## Cortez

**Problema.** Sea $X(s)$, determine la amplitud de los términos $\delta(t)$ y $\delta'(t)$

$$X(s) = \frac{s^4+2s+1}{s^3+4s^2+5s+2}$$

vemos que numerador y denominador tiene por raiz $-1$ por lo que se puede simplificar

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{(s+1)\left(s^3-s^2+s+1\right)}{(s+1)(s^2+3s+2)} \\
X(s) &= \frac{s^3-s^2+s+1}{s^2+3s+2} \\
\text{división} & \\
X(s) &= s-4+\frac{11s+9}{s^2+3s+2}
\end{aligned}$$

fracciones parciales

$$\begin{aligned}
X(s) &= s-4+\frac{11s+9}{(s+1)(s+2)} \\
X(s) &= s-4+\frac{A}{(s+1)}+\frac{B}{(s+2)} \\
X(s) &= s-4-\frac{2}{(s+1)}+\frac{13}{(s+2)} \\
\mathcal{L}^{-1} & \\
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{s\}-4\mathcal{L}^{-1}\{1\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\}+13\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\} \\
x(t) &= \delta'(t)+4\delta(t)-2e^{-s}+13e^{-2s}
\end{aligned}$$

por lo que las amplitudes de $\delta(t)$ y $\delta'(t)$ son 4 y 1 respectivamente.

**Problema.** Encuentre la transformada inversa de

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{s^3-3}{(s+1)(s+2)} \\
&= \frac{s^3-3}{s^2+3s+2}
\end{aligned}$$

division y fracciones parciales

$$\begin{aligned}
X(s) &= s-\frac{4}{s+1}+\frac{11}{s+2}-3 \\
\mathcal{L}^{-1} &= \\
&= \mathcal{L}^{-1}\{s\}-4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+11\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\{1\} \\
&= \delta(t)-4e^{-t}+11e^{-2t}-3\delta'(t)
\end{aligned}$$

## Salcedo

**Problema.** La siguiente ecuación diferencial describe un sistema dado:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}y(t)+0{,}15y(t)=x(t)$$

. Entregue $Y(s)$ y las condiciones iniciales para el sistema.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\}+0{,}15\mathcal{L}^{-1}\{y(t)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{x(t)\}\\
s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+\frac{1}{2}(sY(s)-y(0))+0{,}15Y(s) &= X(s)\\
Y(s)\left(s^2-0{,}5s+0{,}15\right) &= X(s)+sy(0)+y'(0)+0{,}5y(0)\\
Y(s) &= \frac{X(s)+sy(0)+y'(0)+0{,}5y(0)}{(s^2-0{,}5s+0{,}15)}
\end{aligned}$$

**Problema.** si $y'(0)=0$ y $y(0)=0$ son las condiciones iniciales de la ecuación diferencial, encuentre $Y(s)$. Si se dobla la entrada del sistema a $2x(t)$ con transformada de Laplace $2X(s)$, responda la siguientes dos preguntas. 1. ¿Se dobla la salida $Y(s)$ y entonces la transformada de laplace inversa es el doble? 2. ¿Es lineal el sistema?

Respuesta 1

$$\begin{aligned}
Y_2(s) &= \frac{2X(s)+sy(0)+y'(0)+0{,}5y(0)}{(s^2-0{,}5s+0{,}15)}\\
Y_2(s) &= \frac{2X(s)}{(s^2-0{,}5s+0{,}15)}\\
Y_2(s) &= 2Y(s)\\
y_2(t) &= 2y(t)
\end{aligned}$$

por lo tanto la señal es el doble.

Respuesta 2. Como el sistema es representado por una ecuación diferencial lineal no homogénea, entonces el sistema es lineal.

**Problema.** Sea

$$x(t)=2(\delta(t+1)-\delta(t-1))$$

encuentre la transformada de Laplace y determine la región de convergencia.

Buscamos la transformada de Laplace

$$X(s)=2e^{s}-2e^{-s}$$

Donde la región de convergencia es todo el plano de $s$

**Problema.** Con la función $X(s)$ compleja, de $s = \sigma + jw$, entregue la magnitud de $|X(\sigma + jw)|$ y la fase $\angle |X(\sigma + jw)|$

$$\begin{aligned}
X(s) &= 2e^{s} - 2e^{-s} \\
X(\sigma + jw) &= 2e^{\sigma + jw} - 2e^{-\sigma - jw} \\
X(\sigma + jw) &= 2e^{\sigma} e^{jw} - 2\frac{e^{-jw}}{e^{\sigma}} \\
&= 2e^{\sigma}\left(\cos(w) + j\sin(w)\right) - \frac{2}{e^{\sigma}}\left(\cos(-w) + j\sin(-w)\right) \\
&= \left(2e^{\sigma} - \frac{2}{e^{\sigma}}\right)\cos(w) + \left(2e^{\sigma} + \frac{2}{e^{\sigma}}\right)\sin(w)\, j
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
|X(\sigma + jw)| &= \sqrt{\left(2e^{\sigma} - \frac{2}{e^{\sigma}}\right)^{2}\cos^{2}(w) + \left(2e^{\sigma} + \frac{2}{e^{\sigma}}\right)^{2}\sin^{2}(w)} \\
&= 2\ \sqrt{\left(e^{-2\sigma} + e^{2\sigma} - 2\cos(2w)\right)} \\
\angle |X(\sigma + jw)| &= \arctan\left(\frac{\left(2e^{\sigma} + \frac{2}{e^{\sigma}}\right)}{\left(2e^{\sigma} - \frac{2}{e^{\sigma}}\right)}\tan(w)\right) \\
&= \arctan\left(\coth(\sigma)\tan(w)\right)
\end{aligned}$$

**Iglesias**

**Problema.** Los polos correspondientes a la transformada de laplace $X(s)$de una señal $x(t)$son $p_{1,2} = -3 \pm \frac{\pi}{2} j$ y $p_3 = 0$

dándose las constantes, como $A$ (de amplitud), entregue la forma general de la señal $x$ dado sus polos

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{A}{\left(s-\left(-3+\frac{\pi}{2}j\right)\right)\left(s-\left(-3-\frac{\pi}{2}j\right)\right)s} \\
&= \frac{A}{\left(s-\left(-3+\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right)\right)\left(s-\left(-3-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right)\right)s} \\
&= \frac{A}{s\left((s+3)^2+\frac{\pi^2}{4}\right)} \\
\mathcal{L}^{-1} & \\
x(t) &= A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\star\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left((s+3)^2+\frac{\pi^2}{4}\right)}\right\} \\
x(t) &= A1\star e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\frac{\pi^2}{4}}\right\} \\
x(t) &= A1\star e^{-3t}\frac{2}{\pi}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\pi}{2}}{s^2+\frac{\pi^2}{4}}\right\} \\
x(t) &= \frac{2A}{\pi}\star e^{-3t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\
x(t) &= \frac{2A}{\pi}\int_0^t e^{-3t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt
\end{aligned}
$$

**Problema.** La función de transferencia de un sistema dado es

$$
H(s) = \frac{1}{s^2+4}
$$

Encontrar la función diferencial

Respuesta: como es función de transferencia asumimos condiciones iniciales cero

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{1}{s^2+4} \\
Y(s)\left(s^2+4\right) &= X(s) \\
s^2Y(s)+4Y(s) &= X(s) \\
\mathcal{L}^{-1} & \\
\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt} &= x(t)
\end{aligned}
$$

**Problema.** Suponga que $y(t)$ es nula para $t \geq 0$, si la entrada $x(t) = \delta(t)$, encuentre las condiciones iniciales del sistema. Es decir, dado $Y(s) = 0$, encuentre $y(0)$ e $y'(0)$.

Respuesta: En general, la respuesta dado un $x(t) = \delta(t)$ es la función de transferencia, si la función de transferencia tiene numerador 1 como en este caso quiere decir que las condiciones iniciales son nulas.

**Rojas**

**Problema.** La siguiente función $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la siguiente ecuación diferencial que representa un sistema de entrada $x(t)$ y condiciones iniciales no nulas, con transformada de Laplace $X(s)$:

Encuentre la ecuación diferencial que represente el sistema

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{X(s)}{s^2+2s+3} + \frac{s+1}{s^2+2s+3} \\ \left(s^2+2s+3\right) Y(s) &= X(s) + s + 1 \\ s^2 Y(s) + 2sY(s) + 3Y(s) &= X(s) + s + 1 \end{aligned}$$

por lo que se puede deducir que la ecuación diferencial es de la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = x(t)$$

para encontrar las condiciones iniciales del sistema

$$\begin{aligned} s^2 Y - sy(0) - y'(0) + 2(sY - y(0)) + 3Y &= X \\ \left(s^2+2s+3\right) Y &= X + sy(0) + y'(0) + 2y(0) \end{aligned}$$

por lo que $sy(0) + y'(0) + 2y(0) = s + 1$, luego $y(0) = 1$ e $y'(0) + 2y(0) = 1 \implies y'(0) = -1$

**Problema.** Suponga que la función de transferencia de un sistema dado es:

$$H(s) = \frac{s}{s^2+s+1}$$

Encuentre la respuesta del sistema al escalón $u(t)$, con $S(s) = H(s)X(s)$, y entonces desarrolle la respuesta $y(t)$ del sistema para las siguientes entradas.

Buscamos la respuesta dado un escalon de Heaveside para reutilizarlo en las preguntas siguientes

$$
\begin{aligned}
x(t) &= u(t) \\
\mathcal{L} & \\
X(s) &= \frac{1}{s} \\
S(s) &= H(s)\,X(s) \\
S(s) &= \frac{1}{s^2+s+1} \\
S(s) &= \frac{1}{s^2+s+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} \\
S(s) &= \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
S(s) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
\mathcal{L}^{-1} & \\
s(t) &= =\frac{2}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\} \\
s(t) &= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{s^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\} \\
s(t) &= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)
\end{aligned}
$$

Calculamos respuestas dada las siguientes entradas, lo cual es directo

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= u(t)-u(t-1) \\
y_1(t) &= (u(t)-u(t-1)) * s(t) \\
y_1(t) &= \int_0^t u(\tau)\,s(t-\tau)\,d\tau - \int_0^t u(\tau-1)\,s(t-\tau)\,d\tau \\
y_1(t) &= \int_0^t s(t-\tau)\,d\tau - \int_1^t u(\tau-1)\,s(t-\tau)\,d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2(t) &= \delta(t)-\delta(t-1) \\
x_2(t) &= (\delta(t)-\delta(t-1)) * s(t) \\
&= s(t)-s(t-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3(t) &= r(t) \\
y_3(t) &= (r * s)(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3(t) &= r(t) - 2r(t-1) + r(t-2) \\
y_3(t) &= (r(t) - 2r(t-1) + r(t-2)) * s(t)
\end{aligned}
$$

**Dominguez**

**Problema.** La función de transferencia de un sistema descrito por una ecuación diferencial de segundo orden, es:

$$
H(s) = \frac{1}{s^2 + b_1 s + b_0}
$$

desarrollo en el archivo matlab.

**Problema.** Encuentre la transformada de Laplace de $y(t) = \sin(2\pi)u(t) - \sin(2\pi(t-1))u(t-1)$ y su región de convergencia.

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sin(2\pi t)u(t) - \sin(2\pi(t-1))u(t-1) \\
\mathcal{L}^{-1} & \\
Y(s) &= \frac{2}{s^2+2^2} - e^{-s}\frac{2}{s^2+2^2} \\
Y(s) &= \frac{2(1-e^{-s})}{s^2+2^2}
\end{aligned}
$$

como es la suma de funciones senos, el ROC

$$
\Re(s) > 0
$$

Sea la función

$$
x(t) = \begin{cases} 1 - \cos(2\pi t) & 0 < t < 1 \\ 0 & t < 0 \text{ o } t > 1 \end{cases}
$$

Usando la misma forma de la primera parte con $x_1(t) = \cos(2\pi t)u(t)$ y la diferencia $d(t) = x_1(t) - x_1(t-1)$, exprese entonces $x(t)$ en términos de $u(t)$ y la diferencia $d(t)$.

Respuesta: Podemos hacer la siguiente representación funcional de $x(t)$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= (1 - \cos(2\pi t))(u(t) - u(t-1)) \\
&= (u(t) - u(t-1)) - \cos(2\pi t)(u(t) - u(t-1))
\end{aligned}
$$

pero cos se puede desplazar

$$
= (u(t) - u(t-1)) - d(t)
$$

Calculamos ahora la transformada de Laplace

$$
\begin{aligned}
x(t) &= (u(t) - u(t-1)) - d(t) \\
\mathcal{L} & \\
X(s) &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{2\pi}{s^2 + (2\pi)^2} + \mathcal{L}\{\cos(2\pi t)\, u(t-1)\} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{2\pi}{s^2 + (2\pi)^2} + \mathcal{L}\{\cos(2\pi(t-1))\, u(t-1)\} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{2\pi}{s^2 + (2\pi)^2} + e^{-s}\mathcal{L}\{\cos(2\pi(t))\, u(t)\} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{2\pi}{s^2 + (2\pi)^2} + e^{-s}\frac{2\pi}{s^2 + (2\pi)^2} \\
&= \frac{1 - e^{-s}}{s} + \frac{2\pi(e^{-s} - 1)}{s^2 + (2\pi)^2}
\end{aligned}
$$

como son sumas de funciones cosenos y heaviside , entonces el ROC es

$$\Re(s) \quad > \quad 0$$