

Problema 1. Resuelva la siguiente ecuación diferencial por transformada de Laplace

$$y' - y = 1$$

con las siguientes condiciones iniciales $y(0) = 0$, asumiendo que $Y = Y(s)$

$$y' - y = 1$$

\mathcal{L}

$$\mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1\}$$

$$(s \cdot Y - y(0)) - Y = \frac{1}{s}$$

$$(s \cdot Y - 0) - Y = \frac{1}{s}$$

$$s \cdot Y - Y = \frac{1}{s}$$

$$Y(s-1) = \frac{1}{s}$$

$$Y = \frac{1}{s(s-1)}$$

fraccciones parciales

$$Y = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-1)}$$

$$\frac{1}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-1)}$$

$$1 = (s-1)A + sB$$

cuando $s = 0$ entonces $A = -1$ y cuando $s = 1$ entonces $B = 1$, por lo que la ecuación queda de la siguiente manera:

$$Y = -\frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)}$$

\mathcal{L}^{-1}

$$y = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\}$$

$$y = -1 + e^x$$

Problema 2. Resuelva la siguiente ecuación diferencial por transformada de Laplace

$$y' + 2y = t$$

con $y(0) = -1$

$$\begin{aligned}
 y' + 2y &= t \\
 \mathcal{L} \{y'\} + 2\mathcal{L} \{y\} &= \mathcal{L} \{t\} \\
 sY - y(0) + 2Y &= \frac{1}{s^2} \\
 sY + 1 + 2Y &= \frac{1}{s^2} \\
 Y(s+2) + 1 &= \frac{1}{s^2} \\
 Y(s+2) &= \frac{1}{s^2} - 1 \\
 Y(s+2) &= \frac{1-s^2}{s^2} \\
 Y &= \frac{1-s^2}{s^2(s+2)}
 \end{aligned}$$

fracciones parciales

al desarrollarlo por fracciones parciales nos queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \frac{1-s^2}{s^2(s+2)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} \\
 1-s^2 &= As(s+2) + B(s+2) + Cs^2
 \end{aligned}$$

cuando $s = -2$ entonces $1-4 = 4C \implies C = -\frac{3}{4}$; cuando $s = 0$ entonces $1 = 2B \implies B = \frac{1}{2}$, por lo que la ecuación queda como:

$$1-s^2 = As(s+2) + \frac{1}{2}(s+2) - \frac{3}{4}s^2$$

cuando $s = 1$ entonces

$$\begin{aligned}
 0 &= 3A + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \\
 0 &= 3A + \frac{3}{4} \\
 A &= -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

por lo que

$$Y = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2}$$

$$Y = \frac{-\frac{1}{4}}{s} + \frac{-\frac{1}{2}}{s^2} + \frac{-\frac{3}{4}}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$y = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}e^{-2t}$$