Prueba Solemne 2

Universidad Gabriela Mistral

5 de octubre de 2015

Problema 1. resuelva la siguiente ecuación diferencial homogénea

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$\begin{aligned} m^4 + m^2 &= 0 \\ m^2\left(m^2+1\right) &= 0 \end{aligned}$$

con lo que las raices posibles son

$$\begin{aligned} m_1 &= 0 \\ m_2 &= 0 \\ m_3 &= i \\ m_4 &= -i \end{aligned}$$

la solución general es de la forma

$$y = c_1 + c_2x + c_3\cos(x) + c_4\sin(x)$$

Problema 2. resuelva la siguiente ecuación diferencial no homogénea mediante el método de los coeficientes indeterminados

$$y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$$

buscamos la solución homogenea

$$\begin{aligned} m^2 + 4m - 2 &= 0 \\ m &= \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2} \\ m &= \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} \\ m &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2} \\ m &= -2 \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$

por lo que la solución $y_h = c_1 e^{\left(-2+\sqrt{6}\right)x} + c_2 e^{\left(-2-\sqrt{6}\right)x}$
luego, la solución particular es de la forma

$$\begin{aligned} y_k &= Ax^2 + Bx + C \\ y_k' &= 2Ax + B \\ y_k'' &= 2A \end{aligned}$$

remplazando en la ecuación diferencial original nos queda que

$$\begin{aligned} 2A + 4\left(2Ax + B\right) - 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) &= 2x^2 - 3x + 6 \\ \left(-2A\right)x^2 + \left(8A - 2B\right)x + \left(2A + 4B - 2C\right) &= 2x^2 - 3x + 6 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} -2A &= 2 \\ 8A - 2B &= -3 \\ 2A + 4B - 2C &= 6 \end{aligned}$$

lo que queda

$$\begin{aligned} A &= -1 \\ B &= \frac{5}{2} \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Problema 3. Resuelva la siguiente ecuación diferencial por transformada de Laplace con las condiciones iniciales $y\left(0\right) = 2$

$$\begin{aligned} y' + 4y &= e^{-4t} \\ \mathcal{L} & \\ \mathcal{L}\left\{y'\right\} + 4\mathcal{L}\left\{y\right\} &= \mathcal{L}\left\{e^{-4t}\right\} \\ sY - y\left(0\right) + 4Y &= \frac{1}{s+4} \\ sY - 2 + 4Y &= \frac{1}{s+4} \\ sY + 4Y &= \frac{1}{s+4} + 2 \\ Y\left(s+4\right) &= \frac{1}{s+4} + 2 \\ Y\left(s+4\right) &= \frac{1}{\left(s+4\right)^2} + \frac{2}{\left(s+4\right)} \end{aligned}$$

por lo que

$$
y = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\}
$$

utilizando el primer teorema de traslación $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\} \\
y(t) &= 2e^{-4t} + e^{-4t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\
y(t) &= 2e^{-4t} + e^{-4t}t
\end{aligned}
$$