Prueba solemne 1 ecuaciones diferenciales

Universidad Gabriela Mistral

22 de septiembre de 2015

Problema 1. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-xy\right)dy=0$$

se puede observar por los grados de cada uno de los sumandos de los polinomios que es una ecuación diferencial homogénea.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2-xy\right)}$$

verificamos que es una ecuación diferencial homogénea con $f(x,y)=-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2-xy\right)}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y) &= -\frac{\left(\lambda^2x^2+\lambda^2y^2\right)}{\left(\lambda^2x^2-\lambda^2xy\right)} \\ f(\lambda x,\lambda y) &= f(x,y) \end{aligned}$$

por lo tanto es exacta, luego, mediante la sustitución $y=vx$ con lo que $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ y también $f(x,y)=f(x,vx)=f(1,v)$, que luego remplazando.

$$\begin{aligned} v+x\frac{dv}{dx} &= -\frac{\left(1+v^2\right)}{(1-v)} \\ x\frac{dv}{dx} &= -\frac{\left(1+v^2\right)}{(1-v)}-v \\ x\frac{dv}{dx} &= \frac{v+1}{v-1} \\ \frac{v-1}{v+1}dv &= \frac{dx}{x} \\ \left(1-\frac{2}{v+1}\right)dv &= \frac{dx}{x} \\ \int\left(1-\frac{2}{v+1}\right)dv &= \int\frac{dx}{x} \\ v-2\ln|v+1| &= \ln|x|+c \\ \frac{y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}+1\right| &= \ln|x|+c \end{aligned}$$

Problema 2. Resuelva la siguiente ecuación diferencial exacta

$$\left(x^3 + y^3\right) dx + 3xy^2 dy = 0$$

Verificamos si es exacta

$$\begin{aligned} M_y &= 3y^2 \\ N_x &= 3y^2 \end{aligned}$$

5 puntos
por lo que es exacta

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= x^3 + y^3 \\ f &= \int x^3 + y^3 dx + g(y) \\ f &= \frac{x^4}{4} + xy^3 + g(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3xy^2 + g'(y) \\ 3xy^2 &= 3xy^2 + g'(y) \\ \Longrightarrow & \\ g'(y) &= 0 \\ \Longrightarrow & \\ g(y) &= 0 \end{aligned}$$

por lo que la solución es $\frac{x^4}{4} + xy^3 = 0$

Problema 3. Resolver $\frac{dy}{dx} = (-5x+y)^2 - 4$ haciendo la sustitución de variable auxiliar $u = -5x + y$

Sea

$$\begin{aligned} u &= -5x + y \\ \frac{du}{dx} &= -5 + \frac{dy}{dx} \\ \Longrightarrow & \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dx} + 5 \end{aligned}$$

10 puntos

por lo que la ecuación queda de la forma

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} + 5 &= u^2 - 4 \\ \frac{du}{dx} &= u^2 - 9 \\ \frac{du}{u^2 - 9} &= dx \\ \frac{du}{(u-3)(u+3)} &= dx \\ \text{10 puntos} & \\ \text{fracciones parciales} & \\ \left(\frac{\frac{1}{6}}{u-3} + \frac{-\frac{1}{6}}{u+3} \right) du &= dx \\ \left(\frac{1}{6} \int \frac{1}{u-3} - \frac{1}{6} \int \frac{1}{u+3} \right) du &= \int dx \\ \frac{1}{6} \ln|u-3| - \frac{1}{6} \ln|u+3| &= x + c \\ \ln|u-3| - \ln|u+3| &= 6(x+c) \\ \ln \frac{|u-3|}{|u+3|} &= 6(x+c) \\ \ln \frac{|-5x+y-3|}{|-5x+y+3|} &= 6(x+c) \end{aligned}$$

Problema 4. Resolver la ecuación diferencial llevando a su forma lineal

$$\begin{aligned} xy' + y &= 2x \\ y' + \frac{1}{x}y &= 2 \end{aligned}$$

por lo que $P(x) = \frac{1}{x}$ y $Q(x) = 2$
esta ecuación diferencial tiene por factor integrante

$$\begin{aligned} \mu &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \\ \mu &= e^{\ln(x)} \\ \mu &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy' + y &= 2x \\ \frac{d}{dx}(xy) &= 2x \\ d(xy) &= 2xdx \\ xy &= \int 2xdx + c \\ xy &= x^2 + c \\ y &= \frac{x^2 + c}{x} \end{aligned}$$