Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

13 de junio de 2015

Se pueden suceder las siguientes situaciones

1. Valores propios distintos
2. Valores propios iguales que generan vectores propios distintos
3. Valores propios iguales que generan vectores propios iguales
4. Valores propios complejos conjugados

Problema 1 (Valores propios distintos)**.** Resuelva

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x+3y\\ \frac{dy}{dt} &= 2x+y\end{aligned}$$

podemos representarlo de forma matricial

$$\begin{bmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

para obtener los valores propios debemos resolver el siguiente determinante

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}2-\lambda & 3\\ 2 & 1-\lambda\end{bmatrix} &= 0\\ \lambda^2-3\lambda-4 &= 0\\ (\lambda+1)(\lambda-4) &= 0\end{aligned}$$

buscamos los valores propios

por lo que los valores propios son $\lambda_1=-1$ y $\lambda_2=4$, cada uno de estos tiene un vector propio asociado $\mathcal{K}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ y $\mathcal{K}_2=\begin{bmatrix}3\\ 12\end{bmatrix}$ por lo que la solución del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}e^{-t}+c_2\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}e^{4t}$$

Nos damos cuenta de que cada solución es la combinación lineal

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t}$$

Problema 2 (Valores propios iguales que generan vectores propios distintos)**.** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -3 & 2 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} X$$

Buscamos los valores y vectores propios

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 6-\lambda & 6 & -3 & 2 \\ -4 & -4-\lambda & 2 & 0 \\ 8 & 7 & -4-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ \lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 &= 0 \end{aligned}$$

por lo que tenemos los siguientes valores propios $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ y $\lambda_{3,4} = -1 \pm i$ por lo que resta calcular los vectores propios:

para $\lambda_1 = -1 + i$

Dada la solución

$$
\begin{aligned}
x(0) &= c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & -3 & 4 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \cdot 1 + 8 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 \\ (-4) \cdot 1 + (-4) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{49}{4} \\ -\frac{9}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$