Transfomada de Laplace

Leonardo jofré, +56 9 781 80331

18 de noviembre de 2016

correo: ljofre2146@gmail.com

Problema 1. Resuelva la siguiente ecuación diferencial por transformada de Laplace

$$y' - y = 1$$

con las siguientes condiciones iniciales $y(0) = 0$, asumiendo que $Y = Y(s)$

$$\begin{aligned}
y' - y &= 1 \\
\mathcal{L} & \\
\mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{1\} \\
(s \cdot Y - y(0)) - Y &= \frac{1}{s} \\
(s \cdot Y - 0) - Y &= \frac{1}{s} \\
s \cdot Y - Y &= \frac{1}{s} \\
Y(s-1) &= \frac{1}{s} \\
Y &= \frac{1}{s(s-1)} \\
\text{fraccciones parciales} & \\
Y &= \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s(s-1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-1)} \\
1 &= (s-1)A + sB
\end{aligned}$$

cuando $s = 0$ entonces $A = -1$ y cuando $s = 1$ entonces $B = 1$, por lo que la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
Y &= -\frac{1}{s}+\frac{1}{(s-1)} \\
\mathcal{L}^{-1} & \\
y &= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} \\
y &= -1+e^{x}
\end{aligned}$$

Problema 2. Resuelva la siguiente ecuación diferencial por transformada de Laplace

$$y'+2y=t$$

con $y\left(0\right)=-1$

$$\begin{aligned}
y'+2y &= t \\
\mathcal{L} & \\
\mathcal{L}\left\{y'\right\}+2\mathcal{L}\left\{y\right\} &= \mathcal{L}\quad\left\{t\right\} \\
sY-y\left(0\right)+2Y &= \frac{1}{s^2} \\
sY+1+2Y &= \frac{1}{s^2} \\
Y\left(s+2\right)+1 &= \frac{1}{s^2} \\
Y\left(s+2\right) &= \frac{1}{s^2}-1 \\
Y\left(s+2\right) &= \frac{1-s^2}{s^2} \\
Y &= \frac{1-s^2}{s^2\left(s+2\right)} \\
\text{fracciones parciales} &
\end{aligned}$$

al desarrollarlo por fracciones parciales nos queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\frac{1-s^2}{s^2\left(s+2\right)} &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+2} \\
1-s^2 &= As\left(s+2\right)+B\left(s+2\right)+Cs^2
\end{aligned}$$

cuando $s=-2$ entonces $1-4=4C \implies C=-\frac{3}{4}$; cuando $s=0$ entonces $1=2B \implies B=\frac{1}{2}$, por lo que la ecuación queda como:

$$1-s^2 = As\left(s+2\right)+\frac{1}{2}\left(s+2\right)-\frac{3}{4}s^2$$

cuando $s=1$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &= 3A+\frac{3}{2}-\frac{3}{4} \\ 0 &= 3A+\frac{3}{4} \\ A &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} Y &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+2} \\ Y &= \frac{-\frac{1}{4}}{s}+\frac{-\frac{1}{2}}{s^2}+\frac{-\frac{3}{4}}{s+2} \\ \mathcal{L}^{-1} & \\ y(t) &= -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ y(t) &= -\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}e^{-2t} \end{aligned}$$

Problema 3. Resuelva la siguiente ecuación diferencial por transformada de Laplace con las condiciones iniciales $y(0)=2$

$$\begin{aligned} y'+4y &= e^{-4t} \\ \mathcal{L} & \\ \mathcal{L}\{y'\}+4\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\left\{e^{-4t}\right\} \\ sY-y(0)+4Y &= \frac{1}{s+4} \\ sY-2+4Y &= \frac{1}{s+4} \\ sY+4Y &= \frac{1}{s+4}+2 \\ Y(s+4) &= \frac{1+2s+8}{s+4} \\ Y(s+4) &= \frac{2s+9}{s+4} \\ Y &= \frac{2s+9}{(s+4)^2} \end{aligned}$$

fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{2s+9}{(s+4)^2} &= \frac{A}{s+4}+\frac{B}{(s+4)^2} \\ 2s+9 &= A(s+4)+B \end{aligned}$$

cuando $s=-4$ entonces $B=1$ por lo que la ecuación queda de la siguiente manera

$$2s+9 = A(s+4)+1$$

luego cuando $s=0$ entonces $9=4A+1 \implies A=2$
por lo que

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{2s+9}{(s+4)^2} \\
Y &= \frac{A}{s+4}+\frac{B}{(s+4)^2} \\
Y &= \frac{2}{s+4}+\frac{1}{(s+4)^2} \\
\mathcal{L}^{-1} & \\
y &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\}
\end{aligned}$$

utilizando el primer teorema de traslación $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

$$\begin{aligned}
y(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\} \\
y(t) &= 2e^{-4t}+e^{-4t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\
y(t) &= 2e^{-4t}+e^{-4t}t
\end{aligned}$$

Problema 4. Resuelva la siguiente ecuación diferencial por transformada de Laplace con las condiciones iniciales $y(0)=0$

$$\begin{aligned}
y'-y &= \sin(t) \\
\mathcal{L} & \\
\mathcal{L}\{y'\}-\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{\sin(t)\} \\
sY-y(0)-Y &= \frac{1}{s^2+1^2} \\
sY-0-Y &= \frac{1}{s^2+1^2} \\
Y(s-1) &= \frac{1}{s^2+1} \\
Y &= \frac{1}{(s^2+1)(s-1)}
\end{aligned}$$

fracciones parciales

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left(s^2+1\right)\left(s-1\right)} &= \frac{A}{\left(s^2+1\right)}+\frac{B}{\left(s-1\right)} \\
1 &= A\left(s-1\right)+B\left(s^2+1\right)
\end{aligned}$$

cuando $s=1$ entonces $B=\frac{1}{2}$ y cuando $s=0$ entonces $1=-A+B$, como conocemos el valor de B, entonces $1=-A+\frac{1}{2} \implies A=-\frac{1}{2}$, luego

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{\left(s^2+1\right)\left(s-1\right)} \\
Y &= \frac{A}{\left(s^2+1\right)}+\frac{B}{\left(s-1\right)} \\
Y &= \frac{-\frac{1}{2}}{\left(s^2+1\right)}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(s-1\right)} \\
\mathcal{L}^{-1} & \\
y\left(t\right) &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+1\right)}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-1\right)}\right\} \\
y\left(t\right) &= -\frac{1}{2}\sin\left(t\right)+\frac{1}{2}e^t
\end{aligned}$$

1. Problemas tipo

1.1. Ejercicios de propiedades de la transformada de laplace

Las operaciones de la transformada de laplace son fundamentales para encontrar la transformada de laplace de funciones más complejas o composiciones de funciones, especialemente la transformada inversa de funciones que no son algebraicas, pero cuya derivada si es algebraica, por ejemplo la función logaritmo y las funciones trigonométricas inversas.

Problema 5. resuelva usando propiedades

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+s^2\right)\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{t\int_0^t \sin\left(t\right)dt\right\}=-F'\left(s\right)$$

buscamos

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin(t)\,dt\right\} \\
F(s) &= \frac{\mathcal{L}\{\sin(t)\}}{s} \\
F(s) &= \frac{\frac{1}{s^2+1}}{s} \\
F(s) &= \frac{1}{s(s^2+1)} \\
F'(s) &= \frac{-3s^2-1}{(s^3+s)^2}
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
\mathcal{L}\left\{t\int_0^t \sin(t)\,dt\right\} = \frac{3s^2+1}{(s^3+s)^2}
$$

Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$ donde $f(t) = \frac{a}{b}t$ es la función serrucho periódica

Evidentemente nos falta el periodo de la función, asumiremos que es algún número positivo T, luego

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}\frac{a}{b}tdt \\
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{\frac{a}{b}}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}tdt
\end{aligned}
$$

integrando por partes $t = u$ entonces $dt = du$, $e^{-st}dt = dv$ entonces $-\frac{e^{-st}}{s} = v$, nos queda entonces que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{\frac{a}{b}}{1-e^{-sT}}\left(t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)_0^T + \frac{1}{s}\int_0^T e^{-st}dt\right) \\
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{\frac{a}{b}}{1-e^{-sT}}\left(-\frac{e^{-sT}T}{s} + \frac{1}{s}\int_0^T e^{-st}dt\right) \\
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{\frac{a}{b}}{1-e^{-sT}}\left(-\frac{e^{-sT}T}{s} - \frac{1}{s^2}\left(e^{-sT}-1\right)\right)
\end{aligned}
$$