

PROBLEMAS INVERSOS Y TECNICAS DE REGULARIZACION

DORIS HINESTROZA

SEPTIEMBRE 2003

En esta presentación haremos una introducción a los problemas inversos mal puestos y daremos algunos ejemplos de interés de tipo integral y algunos algoritmos de regularización.

1. PROBLEMAS INVERSOS

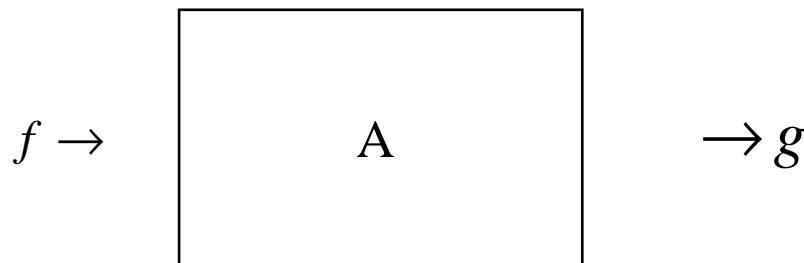
Muchos sistemas físicos pueden ser descritos usando el modelo

$$Af = g.$$

causa

Modelo

Ef ecto



Consideraremos que el operador

$$A: X \rightarrow Y$$

donde X, Y se consideran espacios de Hilbert, es un operador lineal continuo.

A partir del modelo presentado surgen de aquí los siguientes problemas:

PROBLEMA 1

Problema Directo: Dado $f \in X$ y A hallar $g \in Y$.

PROBLEM 2

Problema de Reconstrucción: Dado A y $g \in Y$, Hallar $f \in X$.

PROBLEM 3

Problema de Identificación: Dado $f \in X$ y $g \in Y$ identificar A .

$$\left. \begin{array}{l} \text{PROBLEMA 2} \\ \text{PROBLEMA 3} \end{array} \right\} \text{PROBLEMAS INVERSOS}$$

En el caso del problema 2 queremos calcular $f = A^{-1}g$. Pero este problema es complicado por dos factores importantes. Uno de ellos es que el operador A opera en espacios de dimensión infinita y el otro hecho es que el operador viene representado como un operador integral, el cual desafortunadamente es un operador compacto. Estos dos factores aseguran que el operador inverso A^{-1} no es continuo. Así, pequeños errores en g pueden producir errores grandes en la reconstrucción de f .

Como ejemplo de estos modelos podemos considerar el problema de identificación de parámetros.

Consideremos una ecuación diferencial dependiente de un parámetro.

$$L(c)u = f$$

donde u es la solución, f representa una fuerza externa y L es un operador integral que depende del parámetro c , esto es

- Operador del tipo $L(c)u = \Delta u + c^2 u$ (Operador de Helmholtz).
- Operador del tipo $L(c)u = \text{div}(c \nabla u)$.

Problema directo: Dados c y f , y condiciones de frontera o iniciales adecuadas, calcular u .

Problema inverso: Dada la forma de L y alguna información de u (por ejemplo, datos en la frontera), determinar c . Si c depende de x , este problema inverso se llama un problema de identificación.

1.1 PROBLEMAS BIEN PUESTOS Y PROBLEMAS MAL PUESTOS

El Problema $y = Ax$ es un **problema bien puesto** (well - posed) si las siguientes condiciones se cumplen

1. El problema tiene solución (Existencia).
2. La solución del problema es única (Unicidad).
3. El problema depende continuamente de los datos (Estabilidad).

Podemos observar que un problema bien puesto es equivalente a decir que el operador A es biyectivo y que el operador inverso $A^{-1} : Y \rightarrow X$ es continuo.

Un problema es mal puesto (ill-posed) si una de las condiciones (1)-(3) no se satisfacen.

En general la mayoría de los problemas inversos son mal puestos (*ill-posed*).

1.2 OPERADORES DE TIPO INTEGRAL

- Ecuación de Fredholm Integral de primera clase

$$g(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt$$

- Ecuación de tipo Volterra Integral de primera clase

$$g(s) = \int_a^s k(s, t) f(t) dt$$

- Ecuación de tipo convolución

$$g(s) = K * f = \int_a^b k(s-t) f(t) dt$$

1.3 EJEMPLOS

Ejemplo 1. La Diferenciación como un Problema Inverso

$$D_o f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad f \in C^3[a, b]$$

$$\|D_o f - f'\|_{\infty} \leq \frac{h^2}{3} M = O(h^2).$$

$$f_{\varepsilon}(x) = f(x) + N(x), \quad a \leq x \leq b, \quad \|N\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

Si tomamos

$$N(x) = \varepsilon \sin(nx), \quad n \geq 2, \quad \|N\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

tenemos que

$$f'_{\varepsilon}(x) = f'(x) + \frac{\varepsilon}{n} \cos(nx), \quad \|f'_{\varepsilon} - f'\|_{\infty} = \frac{\varepsilon}{n}$$

$$D_o f_{\varepsilon}(x) = D_o f(x) + \frac{N(x+h) - N(x-h)}{2h}, \quad \|D_o f - D_o f_{\varepsilon}\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{h}.$$

Tenemos un error total dado por

$$\|f' - D_o f'_{\varepsilon}\|_{\infty} \leq O(h^2) + \frac{\varepsilon}{h}.$$

Ejemplo 2.

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 0.2161 & 0.1441 \\ 1.2969 & 0.8648 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0.1440 \\ 0.8642 \end{bmatrix}$,

Si resolvemos el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, su solución es dada por $x=2, y=2$.

Si consideramos una perturbación de \vec{b} , $\vec{b}_\epsilon = \begin{bmatrix} 0.1410 + 10^{-8} \\ 0.8642 + 10^{-8} \end{bmatrix}$. $\vec{b} - \vec{b}_\epsilon = \begin{bmatrix} 10^{-8} \\ 10^{-8} \end{bmatrix}$

La solución del sistema $Ax_\epsilon = b_\epsilon$ es $x_\epsilon = \begin{bmatrix} 0.9911 \\ -0.4870 \end{bmatrix}$.

Más aún si $B = \begin{bmatrix} -86484323 & 14407118 \\ 129696483 & -21605678 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.0003 & 0.9998 \end{bmatrix}$.

Podríamos preguntarnos: ¿ B es una buena aproximación para A^{-1} ?

Si $\vec{z} = B\vec{b}$ el residuo es dado por $A\vec{z} - \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0000216 \end{bmatrix}$. Observemos que

$\vec{z} = \begin{bmatrix} -3111.1364 \\ 4666.6244 \end{bmatrix}$. ¿Como así?

Observemos que

$$BA = \begin{bmatrix} -4670.861 & -3115.2979 \\ 7006.1781 & 4672.8659 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -86480000 & 14410000 \\ 12969000 & -21610000 \end{bmatrix}$$

Conclusión: A una matriz mal condicionada.

Ejemplo 3

Consideremos la ecuación

$$Ax = b, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{mn}$$

$$Z = \left\{ x^* : \|Ax^* - b\| = \inf \left\{ \|Ax - b\| : x \in \mathbb{R}^n \right\} \right\}$$

Z : Conjunto de las soluciones de mínimos cuadrados.

Se puede demostrar fácilmente que

$$\|Ax^* - b\| = \inf \left\{ \|Ax - b\| : x \in \mathbb{R}^n \right\} \Leftrightarrow A^T Ax^* = A^T b$$

La **solución generalizada** \hat{x} se define como

$$\|\hat{x}\| = \inf \left\{ \|z\| : z \in Z \right\}.$$

En el caso que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $Ax = b$, el sistema no tiene solución. Las

soluciones de mínimos cuadrados está dada por

$$Z = \{(x, y) : x + y = 2\}$$

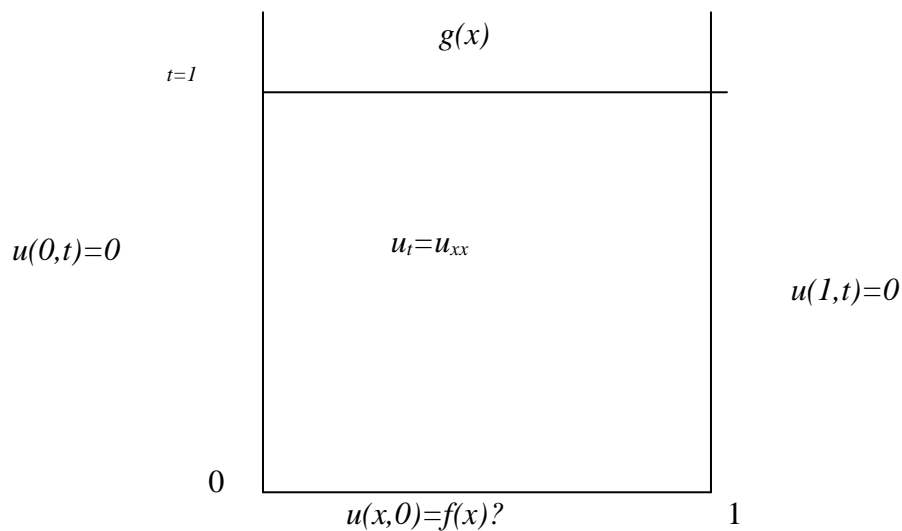
La solución generalizada es dada por $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Observemos que si

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad A_\varepsilon z_\varepsilon = b \Rightarrow z_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{\varepsilon} \\ \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

Como podemos observar z_ε no converge a \hat{x} cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ejemplo 4 (Problemas relacionados con el problema inverso del Calor)

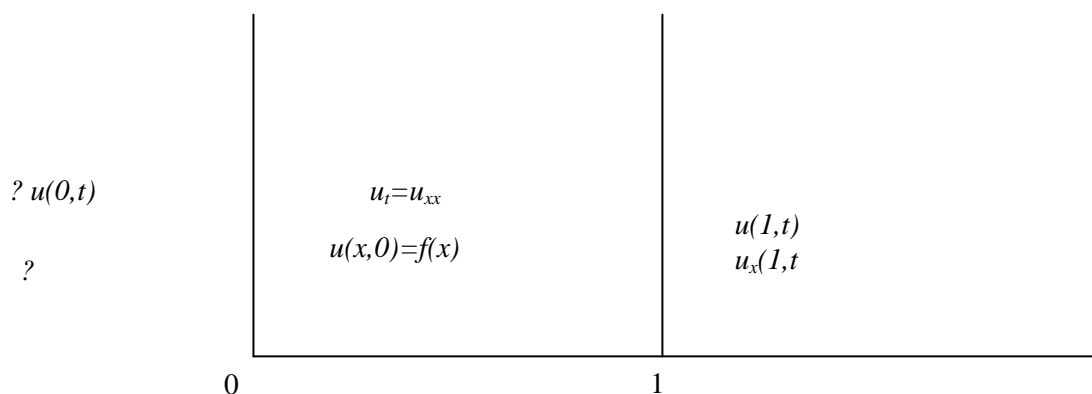
Problema 1.



$$g(x) = \int_0^1 k(x, u) f(u) du$$

$$k(x, u) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \sin nx \sin nu$$

Problema 2.



$$u(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-x^2/4(t-\tau)}}{(t-\tau)^{3/2}} f(\tau) d\tau \quad g(t) = u(1,t) = \int_0^t k(t,\tau) f(\tau) d\tau$$

$$k(t,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-1/4(t-\tau)}}{(t-\tau)^{3/2}}$$

Ejemplo 5.

Consideremos un operador lineal compacto A definido sobre el espacio de Hilbert ℓ_2 .

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell_2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$$

Definimos el operador $A: \ell_2 \rightarrow \ell_2$

$$Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots \right).$$

Formalmente la inversa de A es dada por

$$A^{-1}y = (y_1, 2y_2, \dots, ny_n, \dots)$$

Así tenemos unicidad (y existencia para ciertos y). Pero no tenemos estabilidad.

Tomemos por ejemplo

$$y_n = (0, \dots, 0, 1/\sqrt{n}, 0, \dots).$$

Entonces $y_n \rightarrow 0$, pero

$$\|A^{-1}y_n\| = \sqrt{n} \rightarrow \infty.$$

También podemos observar que el sistema $Ax = y$ no tiene solución para todo $y \in Y$,

por ejemplo si tomamos $y = (1, 1/2, 1/3, \dots) = A(1, 1, 1, \dots)$, pero $(1, 1, 1, \dots) \notin \ell_2$

Ejemplo 7. PROBLEMA DE RESTAURACIÓN

$$Af(x) = K(x) * f(x) = g(x)$$

$g(x)$, $K(x)$ son dados

$$K(x) = \frac{1}{\mu} \exp(-\pi^2 x^2 / \mu^2)$$

$$K(w) = \exp(-\pi^2 \mu^2 w^2)$$

$K(w) \neq 0$ para todo $w \in \mathbb{R}$.

$$\hat{f}(w) = \frac{\hat{g}(w)}{\hat{K}(w)} = \hat{g}(w) (1 + \pi \mu^2 w^2 + (\pi \mu^2 w^2)^2 / 2 + \dots)$$

$$f(x) = g(x) - (\mu^2 / 4\pi) g''(x) + (\mu^4 / 32\pi^2) g''''(x) + \dots$$

$$\mu = \sqrt{\pi}$$

$$f(x) = g(x) - (1/4) g''(x) + (1/32) g''''(x) + \dots$$

Esta formula es conocida como formula de Eddington.

2. REGULARIZACIÓN DE REGULARIZACION

2.1 Método de Regularización de Tikhonov

La idea básica de la regularización de Tikhonov es relacionada con la minimización del funcional cuadrático

$$\Phi_{\mu}(f, g) = \|Af - g\|^2 + \mu \|f\|^2$$

Si $\mu = 0$, tenemos un problema de mínimos cuadrados.

Sea f_{μ} una solución que cumple que

$$\Phi_{\mu}(f_{\mu}, g) \leq \Phi_{\mu}(f, g)$$

$$(A^* A + \mu I) f_{\mu} = A^* g$$

$$f_{\mu} = (A^* A + \mu I)^{-1} A^* g = R_{\mu} g$$

$$R_{\mu} = (A^* A + \mu I)^{-1} A^*$$

$$\langle A^* A f + \mu f, f \rangle = \langle A f, A f \rangle + \mu \langle f, f \rangle = \|A f\|^2 + \mu \|f\|^2 \geq \mu \|f\|^2$$

ii. La solución es única.

iii.

$$\|(A^* A + \mu I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu}$$

R_{μ} es llamada una regularización lineal para el problema inverso mal puesto $A f = g$.

μ es llamado parámetro de regularización.

f_{μ} la solución regularizada.

2.2 Método Iterativo de Tikhonov

El sistema

$$(A^* A + \mu I) f_{\mu} = A^* g$$

es equivalente a

$$\begin{cases} A f_{\mu} - \sqrt{\mu} h_{\mu} = g \\ A^* h_{\mu} + \sqrt{\mu} f_{\mu} = 0 \end{cases}$$

$$A f_{\mu} - \sqrt{\mu} h_{\mu} = g$$

$$\sqrt{\mu} \beta A^* h_{\mu} + \mu \beta f_{\mu} - f_{\mu} + f_{\mu} = 0$$

Esto nos permite definir el método iterativo

$$A f_{\mu}^n - \sqrt{\mu} h_{\mu}^n = g$$

$$\sqrt{\mu} \beta^n A^* h_{\mu}^n + \mu \beta^n f_{\mu}^n - f_{\mu}^n + f_{\mu}^{n+1} = 0.$$

Entonces obtenemos

$$\sqrt{\mu} h_{\mu}^n = A f_{\mu}^n - g$$

$$f_{\mu}^{n+1} = f_{\mu}^n - \beta^n (\mu f_{\mu}^n - \sqrt{\mu} A^* h_{\mu}^n).$$

Para $n=0,1,2,\dots$ y f_{μ}^0 arbitrario.

Teorema 2.6

(Consistencia)

$$\|f - f_\mu\| \leq C\mu$$

Para alguna constante $C > 0$, independientemente de μ .

(Estabilidad)

$$\|f_\mu - f_\mu^\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mu}}$$

(Convergencia)

$$\|f - f_\mu^\varepsilon\| \leq C\mu + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mu}}$$

$\mu = O(\varepsilon)$ La convergencia será de order $O(\sqrt{\varepsilon})$.

2.3 Método de Mollificación

Para cada función continua $f \in C[0,1]$ definimos el operador mollificación como

$$J_\delta f(x) = (\rho_\delta * f)(x)$$

$$\rho_\delta(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\delta^2}$$

Núcleo Gaussiano de radio δ .

$J_\delta f$ suaviza las puntas de f y elimina aquellas oscilaciones en escalas $\leq \delta$.

El núcleo Gaussiano tiene la propiedad que es el tiene la más pequeña dispersión de su transformada de Fourier entre todos los núcleos de mollificación.

Claramente, $\rho_\delta \in C^\infty$ y decrece rápidamente fuera de un intervalo de radio δ de su centro ($\approx 3\delta$), es positivo y tiene integral 1.

La transformada de Fourier $J_\delta f$ es dado por

$$\widehat{J_\delta f}(w) = \widehat{\rho_\delta}(w) \cdot \widehat{f}(w) = e^{-w^2\delta^2/4} \cdot \widehat{f}(w).$$

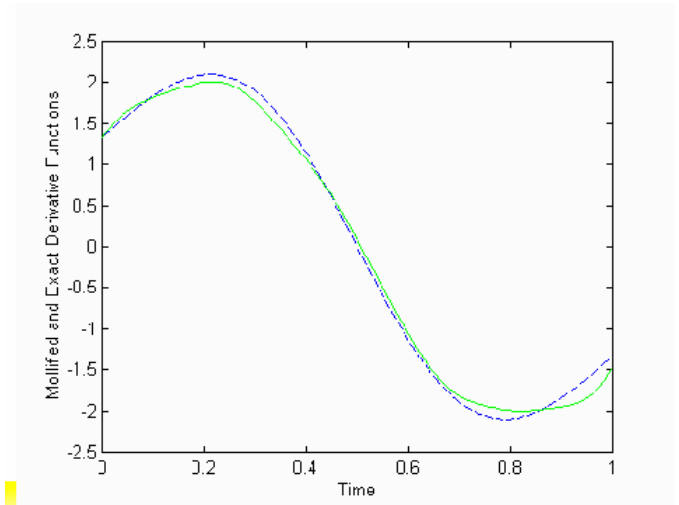
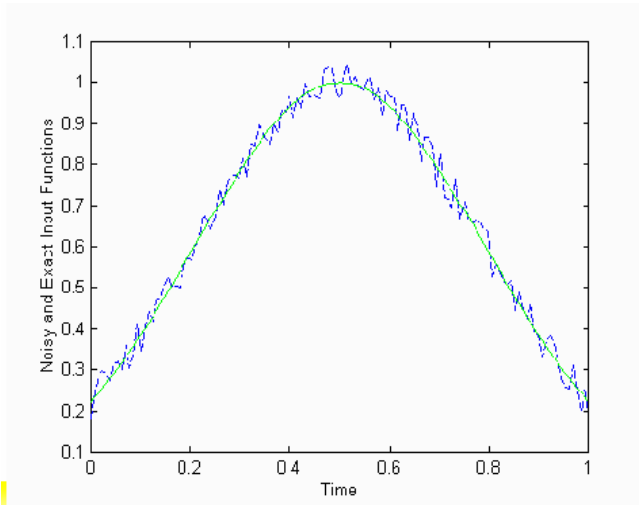
$C^0(I)$ el conjunto de funciones continuas sobre $I = [0,1]$ con $\|f\|_\infty = \max_{x \in I} |f(x)|$.

$$\frac{d}{dx} J_\delta f(x) = (\rho_\delta)' * f(x) = \rho_\delta * f'(x)$$

Sea $K \subset I$ un compacto tal que $d(K, \partial I) \geq 3\delta$.

Teorema 2.7 : Si $f_\varepsilon \in C^o(I)$ y $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$, entonces

1. $\|J_\delta f_\varepsilon - f\|_{\infty, K} \leq 4M_1\delta + \varepsilon$
2. (Consistencia) If $\|f''\|_{\infty, I} \leq M_2$, entonces $\|(J_\delta f)' - f'\|_{\infty, K} \leq 3M_2\delta$.
3. (Estabilidad) $\|f''\|_{\infty, I} \leq M_2$, entonces $\|(J_\delta f)' - (J_\delta f_\varepsilon)'\|_{\infty, K} \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}\delta}$.
4. (Convergencia). $\|f''\|_{\infty, I} \leq M_2$, entonces $\|f' - (J_\delta f_\varepsilon)'\|_{\infty, K} \leq 3M_2\delta + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}\delta}$.



Bibliografía

1. J. Baumeister, *Stable Solutions of Inverse Problems*, Vieweg, Braunschweig, 1987.
2. H.W. England, M. Hanken and J. Neubauer *Regularization of Inverse Problems*, 2000.
3. S.F. Gilyazov and N.L. Gol'dman, *Regularization of Ill-Posed Problems by Iteration Methods Tikhonov*. 2000.
4. A. Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. 1996.
5. A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin, *Solutions of Ill-posed Problems*, Winston and Sons, Washington, 1977.