Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

26 de junio de 2015

1. Ecuaciones lineales homogéneas

Problema 1.1. Resuelva las ecuaciones diferenciales siguientes:

1. $2y'' - 5y' - 3y = 0$
2. $y'' - 10y' + 25y = 0$
3. $y'' + y' + y = 0$

Obtenemos las raíces de la ecuación auxiliar y con ello podremos obtener la solución de la ecuación diferencial

1. $2m^2 - 5m - 3 = 0 \Rightarrow (2m+1)(m-3) = 0 \Rightarrow m_1 = -1/2, m_2 = 3 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{3x}$
2. $m^2 - 10m + 25 = 0 \Rightarrow (m-5)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 5 \Rightarrow y(x) = e^{5x}(c_1 + xc_2)$

3. $m^2 + m + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow$
   $y(x) = e^{-x/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$

Problema 1.2. Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

en donde $y(0) = -1$, y además $y'(0) = 2$

Las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 - 4m + 13 = 0$ son $m_1 = 2 + 3i$ y $m_2 = 2 - 3i$, de modo que

$$y(x) = e^{2x}(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x))$$

Al aplicar las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} y(0) &= -1 \\ e^{2\cdot 0}(c_1 \cos(3\cdot 0) + c_2 \sin(3\cdot 0)) &= -1 \\ c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) &= -1 \\ c_1 &= -1 \end{aligned}$$

$$y'(0) = 2$$

2. Coeficientes indeterminados, método de superposición

Problema 2.1. Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$

al resolver la ecuación homogénea asociada $y'' + 4y' - 2y = 0 \Rightarrow y_c = c_1 e^{-\left(2+\sqrt{6}\right)x} + c_2 e^{\left(-2+\sqrt{6}\right)x}$

Como $g(x)$ es un polinomio cuadrático asumimos que la solución particular también lo es

$$\begin{aligned} y_p &= Ax^2 + Bx + C \\ y_p' &= 2Ax + B \\ y_p'' &= 2A \end{aligned}$$

Al evaluar en la ecuación nos queda que

$$-2Ax^2 + (8A - 2B)x + (2A + 4B - 2C) = 2x^2 - 3x + 6$$

Al resolver el sistema de ecuación nos queda que: $A = -1, B = -\frac{5}{2}, C = -9$, así remplazamos y nos queda que

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 e^{-\left(2+\sqrt{6}\right)x} + c_2 e^{\left(-2+\sqrt{6}\right)x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

Problema 2.2. Determine la solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - y' + y = 2\sin(3x)$$

Como $f(x) = 2\sin(3x)$ entonces

$$\begin{aligned} y_p &= A\cos(3x) + B\sin(3x) \\ y_p' &= -3\sin(3x) + 3B\cos(3x) \\ y_p'' &= -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) \end{aligned}$$

, luego al diferenciar y_p y sustituir en la ecuación diferencial, y luego factorizando:

$$(-8A-3B)\cos(3x)+(3A-8B)\sin(3x)=2\sin(3x)$$

con lo que se puede concluir que $-8A-3B=0$ y además $3A-8B=2$ con lo que obtenemos que $A=\frac{6}{73}$ y $B=-\frac{16}{73}$ por lo que la solución particular de esta ecuación diferencial es

$$y_p=\frac{6}{73}\cos(3x)-\frac{16}{73}\sin(3x)$$

Determinar la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$y''+4y'+3y=6xe^{-3x}$$

buscamos las soluciones de la ecuación característica para encontrar las soluciones de la ecuación homogénea:

$$\begin{aligned}
m^2+4m+3m &= 0\\
m &= \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}\\
m &= \frac{-4\pm 2}{2}\\
m &= -2\pm 1
\end{aligned}$$

por lo que la solución de la ecuación homogénea está dada por $y_h=c_1e^{-3x}+c_2e^{-x}$

la ecuación particular está definida como $y_p = Ae^{-3x}x^2 + Be^{-3x}$ para poder conservar la independencia lineal entre las soluciones particulares y de la homogénea.

6

$$\begin{aligned} e^{3x}y_p &= Ax^2 + Bx \\ e^{3x}y_p' + 3e^{3x}y_p &= 2Ax + B \\ e^{3x}y_p'' + 6e^{3x}y_p' + 9e^{3x}y &= 2A \end{aligned}$$

Lo que es equivalente a

$$\begin{aligned} y_p &= e^{-3x}\left(Ax^2 + Bx\right) \\ y_p' + 3y_p &= e^{-3x}\left(2Ax + B\right) \\ y_p'' + 6y_p' + 9y_p &= e^{-3x}2A \end{aligned}$$

La tercera ecuación se puede descomponer

$$\begin{aligned} y_p'' + 6y_p' + 9y_p &= e^{-3x}2A \\ 6xe^{-3x} + 2y_p' + 6y_p &= e^{-3x}2A \\ 6xe^{-3x} + 2\left(y_p' + 3y_p\right) &= e^{-3x}2A \\ 6xe^{-3x} + 2\left(e^{-3x}\left(2Ax + B\right)\right) &= e^{-3x}2A \\ 6x + 4Ax + 2B &= 2A \\ 6x &= -4Ax + 2A - 2B \end{aligned}$$

por lo que $A = -\frac{3}{2}$ y $B = -\frac{3}{2}$

por lo que la solución general es

$$y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-x} - \frac{3}{2}x^2e^{-3x} - \frac{3}{2}e^{-3x}$$

3. Reducción de orden

Resumen 3.1. Si tenemos una ecuación diferencial de la forma

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0 \tag{3.1}$$

y además y_1 es una solución conocida de la ecuación diferencial entonces la segunda solución está dada por:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(X)dx}}{y_1^2} dx \tag{3.2}$$

Problema 3.2. La función $y_1 = x^2$ es una solución de $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, determine la solución general

Partimos de la forma reducida de la ecuación,

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$$

y vemos que de acuerdo con 3.2 obtenemos que

$$\begin{aligned}
y_2 &= x^2 \int \frac{e^{-\int\left(-\frac{3}{x}\right)dx}}{x^4} dx \\
&= x^2 \int \frac{e^{3\int dx/x}}{x^4} dx \\
&= x^2 \int \frac{e^{3\ln(x)}}{x^4} dx \\
&= x^2 \int \frac{e^{\ln\left(x^3\right)}}{x^4} dx \\
&= x^2 \int \frac{x^3}{x^4} dx \\
&= x^2 \int \frac{1}{x} dx \\
&= x^2 \ln(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general está definida por:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln(x)$$

Problema 3.3. Determine la segunda solución de la ecuación diferencial por medio de reducción de orden de la ecuación diferencial

$$y'' + 5y' = 0; y_1 = 1$$

Al pasar la ecuación diferencial a la forma estándar $y'' + 5y' + 0y = 0$ con lo que identificamos que $P(x) = 5$ con lo que la segunda solución queda definida por:

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx \\
&= 1 \int \frac{e^{-\int 5dx}}{1^2} dx \\
&= \int e^{-5\int dx} dx \\
&= \int e^{-5x} dx \\
&= \frac{e^{-5x}}{-5} \\
&= -\frac{e^{-5x}}{5}
\end{aligned}$$

Verificamos si esta función es verdaderamente una solución de la ecuación diferencial tomando en consideración las derivadas sucesivas $y_2 = -\frac{e^{-5x}}{5} \Rightarrow y_2' = e^{-5x} \Rightarrow y_2'' = -5e^{-5x}$, luego al remplazarla en la ecuación diferencial nos queda que:

$$\begin{aligned}
-5e^{-5x} + 5e^{-5x} &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la igualdad.

4. Ecuación de Cauchy-Euler

4.1. Problemas avanzados

Resolver el problema con condiciones iniciales $xy''+(2x-1)\,y'-2y=x^2e^{-3x}$ bajo las condiciones iniciales $y\left(\frac{1}{2}\right)=y'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ sabiendo que $y_1=e^{mx}$ es solución para la ecuación homogénea.

remplazando en la ecuación original se puede obtener el valor de m para la ecuación homogénea:

$$\begin{aligned} xy''+(2x-1)\,y'-2y &= 0 \\ xm^2e^{mx}+(2x-1)\,me^{mx}-2e^{mx} &= 0 \\ xm^2+(2x-1)\,m-2 &= 0 \\ x\left(m^2+2m\right)-(m+2) &= 0 \\ m &= -2 \end{aligned}$$

Por lo que $y_1=e^{-2x}$

Como tenemos una de las soluciones de la ecuación homogénea de segundo orden podemos encontrar la segunda solución mediante la fórmula de Abel

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y^2} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int \frac{e^{-\int \frac{(2x-1)}{x} dx}}{e^{-4x}} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int \frac{e^{\int \frac{1-2x}{x} dx}}{e^{-4x}} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int \frac{e^{\int \frac{1}{x} - 2dx}}{e^{-4x}} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int \frac{e^{\ln(x) - 2x}}{e^{-4x}} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int \frac{e^{\ln(x)} e^{-2x}}{e^{-4x}} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int x e^{2x} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \left(x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx \right) \\
&= e^{-2x} \left(x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \right) \\
&= \frac{1}{4} (2x - 1)
\end{aligned}
$$