Aplicaciones

21 de octubre de 2015

0.1. Problemas de Mezclas

La concentración de soluto en la entrada es constante y la concentración de salida depende del tiempo, si conocemos la tasa de entrada y tasa de salida podemos deducir la ecuación diferencial que modela la concentración de soluto en el estanque. También tenemos la razón de liquido de entrada y la razón de liquido de salida.

$$
\begin{aligned}
V(t) &: \text{volumen en todo instante} \\
Q(t) &: \text{soluto en todo instante} \\
C(t) &: \text{concentración den todo instante} \\
V_0 &: \text{volumen inicial} \\
R_1 &: \\
R_2 &: \\
A &: \\
B &:
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= A - B \\
\frac{dQ}{dt} &= R_1 - R_2 \\
\frac{dQ}{dt} &= A \cdot C_1 - B \cdot \frac{C(t)}{V(t)}
\end{aligned}
$$

Esto nos genera una ecuación lineal que se puede resolver por factor integrante

$$\frac{dQ(t)}{dt} + B\frac{Q(t)}{V(t)} = AC_1$$

En donde

$$P(t) = \frac{B}{V(t)}$$

luego el factor integrande $\mu(t) = e^{\int \frac{B}{V(t)} dt}$ transforma la ecuacion diferencial en una derivada de producto

$$\begin{aligned}
\mu(t) \frac{dQ(t)}{dt} + \mu(t) \frac{B}{V(t)} Q(t) &= \mu(t) AC_1 \\
\frac{d\mu(t) Q}{dt} &= \mu(t) AC_1 \\
\mu(t) Q &= \int \mu(t) AC_1 dt + K \\
Q(t) &= \frac{\int \mu(t) AC_1 dt + K}{\mu(t)} \\
Q(t) &= e^{-\int \frac{B}{V(t)} dt} \int e^{\int \frac{B}{V(t)} dt} AC_1 dt + K
\end{aligned}$$

0.2. Campo de pendiente

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

0.3. Resortes

Ecuación diferencial del movimiento libre no amortiguado

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

donde $\omega^2 = \frac{k}{m}$

pregunta 2

La solución de la ecuacióndе cauchy euler $x^2 y'' + xy' + y = 0$

consideremos que $y = x^m \to y' = mx^{m-1} \to y'' = m(m-1)x^{m-2}$, que luego al remplazar en la ecuación original nos queda

$$\begin{aligned}
x^2 m(m-1)x^{m-2} + xmx^{m-1} + x^m &= 0 \\
m(m-1) + m + 1 &= 0
\end{aligned}$$

que tiene por raices $m_1 = i$ y $m_2 = -i$, con lo que la solución es de la forma $y = c_1 \cos(\ln(x)) + c_2 \sin(\ln(x))$

problema 4

calculamos el wronskiano

$$\begin{aligned}
W &= \begin{vmatrix} x & x \ln x \\ 1 & 1 + \ln x \end{vmatrix} \\
&= x(1 + \ln x) - x \ln x \\
&= x
\end{aligned}$$

calculamos $W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x\ln x \\ \frac{1}{x} & 1+\ln x \end{vmatrix} = -\ln x$

y cálculamos $W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 1$

por lo que $\frac{u_1'}{u_2'} = \frac{W_1/W}{W_2/W} = \frac{W_1}{W_2} = -\ln x = \ln \frac{1}{x}$ por lo que $\phi = \frac{1}{x}$

Si la masa es de 24 libras y se estira 10 pulgadas entonces $24 = k{\cdot}10$, entonces $k = 2,4$, también sabemos

tercera parte

problema 1

Utilice el cambio de variable $t = \sin x$ para resolver la ecuación diferencial

tercera parte

pregunta 2

$m = 1$ $k = \frac{5}{4}$ y $\beta = 1$, que es un movimiento forzado con $f(t) = 3e^{-t/2}$ con $x(0) = -1$ y $x'(0) = -1$. Al plantear la ecuación diferencial nos queda que

$$\begin{aligned} mx'' + \beta x' + kx &= 3e^{-t/2} \\ x'' + x' + \frac{5}{4}x &= 3e^{-t/2} \end{aligned}$$

que tiene por raices de $m^2 + m + \frac{5}{4} = 0$ $m_1 = -\frac{1}{2} + i$ y $m_1 = -\frac{1}{2} - i$ por lo que $x_c = e^{-t/2}(c_1\cos(t) + c_2\sin(t))$. Buscamos ahora

$$\begin{aligned} x_p &= Ae^{-t/2} \\ x_p' &= -\frac{1}{2}Ae^{-t/2} \\ x_p'' &= \frac{1}{4}Ae^{-t/2} \end{aligned}$$

que al remplazar en la ecuación original nos queda $\frac{1}{4}Ae^{-t/2} - \frac{1}{2}Ae^{-t/2} + \frac{5}{4}Ae^{-t/2} = 3e^{-t/2}$ con lo que $A = 3$ por lo que la solución general queda $x = e^{-t/2}(c_1\cos(t) + c_2\sin(t)) + 3e^{-t/2}$. Si le aplicamos que $x(0) = -1$

$$\begin{aligned} x &= e^{-t/2}(c_1\cos(t) + c_2\sin(t)) + 3e^{-t/2} \\ -1 &= c_1 + 3 \\ c_1 &= -4 \end{aligned}$$

si derivamos

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}e^{-t/2}((-c_2 + 8)\sin(t) + 2(c_2 + 2)\cos(t) - 3) \\ -1 &= \frac{1}{2}(2(c_2 + 2) - 3) \\ c_2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

por lo que el movimiento es $x = e^{-t/2}\left(-4\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t)\right) + 3e^{-t/2}$

primera parte problema 1

el desplazamiento inicial es de $\frac{5}{6}$pies, la masa es $m = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$ y luego la constante de elasticidad por medio de la ley de Hooke $24 = \frac{5}{6}k \to k = \frac{144}{5}$. Luego

$$\begin{aligned} x' + \frac{\frac{144}{5}}{\frac{3}{4}}x &= 0 \\ x' + \frac{192}{5}x &= 0 \end{aligned}$$

problema 2

Si se sabe que $y_1 = \ln\left(x^2\right)$ entonces

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int pdx}}{y_1^2}dx \\ y_2 &= \ln\left(x^2\right) \int \frac{e^{-\int 4dx}}{\left(\ln\left(x^2\right)\right)^2}dx \\ y_2 &= \ln\left(x^2\right) \int \frac{e^{-4x}}{\left(\ln\left(x^2\right)\right)^2}dx \end{aligned}$$

la cual no aparece en las alternativas

como la solución particular depende de $g\left(x\right)$ y esta no aparece en las alternativas, entonces (e) ninguna de las anteriores.

problema 1

$m = \frac{2}{32}$ y k lo podemos obtener por la ley de Hooke, $2 = 1{,}5k \to k = \frac{2}{1{,}5} = \frac{4}{3}$ por lo que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{32}}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ por lo que la solución es de la forma, ninguna de las alternativas tiene esa frecuencia angular (e)

problema 3

$$\begin{aligned} y &= e^x \\ y' &= e^x \\ y'' &= e^x \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned} e^x + ae^x + be^x &= e^x \\ a + b &= 0 \end{aligned}$$

alternativa (b)

problema 2, segunda parte

$m = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$slug y $8 = 2k \to k = 4\text{lb/ft}$, la constante de amortiguamiento es $\beta = 2$

luego, la ecuación es $\frac{1}{4}x'' + 2x' + 4x = 0$

0.4. Ecuaciones autónomas

las ecuaciones autónomas son de la siguiente forma

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x\right)$$

Ecuaciones autónomas