

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Leonardo Jofré Flor

4 de octubre de 2015

Índice

1. Soluciones de una ecuación diferencial	1
2. Ecuaciones diferenciales de primer orden	2
2.1. Ecuaciones diferenciales de variable separable	2
2.2. Reducción a variable separables	2
2.2.1. Ecuaciones diferenciales Homogéneas	4
2.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden	6
2.4. Ecuación diferencial de Bernoulli	8
3. Ecuación de Ricatti	11
4. Ecuación de Clairaut	12
5. Anexos	12
5.1. Ecuaciones autónomas	12
5.2. Demostración de existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial.	12
5.3. Tablas de integrales	12

1. Soluciones de una ecuación diferencial

Ejemplo 1. La forma de solucionar la siguiente ecuación diferencial es despejando las x y las y a cada lado de la ecuación y luego integrando. No siempre se puede hacer esto en todas las ecuaciones diferenciales de primer orden, pero este sería el caso más simple. Note también que la integral genera una constante de integración C que denota infinitas soluciones para esta ecuación diferencial. Para encontrar la constante de integración debemos imponer condiciones adicionales, llamadas condiciones iniciales, que es un punto de la curva por donde pasa la curva, como por ejemplo $y(0) = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x) \\ dy &= f(x) dx \\ y &= \int f(x) dx + C\end{aligned}$$

Ejemplo 2. Verificar que $y = x^4/16$ es solución de la ecuación diferencial: Consiste en encontrar y e y' desde la supuesta solución y constatar que la ecuación constituye una identidad.

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$$

1. Comprobar que $y = xe^x$ es solución de la EDO $y'' - 2y' + y = 0$
2. Comprobar que $x^2 + y^2 = 4$ es solución de la EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$
3. Comprobar que $x_1 = c_1 \cos 4t$ y $x_2 = c_2 \sin 4t$ son soluciones de $x'' + 16x = 0$, y que $x_1 + x_2$ también es solución.

2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

2.1. Ecuaciones diferenciales de variable separable

Son todas aquellas ecuaciones diferenciales que se pueden separar en la forma

$$f(x) dx = g(y) dy$$

por lo tanto cono se puede resolver mediante una integral

$$\int f(x) dx = \int g(y) dy + C$$

en donde C es una constante de integración.

1. Resuelva la ecuación diferencial $(1+x) dy - y dx = 0$
2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$
3. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$

2.2. Reducción a variable separables

Ecuaciones del tipo $\frac{dy}{dx} = \frac{f\left(\frac{\sum_i a_i x^i y^j}{\sum_i b_i x^i y^j}\right)}{x^2}$ se pueden transformar a una ecuación en variables separables dada la sustitución $z = \frac{y}{x}$

Teorema 3. Toda ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ se puede reducir a una variable separable mediante la transformación $u = ax + by + c$

Demostración. Consideremos la EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

Si consideramos $u = ax + by + c \implies \frac{du}{dx} = a + \frac{dy}{dx} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - a$ con lo que la ecuación queda

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} - a &= f(u) \\ \frac{du}{dx} &= f(u) + a \\ \frac{du}{f(u) + a} &= dx \\ \int \frac{du}{f(u) + a} &= x + C \end{aligned}$$

□

Problema 4 (EDO reducible a una de variable separable). resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y + 1}$$

consideremos

$$u = x + y + 1$$

entonces $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ luego $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} - 1 &= \frac{1}{u} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{u} + 1 \\ \frac{du}{\frac{1}{u} + 1} &= dx \end{aligned}$$

$$\frac{udu}{1 + u} = dx$$

$$\left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du = dx$$

integramos

$$\int \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du = \int dx + C$$

$$u - \ln(u+1) = x + C$$

$$(x + y + 1) - \ln(x + y + 2) - x = C$$

2.2.1. Ecuaciones diferenciales Homogéneas

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

que también puede ser representada por la forma

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

si cumple la siguiente condición

$$F(tx, ty) = F(x, y)$$

entonces la ecuación diferencial es Homogénea y esta se puede reducir a una variable separables mediante la transformación $y = ux$

Demostración. consideremos la ecuación diferencial ordinaria que sabemos es homogénea

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= F(x, y) \\ \frac{d(ux)}{dx} &= F(x, ux) \\ u + x \frac{du}{dx} &= F(1, u) \\ x \frac{du}{dx} &= F(1, u) - u \\ \frac{du}{F(1, u) - u} &= \frac{dx}{x} \\ \int \frac{du}{F(1, u) - u} &= \int \frac{dx}{x} + C\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Si consideramos $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ entonces podemos verificar que $F(tx, ty) = F(x, y)$, esto implica que mediante la sustitución $y = vx \implies \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ y además $f(x, y) = f(x, vx) = f(1, v)$

con lo que la ecuación diferencial queda

$$\begin{aligned}v + x \frac{dv}{dx} &= \frac{1}{v} + v \\x \frac{dv}{dx} &= \frac{1}{v} \\v dv &= \frac{dx}{x} \\\int v dv &= \int \frac{dx}{x} \\\frac{v^2}{2} &= \ln |x| + c \\\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2} &= \ln |x| + c\end{aligned}$$

Problema 6. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$(x - 4y - 9) dx + (4x + y - 2) dy = 0$$

La cual puede representarse de la siguiente manera

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - 4y - 9}{4x + y - 2}$$

es necesario encontrar la forma de eliminar las constantes, para ello debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x - 4y - 9 &= 0 \\4x + y - 2 &= 0\end{aligned}$$

las cuales tienen por solución $x_0 = 1$ e $y_0 = -2$ con lo cual podemos hacer la sustitución $p = x - 1$ y $q = y + 2$

Al hacer esa sustitución, la ecuación diferencial nos queda de la siguiente manera

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{p - 4q}{4p + q}$$

La cual es una ecuación diferencial homogénea ¹

luego, al ser homogénea podemos usar la sustitución $q = vp$ con lo cual nos queda la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\frac{dv}{f(1, v) - v} &= \frac{dx}{x} \\\frac{dv}{-\frac{1-4v}{4+v} - v} &= \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

¹Siempre la sustitución va a generar la misma ecuación pero trasladada al origen, y esta a su vez es siempre una ecuación diferencial homogénea

Problema 7 (Reducible a variable separables, rectas paralelas). Cuando las rectas son paralelas, la ecuación se puede reducir a directamente a variables separables

$$y' = \frac{x - y - 1}{x - y - 2}$$

consideramos $z = x - y \rightarrow z' = 1 - y' \rightarrow y' = 1 - z'$, al reemplazar nos queda que

$$\begin{aligned} 1 - z' &= \frac{z - 1}{z - 2} \\ z' &= 1 - \frac{z - 1}{z - 2} \\ (z - 2) dz &= -dx \end{aligned}$$

con lo que podemos obtener, al integrar y al deshacer el cambio $z = x - y$

$$(x - y - 2)^2 + 2x = C$$

2.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

Sea la ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

es llamada ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden.

Nota 8. Toda ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden es una ecuación diferencial que por medio de factor integrante se puede reducir a una ecuación diferencial exacta.

$$(p(x)y - q(x)) dx + dy = 0$$

Demostración. El factor integrante

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{M_y - N_x}{N} dx\right) = \exp\left(\int p(x) dx\right)$$

con esto la ecuación diferencial queda definida por

□

$$\exp\left(\int p(x) dx\right) (p(x)y - q(x)) dx + \exp\left(\int p(x) dx\right) dy = 0$$

y es exacta, luego existe una función f que cumple que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \exp\left(\int p(x) dx\right) (p(x)y - q(x)) \\
f &= \int \exp\left(\int p(x) dx\right) (p(x)y - q(x)) dx + g(y) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \int \exp\left(\int p(x) dx\right) (p(x)) dx + g'(y) \\
\exp\left(\int p(x) dx\right) &= \int \exp\left(\int p(x) dx\right) p(x) dx + g'(y)
\end{aligned}$$

De esta forma podemos obtener la solución general, existen formas más rápidas tomando en consideración las formas diferenciales.

Solución general de la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden. Al multiplicar el factor integrante nos queda una ecuación diferencial de la siguiente forma

$$e^{\int p(x) dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int p(x) dx} p(x)y = e^{\int p(x) dx} q(x)$$

la cual la expresión de la izquierda es la derivada de un producto

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left[e^{\int p(x) dx} y \right] &= e^{\int p(x) dx} q(x) \\
d \left[e^{\int p(x) dx} y \right] &= e^{\int p(x) dx} q(x) dx \\
e^{\int p(x) dx} y &= \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx + C \\
y(x) &= e^{-\int p(x) dx} \left(\int e^{\int p(x) dx} q(x) dx + C \right)
\end{aligned}$$

□

Problema 9. Determine una función una solución continua para la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x)$$

en donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

entonces hay que resolver dos ecuaciones diferenciales hacer que el límite por la derecha y por la izquierda de dichas soluciones coincidan.

El cálculo $e^{\int dx} = e^x$ es el factor integrante, con lo que

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} f_1(x) dx + C_1 \right] \\
&= e^{-x} \left[\int e^x f_1(x) dx + C_1 \right]
\end{aligned}$$

como en ese intervalo $f_1(x) = 1$ entonces

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= e^{-x} \left[\int e^x dx + C_1 \right] \\
&= e^{-x} [e^x + C_1] \\
&= 1 + e^{-x} C_1
\end{aligned}$$

y en el segundo intervalo podemos

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} f_2(x) dx + C_2 \right] \\
&= e^{-x} \left[\int e^x f_2(x) dx + C_2 \right] \\
&= e^{-x} [C_2] \\
&= C_2 e^{-x}
\end{aligned}$$

al igualar las dos funciones en el límite $x = 1$ nos queda que

$$\begin{aligned}
y_1(1) &= y_2(1) \\
e^{-1} C_1 &= 1 + C_2 e^{-1} \\
\frac{C_1}{e} &= 1 + \frac{C_2}{e} \\
C_1 + C_2 &= e
\end{aligned}$$

con lo que la solución es

$$y(x) = \begin{cases} 1 + e^{-x} (C_2 - e) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ C_2 e^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2.4. Ecuación diferencial de Bernoulli

La ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

bajo la sustitución

$$z = y^{1-n} \rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{1}{(1-n)} \frac{dz}{dx} = y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

se convierte en una ecuación lineal de primer orden:

$$\begin{aligned}y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x) y^{1-n} &= q(x) \\ \frac{1}{(1-n)} \frac{dz}{dx} + p(x) z &= q(x) \\ \frac{dz}{dx} + (1-n) p(x) z &= (1-n) q(x)\end{aligned}$$

Con factor integrante $e^{\int (1-n)p(x)dx}$. Generamos al derivada de producto

$$\begin{aligned}e^{\int (1-n)p(x)dx} \frac{dz}{dx} + e^{\int (1-n)p(x)dx} (1-n) p(x) z &= e^{\int (1-n)p(x)dx} (1-n) q(x) \\ d \left[e^{\int (1-n)p(x)dx} z \right] &= e^{\int (1-n)p(x)dx} (1-n) q(x) dx \\ \text{integrando} & \\ e^{\int (1-n)p(x)dx} z &= \int e^{\int (1-n)p(x)dx} (1-n) q(x) dx + C \\ \text{luego} & \\ y(x) &= \sqrt[n-1]{\frac{e^{\int (1-n)p(x)dx}}{\int e^{\int (1-n)p(x)dx} (1-n) q(x) dx + C}}\end{aligned}$$

Problema 10. Una regla dice que cierta variable económica $x(t)$ satisface la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x$. Suponiendo que $x(4) = 1$, determine $x(t)$. ¿Existe un valor (positivo) t_e de t (conocido como valor de equilibrio) para el cual $\frac{dx}{dt} = 0$? En ese caso ¿Cuánto vale $x(t_e)$? ¿ t_e da un valor máximo o un valor mínimo para $x(t)$?

La ecuación diferencial es una Bernoulli con $n = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sqrt{x} - \frac{1}{2}x \\ \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}x &= x^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

podemos identificar entonces que $p(x) = \frac{1}{2}$ y que $q(x) = 1$
por lo que para la sustitución $z = x^{1-n}$ nos queda entonces la ecuación diferencial lineal asociada

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} + (1-n) p(x) z &= (1-n) q(x) \\ \frac{dz}{dt} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} z &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ \frac{dz}{dt} + \frac{1}{4} z &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ecuación diferencial que tiene un factor integrante asociado

$$\begin{aligned}\mu(t) &= e^{\int \frac{1}{4} dt} \\ \mu(t) &= e^{\frac{t}{4}}\end{aligned}$$

la solución para z es entonces

$$\begin{aligned}z &= \frac{\int \mu \cdot \frac{1}{2} dt}{\mu} \\ z &= \frac{\int e^{\frac{t}{4}} \cdot \frac{1}{2} dt + c}{e^{\frac{t}{4}}} \\ z &= \frac{\int e^{\frac{t}{4}} dt + c}{2e^{\frac{t}{4}}} \\ z &= \frac{\frac{e^{\frac{t}{4}}}{4} + c}{2e^{\frac{t}{4}}} \\ x^{1-n} &= \frac{\frac{e^{\frac{t}{4}}}{4} + c}{2e^{\frac{t}{4}}} \\ x^{\frac{1}{2}} &= \frac{\frac{e^{\frac{t}{4}}}{4} + c}{2e^{\frac{t}{4}}} \\ x &= \left(\frac{\frac{e^{\frac{t}{4}}}{4} + c}{2e^{\frac{t}{4}}} \right)^2\end{aligned}$$

Aplicando las condiciones iniciales nos queda que

$$\begin{aligned}x(4) &= 1 \\ \left(\frac{1}{8} + c_1 e^{-\frac{4}{4}} \right)^2 &= 1 \\ \left(\frac{1}{8} + c_1 e^{-1} \right)^2 &= 1 \\ \left(\frac{1}{8} + \frac{c_1}{e} \right)^2 &= 1\end{aligned}$$

Ejemplo 11. Resolver la siguiente ecuación diferencial: Luego de pasarla a la forma estándar nos damos cuenta que es una ecuación de Bernoulli con $n = 2$. Conforme a ello hacemos la sustitución $z = y^{1-2} = y^{-1}$ para generar una ecuación lineal de primer orden.

$$x \frac{dy}{dx} + y = xy^2$$

Para su forma estándar

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y &= y^2 \\ y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2}y^{-1} &= 1\end{aligned}$$

bajo la sustitución $z = y^{-1} \rightarrow \frac{dz}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx} \rightarrow -\frac{dz}{dx} = y^{-2} \frac{dy}{dx}$ y reemplazamos

$$\begin{aligned} y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y^{-1} &= 1 \\ -\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x} z &= 1 \\ \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x} z &= -1 \end{aligned}$$

por lo que el factor integrante es $e^{-\int dx/x} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ que general la forma diferencial

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2} z &= -1 \\ d\left[\frac{z}{x}\right] &= -dx \end{aligned}$$

integramos

$$\begin{aligned} \frac{z}{x} &= -x + C \\ z &= (-x + C)x \\ y^{-1} &= (-x + C)x \\ y &= \frac{1}{(C - x)x} \end{aligned}$$

Una forma simplificada de plantear el problema, es solucionar el problema del tipo $\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x)$ sin necesidad de hacer las operaciones algebraicas desde la ecuación diferencial original.

3. Ecuación de Ricatti

La ecuación de Ricatti es de la forma $\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ con una solución particular conocida y_1 . la solución general de la ecuación es de la forma $y = y_1 + \frac{1}{z}$ donde z se obtiene solucionando la siguiente ecuación diferencial $\frac{dz}{dx} + (2p(x)y_1 + q(x))z = -p(x)$

Ejemplo. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y' = y^2 + \frac{2}{x}y + \frac{2}{x^2}$$

con la solución particular conocida $y_1 = -\frac{2}{x}$.

4. Ecuación de Clairaut

5. Anexos

5.1. Ecuaciones autónomas

Expondremos una aplicación al campo de pendiente para definir la estabilidad de las soluciones de una ecuación diferencial de la forma $\frac{dx}{dt} = f(x)$

5.2. Demostración de existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial.

5.3. Tablas de integrales