

Transformada de Laplace

Leonardo jofré, clases particulares +56 9 781 80 331

1 de octubre de 2015

Problema 1. Resuelva la siguiente ecuación diferencial por transformada de Laplace

$$y' - y = 1$$

con las siguientes condiciones iniciales $y(0) = 0$, asumiendo que $Y = Y(s)$

$$y' - y = 1$$

\mathcal{L}

$$\mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1\}$$

$$(s \cdot Y - y(0)) - Y = \frac{1}{s}$$

$$(s \cdot Y - 0) - Y = \frac{1}{s}$$

$$s \cdot Y - Y = \frac{1}{s}$$

$$Y(s-1) = \frac{1}{s}$$

$$Y = \frac{1}{s(s-1)}$$

fraccciones parciales

$$Y = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-1)}$$

$$\frac{1}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-1)}$$

$$1 = (s-1)A + sB$$

cuando $s = 0$ entonces $A = -1$ y cuando $s = 1$ entonces $B = 1$, por lo que

la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Y &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)} \\ \mathcal{L}^{-1} \\ y &= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} \\ y &= -1 + e^x \end{aligned}$$

Problema 2. Resuelva la siguiente ecuación diferencial por transformada de Laplace

$$y' + 2y = t$$

con $y(0) = -1$

$$\begin{aligned} y' + 2y &= t \\ \mathcal{L} \\ \mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{t\} \\ sY - y(0) + 2Y &= \frac{1}{s^2} \\ sY + 1 + 2Y &= \frac{1}{s^2} \\ Y(s+2) + 1 &= \frac{1}{s^2} \\ Y(s+2) &= \frac{1}{s^2} - 1 \\ Y(s+2) &= \frac{1-s^2}{s^2} \\ Y &= \frac{1-s^2}{s^2(s+2)} \end{aligned}$$

fracciones parciales

al desarrollarlo por fracciones parciales nos queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{1-s^2}{s^2(s+2)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} \\ 1-s^2 &= As(s+2) + B(s+2) + Cs^2 \end{aligned}$$

cuando $s = -2$ entonces $1 - 4 = 4C \implies C = -\frac{3}{4}$; cuando $s = 0$ entonces $1 = 2B \implies B = \frac{1}{2}$, por lo que la ecuación queda como:

$$1-s^2 = As(s+2) + \frac{1}{2}(s+2) - \frac{3}{4}s^2$$

cuando $s = 1$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &= 3A + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \\ 0 &= 3A + \frac{3}{4} \\ A &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} Y &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} \\ Y &= \frac{-\frac{1}{4}}{s} + \frac{-\frac{1}{2}}{s^2} + \frac{-\frac{3}{4}}{s+2} \\ \mathcal{L}^{-1} \\ y(t) &= -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ y(t) &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}e^{-2t} \end{aligned}$$

Problema 3. Resuelva la siguiente ecuación diferencial por transformada de Laplace con las condiciones iniciales $y(0) = 2$

$$\begin{aligned} y' + 4y &= e^{-4t} \\ \mathcal{L} \\ \mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{e^{-4t}\} \\ sY - y(0) + 4Y &= \frac{1}{s+4} \\ sY - 2 + 4Y &= \frac{1}{s+4} \\ sY + 4Y &= \frac{1}{s+4} + 2 \\ Y(s+4) &= \frac{1+2s+8}{s+4} \\ Y(s+4) &= \frac{2s+9}{s+4} \\ Y &= \frac{2s+9}{(s+4)^2} \end{aligned}$$

fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{2s+9}{(s+4)^2} &= \frac{A}{s+4} + \frac{B}{(s+4)^2} \\ 2s+9 &= A(s+4) + B \end{aligned}$$

cuando $s = -4$ entonces $B = 1$ por lo que la ecuación queda de la siguiente manera

$$2s + 9 = A(s + 4) + 1$$

luego cuando $s = 0$ entonces $9 = 4A + 1 \implies A = 2$
por lo que

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2s + 9}{(s + 4)^2} \\ Y &= \frac{A}{s + 4} + \frac{B}{(s + 4)^2} \\ Y &= \frac{2}{s + 4} + \frac{1}{(s + 4)^2} \\ \mathcal{L}^{-1} \\ y &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 4)^2}\right\} \end{aligned}$$

utilizando el primer teorema de traslación $\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 4)^2}\right\} \\ y(t) &= 2e^{-4t} + e^{-4t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ y(t) &= 2e^{-4t} + e^{-4t}t \end{aligned}$$

Problema 4. Resuelva la siguiente ecuación diferencial por transformada de Laplace con las condiciones iniciales $y(0) = 0$

$$\begin{aligned} y' - y &= \sin(t) \\ \mathcal{L} \\ \mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{\sin(t)\} \\ sY - y(0) - Y &= \frac{1}{s^2 + 1^2} \\ sY - 0 - Y &= \frac{1}{s^2 + 1^2} \\ Y(s - 1) &= \frac{1}{s^2 + 1} \\ Y &= \frac{1}{(s^2 + 1)(s - 1)} \end{aligned}$$

fracciones parciales

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s^2+1)(s-1)} &= \frac{A}{(s^2+1)} + \frac{B}{(s-1)} \\ 1 &= A(s-1) + B(s^2+1)\end{aligned}$$

cuando $s = 1$ entonces $B = \frac{1}{2}$ y cuando $s = 0$ entonces $1 = -A + B$, como conocemos el valor de B , entonces $1 = -A + \frac{1}{2} \implies A = -\frac{1}{2}$, luego

$$\begin{aligned}Y &= \frac{1}{(s^2+1)(s-1)} \\ Y &= \frac{A}{(s^2+1)} + \frac{B}{(s-1)} \\ Y &= \frac{-\frac{1}{2}}{(s^2+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(s-1)} \\ \mathcal{L}^{-1} \\ y(t) &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} \\ y(t) &= -\frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}e^t\end{aligned}$$