Algunos resultados previos

1 inversa del operador de divergencia de un campo escalar

Para el desarrollo y la busqueda del volumen existen algunos resultados previos que van a ser necesarios

Consideremos un volumen poliédrico cuyo campo generado es

$$\psi\left(x_0, y_0, z_0\right)=\int_V F\left(x-x_0, y-y_0, z-z_0\right) dxdydx$$

en donde

$$F\left(x, y, z\right)=\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

entonces, por el teorema de la divergencia entonces, con lo cual podemos usar el operador inverso de divergencia

$$\psi_k\left(\mathbf{x}_j\right)=\int_S\left(\nabla\cdot\right)^{-1} F\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j\right)\cdot\mathbf{n}_k dS$$

donde $\left(\nabla\cdot\right)^{-1}$ es la inversa del operador de divergencia, de esta manera es posible aplicar el teorema de la divergencia en un forma inversa integrar solamente sobre la frontera del dominio volumétrico y S es la superficie triangular conocidos los tres vértices $\left(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k\right)$.

1.1 Cambio de variable

como $\mathbf{x}=\left(x_1, x_2, x_3\right)$ perteneciente a la superficie triangular conocidos los tres vértices $\left(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k\right)$, y esta a su vez es un conjunto convexo, se puede describir un cambio de variable en consecuencia a la combinación convexa $\mathbf{x}=\alpha\mathbf{u}_k+\beta\mathbf{v}_k+\left(1-\alpha-\beta\right)\mathbf{w}_k$, cuyo jacobiano J_k se puede computar

$$\psi_k\left(\mathbf{x}_j\right)=J_k\int_0^1\int_0^{1-\alpha}\left(\nabla\cdot\right)^{-1} F\left(\alpha\mathbf{u}_k+\beta\mathbf{v}_k+\left(1-\alpha-\beta\right)\mathbf{w}_k-\mathbf{x}_j\right)\cdot\mathbf{n}_k dS$$

2 Obtener vertices en caso bidimensional

$$\psi\left(x_0, y_0\right)=\int_A F\left(x-x_0, y-y_0\right) dydx$$

luego se busca minimizar entonces la siguiente función

$$\Gamma\left(u, v, w\right)=\left(\psi\left(x_0, y_0\right)-\int_A F\left(x-x_0, y-y_0\right) dydx\right)^2$$

Haciendo el cambio de variable necesario

$$\Gamma\left(u,v,w\right)=\left(\psi\left(x_{0},y_{0}\right)-\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(\alpha,\beta\right)}\right|\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\alpha}F\left(x\left(\alpha,\beta\right)-x_{0},y\left(\alpha,\beta\right)-y_{0}\right)d\beta d\alpha\right)^{2}$$

3 Cuadratura de Gauss

Se usará cuandratura de Gauss para resolver el caso bidimensional más simple

dado un punto $p=\left(x_{0},y_{0}\right)$ y un triángulo con vértices u,v,w, con un campo escalar $F\left(x,y\right)=\frac{y}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ entonces el campo generado

el campo en el punto p se calcula

$$\psi\left(x_{0},y_{0}\right)=\int_{A}F\left(x-x_{0},y-y_{0}\right)dydx$$

como el area es $\left(x,y\right)=\alpha u+\beta v+\left(1-\alpha-\beta\right)w$, entonces

$$\psi\left(x_{0},y_{0}\right)=\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(\alpha,\beta\right)}\right|\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\alpha}F\left(x\left(\alpha,\beta\right)-x_{0},y\left(\alpha,\beta\right)-y_{0}\right)d\beta d\alpha$$

para aplicar cuadratura de Gauss se debe primero hacer las siguientes transformaciones

$$\psi\left(x_{0},y_{0}\right)=\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(\alpha,\beta\right)}\right|-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\alpha-1}{2}\int_{-1}^{1}F\left(x\left(-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2},\frac{\alpha-1}{2}\beta+\frac{1-\alpha}{2}\right)-x_{0},y\left(-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2},\frac{\alpha-1}{2}\beta+\frac{1-}{2}\right.\right.$$

luego, aproximando la integral queda entonces que

$$\psi\left(x_{0},y_{0}\right)=-\frac{1}{2}\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(\alpha,\beta\right)}\right|\sum_{j=0}^{m}w_{j}\frac{\alpha_{j}-1}{2}\sum_{i=0}^{n}w_{i}F\left(x\left(-\frac{1}{2}\alpha_{j}-\frac{1}{2},\frac{\alpha_{j}-1}{2}\beta_{i}+\frac{1-\alpha_{j}}{2}\right)-x_{0},y\left(-\frac{1}{2}\alpha_{j}-\frac{1}{2},\frac{\alpha_{j}-}{2}\right.\right.$$

Resultados previos

Esta sección corresponde a algunos resultados previos con respecto al campo

$$F\left(x-x_{0},y-y_{0},z-z_{0}\right)=\frac{z-z_{0}}{\left(\left(x-x_{0}\right)^{2}+\left(y-y_{0}\right)^{2}+\left(z-z_{0}\right)^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

en donde $\left(x,y\right)=\alpha u+\beta v+\left(1-\alpha-\beta\right)w$ por lo que se requiere calcular las siguientes nueve derivadas parciales

$\frac{\partial F}{\partial u_{1}}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_{1}}$