El libro de los problemas

May 27, 2016

Con el objetivo de ir depositando los pequeños logros personales con el objetivo de una creativa sistematización conceptual

Problem 1. Las series de tiempo son. Luego encuentre una predicción de $f(x+h)$ como combinación lineal de los valores anteriores de $f(t)$

$$f(t+h) = \int_{t_0}^{t} \psi(x) f(x) \, dx$$

mediante la siguiente aproximación $f(t+h) \simeq f(t) + f'(t) \cdot h$ por lo que finalmente se tiene que

$$f(t) + f'(t) \cdot h = \int_{t_0}^{t} \psi(x) f(x) \, dx$$

que tiene buen comportamiento cuando $h \to 0$. Derivando en ambos lados obtenemos que

$$f'(t) + f''(t) \cdot h = \psi(t) f(t)$$

La cual es una ecuación diferencial lineal de segundo orden de coeficientes variables

$$f''(t) \cdot h + f'(t) - \psi(t) f(t) = 0$$

La cual se puede resumir en la ecuación diferencial de Sturm-Liouville, esto nos permite encontrar la solución como combinación lineal de una base ortogonal (creo)

Existe una versión variacional del problema que nos permite resolver el problema que la bibliografía

$$\min_{\psi} J(\psi) = \int_{t_0}^{t} \left(f(t+h) - \int_{t_0}^{t} \psi(x) f(x) \, dx \right)^2 dt$$

minimizamos

$$\begin{aligned}
F(\epsilon) &= J(\psi+\epsilon v) \\
&= \int_{t_0}^{t}\left(f(t+h)-\int_{t_0}^{t}(\psi(x)+\epsilon v(x))\,f(x)\,dx\right)^2 dt \\
&= \int_{t_0}^{t}\left(f(t+h)-\int_{t_0}^{t}(\psi(x)+\epsilon v(x))\,f(x)\,dx\right)^2 dt
\end{aligned}$$

La cual se puede resolver mediante la ecuación de Euler-Lagrange, o por menos mediante la definición por la cual se llega a la ecuación de Euler-Lagrange

Problem 2. Encuentre el valor de h que optimice $\operatorname{cov}(f(t), f(t+h))$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(f(t), f(t+h)) &= \operatorname{cov}(f(t), f(t+h)) \\
&= \operatorname{cov}(f(t), f(t)+f'(t)\cdot h) \\
&= \operatorname{cov}(f(t), f(t)) + h\cdot \operatorname{cov}(f(t), f'(t))
\end{aligned}$$

Problem 3. Encuentre la función $\psi(x)$ que produzca que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\int \psi(t)\,x_i^t dt\right)^2}{n}$$

sea mínimo

Problem 4. ¿Existe alguna relación entre en análisis de componentes principales y el metodo de ortogonalización de Grand-Smith?

Problem 5. Sea dos conjuntos de entidades, una de m elementos y otra de n elementos. El primer conjunto de entidades selecciona n_i elementos de la segunda entidadad asignandole un número since zero to one. Si el numero asignado es menor a α entonces se devuelve el elemento a la bolsa. Los elementos a los que se le asignó un número entre α y 1 quedan marcados y no volverán a ser marcados y pueden ahora ser seleccionados por otros elementos de M.

Problem 6. Defina lo que es un espacio de Hilbert y encuentre 10 ejemplos

Problem 7. Defina lo que es un espacio de Banach y encuentre 10 ejemplos

Problem 8. Sea un campo escalar que representa el campo gravitacional generado por un triangulo, dado el campo escalar encuentre los vertices del triángulo que más se asemeje al mismo. Defina el algoritmo de decenso de gradiente necesario.

Problem 9. Un ejemplo de Filtro de Kalman (mejorar esta pregunta)

Demostrar todas las propiedades de la covarianza

Problem 10. Demuestre que $\min \operatorname{cov}(f(t), g(ax+b))$ si se cumple que $\operatorname{cov}\left(f(t), \frac{\partial}{\partial a} g(ax+b)\right) = 0$ y $\operatorname{cov}\left(f(t), \frac{\partial}{\partial b} g(ax+b)\right) = 0$

Problem 11. Defina un proceso de poisson y la estimación de λ_t

Un proceso de Poisson está definido
$Y_{i+1} = Y_i + e_i$ donde $e_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$
Para estimar λ_t
Si la distribución de poisson está definida como $\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ entonces la probabilidad que la cantidad de eventos sea igual al promerdio es

$$\frac{\lambda^{\lambda} e^{-\lambda}}{\lambda!}$$

Problem 12. A partir de la función de cuantía de la distribución binomial obtenga la función de cuantía de la distribución de Poisson

La distribución binomial

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

si $\lambda = np \to p = \frac{\lambda}{n}$, o sea, la cantidad de ensayos es muy grande y la probabilidad de éxito es muy pequeña por $n \to \infty \implies p \to 0$ cualidad para lo que llamamos "sucesos raros"

Así mismo, podemos considerar un tiempo t en la que se pueden observar las ocurrencias

$$P(X(t) = x) = \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-x}$$

entonces

$$\begin{aligned} P(X(t) = x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-x} \\ P(X(t) = x) &= \frac{(\lambda t)^x e^{-(\lambda t)}}{x!} \end{aligned}$$

En resumen

$$\lim_{n\to\infty} \text{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) = \text{Pois}(\lambda)$$

Problem 13. sea

$$\pi_n(\lambda) = P(X = n)$$

se una distribución de Poisson de parámetro λ
calcule la derivada de $\pi_n(\lambda)$ con respecto λ

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}\pi_n(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\ \frac{d}{d\lambda}\pi_n(\lambda) &= \frac{1}{n!}\frac{d}{d\lambda}\lambda^n e^{-\lambda} \\ \frac{d}{d\lambda}\pi_n(\lambda) &= \frac{1}{n!}\left(\lambda^n(-1)e^{-\lambda} + e^{-\lambda} n \lambda^{n-1}\right) \\ \frac{d}{d\lambda}\pi_n(\lambda) &= -\pi_n(\lambda) + \pi_{n-1}(\lambda) \end{aligned}$$

1 proceso de Poisson no homogeneo

Un proceso de Poisson no homogeneno cumple las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}
P\left(X_{t+\varepsilon}-X_{t}>1\right) &= o\left(\varepsilon\right)\\
P\left(X_{t+\varepsilon}-X_{t}=1\right) &= \lambda\left(t\right)\varepsilon+o\left(\varepsilon\right)\\
P\left(X_{t+\varepsilon}-X_{t}=0\right) &= 1-\lambda\left(t\right)\varepsilon+o\left(\varepsilon\right)
\end{aligned}$$

por simplicidad se asume $\lambda\left(t\right)$ como continua consideremos y por simplicidad de notación $p_{n}\left(t\right)=P\left(X_{t}=n\right)$ y $\Lambda\left(t\right)=\int_{0}^{t}\lambda\left(\tau\right)d\tau$

La intensidad en el dominio es

$$\lambda\left(\mathbf{s}\right)=\lim_{\mu(B)\rightarrow0}\frac{P\left(\text{evento en }B\right)}{\mu\left(B\right)}$$

donde B es una vecindad de $\mathbf{s}$

La función de intensidad acumilativa está definida por

$$\Lambda\left(t\right)=\int_{0}^{t}\lambda\left(\tau\right)d\tau$$

por lo que

$$N\left(t\right)\sim\text{Pois}\left(\Lambda\left(t\right)\right)$$

Estimación de la intensidad por medio de máxima verosimilitud de la función de intensidad $\lambda\left(t\right)$

$$P\left(N\left(t\right)=x\right)=\frac{e^{-\Lambda(t)}\Lambda\left(t\right)^{x}}{x!}$$

El función log verosimil para una realización es

$$\log L=\sum_{i=1}^{m}\log\lambda\left(\tau_{i}\right)-\int_{0}^{T}\lambda\left(t\right)dt$$

Se puede representar de forma integral de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\log L &= \int_{0}^{T}\log\lambda\left(t\right)N'\left(t\right)dt-\int_{0}^{T}\lambda\left(t\right)dt\\
\log L &= \int_{0}^{T}\log\lambda\left(t\right)N'\left(t\right)-\lambda\left(t\right)dt
\end{aligned}$$

Usando la ecuación de Euler Lagrange para maximizar esta integral

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial\dot{\lambda}}=0$$

como la función a ser siempre positiva $\lambda\left(t\right)=\exp\left(f\left(t\right)\right)$

$$
\begin{aligned}
\log L &= \int_0^T \log \lambda(t)\, N'(t)\, dt - \int_0^T \lambda(t)\, dt \\
\log L &= \int_0^T f(t)\, N'(t) - \exp(f(t))\, dt
\end{aligned}
$$

tratemos de resolver la siguiente ecuación mediante integral a trozos
buscamos primero una primitiva que permita que

$$
\begin{aligned}
\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} x(t)\, dt &= f(\tau_{i+1}) \\
\int_0^{\tau_{i+1}} x(t)\, dt - \int_0^{\tau_i} x(t)\, dt &= f(\tau_{i+1}) \\
X(\tau_{i+1}) - X(\tau_i) &= f(\tau_{i+1}) \\
X(\tau_{i+1}) - X(\tau_{i+1} - d_t) &= f(\tau_{i+1}) \\
X(\tau_{i+1}) - X(\tau_{i+1}) - (\tau_{i+1} - \tau_i)\, x(\tau_{i+1}) &= f(\tau_{i+1}) \\
-(\tau_{i+1} - \tau_i)\, x(\tau_{i+1}) &= f(\tau_{i+1}) \\
(\tau_i - \tau_{i+1})\, x(\tau_{i+1}) &= f(\tau_{i+1}) \\
x(\tau_{i+1}) &= \frac{f(\tau_{i+1})}{\tau_i - \tau_{i+1}} \\
x(t) &= \frac{f(t)}{\tau_i - t}
\end{aligned}
$$

$$
\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \frac{f(t)}{\tau_i - t} - \exp(f(t))\, dt \quad =
$$

buscamos una ecuación diferencial que tenga dos constantes para dos condiciones iniciales y así hacer que la curva sea continua y de derivada continua

El caso más general es

$$
\log L = \sum_{i=1}^{m} \log \lambda(x_i, y_i, \tau_i) - \int \int_R \int_0^T \lambda(x, y, t)\, dt dA
$$

con $\lambda(x, y, t) > 0$

Si Se hace una triangulación de Delaunay

2 proceso de poisson y procesos autoexitados

Problem 14. Selección de la función de intensidad

Un tipo de modelo aplicado a problemas de genética de poblaciones. Kendall (1949) Introduce un proceso de nacimiento y muerte en función de la edad

$$\lambda(t) = \mu + \sum_i g(t - t_i)$$

Si consideramos que la función de intensidad es un polinomio de grado N

$$\lambda(t) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k t^k$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\log L &= \sum_{i=1}^{m} \log\left(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \tau_i^k\right) - \int_0^T \sum_{k=0}^{N} \alpha_k t^k dt \\
\log L &= \sum_{i=1}^{m} \log\left(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \tau_i^k\right) - \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \frac{T^{k+1}}{k+1}
\end{aligned}$$

Al derivar con respecto el j ésimo coeficiente α_j

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \log L = \sum_{i=1}^{m} \frac{\tau_i^j}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \tau_i^k} - \frac{T^{j+1}}{j+1}$$

Si tomamos

$$\nabla \log L = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\tau_i^j}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \tau_i^k} - \frac{T^{j+1}}{j+1}\right)_{1 \leq j \leq N}$$

Se pueden estimar los coeficientes con

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \epsilon \nabla \log L$$

con la condición inicial $\mathbf{x}_0 = \vec{0}$

Estimar intensidad temporal de los eventos

$$\lambda(t) = \exp\left(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k t^k\right) > 0$$

Por lo que

$$
\begin{aligned}
\log L &= \sum_{i=1}^{m} \log\left(\exp\left(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \tau_i^k\right)\right) - \int_0^T \exp\left(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k t^k\right) dt \\
\log L &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \tau_i^k - \int_0^T \exp\left(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k t^k\right) dt \\
&= \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \sum_{i=1}^{m} \tau_i^k - \int_0^T \exp\left(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k t^k\right) dt \\
&= \overrightarrow{\alpha} \cdot \left[\|\tau\|_k^k \text{ for } j \text{ in } \{0,\ldots,\operatorname{len}(\alpha)\}\right] - \operatorname{integrate}\left(\operatorname{lambda} t : \exp\left(\operatorname{poly}\left(\overrightarrow{\alpha}, t\right)\right), 0, T\right)
\end{aligned}
$$

Al derivar con respecto el j ésimo coeficiente α_j

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \log L &= \sum_{i=1}^{m} \tau_i^j - \int_0^T t^j \exp\left(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k t^k\right) dt \\
\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \log L &= \operatorname{sum}\left(\tau^j\right) - \int_0^T t^j \exp\left(\operatorname{poly}(\alpha, t)\right) dt \\
\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \log L &= \operatorname{sum}\left(\operatorname{pow}(\tau, j)\right) - \int_0^T \operatorname{pow}(t, j) \exp\left(\operatorname{poly}(\alpha, t)\right) dt \\
\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \log L &= \operatorname{sum}\left(\operatorname{pow}(\tau, j)\right) - \operatorname{integrate}\left(\operatorname{pow}(t, j) \cdot \exp\left(\operatorname{poly}(\alpha, t)\right), 0, T\right)
\end{aligned}
$$

luego

$$\nabla \log L(\alpha) = [\operatorname{sum}\left(\operatorname{pow}(\tau, j)\right) - \operatorname{integrate}\left(\operatorname{lambda} t : \operatorname{pow}(t, j) \cdot \exp\left(\operatorname{poly}(\alpha, t)\right), 0, T\right) \text{ for } j \text{ in } \{0,\ldots,\operatorname{len}(\alpha)$$

nuevamente

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \epsilon \nabla \log L(\alpha_n)$$

Por lo que se requieren buenas condiciones iniciales
otra formula interesante es

$$\mathbb{E}\left[(X-\lambda)\, g(X)\right] = \lambda \mathbb{E}\left[g(X+1) - g(X)\right]$$

por lo que

$$L(\lambda) = e^{-\Lambda} \frac{\Lambda^n}{n!} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda(x_i)}{\Lambda}$$

el cual es el valor medio de la cantidad de eventos en el momento t

$$\Lambda(t) = \mathbb{E}[Y_t]$$

Un proceso de Poisson no homogeneo es una generalización

Summary 15 (Kernel Density Estimation). Sea x_i una muestra aleatoria identicamente distribuida para una distribución desconocida f, buscamos estimar la forma de f.El KDE es

$$\begin{aligned}\hat{f}_h(x) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(x - x_i) \\ &= \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)\end{aligned}$$

Donde K debe cumplir las siguientes propiedades
$K(x) = K(-x)$
$\int_{\text{suport}} K(u)\,du = 1$
$\int u^2 K(u)\,du = \sigma_K^2 > 0$
Donde Kes el Kernel - una función non-negativa
Existen muchos Kernels:
uniforme
triangular
biweight
triweight
Epanechnikov
normal
Algunos ejemplos

Summary 16 (Akaike information criterion). Es una medida de calidad relativa de un modelo dado un conjunto de datos, AIC mide la calidad de un modelo relativo a otro modelo. Está fundado en la teoría de la información $AIC = 2k - 2\ln(L)$ donde L es la función de verosimilitud.

Summary 17 (Regresión Kernel). Es un metodo para estimar la esperanza condicional de una variable aleatoria
Regresión y máxima verosimilitud
$e_i = y_i - ax_i - b \sim N$

$$\begin{aligned}L &= \prod_i f(e_i) \\ L &= \prod_i \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma}\right) \\ L &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{e_i^2}{2\sigma}\right) \\ \log L &= n\log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) - \sum_i \frac{e_i^2}{2\sigma} \\ \log L &= n\log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) - \sum_i \frac{e_i^2}{2\sigma}\end{aligned}$$

Problem 18. Encuentre la recta asumiendo que el error es exponencial

$$\begin{aligned}
L &= \prod_i f(e_i) \\
&= \prod_i \lambda \exp(-\lambda e_i) \\
&= \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_i (y_i - a x_i - b)\right) \\
&= \lambda^n \exp(-\lambda n (\overline{y} - a\overline{x} - b)) \\
\log L &= n \log \lambda - \lambda n (\overline{y} - a\overline{x} - b)
\end{aligned}$$

derivando con respecto las constantes

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{n}{\lambda} - n(\overline{y} - a\overline{x} - b) \\
0 &= -\lambda n \overline{x} \\
0 &= \lambda n
\end{aligned}$$

resolvieldo el sistema

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} &= \overline{y} - a\overline{x} - b \\
0 &= \lambda \\
0 &= \lambda
\end{aligned}$$

Otro ejemplo puede ser asumiendo que el error se distribuye uniforme

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & 0 \leq x \leq m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
L &= \prod_i f(e_i) \\
L &= \prod_i \frac{1}{m}
\end{aligned}$$

La probabilidad de que el artículo sea defectuoso es $p = 0.02$ por lo que, si un encargo tiene 10000 artículos, entonces la cantidad de elementos defectuosos en ese encargo se distribuye Binomial, $X =\sim \text{Binom}(n = 10000, p = 0.02)$. como n es grande y p pequeño, entonces se puede aproximar la distribución binomial con una distribución de Poisson:

$$\lambda = np = 10000 \cdot 0.02 = 200.0$$

$$X = \text{Pois}\left(\lambda = 200\right)$$

luego, la probabilidad de que ocurran 5 fallas

$$\begin{aligned}
P\left(X = x\right) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \\
P\left(X = 5\right) &= \frac{e^{-200}200^{5}}{5!}
\end{aligned}$$

la esperanza

$$\begin{aligned}
E\left(X\right) &= np = 200 \\
V\left(X\right) &= np(1-p) = 200 \cdot 0.98 \\
&= np\left(1-p\right) = 196.0 \\
Sd\left(X\right) &= \sqrt{196.0} \\
&= 14.0
\end{aligned}$$

Problem 19. Encuentre el valor de la maxima verosimilitud de una poisson

$\lambda = \overline{x}$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
L &= \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\overline{x}}\overline{x}^{x_i}}{x_i!} \\
L &= e^{-n\cdot\overline{x}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{x}^{x_i}}{x_i!} \\
L &= e^{-n\cdot\overline{x}} \frac{\overline{x}^{n\overline{x}}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \\
L &= \frac{\left(\frac{\overline{x}}{e}\right)^{n\overline{x}}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}
\end{aligned}$$

¿Cual de dos muestras es más normal?

Problem 20. Derivada de una matriz inversa

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones representado de forma matricial

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{u}\right)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Observamos que la matriz está en función de $\mathbf{u}$ por lo que nos proponemos encontrar $\mathbf{u}$ que haga que el sistema tenga solución, pero al mismo tiempo $\mathbf{u}$ puede que no sea único, lo que haremos será entonces encontrar el que maximice en número de condición.