Algorimo numérico de estimación de sismica.

18 de marzo de 2016

Resumen

Antecedentes

En la minería actual se registran los eventos sísmicos producidos por las fallas geológicas en los macizos en el cual se encuentran las minas de explotación, la información de estas fallas son de importancia para de la toma de decisiones. Dos ... son la caracterización del sismo y su epicentro

la toma de decisiones

busqueda de discontinuidades

caracterizar estos sismos

gran frecuencia de ocurrencia de sismos

es un problema de big data

La teoría geofísica a la cual la sismología pertenece provee teoría suficiente para automatizar procesos de estimación de epicentros y caracterizar los microsismos

Estos algoritmos tienden a ser de un costo computacional alto, pero al mismo tiempo son altamente paralelizables

Dado un conjunto de sismogramas se busca estima la fuente sísmica puntual como una fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, t)$, además de ello, pretendo reutilizar lo anterior para estimar la fuente sísmica puntual, de esta manera estimar el sismo como un volumen de fuerza. luego sería posible para los sismogramas su descomposición como suma de ondas P, S y de campo cercano para una fuente puntual.

Como el computo $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i, t)$ donde $\mathbf{x}_i \in V$ y V una vecindad del epicentro puede llegar a ser muy costoso computacionalmente, para reparar esto pretendo se implementaran los algoritmos bajo conceptos de computación paralela, específicamente en **mpi4py**, una implementación en python de **MPI**.

*Marco teórico

**Ecuación diferencial elástica

**Función de Green o de transferencia

*Sismogramas

** Características de un sismograma

*Reconstruccion de la fuente

**Algoritmo de inversión para un epicentro puntual (deconvolución)

*Optimización del algoritmo mediante computación paralela

resultados

conclusiones

bibliografía

Capítulo 1

Introducción

Durante el proceso de explotación de la mina, los cambios mecanicos que va sufriendo el maciso rocoso producen eventos sismicos. Estos eventos son registrados por una red de geosensores, y las medicones obtenidas por la red de geosensores se utilizan para estimar, entre otras cosas, la ubicación de la fuente sismica (epicentro) y el momento en que ocurrió el evento. El objetivo principal de este trabajo es utilizar las mediciones sisicas para ahondar en el estudio y caracterizacion de los eventos sismicos durante el rpocesos productivo de una mina. Una caracterización adecuada de los eventos sismicos entrega informacion mecanica importante de los lufgares donde estos ocurren.

1.1. Estimación con mínimos cuadrados

El método que asuí se presenta consiste en 3 etapas etapas: 1) una reconstruccion de la fuente sismica modelada como una fuerza a partir de las mediciones sismicas; y 2) Estimar el mejor epicentro. 3) Clasificación de las fuentes reconstruidas, separandolas en: fuentes contenidas principalmente en un plano; o fuentes con componentes comparables en todas las direcciones.

Estimación de la fuente sismica

En la pasada década la sismología como ciencia

Uno de los problemas más importantes en sismología es la de caracterizar la naturaleza de una fuente sismic

La sismología es el estudio científico de las vibraciones mecánicas de la tierra. La sismología cuantitativa esta basada en datos llamados sismogramas, que son una grabación de la vibraciones de un punto en el medio en función del tiempo el cual puede ser representado como desplazamiento, velocidad o aceleración.

En 1906, la existencia de las ondas compresivas

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

Introducción

La sismología es el estudio científico de las vibraciones mecánicas de la tierra. Sus análisis cuantitativos están basados en datos descritos por los sismogramas, que son grabaciones de dichas vibraciones, que a su vez pueden ser causadas por explosiones ocasionadas artificialmente, o naturalmente por un terremoto o una erupción volcánica. Tales fenómenos han llamado fuertemente la atención de la humanidad por siglos, incluso hoy en día despierta sentimientos de miedo y de misterio, como así también la curiosidad intelectual.

El gran desarrollo hecho en sismología desde 1880 - Donde instrumentos llamados sismómetros fueron el primer desarrollo que podía grabar estas vibraciones (ondas sísmicas) generadas por terremotos en otras partes del mundo -que han sido estimuladas por la disponibilidad de cada vez mejores datos el cual todavía se espera que pueden mejorar en las décadas futuras. Los más significativos avances en este proceso han sido iniciados por un conjunto de científicos bien fundados en los métodos de la física matemática.

Cada generación de sismólogos ha trabajado en dirección de resultados cuantitativos, limitados por la forma de hacer los cálculos, primero con el cálculo manual y actualmente por el computación electrónica. Desde 1960, los avances combinados en la instrumentación, nuetro conocimiento de la Tierra, la teoría de las ondas sísmicas y la computación han convertido gran parte de los datos contenidos en los sismogramas en información útil. Esas mejoras se extienden incluso a la forma en que se interpreta la onda registrada en los sismogramas y sus tiempos de llegada. El modelo cuantitativo de la sismología actual envuelve una intenso juego entre datos de alta calidad, detallados modelos de la mecánica de las fuentes sísmicas, modelos internos de la estructura de la tierra, teoría de de la propagación de indas ,teorías de la inversión de ondas y grandes computadores modernos. En este trabajo nos concentraremos escencialmente en los últimos tres puntos. Actualmente la sismoogía es usada en prospección de minerales y exploración de petroleo y gas natural, en ingeniería estructural para ayudar en el deseño de construcciones antisísmicas. Otros usos generalmente más a largo plazo en política ,en economía y en problemas sociales asociados con la reducción de peligro sísmico, la detección de explosiones nucleares. Así, desde los años 70 se han estado haciendo grandes esfuerzos por mitigar los riesgos de terremotos mejorando las estimaciones probabilísticas de la ubicación y el tiempo de terremotos perjudiciales.

La sismología está en un extremo de la totalidad en el espectro de las ciencias de la tierra. Primero, le concierne solamente con las propiedades mecánicas y dinámicas de la Tierra. Segundo

2.1. Sobre la mecánica en medios continuos

La mecánica en medio continuo es una rama de la mecánica que se preocupa de las tensiones en sólidos, liquidos y gases y la deformación de esos materiales. El adjetivo contunuo se refiere a la simplificación subyacente que proviene del análisis: ignorar la estructura molecular de la materia y representarla como un medio vacios o huecos. Esto promueve por medio de la facilidad de su uso en estas condiciones, de modelar estos objetos mediante la teoría de funciones continuas. Exceptuando posiblemente a un numero finito de discontinuidades dentro del medio que lo dividen en regiones continuas. Este supuesto implica que las derivadas también han de ser continuas. Este materías hipotético se denominará como medio continuo.

2.2. Algunos aspectos básicos de elasticidad

La teoría de la elasticidad estudia la mecánica de los cuerpos sólidos, considerados bajo medios continuos, bajo la accion de fuerzas aplicadas estos cuerpos se deforman, esto quiere decir que cambian su forma y su volumen.

Estática

Trabajaremos en este capítulos en las coordenadas cartesianas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y todos los tensores serán cartesianos. Usaremos el término desplazamiento considerandolo como una función del espacio y del tiempo y será escrito $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, que denota el vector de desplazamiento de una partícula desde el punto $\mathbf{x}$ en el tiempo t con respecto alguna referencia para algún t_0. Si $\mathbf{x}$ no cambia con respecto el tiempo, entonces $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ es la velocidad y la aceleración respectivamente. Para analizar la distorción en el medio sea este sólido o líquido, elástico o inelástico, se define el tensor de tensiones. Si una partícula inicialmente está en la posición $\mathbf{x}$ y es movida a la posición $\mathbf{x} + \mathbf{u}$, luego la relación $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ es usada para describir es campo vectorial de desplazamiento. Para analizar la distorción de una parte del medio que está inicialmente en una vecindad de $\mathbf{x}$, necesitamos saber la nueva posición de la partícula que fué inicialmente $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$. Esta nueva posición es $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$. Cualquier distorción causa un cambio en la posición relativa del final del elemento lineal $\delta\mathbf{x}$. Si este cambio es $\delta\mathbf{u}$ enotnces $\delta\mathbf{x} + \delta\mathbf{u}$ es el nuevo vector, y este se puede escribir como

$$\delta\mathbf{x} + \delta\mathbf{u} = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x} + \mathbf{u}\left(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\right) - \left(\mathbf{x} + \mathbf{u}\left(\mathbf{x}\right)\right)$$

Si $|\delta\mathbf{x}|$ es arbitrariamente pequeño, entonces, mediante un desarrollo en serie de Taylor se puede expandir como $\mathbf{u}\left(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\right) = \mathbf{u} + \left(\delta\mathbf{x}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}$ por lo que

$$\delta\mathbf{u} = \left(\delta\mathbf{x}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} \rightarrow \delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j \tag{2.1}$$

En notación no tensorial

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u} &= \left(\delta\mathbf{x}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} \\ &= \left(\left(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3\right)\cdot\nabla\right)\mathbf{u} \end{aligned}$$

Esta ecuación puede ser reescrita de la forma

$$\delta u_i = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)\delta x_j + \frac{1}{2}\left(\mathrm{curl}\mathbf{u}\times\delta\mathbf{x}\right)_i \tag{2.2}$$

Luego, el tensor de tensiones queda definido como $\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$

y la rotación del cuerpo rígido es $\frac{1}{2}\mathrm{curl}\mathbf{u}$. La interpretación del último término de 2.2 como la rotación de un cuerpo rígido es válida si $|u_{i,j}| \ll 1$ fuese no infinitesimal en el sentido de esta desigualdad, entonces deberíamos en vez de analizar la contribución de $\delta\mathbf{u}$ desde una rotación finíta -

Entenderemos tensión como la cantidad de fuerza por unidad de area y va a depender del corte que se seleccione, las tensiones normales las vamos a representar como σ y las tesiones tangenciales como τ, pero las tensiones tangenciales van a tener dos subindices

2.3. Modelo

Consideremos que la propagación de la onda sismica en el medio rocoso está bien modelada por una ecuación de onda elástica en un medio homogeneo sin fronteras. Es decir $\mathbf{u}\left(\mathbf{x}, t\right)$ representa el desplazamiento en el punto $\mathbf{x}$ en el tiempo t debido a la onda, entonces asumimos que la propagación de la inda u está modelada adecuadamente por la ecuación.

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + \left(\lambda + 2\mu\right)\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right) - \mu\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{u}\right) \tag{2.3}$$

donde la sensidad ρ y los parámetros de Lamé λ, μ se asymen constantes y conocidos. f es la fuente sismica expresada como una fuerza,

Función de Green para elastodinámica

Para resolver la ecuación 2.3 existe la expresión explícita de la función de Green, es decir del campo de desplazamiento en la dirección i debido a un impulso en la dirección j en el tiempo $t = 0$.

$$G_{ij}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})\frac{t}{r^3}1_{\left[\frac{r}{\alpha},\frac{r}{\beta}\right]}(t) + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\gamma_i\gamma_j\frac{1}{r}\delta\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2}(\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})\frac{1}{r}\delta\left(t-\frac{r}{\beta}\right)$$

Estimación de la fuente utilizando minimos cuadrados

Como describimos anteriormente, una fuente sismica carcterizada por una fuerza localizada en x_0 modulada temporalmente según $\mathrm{s}(t)$, se puede incluir en 2.3 como un lado derecho de la forma $\mathrm{s}(t)\,\delta_{\mathbf{x}_0}(\mathrm{x})$. Denotamos la función de Green como $\mathrm{G}(\mathbf{x}|t)$, podemos calcular el campo de desplazamiento de la onda en el punto $\mathbf{x}$ como en el tiempo t, como

$$u(x,t) = \mathrm{G}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|t) * \mathbf{s}(t)$$

donde las mediciones corresponden al campo de desplazamiento, a lo largo del tiempo, en las posiciones $\{r_k\}_{k=1}^K$. Es decir, nuestras mediciones corresponden al conocimiento de $u_k(t) = u(\mathbf{r}_k,t)$ para $t \in T_k \subset \mathbb{R}^+$.

Asumiendo qe la posición $\mathbf{x}_0$ de la fuente es conocida y que $s(t)$ está soportado cerca de un tiempo t_0 conocido, queremos plantear un metodo de reconstrucción de $s(t)$ mediante minimos cuadrados.

Consideremos $\{\varphi_j\}_{j=1}^J$ una familia de funciones linealmente independientes, soportadas alrededor de t_0, que nos permitan describir $s(t)$ aproximadamente. Es decir, consideremos que

$$s(t) = \sum_{j=1}^J \alpha_j\varphi_j(t)$$

La familia $\{\varphi_j\}_{j=1}^J$ está dada y el objetivo es encontrar $\{\alpha_j\}_{j=1}^J$ a partir de las mediciones. Para esto según el modelo de proparación de onda, tenemos que α_j debería cumplir, para todo $k = 1,\ldots,K$ y para todo $t \in T_k$, que

$$\begin{aligned} u_k(t) &= [G(r_k-\mathbf{x}_0) * s](t) \\ &= \left[G(r_k-\mathbf{x}_0) * \sum_{j=1}^J \alpha_j\varphi_j\right](t) \\ &= \sum_{j=1}^J \alpha_j\,[G(r_k-\mathbf{x}_0) * \varphi_j](t) \end{aligned}$$

Encontrar los valores de $\{\alpha_j\}_{j=1}^J$ resolviendo la ecuación anterior, o escogiendo aquellos que se acerquen lo más posible a resolverla. Más explícitamente, encontrar α_j como

$$\{\alpha_j\} = \arg\min_{\{\alpha_j\}}\left(\sum_{k=1}^K\int_{T_k}\left(u_k(t) - \sum_{j=1}^J \alpha_j\,[G(r_k-\mathbf{x}_0)*\varphi_j](t)\right)^2 dt\right)$$

Como las mediciones temporales son efectivamente discretas, lo anterior se puede escribir de la manera matricial como

$$\alpha = \arg\min_{\alpha} \|u - \alpha \cdot A\|^2$$

donde

$$u = (u_k(t))_{k=1,...,\mathrm{K}}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_J)$$

y

$$A = ([G(r_k - \mathbf{x}_0) * \varphi_j](t))_{k=1,\ldots,K;t\in T_k;j=1,\ldots,J}$$

escritos de manera adecuada. El problema anterior es un problema estándar de minimos cuadrados y la solución (el de menor norma en caso de admitir multiples minimizantes) se escribe como

$$\hat{\alpha} = u \cdot A^t \cdot \left(AA^t\right)^+$$

donde B^+ es la pseudo inversa de Moore Penrose cuando B no es invertible.

Esto entrega una reconstrucción de $s(t)$ como

$$\hat{s}(t) = \sum_{j=1}^{J} \hat{\alpha}_j \varphi_j(t)$$

Capítulo 3

Inversión

Buscamos entre todos los posibles sismos el que minimice el la L_1 error de estimación

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla\cdot u) + \mu\nabla\times(\nabla\times u) = f(t)$$

$$G_{ij}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})\frac{t}{r^3}1_{\left[\frac{r}{\alpha},\frac{r}{\beta}\right]}(t) + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\gamma_i\gamma_j\frac{1}{r}\delta\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2}(\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})\frac{1}{r}\delta\left(t-\frac{r}{\beta}\right)$$

También, para algunos cálculos numéricos, específicamente para la estimación del epicentro va a ser necesario conocer los gradientes de la función de Green de la ecuación elastica

$$\frac{\partial}{\partial x_k}G_{ij}(\mathbf{x},t)$$

Si consideremos la señal $s(t)$

$$\begin{aligned}
\vec{u}(r,t) &= [G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0,t) * \vec{s}(t)](t) \\
\mathcal{F}[\vec{u}(r,t)] &= \mathcal{F}[G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0,t)]\,\mathcal{F}[\vec{s}] \\
\mathcal{F}[\vec{s}] &= \frac{\mathcal{F}[\vec{u}(r_k,t)]}{\mathcal{F}[G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0,t)]} \\
\vec{u}(r,t) &= \frac{\frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})}{r^3}t_{\left[\frac{r}{\alpha},\frac{r}{\beta}\right]} * \vec{s}(t) + \frac{\gamma_i\gamma_j}{4\pi\rho\alpha^2 r}\vec{s}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) - \frac{\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij}}{4\pi\rho\beta^2 r}\vec{s}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)
\end{aligned}$$

Estimación del epicentro
$\phi =$

Capítulo 4

Aspectos computacionales

Algoritmos

Para estimar el epicentro
se requerirá calcular los gradientes del epicentro
una rápida convergencia

de procesamiento

Al considerar los siguientes aspectos que hacen que problema de inversión tenga un atractivo computacional

modelo de datos
entrada
Algoritmos y estructura de datos
paralelización
Separación de la onda en sus componentes S , P y de campo cercano
Visualización y persistencia de los resultados

Apendice I

4.1. Algunas demostraciones

Demostrar que el diferencial del campo de desplazamiento está dado por

$$\delta u_i = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)\delta x_j + \frac{1}{2}\left(\mathrm{curl}\mathbf{u} \times \delta\mathbf{x}\right)_i$$

Demostración. Sea $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ el campo de desplazamento, se cumple que la nueva posición de una partícula que se encontraba en la posición $\mathbf{x}$ ahora es $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Para conocer la nueva posición de un punto en la vecindad de $\mathbf{x}$ entonces buscamos la nueva posición de $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ la cual es $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$. □

4.2. Vectores y Tensores

Usaremos en **negritas** los símbolos que se refieren a un campo vectorial y un campo tensorial y con subindices (e.j. u_i, τ_{kl}) para designar un componente vectorial o tensorial en el sistema de coordenadas cartesiano.

Capítulo 5

Casos de Prueba

Bibliografía

[1] Keitti Aki

[2] Landau: Teoría de la elasticidad

[3] Donald Knuth: Sobre la redacción de textos científicos

[4] Jeffrey (1965)

[5] Jeffrey and Jeffrey (1972)