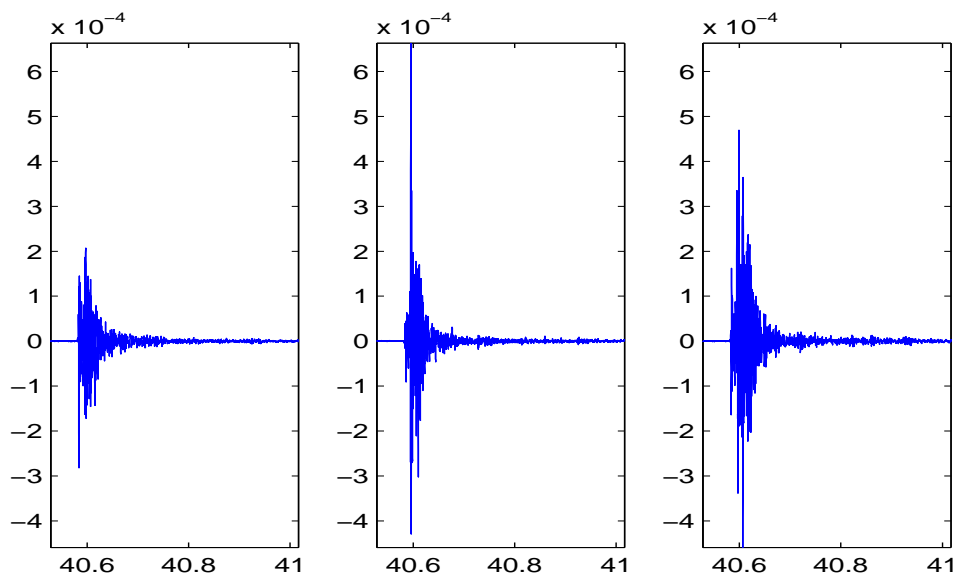


Figura 4.1: Campo de velocidad del sensor 1

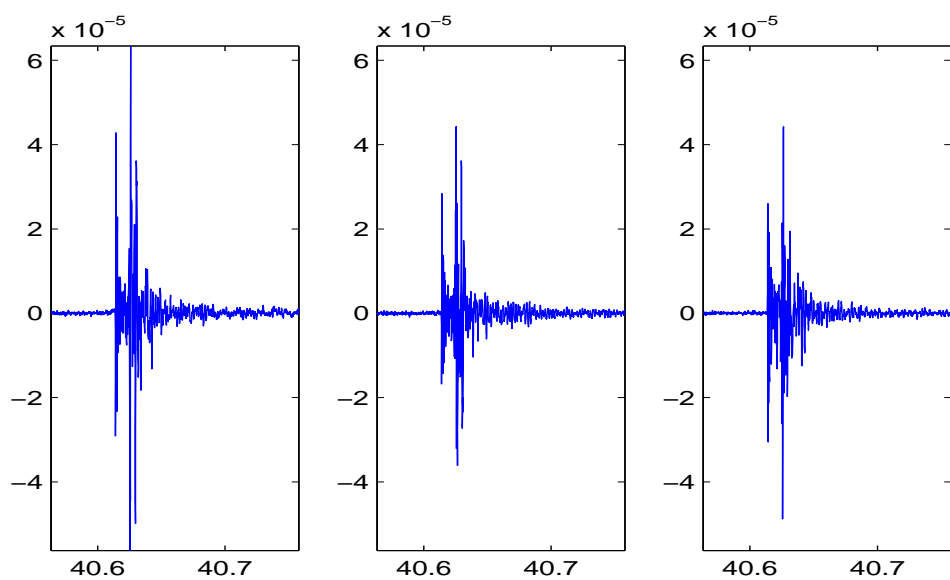


Figura 4.2: Campo de velocidad del sensor 2

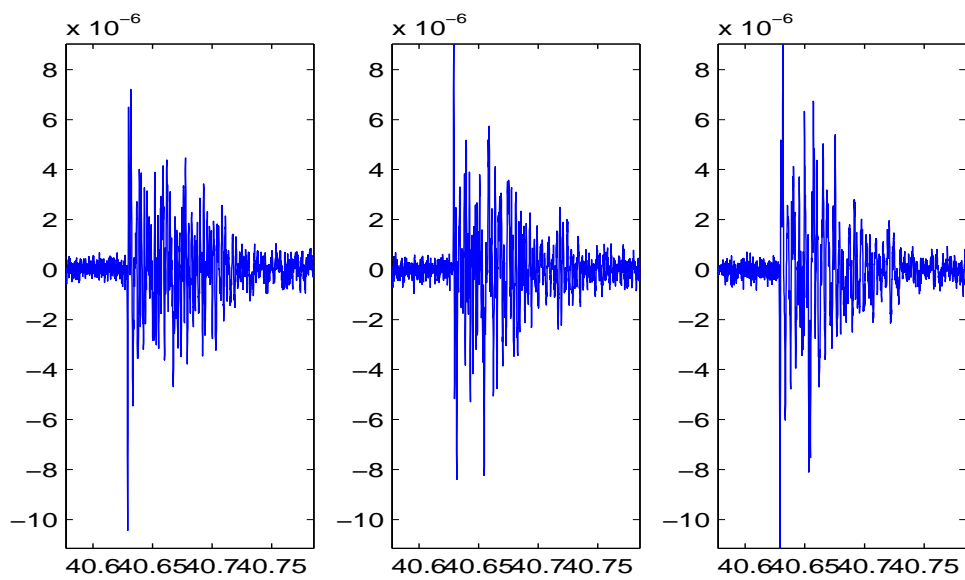


Figura 4.3: Campo de velocidad del sensor 3

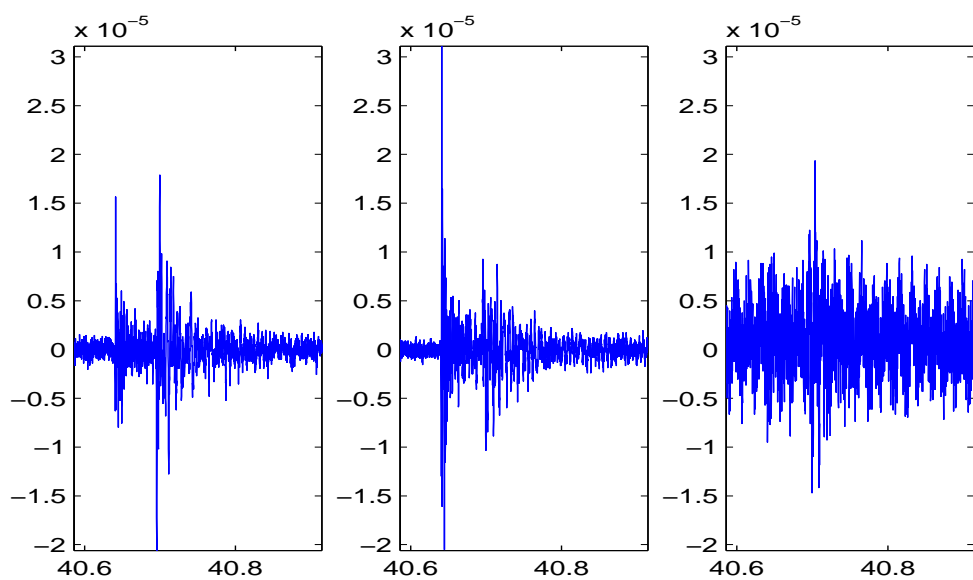


Figura 4.4: Campo de velocidad del sensor 4

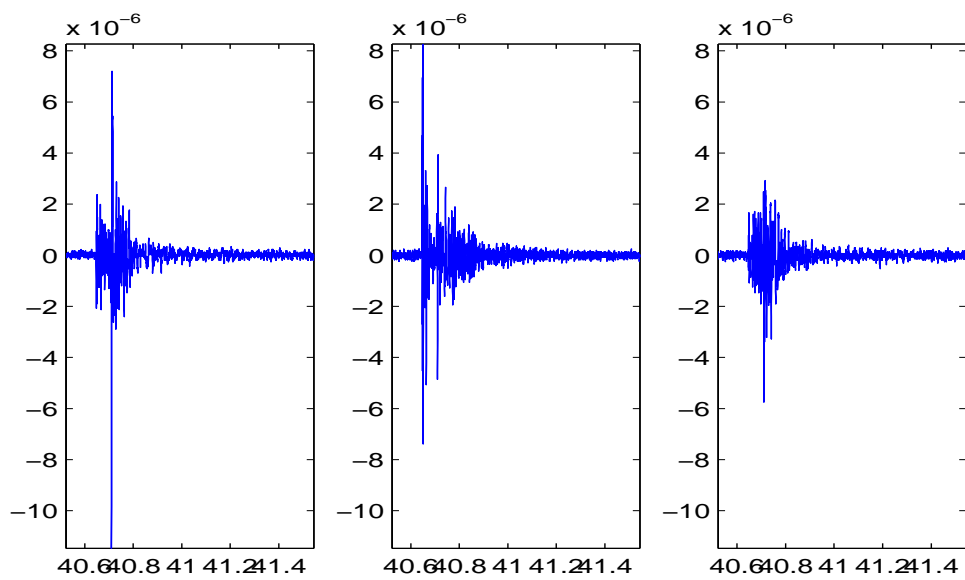


Figura 4.5: Campo de velocidad del sensor 5

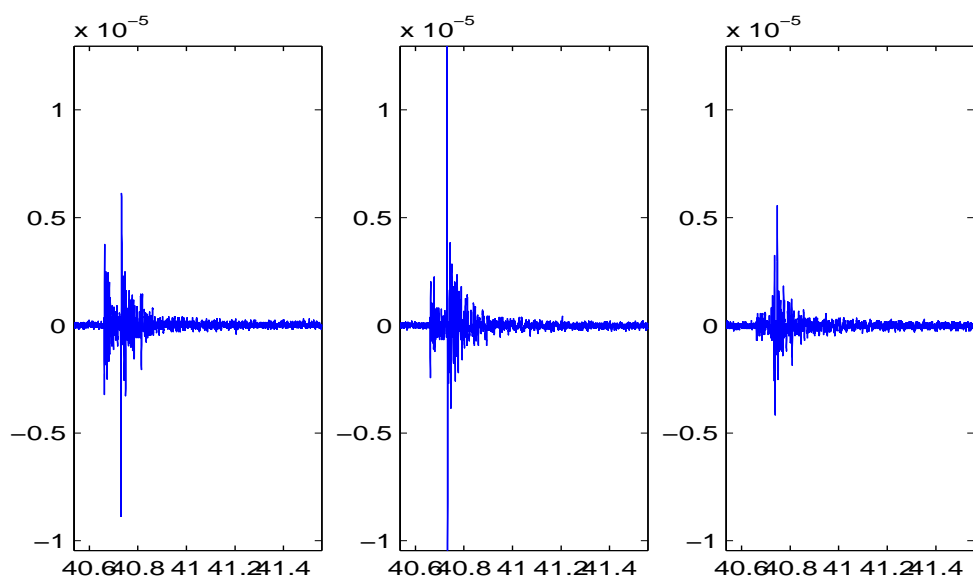


Figura 4.6: Campo de velocidad del sensor 6

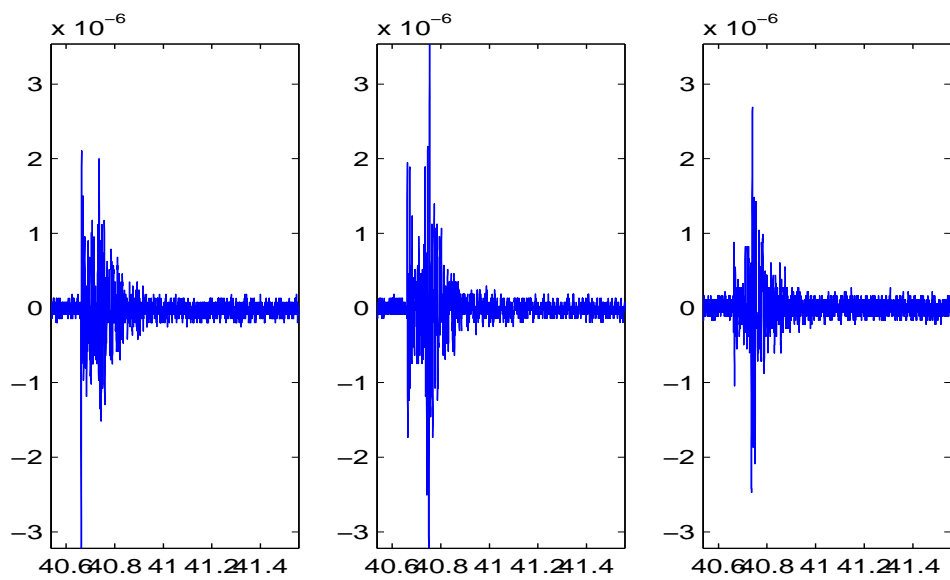


Figura 4.7: Campo de velocidad del sensor 7

4.2.3. Output

El algoritmo retorna una estimación de la fuente como una fuerza para cada uno de los eventos sísmicos. La línea vertical roja representa el tiempo estimado por codelco mediante la variable `origin_time` y el número entre 0 y 1 bajo cada gráfico representa la cantidad de fuerza en cada eje, esto quiere decir, en la componente x, y, z respectivamente.

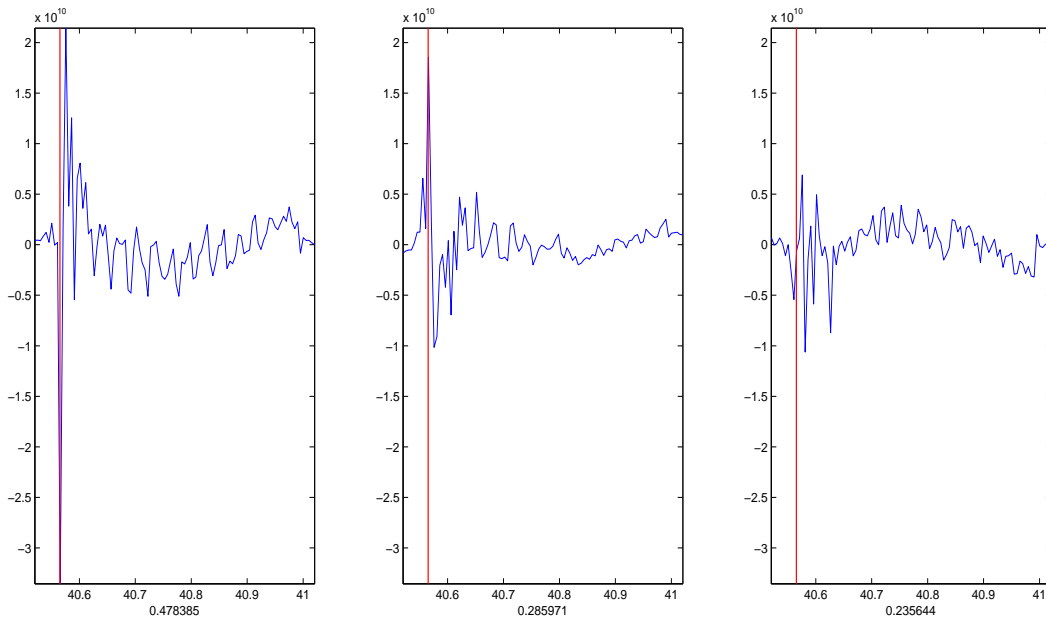


Figura 4.8: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_aug_02_07_30_40.d5g

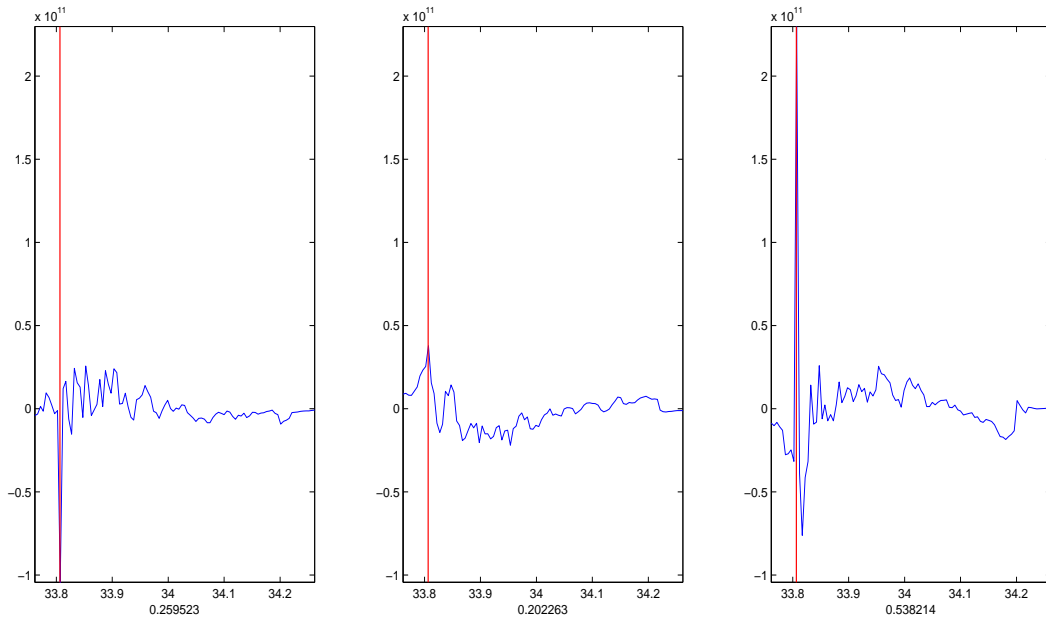


Figura 4.9: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_aug_07_16_24_33.i6b

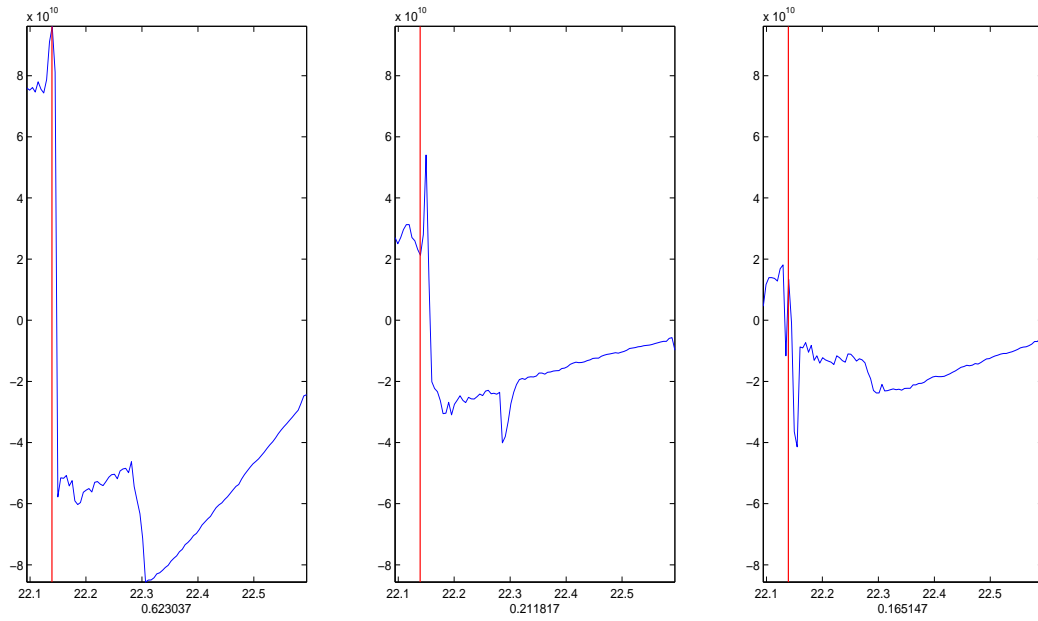


Figura 4.10: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_aug_09_21_49_22.4n3

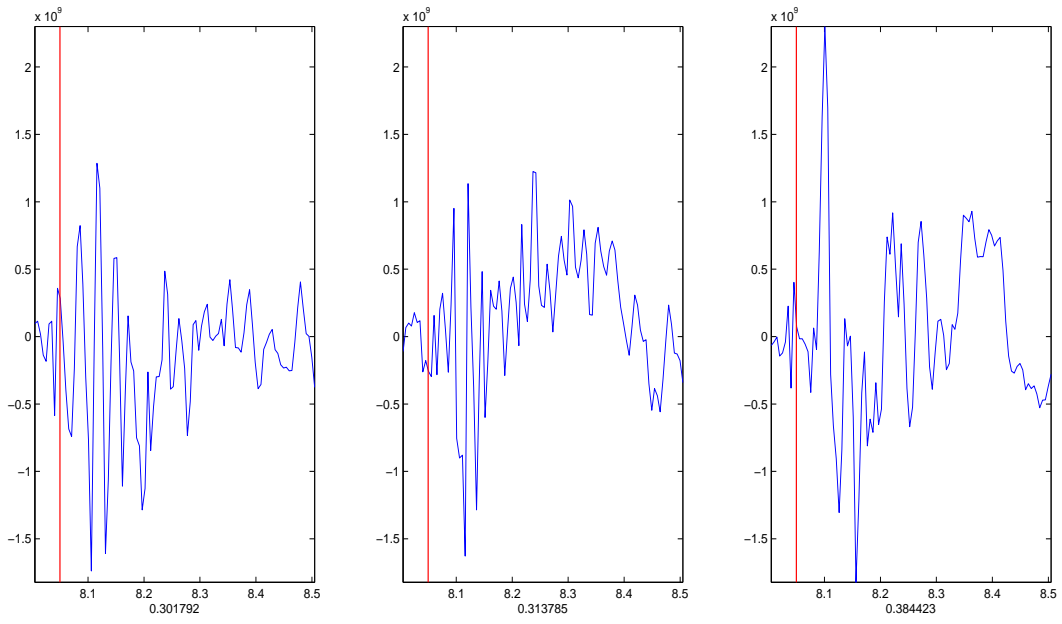


Figura 4.11: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_aug.10.07.42.08.216

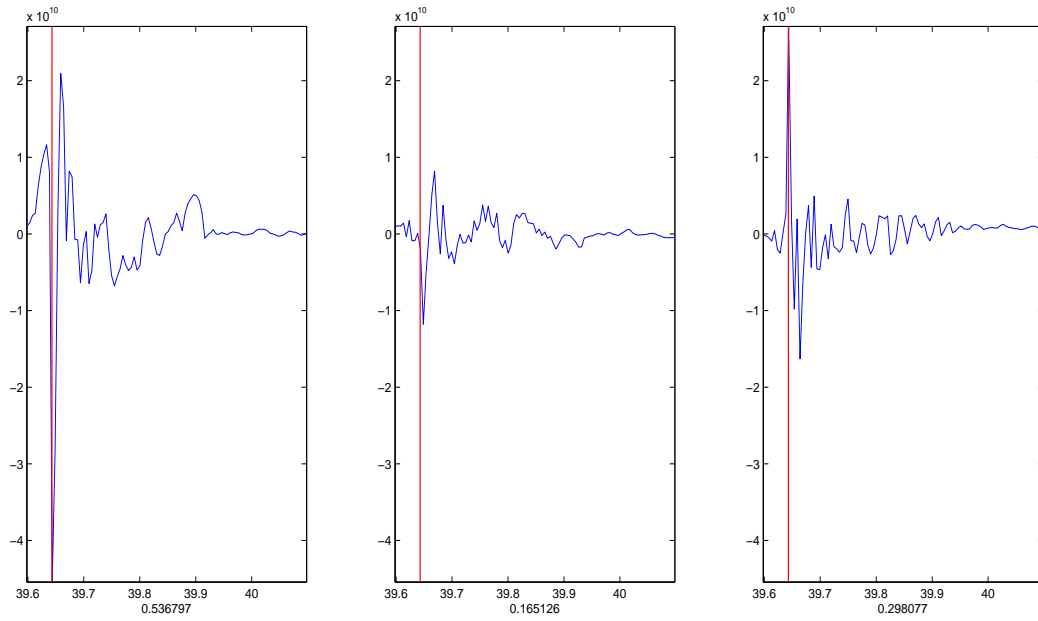


Figura 4.12: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_aug.20.08.37.39.ery

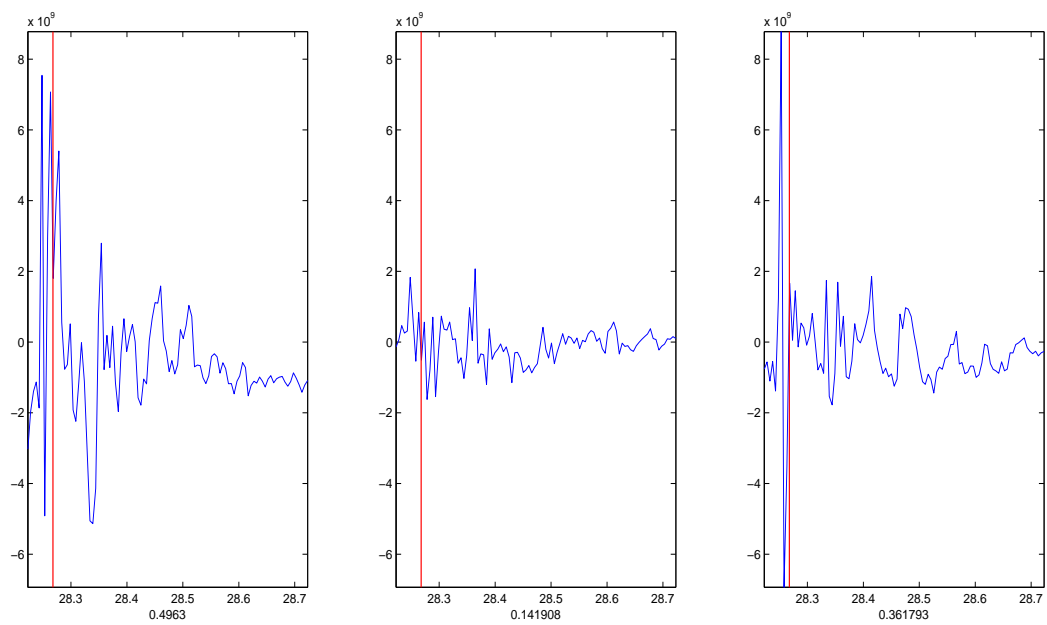


Figura 4.13: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_jul_04_13_49_28.6bt

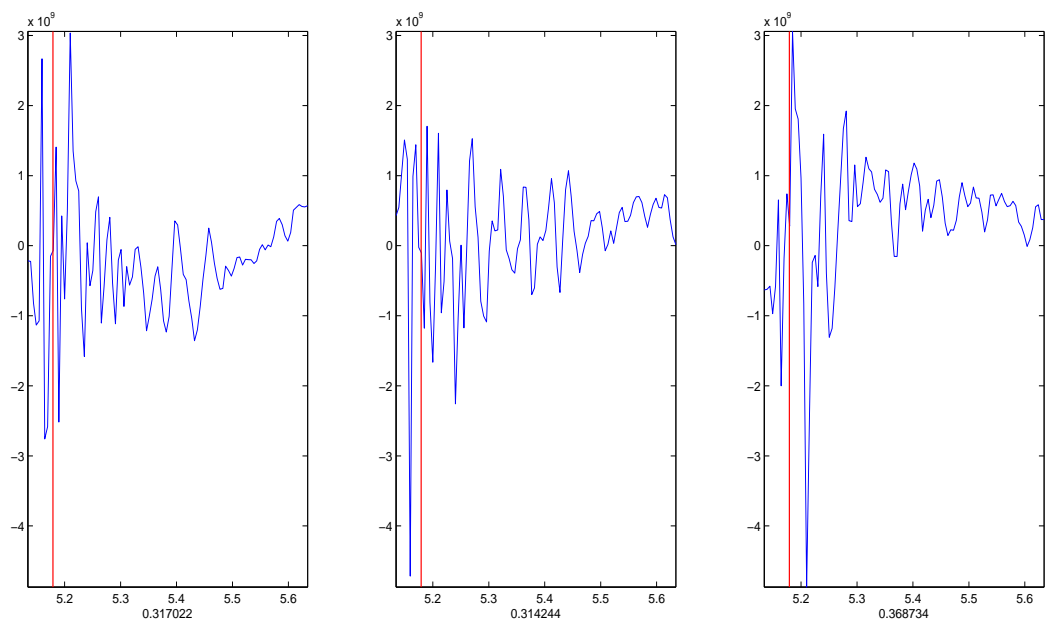


Figura 4.14: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_jul_05_02_34_05.5hj

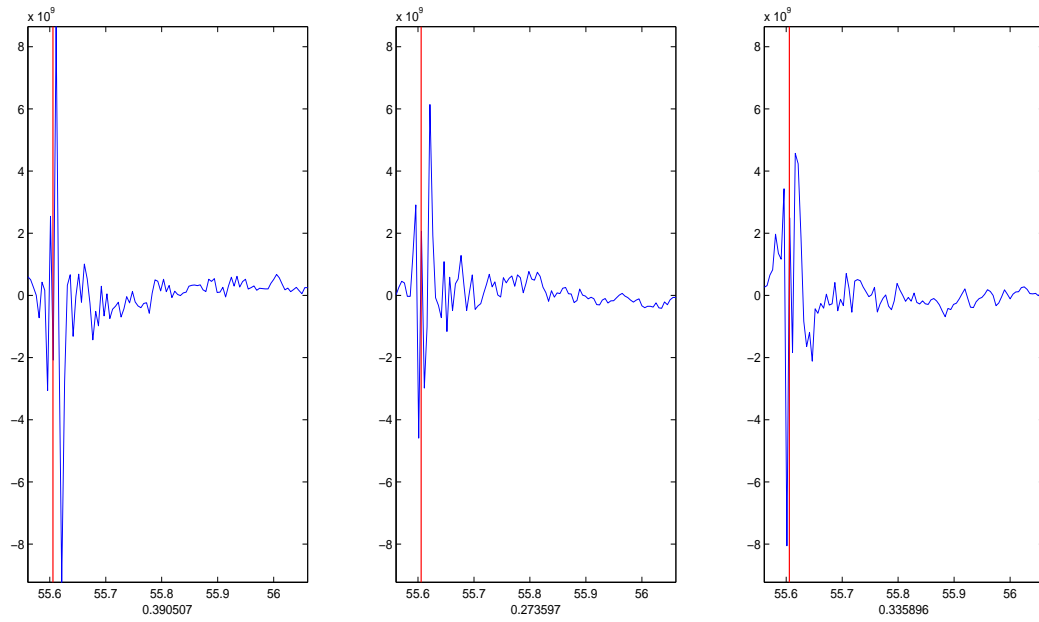


Figura 4.15: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_jul_06_12_14_55.e8j

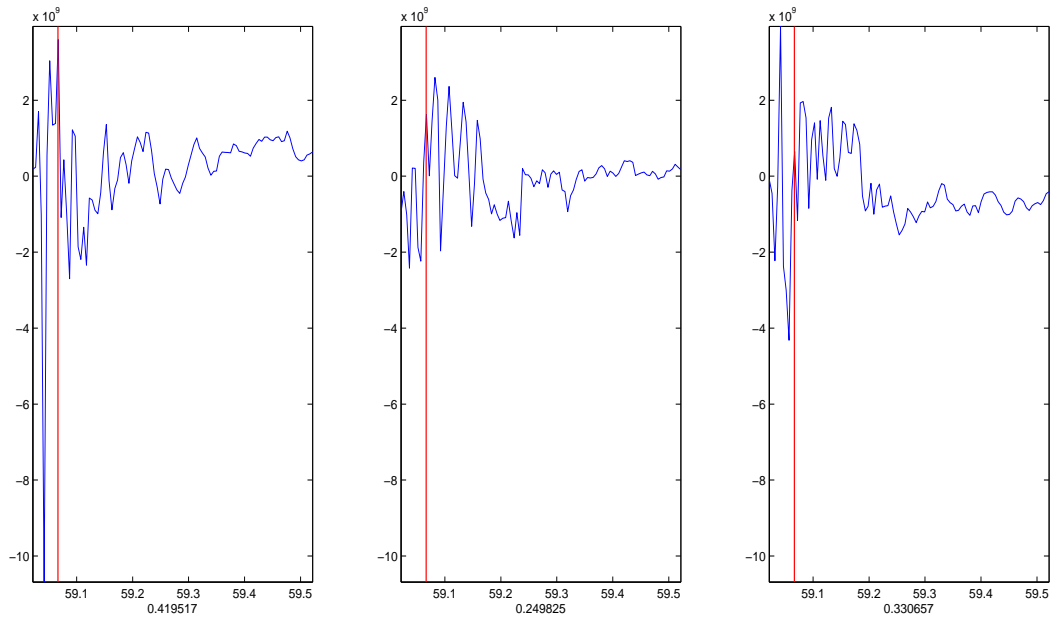


Figura 4.16: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_jun_26_10_12_59.2ia

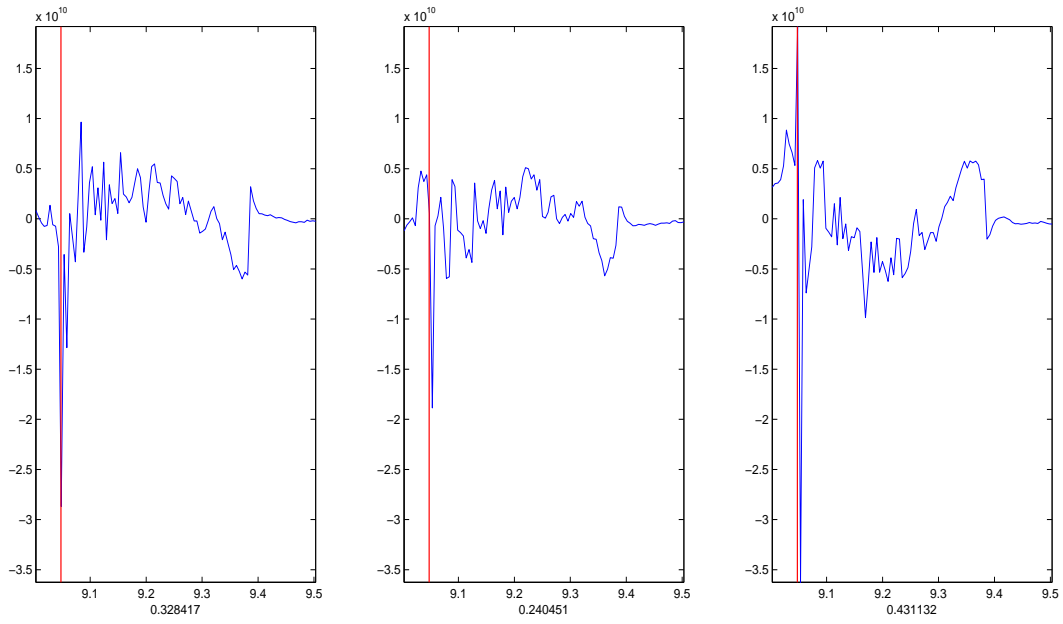


Figura 4.17: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_jun_27_06_14_09.2jt

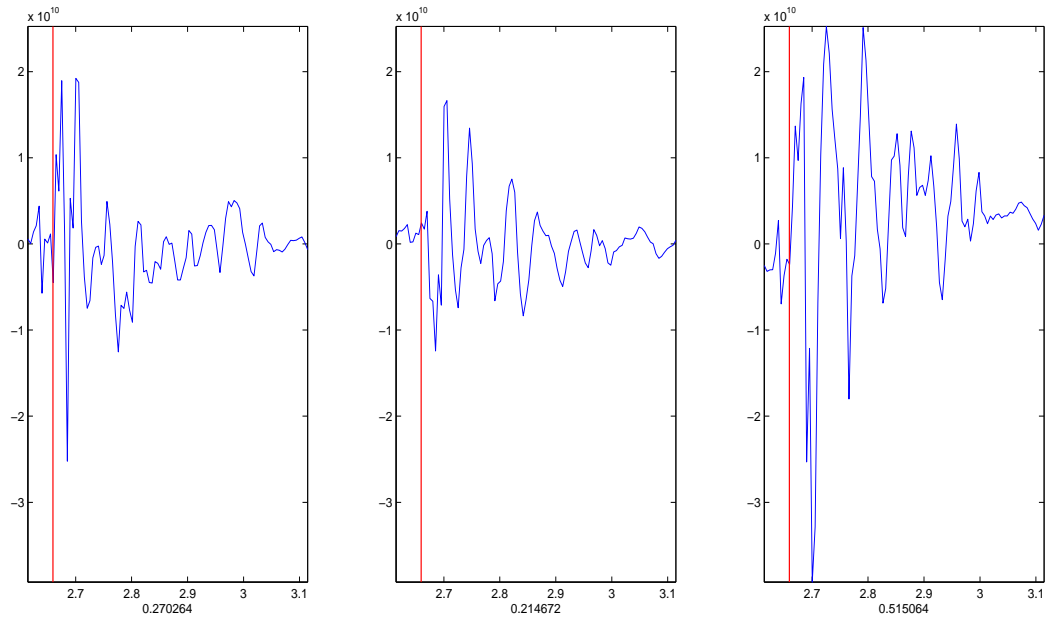


Figura 4.18: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_jun_28_12_21_02.exs

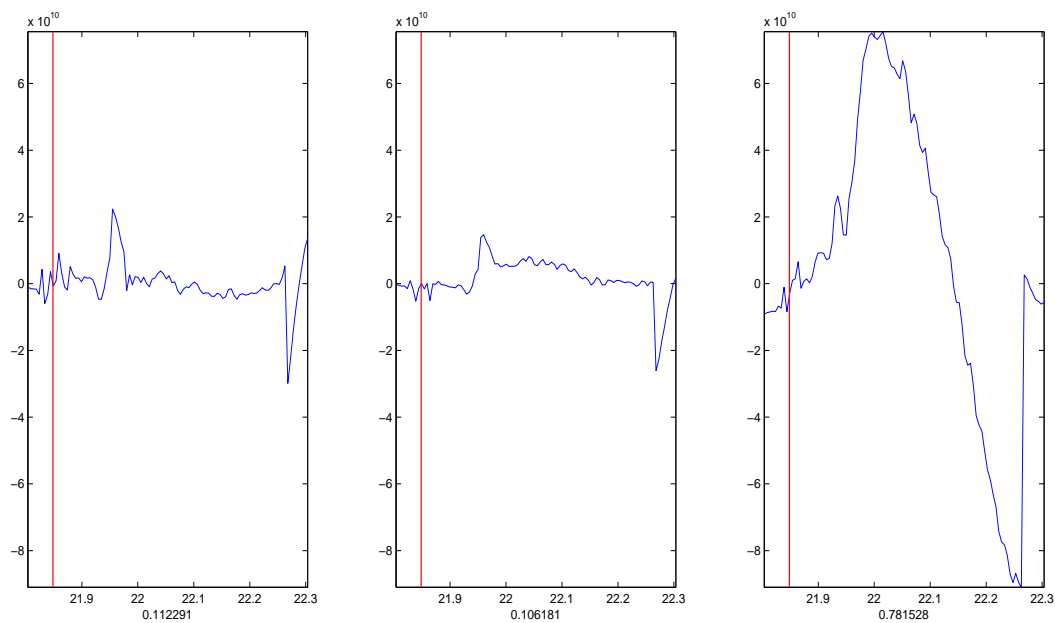


Figura 4.19: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_jun_29_22_24.21.jp6

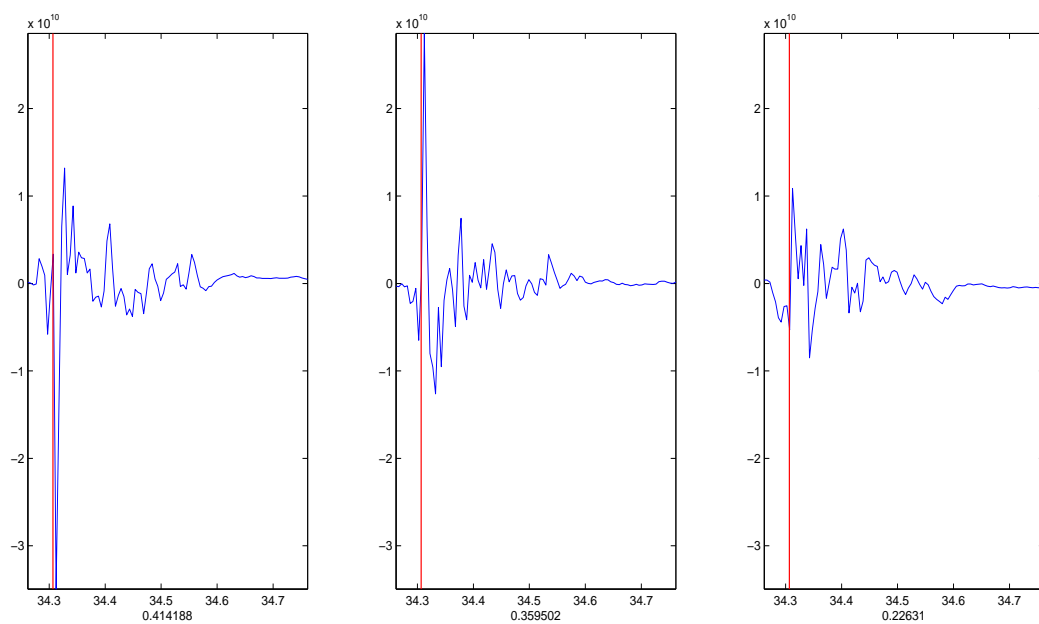


Figura 4.20: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_nov_01_22_40_34.7rv

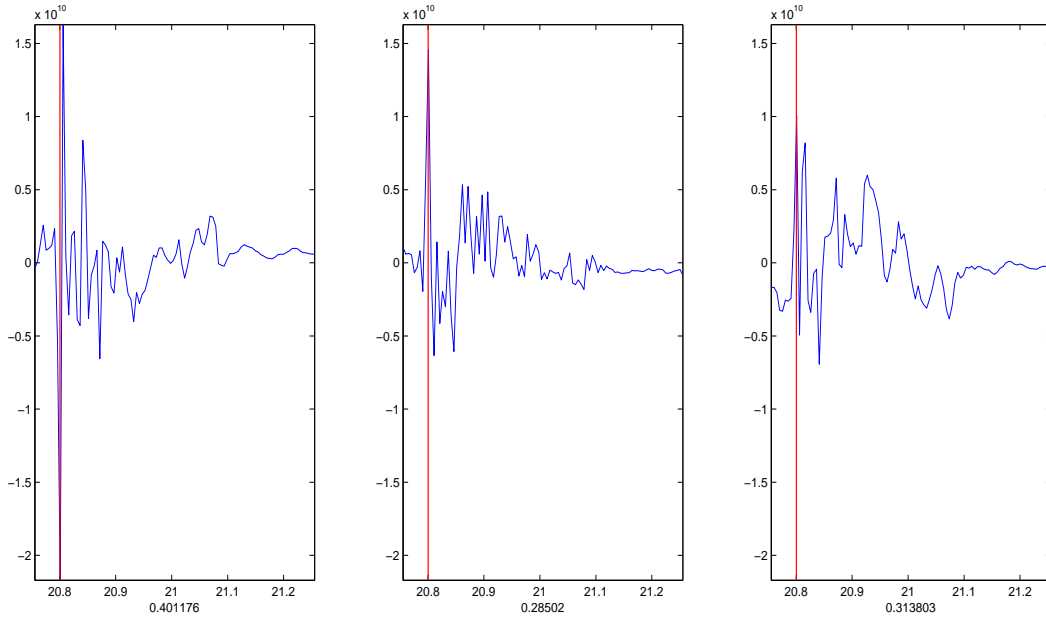


Figura 4.21: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_nov_02_14_15_20.j34

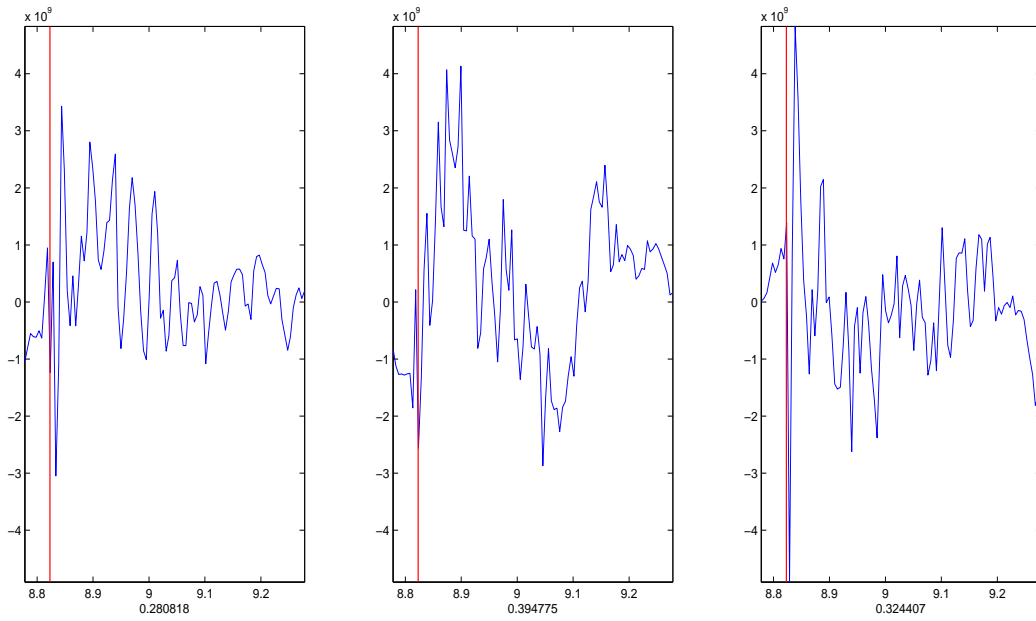


Figura 4.22: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_nov_07_21_23_08.ji5

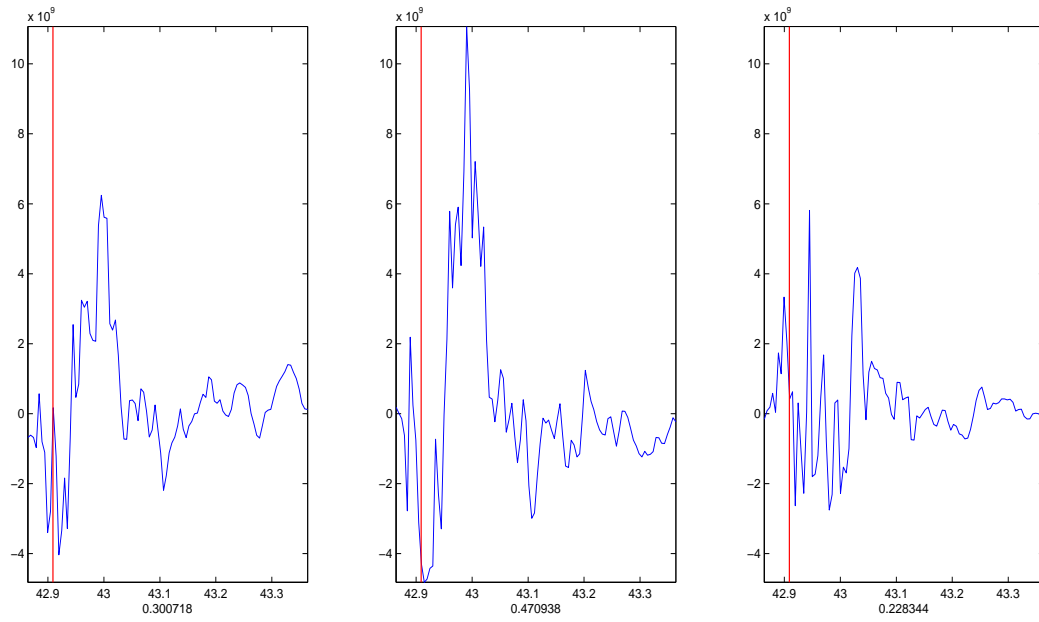


Figura 4.23: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_nov_13_06_30_43.00d

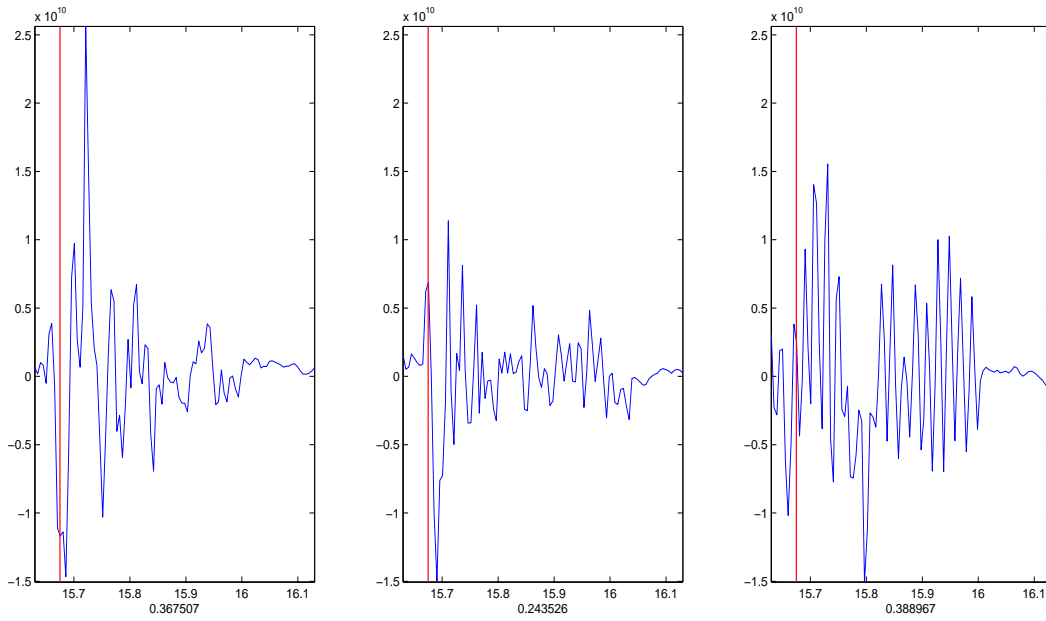


Figura 4.24: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_oct_10_16_00_15.fzn

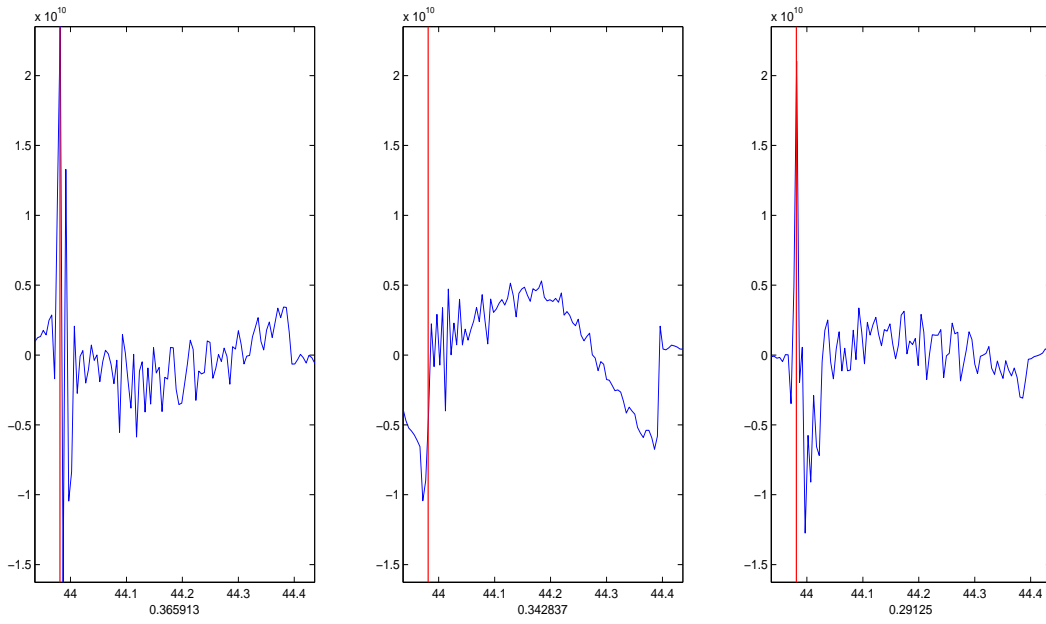


Figura 4.25: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_oct_15_22_38_44.11n

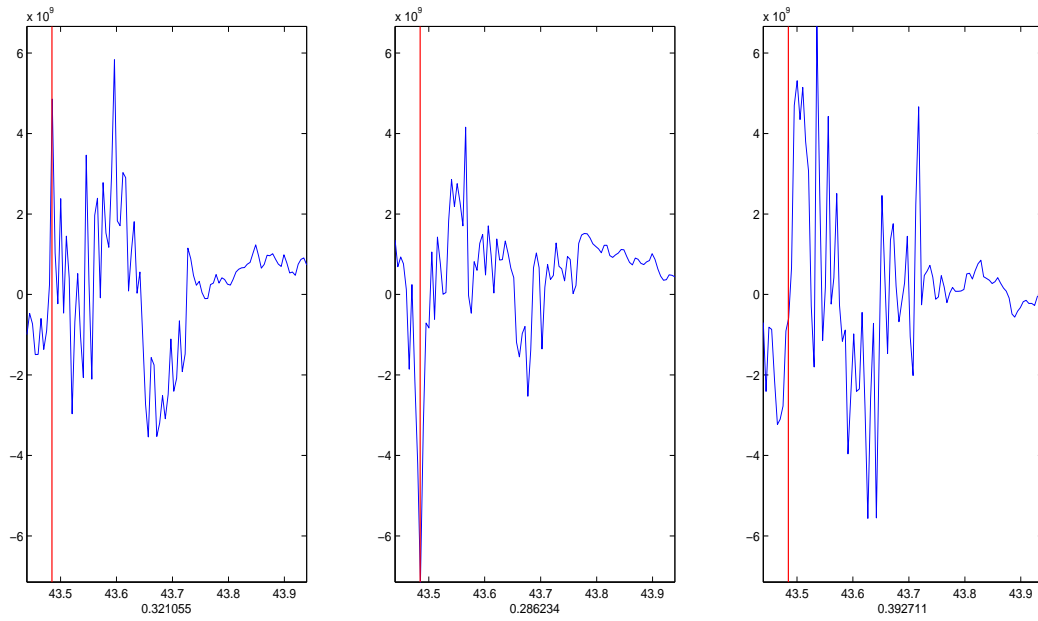


Figura 4.26: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_oct_20_16_06_43.byq

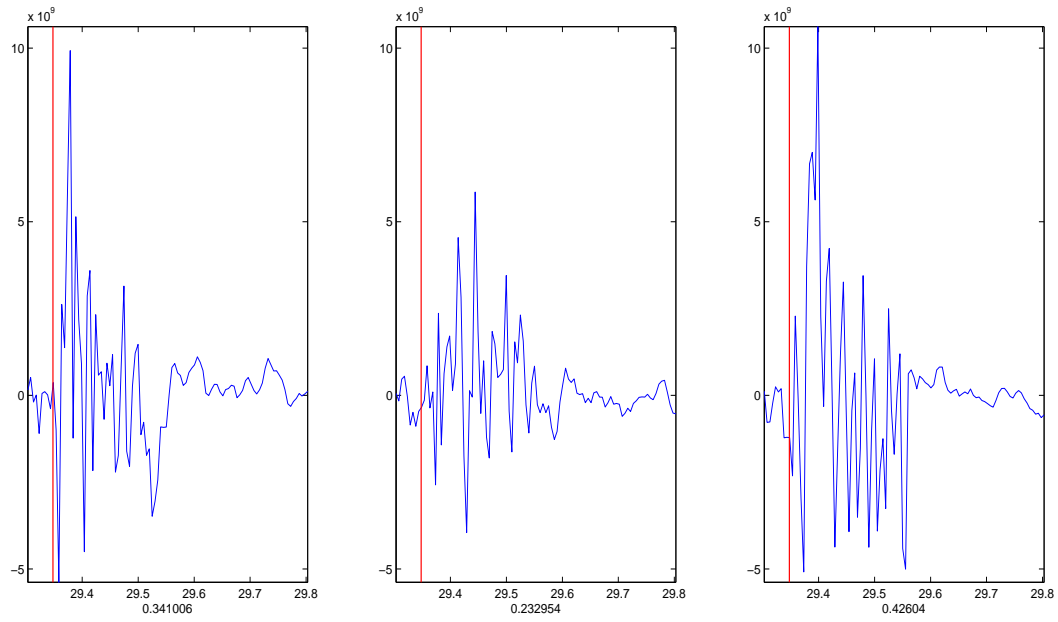


Figura 4.27: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_oct.21.17.20.29.8mp

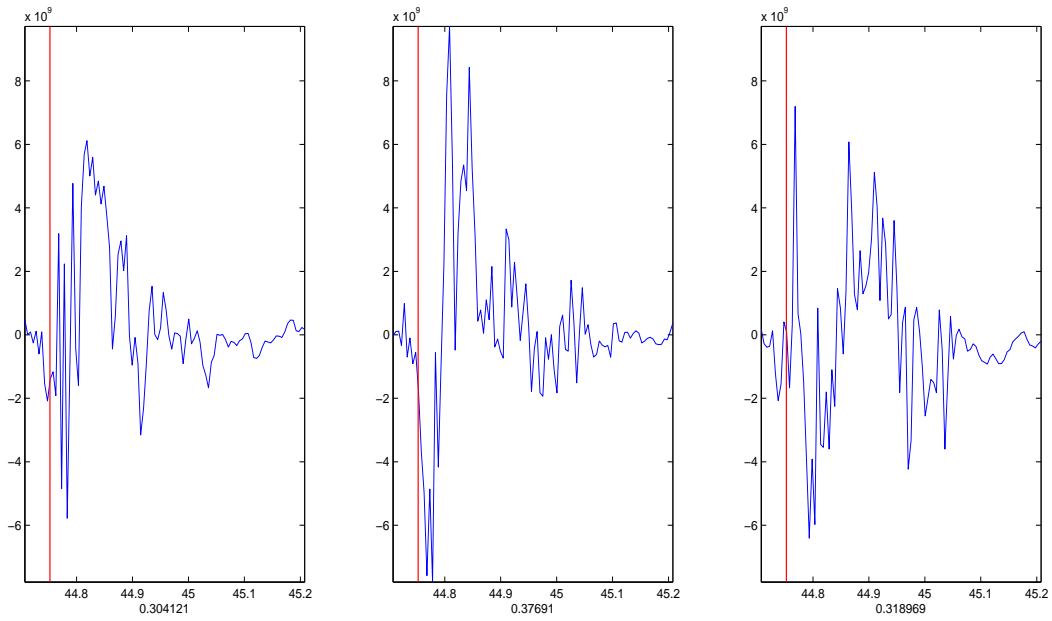


Figura 4.28: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_oct.21.18.22.44.h9e

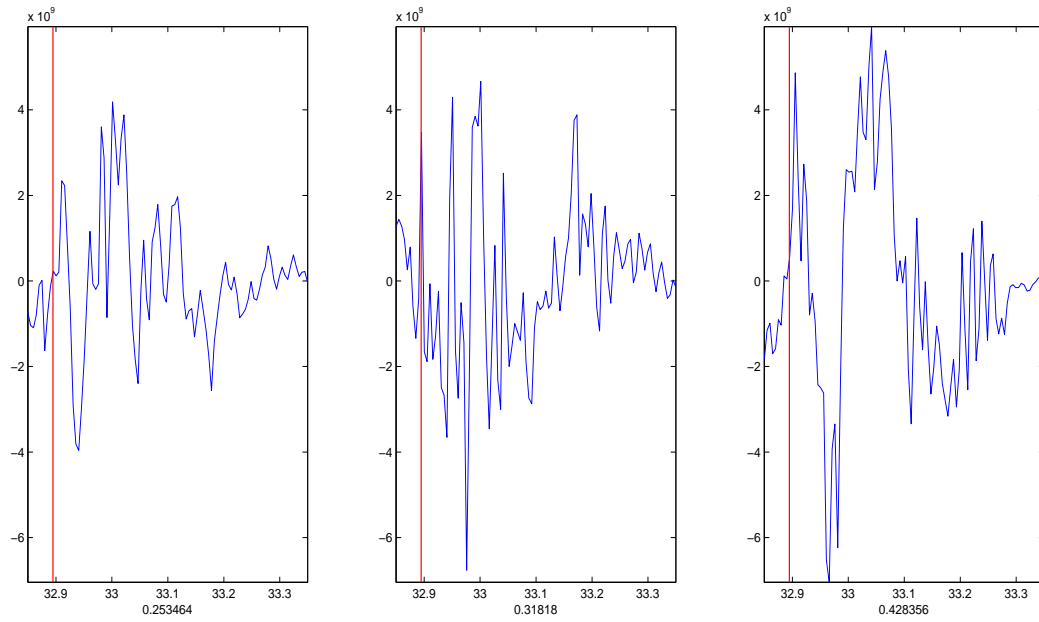


Figura 4.29: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_oct_21_20_10_32.kxv

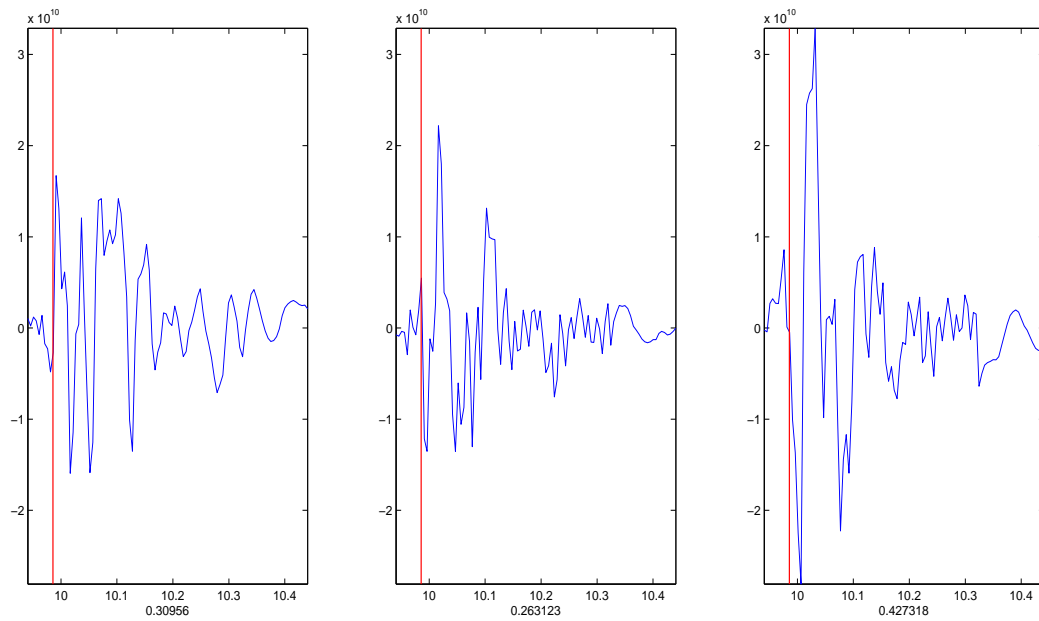


Figura 4.30: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_oct_27_19_38_10.1o0

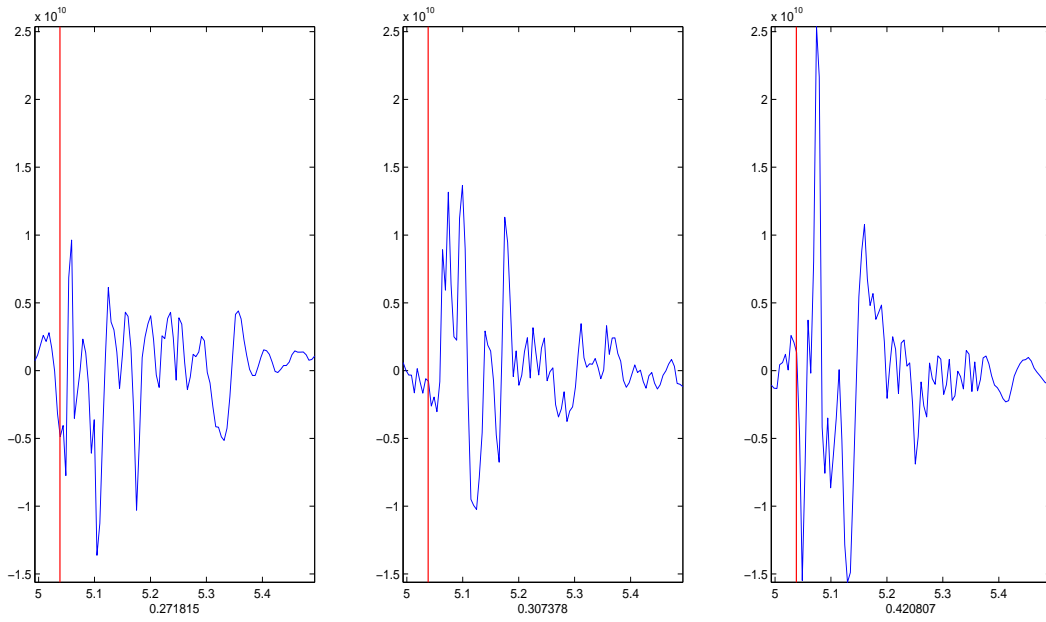


Figura 4.31: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 1998_oct_29_18_22_05.2ph

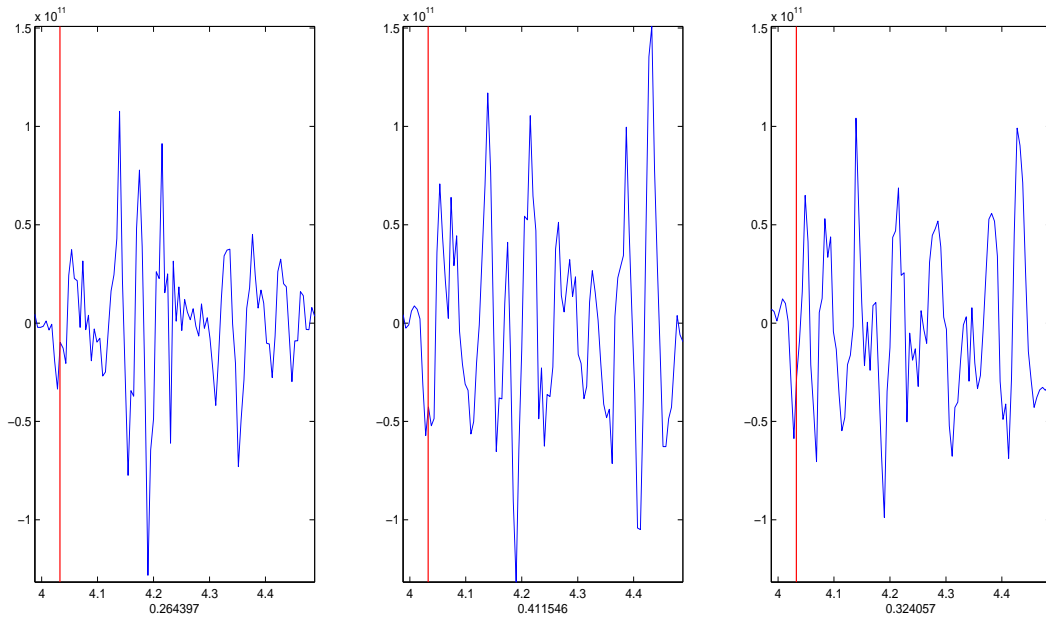


Figura 4.32: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 2011_apr_10_02_27

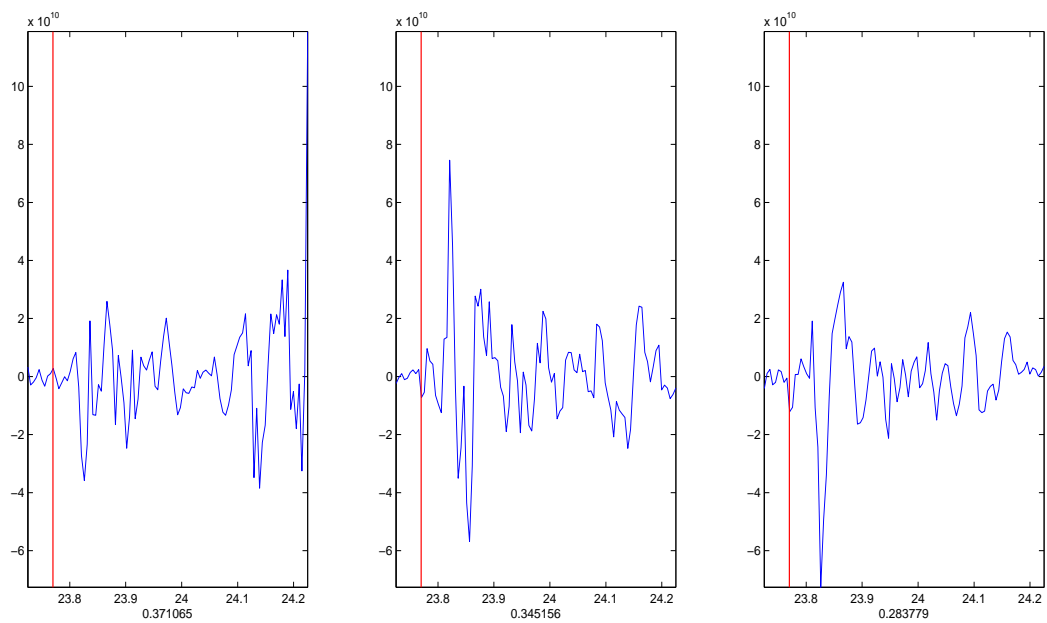


Figura 4.33: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 2011_apr_10.04.56

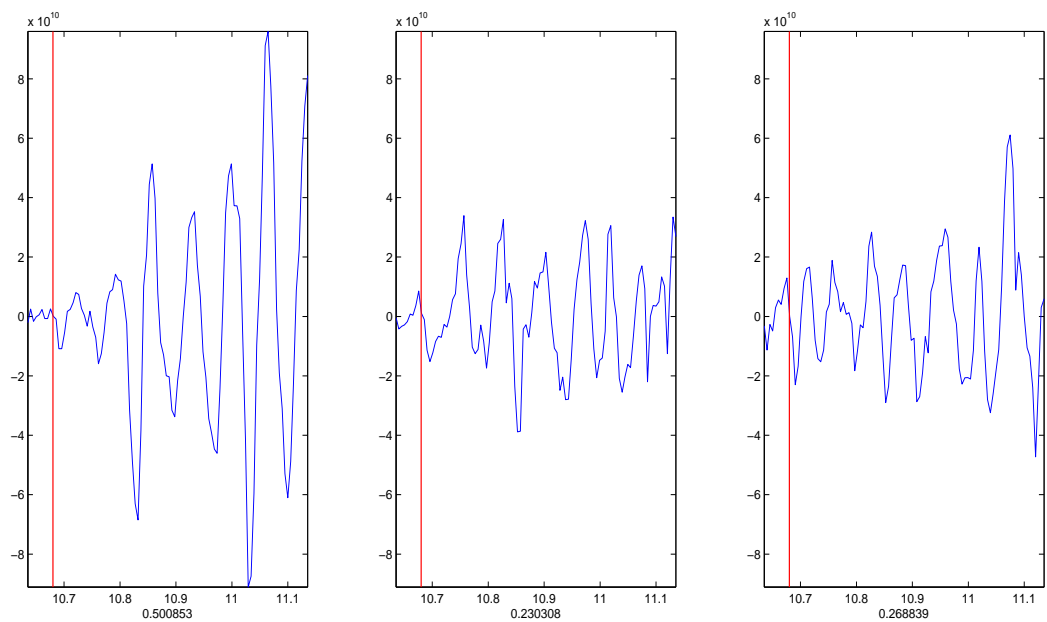


Figura 4.34: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 2011_apr_10.06.00

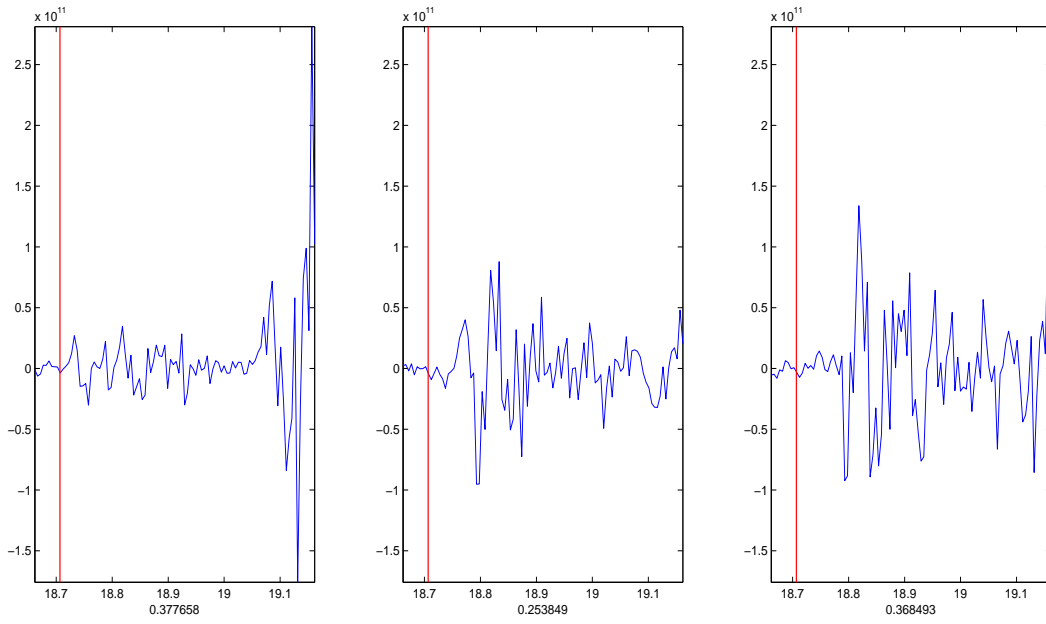


Figura 4.35: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 2011_apr_10.06_16

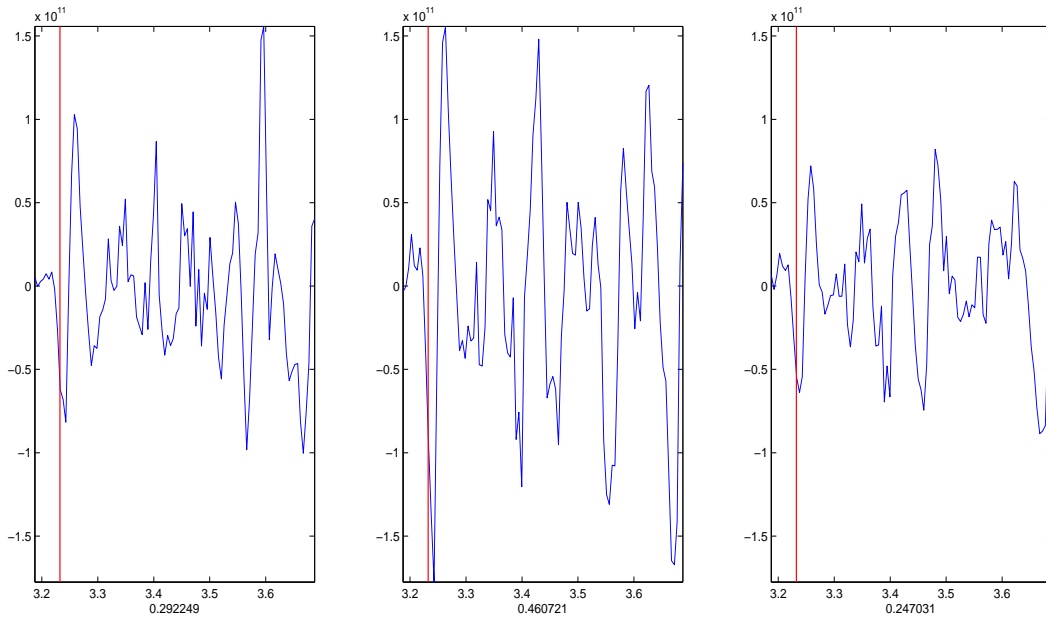


Figura 4.36: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento 2011_apr_10.07_52

4.3. Test de Reconstrucción de Fuentes

Para validar que la reconstrucción de las fuentes sísmicas de cada uno de los eventos es correcta, se diseñó un test en el cual mediante una fuente artificial se generan sensores artificiales en las mismas posiciones de las de un evento real. Luego se reconstruye la fuente mediante mínimos cuadrados y se compara con la fuente artificial.

Para el evento 1998_aug_02_07_30_40.d5g se obtuvieron los siguientes resultados que validan el funcionamiento del software.

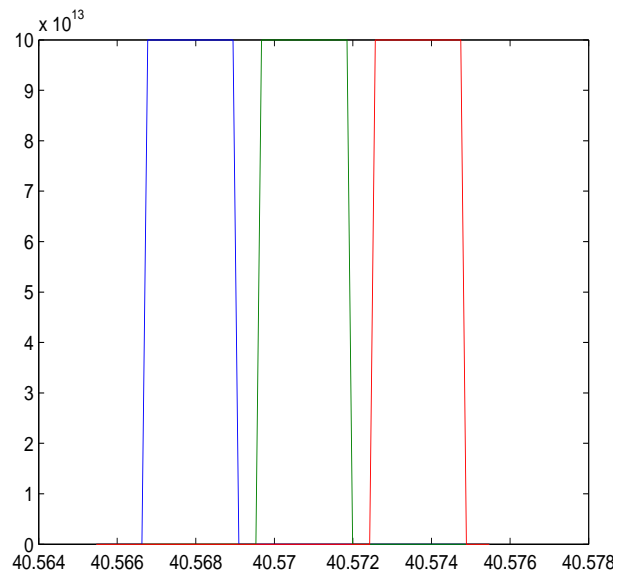


Figura 4.37: Fuente artificial para el evento 1998_aug_02_07_30_40.d5g

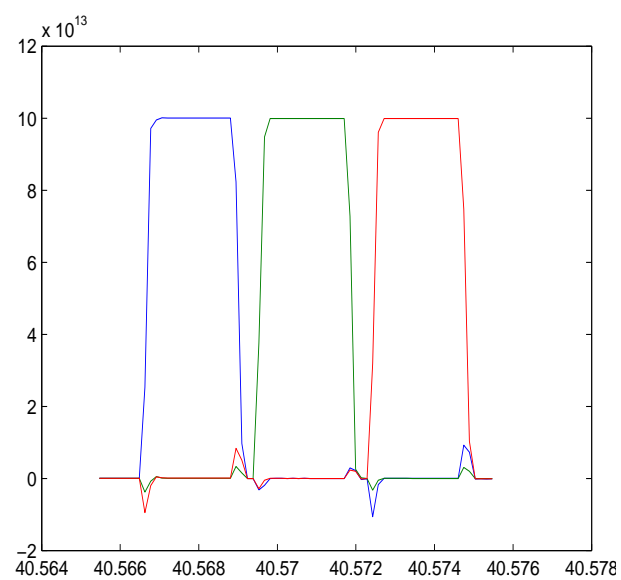


Figura 4.38: Reconstrucción de la fuente artificial para el evento 1998_aug_02_07_30_40.d5g

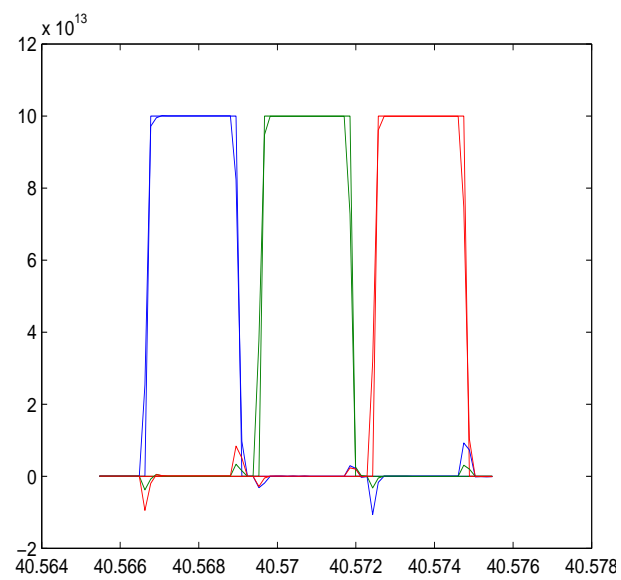


Figura 4.39: Superposición entre la fuente artificial y su reconstrucción 1998_aug_02_07_30_40.d5g

4.3.1. Clasificación de las Fuentes

El segundo paso consiste en la clasificación de las fuentes sísmicas reconstruidas. La clasificación propuesta es separar las fuentes sísmicas de acuerdo a si son fuerzas contenidas en un plano o si son fuerzas con componentes comparables en todas las direcciones.

En resumen, separaremos las fuentes de acuerdo a la componente más pequeña, después de un proceso de filtrado y rotación (cambio de base).

4.3.2. Output

Para cada una de las fuentes reconstruidas, el filtrado y rotación de éstas, en componentes principales, entrega los siguientes resultados.

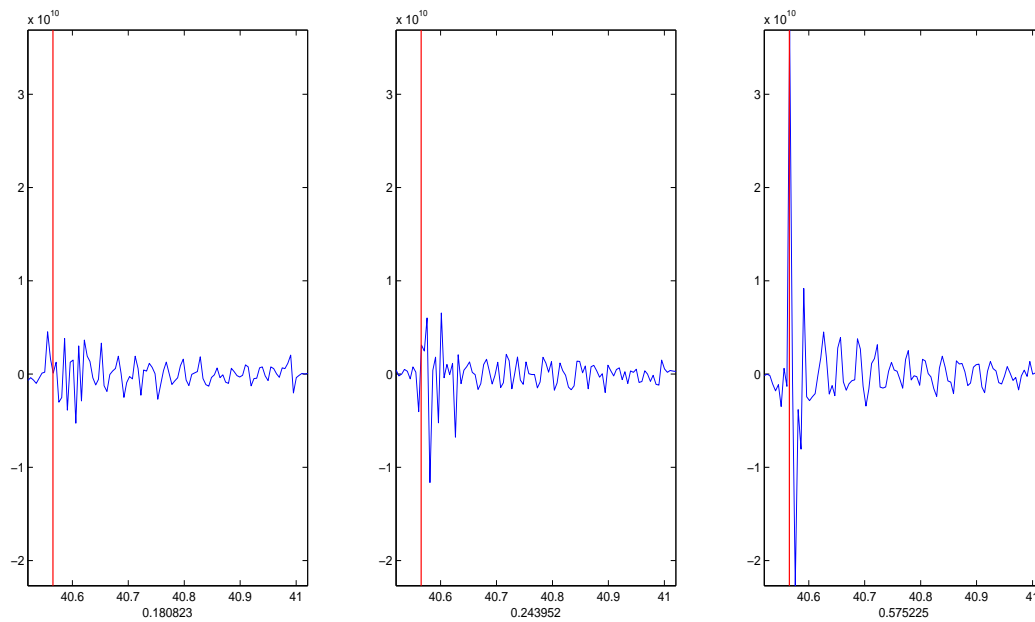


Figura 4.40: Filtro y rotación de la fuente como una fuerza para el evento 1998_aug_02_07_30.40.d5g

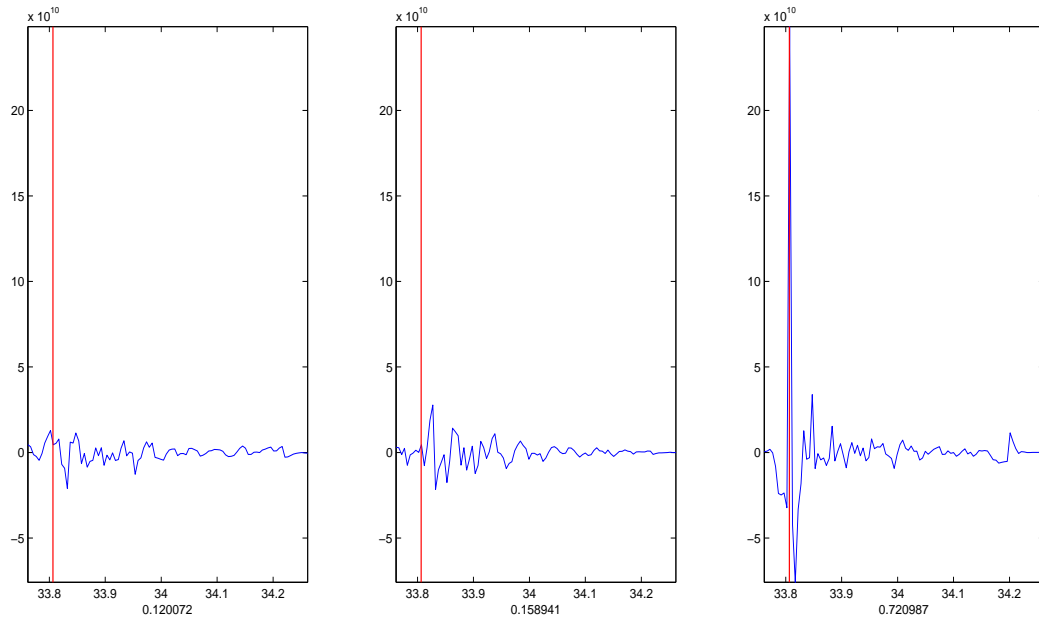


Figura 4.41: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_aug_07_16_24_33.i6b

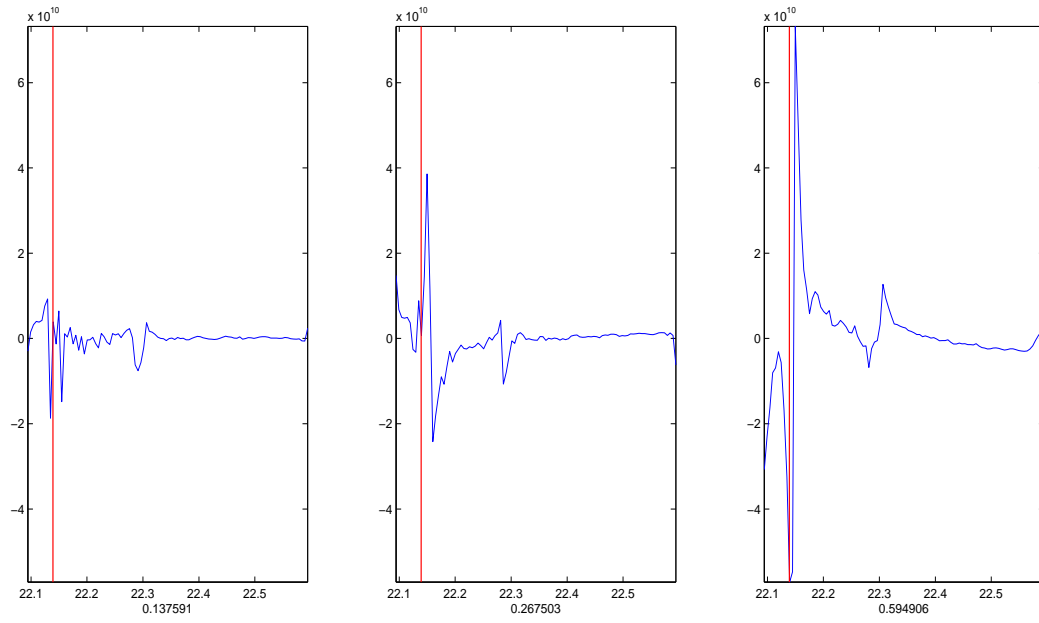


Figura 4.42: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_aug_09_21_49_22.4n3

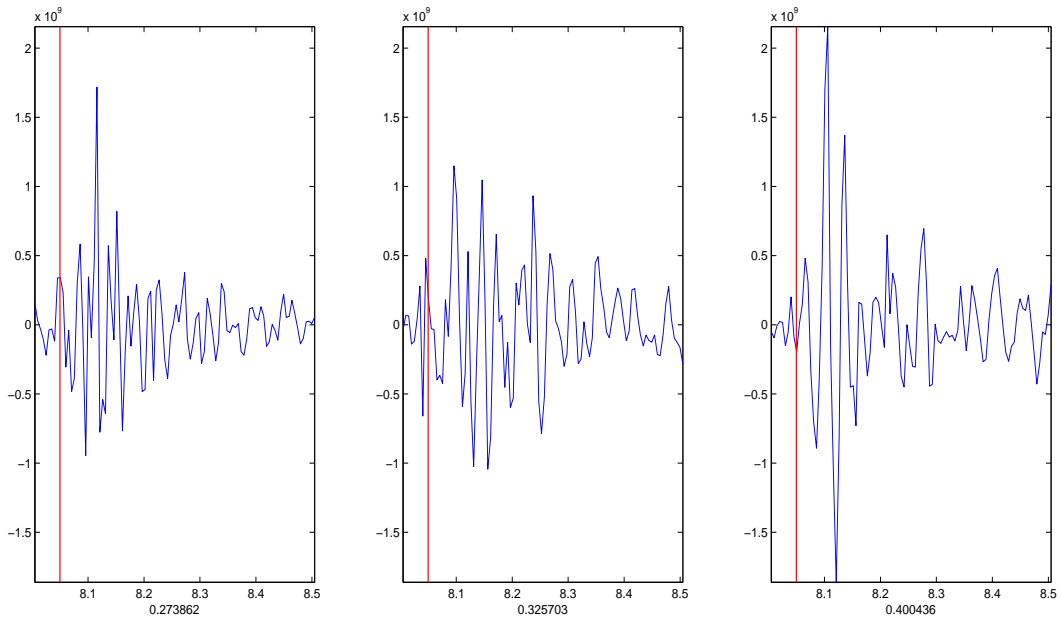


Figura 4.43: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_aug_10.07_42.08.216

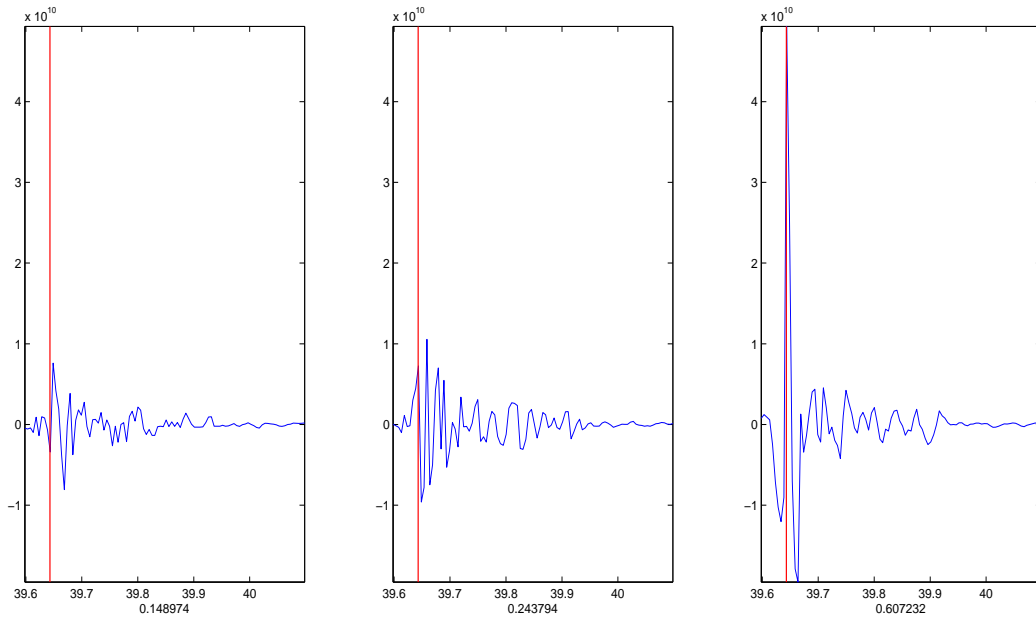


Figura 4.44: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_aug_20.08_37.39.ery

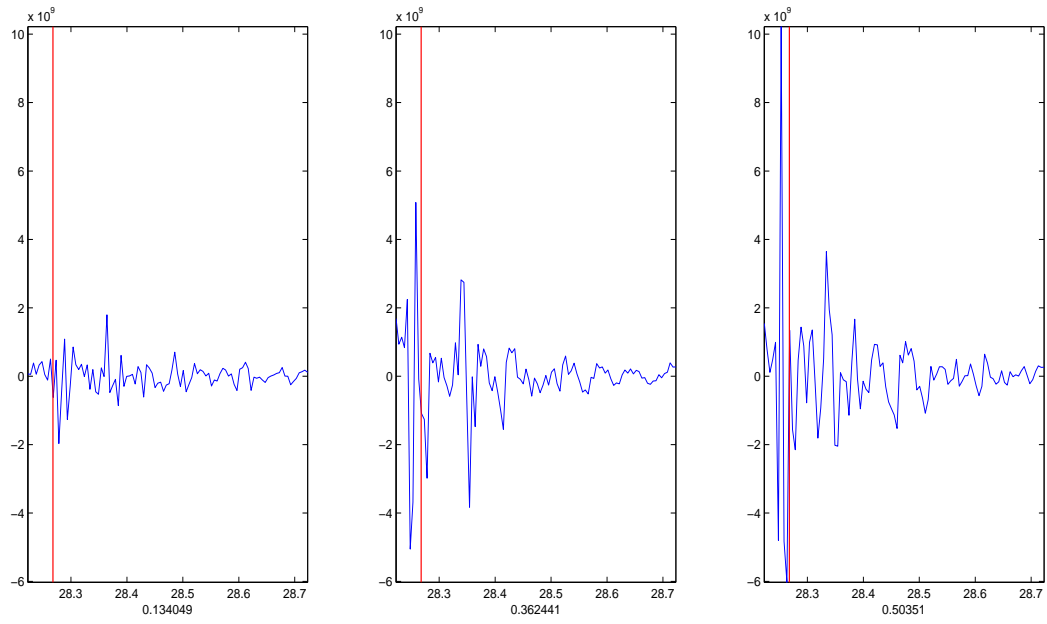


Figura 4.45: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jul_04_13_49_28.6bt

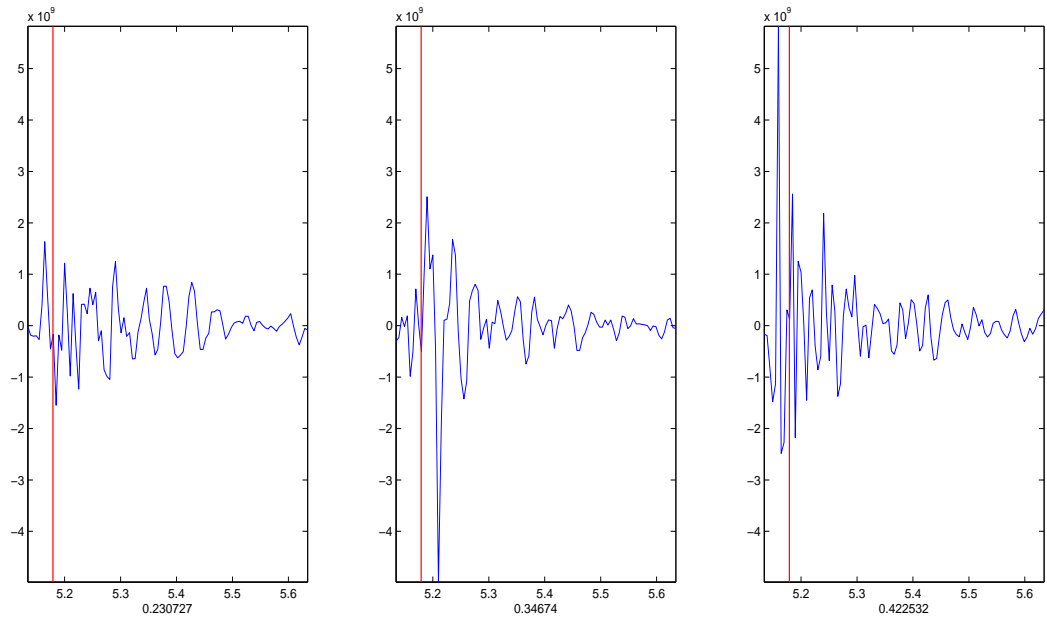


Figura 4.46: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jul_05_02_34_05.5hj

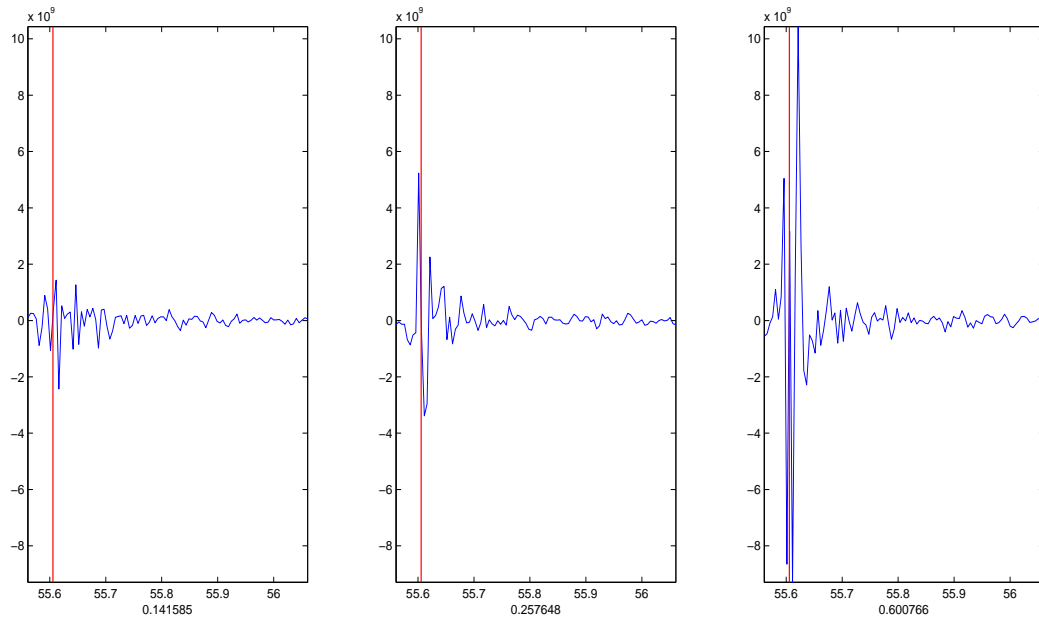


Figura 4.47: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jul_06_12_14.55.e8j

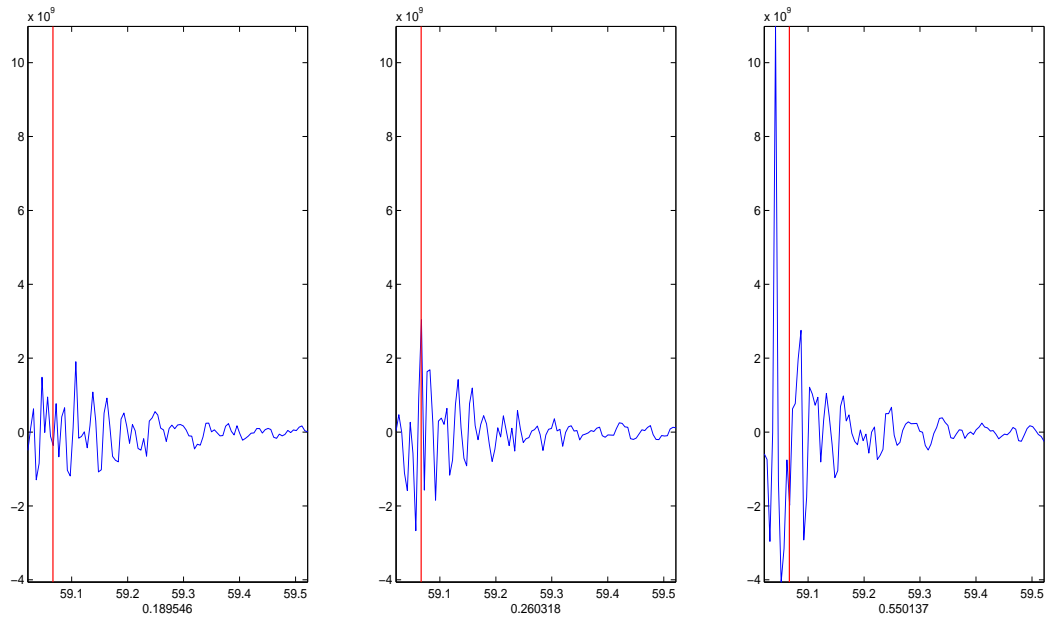


Figura 4.48: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jun_26_10_12.59.2ia

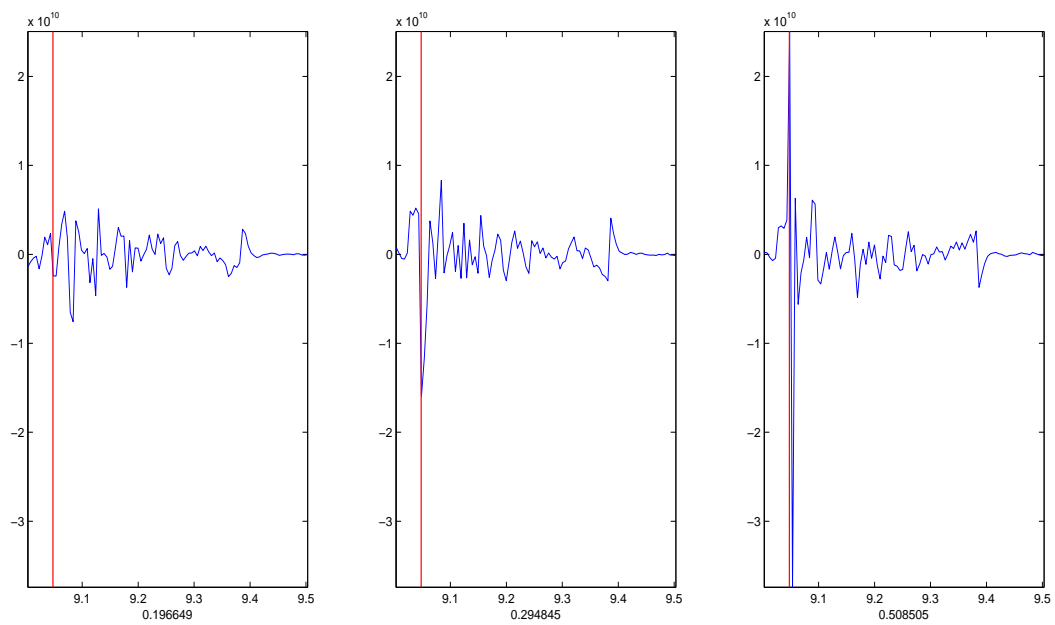


Figura 4.49: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jun_27_06_14_09.2jt

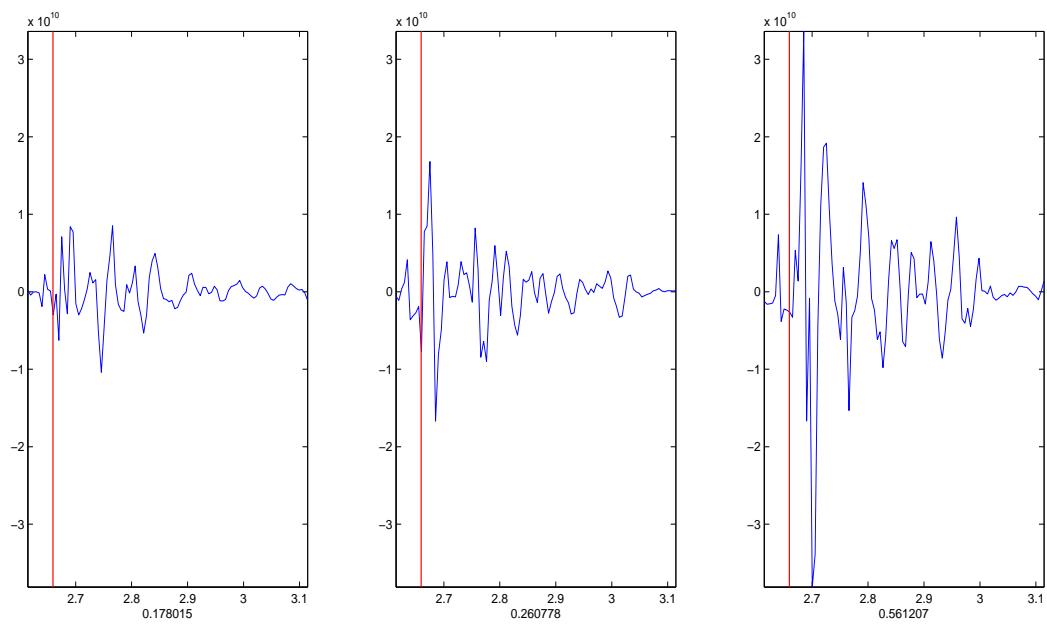


Figura 4.50: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jun_28_12_21_02.exs

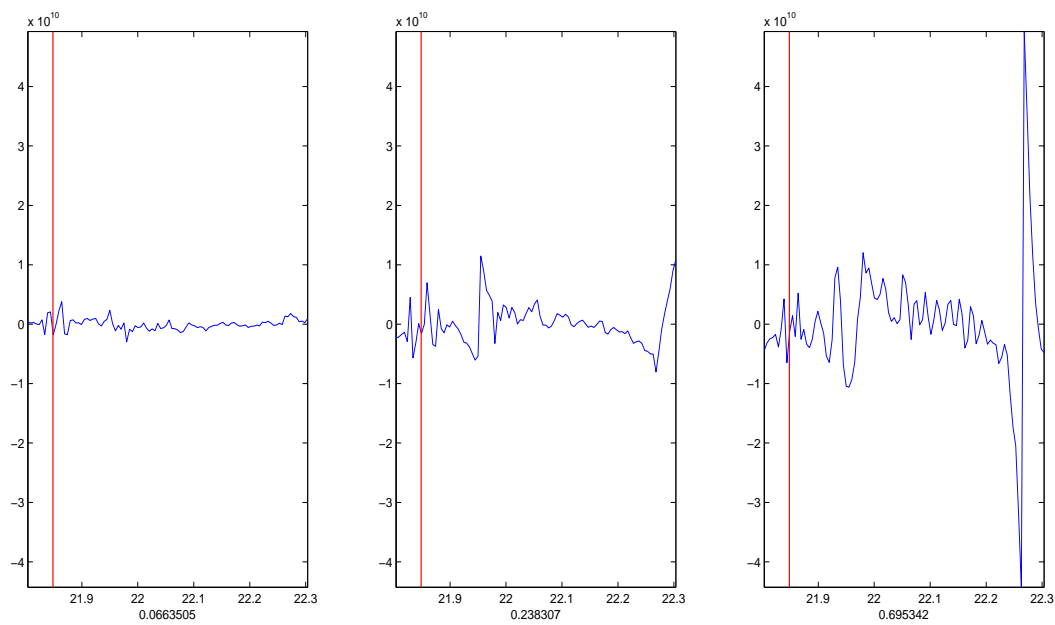


Figura 4.51: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jun_29_22.24.21.jp6

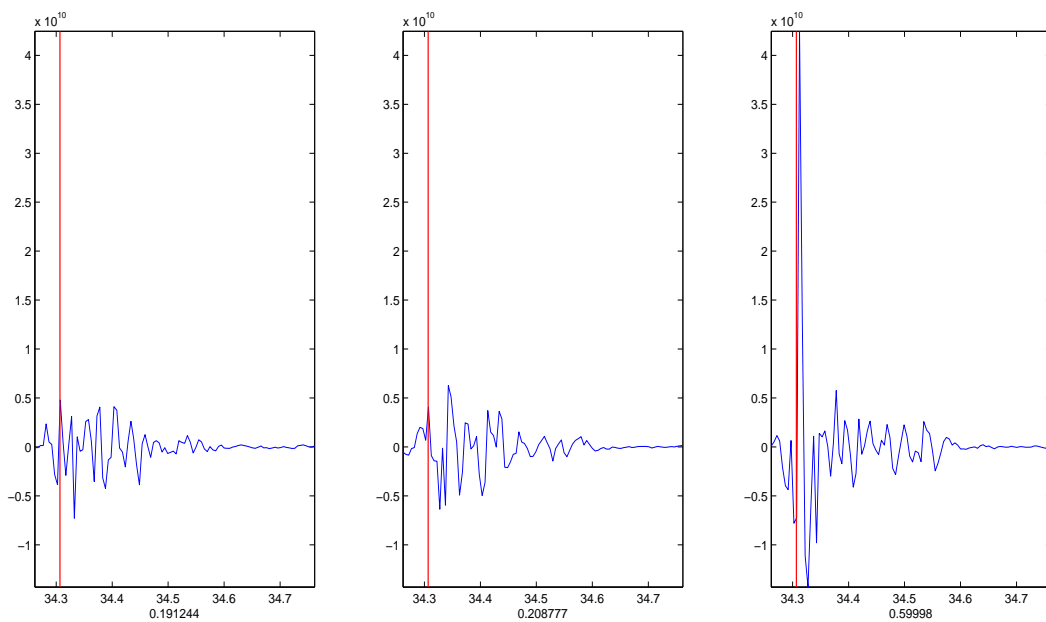


Figura 4.52: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_nov_01_22.40.34.7rv

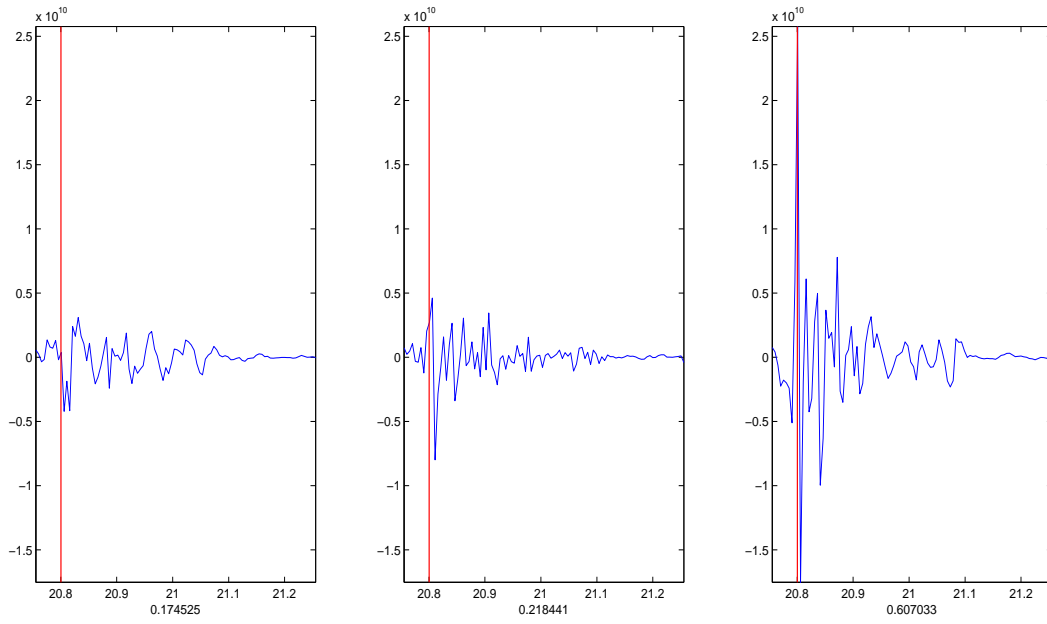


Figura 4.53: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_nov_02_14_15_20.j34

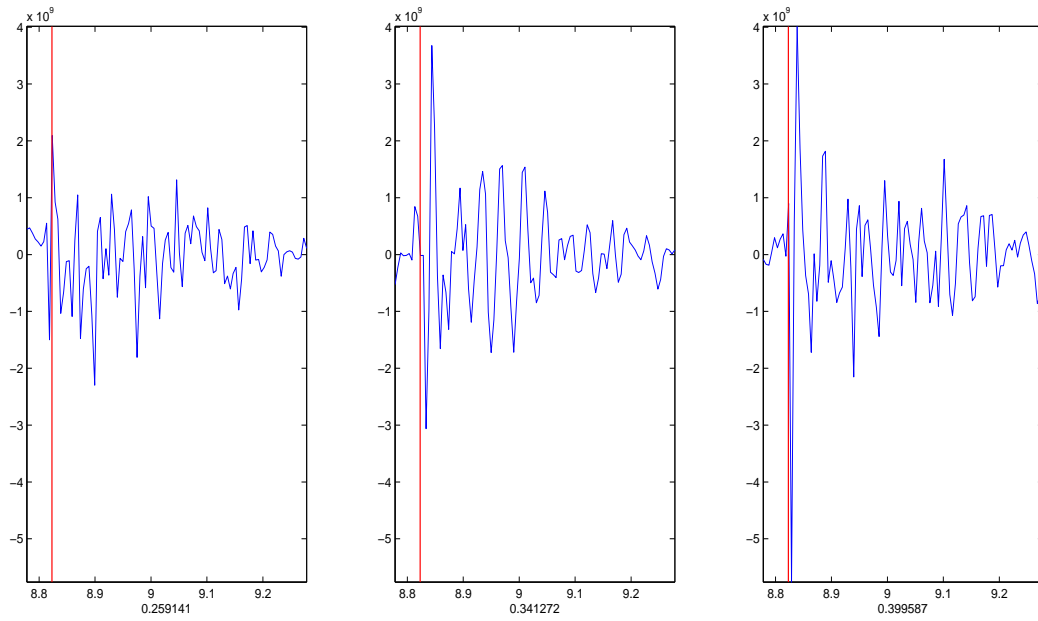


Figura 4.54: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_nov_07_21_23_08.ji5

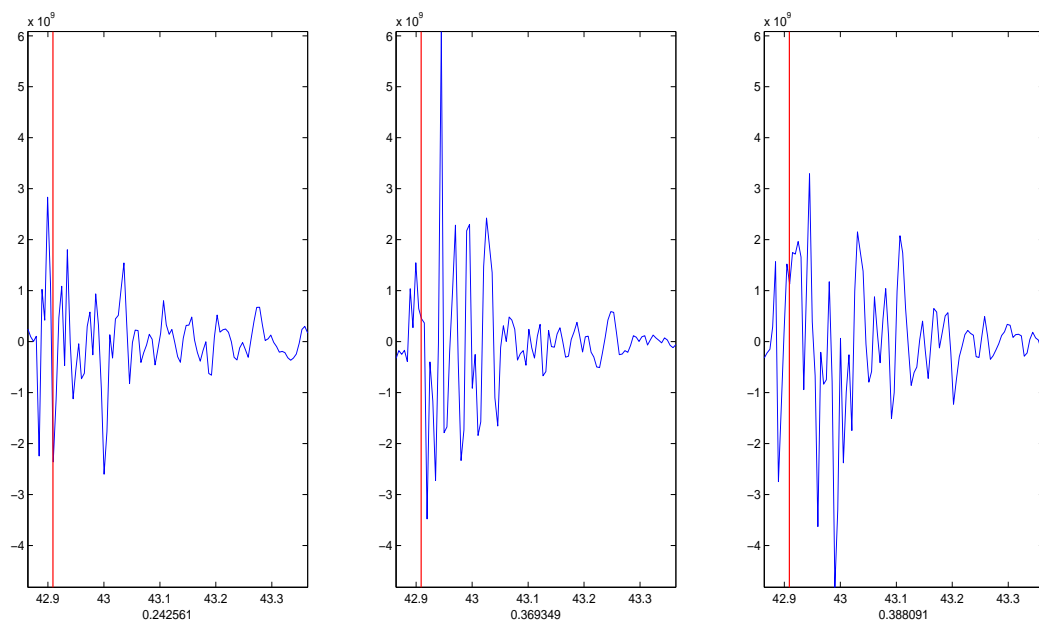


Figura 4.55: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_nov_13_06_30_43.00d

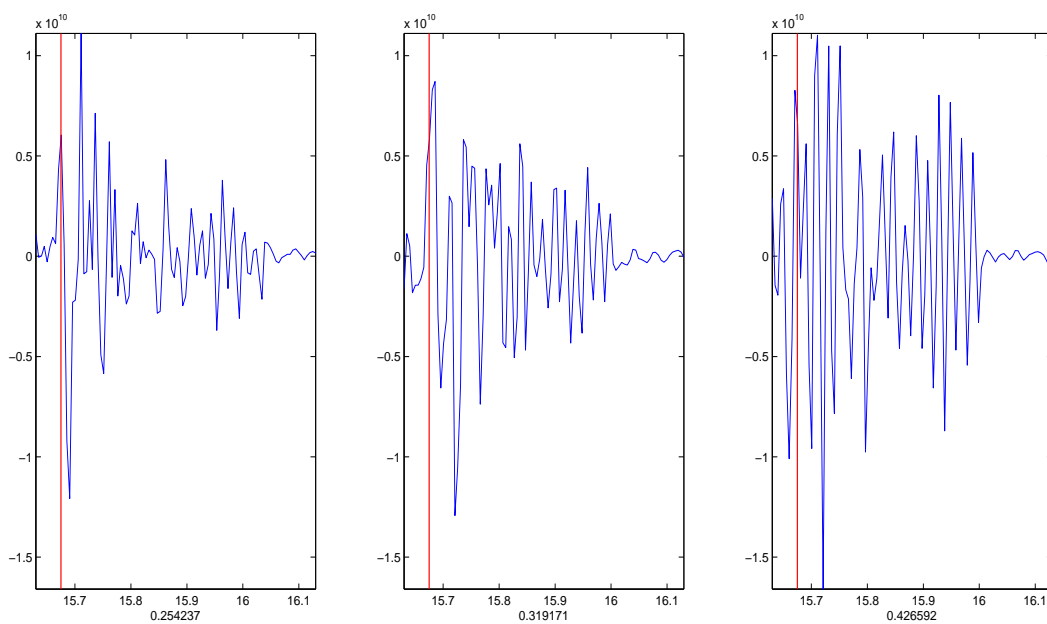


Figura 4.56: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_10_16_00_15.fzn

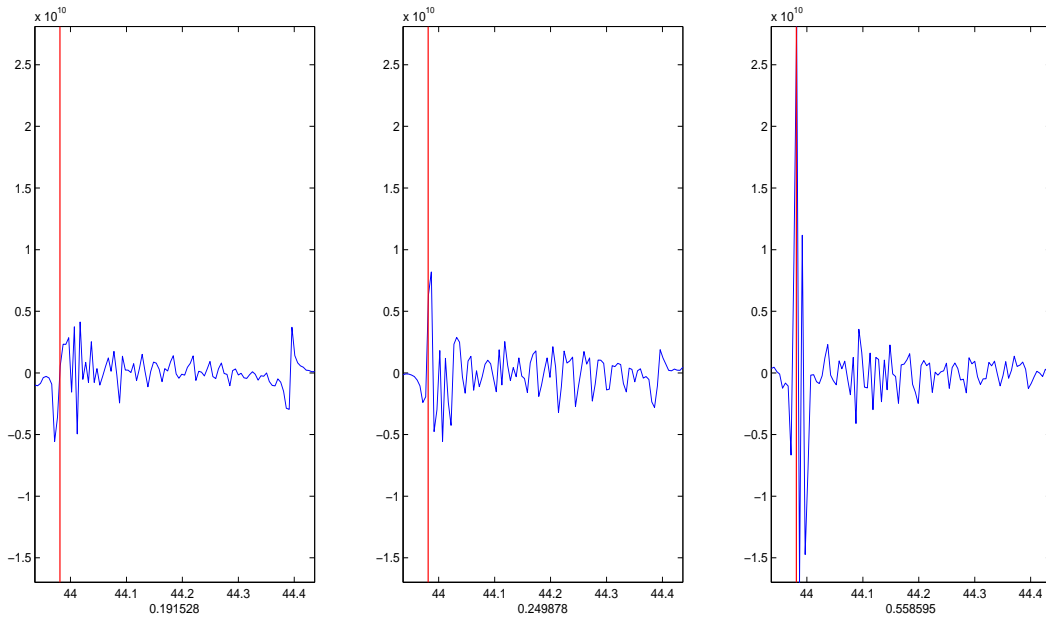


Figura 4.57: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998.oct_15_22_38.44.11n

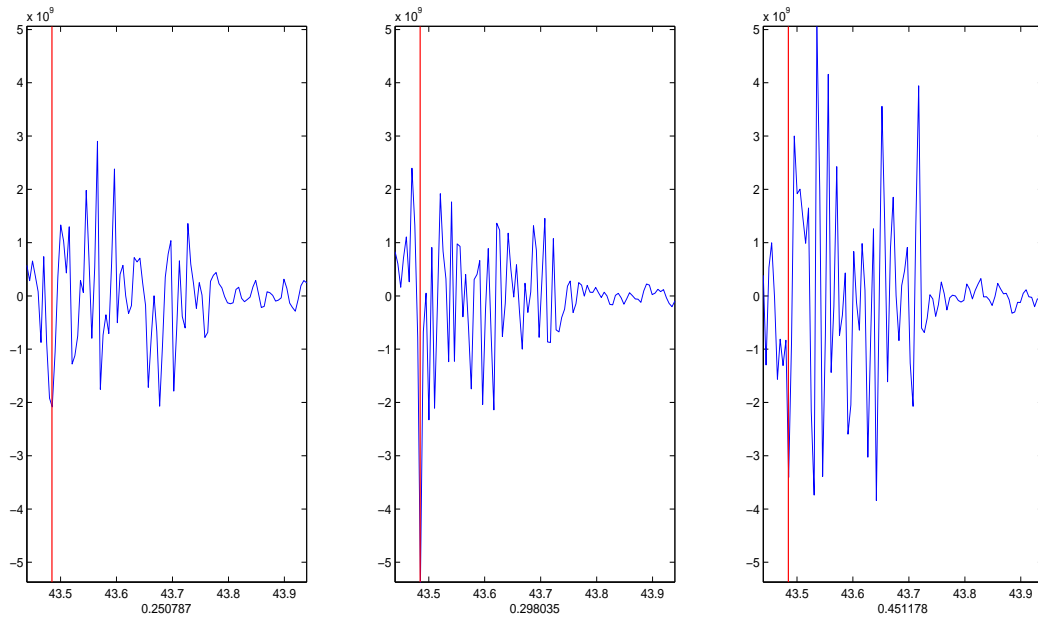


Figura 4.58: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998.oct_20_16_06.43.byq

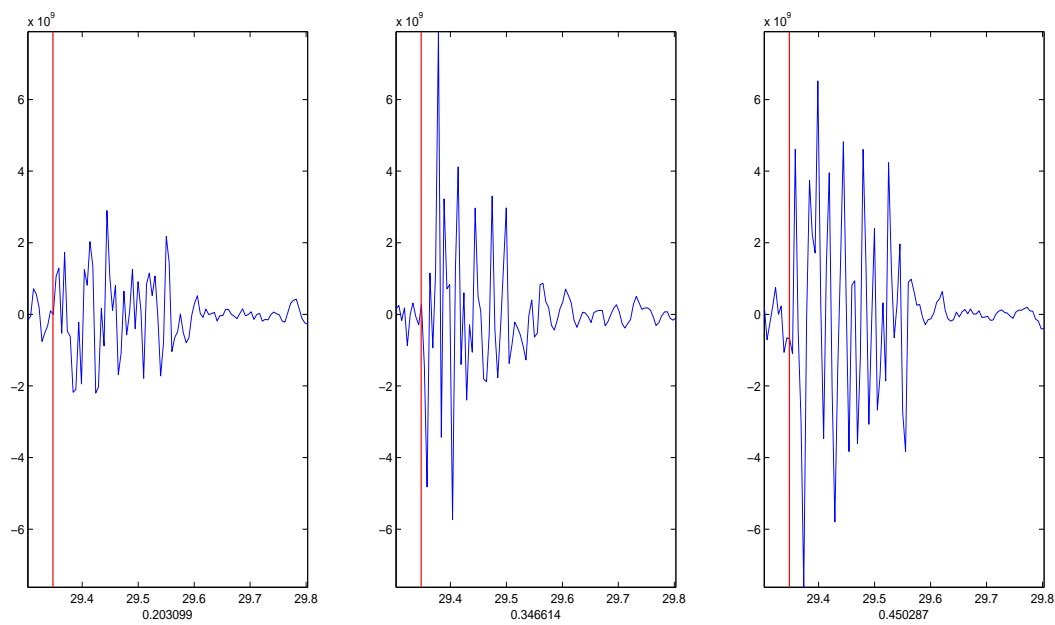


Figura 4.59: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_21_17_20_29.8mp

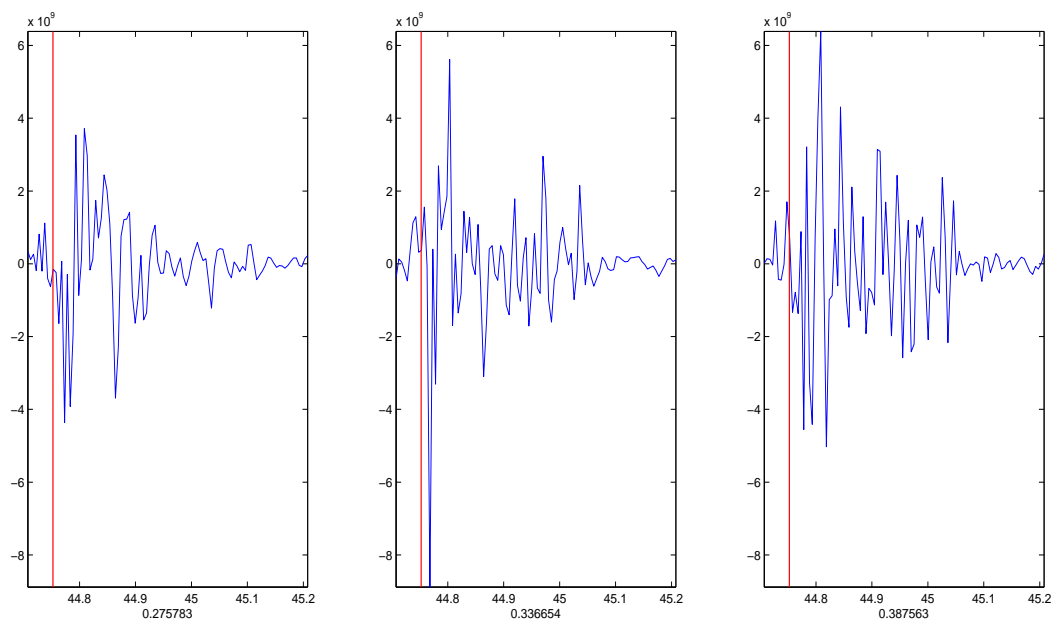


Figura 4.60: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_21_18_22_44.h9e

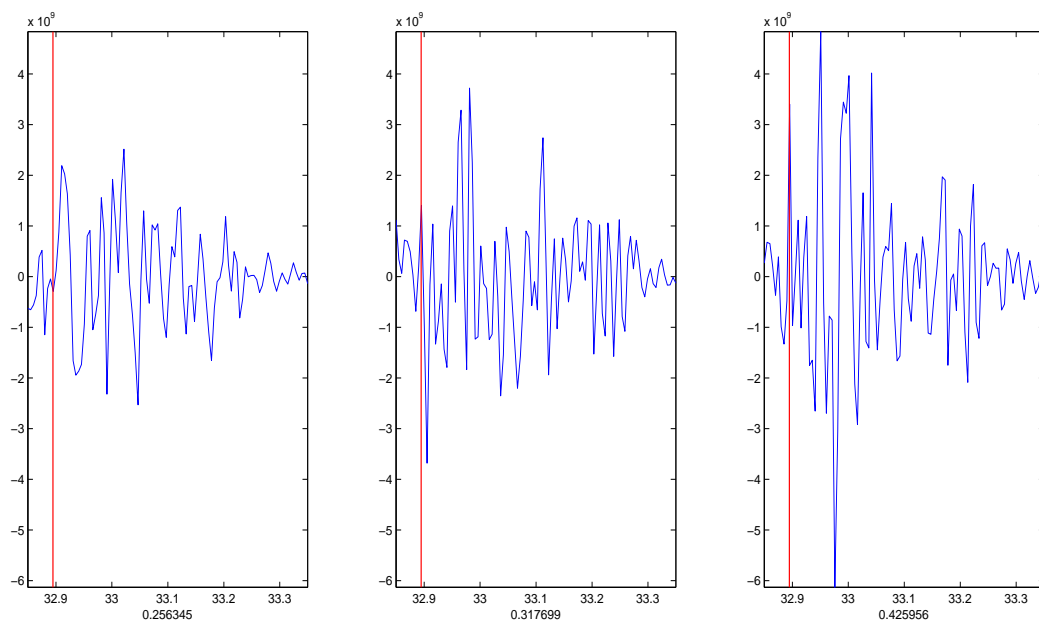


Figura 4.61: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_21_20_10_32.kxv

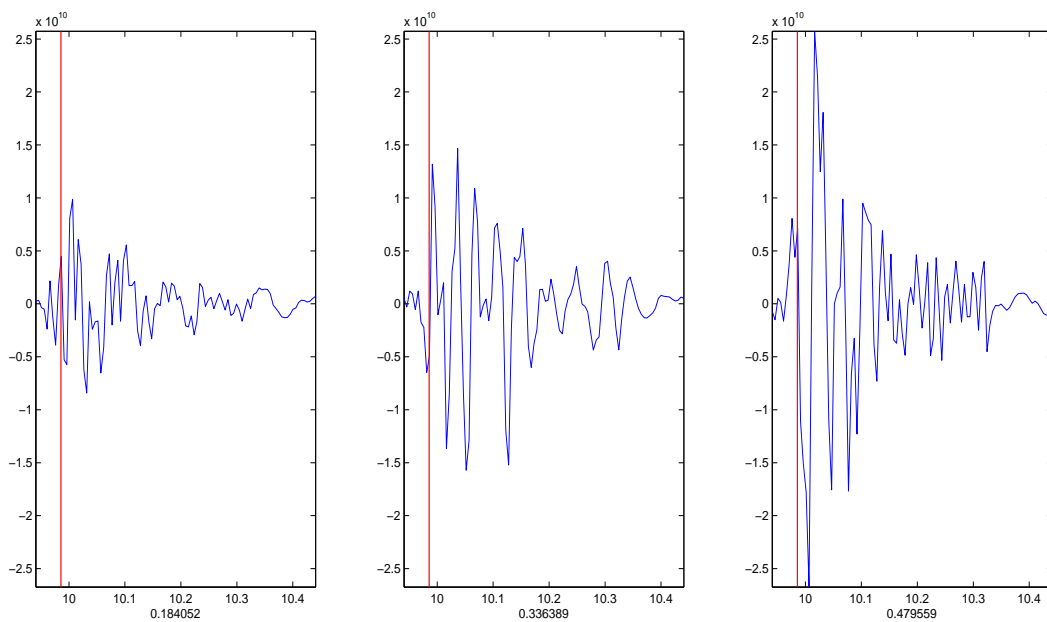


Figura 4.62: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_27_19_38_10.1o0

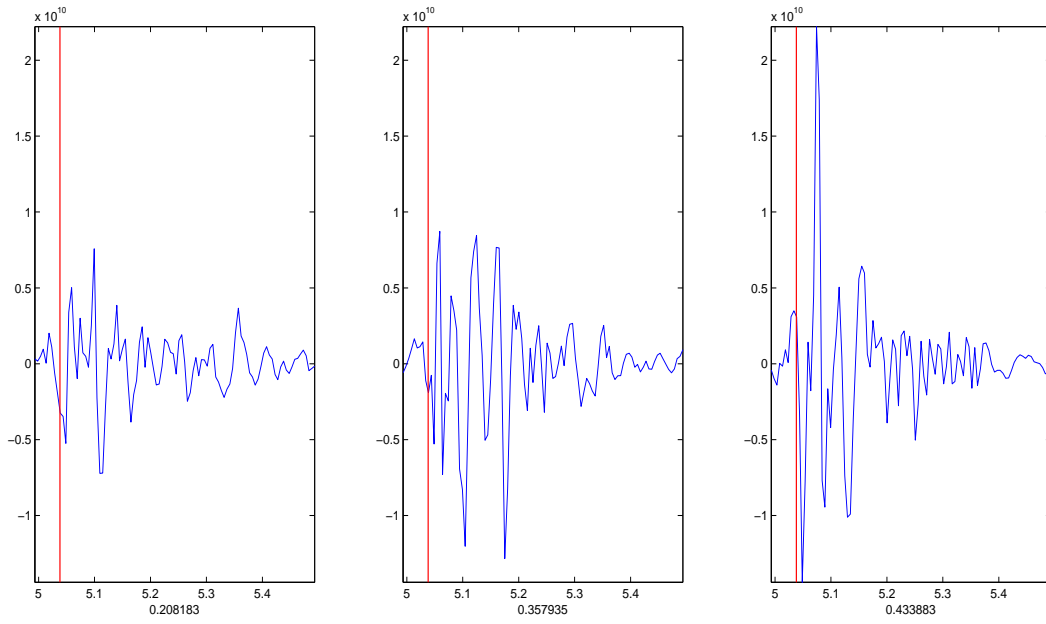


Figura 4.63: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_29_18_22_05.2ph

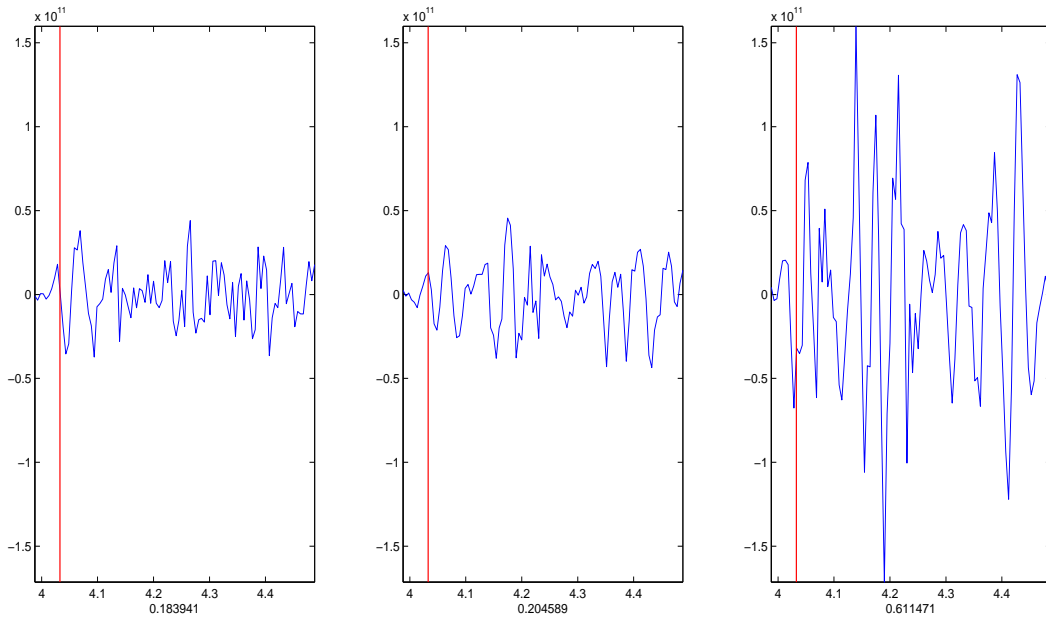


Figura 4.64: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 2011_apr_10_02_27

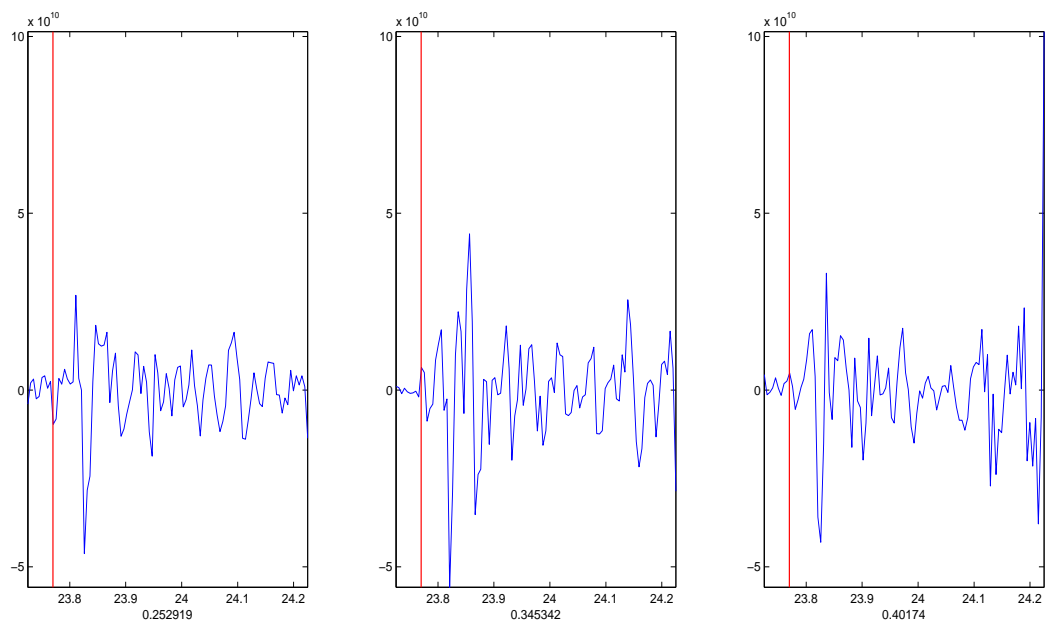


Figura 4.65: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 2011_apr_10.04.56

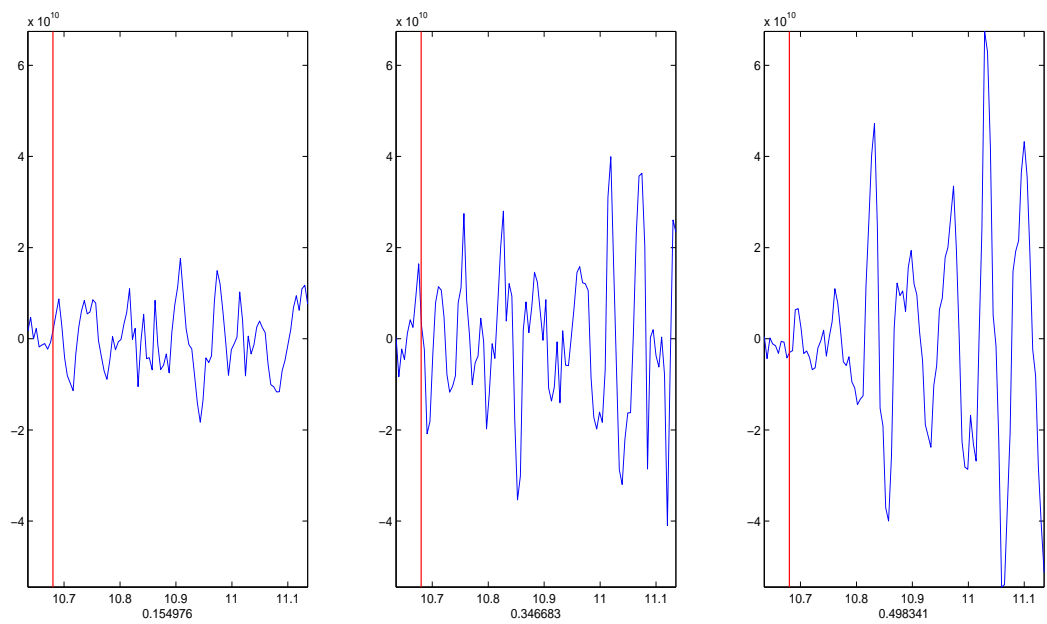


Figura 4.66: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 2011_apr_10.06.00

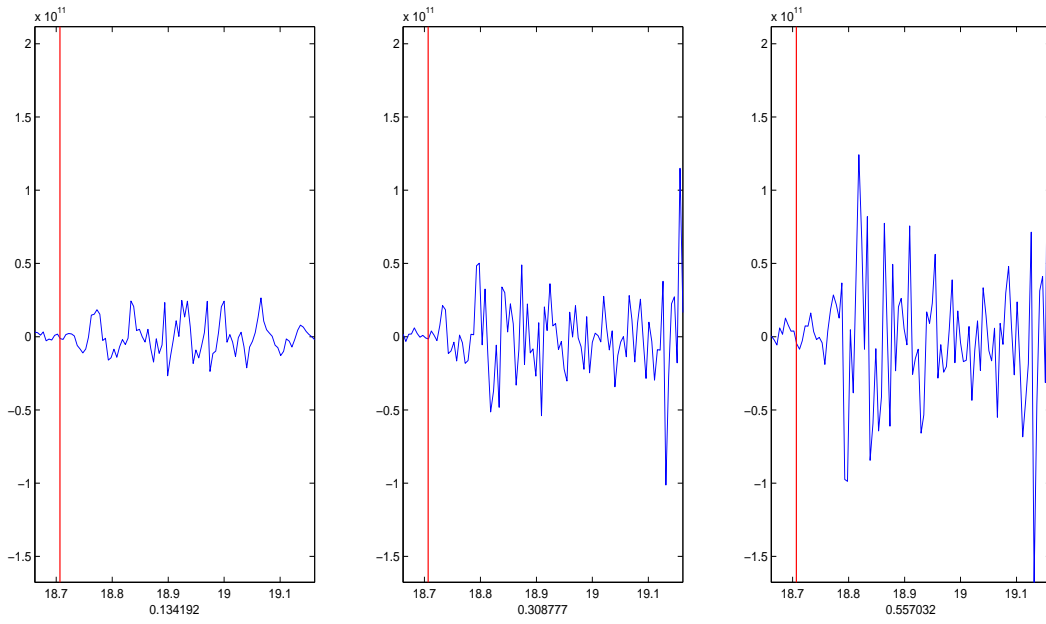


Figura 4.67: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 2011_apr_10.06.16

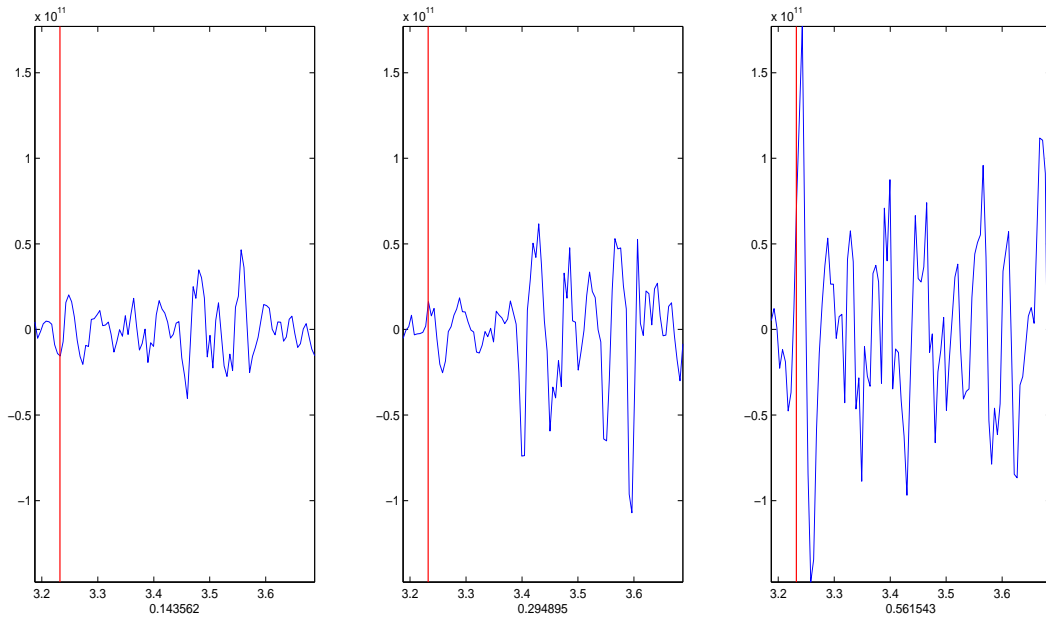


Figura 4.68: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 2011_apr_10.07.52

4.4. Conclusión Estimación y Clasificación de Fuentes

Al considerar las 29 fuentes sísmicas reconstruidas, los valores obtenidos para las componentes más pequeñas (después del filtrado y la rotación) son:

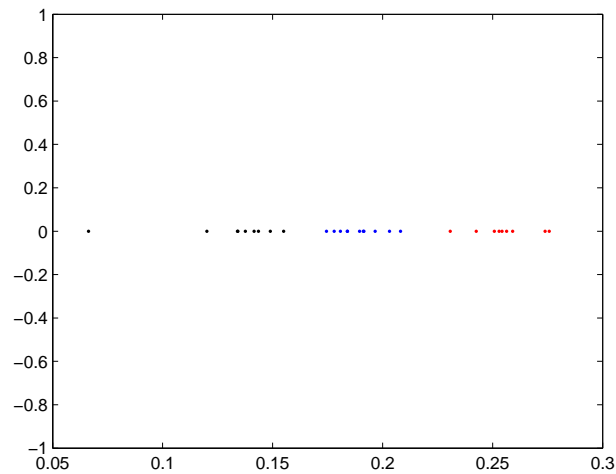


Figura 4.69: Grafico con la clasificación de la componente más pequeña mediante algoritmo de las kmedias con 3 clusters

El valor para estas cantidades varia entre 0 y $1/3$. Valores cercanos a 0 corresponden a fuentes contenidas principalmente en un plano, valores cercanos a $1/3$ corresponde a fuentes con componentes comparables en todas las direcciones.

Al estudiar las 29 fuentes reconstruidas se observa acumulamiento de las primeras componentes en tres grupos. Aquellos sismos con primera componente por debajo de 0.165, sismos con primera componente entre 0.165 y 0.22 y sismos con primera componente mayor a 0.22. Esta diferenciación se observa claramente en el grupo de eventos considerados, que ya es de un tamaño razonable, pero se sugiere validar la observación estudiando un conjunto más grande de eventos. La diferenciación observada confirma en primera instancia, de manera muy positiva, la posibilidad de clasificar los eventos de acuerdo a su componente más pequeña.

Esto, en particular, se puede ocupar como información complementaria para la clasificación utilizada en la línea sísmica de este proyecto.

4.5. Resumen Time-reversal

En time-reversal se calcula la propagación de una onda cuyas fuentes se relacionan con las mediciones sismográficas invertidas en el tiempo. En el caso ideal de suficientes mediciones, adecuadamente distribuidas, la onda así generada debería concentrarse en la posición correspondiente al origen del sismo

y dar indicaciones del tiempo de origen y la forma de la fuente.

4.6. Casos de Estudio

Los casos de estudio son los siguientes 3 eventos:

'1998_aug_02_07_30_40.d5g'

'1998_aug_07_16_24_33.i6b'

'1998_aug_09_21_49_22.4n3'

4.6.1. Input

Set de datos entregados por codelco, procesados por el script en python y consumidos por matlab mediante el script de importación.

4.6.2. Output

Se obtienen las siguientes visualizaciones de las inversiones de los campos de desplazamiento de las ondas sísmicas.

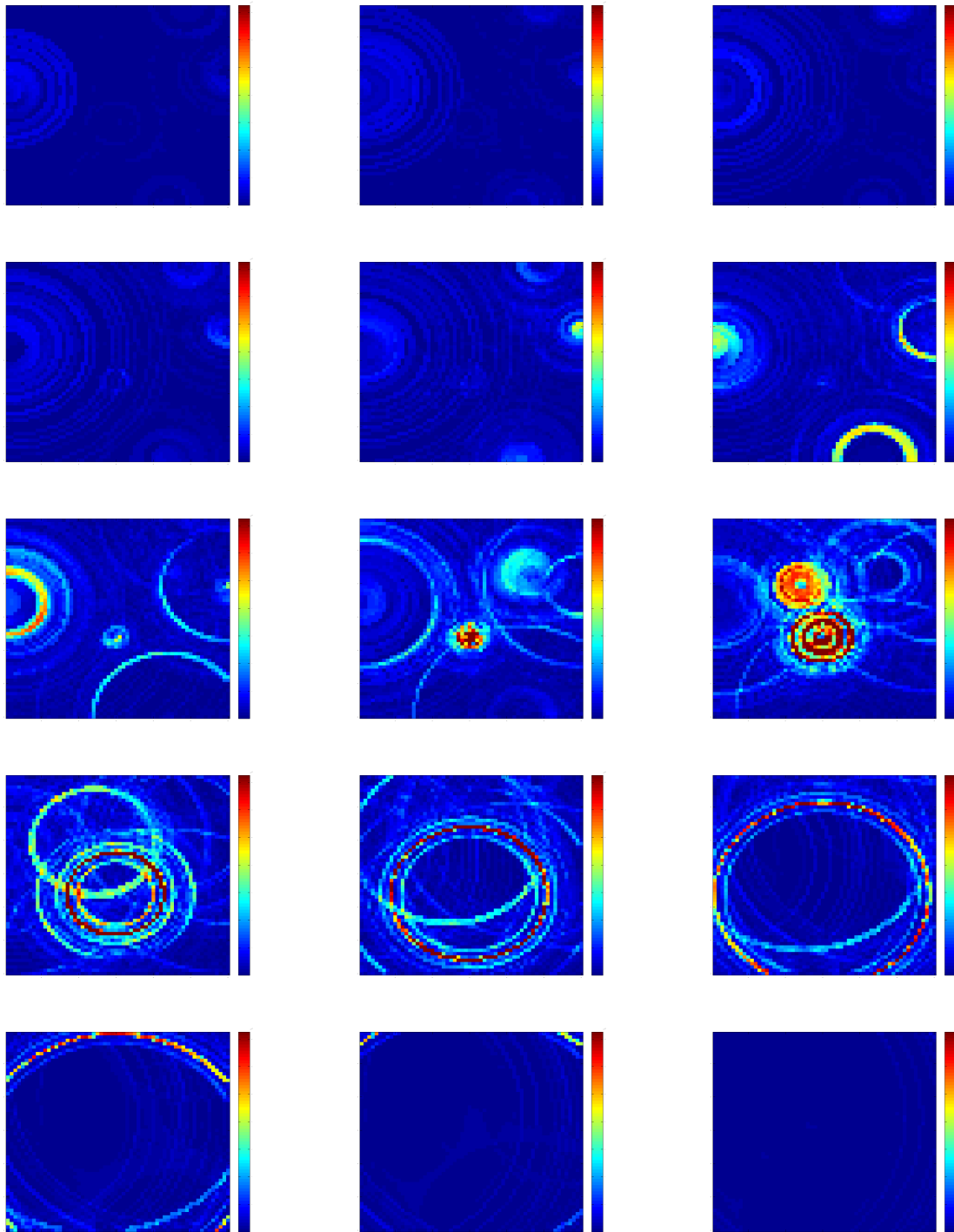


Figura 4.70: Time reversal para el evento 1998_aug_02.07_30_40.d5g

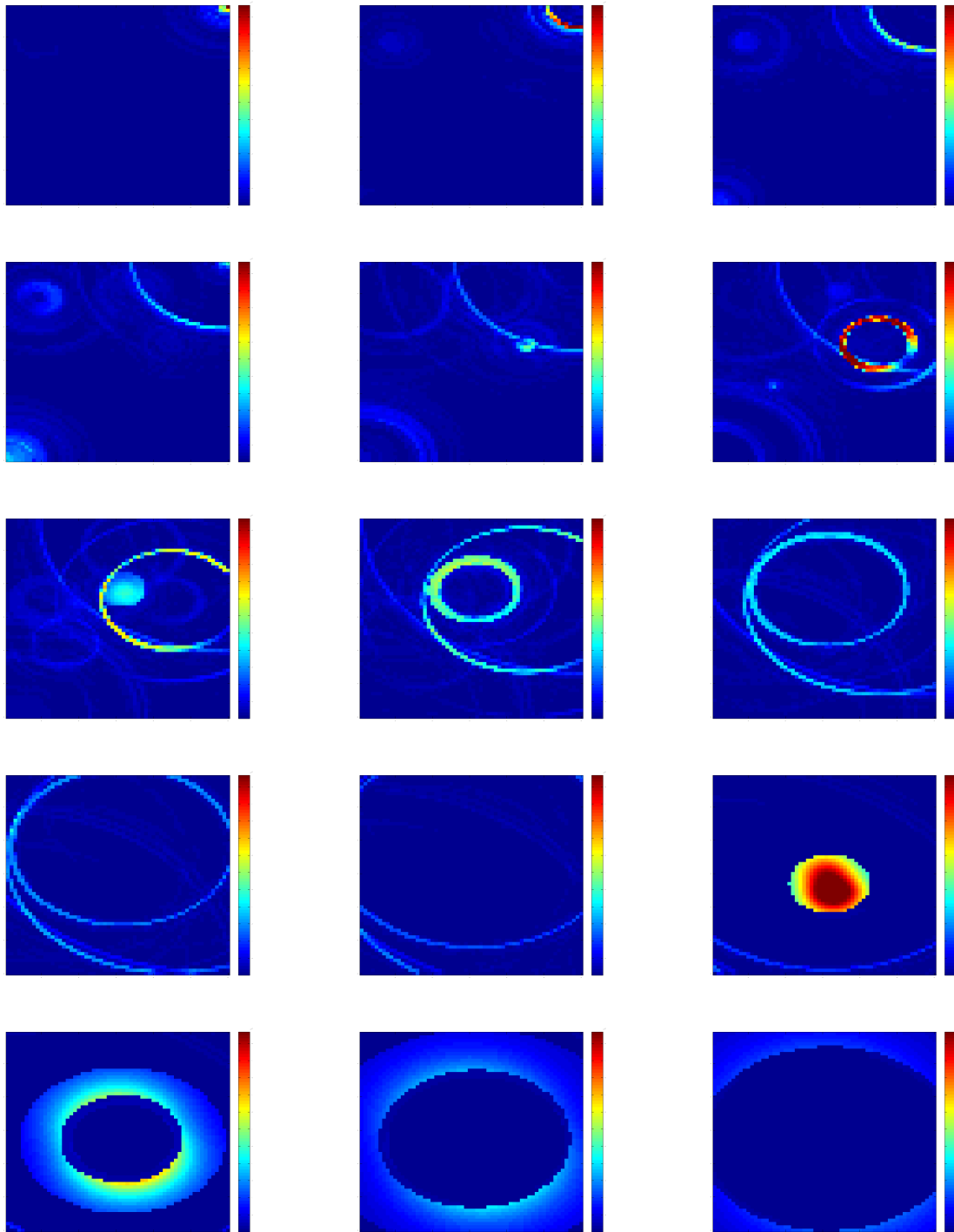


Figura 4.71: Time reversal para el evento 1998_aug_07_16_24_33.i6b

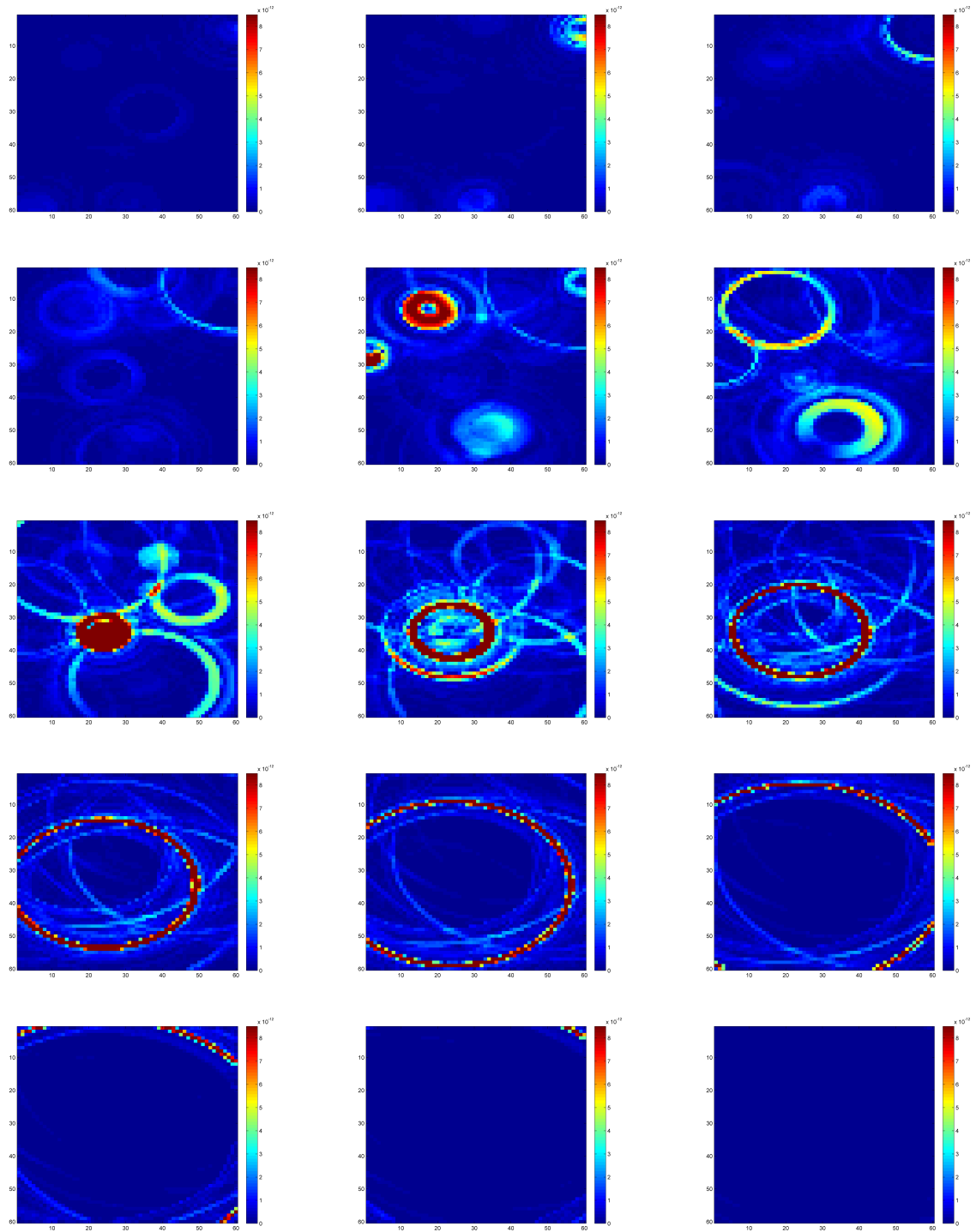


Figura 4.72: Time reversal para el evento 1998_aug_09_21_49_22.4n3

4.7. Conclusiones en Time Reversal

La implementación y experimentación del método de time reversal con datos reales resultó ser bastante más difícil que el caso de datos sintéticos realizados en la primera etapa de este proyecto.

Las mayores dificultades aparecieron en dos aspectos independientes del método.

Primero, en términos de complejidad computacional, el gran tamaño de las mediciones (del orden de 4×10^3 mediciones temporales por cada sensor por cada componente) y el tamaño necesario de la reconstrucción (del orden de $60 \times 60 \times 10$ puntos espaciales, por 50 puntos temporales, por cada componente) hicieron imposible una implementación directa del método desarrollado durante la primera etapa. Para superar esta dificultad, programamos un método de subsampleo variable de las mediciones y cambiamos los métodos de propagación de onda ya implementados, para poder trabajar con esta nueva estructura de datos.

Segundo, otra dificultad surgió por la relativamente baja cobertura de sensores. En particular, en las experimentaciones realizadas observamos que la baja distribución de sensores alrededor de las fuentes sísmicas provocaba una sobreponderación artificial de los sensores que se encontraban más cerca de la fuente y una sobreponderación artificial en las direcciones con mayor densidad de sensores. Corregimos parcialmente eso con una pre-ponderación de las mediciones (multiplicando por las distancias entre sensores y la posición estimada de la fuente al cuadrado, de acuerdo a la expresión de la función de Green). Esto mejoró bastante la focalización de la onda de time reversal, pero no pudimos lidiar de manera completa con la distribución no homogénea de sensores alrededor de la fuente sísmica.

En conclusión, para los eventos estudiados se logró superar bastantes de las dificultades que se presentaron en el desarrollo del método, obteniendo una implementación de time reversal con un tiempo de cómputo factible (del orden de 90 minutos) y en la que se observa focalización de la onda de time reversal en la posición y tiempos adecuados (según estimaciones independientes de tiempos de viaje). Pero a pesar de esto, nuestra evaluación final del método es que no produjo resultados al nivel de las expectativas que teníamos. Las reconstrucciones obtenidas no presentan suficiente resolución y estabilidad para una estimación robusta de la posición, tiempo de origen y forma de las fuentes sísmicas.

4.8. Modelos

4.8.1. Ecuación de Ondas Elástica

Consideraremos que la propagación de la onda sísmica en el medio rocoso esta bien modelada por la ecuación de onda elástica en un medio homogéneo sin fronteras. Es decir, si $u(x, y, z, t)$ representa el desplazamiento en el punto (x, y, z) debido a la onda, en el tiempo t , entonces asumimos que la propagación de la onda u está modelada adecuadamente por la ecuación

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot u) + \mu \nabla \times (\nabla \times u) = F \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \quad (4.1)$$

donde la densidad ρ y los parámetros de Lamé λ, μ se asumen constantes y conocidos. El lado derecho F es la fuente (fuerza localizada) del sismo.

Para resolver la ecuación (4.1) tenemos una expresión explícita de la función de Green, es decir del campo de desplazamientos en la dirección i debido a un impulso en la dirección j en el tiempo $t = 0$ ($i, j \in \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$). Tenemos que $G_{ij}, j = 0$ para $t < 0$ y para $t \geq 0$

$$G_{ij}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{t}{r^3} \mathbb{1}_{[\frac{r}{\alpha}, \frac{r}{\beta}]}(t) + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_j \frac{1}{r} \delta(t - \frac{r}{\alpha}) - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r} \delta(t - \frac{r}{\beta})$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\gamma_{\hat{x}} = x/r$ (análogo para $i \in \{\hat{y}, \hat{z}\}$), $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y 0 si $i \neq j$, $\mathbb{1}_A(t) = 1$ si $t \in A$ y 0 si $t \notin A$, $\delta(\cdot)$ es el delta de Dirac en el tiempo (una dimensión) y donde $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ y $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ son las velocidades de la onda p y s respectivamente.

4.8.2. Modelo de Time-Reversal

La observación principal que motiva y justifica el método de time reversal es que si $u(x, y, z, t)$ es una solución de la ecuación elástica, entonces $\tilde{u}(x, y, z, t) = u(x, y, z, T - t)$ también es una solución de la ecuación elástica con los **mismos coeficientes**.

Si se mide $u(x, y, z, t)$ en toda la frontera Σ de algún conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, durante un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, se puede resolver la ecuación

$$\rho \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \hat{u}) + \mu \nabla \times (\nabla \times \hat{u}) = 0$$

$$\hat{u}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t_2 - t) \text{ para } (x, y, z) \in \Sigma, t \in [0, t_2 - t_1]$$

La unicidad de la solución implica que con condiciones adecuadas $\hat{u}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t_2 - t)$ en Ω para todo $t \in [0, t_2 - t_0]$, obteniendo $u(x, y, z, t_2 - t_0)$ en el momento del sismo y por ende recuperando la fuente sísmica (en principio t_0 no es conocido y también debe ser recuperado en este proceso).

En el método de time-reversal se propone invertir el tiempo en las mediciones y ocuparlas como fuentes sintéticas para producir una onda que se concentre en la fuente sísmica original, recuperando así la posición, el tiempo en que se originó y la forma de ésta.

Más específicamente, la onda u (o derivadas temporales de u que permitirían recuperar u) se mide en K estaciones, localizadas en $\{r_k\}_{k=1}^K$ (cada $r_k = (x_k, y_k, z_k)$) y por intervalos de tiempos $[0, T]$ con con $0 < t_0$ y T suficientemente grande. Para cada $k = 1, \dots, K$ resolvemos la ecuación

$$\rho \frac{\partial^2 \hat{u}_k}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \hat{u}_k) - \mu \nabla \times (\nabla \times \hat{u}_k) = \delta_{r_k}(r) u(r_k, T - t) \text{ para } t \geq 0 \quad (P_k)$$

y definimos $\hat{u} = \sum_{k=1}^K \hat{u}_k$. Si la cobertura de los geófonos es suficientemente adecuada respecto al origen de la fuente sísmica, entonces \hat{u} debería relacionarse con la propagación invertida de la onda

original (i.e. $u(x, y, z, T - t)$) y la focalización de \hat{u} se podría utilizar para identificar el momento t_0 en que ocurrió el sismo y obtener la forma espacial de la fuente sísmica.

Se puede resolver la ecuación (P_k) ocupando la función de Green, que conocemos explícitamente y está descrita arriba. Si $G = [G_{ij}]_{i,j=1,2,3}$ es la matriz simétrica de 3×3 con componentes G_{ij} , entonces $\hat{u}_k(x, y, z, t)$ se puede calcular como

$$\hat{u}_k(x, y, z, t) = \int_0^t G((x, y, z) - r_k, t - \tau) \cdot u(r_k, T - \tau) d\tau$$

(donde $G \cdot u$ es el producto entre una matriz de 3×3 y un vector en \mathbb{R}^3). Es decir \hat{u}_k corresponde a la convolución en el tiempo entre la seña del geófono localizado en r_k invertida en el tiempo, y la función de Green trasladada a r_k .

Una vez construida \hat{u} se puede estudiaría el momento y la forma en la cual se focaliza, lo que debería corresponder al momento y la forma de la fuente sísmica.

4.8.3. Estimación de Fuentes Utilizando Mínimos Cuadrados.

Como describimos anteriormente, una fuente sísmica (una fuerza) localizada en $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y modulada temporalmente según $s(t)$, se puede incluir en la ecuación (4.1) como un lado derecho de la forma $s(t)\delta_{r_0}(r)$.

Denotando la función de Green de la ecuación como $G(r|t)$, podemos calcular el campo de desplazamiento de la onda en el punto $r = (x, y, z)$ en el tiempo t , como

$$u(r, t) = [G(r - r_0|\cdot) * s(\cdot)](t).$$

Las mediciones corresponden (después de integrar temporalmente si es necesario) al campo de desplazamiento, a lo largo del tiempo, en las posiciones $\{r_k\}_{k=1}^K$. Es decir, nuestras mediciones corresponden al conocimiento de $u_k(t) := u(r_k, t)$ para t en un intervalo $T_k \subset \mathbb{R}$.

Asumiendo que la posición r_0 de la fuente es conocida (obtenida por ejemplo mediante tiempos de viaje) y que $s(t)$ esta soportado cerca de un tiempo t_0 conocido (también obtenido por tiempos de viaje por ejemplo), queremos plantear un método de reconstrucción de $s(t)$ mediante mínimos cuadrados.

Consideremos $\{\varphi_j\}_{j=1}^J$ una familia de funciones linealmente independientes, soportadas alrededor de t_0 , que nos permitan describir $s(t)$ aproximadamente. Es decir, consideraremos que

$$s(t) = \sum_{j=1}^J \alpha_j \varphi_j(t), \forall t$$

La familia $\{\varphi_j\}_{j=1}^J$ está dada y el objetivo es encontrar $\{\alpha_j\}_{j=1}^J$ a partir de las mediciones. Para esto, según el modelo de propagación de onda, tenemos que α_j deberían cumplir, para todo $k = 1, \dots, K$ y

para todo $t \in T_k$, que

$$\begin{aligned} u_k(t) &= [G(r_k - r_0) * s](t) \\ &= [G(r_k - r_0) * \sum_{j=1}^J \alpha_j \varphi_j](t) \\ &= \sum_{j=1}^J \alpha_j [G(r_k - r_0) * \varphi_j](t). \end{aligned}$$

Encontraremos los valores $\{\alpha_j\}_{j=1}^J$ resolviendo la ecuación anterior, o escogiendo aquellos que la se acerquen lo más posible a resolverla. Más explícitamente, encontraremos los α_j como

$$\{\alpha_j\} = \arg \min_{\{\alpha_j\}} \left(\sum_{k=1}^K \int_{T_k} \left(u_k(t) - \sum_{j=1}^J \alpha_j [G(r_k - r_0) * \varphi_j](t) \right)^2 dt \right)$$

Como las mediciones temporales son efectivamente discretas, lo anterior se puede escribir de manera matricial como

$$\arg \min \|u - \alpha \cdot A\|^2$$

donde $u = (u_k(t))_{k=1, \dots, K; t \in T_k}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_J)$ y $A = \left([G(r_k - r_0) * \varphi_j](t) \right)_{k=1, \dots, K; t \in T_k; j=1, \dots, J}$ escritos de manera adecuada. El problema anterior es un problema estándar de mínimos cuadrados y la solución (de menor norma en caso de admitir múltiples minimizantes) se escribe como

$$\hat{\alpha} = u \cdot A^t \cdot (AA^t)^\dagger$$

(donde B^\dagger es la pseudo-inversa de Perron cuando B no es invertible). Esto entrega una reconstrucción de $s(t)$ como

$$\hat{s}(t) = \sum_{j=1}^J \hat{\alpha}^j \varphi_j(t)$$

4.8.4. Clasificación de Fuentes Reconstruidas.

Al tener reconstrucciones de las fuentes sísmicas, queremos encontrar una posible clasificación de las fuentes según la proximidad de éstas a la superficie de quiebre. Obteniendo así información sobre la posición de la superficie de quiebre.

En la línea sísmica del proyecto se presentaron ideas y criterios relacionados a la superficie de quiebre, para clasificaciones de las fuentes sísmicas. Dado que los investigadores de esa línea entienden mucho

mejor que nosotros los mecanismos geofísicos involucrados en la fractura de la roca, nos dimos la libertad de tomar prestado uno de los criterios que propusieron, haciendo aquí explícito que la autoría de esa idea pertenece a los investigadores de esa línea.

Básicamente, la idea es separar los sismos en aquellos correspondientes a fracturas de cizalla y en aquellos correspondientes a implosión de roca.

Interpretamos esta caracterización como eventos correspondientes a fuentes sísmicas contenidas mayoritariamente en un plano y fuentes sísmicas con componentes comparables en todas las direcciones.

Para poder identificar estos dos casos, encontramos la dirección de menor proyección para cada fuente sísmica y calculamos la fracción de la fuerza que se proyecta en esa dirección. Ésto se obtiene haciendo un cambio de base de la fuente reconstruida $s(t) \in \mathbb{R}^3$ sobre los vectores propios de la matriz $[S_{ij}]_{i,j=1,2,3}$, donde $S_{ij} = \int s_i(t)s_j(t)dt$.

La proyección de menor componente contiene entre 0 y 1/3 de la fuerza total. Si la menor componente es 0 la fuente sísmica está contenida en un plano, si la menor componente es 1/3 la fuente sísmica tiene componentes completamente comparables en todas las direcciones.

Idealmente, un valor límite para la separación entre fuentes planas y fuentes isotrópicas aparecerá naturalmente al estudiar una familia de eventos sísmicos.

4.9. Descripción del Software y Manual de Uso

4.9.1. Forma de importar los datos al sistema

La información desde los archivos de texto codificados en ascii se importan por medio de un script en python. El script toma cada archivo y genera una carpeta con un nombre y además con el sufijo FOLDER. Consideremos como ejemplo el archivo de sismograma con el nombre

4.9.2. Descripción de estructuras de datos

La información de un evento está almacenada en dos clases matlab con los nombres event.m y geosensor.m los cuales están relacionados como se muestra en la figura.

4.9.3. Resumen de implementación (En Matlab y Python)

Scripts en Python

readFile.py Se usa una rutina en python para separar la información desde los documentos de los geofonos y convertirla a archivos que servirán de input que funciones matlab transformen la información a objetos matlab.

patterns.py Conjunto de patrones con la información necesaria que luego se extraerá mediante readFile.py.

Clases Matlab

Event.m Clase que contiene una lista de geosensores y los parámetros de un evento sísmico específico. Estos son los atributos de los set de datos entregados por Codelco.

Geosensor.m Clase que contiene la información de cada uno de los geofonos en un evento específico.

Documentación de las Rutinas Principales

Importar información a matlab

- Archivo: script/importEvents.m
- Comando: `events = importEvents()`
- Descripción: Almacena la información desde los archivos tratados por el script python `readFile.py` a una vector de objetos Event en matlab.
- input: no recibe parámetros de entrada dado que hace lecturas sobre archivos de texto almacenados en disco.
- output: event lista de objetos del tipo Event que contienen a todos los eventos sísmicos almacenados en la carpeta `./project/data sets`

Estimar la fuente sismica de un evento sísmico

- Archivo: script/source.m
- Comando: `[src, filtsrc, error] = source(event, nSrc, L, por)`
- Descripción: Estima la fuente como una fuerza $f(t)$ en un intervalo de tiempo de largo L dado el conjunto de sismógrafos del evento **event** con una discretización del dominio con **nSrc** con una fracción por de la fuente antes de `event.origin_time` es cual es el valor estimado por codelco.
- input: event

script/constructsensor.m Deduce la forma de un geofono dada una fuente sísmica

4.9.4. Manual de uso

El uso del programa está descrito en dos archivos matlab distintos, en el primero `sampletimereversal.m` se describe como invertir la señal en tiempo. En el segundo archivo llamado `sampleRecSource.m` se describen los pasos para la reconstrucción de una fuente sismica a partir de la información de los geofonos dados por Codelco.

Ejemplo

```
%lista de todos los eventos sismicos
events = importEvents()
%mostrar el primero y se vera que las variables de este objeto tienen el mismo
% nombre que las variables utilizadas en los set de datos
event(1)
```

```
>>
```

```
ans =
```

Event

Properties:

```
        name: {'1998_aug_02_07_30_40.d5g'}
        beta_est: 3500
        alpha_est: 5600
        alpha_ind: []
        beta_ind: []
        gss: [1x8 Geosensor]
        alpha: 5600
        beta: 3500
        rho: 2700
        first_time: 40.5227
        last_time: 41.5579
        count: 8
        LocR: [-439.5702 -1.1564e+03 -2.1773e+03]
        origin_time: 40.5655
        tail_per: 0
        error: 0.1500
        xi: -892.7790
        xf: -20.2270
        yi: -1.5404e+03
        yf: -715.6420
        zi: -2.2857e+03
```

```

        zf: -1.9726e+03
        dx: 14.7890
        dy: 13.9790
        dz: 34.7967
        dt: []
        nx: []
        ny: []
        nz: []
        nt: []
    n_rsmp1: []
    max_norm: []
        x_axis: [1x60 double]
        y_axis: [1x60 double]
        z_axis: [1x10 double]
        t_axis: [1x50 double]
    X_domain: []
    Y_domain: []
    Z_domain: []
    T_domain: []
    origin_time_est: 40.5655
        LocR_est: [-439.5702 -1.1564e+03 -2.1773e+03]
            r0: []
        all_est: []
    alpha_ind_post: []
    beta_ind_post: []
        src: []
    filtsrc: []
        e: []
        v1: []
        v2: []
        v3: []
        vr1: []
        vr2: []
        vr3: []
        A: []

```

```
U: []
indices: []
alphas: []
```

Geosensor.m

Clase que contiene los atributos de un geosensor específico en un evento sísmico. Contiene las mediciones y propiedades calculadas necesarias para los algoritmos.

Ejemplo

```
%lista de todos los eventos sismicos
events = importEvents()
%mostrar el primer geosensor de la lista de el evento 1
event(1).gss(1)
ans =
```

Geosensor

Properties:

```
    cuttime: 40.6138
    firsttime: 40.5286
    lasttime: 41.0173
    resampleErrorOnNorm: 0.1499
    resampleSize: 191
    timeresamplevector: [1x191 double]
    timevector: [1x4888 double]
    diferenciaPSvalida: 1
    medicionesValidas: [1 1 1]
    r0: [-369.6930 -1.1323e+03 -2.1262e+03]
    hardware_sampling_rate: 10000
    resampling_rate: [1x190 double]
    period: [1x190 double]
    TriggerPosition: 542
    max_norm: []
    r_x: [1x191 double]
    r_y: [1x191 double]
    r_z: [1x191 double]
```

```

        L: 4888
        data: [4888x3 double]
        t_time: 40.5828
        p_time: 40.5807
        s_time: 40.5939
        rvrse_amplt: []
        validP: 1
        validS: 1
        validSP: 0
        IsAccelerometer: 0
        IsSpeedometer: 1
        sensor_id: 29
        validAll: 1

```

4.9.5. Funciones principales

Source.m

Dado un evento sísmico **event**, estima la fuente discretizado en **n** puntos, con un ancho total de **width** segundos, comenzando la ventana temporal de la fuente un tiempo **per*width** antes del tiempo de origen **origin_time**.

Ejemplo

```

%importamos los eventos sismicos
events = importEvents()
%seleccionamos uno de estos eventos, por ejemplo, el quinto
ev = events(5)
% estimacion de la fuente con 100 datos, con un ancho 0.3 y un 0.1 de la senal
% antes del tiempo de origen
[src] = source(ev,100,0.3,0.1)

```

Reverse_signal

Realiza el time reversal ocupando como fuente las mediciones, invertidas en el tiempo, de un evento específico.

```

%importamos los eventos sismicos
events = importEvents()
%seleccionamos uno de estos eventos, por ejemplo, el quinto e invertimos las

```

```
% sen~ales en el tiempo
[X,Y,Z] = events(5).reverse_signal;
% La visualizacion de la inversion
plotRevSignal(X,Y,Z);
```

4.9.6. Otras funciones

scalarGreenKernel.m

```
function [G11,G12,G13,G22,G23,G33] = scalarGreenKernel(x,y,z,T, alpha, beta,rho)
```

Retorna la función de Green para un vector de tiempo específico, para la posición (x, y, z) . Las velocidades de propagación de la onda son alpha y beta y la densidad del medio es ρ .

Los pasos siguientes son para el uso del producto, es importante señalar que el sistema fue desarrollado en matlab

4.9.7. Importar desde los set de datos

Para poder utilizar el producto se requiere tener un conjunto de archivos como los que entregan cada uno de los geosensores utilizados. Estos archivos, mediante una rutina en python generan una carpeta para cada evento correspondiente con el nombre del evento como muestra en la figura.

```
>>~\ruta-rutina-python\ python readFiles.py
```

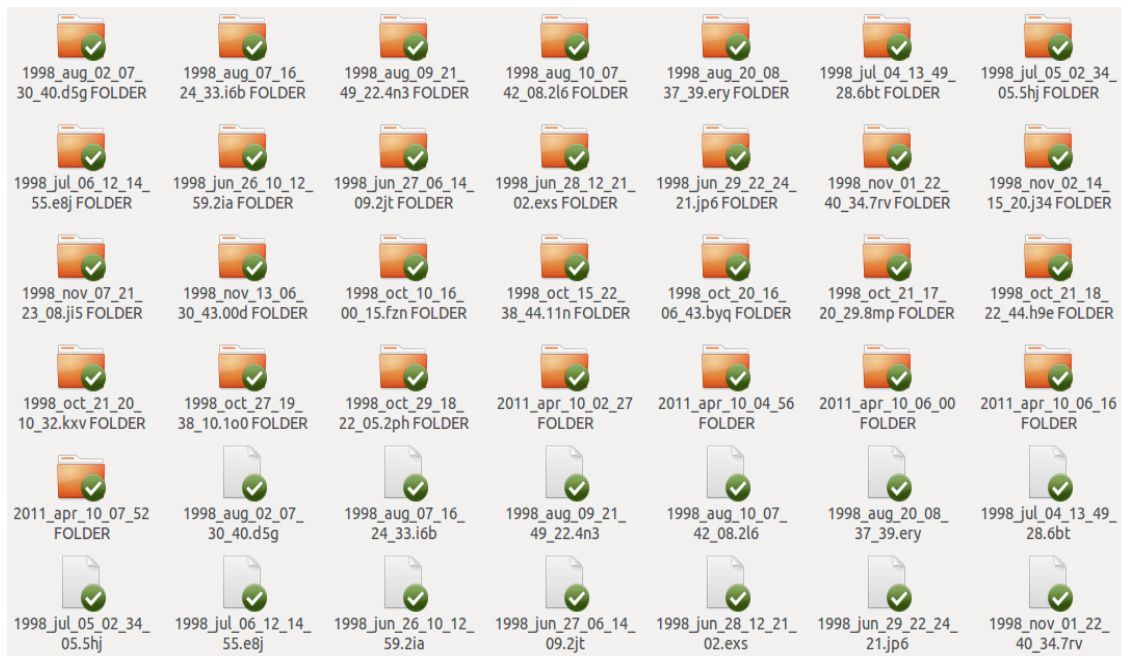


Figura 4.73: Archivos de codeco con su respectiva carpeta

Con lo cual todos los archivos se transformaran en carpetas con información que servirá de input para el programa en matlab.

4.9.8. Importar información a los objetos matlab

Estando en Matlab, con la carpeta matlab agregada en el path, podemos almacenar todos la información a objetos matlab.

```
events = ImportEvents();
```

4.9.9. Construcción de las fuentes para cada evento

Para reconstruir la fuente de un evento seleccionado, se debe de elegir un evento de el total

```
% se selecciona el evento 1 de la lista
event = events(1);
% se reconstruye la fuente, fuente filtrada y error bajo la norma 2
% nota: se ha identificado que existen sensores con mediciones malas, por
% ejemplo el sensor que tiene sensor_id = 25, se pueden eliminar los sensores a
% mano de tal manera de evitar resultador erroneos
event.gss(find([event.gss.sensor_id]==25)) = [];
event.count = length(event.gss);
tic;
% evento de 100 puntos
[src, filtsrc, err] = source(event,100, 0.5,0.09);
toc;
```

4.9.10. Rotar una señal filtrada para conocer el tipo de fuente

Ya con una reconstrucción de la fuente sísmica, se puede rotar la fuente filtrada para ver como se proyecta la fuerza en cada uno de los ejes.

```
Ev.gss([Ev.gss.sensor_id] == 25) = [];
Ev(ii).count = length( Ev(ii).gss);
% eliminar sensor_id = 25

% se almacena informacion, como la fuente, fuente filtrada, error
[Ev.src, Ev.filtsrc, Ev.error, ~, Ev.U, ~, ~]= source(Ev,100, 0.5,0.09);
% coeficientes de la fuerza proyectada en los ejes canonicos
[Ev.v1, Ev.v2, Ev.v3] = EventCoeficients(Ev.src);
```

```
% coeficientes de la fuerza filtrada y rotada proyectada.  
[Ev.vr1, Ev.vr2, Ev.vr3] = EventCoeficients(rotate(Ev.filtsrc));  
% visualizacion de la fuente sismica rotada por componentes principales  
plotSrc(rotate(Ev.filtsrc),Ev.origin_time);
```

Capítulo 5

Linea Sismica

5.1. Resumen

5.2. El Modelo

5.3. Descripción Software

5.4. Casos de estudio

5.4.1. Caso Pilar Norte

El primer ejemplo que se presenta, consiste en ...

Input

Output

Visualización

Análisis de los resultados

5.4.2. Caso Esemeralda

El primer ejemplo que se presenta, consiste en ...

Input

Output

Visualización

Análisis de los resultados

5.5. Resultados Generales

5.6. Extensiones futura

5.7. Manual de Uso

Capítulo 6

Linea DEM

6.1. Resumen

6.2. El Modelo

6.3. Descripción Software

6.4. Casos de estudio

6.4.1. Caso Pilar Norte

El primer ejemplo que se presenta, consiste en ...

Input

Output

Visualización

Análisis de los resultados

6.4.2. Caso Esemeralda

El primer ejemplo que se presenta, consiste en ...

Input

Output

Visualización

Análisis de los resultados

6.5. Resultados Generales

6.6. Extensiones futura

6.7. Manual de Uso

Capítulo 7

Linea Geométrica (CME3D)

7.1. Resumen

7.2. El Modelo

7.3. Descripción Software

7.4. Casos de estudio

7.4.1. Caso Pilar Norte

El primer ejemplo que se presenta, consiste en ...

Input

Output

Visualización

Análisis de los resultados

7.4.2. Caso Esemeralda

El primer ejemplo que se presenta, consiste en ...

Input

Output

Visualización

Análisis de los resultados

7.5. Resultados Generales

7.6. Extensiones futura

7.7. Manual de uso

Capítulo 8

Bibliografía

- [1] Superintendencia de Geomecánica TTE-GRMD. Modelo para monitoreo de Caving. Noviembre 2010.
- [2] MMGeo. Estudio 2D de Escenarios de Interés en el Pre-acondicionamiento y Determinación de la Cavidad Máxima Estable en 3D. Marzo, 2011.
- [3] P.A. Cundall, O.D. Strack, A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique* 29 (1979) 47-65.
- [4] A.I. Prilepko, D.G. Orlovskii, I.A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, Marcel Dekker, New York, 2000.