Ecuaciones diferenciales exactas

Leonardo Andrés Jofré Flor

August 25, 2015

Una ecuación diferencial exacta es aquella que se puede representar como una difencial total.

$$z = f(x,y) = c \implies dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

un ejemplo de ecuación diferencial exacta puede ser

$$2xydx + \left(x^2 - 1\right)dy = 0$$

En general cualquier ecuación de la forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dx = 0$$

es una ecuación diferencial exacta si se cumple la siguiente condición que garantiza que es la representación de la diferencial total de alguna función

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Teorema (Clairaut-Schwartz)**.** *Sea* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *y además se cumple que* $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ *se cumple que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Gracias a este teorema podemos obtener un algoritmo para resolver cualquier ecuación diferencial exacta.

Ejemplo 1. Resolver la siguiente ecuación diferencial exacta

$$2xydx + \left(x^2 - 1\right)dy = 0$$

Observamos que $M(x,y) = 2xy$, además $N(x,y) = x^2 - 1$, por lo que debemos verificar la condición

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

esto quiere decir que existe un f que cumple

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

consideremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= M(x,y) \\
f &= \int 2xydx + g(y) \\
f &= 2y\int xdx + g(y) \\
f &= x^2y + g(y)
\end{aligned}$$

derivarmos parcialmente en y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + g'(y) \\
x^2 - 1 &= x^2 + g'(y) \\
g'(y) &= -1 \\
g(y) &= -y
\end{aligned}$$

finalmente se deduce que

$$x^2y - y = 0$$

es la solución a la ecuación diferencial exacta, esto lo podemos verificar mediante

$$\begin{aligned}
d\left(x^2y - y\right) &= 0 \\
yd\left(x^2\right) + x^2dy - dy &= 0 \\
2xydx + \left(x^2 - 1\right)dy &= 0
\end{aligned}$$

Example 2. Resolver $\left(e^{2y} - y\cos xy\right)dx + \left(2xe^{2y} - x\cos xy + 2y\right)dy = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{dy} &= 2e^{2y} - y\cos(xy)\,x - \cos(xy) \\
\frac{\partial N}{dx} &= 2e^{2y} - y\cos(xy)\,x - \cos(xy)
\end{aligned}$$

por lo que es una ecuación diferencial exacta

0.1 Factor Integrante

Ocurre que no siempre se cumple la condición de ecuación diferencial exacta. Para construir esta condición se debe encontrar y multiplicar una función μ que haga que se cumpla, dicha función se llama factor integrante.

Definición 3 (Factor integrante)**.** Si la ecuación diferencial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \quad = \quad 0$$

no es una ecuación diferencial exacta pero la ecuación diferencial

$$\mu(x,y)\,M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0$$

si lo es, entonces se dice que la función $\mu(x,y)$ es un factor integrante de la ecuación diferencial.

Teorema 4. *Si la función*

$$(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)\,/N$$

solo depende de x entonces la función

$$\mu(x) = \exp\left(\int (\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)\,/N\right) dx$$

es un factor integrante y si la función

$$(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)\,/M$$

solo depende de y entonces la función

$$\mu(y) = \exp\left(\int (\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)\,/M\right) dy$$

es un factor integrante también.

Demostración. Consideremos el caso en que el factor integrante solamente es en función de x, la nueva ecuación diferencial es de la forma

$$\mu(x)\,M(x,y)\,dx + \mu(x)\,N(x,y) = 0$$

para que sea exacta se debe de cumplir que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\mu(x)\,M(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\mu(x)\,N(x,y) \\
\mu(x)\,\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) &= N(x,y)\,\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) + \mu(x)\,\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) \\
\mu(x)\left(\frac{\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)}{N(x,y)}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\mu(x)
\end{aligned}$$

□

Hay que tener en consideración que estas dos formulas no son las únicas para obtener factores integrantes.

Ejercicio 5. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\left(2x^2 + y\right) dx + \left(x^2 y - x\right) dy = 0$$

Tenemos que $2x^2 + y = M(x, y) \to 1 = \partial M/\partial y$ y también que $x^2 y - x = N(x, y) \to 2xy - 1 = \partial N/\partial y$. No es exacta.

Buscamos cada uno de las funciones

$$\begin{aligned} \left(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x\right)/N &= \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2 y - x} \\ &= -\frac{2}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{-2\int \frac{1}{x} dx} \\ &= x^{-2} \end{aligned}$$

es un factor integrantes, por lo que

$$x^{-2}\left(2x^2 + y\right) dx + x^{-2}\left(x^2 y - x\right) dy = 0$$

es exacta