1 Ecuación diferencial exacta

Una ecuación diferencial exacta es aquella que se puede representar como una difencial total.

$$z = f(x, y) = c \implies dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

un ejemplo de ecuación diferencial exacta puede ser

$$2xydx + \left(x^2 - 1\right) dy = 0$$

En general cualquier ecuación de la forma

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dx = 0$$

es una ecuación diferencial exacta si se cumple la siguiente condición que garantiza que es la representación de la diferencial total de alguna función

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Teorema (Clairaut-Schwartz). *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y además se cumple que $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ se cumple que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Gracias a este teorema podemos obtener un algoritmo para resolver cualquier ecuación diferencial exacta.

Ejemplo 1. Resolver la siguiente ecuación diferencial exacta

$$2xydx + \left(x^2 - 1\right) dy = 0$$

Observamos que $M(x, y) = 2xy$, además $N(x, y) = x^2 - 1$, por lo que debemos verificar la condición

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

esto quiere decir que existe un f que cumple

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

consideremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= M(x,y) \\
f &= \int 2xydx + g(y) \\
f &= 2y\int xdx + g(y) \\
f &= x^2y + g(y) \\
\text{derivarmos parcialmente en } y & \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + g'(y) \\
x^2 - 1 &= x^2 + g'(y) \\
g'(y) &= -1 \\
g(y) &= -y
\end{aligned}$$

finalmente se deduce que

$$x^2y - y = 0$$

es la solución a la ecuación diferencial exacta, esto lo podemos verificar mediante

$$\begin{aligned}
d\left(x^2y - y\right) &= 0 \\
yd\left(x^2\right) + x^2dy - dy &= 0 \\
2xydx + \left(x^2 - 1\right)dy &= 0
\end{aligned}$$

1.1 Factor de integración

Ocurre que no siempre se cumple que condición de ecuación diferencial exacta, por lo que hay que construir la ecuación. Para construir la condición de exactitud se debe encontrar y multiplicar una función que hace que se cumpla la exactitud, dicha función se llama factor integrante.

Definición 2 (Factor integrante)**.** Si la ecuación diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0$ no es una ecuación diferencial exacta pero la ecuación diferencial $\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy = 0$ si lo es, entonces se dice que la función $\mu(x,y)$ es un factor integrante de la ecuación diferencial.

Teorema 3. *Si la función*

$$(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N$$

solo depende de x entonces la función

$$\mu(x) = \exp\left(\int(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N\right)dx$$

es un factor integrante y si la función

$$(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)/M$$

solo depende de y entonces la función

$$\mu(y) = \exp\left(\int (\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)/M\right) dy$$

es un factor integrante también.

Demostración. Consideremos el caso en que el factor integrante solamente es en función de x, la nueva ecuación diferencial es de la forma

$$\mu(x) M(x,y)\, dx + \mu(x) N(x,y) = 0$$

para que sea exacta se debe de cumplir que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\mu(x) M(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\mu(x) N(x,y) \\ \mu(x)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) &= N(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) \\ \mu(x)\left(\frac{\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)}{N(x,y)}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\mu(x) \end{aligned}$$

□

Hay que tener en consideración que estas dos formulas no son las únicas para obtener factores integrantes.

Ejercicio 4. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\left(2x^2 + y\right) dx + \left(x^2 y - x\right) dy = 0$$

Tenemos que $2x^2 + y = M(x,y) \to 1 = \partial M/\partial y$ y también que $x^2y - x = N(x,y) \to 2xy - 1 = \partial N/\partial y$. No es exacta.

Buscamos cada uno de las funciones

$$\begin{aligned} (\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N &= \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2 y - x} \\ &= -\frac{2}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{-2\int \frac{1}{x} dx} \\ &= x^{-2} \end{aligned}$$

es un factor integrantes.

$$x^{-2}\left(2x^2 + y\right) dx + x^{-2}\left(x^2 y - x\right) dy = 0$$