Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

22 de octubre de 2015

Se pueden suceder las siguientes situaciones

1. Valores propios distintos
2. Valores propios iguales que generan vectores propios distintos
3. Valores propios iguales que generan vectores propios iguales
4. Valores propios complejos conjugados

Problema 1 (Valores propios distintos)**.** Resuelva

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x+3y\\ \frac{dy}{dt} &= 2x+y\end{aligned}$$

podemos representarlo de forma matricial

$$\begin{bmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

para obtener los valores propios debemos resolver el siguiente determinante

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}2-\lambda & 3\\ 2 & 1-\lambda\end{bmatrix} &= 0\\ \lambda^2-3\lambda-4 &= 0\\ (\lambda+1)(\lambda-4) &= 0\end{aligned}$$

buscamos los valores propios

por lo que los valores propios son $\lambda_1=-1$ y $\lambda_2=4$, cada uno de estos tiene un vector propio asociado $\mathcal{K}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ y $\mathcal{K}_2=\begin{bmatrix}3\\ 12\end{bmatrix}$ por lo que la solución del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}e^{-t}+c_2\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}e^{4t}$$

Nos damos cuenta de que cada solución es la combinación lineal

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t}$$

Problema 2 (Valores propios iguales que generan vectores propios distintos)**.** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -3 & 2 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} X$$

Buscamos los valores y vectores propios

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 6-\lambda & 6 & -3 & 2 \\ -4 & -4-\lambda & 2 & 0 \\ 8 & 7 & -4-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ \lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 &= 0 \end{aligned}$$

por lo que tenemos los siguientes valores propios $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ y $\lambda_{3,4} = -1 \pm i$ por lo que resta calcular los vectores propios:

para $\lambda_1 = -1 + i$

Dada la solución

$$
\begin{aligned}
x(0) &= c_1\begin{pmatrix}2\\0\\4\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}2\\-2\\0\\0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\1\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix}2&0&1&2\\0&0&-2&-2\\4&0&0&0\\-1&1&2&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix}2&0&1&2\\0&0&-2&-2\\4&0&0&0\\-1&1&2&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix} &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\8&8&-3&4\\-4&-4&2&0\\4&2&-2&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix} &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3\\8\cdot1+8\cdot2-3\cdot(-3)+4\cdot1\\(-4)\cdot1+(-4)\cdot2+2\cdot(-3)\\4\cdot1+2\cdot2-2\cdot(-3)\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{49}{4}\\-\frac{9}{2}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneos

Problema 3. Para el sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneo de primer orden

$$
\dot{X}=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\4t\end{bmatrix}
$$

Obtenga la solución general

Determinamos los valores y vectores propios

$$
\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix}2-\lambda&-1\\3&-2-\lambda\end{bmatrix} &= 0\\
(2-\lambda)(-2-\lambda)+3 &= 0\\
-4-2\lambda+2\lambda+\lambda^2+3 &= 0\\
\lambda^2-1 &= 0\\
\lambda^2 &= 1\\
\lambda &= \pm1
\end{aligned}
$$

Buscamos los vectores propios, primero para $\lambda = 1$ y luego para $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -1 \\ 3 & -2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego $x - y = 0 \to x = y$ por lo que $v_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ por lo que seleccionamos $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2+1 & -1 \\ 3 & -2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego $3x - y = 0 \to 3x = y$ por lo que $v_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 3x \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$ por lo que seleccionamos $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

——————————- 1 punto——————————-

Solución homogénea es

$$X_h = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t}$$

——————————-1 punto——————————-

lo cual se puede representar en términos de la matriz fundamental

$$X_h = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

el determinante de la matriz fundamental es $\det(X) = \det \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{bmatrix} = 2$ y la inversa $X^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{bmatrix}$

Por lo que ahora buscamos la solución particular

$$
\begin{aligned}
X_p &= X \int X^{-1} v dt \\
X_p &= \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{bmatrix} \int \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4t \end{bmatrix} dt \\
X_p &= \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} -2te^{-t} \\ 2te^t \end{bmatrix} dt \\
X_p &= \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{-t}(1+t) \\ 2e^t(t-1) \end{bmatrix} \\
X_p &= \begin{bmatrix} 2(1+t)+2(t-1) \\ 2(1+t)+6(t-1) \end{bmatrix} \\
X_p &= \begin{bmatrix} 4t \\ 8t-4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Por lo que la solución de la ecuación diferencial es

$$
\begin{aligned}
X &= X_h + X_p \\
X &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 4t \\ 8t-4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Problema. Resolver la siguiente ecuación diferencial