Ecuaciones diferenciales de primer orden

Leonardo Jofré Flor

25 de mayo de 2015

Índice

1. Soluciones de una ecuación diferencial

Ejercicio 1. Encuentre la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x) \\ dy &= f(x)\,dx \\ y &= \int f(x)\,dx + C \end{aligned}$$

La constante de integración dice que hay infinitas soluciones

Ejemplo 2. Verificar que $y = x^4/16$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$$

1. Comprobar que $y = xe^x$ es solución de la EDO $y'' - 2y' + y = 0$
2. Comprobar que $x^2 + y^2 = 4$ es solución de la EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$
3. Comprobar que $x_1 = c_1 \cos 4t$ y $x_2 = c_2 \sin 4t$ son soluciones de $x'' + 16x = 0$, y que $x_1 + x_2$ también es solución.

2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

2.1. Ecuaciones diferenciales de variable separable

Son todas aquellas ecuaciones diferenciales que se pueden separar en la forma

$$f(x)\, dx = g(y)\, dy$$

por lo tanto cono se puede resolver mediante una integral

$$\int f(x)\, dx = \int g(y)\, dy + \mathcal{C}$$

en donde $\mathcal{C}$ es una constante de integración.

1. Resuelva la ecuación diferencial $(1+x)\, dy - y dx = 0$
2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$
3. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$

2.2. Reducción a variable separables

Ecuaciones del tipo $\frac{dy}{dx} = \frac{f\left(\frac{\sum_i a_i x^i y^y}{\sum_i b_i x^i y^y}\right)}{x^2}$ se pueden transformar a una ecuación en variables separables dada la sustitución $z = \frac{y}{x}$

Teorema 3. *Toda ecuación diferencial de la forma* $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ *se puede reducir a una variable separable mediante la transformación* $u = ax + by + c$

Demostración. Consideremos la EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

Si consideramos $u = ax + by + c \implies \frac{du}{dx} = a + \frac{dy}{dx} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - a$ con lo que la ecuación queda

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} - a &= f(u) \\
\frac{du}{dx} &= f(u) + a \\
\frac{du}{f(u) + a} &= dx \\
\int \frac{du}{f(u) + a} &= x + C
\end{aligned}
$$

□

Problema 4 (EDO reducible a una de variable separable)**.** resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y + 1}$$

consideremos

$$u = x + y + 1$$

entonces $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ luego $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} - 1 &= \frac{1}{u} \\
\frac{du}{dx} &= \frac{1}{u} + 1 \\
\frac{du}{\frac{1}{u} + 1} &= dx \\
\frac{udu}{1 + u} &= dx \\
\left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du &= dx \\
&\text{integramos} \\
\int \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du &= \int dx + \mathcal{C} \\
u - \ln(u+1) &= x + \mathcal{C} \\
(x + y + 1) - \ln(x + y + 2) - x &= \mathcal{C}
\end{aligned}
$$

2.2.1. Ecuaciones diferenciales Homogéneas

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

que también puede ser representada por la forma

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

si cumple la siguiente condición

$$F(tx, ty) = F(x, y)$$

entonces la ecuación diferencial es Homogénea y esta se puede reducir a una variable separables mediante la transformación $y = ux$

Demostración. consideremos la ecuación diferencial ordinaria que sabemos es homogénea

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= F(x, y) \\
\frac{d(ux)}{dx} &= F(x, ux) \\
u + x\frac{du}{dx} &= F(1, u) \\
x\frac{du}{dx} &= F(1, u) - u \\
\frac{du}{F(1, u) - u} &= \frac{dx}{x} \\
\int \frac{du}{F(1, u) - u} &= \int \frac{dx}{x} + C
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 5. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Si consideramos $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ entonces podemos verificar que $F(tx, ty) = F(x, y)$

dejamos la ecuación en su forma estándar

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2+y^2}{xy} \\
xydy &= \left(x^2+y^2\right)dx \\
\text{remplazamos } y=ux & \\
x\left(ux\right)d\left(ux\right) &= \left(x^2+\left(ux\right)^2\right)dx \\
ux^2\left(xdu+udx\right) &= \left(x^2+\left(ux\right)^2\right)dx \\
ux^3du+u^2x^2dx &= x^2\left(1+u^2\right)dx \\
uxdu+u^2dx &= \left(1+u^2\right)dx \\
uxdu &= dx \\
udu &= \frac{dx}{x} \\
\int udu &= \int\frac{dx}{x}+\mathcal{C} \\
\frac{u^2}{2} &= \ln\left(x\right)+\mathcal{C} \\
\text{sabemos que } u=\frac{y}{x} & \\
\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2} &= \ln\left(x\right)+\mathcal{C}
\end{aligned}
$$

Problema 6. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\left(x-4y-9\right)dx+\left(4x+y-2\right)dy=0$$

La cual puede representarse de la siguiente manera

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x-4y-9}{4x+y-2}$$

es necesario encontrar la forma de eliminar las constantes, para ello debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x-4y-9 &= 0 \\
4x+y-2 &= 0
\end{aligned}
$$

las cuales tienen por solución $x_0=1$ e $y_0=-2$ con lo cual podemos hacer la sustitución $p=x-1$ y $q=y+2$

Al hacer esa sustitución, la ecuación diferencial nos queda de la siguiente manera

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{p-4q}{4p+q}$$

La cual es una ecuación diferencial homogénea [1]

luego, al ser homogénea podemos usar la sustitución $q = vp$ con lo cual nos queda la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{dv}{f(1,v)-v} &= \frac{dx}{x} \\ \frac{dv}{-\frac{1-4v}{4+v}-v} &= \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Problema 7 (Reducible a variable separables, rectas paralelas)**.** Cuando las rectas son paralelas, la ecuación se puede reducir a directamente a variables separables

$$y' = \frac{x-y-1}{x-y-2}$$

consideramos $z = x - y \to z' = 1 - y' \to y' = 1 - z'$, al reemplazar nos queda que

$$\begin{aligned} 1 - z' &= \frac{z-1}{z-2} \\ z' &= 1 - \frac{z-1}{z-2} \\ (z-2)\,dz &= -dx \end{aligned}$$

con lo que podemos obtener, al integrar y al deshacer el cambio $z = x - y$

$$(x-y-2)^2 + 2x = \mathcal{C}$$

2.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

Sea la ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$$

es llamada ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden.

Nota 8. Toda ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden es una ecuación diferencial que por medio de factor integrante se puede reducir a una ecuación diferencial exacta.

$$(p(x)\,y - q(x))\,dx + dy = 0$$

[1] Siempre la sustitución va a generar la misma ecuación pero trasladada al origen, y esta a su vez es siempre una ecuación diferencial homogénea

Demostración. El factor integrante

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{M_y - N_x}{N} dx\right) = \exp\left(\int p(x)\, dx\right)$$

con esto la ecuación diferencial queda definida por $\square$

$$\exp\left(\int p(x)\, dx\right)(p(x)\, y - q(x))\, dx + \exp\left(\int p(x)\, dx\right) dy = 0$$

y es exacta, luego existe una función f que cumple que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \exp\left(\int p(x)\, dx\right)(p(x)\, y - q(x)) \\ f &= \int \exp\left(\int p(x)\, dx\right)(p(x)\, y - q(x))\, dx + g(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \int \exp\left(\int p(x)\, dx\right)(p(x))\, dx + g'(y) \\ \exp\left(\int p(x)\, dx\right) &= \int \exp\left(\int p(x)\, dx\right) p(x)\, dx + g'(y) \end{aligned}$$

De esta forma podemos obtener la solución general, existen formas más rápidas tomando en consideración las formas diferenciales.

Solución general de la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden. Al multiplicar el factor integrante nos queda una ecuación diferencial de la siguiente forma

$$e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)dx} p(x)\, y = e^{\int p(x)dx} q(x)$$

la cual la expresión de la izquierda es la derivada de un producto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx} y\right] &= e^{\int p(x)dx} q(x) \\ d\left[e^{\int p(x)dx} y\right] &= e^{\int p(x)dx} q(x)\, dx \\ e^{\int p(x)dx} y &= \int e^{\int p(x)dx} q(x)\, dx + C \\ y(x) &= e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)\, dx + C\right) \end{aligned}$$

$\square$

Problema 9. Determine una función una solución continua para la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x)$$

en donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

entonces hay que resolver dos ecuaciones diferenciales hacer que el límite por la derecha y por la izquierda de dichas soluciones coincidan.

El cálculo $e^{\int dx} = e^x$ es el factor integrante, con lo que

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} f_1(x)\, dx + C_1 \right] \\ &= e^{-x} \left[\int e^x f_1(x)\, dx + C_1 \right] \end{aligned}$$

como en ese intervalo $f_1(x) = 1$ entonces

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-x} \left[\int e^x dx + C_1 \right] \\ &= e^{-x} \left[e^x + C_1 \right] \\ &= 1 + e^{-x} C_1 \end{aligned}$$

y en el segundo intervalo podemos

$$\begin{aligned} y_2(x) &= e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} f_2(x)\, dx + C_2 \right] \\ &= e^{-x} \left[\int e^x f_2(x)\, dx + C_2 \right] \\ &= e^{-x} [C_2] \\ &= C_2 e^{-x} \end{aligned}$$

al igualar las dos funciones en el límite $x = 1$ nos queda que

$$\begin{aligned} y_1(1) &= y_2(1) \\ e^{-1} C_1 &= 1 + C_2 e^{-1} \\ \frac{C_1}{e} &= 1 + \frac{C_2}{e} \\ C_1 + C_2 &= e \end{aligned}$$

con lo que la solución es

$$y(x) = \begin{cases} 1 + e^{-x}(C_2 - e) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ C_2 e^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2.4. Ecuación diferencial de Bernoulli

La ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)\, y^n$$

bajo la sustitución

$$z = y^{1-n} \to \frac{dz}{dx} = (1-n)\, y^{-n} \frac{dy}{dx} \to \frac{1}{(1-n)} \frac{dz}{dx} = y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

con ello, al dividir en la ecuación diferencial por ambos lados por y^n nos queda que

$$\begin{aligned}
y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)\, y^{1-n} &= q(x) \\
\frac{1}{(1-n)} \frac{dz}{dx} + p(x)\, z &= q(x) \\
\frac{dz}{dx} + (1-n)\, p(x)\, z &= (1-n)\, q(x)
\end{aligned}$$

que es una ecuación diferencial lineal con factor integrante $e^{\int (1-n)p(x)dx}$. al multiplicar a ambos lados por el factor integrante logramos la forma diferencial.

$$\begin{aligned}
e^{\int (1-n)p(x)dx} \frac{dz}{dx} + e^{\int (1-n)p(x)dx} (1-n)\, p(x)\, z &= e^{\int (1-n)p(x)dx} (1-n)\, q(x) \\
d\left[e^{\int (1-n)p(x)dx} z\right] &= e^{\int (1-n)p(x)dx} (1-n)\, q(x)\, dx \\
\text{integramos} & \\
e^{\int (1-n)p(x)dx} z &= \int e^{\int (1-n)p(x)dx} (1-n)\, q(x)\, dx + C \\
z &= e^{-\int (1-n)p(x)dx} \int e^{\int (1-n)p(x)dx} (1-n)\, q(x)\, dx + C \\
y^{1-n} &= e^{-\int (1-n)p(x)dx} \left(\int e^{\int (1-n)p(x)dx} (1-n)\, q(x)\, dx + C \right) \\
y(x) &= \sqrt[1-n]{e^{-\int (1-n)p(x)dx} \left(\int e^{\int (1-n)p(x)dx} (1-n)\, q(x)\, dx + C \right)} \\
y(x) &= \sqrt[1-n]{\frac{\left(\int e^{\int (1-n)p(x)dx} (1-n)\, q(x)\, dx + C\right)}{e^{\int (1-n)p(x)dx}}} \\
y(x) &= \sqrt[n-1]{\frac{e^{\int (1-n)p(x)dx}}{\int e^{\int (1-n)p(x)dx} (1-n)\, q(x)\, dx + C}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 10. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$x \frac{dy}{dx} + y = xy^2$$

Paras a su forma normal

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y &= y^2 \\
y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x^2}y^{-1} &= 1
\end{aligned}$$

bajo la sustitución $z=y^{-1}\to\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dz}\to-\frac{dz}{dx}=y^{-2}\frac{dy}{dz}$ y reemplazamos

$$\begin{aligned}
y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1} &= 1 \\
-\frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}z &= 1 \\
\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z &= -1
\end{aligned}$$

por lo que el factor integrante es $e^{-\int dx/x}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$ que general la forma diferencial

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x^2}z &= -1 \\
d\left[\frac{z}{x}\right] &= -dx \\
\text{integramos} & \\
\frac{z}{x} &= -x+C \\
z &= (-x+C)\,x \\
y^{-1} &= (-x+C)\,x \\
y &= \frac{1}{(C-x)\,x}
\end{aligned}$$

3. Anexos

3.1. Ecuaciones autónomas

Expondremos una aplicación al campo de pendiente para definir la estabilidad de las soluciones de una ecuación diferencial de la forma $\frac{dx}{dt}=f(x)$

3.2. Demostración de existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial.

3.3. Tablas de integrales