

# Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Leonardo Jofre, clases particulares Whatsapp: +56 9 7818 0331

6 de octubre de 2015

## 0.1. Ecuaciones lineales homogéneas

**Problema 0.1.1.** Resuelva las ecuaciones diferenciales siguientes:

1.  $2y'' - 5y' - 3y = 0$

2.  $y'' - 10y' + 25y = 0$

3.  $y'' + y' + y = 0$

Obtenemos las raíces de la ecuación auxiliar y con ello podremos obtener la solución de la ecuación diferencial

1.  $2m^2 - 5m - 3 = 0 \Rightarrow (2m + 1)(m - 3) = 0 \Rightarrow m_1 = -1/2, m_2 = 3 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{3x}$

2.  $m^2 - 10m + 25 = 0 \Rightarrow (m - 5)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 5 \Rightarrow y(x) = e^{5x}(c_1 + xc_2)$

3.  $m^2 + m + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow y(x) = e^{-x/2} \left( c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right)$

**Problema 0.1.2.** Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

en donde  $y(0) = -1$ , y además  $y'(0) = 2$

Las raíces de la ecuación auxiliar  $m^2 - 4m + 13 = 0$  son  $m_1 = 2 + 3i$  y  $m_2 = 2 - 3i$ , de modo que

$$y(x) = e^{2x}(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x))$$

Al aplicar las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}y(0) &= -1 \\e^{2 \cdot 0} (c_1 \cos(3 \cdot 0) + c_2 \sin(3 \cdot 0)) &= -1 \\c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) &= -1 \\c_1 &= -1\end{aligned}$$

$$y'(0) = 2$$

## 0.2. Coeficientes indeterminados, método de superposición

**Problema 0.2.1.** Resolver  $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$

al resolver la ecuación homogénea asociada  $y'' + 4y' - 2y = 0 \Rightarrow y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$

Como  $g(x)$  es un polinomio cuadrático asumimos que la solución particular también lo es

$$\begin{aligned}y_p &= Ax^2 + Bx + C \\y'_p &= 2Ax + B \\y''_p &= 2A\end{aligned}$$

Al evaluar en la ecuación nos queda que

$$-2Ax^2 + (8A - 2B)x + (2A + 4B - 2C) = 2x^2 - 3x + 6$$

Al resolver el sistema de ecuación nos queda que:  $A = -1$ ,  $B = -\frac{5}{2}$ ,  $C = -9$ , así remplazamos y nos queda que

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

**Problema 0.2.2.** Determine la solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - y' + y = 2 \sin(3x)$$

Como  $f(x) = 2 \sin(3x)$  entonces

$$\begin{aligned} y_p &= A \cos(3x) + B \sin(3x) \\ y_p' &= -3A \sin(3x) + 3B \cos(3x) \\ y_p'' &= -9A \cos(3x) - 9B \sin(3x) \end{aligned}$$

, luego al diferenciar  $y_p$  y sustituir en la ecuación diferencial, y luego factorizando:

$$(-8A - 3B) \cos(3x) + (3A - 8B) \sin(3x) = 2 \sin(3x)$$

con lo que se puede concluir que  $-8A - 3B = 0$  y además  $3A - 8B = 2$  con lo que obtenemos que  $A = \frac{6}{73}$  y  $B = -\frac{16}{73}$  por lo que la solución particular de esta ecuación diferencial es

$$y_p = \frac{6}{73} \cos(3x) - \frac{16}{73} \sin(3x)$$

**Problema 0.2.3.** Determinar la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 3y = 6xe^{-2x}$$

buscamos las soluciones de la ecuación característica para encontrar las soluciones de la ecuación homogénea:

$$\begin{aligned} m^2 + 4m + 3 &= 0 \\ m &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\ m &= \frac{-4 \pm 2}{2} \\ m &= -2 \pm 1 \end{aligned}$$

por lo que la solución de la ecuación homogénea está dada por  $y_h = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}$

la ecuación particular está definida como  $y_p = Axe^{-2x} + Be^{-2x}$  para poder conservar la independencia lineal entre las soluciones particulares y de la homogénea.

6

$$\begin{aligned} e^{2x} y_p &= Ax + B \\ e^{2x} y_p' + 2e^{2x} y_p &= A \\ e^{2x} y_p'' + 2e^{2x} y_p' + 2(e^{2x} y_p' + 2e^{2x} y_p) &= 0 \end{aligned}$$

Lo que es equivalente a

$$\begin{aligned} y_p &= e^{-2x} (Ax + B) \\ y_p' + 2y_p &= Ae^{-2x} \\ y_p'' + 4y_p' + 4y_p &= 0 \end{aligned}$$

La tercera ecuación se puede descomponer

$$\begin{aligned}y_p'' + 4y_p' + 4y_p &= 0 \\6xe^{-2x} + e^{-2x}(Ax + B) &= 0 \\6x + (Ax + B) &= 0\end{aligned}$$

por lo que  $A = -6$  y  $B = 0$   
por lo que la solución general es

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} - 6e^{-3x}$$

### 0.3. Método del anulador

El método del anulador es muy parecido al de los coeficientes indeterminados

### 0.4. Reducción de orden

*Resumen* 0.4.1. Si tenemos una ecuación diferencial de la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (0.4.1)$$

y además  $y_1$  es una solución conocida de la ecuación diferencial entonces la segunda solución está dada por:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(X)dx}}{y_1^2} dx \quad (0.4.2)$$

**Problema 0.4.2.** Dada

$$x \sin(x) y'' + (2 \sin(x) - x \cos(x)) y' - \cos(x) y = \sin(x) \cos(x) - x$$

no olvidando normalizar adecuadamente

$$\begin{aligned} y'' + \frac{(2 \sin(x) - x \cos(x))}{x \sin(x)} y' - \frac{\cos(x)}{x \sin(x)} y &= \frac{\sin(x) \cos(x) - x}{x \sin(x)} \\ y'' + \left( \frac{2}{x} - \cot(x) \right) y' - \frac{\cot(x)}{x} y &= \frac{\cos(x)}{x} - \csc(x) \end{aligned}$$

Obtener una solución de la ecuación homogénea de la forma  $y_1 = x^\alpha$ , para ello derivamos la cantidad que sean necesarias y remplazamos en la ecuación diferencial homogénea asociada.

$$\begin{aligned} y_1 &= x^\alpha \\ y_1' &= \alpha x^{\alpha-1} \\ y_1'' &= \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} \end{aligned}$$

reemplazamos en

$$\begin{aligned}
 y'' + \left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right) y' - \frac{\cot(x)}{x} y &= 0 \\
 \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right) \alpha x^{\alpha-1} - \frac{\cot(x)}{x} x^\alpha &= 0 \\
 \frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} x^\alpha + \frac{\left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right)}{x} \alpha x^\alpha - \frac{\cot(x)}{x} x^\alpha &= 0 \\
 &\text{dividir entre } x^\alpha \\
 \frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} + \frac{\left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right)}{x} \alpha - \frac{\cot(x)}{x} &= 0 \\
 &\text{multiplicar por } x^2 \\
 \alpha(\alpha-1) + \left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right) x\alpha - \cot(x)x &= 0 \\
 \alpha(\alpha-1) + (2 - \cot(x)x)\alpha - \cot(x)x &= 0 \\
 \alpha(\alpha-1) + 2\alpha - \cot(x)x\alpha - \cot(x)x &= 0 \\
 \alpha^2 - \alpha + 2\alpha - \cot(x)x(\alpha+1) &= 0 \\
 \alpha^2 + \alpha - \cot(x)x(\alpha+1) &= 0 \\
 (\alpha+1)\alpha - \cot(x)x(\alpha+1) &= 0 \\
 (\alpha+1)(\alpha - \cot(x)x) &= 0
 \end{aligned}$$

el lado derecho se anula cuando  $\alpha = -1$  por lo que la solución  $y_1 = x^{-1} = \frac{1}{x}$

mediante la ecuación de Abel, identificando primero que  $p(x) = \left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right)$  se puede obtener la solución  $y_2$



$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx \\
&= \frac{1}{x} \int \frac{e^{-\int (\frac{2}{x} - \cot(x))dx}}{\frac{1}{x^2}} dx \\
&= \frac{1}{x} \int x^2 e^{-\int (\frac{2}{x} - \cot(x))dx} dx \\
&= \frac{1}{x} \int x^2 e^{\ln(\frac{\sin(x)}{x^2})} dx \\
&= \frac{1}{x} \int x^2 \frac{\sin(x)}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{x} \int \sin(x) dx \\
&= -\frac{\cos(x)}{x}
\end{aligned}$$

Usando variación de parámetro buscamos solución particular

$$y'' + \left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right) y' - \frac{\cot(x)}{x} y = \frac{\cos(x)}{x} - \csc(x)$$

calculamos el Wronskiano de las soluciones de la ecuación homogénea (usamos

$$\begin{aligned}
W\left(\frac{1}{x}, -\frac{\cos(x)}{x}\right) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{\cos(x)}{x} \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{\cos(x)}{x^2} + \frac{\sin(x)}{x} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{\cos(x)}{x^2} + \frac{\sin(x)}{x}\right) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(-\frac{\cos(x)}{x}\right) \\
&= \frac{\sin(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

calculamos  $W_1$  y  $W_2$

$$\begin{aligned}
W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\cos(x)}{x} \\ \frac{\cos(x)}{x} - \csc(x) & \frac{\cos(x)}{x^2} + \frac{\sin(x)}{x} \end{vmatrix} \\
&= -\left(\frac{\cos(x)}{x} - \csc(x)\right) \cdot \left(-\frac{\cos(x)}{x}\right) \\
&= \frac{\cos^2(x) - x \cot(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{\cos(x)}{x} - \csc(x) \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{\cos(x)}{x} - \csc(x)\right) \\
&= \frac{\cos(x) - x \csc(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

calculamos  $u_1$  y  $u_2$

$$\begin{aligned}
u_1 &= \int \frac{\frac{\cos^2(x) - x \cot(x)}{x^2}}{\frac{\sin(x)}{x^2}} dx \\
u_1 &= \int \csc(x) (\cos^2(x) - x \cot(x)) dx \\
&= \cos(x) - x \csc(x) \\
\\
u_2 &= \int \frac{\frac{\cos(x) - x \csc(x)}{x^2}}{\frac{\sin(x)}{x^2}} dx \\
u_2 &= \int \csc(x) (\cos(x) - x \csc(x)) dx \\
&= x \cot(x)
\end{aligned}$$

por lo que la solución particular es

$$\begin{aligned}
y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\
y_p &= \frac{(\cos(x) - x \csc(x))}{x} + x \cot(x) \left( -\frac{\cos(x)}{x} \right)
\end{aligned}$$

**Problema 0.4.3.** La función  $y_1 = x^2$  es una solución de  $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ , determine la solución general

Partimos de la forma reducida de la ecuación,

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$$

y vemos que de acuerdo con 0.4.2 obtenemos que

$$\begin{aligned}
 y_2 &= x^2 \int \frac{e^{-\int (-\frac{3}{x}) dx}}{x^4} dx \\
 &= x^2 \int \frac{e^{3 \int dx/x}}{x^4} dx \\
 &= x^2 \int \frac{e^{3 \ln(x)}}{x^4} dx \\
 &= x^2 \int \frac{e^{\ln(x^3)}}{x^4} dx \\
 &= x^2 \int \frac{x^3}{x^4} dx \\
 &= x^2 \int \frac{1}{x} dx \\
 &= x^2 \ln(x)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general está definida por:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln(x)$$

**Problema 0.4.4.** Determine la segunda solución de la ecuación diferencial por medio de reducción de orden de la ecuación diferencial

$$y'' + 5y' = 0; y_1 = 1$$

Al pasar la ecuación diferencial a la forma estándar  $y'' + 5y' + 0y = 0$  con lo que identificamos que  $P(x) = 5$  con lo que

la segunda solución queda definida por:

$$\begin{aligned}
 y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx \\
 &= 1 \int \frac{e^{-\int 5dx}}{1^2} dx \\
 &= \int e^{-5 \int dx} dx \\
 &= \int e^{-5x} dx \\
 &= \frac{e^{-5x}}{-5} \\
 &= -\frac{e^{-5x}}{5}
 \end{aligned}$$

Verificamos si esta función es verdaderamente una solución de la ecuación diferencial tomando en consideración las derivadas sucesivas  $y_2 = -\frac{e^{-5x}}{5} \Rightarrow y_2' = e^{-5x} \Rightarrow y_2'' = -5e^{-5x}$ , luego al remplazarla en la ecuación diferencial nos queda que:

$$\begin{aligned}
 -5e^{-5x} + 5e^{-5x} &= 0 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la igualdad.

## 0.5. Ecuación de Cauchy-Euler

### 0.5.1. Problemas avanzados

Resolver el problema con condiciones iniciales  $xy'' + (2x - 1)y' - 2y = x^2e^{-3x}$  bajo las condiciones iniciales  $y(\frac{1}{2}) = y'(\frac{1}{2}) = 0$  sabiendo que  $y_1 = e^{mx}$  es solución para la ecuación homogénea.

reemplazando en la ecuación original se puede obtener el valor de  $m$  para la ecuación homogénea:

$$\begin{aligned} xy'' + (2x - 1)y' - 2y &= 0 \\ xm^2e^{mx} + (2x - 1)me^{mx} - 2e^{mx} &= 0 \\ xm^2 + (2x - 1)m - 2 &= 0 \\ x(m^2 + 2m) - (m + 2) &= 0 \\ m &= -2 \end{aligned}$$

Por lo que  $y_1 = e^{-2x}$

Como tenemos una de las soluciones de la ecuación homogénea de segundo orden podemos encontrar la segunda solución mediante la fórmula de Abel

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y^2} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int \frac{e^{-\int \frac{(2x-1)}{x} dx}}{e^{-4x}} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int \frac{e^{\int \frac{1-2x}{x} dx}}{e^{-4x}} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int \frac{e^{\int \frac{1}{x} - 2dx}}{e^{-4x}} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int \frac{e^{\ln(x)-2x}}{e^{-4x}} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int \frac{e^{\ln(x)} e^{-2x}}{e^{-4x}} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int x e^{2x} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \left( x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx \right) \\
y_2 &= e^{-2x} \left( x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \right) \\
y_2 &= \frac{1}{4} (2x - 1)
\end{aligned}$$