Trabajo ecuaciones diferenciales

Prof: Gustavo Ceballos
Ayudante: Leonardo Jofré

9 de octubre de 2015

El objetivo de este trabajo es profundizar los conocimientos de la asignatura mediante le investigación sobre sus tópicos. Desarróllelo tomando en cuenta que estos contenidos serán eventualmente evaluados. La cantidad de integrantes es a lo más de dos personas por trabajo.

Problema 1 (Un problema aplicado)**.** Una lancha a motor se mueve en agua calma con velocidad de $10\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A plena carrera el motos fue apagado, y después de 20seg la velocidad de la lancha disminuyó hasta $v_1 = 6\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Determinar la velocidad de la lancha a dos minutos después de parar el motor, considerando que la resistencia del agua es proporcional al movimiento de la lancha.

Aplicando la segunda ley de Newton

$$m\frac{dv}{dt} = -kv$$

La cual es una ecuación en variables separables, de tal manera que

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt$$

integrando nos queda que

$$\begin{aligned} m\int\frac{dv}{v} &= -k\int dt \\ \ln(v) &= -\frac{k}{m}t + c \\ v &= e^{-\frac{k}{m}t+c} \\ v &= v_0 e^{-\frac{k}{m}t} \end{aligned}$$

que luego de aplicar las condiciones iniciales nos queda que $v(0) = 10$ y $v(20) = 6$ con lo que se genera el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

Problema 2 (Función Gamma)**.** La función gamma se define mediante la siguiente integral

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

con $\alpha > 0$. Demuestre que

$$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha}\right\} = \frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{s^{\alpha+1}}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha}\right\} = \int_{0}^{\infty} t^{\alpha} e^{-st} dt$$

si consideramos $u = st$ por lo que $t = \frac{u}{s}$ y $dt = \frac{du}{s}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^{\alpha}\right\} &= \int_{0}^{\infty} \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha} e^{-u} \frac{du}{s} \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{u^{\alpha}}{s^{\alpha}} e^{-u} \frac{du}{s} \\
&= \frac{\int_{0}^{\infty} u^{\alpha} e^{-u} du}{s^{\alpha+1}} \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{s^{\alpha+1}}
\end{aligned}$$

Problema 3 (demostración)**.** Demostrar que si $\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = F\left(s\right)$ entonces

$$\mathcal{L}\left\{t^{n} f\left(t\right)\right\} = \left(-1\right)^{n} \frac{d^{n}}{ds^{n}} F\left(s\right)$$

$$\mathcal{L}\left\{t^{n} f\left(t\right)\right\} = \int t^{n} f\left(t\right) e^{-st} dt$$

al aplicar integración por partes nos queda que

Problema 4 (¿Coeficientes no constantes y Laplace?)**.** Resolver la siguiente ecuación diferencial mediante transformada de Laplace: $y'' - ty' + y = 1$ bajo las condiciones iniciales $y\left(0\right) = 1$, $y'\left(0\right) = 2$. Hint: Use la demostración del problema 3.