Ecuaciones diferenciales

Leonardo Andrés Jofré Flor

11 de agosto de 2016

Resumen

Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones cuyo espacio solución son un conjunto de funciones. Estas ecuaciones aparecen desde la física primordialmente al intentar modelar sistemas dinámicos. Las ecuaciones diferenciales nacen al intentar encontrar leyes que no relacionan de forma simple las magnitudes, pero por otro lado, se pueden encontrar relaciones de dependencia entre la magnitud buscada y sus derivadas.

1. Ideas introductorias

El objetivo de curso es introducir al alumno a los conceptos y métodos básicos asociados a ecuaciones diferenciales, y mostrar sus diversas aplicaciones a distintos ámbitos de la Ingeniería. El curso analiza en detalle las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y los diversos métodos de resolución. También presenta herramientas del **análisis cualitativo** de las soluciones de diversas ecuaciones diferenciales.

Ejercicio 1. Encuentre la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

1. de donde aparece este problema?
2. cuántas soluciones tiene este problema?

Las ecuaciones diferenciales aparecen en distintos muchos problemas aplicados y muchos teóricos, por ejemplo.

1. Dada la masa puntual de un cuerpo colgante de una cuerda a un punto fijo, encontrar el movimiento que describe.
2. Dado un circuito RLC (resistencia, inductor, condensador) encontrar la diferencia de potencial entre dos nodos en función del tiempo, con ello la corriente.

3. Dado una variable aleatoria $X \sim F_X(x)$ encontrar una transformación $g(\cdot)$ que generen una variable aleatoria $Y \sim F_Y(x)$

4. Si conocemos que la taza de crecimiento de una variable es directamente proporcional a la variable, entonces también estamos frente un problema de ecuaciones diferenciales.

   a) Crecimiento poblacional

   b) Desintegración radioactiva

5. etc, etc, etc...

En síntesis una ecuación diferencial ordinaria

en una ecuación que relaciona una función con sus derivadas, y puede ser de la forma

$$g\left(x, f(x), f^{(1)}(x), \ldots, f^{(k)}(x)\right) = 0$$

Una función es la solución de una ecuación diferencial Por lo que podemos verificar si una función pertenece o no al conjunto solución de una ecuación diferencial

Ejemplo 2. Verificar que $y = x^4/16$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$$

1. Comprobar que la función $y = xe^x$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = 0$

2. Comprobar que $x^2 + y^2 = 4$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

3. Comprobar que $x_1 = c_1 \cos 4t$ y $x_2 = c_2 \sin 4t$ son soluciones de $x'' + 16x = 0$, compruebe también que $x_1 + x_2$ también es una solución.

Pero siempre quedará la siguiente pregunta ¿Y si yo quiero todas las soluciones posibles de una ecuación diferencial? ¿Que propiedades tiene ese conjunto de todas las soluciones posibles? ¿De qué sirve que existan más de una solución de una ecuación diferencial?. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales no son únicas, son infinitas, es más si sumamos dos soluciones de una ecuación diferencial obtendremos otra solución, y si multiplicamos por un escalar también obtendremos otra solución, eso nos dice que la solución de una ecuación diferencial es una espacio vectorial.

2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

2.1. Ecuaciones diferenciales de variable separable

Son todas aquellas ecuaciones diferenciales que se pueden separar en la forma

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy$$

por lo tanto cono se puede resolver mediante una integral

$$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy + \mathcal{C}$$

en donde $\mathcal{C}$ es una constante de integración.

Teorema 3. *Toda ecuación diferencial de la forma* $\frac{dy}{dx} = f(\alpha x + \beta y + c)$ *se puede reducir a una variable separable mediante la transformación* $u = \alpha x + \beta y + c$

Problema 4 (Ecuación diferencia reducible a una de variable separable)**.** resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y+1}$$

consideremos

$$u = x + y + 1$$

entonces $du = dx + dy$ luego $dy = du - dx$

$$\begin{aligned}
\frac{du - dx}{dx} &= \frac{1}{u} \\
\frac{du}{dx} &= \frac{1}{u} + 1 \\
\frac{du}{\frac{1}{u}+1} &= dx \\
\frac{udu}{1+u} &= dx \\
\left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du &= dx \\
\text{integramos} & \\
\int \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du &= \int dx + \mathcal{C} \\
u - \ln(u+1) &= x + \mathcal{C} \\
(x+y+1) - \ln(x+y+2) - x &= \mathcal{C}
\end{aligned}$$

2.2. Ecuaciones diferenciales Homogéneas

Una función $F(x,y)$ se dice homogenera de orden α si cumple la siguiente propiedad $F(tx,ty) = t^{\alpha}F(x,y)$

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

Se dice que es homogenera si M y N son funciones homogeneas del mismo orden, eso quiere decir que

también puede ser representada por la forma

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

si

$$F(tx,ty) = F(x,y)$$

entonces la ecuación diferencial es Homogénea y esta se puede reducir a una ecuación diferencial de variable separables mediante la transformación $y = ux$

Ejemplo 5. sea la ecuación

$$\left(x^2 + 3xy + y^2\right) dx - x^2 dy = 0$$

entonces podemos convertirla a una forma que más nos conviene operar, la cual es despejando la derivada de y con respecto a x, la cual va a ser nuestra función $F(x,y)$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2} \\ F(x,y) &= \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2} \end{aligned}$$

Debemos demostrar que cumple que sea homogenea de grado $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2} \\ F(x,y) &= \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2} \\ F(tx,ty) &= F(x,y) \end{aligned}$$

como se sumple, ahora podemos aplicar la sustitución $y = vx$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2+3xy+y^2}{x^2} \\
\frac{d(vx)}{dx} &= \frac{x^2+3x(vx)+(vx)^2}{x^2} \\
v+x\frac{dv}{dx} &= 1+3v+v^2 \\
x\frac{dv}{dx} &= 1+2v+v^2 \\
x\frac{dv}{dx} &= (1+v)^2 \\
\frac{dx}{x} &= \frac{dv}{(1+v)^2} \\
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{dv}{(1+v)^2} \\
\ln(x) &= -\frac{1}{1+v}+C \\
\ln(x) &= -\frac{1}{1+\frac{y}{x}}+C
\end{aligned}
$$

Si se fijan en el cuarto paso de aplicó derivada del producto y en el quito paso ya era una ecuación de variables separables, en el último paso se elimina el v para dejar la ecuación en términos de x, y

Ejemplo 6 (Ecuación diferencial homogénea)**.** Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Si consideramos $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ entonces podemos verificar que $F(tx,ty) = F(x,y)$

dejamos la ecuación en su forma estándar

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2+y^2}{xy} \\
xydy &= \left(x^2+y^2\right)dx \\
\text{remplazamos } y = ux & \\
x\left(ux\right)d\left(ux\right) &= \left(x^2+\left(ux\right)^2\right)dx \\
ux^2\left(xdu+udx\right) &= \left(x^2+\left(ux\right)^2\right)dx \\
ux^3du+u^2x^2dx &= x^2\left(1+u^2\right)dx \\
uxdu+u^2dx &= \left(1+u^2\right)dx \\
uxdu &= dx \\
udu &= \frac{dx}{x} \\
\int udu &= \int\frac{dx}{x}+\mathcal{C} \\
\frac{u^2}{2} &= \ln\left(x\right)+\mathcal{C} \\
\text{sabemos que } u = \frac{y}{x} & \\
\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2} &= \ln\left(x\right)+\mathcal{C}
\end{aligned}
$$

Es posible que una ecuación diferencial mediante un cambio de variable sea reducible a homogénea.

Ejemplo 7 (Ecuación diferencial reducible a homogénea)**.** Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\left(x-4y-9\right)dx+\left(4x+y-2\right)dy=0$$

es necesario encontrar la forma de eliminar las constantes, para ello debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x-4y-9 &= 0 \\
4x+y-2 &= 0
\end{aligned}
$$

las cuales tienen por solución $x_0 = 1$ e $y_0 = -2$ con lo cual podemos hacer la sustitución $X = x-1$ y $Y = y+2$

$$
\begin{aligned}
(X+1-4(Y-2)-9)\,dX+(4(X+1)+(Y-2)-2)\,dY &= 0\\
(X-4Y)\,dX+(4X+Y)\,dY &= 0\\
\text{Sustituimos } Y=UX &\\
(X-4UX)\,dX+(4X+UX)\,d(UX) &= 0\\
(1-4U)\,dX+(4+U)\,d(UX) &= 0\\
(1-4U)\,dX+(4+U)\,(XdU+UdX) &= 0\\
\left(1-4U+4U+U^2\right)dX+X(4+U)\,dU &= 0\\
\left(1+U^2\right)dX+X(4+U)\,dU &= 0\\
\frac{dX}{X}+\frac{4+U}{1+U^2}dU &= 0\\
\frac{dX}{X}+\frac{4}{1+U^2}dU+\frac{U}{1+U^2}dU &= 0\\
\text{Integrar} &\\
\int\frac{dX}{X}+4\int\frac{1}{1+U^2}dU+\int\frac{U}{1+U^2}dU &= 0\\
\ln(X)+4\arctan(U)+2\ln\left(U^2+1\right) &= \mathcal{C}\\
\ln(x-1)+4\arctan\left(\frac{y+2}{x-1}\right)+2\ln\left(\left(\frac{y+2}{x-1}\right)^2+1\right) &= \mathcal{C}
\end{aligned}
$$

Problema 8 (Reducible a homogéneas, rectas paralelas)**.** Resuelva

$$y'=\frac{x-y-1}{x-y-2}$$

consideramos $z=x-y\to z'=1-y'\to y'=1-z'$, al reemplazar nos queda que

$$
\begin{aligned}
1-z' &= \frac{z-1}{z-2}\\
z' &= 1-\frac{z-1}{z-2}\\
(z-2)\,dz &= -dx
\end{aligned}
$$

con lo que podemos obtener, al integrar y al deshacer el cambio $z=x-y$

$$(x-y-2)^2+2x=\mathcal{C}$$

2.3. Ecuación diferencial exacta

Una ecuación diferencial exacta es aquella que se puede representar como una difencial total.

$$z = f(x, y) = c \implies dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

un ejemplo de ecuación diferencial exacta puede ser

$$2xydx + \left(x^2 - 1\right) dy = 0$$

En general cualquier ecuación de la forma

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dx = 0$$

es una ecuación diferencial exacta si se cumple la siguiente condición que garantiza que es la representación de la diferencial total de alguna función

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Teorema (Clairaut-Schwartz). *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y además se cumple que $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ se cumple que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Gracias a este teorema podemos obtener un algoritmo para resolver cualquier ecuación diferencial exacta.

Ejemplo 9. Resolver la siguiente ecuación diferencial exacta

$$2xydx + \left(x^2 - 1\right) dy = 0$$

Observamos que $M(x, y) = 2xy$, además $N(x, y) = x^2 - 1$, por lo que debemos verificar la condición

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

esto quiere decir que existe un f que cumple

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

consideremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= M(x,y) \\
f &= \int 2xydx + g(y) \\
f &= 2y\int xdx + g(y) \\
f &= x^2y + g(y)
\end{aligned}$$

derivarmos parcialmente en y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + g'(y) \\
x^2 - 1 &= x^2 + g'(y) \\
g'(y) &= -1 \\
g(y) &= -y
\end{aligned}$$

finalmente se deduce que

$$x^2y - y = 0$$

es la solución a la ecuación diferencial exacta, esto lo podemos verificar mediante

$$\begin{aligned}
d\left(x^2y - y\right) &= 0 \\
yd\left(x^2\right) + x^2dy - dy &= 0 \\
2xydx + \left(x^2 - 1\right)dy &= 0
\end{aligned}$$

2.4. Factor de integración

Ocurre a veces que no se cumple la condición de ecuación diferencial exacta, por lo que hay que construir la ecuación. Para construir la condición de exactitud se puede encontrar y multiplicar una función que hace que se cumpla la exactitud, dicha función se llama factor integrante.

Definición 10 (Factor integrante)**.** Si la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ no es una ecuación diferencial exacta pero la ecuación diferencial $\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$ si lo es, entonces se dice que la función $\mu(x,y)$ es un factor integrante de la ecuación diferencial.

Teorema 11. *Si la función*

$$(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N$$

solo depende de x entonces la función

$$\mu(x) = \exp\left(\int (\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N\right)dx$$

es un factor integrante y si la función

$$\left(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y\right)/M$$

solo depende de y entonces la función

$$\mu\left(y\right) = \exp\left(\int \left(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y\right)/M\right)dy$$

es un factor integrante también.

Demostración. Consideremos el caso en que el factor integrante solamente es en función de x, la nueva ecuación diferencial es de la forma

$$\mu\left(x\right)M\left(x,y\right)dx + \mu\left(x\right)N\left(x,y\right) = 0$$

para que sea exacta se debe de cumplir que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\mu\left(x\right)M\left(x,y\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\mu\left(x\right)N\left(x,y\right)\\
\mu\left(x\right)\frac{\partial}{\partial y}M\left(x,y\right) &= N\left(x,y\right)\frac{\partial}{\partial x}\mu\left(x\right) + \mu\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x}N\left(x,y\right)\\
\mu\left(x\right)\left(\frac{\frac{\partial}{\partial y}M\left(x,y\right) - \frac{\partial}{\partial x}N\left(x,y\right)}{N\left(x,y\right)}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\mu\left(x\right)
\end{aligned}$$

□

Hay que tener en consideración que estas dos formulas no son las únicas para obtener factores integrantes.

Ejercicio 12. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\left(2x^2 + y\right)dx + \left(x^2y - x\right)dy = 0$$

Tenemos que $2x^2 + y = M\left(x,y\right) \rightarrow 1 = \partial M/\partial y$ y también que $x^2y - x = N\left(x,y\right) \rightarrow 2xy - 1 = \partial N/\partial y$. No es exacta.

Buscamos cada uno de las funciones

$$\begin{aligned}
\left(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x\right)/N &= \frac{1-\left(2xy-1\right)}{x^2y - x}\\
&= -\frac{2}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu\left(x\right) &= e^{-2\int\frac{1}{x}dx}\\
&= x^{-2}
\end{aligned}$$

es un factor integrantes.

$$x^{-2}\left(2x^2 + y\right)dx + x^{-2}\left(x^2y - x\right)dy = 0$$

2.5. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

Sea la ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)$$

es llamada ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden.

Nota 13. Toda ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden es una ecuación diferencial que por medio de factor integrante se puede reducir a una ecuación diferencial exacta.

$$(p(x)\, y - q(x))\, dx + dy = 0$$

Demostración. El factor integrante

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{M_y - N_x}{N} dx\right) = \exp\left(\int p(x)\, dx\right)$$

con esto la ecuación diferencial queda definida por □

$$\exp\left(\int p(x)\, dx\right)(p(x)\, y - q(x))\, dx + \exp\left(\int p(x)\, dx\right) dy = 0$$

y es exacta, luego existe una función f que cumple que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \exp\left(\int p(x)\, dx\right)(p(x)\, y - q(x)) \\
f &= \int \exp\left(\int p(x)\, dx\right)(p(x)\, y - q(x))\, dx + g(y) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \int \exp\left(\int p(x)\, dx\right)(p(x))\, dx + g'(y) \\
\exp\left(\int p(x)\, dx\right) &= \int \exp\left(\int p(x)\, dx\right) p(x)\, dx + g'(y)
\end{aligned}$$

De esta forma podemos obtener la solución general, existen formas más rápidas tomando en consideración las formas diferenciales.

Solución general de la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden. Al multiplicar el factor integrante nos queda una ecuación diferencial de la siguiente forma

$$e^{\int p(x) dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x) dx} p(x)\, y = e^{\int p(x) dx} q(x)$$

la cual la expresión de la izquierda es la derivada de un producto

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right] &= e^{\int p(x)dx}q(x) \\
d\left[e^{\int p(x)dx}y\right] &= e^{\int p(x)dx}q(x)\,dx \\
e^{\int p(x)dx}y &= \int e^{\int p(x)dx}q(x)\,dx + C \\
y(x) &= e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)\,dx + C\right)
\end{aligned}$$

□

Problema 14. Determine una función una solución continua para la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x)$$

en donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

entonces hay que resolver dos ecuaciones diferenciales hacer que el límite por la derecha y por la izquierda de dichas soluciones coincidan.

El cálculo $e^{\int dx} = e^x$ es el factor integrante, con lo que

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}f_1(x)\,dx + C_1\right] \\
&= e^{-x}\left[\int e^x f_1(x)\,dx + C_1\right]
\end{aligned}$$

como en ese intervalo $f_1(x) = 1$ entonces

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= e^{-x}\left[\int e^x dx + C_1\right] \\
&= e^{-x}\left[e^x + C_1\right] \\
&= 1 + e^{-x}C_1
\end{aligned}$$

y en el segundo intervalo podemos

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}f_2(x)\,dx + C_2\right] \\
&= e^{-x}\left[\int e^x f_2(x)\,dx + C_2\right] \\
&= e^{-x}\left[C_2\right] \\
&= C_2 e^{-x}
\end{aligned}$$

al igualar las dos funciones en el límite $x = 1$ nos queda que

$$\begin{aligned}
y_1(1) &= y_2(1) \\
e^{-1}C_1 &= 1 + C_2 e^{-1} \\
\frac{C_1}{e} &= 1 + \frac{C_2}{e} \\
C_1 + C_2 &= e
\end{aligned}$$

con lo que la solución es

$$y(x) = \begin{cases} 1 + e^{-x}(C_2 - e) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ C_2 e^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. Ecuación diferencial de Bernoullí

La ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)\, y^n$$

bajo la sustitución

$$z = y^{1-n} \rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-n)\, y^{-n} \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{1}{(1-n)} \frac{dz}{dx} = y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

con ello, al dividir en la ecuación diferencial por ambos lados por y^n nos queda que

$$\begin{aligned}
y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)\, y^{1-n} &= q(x) \\
\frac{1}{(1-n)} \frac{dz}{dx} + p(x)\, z &= q(x) \\
\frac{dz}{dx} + (1-n)\, p(x)\, z &= (1-n)\, q(x)
\end{aligned}$$

que es una ecuación diferencial lineal con factor integrante $e^{\int(1-n)p(x)dx}$. al multiplicar a ambos lados por el factor integrante logramos la forma diferencial.

$$
\begin{aligned}
e^{\int(1-n)p(x)dx}\frac{dz}{dx}+e^{\int(1-n)p(x)dx}\left(1-n\right)p\left(x\right)z &= e^{\int(1-n)p(x)dx}\left(1-n\right)q\left(x\right)\\
d\left[e^{\int(1-n)p(x)dx}z\right] &= e^{\int(1-n)p(x)dx}\left(1-n\right)q\left(x\right)dx\\
\text{integramos}\\
e^{\int(1-n)p(x)dx}z &= \int e^{\int(1-n)p(x)dx}\left(1-n\right)q\left(x\right)dx+C\\
z &= e^{-\int(1-n)p(x)dx}\int e^{\int(1-n)p(x)dx}\left(1-n\right)q\left(x\right)dx+C\\
y^{1-n} &= e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left(\int e^{\int(1-n)p(x)dx}\left(1-n\right)q\left(x\right)dx+C\right)\\
y\left(x\right) &= \sqrt[1-n]{e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left(\int e^{\int(1-n)p(x)dx}\left(1-n\right)q\left(x\right)dx+C\right)}\\
y\left(x\right) &= \sqrt[1-n]{\frac{\left(\int e^{\int(1-n)p(x)dx}\left(1-n\right)q\left(x\right)dx+C\right)}{e^{\int(1-n)p(x)dx}}}\\
y\left(x\right) &= \sqrt[n-1]{\frac{e^{\int(1-n)p(x)dx}}{\int e^{\int(1-n)p(x)dx}\left(1-n\right)q\left(x\right)dx+C}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 15. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx}+y=xy^2$$

Paras a su forma normal

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y &= y^2\\
y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x^2}y^{-1} &= 1
\end{aligned}
$$

bajo la sustitución $z=y^{-1}\to\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dz}\to-\frac{dz}{dx}=y^{-2}\frac{dy}{dz}$ y reemplazamos

$$
\begin{aligned}
y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1} &= 1\\
-\frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}z &= 1\\
\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z &= -1
\end{aligned}
$$

por lo que el factor integrante es $e^{-\int dx/x}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$ que general la forma diferencial

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x^2}z &= -1\\
d\left[\frac{z}{x}\right] &= -dx\\
\text{integramos}&\\
\frac{z}{x} &= -x+C\\
z &= (-x+C)\,x\\
y^{-1} &= (-x+C)\,x\\
y &= \frac{1}{(C-x)\,x}
\end{aligned}$$

4. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Ya inicialmente se expuso que las ecuaciones diferenciales eran aplicadas a los sistemas dinámicos, estos fenómenos físicos corresponden a aquellos los cuales existen tazas de variaciones medibles.

4.1. Temperatura de un cuerpo

Se calienta agua a la temperatura del punto de ebullición de 100ºC. El agua se remueve, luego del calor y se guarda en un cuarto el cual está a una temperatura constante de 60" C. Después de 3 min la temperatura del agua e s 90ºC . (a) E n c u e n t r e l a t e m p e r a t u r a d e l a g u a d e s p u é s d e 6 min. (b) ¿Cuándo la temperatura del agua será de 75" C? ˜61" C?

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= k\,(T-T_m)\\
\frac{dT}{dt} &= k\,(T-60)\\
\frac{dT}{T-60} &= kdt
\end{aligned}$$

$\frac{dT}{dt} = k\,(T-T_m)$