Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Leonardo Jofre

3 de mayo de 2016

0.1. Ecuaciones lineales homogéneas

Problema 0.1.1. Resuelva las ecuaciones diferenciales siguientes:

1. $2y'' - 5y' - 3y = 0$
2. $y'' - 10y' + 25y = 0$
3. $y'' + y' + y = 0$

Obtenemos las raíces de la ecuación auxiliar y con ello podremos obtener la solución de la ecuación diferencial

1. $2m^2 - 5m - 3 = 0 \Rightarrow (2m+1)(m-3) = 0 \Rightarrow m_1 = -1/2, m_2 = 3 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{3x}$
2. $m^2 - 10m + 25 = 0 \Rightarrow (m-5)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 5 \Rightarrow y(x) = e^{5x}(c_1 + xc_2)$
3. $m^2 + m + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow y(x) = e^{-x/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$

Problema 0.1.2. Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

en donde $y(0) = -1$, y además $y'(0) = 2$

Las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 - 4m + 13 = 0$ son $m_1 = 2 + 3i$ y $m_2 = 2 - 3i$, de modo que

$$y(x) = e^{2x}(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x))$$

Al aplicar las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} y(0) &= -1 \\ e^{2\cdot 0}\left(c_1\cos(3\cdot 0)+c_2\sin(3\cdot 0)\right) &= -1 \\ c_1\cos(0)+c_2\sin(0) &= -1 \\ c_1 &= -1 \end{aligned}$$

$$y'(0) = 2$$

0.2. Coeficientes indeterminados, método de superposición

Problema 0.2.1. Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$

al resolver la ecuación homogénea asociada $y'' + 4y' - 2y = 0 \Rightarrow y_c = c_1 e^{-\left(2+\sqrt{6}\right)x} + c_2 e^{\left(-2+\sqrt{6}\right)x}$

Como $g(x)$ es un polinomio cuadrático asumimos que la solución particular también lo es

$$\begin{aligned} y_p &= Ax^2 + Bx + C \\ y_p' &= 2Ax + B \\ y_p'' &= 2A \end{aligned}$$

Al evaluar en la ecuación nos queda que

$$-2Ax^2 + (8A - 2B)x + (2A + 4B - 2C) = 2x^2 - 3x + 6$$

Al resolver el sistema de ecuación nos queda que: $A = -1, B = -\frac{5}{2}, C = -9$, así remplazamos y nos queda que

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 e^{-\left(2+\sqrt{6}\right)x} + c_2 e^{\left(-2+\sqrt{6}\right)x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

Problema 0.2.2. Determine la solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - y' + y = 2\sin(3x)$$

Como $f(x) = 2\sin(3x)$ entonces

$$\begin{aligned} y_p &= A\cos(3x) + B\sin(3x) \\ y_p' &= -3\sin(3x) + 3B\cos(3x) \\ y_p'' &= -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) \end{aligned}$$

, luego al diferenciar y_p y sustituir en la ecuación diferencial, y luego factorizando:

$$(-8A - 3B)\cos(3x) + (3A - 8B)\sin(3x) = 2\sin(3x)$$

con lo que se puede concluir que $-8A - 3B = 0$ y además $3A - 8B = 2$ con lo que obtenemos que $A = \frac{6}{73}$ y $B = -\frac{16}{73}$ por lo que la solución particular de esta ecuación diferencial es

$$y_p = \frac{6}{73}\cos(3x) - \frac{16}{73}\sin(3x)$$

Problema 0.2.3. Determinar la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 3y = 6xe^{-2x}$$

buscamos las soluciones de la ecuación característica para encontrar las soluciones de la ecuación homogénea:

$$\begin{aligned} m^2 + 4m + 3 &= 0 \\ m &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\ m &= \frac{-4 \pm 2}{2} \\ m &= -2 \pm 1 \end{aligned}$$

por lo que la solución de la ecuación homogénea está dada por $y_h = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}$

la ecuación particular está definida como $y_p = Axe^{-2x} + Be^{-2x}$ para poder conservar la independencia lineal entre las soluciones particulares y de la homogénea.

6

$$\begin{aligned} e^{2x} y_p &= Ax + B \\ e^{2x} y_p' + 2e^{2x} y_p &= A \\ e^{2x} y_p'' + +2e^{2x} y_p' + 2\left(e^{2x} y_p' + 2e^{2x} y_p\right) &= 0 \end{aligned}$$

Lo que es equivalente a

$$\begin{aligned} y_p &= e^{-2x}(Ax + B) \\ y_p' + 2y_p &= Ae^{-2x} \\ y_p'' + 4y_p' + 4y_p &= 0 \end{aligned}$$

La tercera ecuación se puede descomponer

$$\begin{aligned}
y_p'' + 4y_p' + 4y_p &= 0 \\
6xe^{-2x} + e^{-2x}(Ax+B) &= 0 \\
6x + (Ax+B) &= 0
\end{aligned}$$

por lo que $A = -6$ y $B = 0$
por lo que la solución general es

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} - 6e^{-3x}$$

0.3. Método del anulador

El método del anulador es muy parecido al de los coeficientes indeterminados

0.4. Reducción de orden

Resumen 0.4.1. Si tenemos una ecuación diferencial de la forma

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0 \tag{0.4.1}$$

y además y_1 es una solución conocida de la ecuación diferencial entonces la segunda solución está dada por:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(X)dx}}{y_1^2} dx \tag{0.4.2}$$

Problema 0.4.2. Dada

$$x\sin(x)\,y''+(2\sin(x)-x\cos(x))\,y'-\cos(x)\,y=\sin(x)\cos(x)-x$$

no olvidando normalizar adecuadamente

$$\begin{aligned} y''+\frac{(2\sin(x)-x\cos(x))}{x\sin(x)}y'-\frac{\cos(x)}{x\sin(x)}y &= \frac{\sin(x)\cos(x)-x}{x\sin(x)} \\ y''+\left(\frac{2}{x}-\cot(x)\right)y'-\frac{\cot(x)}{x}y &= \frac{\cos(x)}{x}-\csc(x) \end{aligned}$$

Obtener una solución de la ecuación homogénea de la forma $y_1=x^{\alpha}$, para ello derivamos la cantidad que sean necesarias y remplazamos en la ecuación diferencial homogénea asociada.

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{\alpha} \\ y_1' &= \alpha x^{\alpha-1} \\ y_1'' &= \alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2} \end{aligned}$$

remplazamos en

$$
\begin{aligned}
y'' + \left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right) y' - \frac{\cot(x)}{x} y &= 0 \\
\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right) \alpha x^{\alpha-1} - \frac{\cot(x)}{x} x^{\alpha} &= 0 \\
\frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} x^{\alpha} + \frac{\left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right)}{x} \alpha x^{\alpha} - \frac{\cot(x)}{x} x^{\alpha} &= 0 \\
\text{dividir entre } x^{\alpha} & \\
\frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} + \frac{\left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right)}{x} \alpha - \frac{\cot(x)}{x} &= 0 \\
\text{multiplicar por } x^2 & \\
\alpha(\alpha-1) + \left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right) x\alpha - \cot(x)\, x &= 0 \\
\alpha(\alpha-1) + (2 - \cot(x)\, x)\, \alpha - \cot(x)\, x &= 0 \\
\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - \cot(x)\, x\alpha - \cot(x)\, x &= 0 \\
\alpha^2 - \alpha + 2\alpha - \cot(x)\, x(\alpha+1) &= 0 \\
\alpha^2 + \alpha - \cot(x)\, x(\alpha+1) &= 0 \\
(\alpha+1)\,\alpha - \cot(x)\, x(\alpha+1) &= 0 \\
(\alpha+1)(\alpha - \cot(x)\, x) &= 0
\end{aligned}
$$

el lado derecho se anula cuando $\alpha = -1$ por lo que la solución $y_1 = x^{-1} = \frac{1}{x}$

mediante la ecuación de Abel, identificando primero que $p(x) = \left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right)$ se puede obtener la solución y_2

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx \\
& \frac{1}{x} \int \frac{e^{-\int \left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right)dx}}{\frac{1}{x^2}} dx \\
&= \frac{1}{x} \int x^2 e^{-\int \left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right)dx} dx \\
&= \frac{1}{x} \int x^2 e^{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x^2}\right)} dx \\
&= \frac{1}{x} \int x^2 \frac{\sin(x)}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{x} \int \sin(x)\, dx \\
&= -\frac{\cos(x)}{x}
\end{aligned}$$

Usando variación de parámetro buscamos solución particular

$$y'' + \left(\frac{2}{x} - \cot(x)\right) y' - \frac{\cot(x)}{x} y = \frac{\cos(x)}{x} - \csc(x)$$

calculamos el Wronskiano de las soluciones de la ecuación homogénea (usamos

$$
\begin{aligned}
W\left(\frac{1}{x}, -\frac{\cos(x)}{x}\right) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{\cos(x)}{x} \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{\cos(x)}{x^2}+\frac{\sin(x)}{x} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{\cos(x)}{x^2}+\frac{\sin(x)}{x}\right)-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{\cos(x)}{x}\right) \\
&= \frac{\sin(x)}{x^2}
\end{aligned}
$$

calculamos W_1 y W_2

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\cos(x)}{x} \\ \frac{\cos(x)}{x}-\csc(x) & \frac{\cos(x)}{x^2}+\frac{\sin(x)}{x} \end{vmatrix} \\
&= -\left(\frac{\cos(x)}{x}-\csc(x)\right)\cdot\left(-\frac{\cos(x)}{x}\right) \\
&= \frac{\cos^2(x)-x\cot(x)}{x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_2 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{\cos(x)}{x}-\csc(x) \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{\cos(x)}{x}-\csc(x)\right) \\
&= \frac{\cos(x)-x\csc(x)}{x^2}
\end{aligned}
$$

calculamos u_1 y u_2

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \int \frac{\frac{\cos^2(x)-x\cot(x)}{x^2}}{\frac{\sin(x)}{x^2}}dx \\
u_1 &= \int \csc(x)\left(\cos^2(x) - x\cot(x)\right)dx \\
&= \cos(x) - x\csc(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2 &= \int \frac{\frac{\cos(x)-x\csc(x)}{x^2}}{\frac{\sin(x)}{x^2}}dx \\
u_2 &= \int \csc(x)\left(\cos(x) - x\csc(x)\right)dx \\
&= x\cot(x)
\end{aligned}
$$

por lo que la solución particular es

$$
\begin{aligned}
y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\
y_p &= \frac{(\cos(x) - x\csc(x))}{x} + x\cot(x)\left(-\frac{\cos(x)}{x}\right)
\end{aligned}
$$

Problema 0.4.3. La función $y_1 = x^2$ es una solución de $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, determine la solución general

Partimos de la forma reducida de la ecuación,

$$
y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0
$$

y vemos que de acuerdo con 0.4.2 obtenemos que

$$
\begin{aligned}
y_2 &= x^2 \int \frac{e^{-\int\left(-\frac{3}{x}\right)dx}}{x^4} dx \\
&= x^2 \int \frac{e^{3\int dx/x}}{x^4} dx \\
&= x^2 \int \frac{e^{3\ln(x)}}{x^4} dx \\
&= x^2 \int \frac{e^{\ln\left(x^3\right)}}{x^4} dx \\
&= x^2 \int \frac{x^3}{x^4} dx \\
&= x^2 \int \frac{1}{x} dx \\
&= x^2 \ln(x)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la solución general está definida por:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln(x)$$

Problema 0.4.4. Determine la segunda solución de la ecuación diferencial por medio de reducción de orden de la ecuación diferencial

$$y'' + 5y' = 0; y_1 = 1$$

Al pasar la ecuación diferencial a la forma estándar $y'' + 5y' + 0y = 0$ con lo que identificamos que $P(x) = 5$ con lo que la segunda solución queda definida por:

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx \\
&= 1 \int \frac{e^{-\int 5dx}}{1^2} dx \\
&= \int e^{-5\int dx} dx \\
&= \int e^{-5x} dx \\
&= \frac{e^{-5x}}{-5} \\
&= -\frac{e^{-5x}}{5}
\end{aligned}
$$

Verificamos si esta función es verdaderamente una solución de la ecuación diferencial tomando en consideración las derivadas sucesivas $y_2 = -\frac{e^{-5x}}{5} \Rightarrow y_2' = e^{-5x} \Rightarrow y_2'' = -5e^{-5x}$, luego al remplazarla en la ecuación diferencial nos queda que:

$$
\begin{aligned}
-5e^{-5x} + 5e^{-5x} &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se cumple la igualdad.

0.5. Ecuación de Cauchy-Euler

0.5.1. Problemas avanzados

Resolver el problema con condiciones iniciales $xy'' + (2x-1)\,y' - 2y = x^2 e^{-3x}$ bajo las condiciones iniciales $y\left(\frac{1}{2}\right) = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ sabiendo que $y_1 = e^{mx}$ es solución para la ecuación homogénea.

remplazando en la ecuación original se puede obtener el valor de m para la ecuación homogénea:

$$
\begin{aligned}
xy'' + (2x-1)\,y' - 2y &= 0 \\
xm^2 e^{mx} + (2x-1)\,me^{mx} - 2e^{mx} &= 0 \\
xm^2 + (2x-1)\,m - 2 &= 0 \\
x\left(m^2 + 2m\right) - (m+2) &= 0 \\
m &= -2
\end{aligned}
$$

Por lo que $y_1 = e^{-2x}$

Como tenemos una de las soluciones de la ecuación homogénea de segundo orden podemos encontrar la segunda solución mediante la fórmula de Abel

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y^2} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int \frac{e^{-\int \frac{(2x-1)}{x} dx}}{e^{-4x}} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int \frac{e^{\int \frac{1-2x}{x} dx}}{e^{-4x}} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int \frac{e^{\int \frac{1}{x} - 2dx}}{e^{-4x}} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int \frac{e^{\ln(x) - 2x}}{e^{-4x}} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int \frac{e^{\ln(x)} e^{-2x}}{e^{-4x}} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \int x e^{2x} dx \\
y_2 &= e^{-2x} \left(x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx \right) \\
y_2 &= e^{-2x} \left(x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \right) \\
y_2 &= \frac{1}{4} (2x - 1)
\end{aligned}
$$