Ecuaciones diferenciales

Leonardo Jofré Flor

22 de marzo de 2015

Índice

Resumen

El objetivo de curso es introducir al alumno los conceptos y métodos básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias mostrando sus diversas aplicaciones en distintos ámbitos de la Ingeniería. El curso analiza en detalle las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y diversos métodos de resolución. También presenta herramientas del análisis cualitativo de las soluciones. En el presente texto preparado espacialmente para el curso se entregan los procedimientos básicos y ejercicios propuestos que el alumno debe desarrollar.

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales son un tipo de ecuaciones cuya solución son el espacio de las funciones. Estas ecuaciones aparecen desde la física cuando se intenta modelar sistemas dinámicos. Las ecuaciones diferenciales nacen al intentar encontrar leyes que no relacionan de forma simple las magnitudes, si no más bien, la dependencia entre la magnitud buscada y sus derivadas.

Ejercicio 1. Encuentre la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= f(x) \\
dy &= f(x)\,dx \\
y &= \int f(x)\,dx + C
\end{aligned}$$

La constante de integración dice que hay infinitas soluciones

Ejemplo 2. Verificar que $y = x^4/16$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$$

1. Comprobar que $y = xe^x$ es solución de la EDO $y'' - 2y' + y = 0$
2. Comprobar que $x^2 + y^2 = 4$ es solución de la EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$
3. Comprobar que $x_1 = c_1 \cos 4t$ y $x_2 = c_2 \sin 4t$ son soluciones de $x'' + 16x = 0$, y que $x_1 + x_2$ también es solución.

2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

2.1. Ecuaciones diferenciales de variable separable

Son todas aquellas ecuaciones diferenciales que se pueden separar en la forma

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy$$

por lo tanto cono se puede resolver mediante una integral

$$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy + \mathcal{C}$$

en donde $\mathcal{C}$ es una constante de integración.

Teorema 3. *Toda ecuación diferencial de la forma* $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ *se puede reducir a una variable separable mediante la transformación* $u = ax + by + c$

Demostración. Consideremos la EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

Si consideramos $u = ax + by + c \implies \frac{du}{dx} = a + \frac{dy}{dx} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - a$ con lo que la ecuación queda

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} - a &= f(u) \\
\frac{du}{dx} &= f(u) + a \\
\frac{du}{f(u) + a} &= dx \\
\int \frac{du}{f(u) + a} &= x + C
\end{aligned}
$$

□

Problema 4 (EDO reducible a una de variable separable)**.** resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y + 1}$$

consideremos

$$u = x + y + 1$$

entonces $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ luego $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} - 1 &= \frac{1}{u} \\
\frac{du}{dx} &= \frac{1}{u} + 1 \\
\frac{du}{\frac{1}{u} + 1} &= dx \\
\frac{udu}{1 + u} &= dx \\
\left(1 - \frac{1}{u + 1}\right) du &= dx \\
\text{integramos} & \\
\int \left(1 - \frac{1}{u + 1}\right) du &= \int dx + \mathcal{C} \\
u - \ln(u + 1) &= x + \mathcal{C} \\
(x + y + 1) - \ln(x + y + 2) - x &= \mathcal{C}
\end{aligned}
$$

2.2. Ecuaciones diferenciales reducibles a variables separables

Existen ecuaciones diferenciales que no son de variables separables pero que mediante un cambio de variable se pueden reducir a estas

2.2.1. Ecuaciones diferenciales Homogéneas

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

también puede ser representada por la forma

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

si

$$F(tx,ty) = F(x,y)$$

entonces la ecuación diferencial es Homogénea y esta se puede reducir a una variable separables mediante la transformación $y = ux$

Demostración. consideremos la ecuación diferencial ordinaria que sabemos es homogénea

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= F(x,y) \\
\frac{d(ux)}{dx} &= F(x,ux) \\
u + x\frac{du}{dx} &= F(1,u) \\
x\frac{du}{dx} &= F(1,u) - u \\
\frac{du}{F(1,u)-u} &= \frac{dx}{x} \\
\int \frac{du}{F(1,u)-u} &= \int \frac{dx}{x} + C
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5 (Ecuación diferencial homogénea)**.** Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Si consideramos $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ entonces podemos verificar que $F(tx,ty) = F(x,y)$

dejamos la ecuación en su forma estándar

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2+y^2}{xy} \\
xydy &= \left(x^2+y^2\right)dx \\
\text{remplazamos } y=ux & \\
x\left(ux\right)d\left(ux\right) &= \left(x^2+\left(ux\right)^2\right)dx \\
ux^2\left(xdu+udx\right) &= \left(x^2+\left(ux\right)^2\right)dx \\
ux^3du+u^2x^2dx &= x^2\left(1+u^2\right)dx \\
uxdu+u^2dx &= \left(1+u^2\right)dx \\
uxdu &= dx \\
udu &= \frac{dx}{x} \\
\int udu &= \int\frac{dx}{x}+\mathcal{C} \\
\frac{u^2}{2} &= \ln\left(x\right)+\mathcal{C} \\
\text{sabemos que } u=\frac{y}{x} & \\
\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2} &= \ln\left(x\right)+\mathcal{C}
\end{aligned}
$$

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\left(x-4y-9\right)dx+\left(4x+y-2\right)dy=0$$

es necesario encontrar la forma de eliminar las constantes, para ello debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x-4y-9 &= 0 \\
4x+y-2 &= 0
\end{aligned}
$$

las cuales tienen por solución $x_0=1$ e $y_0=-2$ con lo cual podemos hacer la sustitución $X=x-1$ y $Y=y+2$

$$
\begin{aligned}
(X+1-4(Y-2)-9)\,dX+(4(X+1)+(Y-2)-2)\,dY &= 0\\
(X-4Y)\,dX+(4X+Y)\,dY &= 0\\
\text{Sustituimos } Y=UX & \\
(X-4UX)\,dX+(4X+UX)\,d(UX) &= 0\\
(1-4U)\,dX+(4+U)\,d(UX) &= 0\\
(1-4U)\,dX+(4+U)(XdU+UdX) &= 0\\
\left(1-4U+4U+U^2\right)dX+X(4+U)\,dU &= 0\\
\left(1+U^2\right)dX+X(4+U)\,dU &= 0\\
\frac{dX}{X}+\frac{4+U}{1+U^2}dU &= 0\\
\frac{dX}{X}+\frac{4}{1+U^2}dU+\frac{U}{1+U^2}dU &= 0\\
\text{Integrar} & \\
\int\frac{dX}{X}+4\int\frac{1}{1+U^2}dU+\int\frac{U}{1+U^2}dU &= 0\\
\ln(X)+4\arctan(U)+2\ln\left(U^2+1\right) &= \mathcal{C}\\
\ln(x-1)+4\arctan\left(\frac{y+2}{x-1}\right)+2\ln\left(\left(\frac{y+2}{x-1}\right)^2+1\right) &= \mathcal{C}
\end{aligned}
$$

Problema 6 (Reducible a homogéneas, rectas paralelas)**.** Resuelva

$$y'=\frac{x-y-1}{x-y-2}$$

consideramos $z=x-y\to z'=1-y'\to y'=1-z'$, al reemplazar nos queda que

$$
\begin{aligned}
1-z' &= \frac{z-1}{z-2}\\
z' &= 1-\frac{z-1}{z-2}\\
(z-2)\,dz &= -dx
\end{aligned}
$$

con lo que podemos obtener, al integrar y al deshacer el cambio $z=x-y$

$$(x-y-2)^2+2x=\mathcal{C}$$

2.3. Ecuación diferencial exacta

Una ecuación diferencial exacta es aquella que se puede representar como una difencial total.

$$z = f(x,y) = c \implies dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

un ejemplo de ecuación diferencial exacta puede ser

$$2xydx + \left(x^2 - 1\right)dy = 0$$

En general cualquier ecuación de la forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dx = 0$$

es una ecuación diferencial exacta si se cumple la siguiente condición que garantiza que es la representación de la diferencial total de alguna función

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Teorema (Clairaut-Schwartz). *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y además se cumple que $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ se cumple que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Gracias a este teorema podemos obtener un algoritmo para resolver cualquier ecuación diferencial exacta.

Ejemplo 7. Resolver la siguiente ecuación diferencial exacta

$$2xydx + \left(x^2 - 1\right)dy = 0$$

Observamos que $M(x,y) = 2xy$, además $N(x,y) = x^2 - 1$, por lo que debemos verificar la condición

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

esto quiere decir que existe un f que cumple

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

consideremos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= M\left(x,y\right) \\
f &= \int 2xydx + g\left(y\right) \\
f &= 2y\int xdx + g\left(y\right) \\
f &= x^2y + g\left(y\right) \\
\text{derivarmos parcialmente en } y & \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + g'\left(y\right) \\
x^2-1 &= x^2 + g'\left(y\right) \\
g'\left(y\right) &= -1 \\
g\left(y\right) &= -y
\end{aligned}
$$

finalmente se deduce que

$$x^2y - y = 0$$

es la solución a la ecuación diferencial exacta, esto lo podemos verificar mediante

$$
\begin{aligned}
d\left(x^2y-y\right) &= 0 \\
yd\left(x^2\right) + x^2dy - dy &= 0 \\
2xydx + \left(x^2-1\right)dy &= 0
\end{aligned}
$$

2.4. Factor de integración

Ocurre a veces que no se cumple la condición de ecuación diferencial exacta, por lo que hay que construir la ecuación. Para construir la condición de exactitud se puede encontrar y multiplicar una función que hace que se cumpla la exactitud, dicha función se llama factor integrante.

Definición 8 (Factor integrante)**.** Si la ecuación diferencial $M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy = 0$ no es una ecuación diferencial exacta pero la ecuación diferencial $\mu\left(x,y\right)M\left(x,y\right)dx+\mu\left(x,y\right)N\left(x,y\right)dy = 0$ si lo es, entonces se dice que la función $\mu\left(x,y\right)$ es un factor integrante de la ecuación diferencial.

Teorema 9. *Si la función*

$$\left(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x\right)/N$$

solo depende de x entonces la función

$$\mu\left(x\right) = \exp\left(\int\left(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x\right)/N\right)dx$$

es un factor integrante y si la función

$$\left(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y\right)/M$$

solo depende de y entonces la función

$$\mu\left(y\right) = \exp\left(\int\left(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y\right)/M\right)dy$$

es un factor integrante también.

Demostración. Consideremos el caso en que el factor integrante solamente es en función de x, la nueva ecuación diferencial es de la forma

$$\mu\left(x\right)M\left(x,y\right)dx + \mu\left(x\right)N\left(x,y\right) = 0$$

para que sea exacta se debe de cumplir que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\mu\left(x\right)M\left(x,y\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\mu\left(x\right)N\left(x,y\right) \\
\mu\left(x\right)\frac{\partial}{\partial y}M\left(x,y\right) &= N\left(x,y\right)\frac{\partial}{\partial x}\mu\left(x\right) + \mu\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x}N\left(x,y\right) \\
\mu\left(x\right)\left(\frac{\frac{\partial}{\partial y}M\left(x,y\right) - \frac{\partial}{\partial x}N\left(x,y\right)}{N\left(x,y\right)}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\mu\left(x\right)
\end{aligned}$$

□

Hay que tener en consideración que estas dos formulas no son las únicas para obtener factores integrantes.

Ejercicio 10. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\left(2x^2 + y\right)dx + \left(x^2y - x\right)dy = 0$$

Tenemos que $2x^2 + y = M\left(x,y\right) \to 1 = \partial M/\partial y$ y también que $x^2y - x = N\left(x,y\right) \to 2xy - 1 = \partial N/\partial y$. No es exacta.

Buscamos cada uno de las funciones

$$\begin{aligned}
\left(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x\right)/N &= \frac{1 - \left(2xy - 1\right)}{x^2y - x} \\
&= -\frac{2}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu\left(x\right) &= e^{-2\int\frac{1}{x}dx} \\
&= x^{-2}
\end{aligned}$$

es un factor integrantes.

$$x^{-2}\left(2x^2 + y\right)dx + x^{-2}\left(x^2y - x\right)dy = 0$$

2.5. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

Sea la ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$$

es llamada ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden.

Nota 11. Toda ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden es una ecuación diferencial que por medio de factor integrante se puede reducir a una ecuación diferencial exacta.

$$(p(x)\,y - q(x))\,dx + dy = 0$$

Demostración. El factor integrante

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{M_y - N_x}{N} dx\right) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right)$$

con esto la ecuación diferencial queda definida por □

$$\exp\left(\int p(x)\,dx\right)(p(x)\,y - q(x))\,dx + \exp\left(\int p(x)\,dx\right)dy = 0$$

y es exacta, luego existe una función f que cumple que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \exp\left(\int p(x)\,dx\right)(p(x)\,y - q(x)) \\
f &= \int \exp\left(\int p(x)\,dx\right)(p(x)\,y - q(x))\,dx + g(y) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \int \exp\left(\int p(x)\,dx\right)(p(x))\,dx + g'(y) \\
\exp\left(\int p(x)\,dx\right) &= \int \exp\left(\int p(x)\,dx\right)p(x)\,dx + g'(y)
\end{aligned}$$

De esta forma podemos obtener la solución general, existen formas más rápidas tomando en consideración las formas diferenciales.

Solución general de la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden. Al multiplicar el factor integrante nos queda una ecuación diferencial de la siguiente forma

$$e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)dx}p(x)\,y = e^{\int p(x)dx}q(x)$$

la cual la expresión de la izquierda es la derivada de un producto

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right] &= e^{\int p(x)dx}q(x) \\
d\left[e^{\int p(x)dx}y\right] &= e^{\int p(x)dx}q(x)\,dx \\
e^{\int p(x)dx}y &= \int e^{\int p(x)dx}q(x)\,dx + C \\
y(x) &= e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)\,dx + C\right)
\end{aligned}
$$

$\square$

Problema 12. Determine una función una solución continua para la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x)$$

en donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

entonces hay que resolver dos ecuaciones diferenciales hacer que el límite por la derecha y por la izquierda de dichas soluciones coincidan.

El cálculo $e^{\int dx} = e^x$ es el factor integrante, con lo que

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}f_1(x)\,dx + C_1\right] \\
&= e^{-x}\left[\int e^x f_1(x)\,dx + C_1\right]
\end{aligned}
$$

como en ese intervalo $f_1(x) = 1$ entonces

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= e^{-x}\left[\int e^x dx + C_1\right] \\
&= e^{-x}\left[e^x + C_1\right] \\
&= 1 + e^{-x}C_1
\end{aligned}
$$

y en el segundo intervalo podemos

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}f_2(x)\,dx + C_2\right] \\
&= e^{-x}\left[\int e^x f_2(x)\,dx + C_2\right] \\
&= e^{-x}\left[C_2\right] \\
&= C_2e^{-x}
\end{aligned}
$$

al igualar las dos funciones en el límite $x = 1$ nos queda que

$$\begin{aligned} y_1(1) &= y_2(1) \\ e^{-1}C_1 &= 1 + C_2 e^{-1} \\ \frac{C_1}{e} &= 1 + \frac{C_2}{e} \\ C_1 + C_2 &= e \end{aligned}$$

con lo que la solución es

$$y(x) = \begin{cases} 1 + e^{-x}(C_2 - e) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ C_2 e^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. Ecuación diferencial de Bernoulli

La ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)\,y^n$$

bajo la sustitución

$$z = y^{1-n} \rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

con ello, al dividir en la ecuación diferencial por ambos lados por y^n nos queda que

$$\begin{aligned} y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)\,y^{1-n} &= q(x) \\ \frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dx} + p(x)\,z &= q(x) \\ \frac{dz}{dx} + (1-n)\,p(x)\,z &= (1-n)\,q(x) \end{aligned}$$

que es una ecuación diferencial lineal con factor integrante $e^{\int(1-n)p(x)dx}$. al multiplicar a ambos lados por el factor integrante logramos la forma diferencial.

$$\begin{aligned}
e^{\int(1-n)p(x)dx}\frac{dz}{dx}+e^{\int(1-n)p(x)dx}(1-n)\,p(x)\,z &= e^{\int(1-n)p(x)dx}(1-n)\,q(x)\\
d\left[e^{\int(1-n)p(x)dx}z\right] &= e^{\int(1-n)p(x)dx}(1-n)\,q(x)\,dx\\
\text{integramos}&\\
e^{\int(1-n)p(x)dx}z &= \int e^{\int(1-n)p(x)dx}(1-n)\,q(x)\,dx+C\\
z &= e^{-\int(1-n)p(x)dx}\int e^{\int(1-n)p(x)dx}(1-n)\,q(x)\,dx+C\\
y^{1-n} &= e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left(\int e^{\int(1-n)p(x)dx}(1-n)\,q(x)\,dx+C\right)\\
y(x) &= \sqrt[1-n]{e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left(\int e^{\int(1-n)p(x)dx}(1-n)\,q(x)\,dx+C\right)}\\
y(x) &= \sqrt[1-n]{\frac{\left(\int e^{\int(1-n)p(x)dx}(1-n)\,q(x)\,dx+C\right)}{e^{\int(1-n)p(x)dx}}}\\
y(x) &= \sqrt[n-1]{\frac{e^{\int(1-n)p(x)dx}}{\int e^{\int(1-n)p(x)dx}(1-n)\,q(x)\,dx+C}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 13. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx}+y=xy^2$$

Paras a su forma normal

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y &= y^2\\
y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x^2}y^{-1} &= 1
\end{aligned}$$

bajo la sustitución $z=y^{-1}\to\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dz}\to-\frac{dz}{dx}=y^{-2}\frac{dy}{dz}$ y reemplazamos

$$\begin{aligned}
y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1} &= 1\\
-\frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}z &= 1\\
\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z &= -1
\end{aligned}$$

por lo que el factor integrante es $e^{-\int dx/x}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$ que general la forma diferencial

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x^2}z &= -1\\
d\left[\frac{z}{x}\right] &= -dx
\end{aligned}$$

integramos

$$\begin{aligned}
\frac{z}{x} &= -x+C\\
z &= (-x+C)\,x\\
y^{-1} &= (-x+C)\,x\\
y &= \frac{1}{(C-x)\,x}
\end{aligned}$$