Av. Blanco Encalada 2120

Santiago, Chile

Fono: 978 4525

Fax: 688 9705

Un Estudio para la Determinación de la Superficie de Quiebre en una Mina Subterránea en El Teniente

Informe Final

Raúl Manásevich (director)

Roger Bustamante

Javier Ruiz

Duvan Henao

Matias Courdurier

Alonzo González

Claudia Vallejos

Matias Valdenegro

Leonardo Figueroa

Maëlle Guennec-Allain

Lenardo Jofre

Cristian Jara

Mario Fernández

Diciembre-2012

Índice

Lista de figuras 2

Índice de figuras 2

1. Un Nuevo Software Basado en CME3D 19

1.1. Resumen . . . 19
1.2. Casos de estudio . . . 20
1.2.1. Caso Pilar Norte . . . 20
1.2.2. Caso Esmeralda . . . 24
1.2.3. Caso Diablo Regimiento . . . 27
1.3. Descripción Software . . . 36
1.4. Manual de uso . . . 38
1.4.1. Breve resumen de Uso . . . 41
1.5. Extensiones futuras . . . 41
1.6. Conclusiones . . . 41

2. Elementos Discretos simplificado 42

2.1. Resumen . . . 42
2.2. El Modelo . . . 47
2.3. Descripción Software . . . 54
2.4. Casos de estudio . . . 69
2.4.1. Caso Pilar Norte . . . 69
2.4.2. Caso Esemeralda . . . 82
2.4.3. Caso Diablo Regimiento . . . 91
2.5. Resultados Generales . . . 104
2.6. Extensiones futuras . . . 104
2.7. Manual de Uso . . . 104

3. Modelo Basado en Gravimetría 110

3.1. Resumen . . . 110
3.2. Casos de estudio . . . 110
3.2.1. Caso Diablo Regimiento . . . 110
3.2.2. Caso Pilar Norte . . . 112

3.2.3. Caso Esmeralda Bloque 1 . . . 114
3.3. Resultados Generales . . . 118
3.4. El Modelo . . . 120
3.4.1. Descripción Teórica . . . 120
3.4.2. Metodología . . . 121
3.4.3. Discretización . . . 122
3.4.4. Regularización de la Función Objetivo . . . 123
3.4.5. Resolución del Problema de Optimización . . . 124
3.5. Descripción del Software y Manual de Uso . . . 124
3.5.1. Resumen Estructura de Datos . . . 124
3.5.2. Resumen Implementación (en Matlab) . . . 125
3.5.3. Documentación de las Rutinas Principales. . . . 125
3.5.4. Otras Rutinas . . . 129
3.5.5. Manual de Uso . . . 129

4. Estudio de Fuentes Sísmicas con Time-Reversal y Mínimos Cuadrados 130

4.1. Resumen de la Linea . . . 130
4.2. Estimación con Mínimos Cuadrados y Clasificación . . . 131
4.2.1. Estimación de las Fuentes Sísmicas . . . 131
4.2.2. Clasificación de las Fuentes Sísmicas. . . . 132
4.2.3. Conclusión Estimación y Clasificación de Fuentes . . . 133
4.3. Modelos . . . 133
4.3.1. Ecuación de Ondas Elástica . . . 133
4.3.2. Modelo de Time-Reversal . . . 134
4.3.3. Estimación de Fuentes Utilizando Mínimos Cuadrados. . . . 135
4.3.4. Clasificación de Fuentes Reconstruidas. . . . 136
4.4. Resumen Dificultades y Conclusión en Time-Reversal . . . 137
4.4.1. Tamaño del problema . . . 137
4.4.2. Cobertura de Geosensores . . . 137
4.4.3. Conclusión . . . 137
4.5. Descripción del Software y Manual de Uso . . . 138
4.5.1. Forma de importar los datos al sistema . . . 138
4.5.2. Descripción de estructuras de datos . . . 138
4.5.3. Resumen de implementacion (En Matlab y Python) . . . 138
4.5.4. Manual de uso . . . 142
4.6. Anexos . . . 142
4.6.1. Test Reconstrucción de Fuentes con Mínimos Cuadrados . . . 142
4.6.2. Eventos Analizados en la Subección 4.2.3 . . . 143
4.6.3. Ejemplos Resultados Time-Reversal . . . 151

5. Modelación de la Superficie de Caving Usando Elementos Finitos 153
5.1. Resumen . . . 153
5.2. Modelo de daño mecánico . . . 154
5.2.1. Modelo de daño de Lyachikovsky . . . 154
5.2.2. Modelo de daño alternativo . . . 155
5.2.3. Método para predecir la forma de la superficie de caving. Parámetros de material . . . 155
5.2.4. Modelo para 'quemado'de pilares . . . 157
5.3. Descripción Software . . . 158
5.4. Casos de estudio . . . 158
5.4.1. Casos preliminares . . . 159
5.4.2. Resultados considerando el modelo presentado en la Sección 5.2.1 con las constantes (5.18)-(5.20): Resultados preliminares . . . 172
5.4.3. Caso Pilar Norte considerando el modelo presentado en la Sección 5.2.1 con las constantes: Resultados finales (5.18)-(5.20) . . . 182
5.5. Resultados Generales . . . 217
5.6. Extensiones futuras . . . 218

6. Estudio del Cave Back Usando Información Sísmica. 219
6.1. Estudio de Cave Back Utilizando Información Sísmica . . . 219
6.1.1. Breve presentación . . . 219
6.1.2. Objetivos generales del estudio . . . 219
6.1.3. Fundamento y marco general del proyecto . . . 220
6.1.4. Etapas desarrolladas . . . 222
6.2. Descripción del Método . . . 222
6.2.1. Parámetros de la fuente sísmica y definición de índices . . . 222
6.2.2. Metodología de trazado de la superficie . . . 227
6.3. Caso de Estudio - Esmeralda - Estimación de la Superficie de Quiebre Usando Parámetros Sísmicos . . . 231
6.3.1. Aplicación de la metodología a un subcatálogo . . . 231
6.3.2. Evolución temporal de la superficie . . . 234
6.4. Caso de Estudio - Análisis y Modelamiento de las Formas de Ondas . . . 238
6.4.1. Ecuaciones básicas del teorema de representación de fuentes sísmicas . 238
6.4.2. Orientación de un plano de falla cualquiera . . . 240
6.4.3. Cálculo del campo total de desplazamiento para un tensor de momento general . . . 241
6.4.4. Análisis y descomposición de un tensor de momento sísmico general . . 242
6.4.5. Verificación de los cálculos de sismogramas sintéticos . . . 243
6.4.6. Análisis de las formas de onda . . . 244

6.4.7. Modelamiento de formas de onda . . . 245
6.4.8. Efectos de la banda pasante . . . 248
6.4.9. Comentarios generales y discusión . . . 254
6.5. Extensión Futura y Conclusiones Generales . . . 254
6.6. Software, documentación, código fuente e implementación del trazado de la superficie . . . 257
6.6.1. Descripción general archivos . . . 257
6.6.2. Programas principales . . . 258
6.6.3. Otros programas . . . 259
6.6.4. Subrutinas . . . 259

7. Análisis Variacional de la Superficie de Socavación 260

7.1. Resumen . . . 260
7.2. El Modelo . . . 262
7.2.1. Supuestos del modelo . . . 262
7.2.2. Escenarios . . . 265
7.2.3. Notación . . . 266
7.2.4. Método de descenso . . . 267
7.2.5. Avance de la socavación . . . 278
7.2.6. Inicialización de la función distancia . . . 280
7.2.7. Cantidad de material en elementos alrededor de la interfaz . . . 281
7.2.8. Coeficientes discontinuos . . . 284
7.2.9. Derivada con respecto a la forma [23] . . . 295
7.2.10. Actualización de la función de nivel [35] . . . 297
7.2.11. Posibles mejoras . . . 299
7.3. Teorema de existencia . . . 306
7.3.1. Compacidad . . . 307
7.3.2. Semicontinuidad inferior . . . 310
7.3.3. Observaciones finales . . . 313
7.4. Implementación numérica . . . 314
Descripción del código fuente . . . 315
7.5. Resultados Generales . . . 317
7.5.1. Socavación . . . 317
7.5.2. Socavación modificada . . . 318
7.5.3. Cavidad elíptica en macizo rectangular . . . 318
7.5.4. Cavidad rectangular en macizo rectangular . . . 319
7.5.5. Variación de la tenacidad κ . . . 320
7.6. Extensiones futuras . . . 321

A. Manual de Clases CME3D 330

B. Archivos de Voronoi y Producción 384

Índice de figuras

1.1. Resultado etapa anterior . . . 19
1.2. Resultado obtenido etapa actual . . . 20
1.3. Vista XYZ . . . 21
1.4. Pilar Norte Vista YXZ . . . 22
1.5. Pilar Norte Vista XZY . . . 22
1.6. Estadistica Pilar Norte . . . 23
1.7. Conjunto de archivos F . . . 25
1.8. Esmeralda: Vista XYZ . . . 25
1.9. Esmeralda Vista YXZ . . . 26
1.10. Esmeralda Vista XZY . . . 26
1.11. Estadistica Esmeralda . . . 27
1.12. Conjunto de archivos Diablo Regimiento . . . 28
1.13. Diablo Regimiento Vista XYZ . . . 29
1.14. Diablo Regimiento Vista YZX . . . 29
1.15. Diablo Regimiento Vista XZY . . . 30
1.16. Estadistica Diablo Regimiento . . . 31
1.17. Macizo Rocoso Ω (l,w,h). . . . 33
1.18. Discontinuo χ . . . 34
1.19. Vista de frente con las zonas de socavación . . . 34
1.20. Malla regular sobre la base del Ω . . . 36
1.21. Bloque al cual debemos recuperar las caras hacia arriba . . . 36
1.22. Pantalla Principal . . . 39
1.23. Pestaña de Hidrofractura . . . 39
1.24. Pestaña Puntos de extracción o Base de socavación . . . 40
1.25. Pestaña Estadísticas . . . 40

2.1. Caso Pilar Norte . . . 42
2.2. Esquema del proceso de caving modelado por DEM. Por simplicidad, los resortes no se dibujan. Fuente: Elaboración Propia. . . . 44
2.3. Continuación de Figura 2.2 . . . 45

2.4. Empaquetamiento hexagonal compacto. 2.4a muestra una vista en planta junto con el respectivo orden de apilamiento. 2.4b muestra una vista de la celda hexagonal definida por el empaquetamiento. 48
2.5. Resortes representando la rigidez normal del contacto entre 2 esferas 48
2.6. Grados de Libertad en la configuración de 2 esferas 49
2.7. Geometría del contacto entre 2 esferas 49
2.8. Geometria del Piso y las Bateas. Vista en planta. 51
2.9. Geometría de las Murallas 52
2.10. Geometría de las Bateas (Perspectiva, Lado y Planta) 52
2.11. Condiciones de Frontera 53
2.12. Aplicación de las condiciones de frontera 53
2.13. Resultado del metodo del material caido 62
2.14. Resultado del metodo de los contactos 64
2.15. Resultado del método de los contactos, versión suavizada 65
2.16. Resultados de la extraccion de esferas de superficie 67
2.17. Resultados de la extraccion de superficie 68
2.18. Volumen Extraido Pilar Norte, Meses 1-6. 70
2.19. Volumen Extraido Pilar Norte, Meses 7-12. 71
2.20. Volumen Extraido Pilar Norte, Meses 13-16. 72
2.21. Superficie del Volumen Extraido Pilar Norte, Meses 1-6. 73
2.22. Superficie del Volumen Extraido Pilar Norte, Meses 7-12. 74
2.23. Superficie del Volumen Extraido Pilar Norte, Meses 13-16. 75
2.24. Interacciones Pilar Norte, Meses 1-6. 76
2.25. Interacciones Pilar Norte, Meses 7-12. 77
2.26. Interacciones Pilar Norte, Meses 13-16. 78
2.27. Superficie Interacciones Pilar Norte, Meses 1-6. 79
2.28. Superficie Interacciones Pilar Norte, Meses 7-12. 80
2.29. Superficie Interacciones Pilar Norte, Meses 13-16. 81
2.30. Volumen Extraido Esmeralda, Meses 1-6. 83
2.31. Volumen Extraido Esmeralda, Meses 7-11. 84
2.32. Superficie del Volumen Extraido Esmeralda, Meses 1-6. 85
2.33. Superficie del Volumen Extraido Esmeralda, Meses 7-11. 86
2.34. Interacciones Esmeralda, Meses 1-6. 87
2.35. Interacciones Esmeralda, Meses 7-11. 88
2.36. Superficie Interacciones Esmeralda, Meses 1-6. 89
2.37. Superficie Interacciones Esmeralda, Meses 7-11. 90
2.38. Volumen Extraido Diablo Regimiento, Meses 1-6. 92
2.39. Volumen Extraido Diablo Regimiento, Meses 7-12. 93
2.40. Volumen Extraido Diablo Regimiento, Meses 13-16. 94

2.41. Superficie del Volumen Extraido Diablo Regimiento, Meses 1-6. 95
2.42. Superficie del Volumen Extraido Diablo Regimiento, Meses 7-12. 96
2.43. Superficie del Volumen Extraido Diablo Regimiento, Meses 13-16. 97
2.44. Interacciones Diablo Regimiento, Meses 1-6. 98
2.45. Interacciones Diablo Regimiento, Meses 7-12. 99
2.46. Interacciones Diablo Regimiento, Meses 13-16. 100
2.47. Superficie Interacciones Diablo Regimiento, Meses 1-6. 101
2.48. Superficie Interacciones Diablo Regimiento, Meses 7-12. 102
2.49. Superficie Interacciones Diablo Regimiento, Meses 13-16 103
2.50. Formato datos crudos Codelco 106
2.51. Modificar Código bc-testFormato.py 106
2.52. Interfaz Gráfica. Fuente Modelación Pilar Norte. 107
2.53. Script de ejecución en el Cluster 107
2.54. Script de ejecución bc-testFormato.py 108
2.55. Scripts de ejecución en Matlab 109

3.1. (a) Vértices describiendo el dominio D. (b) Posición de las mediciones de gravimetría 111
3.2. Triangulación del dominio con 200 vértices al interior. 111
3.3. Reconstrucción superficie superior cavidad Diablo Regimiento 2005. 112
3.4. Reconstrucción superficie superior cavidad Diablo Regimiento 2006. 113
3.5. Comparación reconstrucciónes superficies Diablo Regimiento 2005 y 2006. La superficies sólida por debajo es la la superficie 2005, la superficie transparente ubicada por encima es la superficie 2006 114
3.6. (a) Vértices describiendo el dominio D. (b) Posición de las mediciones de gravimetría 114
3.7. Triangulación del dominio con 200 vértices al interior. 115
3.8. Reconstrucción superficie superior cavidad Pilar Norte Noviembre 2010. 115
3.9. Reconstrucción superficie superior cavidad Pilar Norte Agosto 2011. 116
3.10. Comparación reconstrucciónes superficies Pilar Norte Noviembre 2010 y Agosto 2011. La superficies sólida por debajo es la la superficie 2010, la superficie transparente ubicada por encima es la superficie 2011 117
3.11. (a) Vértices describiendo el dominio D. (b) Posición de las mediciones de gravimetría 117
3.12. Triangulación del dominio con 200 vértices al interior. 118
3.13. Reconstrucción superficie superior cavidad Esmeralda Bloque 1 Abril 2012. . . 118
3.14. Reconstrucción superficie superior cavidad Esmeralda Bloque 1 Junio 2012. . . 119

3.15. Comparación reconstrucciónes superficies Esmeralda Bloque 1 Abril 2012 y Junio 2012. La superficies sólida por debajo es la la superficie Abril 2012, la superficie transparente ubicada por encima es la superficie Junio 2012 120
3.16. Ángulos α_{ij}, β_{ij} que definen w_{ij}. 123

4.1. Esquema de medición de un evento sísmico: el cilindro rojo representa la fuentes sísmica, los cubos azules representan la red de geosensores donde se obtienen las mediciones del sísmo. 130
4.2. Medición del campo de velocidad del sísmo en el sensor 1, evento *1998_aug_02_07_30_40.d5g*.
4.3. Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento *1998_aug_02_07_30_40.d5g*. La linea roja representa el tiempo del evento estimado independientemente por la red de geosensores. 132
4.4. Filtro y rotación de la fuente como una fuerza para el evento *1998_aug_02_07_30_40.d5g*. La componente más pequeña contiene un 18 % de la energía total de la fuente. 132
4.5. Valores de la componente más pequeñas de las fuentes sísmicas reconstruidas. Se considereraron 29 eventos sísmicos. Dada la distribución de los valores, se clasificaron en tres grupos. 133
4.6. Esquema de Time-Reversal. 134
4.7. Fuente artificial para el test. 143
4.8. a) Reconstrucción de la fuente artificial. b) Sobreposición de la fuente artificial y su reconstrucción. 143
4.9. Filtro y rotación de la fuente como una fuerza para el evento 1998_aug_02_07_30_40.d5g143
4.10. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_aug_07_16_24_3
4.11. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_aug_09_21_49_2
4.12. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_aug_10_07_42_0
4.13. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_aug_20_08_37_3
4.14. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jul_04_13_49_28
4.15. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jul_05_02_34_05
4.16. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jul_06_12_14_55
4.17. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jun_26_10_12_59
4.18. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jun_27_06_14_09
4.19. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jun_28_12_21_02
4.20. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jun_29_22_24_21
4.21. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_nov_01_22_40_3
4.22. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_nov_02_14_15_2
4.23. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_nov_07_21_23_0
4.24. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_nov_13_06_30_4
4.25. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_10_16_00_15
4.26. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_15_22_38_44

4.27. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_20_16_06_43
4.28. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_21_17_20_29
4.29. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_21_18_22_44
4.30. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_21_20_10_32
4.31. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_27_19_38_10
4.32. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_29_18_22_05
4.33. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 2011_apr_10_02_27149
4.34. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 2011_apr_10_04_56150
4.35. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 2011_apr_10_06_00150
4.36. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 2011_apr_10_06_16150
4.37. Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 2011_apr_10_07_52150
4.38. Time reversal para el evento 1998_aug_02_07_30_40.d5g 151
4.39. Time reversal para el evento 1998_aug_09_21_49_22.4n3 152

5.1. Vista esquematica de la zona inicial de la cavidad. 157
5.2. Daño $\alpha \geq 1$ para $t = 50$ en donde el primer pilar está quemado desde $t = 0$. . . 160
5.3. Primer esfuerzo principal (positivo) en $t = 50$. 160
5.4. Daño $\alpha \geq 1$ para $t = 120$ en donde hay dos pilares quemados. 160
5.5. Primer esfuerzo pricipal (positivo) en $t = 127$. 161
5.6. Daño $\alpha \geq 1$ en $t = 1000$. 162
5.7. Primer esfuerzo principal (positivo) en $t = 1000$. Vista superior de la cavidad. 162
5.8. Primer esfuerzo principal (positivo) en $t = 1000$. Vista isométrica. 163
5.9. Caso (a) zona $\alpha \geq 1$. 164
5.10. Caso (a) zona con primer esfuerzo principal (positivo). 164
5.11. Caso (b) zona $\alpha \geq 1$. 165
5.12. Caso (b) zona con primer esfuerzo principal (positivo). 165
5.13. Caso (c) zona con $\alpha \geq 1$. 165
5.14. Caso (c) zona con primer esfuerzo principal (positivo). 166
5.15. Caso (a) zona $\alpha \geq 1$. 167
5.16. Caso (a) zona conprimer esfuerzos principal (parte positiva). 167
5.17. Caso (b) zona $\alpha \geq 1$. 168
5.18. Caso (b) zona primer esfuerzos principal (parte positiva). 168
5.19. Caso (a) zona $\alpha \geq 1$. 169
5.20. Caso (b) zona $\alpha \geq 1$. 169
5.21. Caso (c) zona $\alpha \geq 1$. 170
5.22. Caso (c) zona con primer esfuerzo principal con valores positivos. 170
5.23. Daño zona $\alpha \geq 1$. 171
5.24. Bloque con un pilar quemado. 172
5.25. Malla para el bloque con un solo pilar. 173

5.26. Zona de falla $\alpha \geq 1$ vista general. 173
5.27. Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. 174
5.28. Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Plano de planta. 174
5.29. Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Vista en plano $x - z$ 175
5.30. Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Vista en plano $y - z$ 175
5.31. Zona para la cual el primer esfuerzo principal es positivo. 176
5.32. Esquema mostrando el techo de los pilares. En este primer ejemplo solo se 'queman'dos pilares. 177
5.33. Bloque con dos pilares quemados. 178
5.34. Malla para el bloque dos pilares quemados. 178
5.35. Zona de falla $\alpha \geq 1$ vista general. 179
5.36. Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. 179
5.37. Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Plano de planta. 180
5.38. Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Vista en plano $x - z$ 180
5.39. Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Vista en plano $y - z$ 180
5.40. Zona para la cual el primer esfuerzo principal es positivo. 181
5.41. Zona de falla $\alpha \geq 1$ vista general. 182
5.42. Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. 183
5.43. Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Plano de planta. 183
5.44. Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Vista en plano $x - z$ 184
5.45. Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Vista en plano $y - z$ 184
5.46. Zona para la cual el primer esfuerzo principal es positivo. 184
5.47. Modelo del pilar norte, vista en planta del diseño de los pilares. 185
5.48. Dimensiones y forma de cada pilar, vista superior. 185
5.49. Modelo del pilar norte, vista isométrica general. 185
5.50. Modelo del pilar norte, vista isométrica de la malla del macizo. 186
5.51. Modelo del pilar norte, vista en planta de la malla del macizo. 186
5.52. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 10000$. 188

5.53. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 22000$. 188
5.54. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 44000$. 189
5.55. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 90000$. 189
5.56. Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 10000$. 190
5.57. Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 22000$. 190
5.58. Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 44000$. 191
5.59. Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 90000$. 191
5.60. Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ a del parámetro de daño α para el instante $t = 10000$. 192
5.61. Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 22000$. 192
5.62. Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 44000$. 193
5.63. Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 90000$. 193
5.64. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 20000$. 194
5.65. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 21000$. 194
5.66. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 39000$. 195
5.67. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 64000$. 195
5.68. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 66000$. 195
5.69. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 95000$. 196
5.70. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 135000$. 196
5.71. Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 20000$. 197

5.72. Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 21000$. 197
5.73. Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 39000$. 198
5.74. Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 64000$. 198
5.75. Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 66000$. 198
5.76. Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 95000$. 199
5.77. Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 135000$. 199
5.78. Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 20000$. 200
5.79. Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 21000$. 200
5.80. Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 39000$. 201
5.81. Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 64000$. 201
5.82. Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 66000$. 201
5.83. Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 95000$. 202
5.84. Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 135000$. 202
5.85. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 10000$. 203
5.86. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 20000$. 203
5.87. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 33000$. 204
5.88. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 45000$. 204
5.89. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 55000$. 204
5.90. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 72000$. 205

5.91. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 98000$. 205
5.92. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 130000$. 205
5.93. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 172000$. 206
5.94. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 195000$. 206
5.95. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 232000$. 206
5.96. Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 315000$. 207
5.97. Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 10000$. 208
5.98. Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 20000$. 208
5.99. Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 33000$. 209
5.100 Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 45000$. 209
5.101 Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 55000$. 209
5.102 Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 72000$. 210
5.103 Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 98000$. 210
5.104 Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 130000$. 210
5.105 Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 172000$. 211
5.106 Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 195000$. 211
5.107 Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 232000$. 211
5.108 Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 10000$. 212
5.109 Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 20000$. 212

5.110 Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 33000$. 212
5.111 Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 45000$. 213
5.112 Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 55000$. 213
5.113 Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 72000$. 213
5.114 Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 98000$. 214
5.115 Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 130000$. 215
5.116 Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 172000$. 215
5.117 Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 195000$. 216
5.118 Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 232000$. 216
5.119 Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 315000$. 216

6.1. 220
6.2. 223
6.3. 224
6.4. 226
6.5. 226
6.6. 227
6.7. Valores de separación para $\frac{\Delta\sigma_d}{\Delta\sigma_s}$ 229
6.8. Valores de separación para $\frac{\Delta\sigma_a}{\Delta\sigma_s}$ 229
6.9. Valores de separación para $\frac{E_s}{E_p}$ 230
6.10. Aplicación de la metodología al subcatálogo comprendido entre $k_1 = 4000$ y $k_2 = 6000$, usando $\frac{E_s}{E_p}$ 232
6.11. Aplicación de la metodología al subcatálogo comprendido entre $k_1 = 4000$ y $k_2 = 6000$, usando $\frac{\Delta\sigma_d}{\Delta\sigma_s}$ 233
6.12. Aplicación de la metodología al subcatálogo comprendido entre $k_1 = 4000$ y $k_2 = 6000$, usando $\frac{\Delta\sigma_d}{\Delta\sigma_s}$ 234
6.13. Evolución de la superficie de quiebre, vista cada 500 eventos, usando $\frac{E_s}{E_p}$ 235
6.14. Evolución de la superficie de quiebre, vista cada 500 eventos, usando $\frac{\Delta\sigma_d}{\Delta\sigma_s}$ . . . 236
6.15. Evolución de la superficie de quiebre, vista cada 500 eventos, usando $\frac{\Delta\sigma_a}{\Delta\sigma_s}$ . . . 237

6.16. 239
6.17. 240
6.18. 241
6.20. 243
6.21. 244
6.22. 246
6.23. 247
6.24. 249
6.25. 250
6.26. 251
6.27. 252
6.28. 253
6.29. 255
6.30. 256

7.1. Dominio computacional caving lateral 262
7.2. Pilares 263
7.3. Bateas 263
7.4. Situación anterior a la simulación: el pilar # 1 ha sido hundido pero la batea #1 aún no entra en operación. 263
7.5. Instante inicial t_1: hundimiento del pilar # 2 y puesta en marcha de la batea #1. 264
7.6. Determinación del ancho $\tilde{L}$ 268
7.7. Partes Neumann de la frontera 270
7.8. Reinicialización de la función de nivel [35, Fig. 9] 275
7.9. Curvas de nivel antes y después de la eliminación de un pilar 279
7.10. Función de distancia a un segmento recto 280
7.11. Interfaz inicial en el caving lateral 281
7.12. Dos posibles formas de la preimagen por una función afín de los reales no-negativos 283
7.13. Problema unidimensional de valores propios con coeficientes discontinuos usando elementos finitos. La gráfica muestra las funciones propias e_i, sus derivadas discontinuas e_i' y los flujos $c(x)e_i(x)$, siendo e_i la i-ésima función propia. 285
7.14. Problema unidimensional de valores propios con coeficientes discontinuos usando elementos espectrales. La gráfica muestra las funciones propias e_i, sus derivadas discontinuas e_i' y los flujos $c(x)e_i(x)$, siendo e_i la i-ésima función propia. 286
7.15. Problema espectral en 2d usando elementos finitos 288
7.16. Problema espectral en 2d usando métodos espectrales 288
7.17. Tasa de convergencia usando una malla adaptada al coeficiente discontinuo . . 294
7.18. Tasa de convergencia usando una malla normal 295

7.19. Curvas de nivel de la distancia con signo ψ a la interfaz macizo-cavidad en el caso de la socavación en los pasos de pseudotiempo 1, 25, 50, 75, 100, 125 y 150. El macizo se halla a la derecha. 318
7.20. Esfuerzos a 75 pasos de pseudo tiempo en el caso de la socavación. 319
7.21. Velocidad de transporte de ψ y rapidez con signo $\mathcal{V}$ a 75 pasos de pseudo tiempo en el caso de la socavación (detalle). 320
7.22. Curvas de nivel de la distancia con signo ψ a la interfaz macizo-cavidad en el caso de la socavación modificada en los pasos de pseudotiempo 1, 25, 50, 75, 100, 125 y 150. El macizo se halla a la derecha. 321
7.23. Velocidad de transporte de ψ y rapidez con signo $\mathcal{V}$ a 124 pasos de pseudo tiempo en el caso de la socavación modificada. 322
7.24. Curvas de nivel de la distancia con signo ψ a la interfaz macizo-cavidad en el caso de la cavidad elíptica en un macizo rectangular en los pasos de pseudotiempo 1, 25, 50, 75, 100, 125 y 150. El macizo se halla afuera de la elipse inicial. . . . 323
7.25. Velocidad de transporte de ψ y rapidez con signo $\mathcal{V}$ en los pasos 1 y 100 de pseudo tiempo en el caso de una cavidad rectangular en un macizo rectangular. 323
7.26. Estado inicial para el experimento de variación la tenacidad κ. 324
7.27. Estado final para el experimento de variación de la tenacidad con κ igual a 10, 22, 46, 100, 215, 464, 1000, 2154, 4642, 10000, 21544, 46416 y 100000 [J/m^2]. . 325

Resumen Ejecutivo

El tipo de explotación presente las minas subterraneas en El Teniente es la de Block Caving, proceso que es conocido que puede ser bastante inestable y presentar situaciones de riesgo como la explosión de rocas.

Un problema crucial que aparece en este proceso de Block Caving es la estimación de la superficie de quiebre y su evolución en el tiempo, problema que se conoce también como determinación del Cave Back y que es el tema este proyecto.

Este proyecto se desarrolló en dos etapas. La primera tuvo como objetivo estudiar las factibilidades técnicas de implementación de las distintas hipótesis que se plantearon en las diferentes líneas de trabajo conducentes a proporcionar la mayor información posible de la superficie de quiebre y en la mayoría de ellas se pudo incluso determinar una tal superficie.

Sin embargo dado que los métodos utilizados son diferentes en las lineas, cada una de ella propone superficies de quiebre que resultan ser distintas. Esto, por supuesto, llama a a un proceso adicional de integración de estas superficies.

En la segunda etapa del proyecto , que es la que se informa en este proyecto, los métodos desarrollados en la primera etapa son validados con respecto a datos reales de las minas de El Teniente. Esta es la diferencia principal entre la primera parte del proyecto y la segunda, esta última consiste en una aplicación a situaciones reales de los meťodos desarrollados en la primera parte. Por supuesto esto implicó un perfeccionamiento de los métodos e ideas previamente obtenidos, ya que la aplicación de estos a casos reales produjo una serie de nuevos problemas, podríamos decir de todo tipo, tanto en la teoría como en los métodos computacionales.

Las lineas consideradas en la parte final del proyecto, casi todas continuación de las de la primera parte, fueron las siguientes:

1. Un nuevo software basado en CME3D.
2. Línea Modelo de Elementos Discreto (DEM).
3. Modelo Basado en Gravimetría.
4. Estudio de fuentes sísmicas con time reversal y minimos cuadrados.
5. Modelación de la Superficie de Caving Usando Elementos Finitos.
6. Estudio del Cave Back Usando Información Sísmica.
7. Análisis Variacional de la Superficie de Socavación.

La línea 1 se basa en el el software CME3D que se desarrolló previamente en la primera etapa, y que permite obtener la cavidad máxima estable en 3D [58]. Sin embargo este software tuvo que ser modificado y ampliado con respecto al originalmente propuesto.

Para explicar brevemente las ideas conceptuales de esta línea consideraremos un macizo rocoso donde la roca se encuentra completamente fracturada, por lo que por la influencia de la gravedad y de las labores de extracción, ciertos bloques caerán. Las labores de extracción se realizan en *bateas*, pudiendo existir varias en el macizo. Cada batea tiene asociada una *velocidad de extracción* de material, la que corresponde al volumen de material extraído por unidad de tiempo.
El objetivo es determinar la **evolución de la superficie de la cavidad** [1] que hay en el macizo, dado que se ha extraído un volumen V_f del macizo desde bateas $b_1, \ldots, b_n$ con velocidades de extracción $v_1, \ldots, v_n$ respectivamente.

Basados en datos reales proporcionados por El Teniente para los 3 casos: Pilar Norte, Esmeralda y Diablo Regimiento se construye en esta linea una cavidad máxima estable para cada caso y se estudia la evolución de estas. En cada caso se considera información real con respecto a las discontinuidades, zonas de extracción y producción para periodos entre 2010-2012.

En la línea 2 se parte de un software obtenido en la primera parte del proyecto mediante un método que utiliza un esquema de Elementos Discretos simplificado (DEM). En forma breve el concepto clave de este método DEM consiste en que el dominio de interés, la roca, es tratado como un ensamble de elementos rígidos en el cual, los contactos entre éstos son identificados y actualizados continuamente durante el proceso de deformación a través de un modelo constitutivo.

De esta manera los elementos, esferas en nuestro caso, unidos por los resortes representarían la roca en estado competente, y los elementos que cuenten con suficientes resortes rotos, representarían el material conminuído que sale por las bateas. Esta cantidad de material esta determinado por las alturas de extracción.

Considerando la cantidad de material extraído por cada batea, algunos parámetros geomecánicos y ciertos criterios, se concluye la forma de la superficie de quiebre de la cavidad resultante en escenarios específicos para los casos de Pilar Norte, Esmeralda y Diablo Regimiento.

En la línea 3 de este proyecto se desarrolla un modelo matemático para reconstruir la superficie de quiebre de la cavidad mediante mediciones de gravimetría.

Estas superficies son obtenidas en este proyecto considerando escenarios específicos para los casos de Pilar Norte, Esmeralda y Diablo Regimiento.

Linea 4. En el proceso de explotacion de la mina, los cambios mecanicos que va sufriendo el macizo rocoso producen eventos ssmicos que son registrados por una red de geosensores. Las mediciones obtenidas por la red de geosensores se utilizan para estimar, entre otras cosas, la ubicacion de la fuente ssmica (el epicentro) y el tiempo en que ocurrio el evento. El objetivo principal de esta lnea es utilizar las mediciones ssmicas para ahondar en el estudio y caracterizacion de los eventos ssmicos que ocurren durante el proceso productivo de la mina. Un caracterizacion adecuada de los eventos ssmicos entrega informacion mecanica importante de los lugares donde estos ocurren, lo que ayudara a estimar el avance de la superficie de quiebre durante el proceso de extraccion. Originalmente se propuso utilizar el metodo de time-reversal, el cual a pesar de un

[1] Definimos cavidad como el conjunto de bloques que no han sido removidos

comportamiento adecuado en la experimentacion sintetica, no entrego resultados satisfactorios en los casos de mediciones reales (ver Seccion 4.4). Ante los resultados poco satisfactorios obtenidos mediante time reversal, se propuso la alternativa de estudiar las fuentes ssmicas mediante una reconstruccion por mnimos cuadrados y una clasificacion de acuerdo a su componente mas pequena (ver subsecciones 4.3.3 y 4.3.4). Esta alternativa produjo resultados mas robustos y con una evaluacion positiva.

En la línea 5 de este proyecto se propuso determinar la superficie de caving en función del tiempo, usando para ello un modelo de comportamiento no-lineal para el macizo rocoso basado en la determinación de una función escalar incognita α, que representa el daño que sufre la roca producto de los esfuerzos y que se supone representa a la forma de la superficie de quiebre. Se obtienen ecuaciones de equilibrio acopladas con una ecuación para α que se resuelven numericamente usando el método de elementos finitos con el programa Comsol.

(i) Se modelaron varios casos de daño considerando un modelo visco-elástico y geometrías o modelos simplificados 2D para el macizo. El propósito de esta etapa era estudiar en detalle distintas alternativas para modelar el proceso de quemado de pilares, y también obtener un conjunto de parámetros o constantes de material para el modelo de daño.

(ii) Se obtuvieron un conjunto de parámetros de daño y se estableció una metodología para considerar el quemado de pilares. Se procedió a estudiar tres modelos sencillos de caving con una geometría 3D para el macizo, considerando solo un pilar quemado, dos pilares (de cuatro) quemados en una secuencia dada, y finalmente tres pilares (de cuatro) quemados siguiendo una secuencia determinada. Se obtuvieron resultados similares a los esperados, no solo en cuanto a la forma de la cavidad, sino también en relación a la velocidad de propagación de la superficie de caving, en particular se pudo observar como dicha superficie detiene su crecimiento después de un intervalo de tiempo dado, a menos que mas pilares sean quemados.

(iii) Con la experiencia anterior, se consideró un modelo más realista del caving, trabajando con una geometría 3D y 16 pilares, cuya forma fue entregada por la contraparte de Teniente. La zona modelada correspondió al Pilar Norte. Se solucionó tres casos, que se diferenciaron por los valores de algunas de las constantes del modelo de daño. Los resultados obtenidos nuevamente concuerdan en un principio con los esperados desde el punto de vista experimental. No se pudo modelar toda la secuencia de quemado (de los 16 pilares), ni el proceso total de caving (hasta la conexión con la parte superior del macizo), debido a algunos problemas para obtener convergencia para ese número relativamente alto de pilares, y la falta de tiempo para poder haber ajustado los distintos parámetros del problema de modo de haber podido correr los modelos para un intervalo de tiempo mayor. En conclusión se pudo probar que el método basado en el parámetro de daño si serviría para modelar el complejo proceso de caving, resolviendo tres modelos realistas en 3D del caso Pilar Norte. No se pudo estudiar ese caso a fondo, es decir hasta lograr la conexión, debido a problemas de convergencia y de falta de tiempo. Tampoco fue posible analizar el caso de caving en régimen ni de la interacción con ondas sísmicas.

La línea 6 de este proyecto, que complementa la primera parte , consistió en seleccionar un subcatálogo de eventos sísmicos, en base a la elección de un cierto parámetro Kf, acotado en un cierto rango, para así proceder con el análisis de los sismogramas y modelamiento numérico de las formas de ondas. Este trabajo se fundamenta en poder acceder a características mecánicas de fallamiento en la fuente sísmica, analizados a

través del tensor de momento sísmico, Mpq. Esto tenía por objetivo, validar, o al menos, verificar en una cierta medida, por modelamiento de formas de onda, las hipótesis planteadas en la parte I. El tensor de momento sísmico, Mpq, permite interpretar y caracterizar físicamente entonces (1) fuentes de tipo cizalle puro (en un plano de falla), o (2) eventos de carácter implosivo o explosivo, que llevan consigo cambios de volumen en la zona de ruptura. Los eventos de cizalle o del tipo implosivos, son los más comunes en ambientes de minería subterránea, y se planteó en este estudio que eventos implosivos/explosivos (con parte isótropa importante), estarían generándose en la vecindad de la zona de quiebre, a diferencia de eventos de cizalle que ocurren en zonas más confinadas dentro del macizo rocoso. Identificarlos entonces, puede aportar información adicional que se utilizaría como restricción en el proceso de trazado y/o estimación de la zona de quiebre, y por ende de la superficie. Se escogió el cociente de la energía sísmica radiada por la onda P y la onda S, Ep/Es, como parámetro a explorar en el análisis y modelamiento de las formas de ondas. Para cada evento, se procesaron los archivos con las señales, y se ha verificado que los valores tabulados, en particular los tiempos de arribo de las ondas P y S, estuviesen correctamente leídos, esto con el fin de verificar que la información se estaba procesando correctamente. Se implementó computacionalmente (Fortran 90) el método directo de modelamiento de sismogramas sintéticos para un medio elástico, infinito, isótropo y homogéneo. El modelamiento implica que dada la posición hipocentral de un evento, más el tensor de momento sísmico y la función fuente temporal (en su forma analítica y tiempo de deslizamiento), se puede calcular el desplazamiento (o la velocidad) de la partícula en el geófono. El método directo consiste en asumir un tensor de momento sísmico, la función fuente temporal, y el tiempo total de la fuente para así modelar los sismogramas sintéticos. Se implementó la descomposición sismológica del tensor de momento, Mpq, mediante un análisis en valores y vectores propios, para extraer información sismológica relevante e importante, tales como cambios de volumen, los porcentajes de contribución de la componente isótropa (ISO), de doblecupla (DC) o el dipolo vectorial lineal compensado (CLVD). Una vez procesadas y leídas las formas de ondas, con la información de localización del eventos y de los receptores, se modelaron – en forma directa – los sismogramas sintéticos. Para los valores escogidos del cociente de energía Es/Ep, en tres rangos distintos, para cada uno de estos eventos se modeló un tensor doble-cupla (cizalle) y un tensor con componente isótropa dominante. En ambos casos se modelaron las formas de onda numéricamente y se compararon los sismogramas simulados con los registrados por los distintos geófonos. Estas comparaciones permitieron, en esta - 3 - etapa, confirmar que eventos con un valor alto de Es/Ep (>10), están mejor modelados por tensores doble-cupla (cizalle), en cambio, valores Ep/Es bajos (<1), concuerdan mejor con sismogramas sintéticos modelados con un tensor de momento con una componente isótropa dominante. Productos 1.- El código fuente (software) computacional escrito en lenguaje de programación en Matlab, que en base a los puntos definidos en el espacio, seleccionados por alguno de los criterios descritos y de acuerdo a la metodología propuesta, traza una superficie 3D que delimita la zona de transición relacionada con la superficie de quiebre de la cavidad. Esto incluye una aplicación y la documentación de cada una de las subrutinas. 2. - El informe final que incluye la descripción de la metodología y todo el análisis de formas de onda realizados.

En la línea 7 de este proyecto se desarrolla un modelo matemático para estudiar la superficie de quiebre basado en métodos variacionales. La idea detrás de este modelo consiste en considerar el crecimiento de la cavidad como el resultado del desprendimiento de roca a causa de la fuerza de gravedad, mecanismo de fallo

que el macizo rocoso decide emplear con el ánimo de liberar energía elástica en las zonas alrededor de la superficie de la cavidad en donde se haya producido la mayor acumulación de tensiones. El método consiste en minimizar un funcional del tipo

$$\underbrace{\int_{\Omega\setminus\chi} W(\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}}_{\text{Energía elástica}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S}_{\text{Esfuerzos lejanos}} + \underbrace{\kappa\cdot\text{volumen de la cavidad }\chi}_{\text{Energía de fractura}} \tag{1}$$

con respecto a la cavidad χ (la cual aparece como una de las incógnitas del modelo) y al campo de desplazamientos asociado $\mathbf{u} : \Omega\setminus\chi \to \mathbb{R}^2$, usando un método iterativo de descenso. El tercer término corresponde a la energía disipada en el proceso de fractura que lleva al desprendimiento de la roca, y desde el punto de vista matemático cumple el rol de estabilizar el modelo e impedir que la roca colapse completamente con el fin de minimizar la energía elástica. La evolución de la cavidad resulta de la competencia entre la minimización de los primeros dos términos y la minimización del tercero, y es más rápida o más lenta dependiendo de la magnitud del coeficiente de resistencia a la fractura κ.

El modelo descrito anteriormente se conoce como el *modelo variacional para la propagación brutal de daños de Francfort y Marigo* [32, 31] y ha sido utilizado recientemente por Allaire, Jouve & Van Goethem [23] para el estudio de la propagación de grietas en materiales frágiles.

Se muestra cómo adaptar la implementación numérica del modelo propuesta por estos autores (basada en elementos finitos, la derivada con respecto a la forma y la resolución mediante métodos explícitos de barlovento para las ecuaciones de Hamilton-Jacobi) al problema de la evolución de la superficie de quiebre. Por simplicidad se considera un problema bidimensional asociado a la determinación de la superficie de quiebre en la etapa lateral del proceso de *caving*, la cual comienza en el momento en que la cavidad conecta con los niveles superiores de la mina (esto es, con “la superficie”). El modelo variacional, sin embargo, no está limitado al caso bidimensional, y se puede extender, usando las ideas descritas en este informe, al problema en tres dimensiones, a otro tipo de geometrías, a materiales con otras propiedades constitutivas y a problemas con diferentes tipos de condiciones de borde.

El trabajo realizado en esta línea del proyecto consistió en:

- la formulación de un modelo matemático basado en el cálculo de variaciones para la determinación de la evolución de la superficie de quiebre asociada a la explotación de minas subterráneas mediante la técnica de *block caving* .
- la formulación de una aproximación por elementos finitos para la simulación numérica del modelo variacional propuesto.
- la demostración rigurosa de la existencia de soluciones para el problema de optimización infinito-dimensional del modelo propuesto, realizada junto a Maëlle Guennec-Allain, alumna en práctica de la Maestría en Matemáticas y Aplicaciones de la Escuela Normal Superior de Cachan en Bretaña (Francia)
- la implementación en un código híbrido Matlab-Python de la aproximación numérica del modelo variacional.

Capítulo 1

Un Nuevo Software Basado en CME3D

1.1. Resumen

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos durante esta etapa del proyecto, el que mediante una representación conceptual busca reproducir adecuadamente la superficie de quiebre y su evolución en el proceso de “Block Caving” en El Teniente.

En la etapa anterior se desarrolló un software, **CME3D**,documentado en [60][62][61] [67] [65] que permite obtener la cavidad máxima estable y su evolución en un espacio tridimensional, entregando como resultado un conjunto de bloques caídos. En éste se considera un macizo rocoso donde la roca se encuentra completamente fracturada, por lo que por la influencia de la gravedad y de las labores de extracción, ciertos bloques caerán. Las labores de extracción se realizan en *bateas*,pudiendo existir varias en el macizo. Cada batea tiene asociada una *velocidad de extracción* de material para cada instante de tiempo Δt, la que corresponde al volumen de material extraído por unidad de tiempo.

El objetivo es determinar la **evolución de la superficie de la cavidad** [1] que hay en el macizo, dado que se ha extraído un volumen V_f del macizo desde bateas $b_1, \ldots, b_n$ con velocidades de extracción $v_{1.t}, \ldots, v_{n,t}$ para cada tiempo t del algoritmo. Esto puede ser visto desde otra perspectiva como una serie de vólumenes de extracción para cada batea y para cada paso del tiempo Δt.

A partir de los resultados obtenidos anteriormente se hicieron mejoras para obtener la superficie de quiebre en cada instante de tiempo considerando solo las caras de los bloques caídos con normal en $z > 0$. A partir de estas caras fue posible reconstruir la superficie de quiebre y su evolución en cada instante de tiempo, ver figuras 1.1 vs 1.2

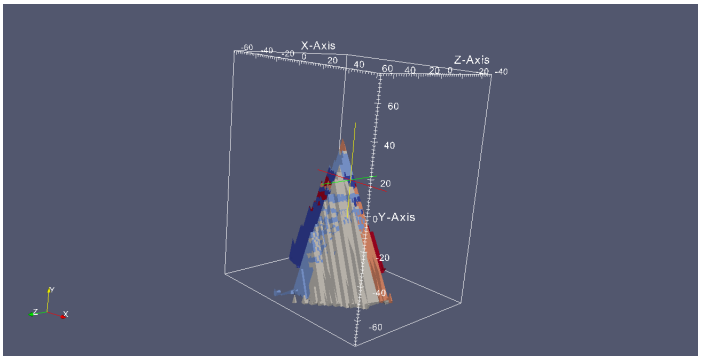


Figura 1.1: Resultado etapa anterior

[1] Definimos cavidad como el conjunto de bloques que han sido removidos

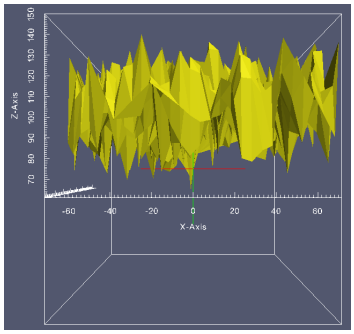


Figura 1.2: Resultado obtenido etapa actual

1.2. Casos de estudio

En lo que sigue se reconstruye la cavidad máxima estable y la evolución de estas para 3 casos: Pilar Norte, Esmeralda y Diablo Regimiento respectivamente. En cada caso se considera información real con respecto a las discontinuidades, zonas de extracción y producción para periodos entre 2010-2012.

Para cada uno de los casos se define como entrada las dimensiones del macizo Ω, las estructuras o discontinuidades π, zona de pre-acondicionamiento $\top$, si hubiera y las aperturas o zonas de extracción ζ. El resultado obtenido es un conjunto de archivos en formato VTK, ampliamente aceptado por un gran numero de herramientas OpenSource que permiten hacer visualizaciones de alta calidad imágenes.

1.2.1. Caso Pilar Norte

En este caso se reconstruye la cavidad máxima estable correspondiente a Pilar Norte con producción entre Sept. 2010 y Ene. 2012.

Input

$\Omega : l = largo(143)$, $w = ancho(248)$ y $h = alto(150)$.

π :table

Set	Dip	Dip$_{dir}$	Espacio
1	68	107	3
2	69	219	3
3	60	278	3
4	76	1	3
5	35	45	3
6	70	70	1,5

$\top$: Φ (se incluyó una estructura de hidro-fractura en π

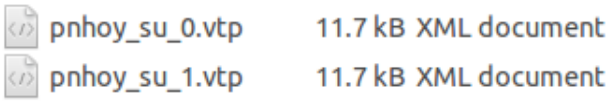
ζ: Archivos de zonas de extracción y producción Pilar Norte (ver apéndice Archivos Voronoi y Producción).

Output

El output corresponde a un conjunto de archivos F, ver figura 1.2.1, cada uno de estos archivo contiene el conjunto de vértices que describen la superficie generada en la iteración n de la simulación, cada uno de estos archivo se identifica por un prefijo numérico justo antes de la extensión de éste. Si n es el prefijo la salida de las superficies se puede describir como:

$$F = \{n_0.vtp, n_1.vtp, \ldots, n_k.vtp\}$$

siendo $n_k.vtp$ el último elemento del conjunto que coincide con la cavidad máxima estable de la superficie de quiebre para el experimento.



Conjunto de archivos F

Resultados

Las siguientes imágenes representan una visualización de la cavidad máxima estable desde varias perspectivas, la primera es una vista de frente al eje X Z (ancho / alto) , la segunda de frente al eje Y , Z (largo / alto) y la ultima de frente al eje X , Y (vista de abajo hacia arriba).

En las siguientes imágenes se muestran tres vistas de la superficie generada desde los archivos de salida.

Pilar Norte: vista correspondiente al plano XZ, largo/altura

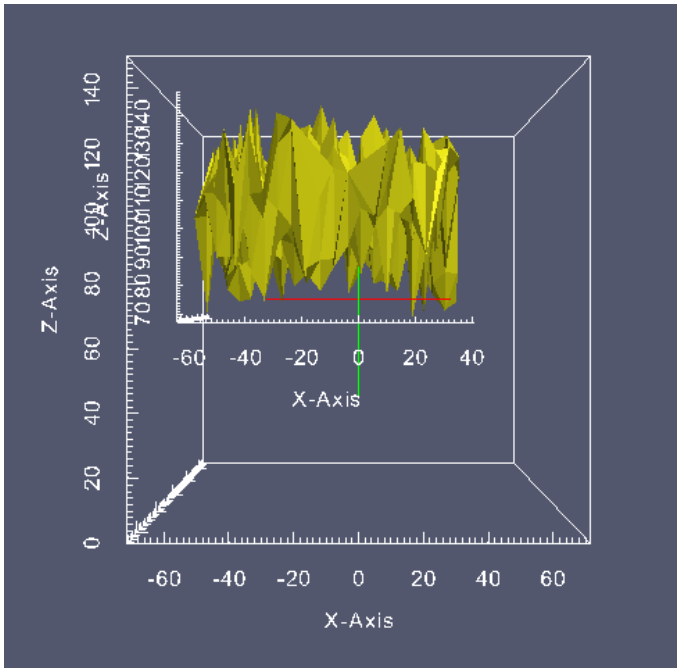


Figura 1.3: Vista XYZ

Pilar Norte: vista correspondiente al plano YZ, ancho/altura

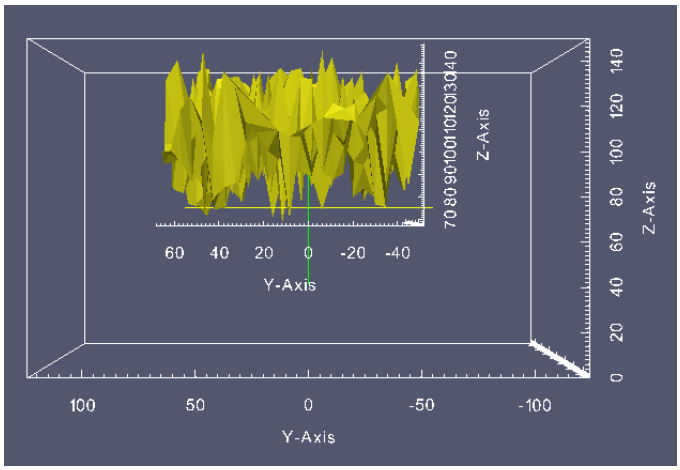


Figura 1.4: Pilar Norte Vista YXZ

Pilar Norte: vista correspondiente al plano XY, ancho/largo, de abajo hacia arriba

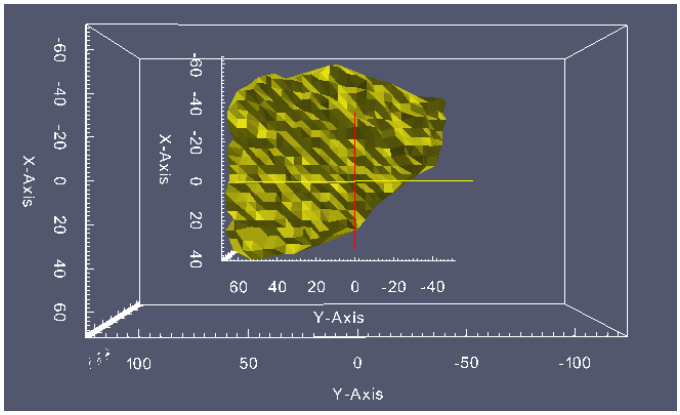


Figura 1.5: Pilar Norte Vista XZY

Análisis de los resultados

De las figuras 1.3 y 1.4 del experimento Pilar Norte, se puede apreciar que la superficie de quiebre alcanza la altura máxima de 150 mts. , según el parámetro de altura dado en Ω. En este experimento se puede apreciar que alcanzó la altura máxima del macizo (150mts.) en la iteración número 2 y, dado los datos de estructura, geometría de las zonas de extracción y dimensiones del macizo este ejercicio conecta a la segunda iteración.

La figura que sigue muestra un conjunto de estadísticas que tienen relación con el número de bloques generados en Ω según las dimensiones de éste, en número de set's y espaciamiento correspondiente. El número de bloques caídos en total para el experimento alcanzó 308.348 bloques, de los cuales cayeron 23.634 bloques, con un volumen, promedio , de bloques caídos de 407.804,67 m^3. El porcentajes de bloques caídos corresponde a % 7,664716489.

La figura 1.5 muestra la superficie máxima alcanzada vista en altura desde el plano XY = 0.Y se puede apreciar los tamaños de los archivo que suman 23,4 KB.

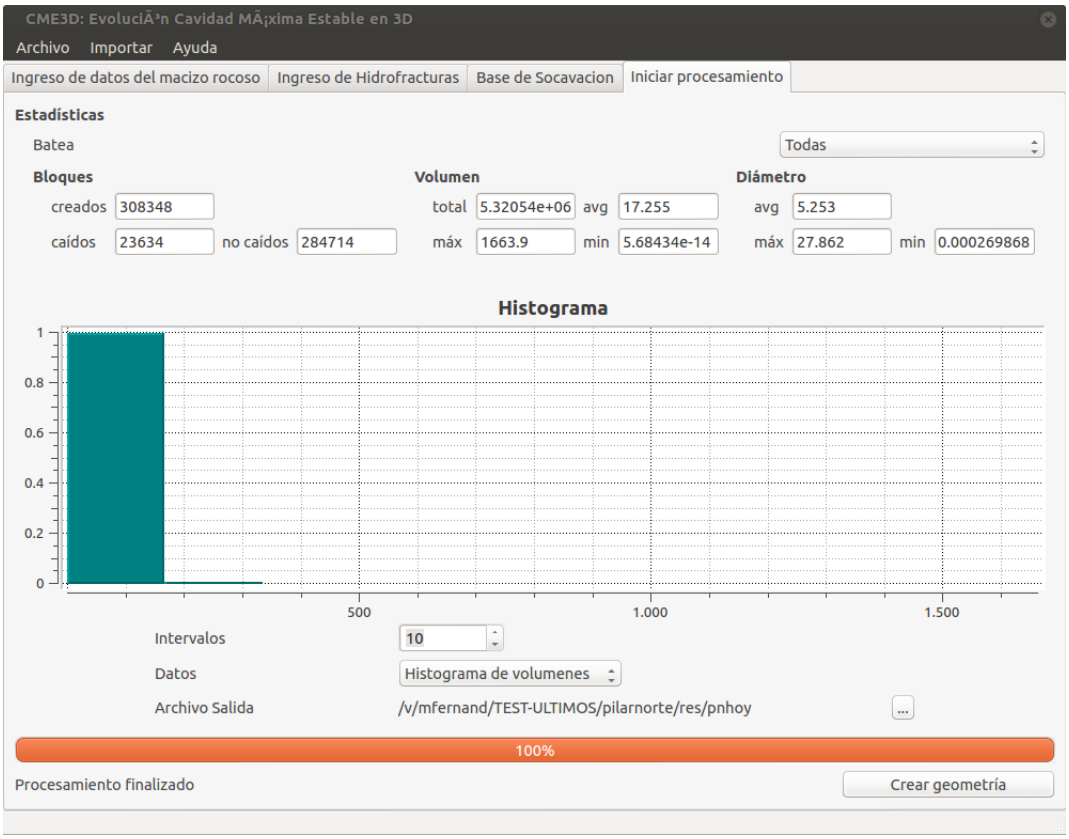


Figura 1.6: Estadistica Pilar Norte

El espacio requerido en disco para representar las superficies es aproximadamente de 23,4 KB, que se distribuyen en dos archivos de 11,7KB cada uno, en un formato (vtp) para ser procesado con paraview [2], software OpenSource orientado a la visualización científica. Este archivo puede ser usado como formato estándar para llevar adelante el proceso de integración de las lineas que generan una superficie determinada.

[2] Visualization ToolKit

1.2.2. Caso Esmeralda

En este caso se reconstruye la cavidad máxima estable correspondiente a Esmeralda con producción entre Nov-2011 y Jul-2012.

Input

$\Omega : l = largo(143)$, $w = ancho(248)$ y $h = alto(150)$.

π :table

Set	Dip	Dip$_{dir}$	Espacio
1	87	60	3
2	83	96	3
3	86	337	3
4	25	242	3
5	0	10	1.5

$\top$: Φ (se incluyó una estructura de hidro-fractura en π

ζ: Archivos con los zonas de extracción y la producción Esmeralda (ver apéndice Archivos Voronoi y Producción).

Output

El output en este caso, corresponde a la figura 1.7, vale la misma explicación que el caso anterior.

eshoy_su_0.vtp	19.9 kB	XML document
eshoy_su_1.vtp	19.9 kB	XML document
eshoy_su_2.vtp	19.9 kB	XML document
eshoy_su_3.vtp	19.9 kB	XML document

Figura 1.7: Conjunto de archivos F

Resultados

Las siguientes imágenes representan una visualización de la cavidad máxima estable desde varias perspectivas, la primera es una vista de frente al eje X Z (ancho / alto) , la segunda de frente al eje Y , Z (largo / alto) y la ultima de frente al eje X , Y (vista de abajo hacia arriba).

En las siguientes imágenes se muestran tres vistas de la superficie generada desde los archivos de salida.

Esmeralda: vista correspondiente al plano XZ, largo/altura

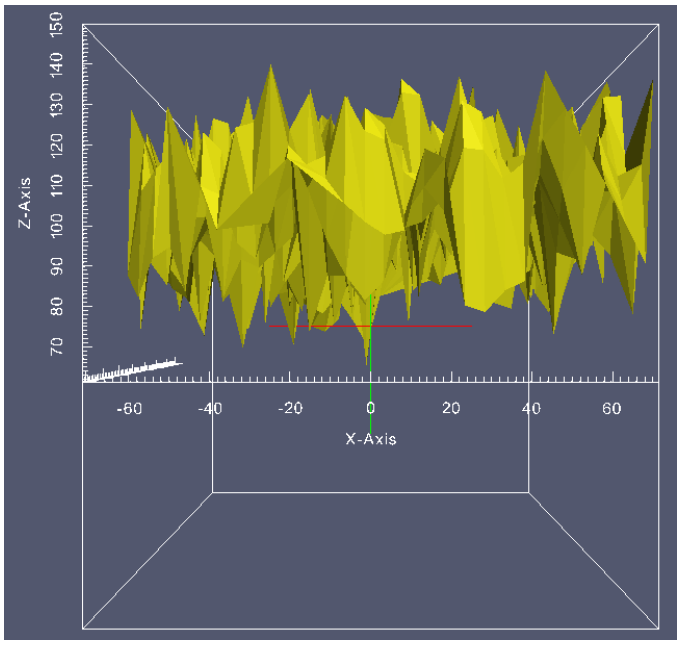


Figura 1.8: Esmeralda: Vista XYZ

Esmeralda: vista correspondiente al plano YZ, ancho/altura

Esmeralda: vista correspondiente al plano XY, ancho/largo, de abajo hacia arriba

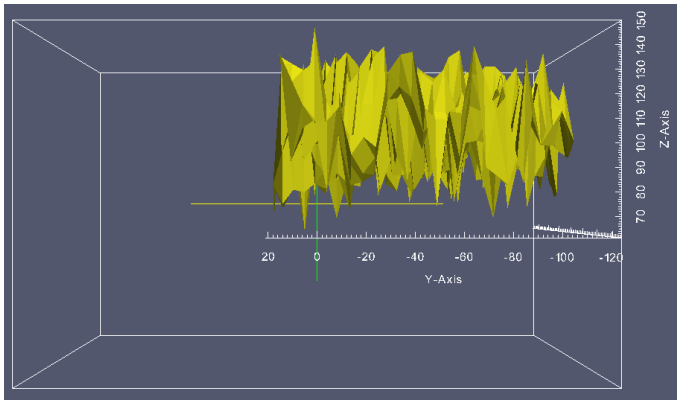


Figura 1.9: Esmeralda Vista YXZ

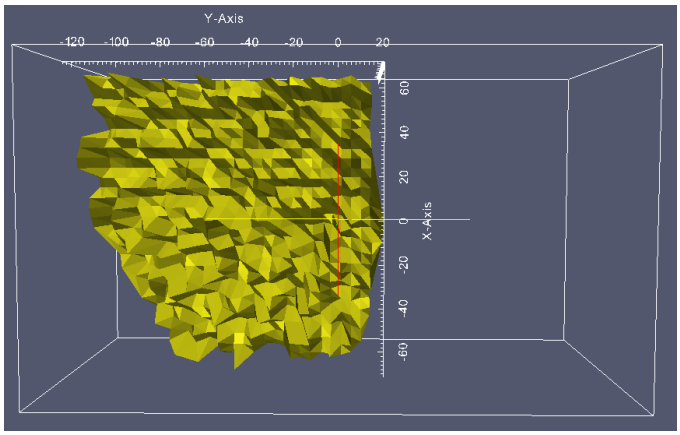


Figura 1.10: Esmeralda Vista XZY

Análisis de los resultados

De las figuras 1.8 y 1.9 del experimento Esmeralda , se puede apreciar que la superficie de quiebre alcanza la altura máxima de 150 mts. , según el parámetro de altura dado en Ω. En este experimento se puede apreciar que alcanzó la altura máxima del macizo (150mts.) en la iteración número 4 y, dado los datos de estructura, geometría de las zonas de extracción y dimensiones del macizo este ejercicio conectó a la cuarta iteración.

La figura 1.11, se muestra un conjunto de estadísticas que tienen relación con el número de bloques generados en Ω según las dimensiones de éste, en número de set's y espaciamiento correspondiente. El número de bloques caídos en total para el experimento alcanzó 198.609 bloques, de los cuales cayeron 44.059 bloques, con un volumen, promedio , de bloques caídos de 1.180.199,6212 m^3. El porcentajes de bloques caídos corresponde a % 22,183788247.

La figura 1.10 muestra la superficie máxima alcanzada vista en altura desde el plano XY = 0.Y se puede apreciar los tamaños de los archivo que suman 79,6 KB.

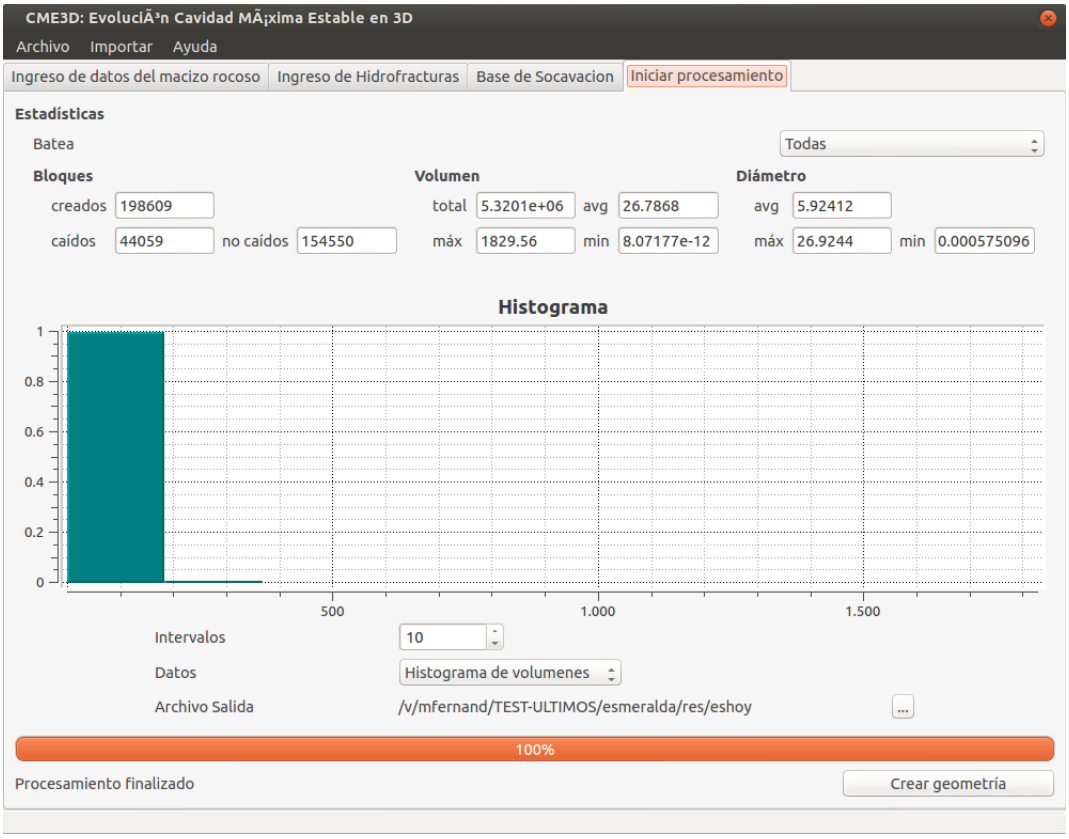


Figura 1.11: Estadistica Esmeralda

1.2.3. Caso Diablo Regimiento

Input

$\Omega : l = largo(143)$, $w = ancho(248)$ y $h = alto(150)$.

π :table

Set	Dip	Dip$_{dir}$	Espacio
1	72	38	3
2	67	25	3
3	22	22	3
4	85	296	3
5	85	345	3
6	80	180	1,5

$\top : \Phi$

ζ: Archivos con los voronoi y la producción Diablo Regimiento (ver apéndice Archivos Voronoi y Producción).

Output

El output en este caso, corresponde a la figura 1.12, vale la misma explicación que el caso anterior.

Figura 1.12: Conjunto de archivos Diablo Regimiento

Resultados

Las siguientes imágenes representan una visualización de la cavidad máxima estable desde varias perspectivas, la primera es una vista de frente al eje X Z (ancho / alto) , la segunda de frente al eje Y , Z (largo / alto) y la ultima de frente al eje X , Y (vista de abajo hacia arriba).

En las siguientes imágenes se muestran tres vistas de la superficie generada desde los archivos de salida.

Diablo Regimiento: vista correspondiente al plano XZ, largo/altura

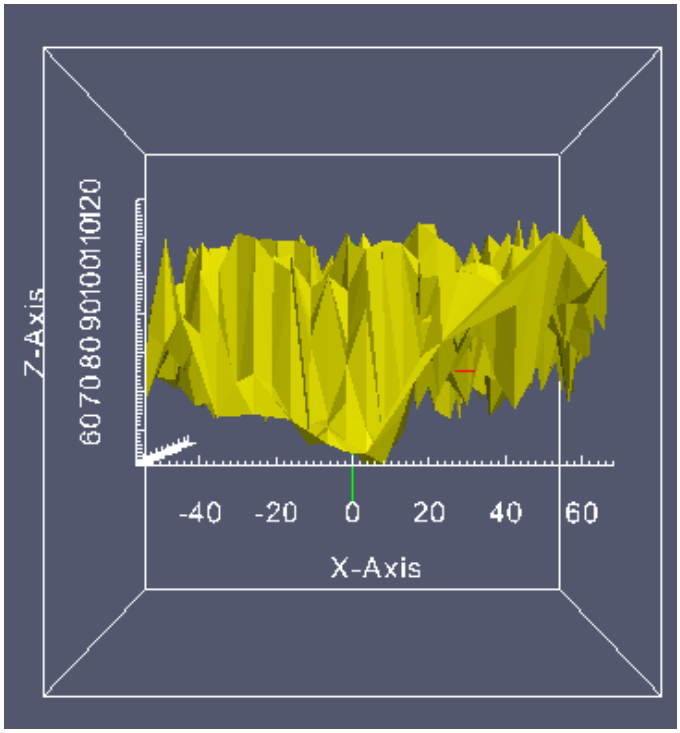


Figura 1.13: Diablo Regimiento Vista XYZ

Diablo Regimiento: vista correspondiente al plano YZ, ancho/altura

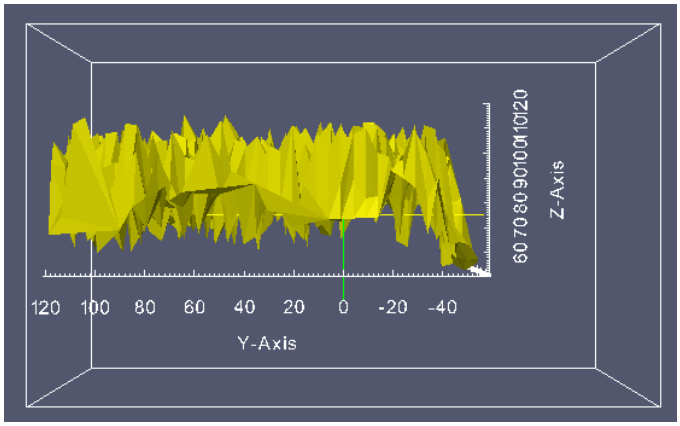


Figura 1.14: Diablo Regimiento Vista YZX

Diablo Regimiento: vista correspondiente al plano XY, ancho/largo, de abajo hacia arriba

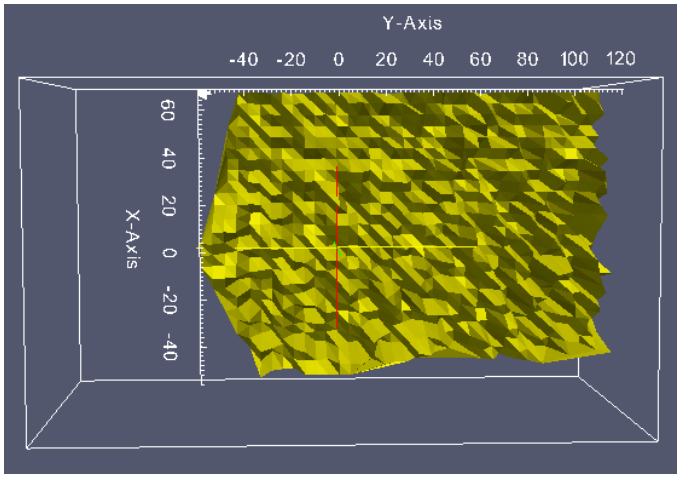


Figura 1.15: Diablo Regimiento Vista XZY

Análisis de los resultados

De las figuras 1.13 y 1.14 del experimento Pilar Norte, se puede apreciar que la superficie de quiebre alcanza la altura máxima de 150 mts. , según el parámetro de altura dado en Ω. En este experimento se puede apreciar que alcanzó la altura máxima de la cavidad fue de 120mts., y no la altura de 150mts. , altura de de Ω. por lo cual se puede comentar, dado los datos de estructura, geometría de las zonas de extracción y dimensiones del macizo de este ejercicio **no conecta** llegando así a la tercera iteración, y a partir de ese momento no puede extraer más bloques y se detiene el experimento.

La figura 1.15 muestra la superficie máxima alcanzada, vista desde la perspectiva en altura es decir desde el plano XY = 0. Se puede apreciar además los tamaño de los archivo suman 66,6 KB.

La figura 1.16 muestra un conjunto de estadísticas relacionado con el número de bloques generados en Ω según las dimensiones de éste, en número de set's y espaciamiento correspondiente. El número de bloques caídos en total para el experimento alcanzó 186.889 bloques, de los cuales cayeron 44.128 bloques, con un volumen, promedio , de bloques caídos de 1.005.235,84 m^3. El porcentajes de bloques caídos corresponde a % 23,611876568.

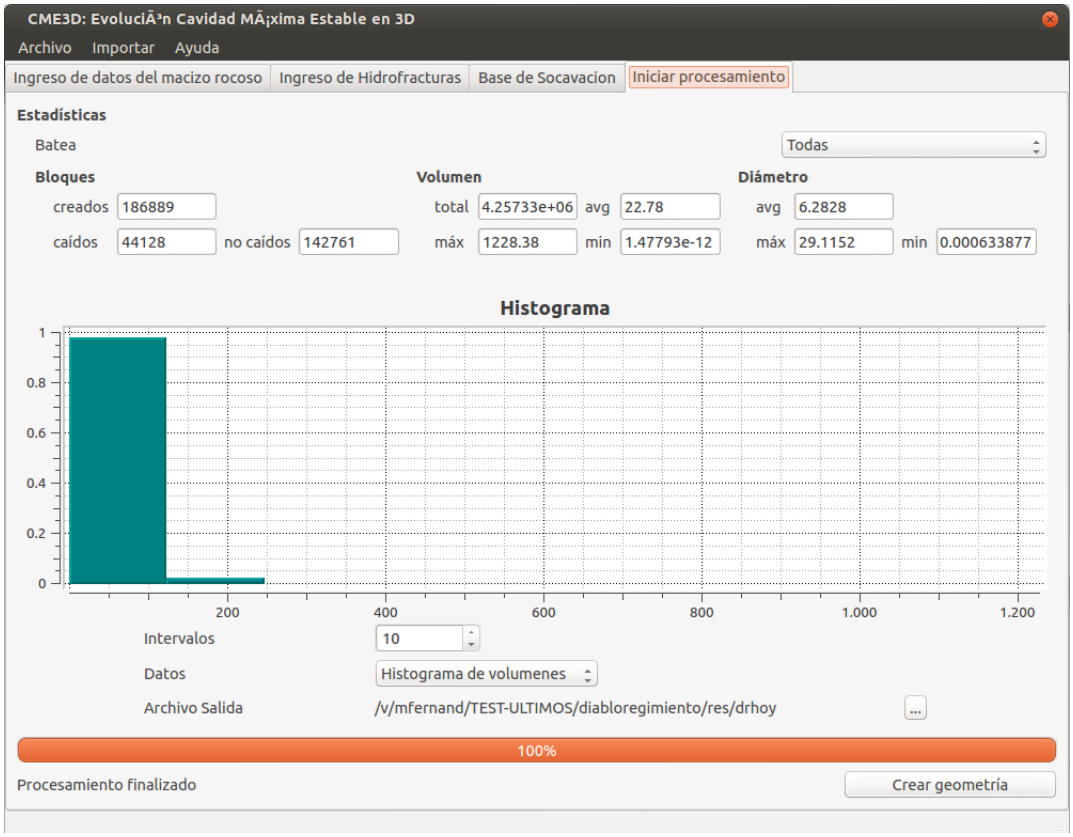


Figura 1.16: Estadistica Diablo Regimiento

La cantidad de bloques es muy sensible a las estructura geológicas a utilizar para llevar a cabo una simulación, el tiempo y espacio de ejecución, que miden la eficiencia de proceso, dependen fuertemente de este número de bloques. Y estos a su vez están estrechamente relacionados con el tamaño del macizo,el numero de set y espaciamiento dado.

Si hicieron pruebas en donde solo se consideró un polígono de extracción, correspondiente a la envolvente de todos los puntos de extracción dados . La extracción en estos casos fue un $\%17$ promedio, mejor en espacio y $\%9,56$ promedio mejor en tiempo.

El Modelo

En esta sección se hará una descripción general del algoritmo principal CME3D utilizado 1.

Algoritmo CME3D

Algoritmo 1 CME3D

Entrada:

1: l,w y h: dimensiones de la roca intacta a considerar (Ω macizo rocoso) de largo(l) , ancho(w) y alto(h).

2: π: conjunto de discontinuidades denominadas estructuras geológicas o set, con $|\pi| \geqslant 1$.

3: $\top$: zona de hidrofractura, especificada por dos puntos $\in \mathbb{R}^3$ para definir un paralelepípedo en Ω y un conjunto π_F de estructuras para ser aplicada a esta zona, sumadas a las de .

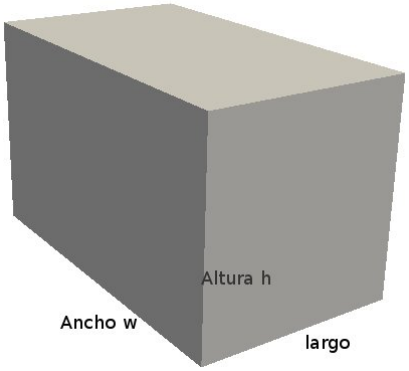
4: ζ: conjunto de cuerpos geométricos de base poligonal y altura a, **con probabilidad de ser situado en cualquier parte de** Ω, éstos se denominan zonas de socavación o voronoi.

Salida: Conjunto Ψ de bloques removidos.

5: **procedure** CME3D(l, w, h, π, ζ)
6: $\quad\Omega \leftarrow macizoDeRocaIntacta\,(l, w, a))$
7: $\quad[\chi, \Psi] \leftarrow fabricaDiscontinuo(\Omega, \pi, \zeta, \top)$
8: $\quad$**for all** $z \in \zeta$ **do**
9: $\quad\quad$**for all** $b \in \chi \bigcap z$ **do**
10: $\quad\quad\quad r \leftarrow analizar(b)$
11: $\quad\quad\quad$**if** $r == Remover$ **then**
12: $\quad\quad\quad\quad \chi \leftarrow \chi - \{b\}$
13: $\quad\quad\quad\quad \Psi \leftarrow \Psi + \{b\}$
14: $\quad\quad\quad\quad z \leftarrow reconfigurar_Zona(z, b)$
15: $\quad\quad\quad$**end if**
16: $\quad\quad$**end for**
17: $\quad\quad$**if** El número de bloques caídos ≤ 0 **then**
18: $\quad\quad\quad$salir()
19: $\quad\quad$**end if**
20: $\quad\quad$**Write**$(\Psi) \mapsto$ fileDisk
21: $\quad$**end for**
22: $\quad$**Write**$(\Psi) \mapsto$ fileDisk
23: **end procedure**

Revisión del Algoritmo 1

linea 6 Se define un poliedro Ω de dimensiones l,w y h centrado en origen del sistema cartesiano 3D, (0,0,0) (ver figura 1.17.



(a) Estado inicial. Se tiene el Dominio: macizo rocoso competente de dimensiones l,w y h.

Figura 1.17: Macizo Rocoso Ω (l,w,h).

linea 7 Esta linea de código considera cada elemento en π como una estructura planar infinita con normal $\hat{n}$, donde:

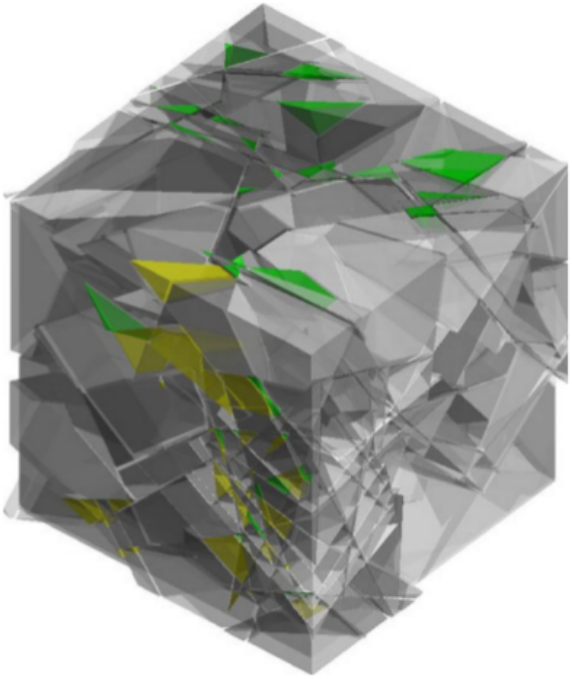
$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \sin(radian(dip))\sin(radian(dip_{dir})) \\ \sin(radian(dip))\cos(radian(dip_{dir})) \\ \cos(radian(dip)) \end{pmatrix}$$

Cada uno estos planos se replican a una distancia constante p, cortando Ω en un número finito de bloques o poliedros convexos [72]. Se identifica la zona de hidrofractura $\top$ y se procede a fragmentar con π_F. Esta distribución geométrica de bloques ensamblados χ se puede apreciar en la siguiente figura 1.18a. Luego se distribuyen los voronois ζ y se remueven , aquellos bloques que intersectan las zonas de socavación , inicializando de este modo Ψ, con los primeros bloques removido de χ. A consecuencia de lo anterior se producen bloques con caras libres, que deben ser identificados y analizados para determinar su estabilidad en lo que sigue del proceso.

linea 10 En esta linea de código se lleva acabo el análisis que permite determinar si un bloque b con caras libres en la zona z es o no posible de remover . En esta función se analiza un único movimiento , **caer** , considerando solo la geometría del bloque y la dirección de la fuerza de gravedad.

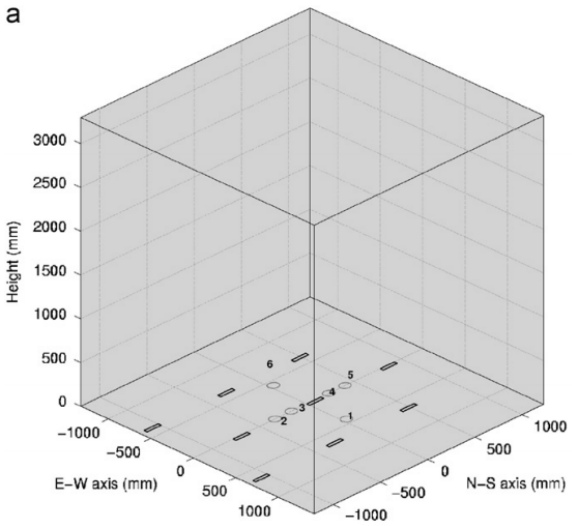
Sea $\hat{A}$ la fuerza activa de la gravedad que actúa sobre el bloque b con caras libres y sea $\hat{n}$ la normal interior de la cara i del bloque b: el bloque b **cae si** $\forall i\ \hat{A}.\hat{n}_i \geqslant 0$ [65]

linea 20 Esta linea guarda en disco los bloques acumulados caídos hasta la iteración $n - esima - 1$ en archivo con formato VTK para ser revisado con la herramienta **paraview**



(a) Bloques de roca

Figura 1.18: Discontinuo χ



(a) Vista con las zonas de socavación

Figura 1.19: Vista de frente con las zonas de socavación

linea 22 Esta linea guarda en disco la última acumulación de bloques caídos hasta la iteracion $n - esima$, se utiliza los mismos formatos en VTK.

Analizando el algoritmo 1 se puede extraer algunas características ampliamente estudiadas en [67], [69],[73],[74] , sobre el cual se hicieron importantes mejoras:

1. En la generación de bloques, cabe hacerse la siguiente pregunta:
   ¿ se requieren todos los bloques disponibles para hacer el estudio de la cavidad máxima estable y su evolución ?. Su respuesta no depende del resultado buscado, sino del enfoque utilizado para alcanzar la solución.

Dado que se opto por un enfoque ubicuo [66], no es posible **no tener todos** los bloques disponibles para ser tratados geométricamente. Con este enfoque el espacio usado es orden (n^3) donde n es el número de planos que cortan Ω. En casos de laboratorio se ha llegado a consumir hasta 23G de memoria RAM para caso relativamente de laboratorio.

Una solución para a este inconveniente es considerar la posibilidad de utilizar medios de almacenamiento secundario a través del uso de bases de datos especializadas.

2. Otro espacio para una mejora importante en términos de espacio de almacenamiento secundario es guardar la superficie que se genera en cada pasada por los puntos de extracción, en vez de guardar información de cada bloque.

   La idea principal de esta optimización es obtener el conjunto de vértices que se encuentran en las caras de la parte superior de un bloque caído, con la coordenada z de la normal de la cara > 0. Este conjunto es la base para generar la superficie de quiebre en cada pasada por cada uno de los puntos de extracción.

   Para implementar esta solución es necesario introducir el concepto de representación de terreno.

   Un terreno es una superficie 2D en el espacio 3D, con una propiedad especial: Toda linea vertical intersecta a la superficie 2D en un solo punto. Se puede ver como el gráfico de la siguiente función:

$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$$

   Esto es , $\forall p \in A$ se asigna una altura h del terreno a $f(p)$

   A partir de está noción se introduce el siguiente algoritmo.

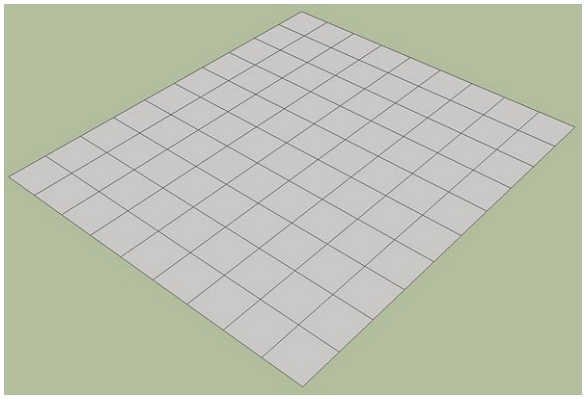
Algoritmo 2 breakSurface

Entrada: Ψ : Conjunto de bloques caídos, clasificados por iteración en la que cayó.

Salida: Υ : Conjunto de superficies a almacenamiento secundario.

```
function BREAKSURFACE(Ψ)
    for all i = {1, ··· , n} iteración do
        Mesh ← Inicializamalla
        for all bloque b caído en la iteración i-esima do
            V ← Conjunto de vértices de las caras de b con coordenada en z ≥ 0 en n̂
        end for
        Surface ← Interpolation(V, Mesh)
        Write(Surface) ↦ fileDisk
    end for
end function
```

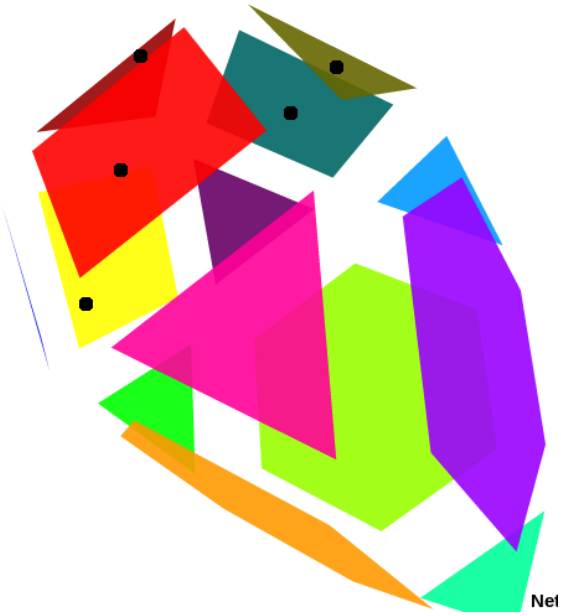
linea 3 Esta linea de código permite crear para cada iteración la malla base para representar la superficie a generar,



(a) Malla de superficie

Figura 1.20: Malla regular sobre la base del Ω

linea 5 Esta linea de código recupera de cada cara de un bloque caído los vértices que tienen en la coordenada z de la normal de la cara un valor mayor que cero1.21a.



(a) Recuperar vertices de las caras con un punto negro

Figura 1.21: Bloque al cual debemos recuperar las caras hacia arriba

Generar la superficie de quiebre en vez de representar solo los bloques caídos, facilitó ampliamente la integración con las demás lineas del proyecto. Con la superficie expresada como una función de altura por cada linea, permitirá generar una nueva superficie a partir de las determinadas como resultado de este proyecto.

1.3. Descripción Software

En este apartado se describe el cme3d. Este fue desarrollado bajo el paradigma de la programación orientada a objetos (POO) , para lo cual se escogió un lenguaje ad-hoc. Para está implementación se optó por c++

Qt4.8 . Dentro de este paradigma existen algunos conceptos claves a utilizar, siendo uno de los principales conceptos el de (**class**). Una de las formas de describir una aplicación desarrollada en POO es describir sus clases y las relaciones que existe entre cada una de ellas. En el capítulo 1 del apéndice se podrá encontrar el conjunto de clases y sus relaciones.

1.4. Manual de uso

En esta sección explicaremos como el cme3d debe ser utilizado.

Interfaz Principal: se puede ver en la figura 1.22 , en esta se puede distinguir en amarillo un conjunto de opciones que representan el menú principal y un conjunto de pestañas destacadas con color rojo. Con respecto al menú, éste está compuesto de:

- **Archivo**, con un submenú que contiene:
  - **Abrir XML**, esta opción permite pasar al cme3d un archivo de formato xml con los datos necesarios para una simulación.
  - **Exportar**, permite guardar los datos en un archivo de formato xml, para ser utilizado posteriormente.
  - **Salir** , esta opción permite cerrar la aplicación cme3d.
- **Importar** Esta opción, por ahora, solo tiene la posibilidad de subir un archivo al cme3d con la geometría de de los voronoi y la producción en toneladas diarias de cada punto de extracción. Esto permitirá controlar la remoción de bloques en cada iteración de la simulación. Este archivo es es un archivo de texto cuya extensión es .txt. En éste se pueden distinguir don tipos de lineas :

  Lineas de texto que empiezan con B. Estas representan **un punto de un voronoi**, y lleva un nombre que permite relacionar todos los puntos de una zona de extracción. Es de **primera importancia que estos puntos en el archivo se encuentre debidamente ordenados según el sentido de las agujas de reloj**. Un ejemplo de esta linea se:

  $B : CCZ2 : 1210{,}34 : 881{,}5$

  $B : CCZ2 : 1119{,}42 : 885{,}78$

  $\vdots$

  Lineas de texto que empiezan con S. Este tipo de linea podría ir o no en el archivo. Si está presente representa la producción diaria que después de un proceso previo, realizado por en cme3d, agrupara por meses. Esta linea comienza con una S y va seguida de el nombre del voronoi , la fecha de la extracción (DD-MMM-YYYY), y por último las toneladas extraídas. Ejemplo:

  $S : CCZ2 : 20 - OCT - 2011 : 155{,}56$

  $S : CCZ2 : 12 - DIC - 2011 : 25{,}89$

  $\vdots$

  Si no se encuentran lineas de texto que comiencen con S, entonces se hará extracción constante hasta conectar o se traba la extracción.

  En lo que sigue veremos las opciones que correspondientes a las pestañas, destacada en rojo en la figura 1.22.

Pestaña 1: En esta , ver figura 1.22 (se destaca en rosado), se ingresan : largo, ancho y alto que representa a Ω, además , en caso que las zonas NO se encuentren referenciadas al origen (0,0,0) del macizo , deberá

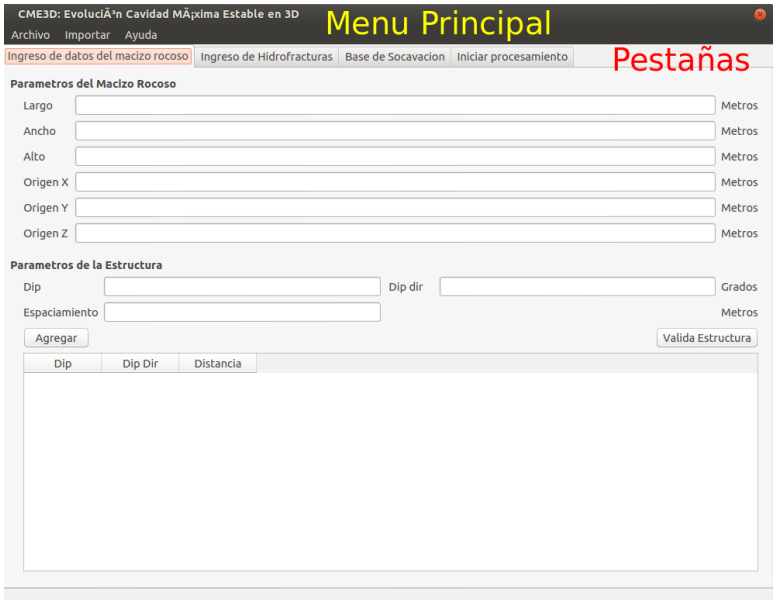


Figura 1.22: Pantalla Principal

especificarse el origen (x,y,0) en que se trasladara cada punto cada punto del voronoi, lo que permitirá reproducir la geometría de los puntos en relación al origen. Este punto de origen debe ser del plano XY de la base del macizo que se encuentra en el cuarto cuadrante y corresponde al punto más lejano del punto (0„0,0). Si no se especifica correctamente es fuente de. error.

Además en esta pestaña se deben ingresar los set's que se utilizarán para fracturar el macizo.

Pestaña 2: Esa corresponde a la funcionalidad de ingresar los datos correspondiente a la hidrofractura. Ver Figura 1.23

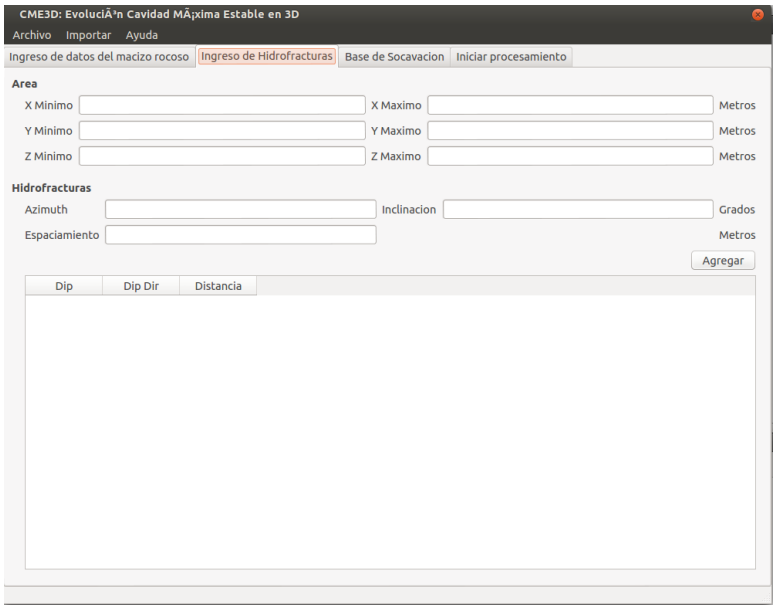


Figura 1.23: Pestaña de Hidrofractura

Pestaña 3 : Corresponde a ingresar de manera interactiva las zonas de extracción. Ver Figura 1.24.

Pestaña 4 Es esta se encuentran 2 funcionalidades con respecto; a suministrar el nombre de el archivo de salida ,e indicarle al cme3d que procese los datos, y en la misma pestaña se verán las estadísticas que se obtienen

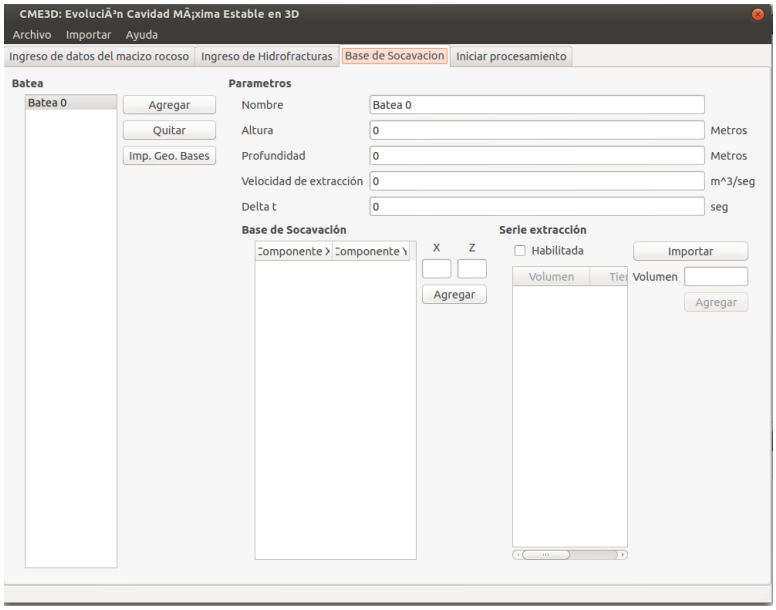


Figura 1.24: Pestaña Puntos de extracción o Base de socavación

producto del proceso. Ver figura 1.25.

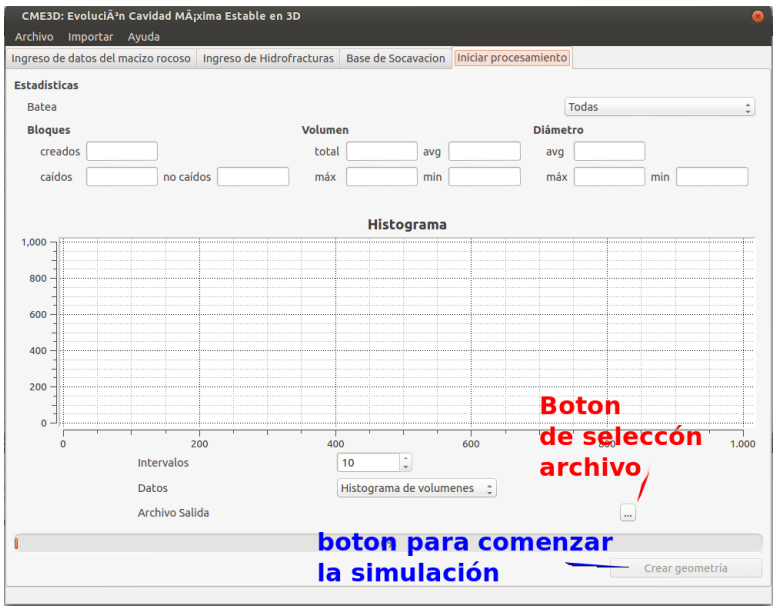


Figura 1.25: Pestaña Estadísticas

1.4.1. Breve resumen de Uso

Como resumen podemos seguir el siguiente procedimiento para hacer una simulación ingresando manualmente sus datos.

Ingreso de datos Macizo rocoso: Pestaña 1 , Ω + ϕ

1. ingresar dimensiones del Macizo
2. Ingresar origen en que los voronoi serán proporcionado.
3. Ingresar Estructuras geológicas y espaciamiento

Ingreso de Hidrofracturas: Cubo correspondiente a área de hidrofractura + ϕ de hidrofractura.

1. Especificar área de hidrofractura
2. Especificar estructura geológica a utilizar para fracturar el área.

Base de Socavación: Distribución zonas de socavación.

1. Especificar las bateas o zonas de socavación , dando todos los puntos que definen el polígono de la zona, y especificar si se hará extracción controlada o no. Si es controlada entonces especificar volumen y periodo.

Iniciar procesamiento: Especificar salida y dar inicio al proceso

1. Ingresar el prefijo de los archivos de salida
2. Crear geometría para iniciar el proceso.

1.5. Extensiones futuras

El cme3d puede extenderse en:

1. Aspectos clave tiene que ver con la posibilidad de mejorar el uso de espacio en memoria. Para alcanzar una mejora en esta materia se propone utilizar una base de datos geométrica que permita no tener todos los bloque en memoria.
2. Mejorar los algoritmos para generar el sistema de bloques.
3. Mejorar y agregar nuevos métodos de remoción de bloques de modo de aumentar el volumen extraído.
4. Modificar el modulo que genera la superficie a partir de los bloques NO CAÍDOS en vez de los que cayeron.

1.6. Conclusiones

De los resultados obtenidos se puede concluir que:

- A partir de las modificaciones realizadas para generar superficie (conjunto F) de los bloques caídos , se facilita la integración con las demás lineas.
- A partir de las modificaciones realizadas se permitió optimizar el espacio en disco, llegando a ordenes de magnitud de más del % 100.000.

Capítulo 2

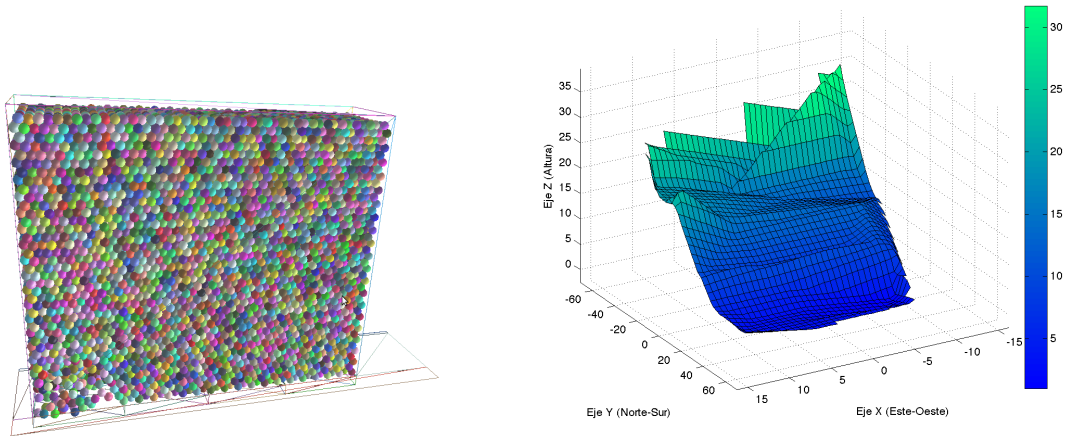
Elementos Discretos simplificado

2.1. Resumen

La presente línea describe el desarrollo e implentación del método de Block Caving para la explotación del mineral en Codelco División el Teniente a través de un Modelo de Elementos Discretos simplificado proporcionando previamente las condiciones de extracción.

La roca se modela como un conjunto de esferas de identicas caracteristicas geométricas y mecánicas, todas en contacto entre sí como se observa en la figura 2.1 (a), caso particular Pilar Norte, que posteriormente interactuán colisionando bajo ciertas leyes físicas una vez iniciada la ejecución del software.

Considerando escenarios específicos obtenemos una superficie de quiebre como en el ejemplo que se muestra a cotinuación 2.1 (b) para el caso de Pilar Norte, cuyo desarrollo en conjunto con el estudio de otros casos se describe en la extensión de esta documentación.



(a) Modelación

(b) Superficie de quiebre

Figura 2.1: Caso Pilar Norte

Más especificamente el objetivo de esta línea es efectuar “Un estudio para la determinación de la superficie de quiebre en una mina subterránea en El Teniente”.

Esta linea intenta estimar la superficie de quiebre combinando la informacion de extracción de mineral proporcionada por CODELCO Division El Teniente y un modelo mecanico que representa el macizo rocoso

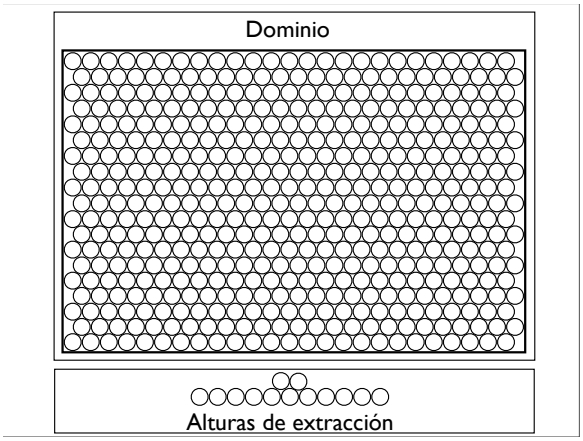
como un conjunto de esferas.

Trabajos realizados anteriormente por otros investigadores sugieren que es posible modelar el comportamiento de grandes macizos rocosos a través del Método de Elementos Discretos [51], [52] [53] [54] [55] [56].

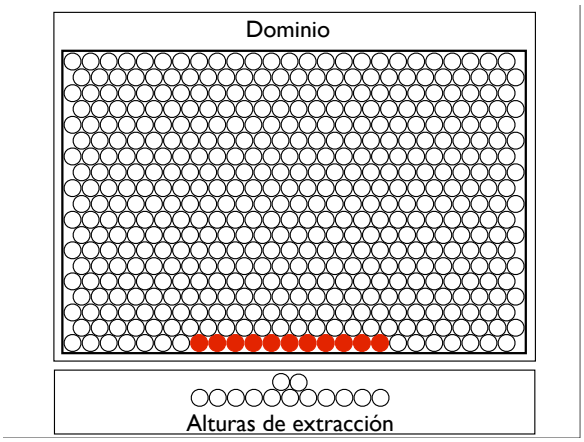
Para el caso particular del Block Caving, se propuso el desarrollo e implementación de un modelo DEM. Para esto, los elementos (esferas) están unidos por resortes (representando el macizo rocoso), que se pueden romper como efecto de cargas superiores a su límite de ruptura, tal cual lo establece el criterio de falla de Mohr-Coulomb.

El concepto clave del método DEM es que el dominio de interés es tratado como un ensamble de elementos rígidos en el cual, los contactos entre éstos necesitan ser identificados y actualizados continuamente durante el proceso de deformación a través de un modelo constitutivo.
De esta manera, los elementos unidos por los resortes representarían la roca en estado competente, y los elementos que cuenten con suficientes resortes rotos, representen el material fragmentado que es extraido por las bateas. Esta cantidad de material esta determinado por la informacion de extracción proveida por CODELCO El Teniente.

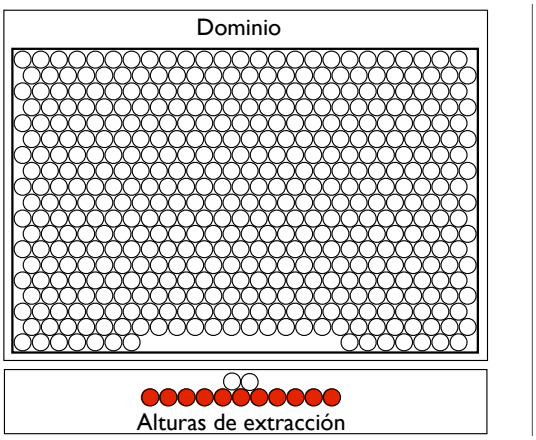
Dado que se cuenta con la cantidad de material extraído por cada batea (información de extracción) y algunos parámetros geomecánicos, se pretende determinar la forma de la superficie de la cavidad resultante. Este proceso se muestra esquemáticamente en la Figura 2.2 y 2.3.



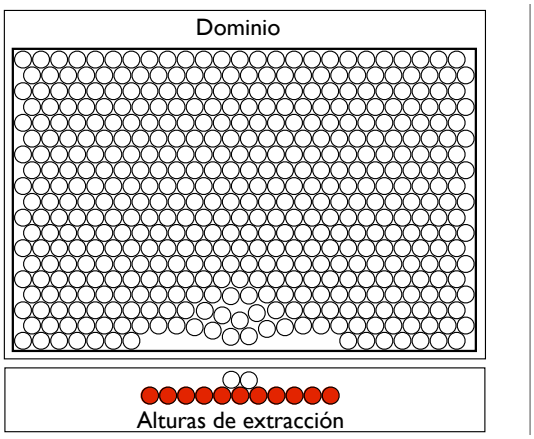
(a) Estado inicial. Se tiene el Dominio: macizo rocoso competente y las Alturas de Extracción.



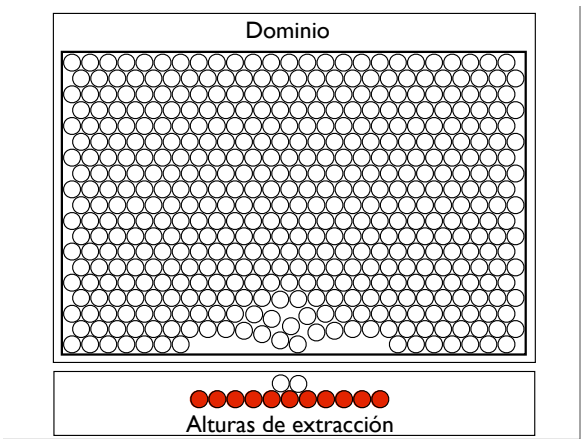
(b) Se selecciona una(s) zona(s) de socavación que puede corresponder a una o más bateas. Los elementos dentro de esta zona están en rojo.



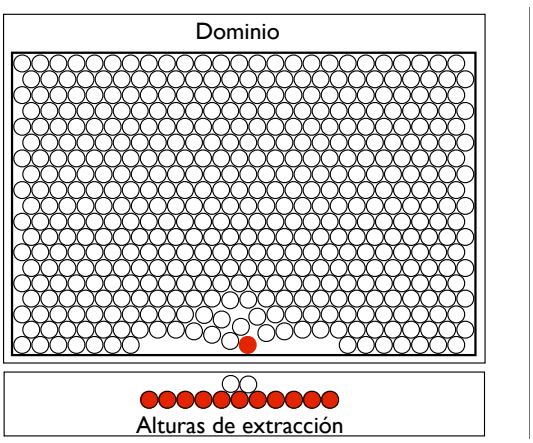
(c) El material extraído de la zona de socavación corresponde a una porción de las Alturas de Extracción



(d) Dado el cambio de geometría, ocurre una redistribución del campo de fuerzas, lo cual lleva a un desplazamiento de los elementos .

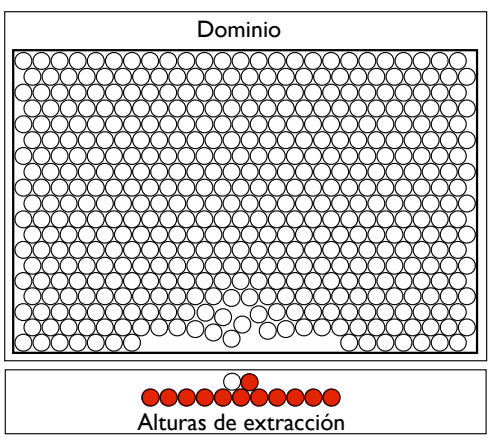


(e) Las esferas llegan a la entrada de la batea.

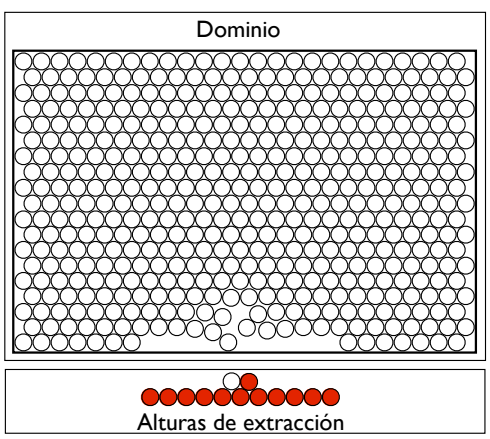


(f) Se selecciona la(s) esfera(s) que llega(n) a la entrada de la batea

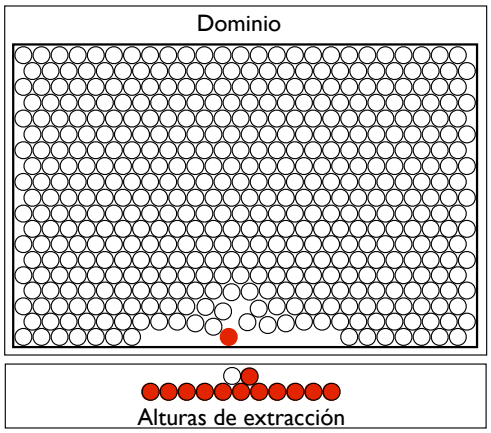
Figura 2.2: Esquema del proceso de caving modelado por DEM. Por simplicidad, los resortes no se dibujan. Fuente: Elaboración Propia.



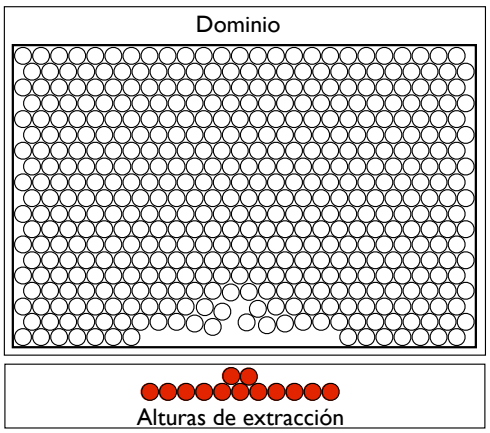
(a) Se retira la(s) esfera(s) que llego/llegaron a la entrada de la batea.



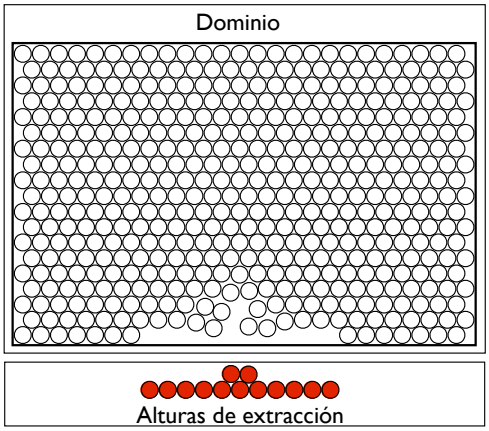
(b) Continúa la deformación



(c) Otra esfera llega a la entrada de la batea y es seleccionada para su extracción.



(d) La extracción se detiene hasta que la cantidad de material extraído corresponda a la cantidad indicada por las Alturas de Extracción.



(e) El proceso finaliza cuando no se realiza más extracción. De esta forma, la geometría de la cavidad resultante se obtiene de manera explícita.

Figura 2.3: Continuación de Figura 2.2

El movimiento de cada elemento esta regido por las leyes de newton, las cuales se simulan numerica-

mente usando un software DEM llamado Yade [1]. Este software es un framework de codigo abierto para construir modelos numericos discretos, con un enfoque en el metodo DEM.

Una vez simulado el proceso de extracción y caving, ciertos datos son extraídos de la simulación:

- posición y número identificador del centro de cada esfera en la simulación.
- Para cada esfera que fue extraída a traves de una Batea, se guarda su número identificador, y un número identificando la Batea por la que cayo.
- Opcionalmente, el número de contactos en cada esfera de la simulación.
- Opcionalmente, la geometría y esferas de la simulación en un archivo VTK, para su visualizacion en Paraview.

Con estos datos se ejecuta un algoritmo que construye la superficie de quiebre, la cual finalmente se visualiza. Existen diferentes criterios para definir la superficie de quiebre, considerando diferentes datos:

- El primer criterio considera que la superficie de quiebre esta compuesta de las esferas que fueron extraídas, pero en la posición inicial de dichas esferas en el macizo rocoso.
- El segundo criterio considera que la superficie de quiebre esta compuesta de las esferas que pertenecen al macizo rocoso, pero poseen cero contactos, por lo cual se consideran material fragmentado.

Todos los archivos del proyecto estan almacenados en un repositorio de Subversion (SVN), el cual se puede descargar usando el siguiente comando:

```
svn co svn+ssh://{usuario}@mmgeo.cmm.uchile.cl/srv/svn/backcaving-dem
```

Donde {usuario} es el nombre del usuario en el servidor mmgeo.cmm.uchile.cl. Usar dicho comando requiere la contraseña de dicho usuario.

Dentro del repositorio se pueden encontrar las siguientes carpetas:

- codigo: Codigo fuente de la implementacion de los modelos, en Python, Matlab y Yade.
  - matlab: Codigo en Matlab R2012a, el cual implementa el postprocesamiento de los datos generados por Yade.
  - python: Codigo en Python 2.x, el cual implementa el preprocesamiento de los datos de extraccion proveidos por CODELCO.
  - yade: Scripts en Python para su ejecución en Yade.
    - cluster: Scripts para su ejecución en el Cluster SYNTAGMA.
    - test: Scripts de pruebas.
    - test-deltat: Scripts de pruebas fallidas. Se mantienen por motivos historicos.
- datos: Datos de extraccion y geometría reales, proveidos por CODELCO Division El Teniente.
  - diablo-regimiento: Datos de la Mina Diablo Regimiento.
  - esmeralda: Datos de la Mina Esmeralda.

[1] http://yade-dem.org/

    - reservas-norte: Datos de la Mina RENO.

- documentos: Documentos tecnicos y de referencia, como libros y papers.
- documentos-codelco: Documentos tecnicos proveidos por CODELCO Division El Teniente para el desarrollo del proyecto. Muchos de estos documentos son de naturaleza confidencial.
- informes: Informes y documentos generados para el proyecto (Como el presente documento).
- presentaciones: Presentaciones hechas durante las reuniones de control de avance del proyecto.

2.2. El Modelo

La configración del modelo DEM asume que la roca se encuentra en estado natural discretizada con esferas de radio y masa constante, con un empaquetamiento hexagonal compacto, arreglo que permite que todas las esferas estén en contacto, como se puede ver en la Figura 2.4, sin la posibilidad de generar nuevos tamaños, dando existencia a 16 contactos geométricos y 6 contactos físicos por esfera.

Para predecir la respuesta de la roca durante la extracción de material , es necesario conocer las propiedades mecánicas de la roca y en combinacion con el estado de esfuerzos in-situ lograr predecir una cavidad estable. Particularmente el método block caving es un método de explotación subterráneo que consiste en utilizar la gravedad como herramienta de fracturamiento del macizo rocoso proporcionando previamente las condiciones de fractura para el inicio y propagación del quiebre de la roca.

Se definen las siguientes condiciones iniciales:

1. La interacción de cada elemento es solamente con los que establece contacto.
2. Los cambios de forma de los elementos (esferas) son despreciables.
3. Se calculan las fuerzas en los contactos, y el desplazamiento de los elementos.
4. La velocidad de propagación es una función de las propiedades físicas del medio discreto (E, ρ).
5. Los disturbios no se propagan de un elemento más allá que sus vecinos cercanos.
6. Los pasos de tiempo son tal que las aceleraciones se asumen constantes.
7. Todos los análisis son para ensambles secos.
8. El desplazamiento de los elementos que representan el macizo rocoso intacto, se considera despreciable.
9. El criterio de falla es el criterio de Mohr-Coulomb.

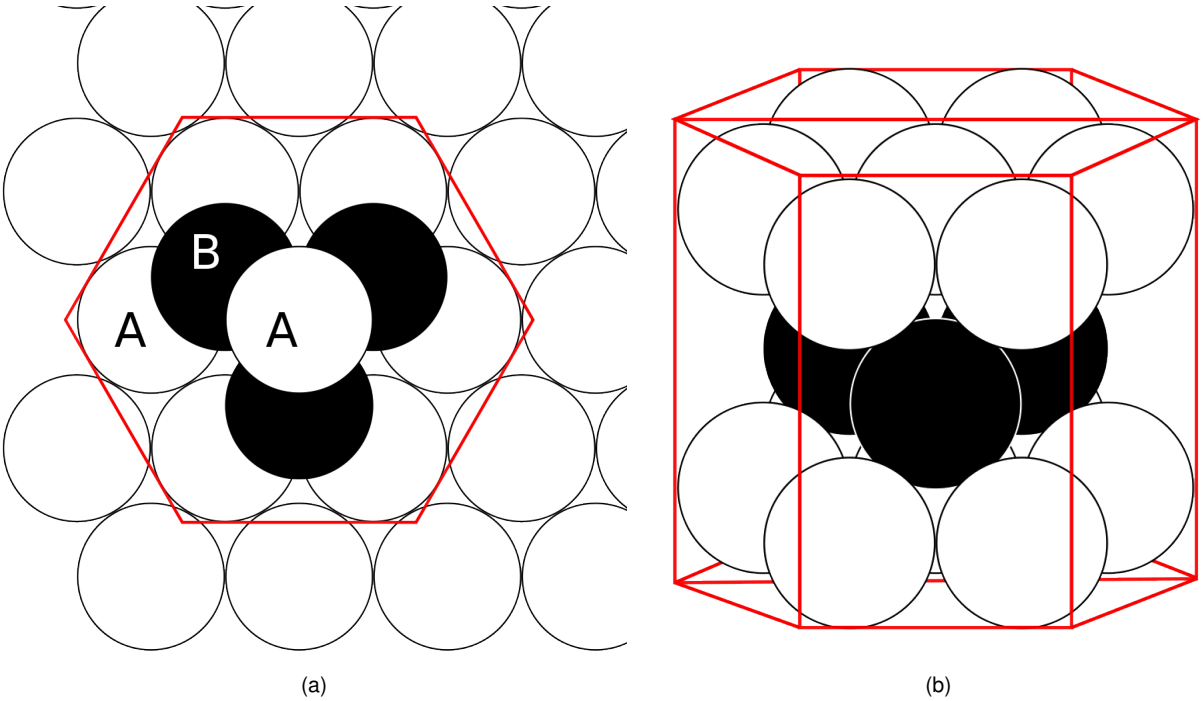


Figura 2.4: Empaquetamiento hexagonal compacto. 2.4a muestra una vista en planta junto con el respectivo orden de apilamiento. 2.4b muestra una vista de la celda hexagonal definida por el empaquetamiento.

La interacción básica de DEM define dos términos de rigidez: Rigidez normal K_N y rigidez de corte (tangencial) K_T. Es deseable que K_N este relacionado al Modulo de Young de las partículas, mientras K_T se determina como una fracción de K_N. La razón $\frac{K_T}{K_N}$ determina la razón macroscópica de Poisson, y el Modulo de Young es proporcional a K_N, así como afectado por $\frac{K_T}{K_N}$.

Este análisis es altamente simplificado y no considera la distribución de radios de las partículas, la configuración del empaquetamiento y otros posibles parámetros.

El algoritmo usado en Yade para calcular la rigidez debido a interacciones normales usa dos resortes en serie con largos iguales al radio de las esferas. Esto se puede ver en la Figura 2.5.

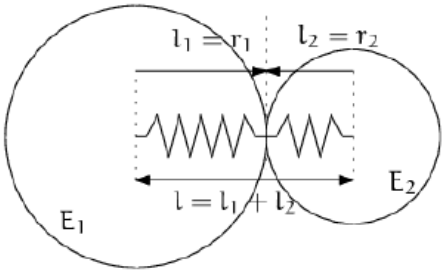


Figura 2.5: Resortes representando la rigidez normal del contacto entre 2 esferas

Dada esta configuración, se puede derivar K_N:

$$K_N = \frac{E_1 l_1 E_2 l_2}{E_1 l_1 + E_2 l_2}$$

La rigidez por cada partícula K_{ij} se determina por la rigidez de los contactos en que participa. Supongamos que cada contacto tiene rigidez normal $K_N k$, rigidez de corte $K_T k = \xi K_N k$ y esta orientado por

la normal n_k. La matriz de rigidez K_{ij} puede ser definida como la suma de la contribución de todos los contactos en que la partícula participa (índices k):

$$K_{ij} = \sum_k (K_{Nk} - K_{Tk}) n_i n_j + K_{Tk} = \sum_k K_{Nk}((1-\xi) n_i n_j + \xi)$$

En el caso general, la configuración mutua de 2 partículas tiene 6 grados de libertad. Ambas partículas tienen 6 grados de libertad cada una, pero la interacción en si es libre para moverse y rotar en el espacio teniendo 6 grados de libertad por si misma. Esto se puede ver en la Figura 2.6.

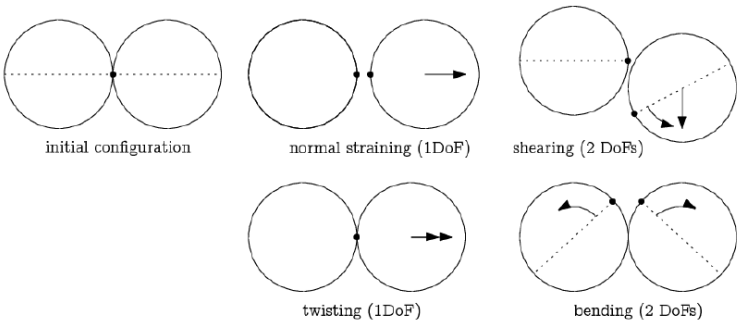


Figura 2.6: Grados de Libertad en la configuración de 2 esferas

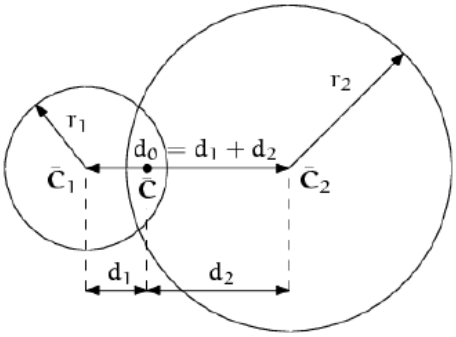


Figura 2.7: Geometría del contacto entre 2 esferas

La geometría de los contactos se puede ver en la Figura 2.7. Para evaluar la deformación normal, se usa la siguiente formula:

$$\varepsilon_N = \begin{cases} \log\left(\dfrac{|C_2 - C_1|}{d_0)}\right) & \text{si } |C_2 - C_1| < d_0 \\ \dfrac{|C_2 - C_1|}{d_0)} - 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para evaluar la deformación de corte, se usa la siguiente formula:

$$\varepsilon_T = \frac{\mu_T}{d_0}$$

Para calcular μ_T se debe usar un algoritmo incremental, debido a que se debe mantener la consistencia de μ_T, con respecto al movimiento de las esferas. Este algoritmo se puede encontrar en la documentación

de Yade, y no es relevante para este informe.

Una vez que la deformación ha sido calculada, puede ser usada para calcular esfuerzos y fuerzas actuando en ambas esferas. La ley constitutiva presentada aquí es la mas usada en DEM, y fue originalmente propuesta por Cundall.

Cuando se crea un nuevo contacto, sus propiedades (a través del objeto IPhys) son calculadas desde los Materiales asociados a ambas partículas. En el caso mas simple, un material con fricción (FrictMat), Ip2_FrictMat_FrictPhys crea una nueva instancia de FrictPhys, la cual define la rigidez normal K_N , la rigidez de corte K_T y el ángulo de fricción φ.

En cada paso de tiempo, se calculan las fuerzas normales y de corte a partir de los desplazamientos normales μ_N y de corte μ_T. Si $\mu_N > 0$, el contacto se elimina sin generar fuerzas.

$$F_N = K_N \mu_N n, \qquad F_T^t = K_T \mu_T$$

Donde F_N es la fuerza normal y F_T es la fuerza de corte de prueba. Para calcular la fuerza de corte final, se usa la siguiente formula:

$$F_T = \begin{cases} F_T^t \dfrac{|F_N| \tan\varphi}{|F_T^t|} & \text{si } |F_T^t| > |F_N| \tan\varphi \\ F_T^t & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La fuerza total $F = F_N + F_T$ es aplicada a ambas partículas. Cada partícula acumula fuerzas y torques actuando en ellas durante cada paso. Debido a que la fuerza actúa en el punto de contacto C, la cual es diferente al centro de la partícula, el torque generado por F debe ser considerado:

$$F_1 += F, \qquad F_2 += -F$$

$$T_1 += d_1(-n) \times F, \qquad T_2 += d_2 n \times F$$

Cada partícula acumula las fuerzas generalizadas (fuerzas y torques) de los contactos en los que participa. Estas fuerzas son usadas para integrar las ecuaciones de movimiento para cada partícula en forma separada. Se usa integración de Verlet para calcular las velocidades (v) y posiciónes (x), usando las siguientes ecuaciones:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t + \frac{1}{2} a(t) \Delta t^2$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{a(t) + a(t + \Delta t)}{2} \Delta t$$

Donde $a(t)$ es la aceleración en el tiempo t y se calcula como $a(t) = \frac{F}{m}$. La razón por la cual se usa Integración de Verlet es que el error local de $x(t+\Delta t)$ es del orden $O(\Delta t^4)$, mientras que el error global

de la misma expresión es $O(\Delta t^2)$.

Para asegurar la estabilidad numérica del integrador numérico, se impone un limite superior en Δt:

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}}$$

Donde ω_{max} es la máxima frecuencia propia del sistema. Esta frecuencia propia se puede determinar para los siguientes casos:

- Sistema masa-resorte único: $\omega_{max} = \sqrt{\frac{K}{m}}$.
- Sistema general de masa-resorte: $\omega_{max} = \text{máx}_i \sqrt{\frac{K_i}{m_i}}$.

Estas ecuaciones pueden ser usadas para los 6 grados de libertad, considerando matrices generalizadas de masa M y rigidez K, y reemplazando las fracciones $\frac{K}{M}$ por los valores propios de KM^{-1}. El paso de tiempo critico se obtiene al modo propio con la mayor frecuencia:

$$\Delta t_{cr} = \text{mín}_i \, \Delta t_i$$

La geometría del modelo consiste en una paralelepipedo, el cual representa el macizo rocoso.

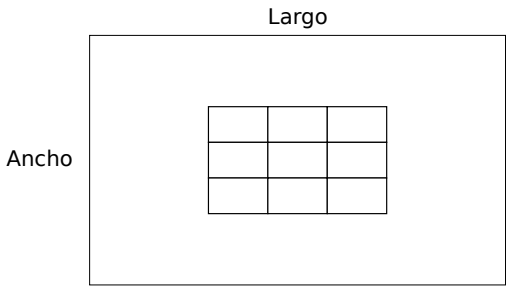


Figura 2.8: Geometria del Piso y las Bateas. Vista en planta.

En la Figura 2.8 se puede ver una vista en planta del modelo. La figura geometrica tiene un ancho, largo y altura determinados por la geometria de la información de extraccion (número de calles, número de zanjas, y número de bateas). Esta geometria es creada automaticamente por el software a partir de la informacion de extraccion. Todas las bateas son del mismo tamaño (15 [m] x 30 [m]), y estan posiciónadas como una grilla regular, sin distancia entre bateas.

La geometría estática usada en la simulación corresponde a:

Murallas

Corresponden a los limites de la zona de caving, y tienen la funcion adicional de aplicar las condiciones de frontera. Las murallas se pueden ver en la Figura 2.9.

Techo

Corresponde al techo limite de la zona de caving.

Piso

Corresponde al piso de la zona de caving. El piso posee un agujero rectangular por el cual las esferas

pueden pasar hacia las Bateas.

Bateas

Corresponden a las zonas donde se extrae el material, y son paralelepípedos rectangulares por donde las esferas caen. No existen espacios entre cada Batea, solo se separan por una muralla. Las bateas se pueden ver en la Figura 2.10.

Cada elemento de geometria estatica esta formado por “Facets”, elementos que usa Yade para representar geometría estática, y estan compuestos de triángulos. Es posible construir cualquier tipo de superficie que pueda ser aproximada por triangulos.

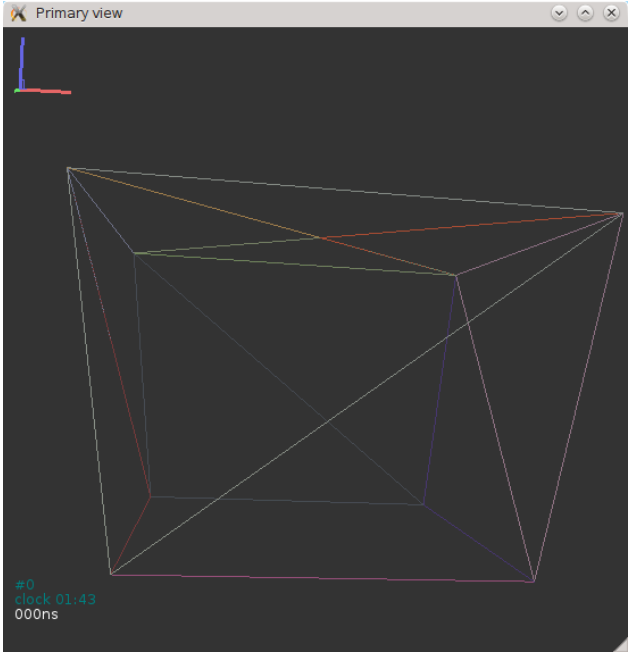


Figura 2.9: Geometría de las Murallas

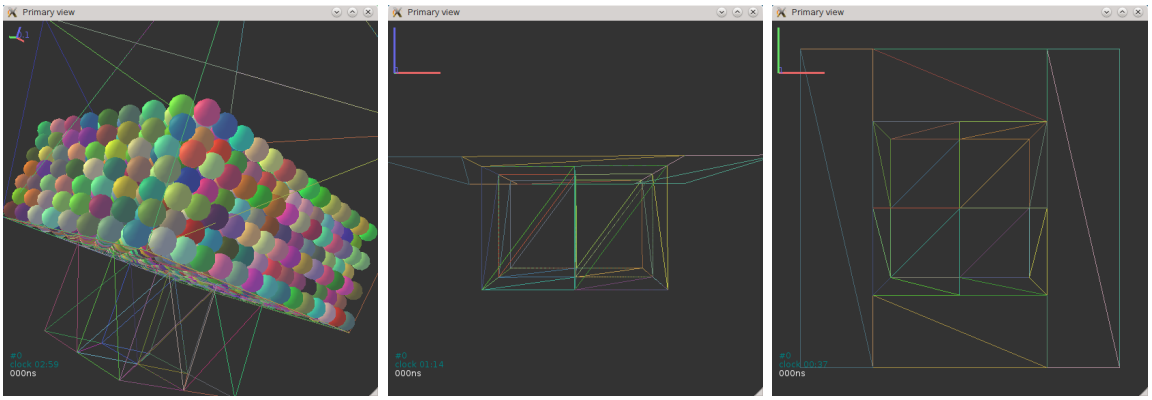


Figura 2.10: Geometría de las Bateas (Perspectiva, Lado y Planta)

Condiciones de Frontera

Para obtener resultados representativos, es necesario incorporar al modelo la presión ejercida por el material que no esta representado en el, como el material rocoso en la frontera de la zona de caving.

Con este fin, se modelaron condiciones de frontera in-situ a los lados y arriba de la zona de caving. Dado que Yade no posee una implementación de condiciones de frontera, se simulo el estado tensional, incorporando presiones de confinamiento y verticales por medio de desplazamientos aplicados en las murallas y y techo, respectivamente.

Las condiciones de frontera se pueden ver en la Figura 2.11, y una simulación con las murallas ya desplazadas, aplicando las condiciones de frontera deseadas se puede ver en la Figura 2.12.

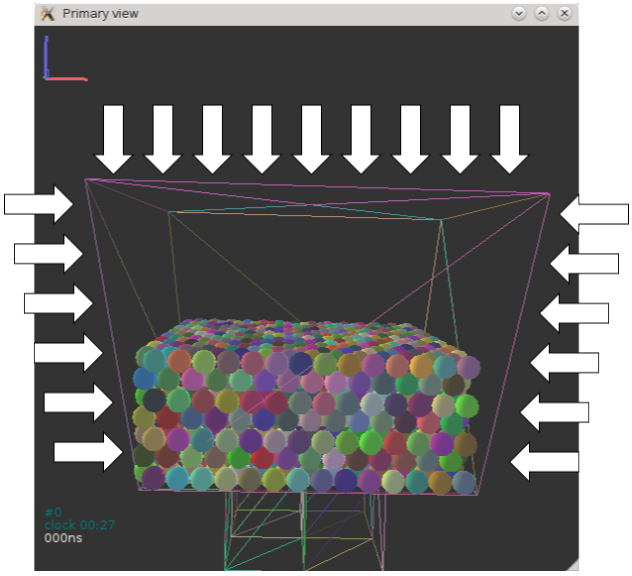


Figura 2.11: Condiciones de Frontera

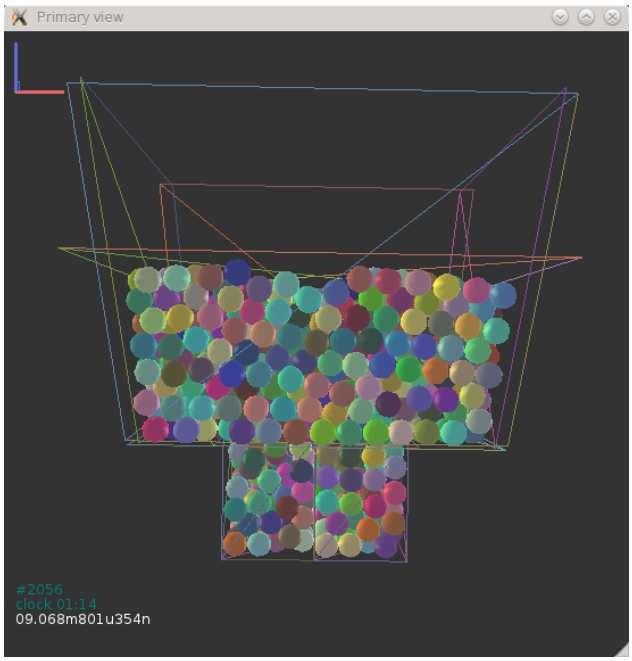


Figura 2.12: Aplicación de las condiciones de frontera

El desplazamiento de cada muralla es una funcion del estado tensional que se requiere simular. Para ello, se usa la Ley de Hooke:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Donde las deformaciones $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$ y ε_{zz} representan la deformacíon de las murallas y techo correspondientes, y σ_{xx}, σ_{yy} y σ_{zz} corresponden a los esfuerzos o estado tensional de la mina. Una vez calculadas las deformaciones, debemos calcular la matriz desplazamiento:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Donde dx, dy y dz son el Largo, Ancho y Alto del modelo, y los valores de x, y y z son los desplazamientos de las murallas y techo.

2.3. Descripción Software

La extracción del material rocoso fragmentado se modela como la caida de las esferas que debido a efectos mecánicos, se sueltan y caen por gravedad. Estas esferas son contabilizadas al pasar por la correspondiente batea y removida de la simulación.

Las leyes constitutivas utilizadas en el modelo determinan las relación esfuerzo-deformación que permiten la extracción del material por fuerzas gravitacionales.Estas leyes se presentan a continuación:

ScGeom

clase que representa la geometría de un contacto entre 2 cuerpos, el contacto tiene tres grados de libertad (esfuerzo normal y 2xCorte).

Dem3DofGeom

Clase que representa el contacto el contacto pared-esfera con tres grados de libertad.

Law2 ScGeom FrictPhys CundallStrack

Ley de contactos elásticos.

Cada batea tiene asignado un volumen máximo de material a extraer. Se mantiene una contabilidad de las esferas que cayeron por cada batea de la simulación, así como un contador que contiene el volumen acumulado caído en el tiempo. El volumen de una esfera se evalúa con la siguiente ecuación:

$$\text{Volumen(r)} = \alpha \cdot r^3$$

Donde α puede tomar los siguientes valores:

- $\alpha = \frac{4}{3}\pi$: Corresponde al volumen de una esfera de radio r.
- $\alpha = 6$: Valor intermedio usado actualmente.
- $\alpha = 8$: Corresponde al volumen de un cubo de radio r.

Cuando el volumen acumulado en una batea es mayor al volumen máximo, dicha batea se cierra, y se deja de extraer por dicha batea. Las esferas no extraídas se acumulan en el contenedor que es parte de la batea y no se pierden.

El proceso de extraccion se simula a una frecuencia mensual. Al simular cada mes, se ejecuta el Algoritmo 3 por cada batea:

Algoritmo 3 Avance de Extracción en una Batea

```
function AVANZAREXTRACCION
    indiceExtraccionActual ← indiceExtraccionActual + 1
    if extraccion[indiceExtraccionActual] > 0 then
        quemarPilar()
        abrirBatea()
    end if
end function
```

Dicho algoritmo avanza el índice dentro del arreglo de datos de extracción, y si la cantidad a extraer es positiva, quema el pilar correspondiente a dicha batea, y luego abre la batea, lo que permite que el material pase hacia el punto de extracción.

Para determinar si se debe avanzar la extracción, se ejecuta el Algoritmo 4

Algoritmo 4 Avance de la Extraccion

```
cerradas ← false
for batea ∈ bateas do
    cerradas = cerradas ∧ ¬batea.abierta
end for
if cerradas then
    if batea(0, 0).indiceExtraccionActual = largo arreglo extraccion − 1 then
        Finalizar simulación
    end if
    for batea ∈ bateas do
        batea.avanzarExtraccion()                    ▷ Algoritmo 3
    end for
end if
```

Geometricamente todas las bateas estan cerradas, y solo tiene abierta la parte superior, para permitir la entrada del material rocoso (esferas). Cada batea tiene 2 estados: Abierta o Cerrada. Dicho estado no afecta la geometria de la batea, pero evita que se extraiga desde una batea cerrada. La extraccion de dichas esferas se realiza desde la parte inferior de la batea, usando el Algoritmo Algorithm 5.

Algoritmo 5 Extraccion de esferas de una Batea

```
function EXTRAER(esfera, batea)
    if esfera ∈ batea then
        volumenCaido ← volumenCaido + α ∗ esfera.radio^3
        eliminar(esfera)
        esferasRemovidas ← esferasRemovidas ∪ {esfera, batea.id}
        if volumenCaido ≥ extraccion[indiceExtraccionActual] then
            cerrarBatea()
        end if
    end if
end function
function EXTRAERBATEA(batea)
    esferas = ∅
    if ¬batea.abierta then
        return
    end if
    for b ∈ O.bodies do
        if b ∈ batea then
            esferas = esferas ∪ b
        end if
    end for
    while batea.abierta ∧ |esferas| > 0 do
        e = mín{esferas.z}                ▷ Se selecciona la esfera con menor valor en Z
        esferas = esferas − e
        extraer(e)
    end while
end function
```

Información Previa

El calculo de DEM usando un esquema de integración explicito requiere un gran número de pasos (iteraciones) durante la simulación. El tiempo de computo Z abarcando T segundos de tiempo simulado, conteniendo N partículas de volumen V depende de:

- Linealmente al número de pasos $i = \frac{T}{S_t \Delta t_{cr}}$, donde S_t es un factor de seguridad para el paso de tiempo, Δt_{cr} es el paso de tiempo obtenido desde la velocidad de la onda P, calculado como:

$$\Delta t_{cr} = \text{mín}\, R_i \sqrt{\frac{E_i}{\rho_i}}$$

  Donde R_i es el radio de la esfera i-esima, ρ_i es la densidad del material de la esfera i-esima, y E_i es el modulo de Young de la esfera i-esima.

- El número de partículas N:

$$N = p\frac{V}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

  Donde r es el radio de las esferas y p es la porosidad del empaquetamiento de esferas.

- El número de núcleos computacionales N_{cpu}, en el caso ideal de que el código fuera 100 % paralelo, pero en realidad es aproximadamente un 80 %.

Por ende, el tiempo de ejecución es:

$$Z \propto \frac{iN}{N_{cpu}} = \frac{T}{S_t r}\sqrt{\frac{E}{\rho}}p\frac{V}{\frac{4}{3}\pi r^3}\frac{1}{N_{cpu}}$$

$$Z \propto \frac{1}{r^4}$$

Indeterminación de resultados

Es natural esperar que ejecutar la misma simulación varias veces, se generen exactamente los mismos resultados. A pesar de que el computo se realiza con una precisión finita, los errores de redondeo y truncado serian deterministicamente los mismos en cada ejecución. Esto es cierto para ejecuciónes no paralelas (Usando un solo hilo o thread), no lo es para ejecuciónes paralelas.
La manera mas directa de implementar el calculo paralelo es tratar las interacciones en un orden arbitrario, evaluando esfuerzos y deformaciones independientemente, pero las fuerzas de cada interacción deben ser sumadas. Si orden de adición es arbitrario, entonces los resultados pueden variar levemente, por ejemplo:

$$(1/10.) + (1/13.) + (1/17.) = 0{,}23574660633484162$$

$$(1/17.) + (1/13.) + (1/10.) = 0{,}23574660633484165$$

Esto se debe a que el orden de ejecución de cada hilo es decidido por el planificador de procesos del sistema operativo, en un orden que no es controlable por el usuario y/o programador, y por ende se considera no deterministico.

Influencia de amortiguación numérica

El efecto del orden de adición puede ser amplificado significativamente por el uso de una función de amortiguamiento discontinua (en el integrador de Newton):

$$\frac{(\Delta F)}{F} = -\lambda_d \text{sgn} F\left(\dot{u} + \frac{\ddot{u}\Delta t}{2}\right)$$

Si el argumento a la función sgn (signo) es cercano a cero, entonces los errores de precisión finita en las cifras menos significativas pueden determinar si la ecuación se evalúa a $-\lambda_d$ o $+\lambda_d$. El valor comumnente usado es $\lambda_d = 0{,}4$, lo que implica que el error se propaga desde la cifra menos significativa a la cifra mas significativa una posición a la vez.

Proceso de Simulación

El proceso que se debe seguir para simular el modelo consta de varios pasos:

1. Preprocesamiento de los datos “crudos” de CODELCO.
2. simulación.
3. Postprocesamiento de los datos generados en la simulación.
4. Visualizacion.

Input

Los datos de entrada necesarios para la simulación son:

Informacion de Extracción

La informacion de extraccion necesaria es el tonelaje por punto de extraccion, a una frecuencia por turno (cada 8 horas), por dia o por mes. Generalmente la informacion disponible por parte de CODELCO posee frecuencia por turno o diaria.

La simulación usa la extraccion por mes, y se proveen scripts en Python que realizan la conversion. Estos scripts adicionalmente transforman la informacion de extraccion a su equivalente en extraccion de bateas.

Se requiere que la informacion de extraccion este formateada en un archivo CSV (Valores separados por comas o punto y comas), con las siguientes columnas:

1. Identificador de la Mina, Por ejemplo: PI, DR, ES, etc.
2. Punto de extraccion, en coordenada calle, zanja, punto. Por ejemplo: 03_01F
3. Fecha, en formato dia-mes-año, con el dia y año en formato numerico, y el mes en palabras. Por ejemplo: 17-OCT-2011
4. Extraccion, en toneladas.

En el caso de extraccion con frecuencia mensual, se requieren las siguientes columnas:

1. Punto de extraccion, en coordenada calle, zanja, punto. Por ejemplo: 03 01F
2. Fecha, en formato año-mes, con el mes y año en formato numerico. Por ejemplo: 2012-12
3. Extraccion, en toneladas.

Parámetros Mecánicos

La simulación requiere especificar varios parámetros mecánicos:

- Modulo de Young (E)
- Densidad de la Roca (ρ)
- Coeficiente de Poisson (ν)
- Angulo de Friccion (ϕ)
- Cohesion (C)
- Resistencia en tension.

Estos parámetros se especifican directamente en el codigo fuente del archivo de simulación.

Output

Terminada la simulación se recogen los siguientes datos de salida:

Volumen del material extraído

Consiste en la posición de las esferas que fueron removidas, las cuales forman un volumen que representa el material extraído.

Volumen del material fragmentado

Consiste en la posición de las esferas que cumplen cierto criterio sobre el número de contactos. Esto representa el volumen del material que esta quebrado o fragmentado, y representa un límite de la superficie de quiebre.

Superficie de quiebre

Consiste en una malla geómetrica que representa la superficie de quiebre. Dicha superficie es la interfaz entre el material extraído, el material fragmentado y el material intacto.

Preprocesamiento

El primer paso de la simulación es pre-procesar los datos de entrada, con el fin de normalizar los datos. Se desea que los datos normalizados posean las siguientes caracteristicas:

- La frecuencia temporal de la informacion sea mensual.
- Debe existir informacion de extraccion por cada batea.
- Se deben rellenar con ceros la informacion de extraccion en las bateas no especificadas por los archivos de entrada.

Este preprocesado esta implementado en 2 scripts:

- generarDatosPorMes.py: Este script lee un archivo CSV de entrada en el formato de extraccion por turno o diaria, y lo convierte al formato de extraccion por mes.
- importarDatosExtraccion.py: Este script lee un archivo CSV de entrada en el formato de extraccion por mes, y genera un archivo CSV que puede ser leido por el software de simulación (Yade), con el fin de ejecutar la simulación.

  Este archivo contiene la extraccion por cada batea, a una frecuencia mensual, asi como informacion necesaria para construir la simulación, como el número de bateas en las direcciones X e Y, y los limites de las calles y zanjas.

El proceso de preprocesamiento seria:

- Ejecutar generarDatosPorMes.py con los datos crudos de CODELCO, y generar un archivo con informacion de extraccion mensual.
- Ejecutar importarDatosExtraccion.py con el archivo generado en el paso anterior, y generar un archivo con la informacion de la simulación.

Simulación

El siguiente paso es ejecutar la simulación usando Yade. El proceso de simulación consta de los siguientes pasos:

1. Preparar un script de simulación.
2. Ejecutar Yade con el script de simulación del paso anterior.
3. Esperar que la simulación se ejecute.

Preparacion de la simulación

Para preparar la simulación, se debe editar un script en python, el cual es ejecutado por Yade. Dicho script se llama bc-simular.py y se encuentra en *codigo/yade/cluster/* dentro del repositorio SVN del proyecto. Se debe editar dicho script con cualquier editor de texto, y llenar los siguientes parámetros:

- *E*: Mdulo de young
- *nu*: Coeficiente de Poisson
- *rho*: Densidad de la roca
- *phi*: Angulo de Fricción
- *cohesion*: Resistencia en cohesion.
- *tensileStrength*: Resistencia en tension.
- *r*: Radio de la esfera
- *alto*: Altura máxima del modelo
- *archivoEntrada*: Archivo de datos de extracción, generado en el paso de preprocesamiento.
- *carpetaSalida*: Carpeta donde se guardaran los archivos de salida.
- *desplazamiento_caras*: Desplazamiento de las murallas que representan condiciones de frontera.
- *desplazamiento_techo*: Desplazamiento del techo que representa la condición de frontera.

Una vez almacenados los parámetros, se debe guardar el archivo y proceder al siguiente paso.

Ejecución de la Simulación

Para ejecutar las imulación, se debe ejecutar:

```
yade bc-simular.py
```

El nombre del ejecutable de Yade puede variar según la versión usada. Una vez ejecutado, se debe esperar a que termine la simulación (Pueden ser horas, dias o semanas, dependiendo del tamaño del modelo). Los archivos generados durante la simulación son los siguientes:

- *positions-n.csv* Es un archivo CSV (separado por comas) que contiene 4 columnas por cada esfera de la simulación:
    - número identificador de la esfera.
    - Coordenada X de la posición.
    - Coordenada Y de la posición.
    - Coordenada Z de la posición.

- *removidos-n.csv* Es un archivo CSV que contiene 2 columnas por cada esfera removida de la simulación a traves de una batea:
  - número identificador de la esfera.
  - número identificador de la batea por la cual cayo la esfera.
- *interacciones-n.csv*: Es un archivo CSV que contiene 6 columnas por cada esfera de la simulación:
  - número identificador de la esfera.
  - Coordenada X de la posición.
  - Coordenada Y de la posición.
  - Coordenada Z de la posición.
  - número de interacciones (contactos) reales.
  - número de interacciones (contactos) reales + número de interacciones no reales.

En ambos casos el valor de n es el número de iteracion correspondiente.

Resumen de la simulación

Cada vez que se ejecuta una simulación, se guardan 2 archivos con el estado actual de la aplicacion:

- ultimo-estado.xml.bz2: Archivo que contiene la posición de las esferas, facets, esfuerzos y interacciones de la simulación.
- estado-yade.pkl: Archivo serializado usando la libreria cPickle de Python, que contiene el estado actual del objeto Bateas del archivo bc-simular.py en ejecución. Dicho archivo contiene toda la informacion de extraccion, asi como la extraccion actual en cada batea.

Para resumir una simulación, se deben extraer ambos archivos de otra simulación fallida o finalizada exitosamente, y ejecutar el script *bc-resumir.py* en la misma carpeta donde ambos archivos han sido copiados. Esto retomara la simulación desde el punto que termino. Este script es **experimental** y requiere un poco mas de desarrollo para ser funcional al proyecto. Especificamente, hay problemas con los números de iteracion, ya que al resumir se inicia nuevamente en 0 iteraciones, y por el momento, no soporta cargar una nueva informacion de extraccion.

Postprocesamiento y Visualización

En este paso se procesan los archivos generados por la simulación en el paso anterior, con el fin de construir la superficie de quiebre. Para esto existen varios métodos.

Criterio de Material Caído

Este criterio se basa en el material fragmentado y extraido en cada batea. Usa como entrada los datos de las posiciónes de las esferas (archivo positions-n.csv) y la informacion de las esferas removidas (archivo removidos-n.csv), usando el Algoritmo 6.

Este algoritmo dibuja una esfera en el espacio por cada esfera removida a traves de cada batea. La posición de dichas esferas esta determinada por la posición en la iteracion inicial (La mas cercana a la iteracion 0) de la simulación. De esta forma, se dibuja cada esfera removida en su posición inicial dentro del macizo rocoso, formando una figura similar a la Figura 2.13.

Algoritmo 6 Criterio del Material Caido

1: esferas = leerCSV(positions-0.csv) ▷ Leer posiciónes de la iteracion inicial
2: removidas = leerCSV(removidos-n.csv)
3: **for** $id \in removidas.ids$ **do** ▷ Iterar el ID de cada esfera removida
4: dibujar(esferas[id].xyz, removidas[id].idBatea) ▷ Dibujar esfera en posición inicial, coloreado segun batea
5: **end for**

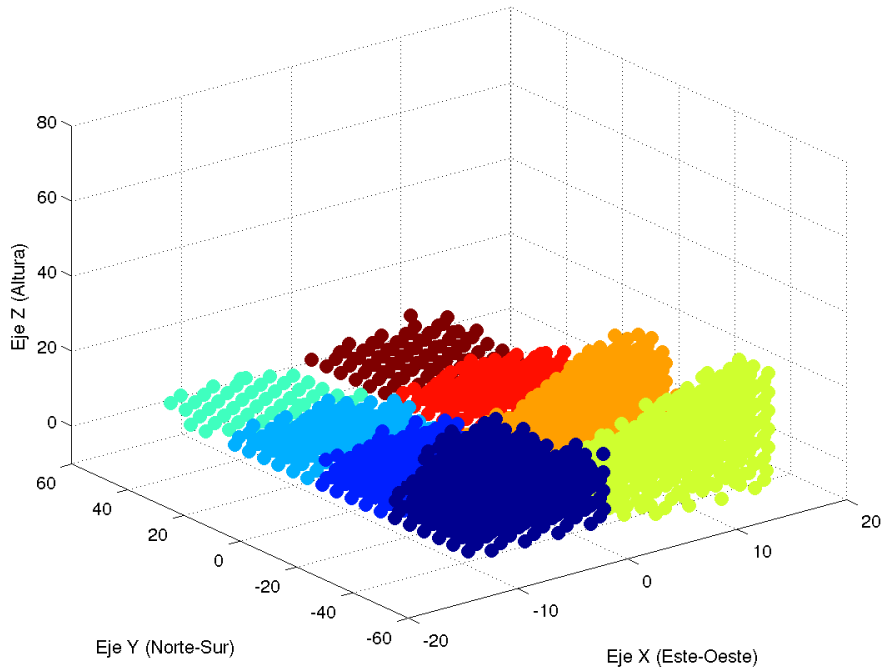


Figura 2.13: Resultado del metodo del material caido

Dicho algoritmo se ejecuta para cada archivo de datos (existe uno para cada mes de extraccion), lo que produce una estimacion de la superficie de quiebre para cada mes de extraccion.

Implementación

La implementacion en Matlab de este criterio esta almacenada en *codigo/matlab/graficarVolumenExtraido.m* dentro del repositorio SVN del proyecto. Dicho script contiene los siguientes parámetros en su interior:

- carpeta: Ruta completa a la carpeta que contiene los archivos de datos de la simulación. Dicha carpeta debe contener las siguientes subcarpetas:
  - positions: Esta carpeta contiene los archivos positions-n.csv
  - removidos: Esta carpeta contiene los archivos removidos-n.csv
- axmin, axmax, aymin, aymax, azmin, azmax: Valores de los rangos minimos y maximos para X, Y y Z.

Una vez ejecutado, dicho script genera una serie de archivos de imágenes PNG que contienen la esti-

macion de la superficie de quiebre. Dichas imágenes son similares a la Figura 2.13.

Criterio de Contactos

Como parte de la simulación en Yade, se usan contactos para calcular las fuerzas y esfuerzos, y representan los puntos de contacto (Yade los llama interacciones) entre un par de esferas, o un punto de contacto entre una esfera y un facet (Por ejemplo, una pared). Una esfera puede tener cualquier cantidad de contactos, desde 0 para una esfera que no hace contacto, 1 para una esfera que esta en contacto con un unico otro elemento, etc.

Un contacto esta compuesto de 2 componentes: El componente fisico, el cual esta encargado de calcular las propiedades fisicas del contacto, como los esfuerzos, y el componente geometrico, el cual evalua las propiedades geometricas del contacto, como la distancia de penetracion, y los vectores normales. Basandose en esto, Yade define 2 tipos de contactos:

Contactos Reales Contactos que poseen un componente fisico y un componente geometrico definidos.

Contactos No Reales Contactos que uno de los componentes (fisico o geometrico) no estan definidos.

El criterio de contactos usa el número de contactos reales de cada esfera para construir una superficie de quiere. En general, la superficie generada por este metodo es mayor a la superficie generada por el criterio del material caido, ya que esta superficie representa mas material quebrado y fracturado que el método anterior.

Este criterio construye la superficie considerando solo las esferas que poseen 0 contactos, y dibujando la posición de dichas esfera en el espacio, como se ve en el Algoritmo 7.

Algoritmo 7 Criterio de lo Contactos

```
1: esferas = leerCSV(interactions-n.csv)
2: for esfera ∈ esferas do
3:     if esfera.contactos = 0 then
4:         dibujar(esfera.xyz)
5:     end if
6: end for
```

Dicho algoritmo se ejecuta para cada archivo de datos (existe uno para cada mes de extraccion), lo que produce una estimacion de la superficie de quiebre para cada mes de extraccion. Un resultado de ejemplo se puede ver en la Figura 2.14.

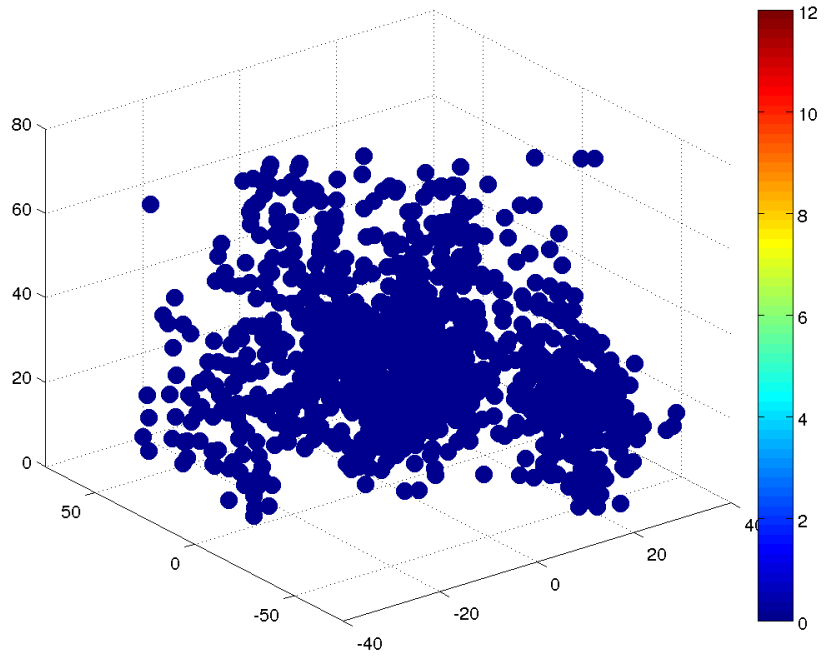


Figura 2.14: Resultado del metodo de los contactos

Suavizado

Las superficies creadas con este metodo son bastante ruidosas, debido a que el número de contactos de cada esfera varia rapidamente en función del tiempo.

Debido a ello, se propone un método que permita obtener superficies mas suaves.

Una forma tipica de eliminar datos “extraños” (outliers) es filtrar segun la escala tipificada z:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Donde σ es la desviacion estandar de los datos, y μ la media.

Se aplicara dicho indicador de la siguiente forma:

$$z = \frac{||x - \mu||}{||\sigma||}$$

Donde $||x - \mu||$ es la distancia del centro de la esfera x a la posición promedio del centro de las esferas, y $||\sigma|| = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}$ es el módulo de la desviación estándar, al ser calculada por componente.

El valor de z se evalúa para cada esfera, y las esferas que tengan un valor de z mayor a $3{,}0$ son eliminadas. El resultado de aplicar este filtro al ejemplo de la Figura 2.14 se puede ver en la Figura 2.15.

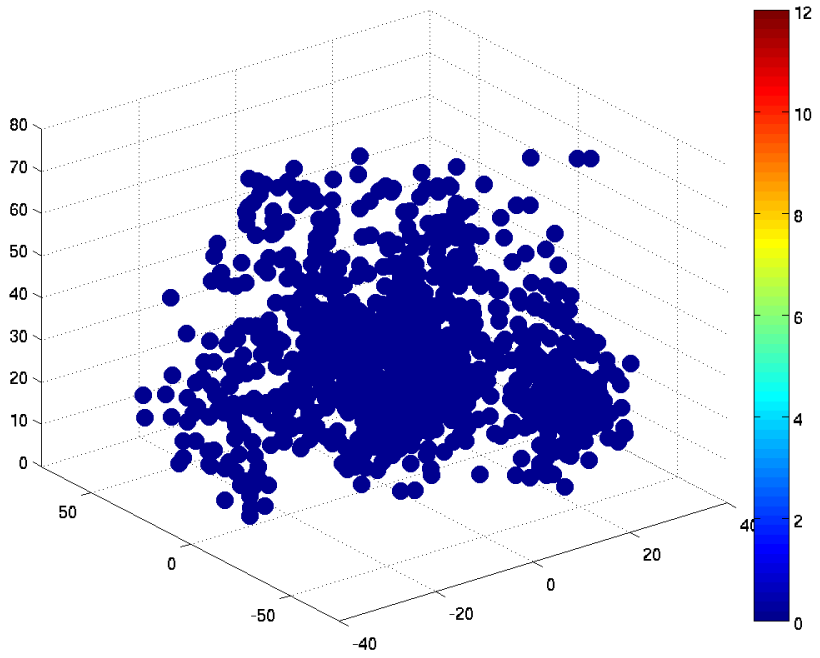


Figura 2.15: Resultado del método de los contactos, versión suavizada

Implementación

La implementacion en Matlab de este criterio esta almacenada en *codigo/matlab/graficarInteracciones.m* dentro del repositorio SVN del proyecto. Dicho script se ejecuta de la siguiente forma:

```
graficarInteracciones(carpeta);
```

Previamente hay que agregar la carpeta de dicho script al PATH de Matlab, o usar el explorador de archivos de Matlab y posiciónarse en dicha carpeta.

El parámetro *carpeta* es la ruta completa a la carpeta que contiene los archivos de interacciones (interacciones-n.csv) a procesar.

La ejecución del script producira una serie de imágenes PNG en la misma carpeta donde estan los archivos de interacciones. Dichas imágenes contienen la estimación de la cavidad.

Construcción de la Superficie

Hasta este punto, el software construye volúmenes de datos mas que superficies definidas matematicamente. Es necesario post-procesar dichos volumenes de datos para construir superficies.

El primer paso de este proceso es extraer las esferas que estan en la frontera de la superficie, eliminando las esferas que no esten en dicha frontera. Para ello, se construye una grilla en el plano XY, y en cada celda de dicha grilla, se seleccionan las esferas que están en la columna de dicha celda, y se eliminan todas las esferas de dicha columna, excepto la que esta a la máxima altura. El algoritmo se presenta en el Algoritmo 8.

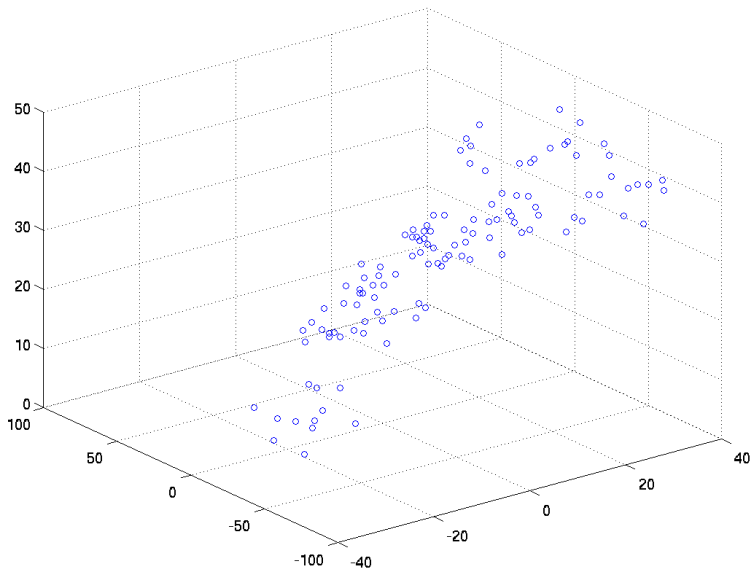
Algoritmo 8 Extraccion de superficie a partir de volumen de datos

Entrada: esferas: Arreglo de posiciónes de las esferas

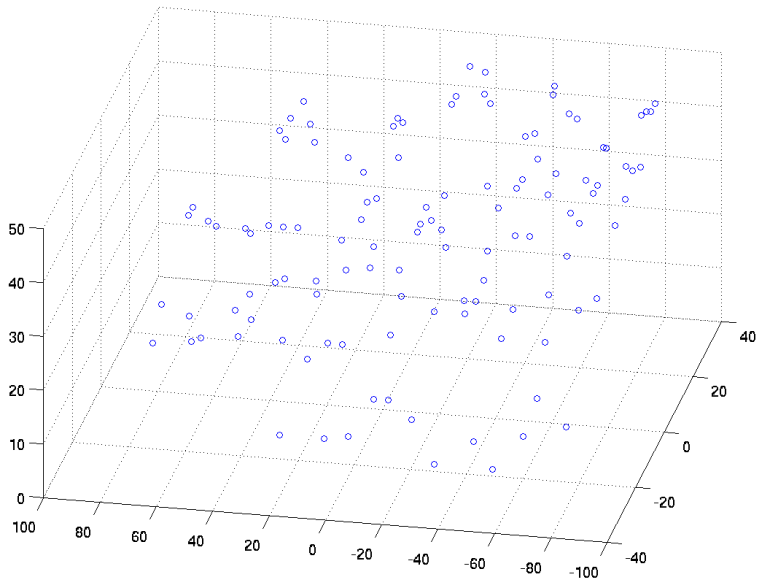
```
gridX: tamaño de la grilla en X
gridY: tamaño de la grilla en Y
function FILTRARSUPERFICIE(esferas, gridX, gridY)
    mins = min(esferas.xy)
    maxs = max(esferas.xy)
    size = maxs - mins
    stepX = size[0] / gridX + 1
    stepY = size[1] / gridY + 1
    ret = ∅
    for i ∈ [1, stepX] do
        for j ∈ [1, stepY] do
            grid = calcularGrilla(i, j)                          ▷ Celda i,j de la grilla
            columna = [s | s.xy ∈ grid ∧ s ∈ esferas]            ▷ Esferas dentro de la celda
            e = máx{columna.z}                                   ▷ Esfera mas alta dentro de la columna
            ret = ret ∪ e
        end for
    end for
    return ret
end function
```

Los de aplicar el Algoritmo 8 a un set de datos real se puede ver en la Figura 2.16.

Finalmente, usando las esferas de la superficie, se puede construir una superficie usando diferentes metodos de Matlab, como *surface* y *contour*. Estos resultados se pueden ver en la Figura 2.17.

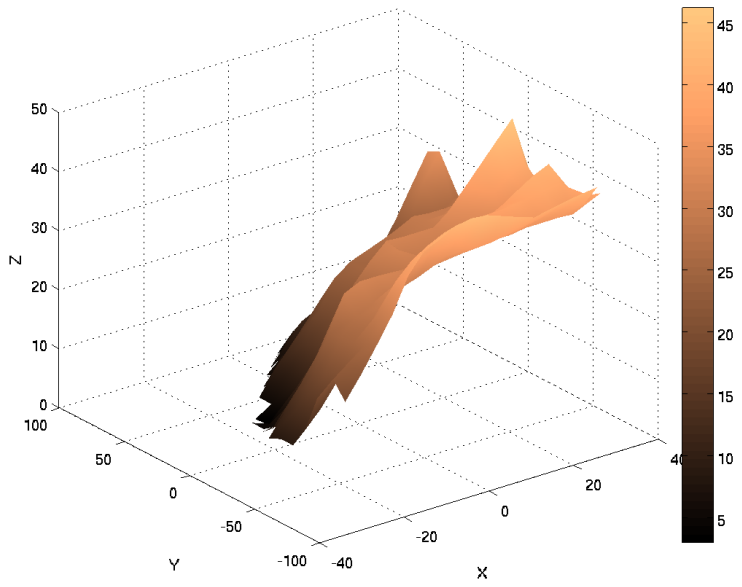


(a)

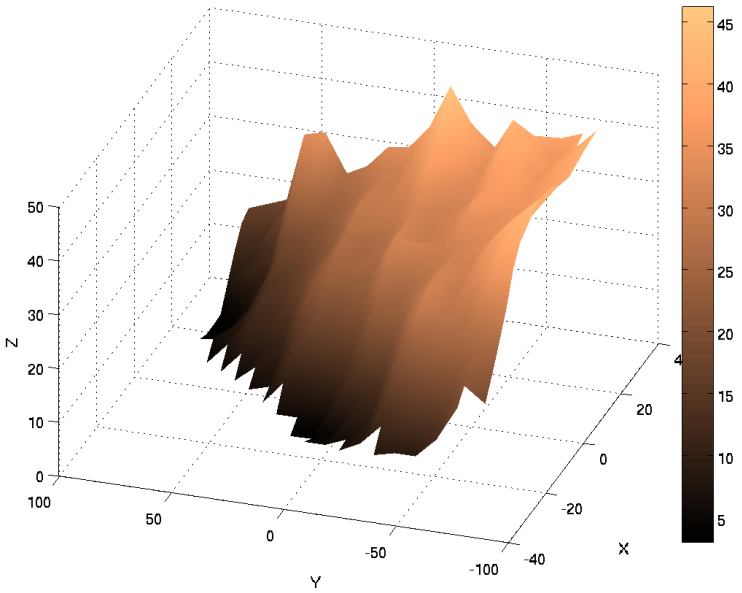


(b)

Figura 2.16: Resultados de la extraccion de esferas de superficie



(a)



(b)

Figura 2.17: Resultados de la extraccion de superficie

La implementación en Matlab de este criterio esta almacenada en *codigo/matlab/graficarSuperficie.m* dentro del repositorio SVN del proyecto.

2.4. Casos de estudio

2.4.1. Caso Pilar Norte

El ejemplo que se presenta, consiste en datos de extracción 2010-2012.

Input

Los valores de los parámetros mecánicos usados para la simulación son los siguientes:

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
Modulo de Young (E)	56 [GPa]	Resistencia a la Tensión	500 [Pa]
Coeficiente de Poisson (ν)	0.2	Radio de esfera	1.5 [m]
Densidad (ρ)	3648 $\frac{kg}{m^3}$	Desplazaminento Murallas	0.04 [m]
Ángulo de Fricción (ϕ)	$40°$	Desplazamiento Techo	0.08 [m]
Cohesión	500 [MPa]		

El modelo de la Mina Pilar Norte tiene dimensiones:

- Alto 50 [m]
- Ancho 60 [m]
- Largo 20 [m]

Output

En las Figuras 2.18, 2.19 y 2.20 se pueden ver los resultados dada la construcción del volumen extraído. La superficie de quiebre a partir de los datos anteriores se puede ver en las Figuras 2.21, 2.22 y 2.23. Por otra parte en las Figuras 2.24, 2.25 y 2.26, se pueden ver representados los resultados filtrados por cero interacciones y la superficie construida a partir de dichos datos se puede ver en las Figuras 2.27, 2.28 y 2.29.

Visualización

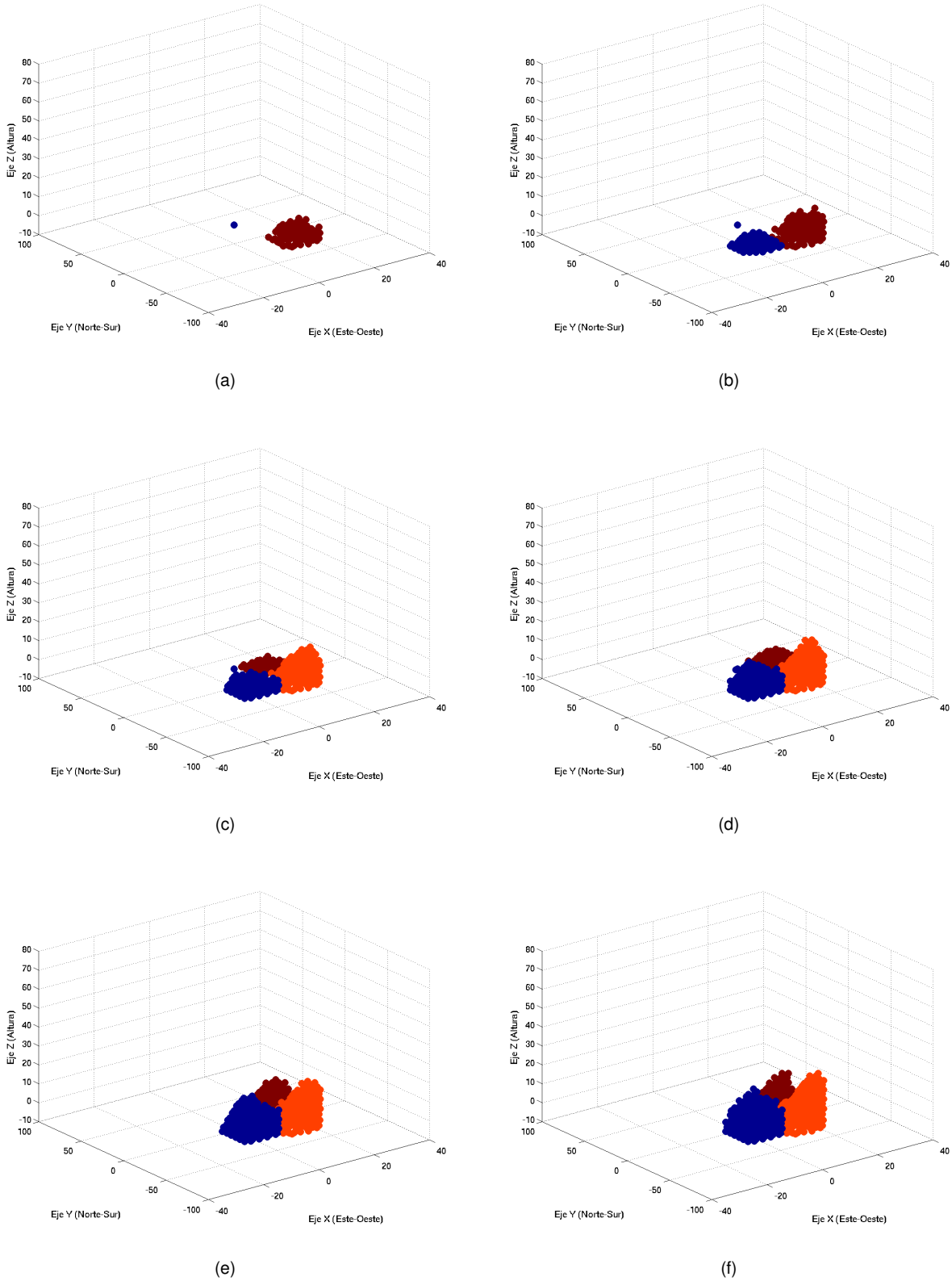


Figura 2.18: Volumen Extraido Pilar Norte, Meses 1-6.

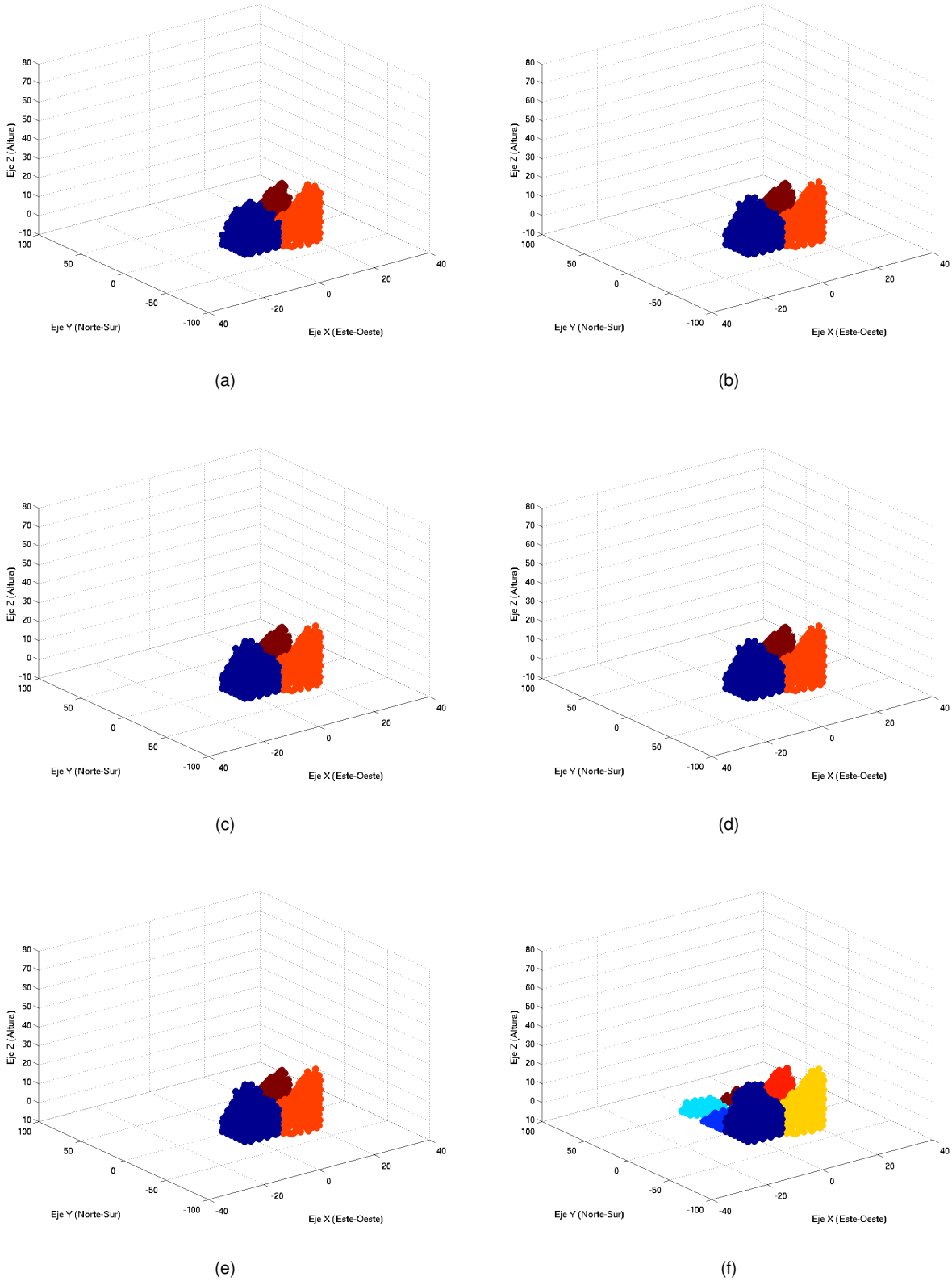


Figura 2.19: Volumen Extraido Pilar Norte, Meses 7-12.

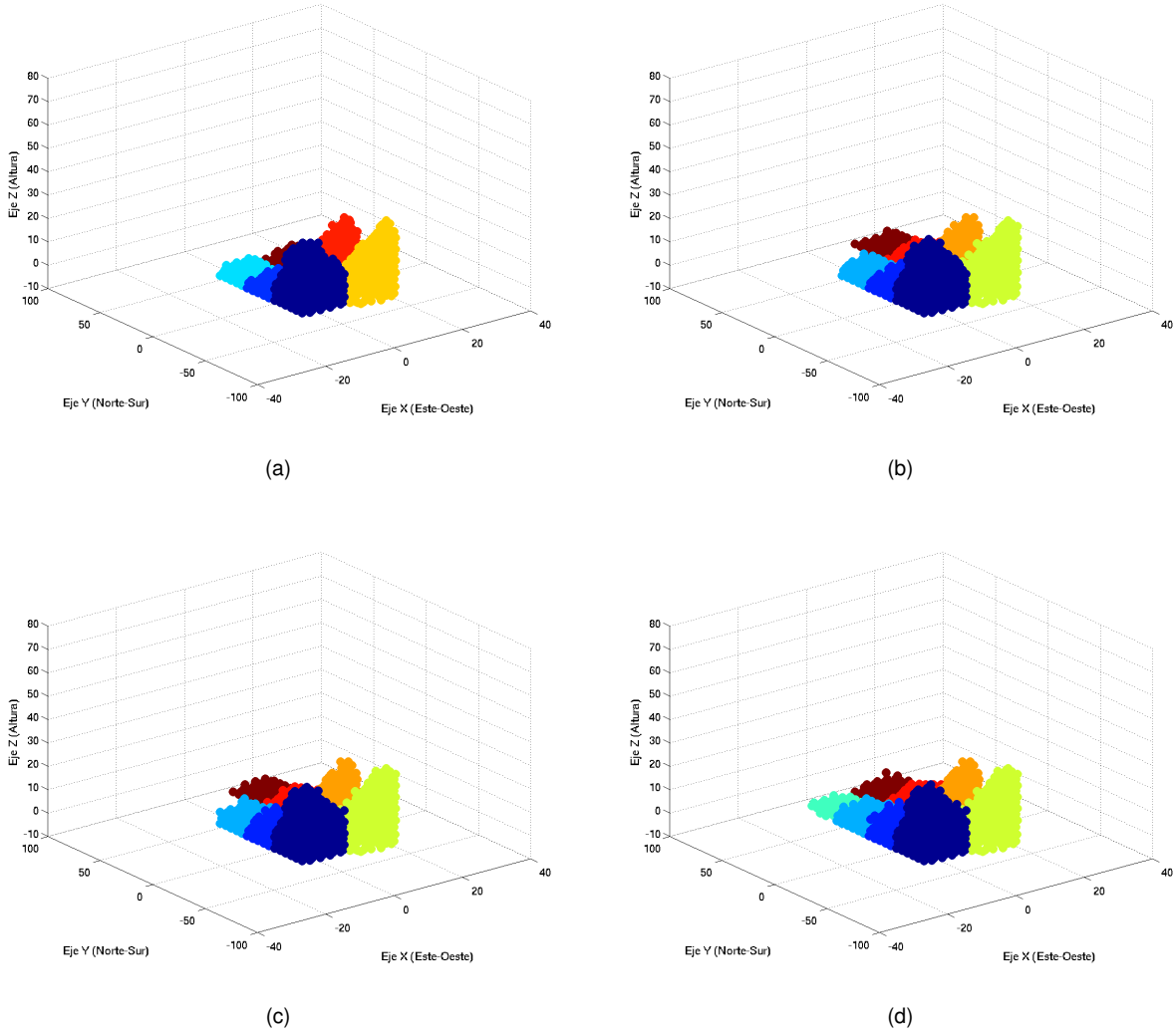
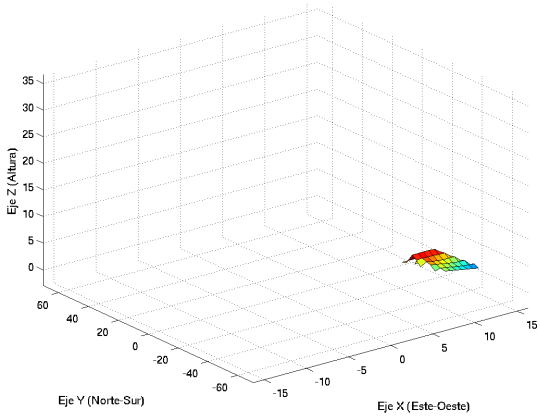
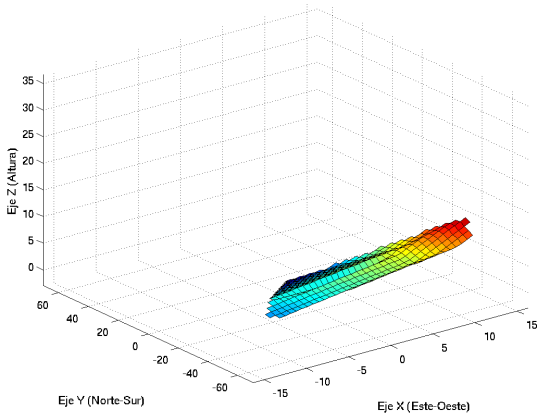


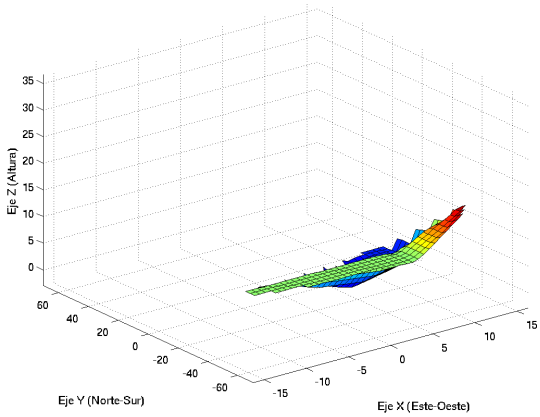
Figura 2.20: Volumen Extraido Pilar Norte, Meses 13-16.



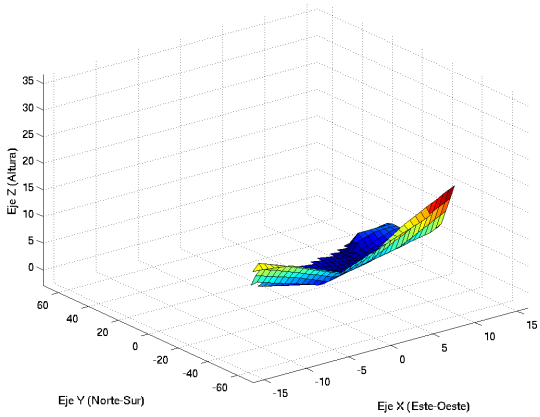
(a)



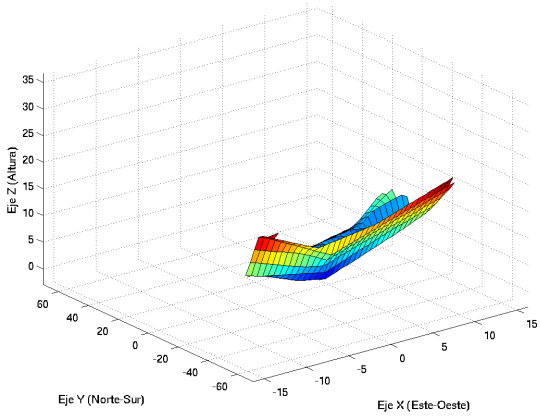
(b)



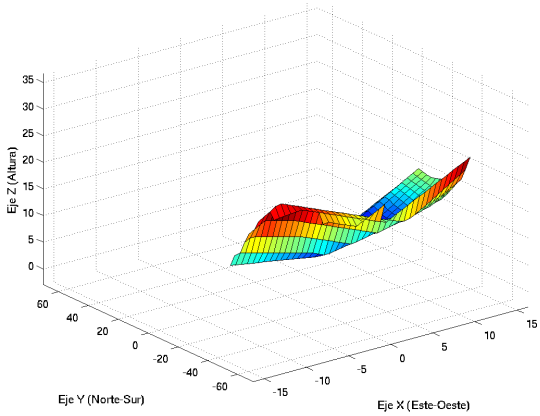
(c)



(d)

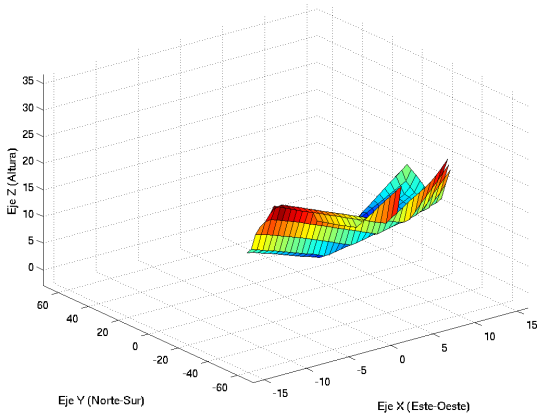


(e)

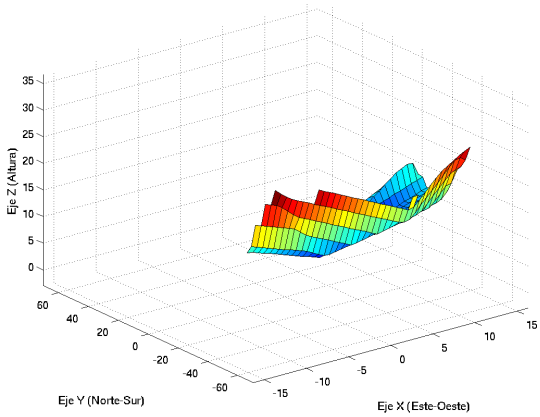


(f)

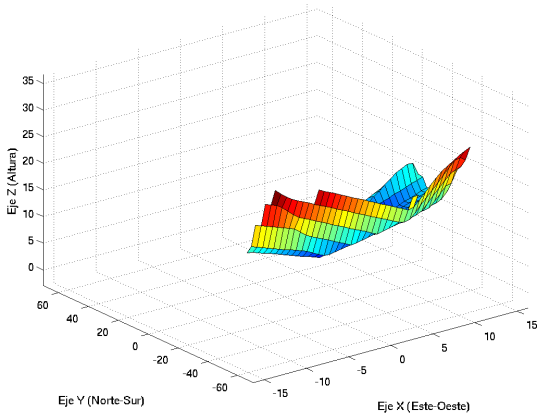
Figura 2.21: Superficie del Volumen Extraido Pilar Norte, Meses 1-6.



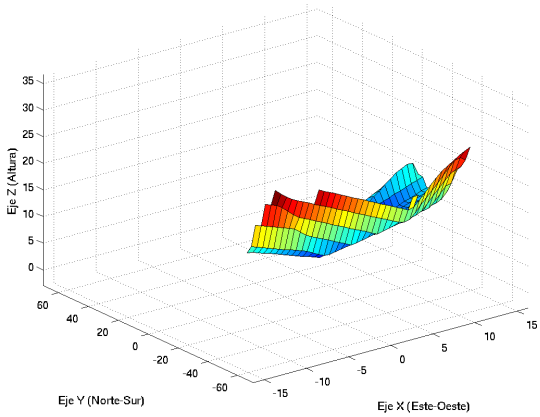
(a)



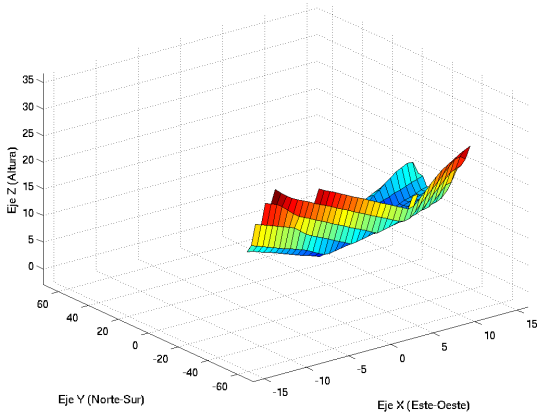
(b)



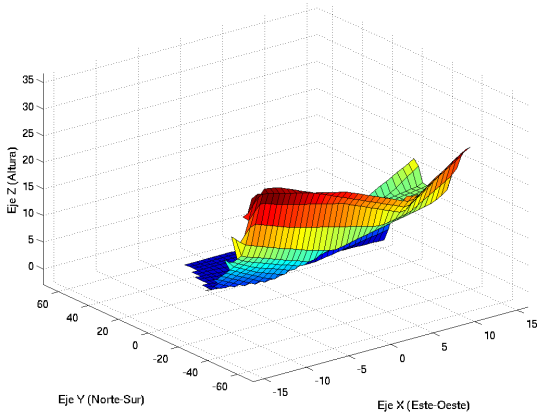
(c)



(d)

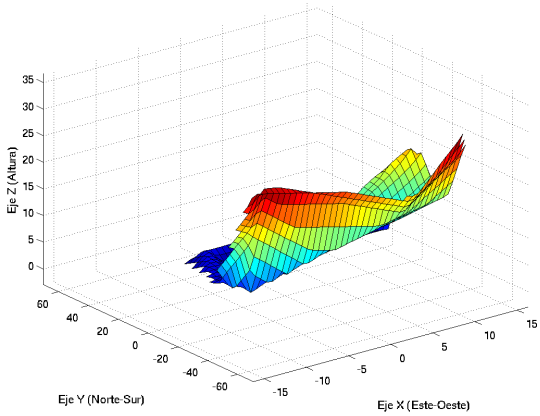


(e)

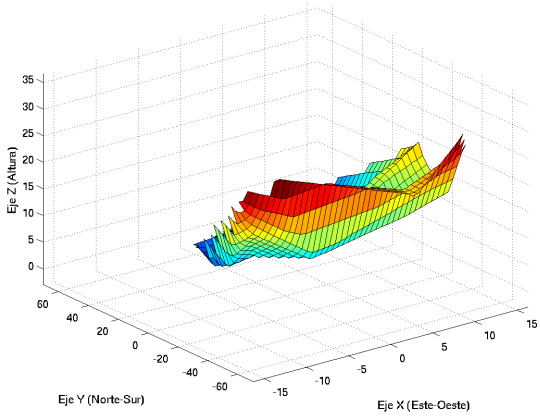


(f)

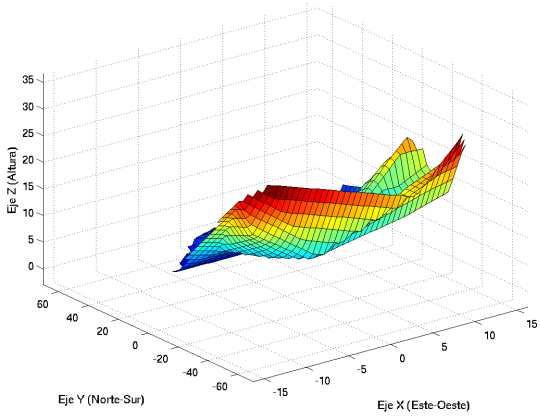
Figura 2.22: Superficie del Volumen Extraido Pilar Norte, Meses 7-12.



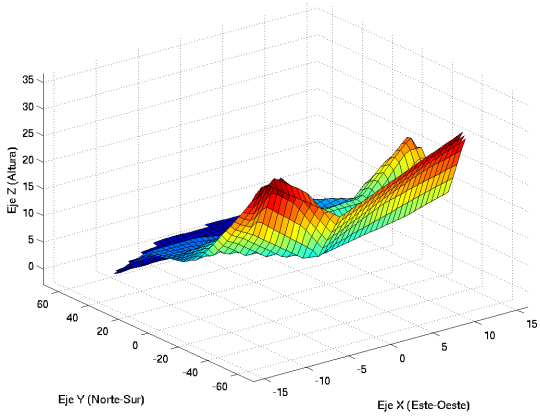
(a)



(b)

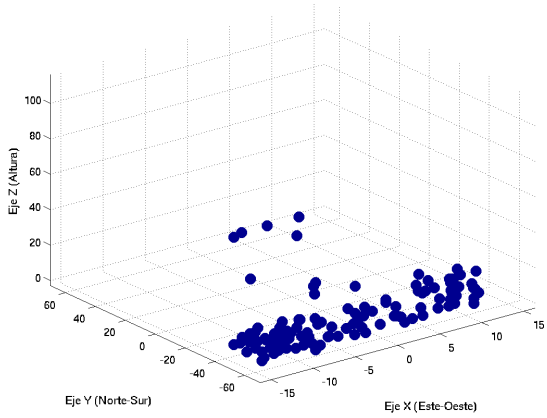


(c)

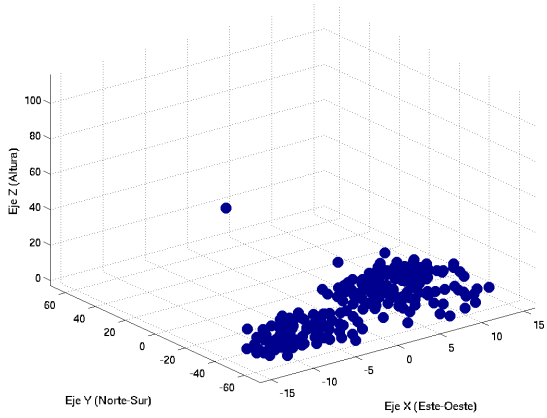


(d)

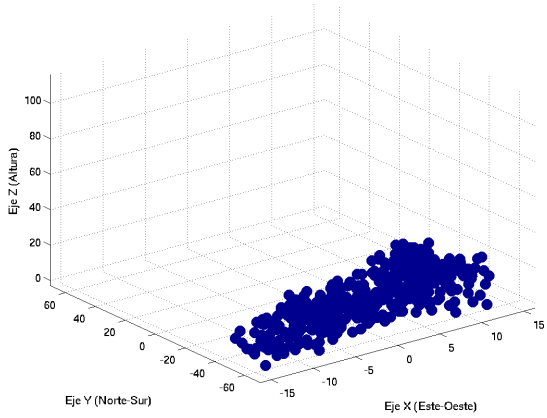
Figura 2.23: Superficie del Volumen Extraido Pilar Norte, Meses 13-16.



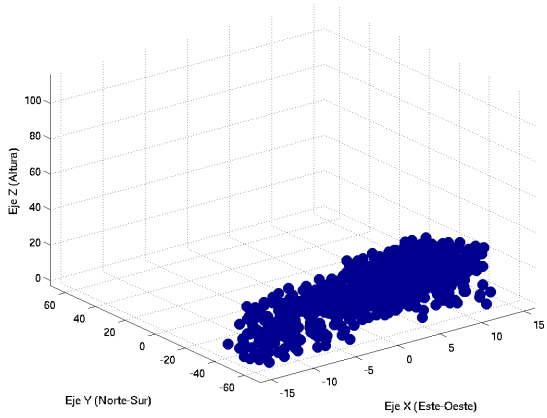
(a)



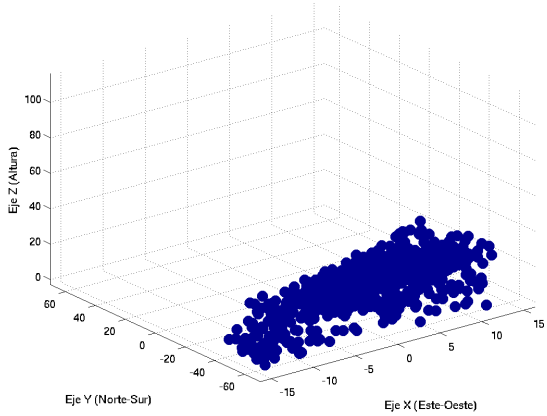
(b)



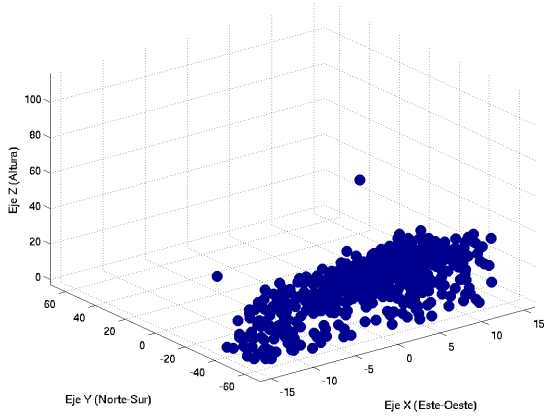
(c)



(d)

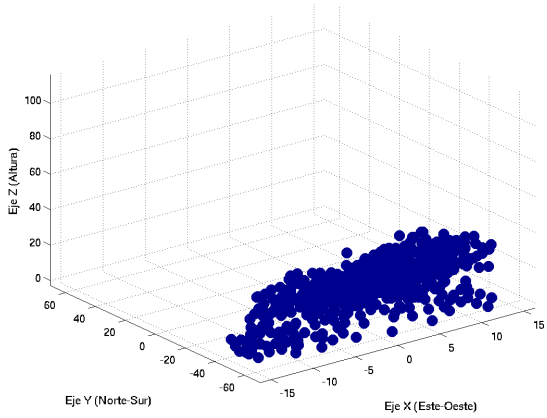


(e)

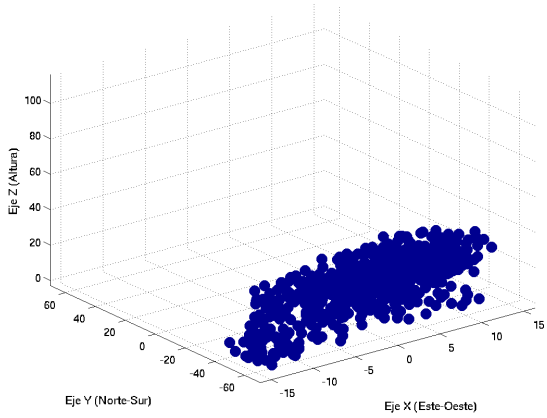


(f)

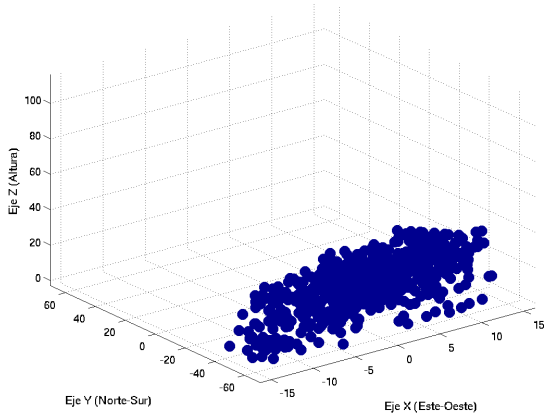
Figura 2.24: Interacciones Pilar Norte, Meses 1-6.



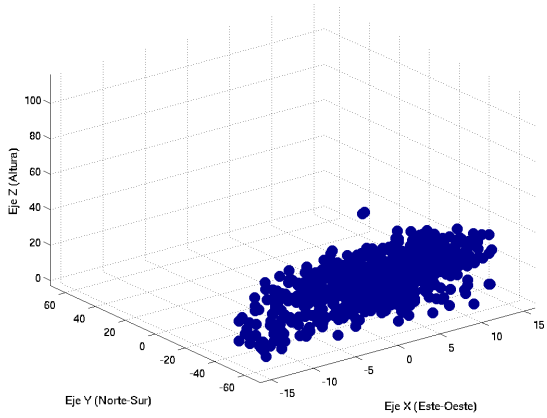
(a)



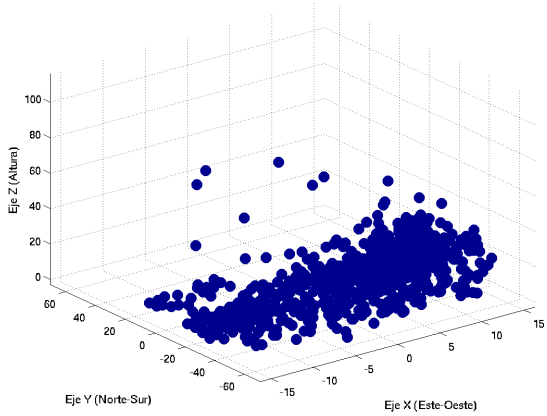
(b)



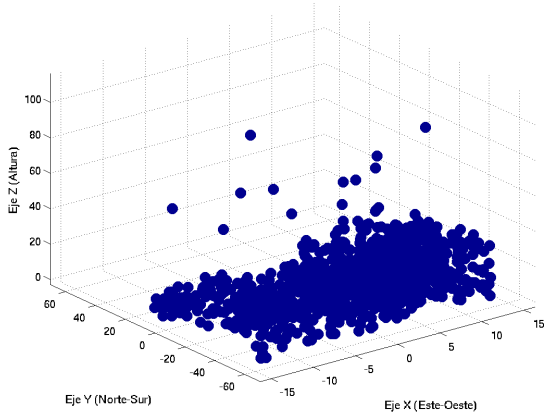
(c)



(d)

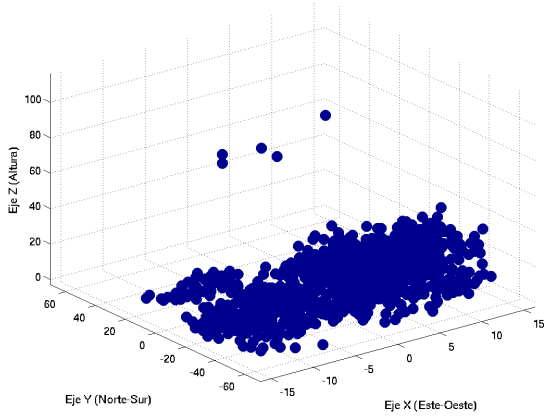


(e)

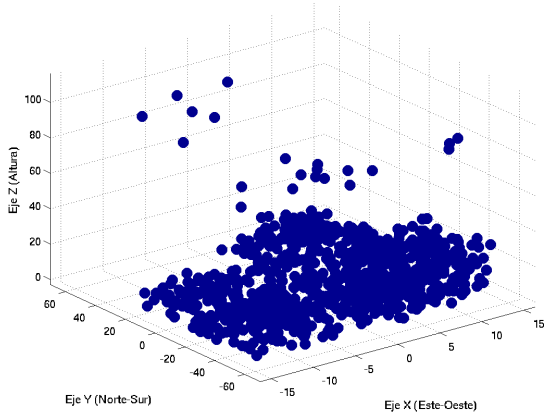


(f)

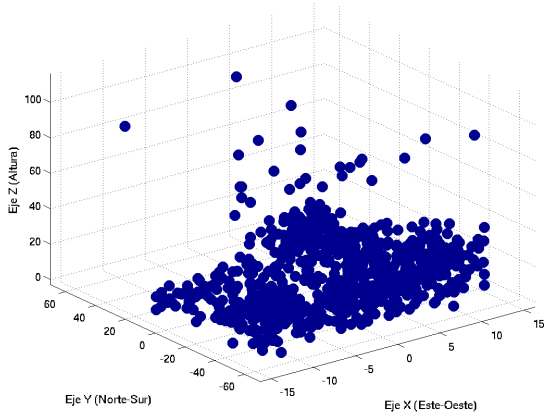
Figura 2.25: Interacciones Pilar Norte, Meses 7-12.



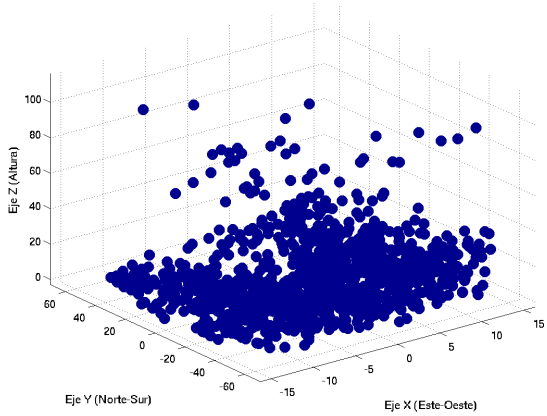
(a)



(b)

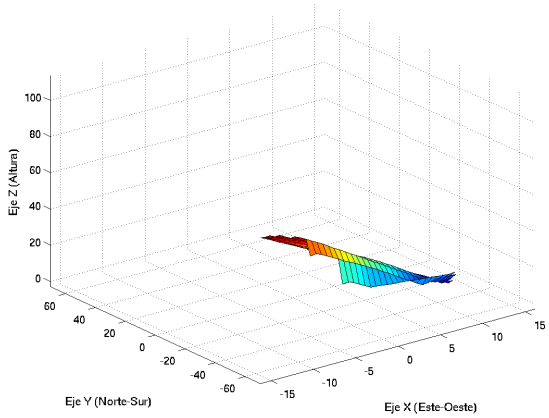


(c)

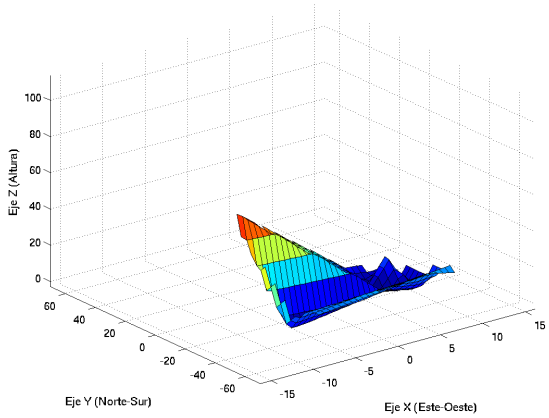


(d)

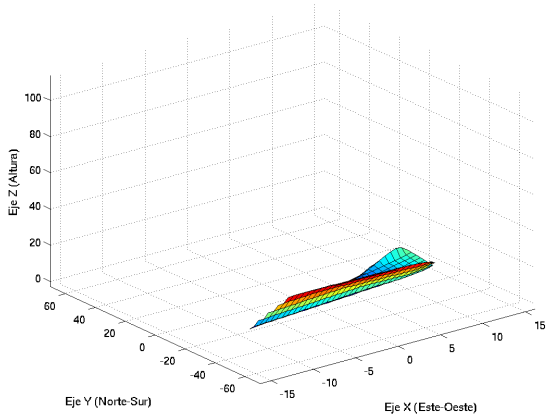
Figura 2.26: Interacciones Pilar Norte, Meses 13-16.



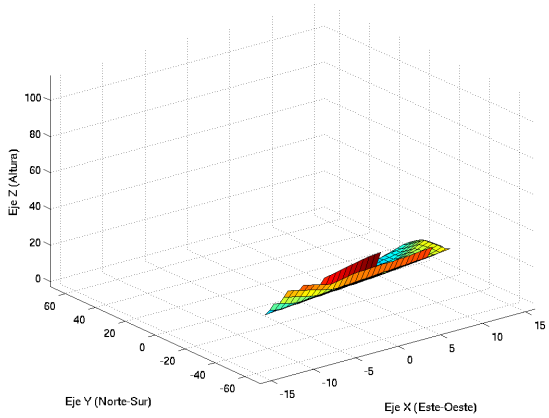
(a)



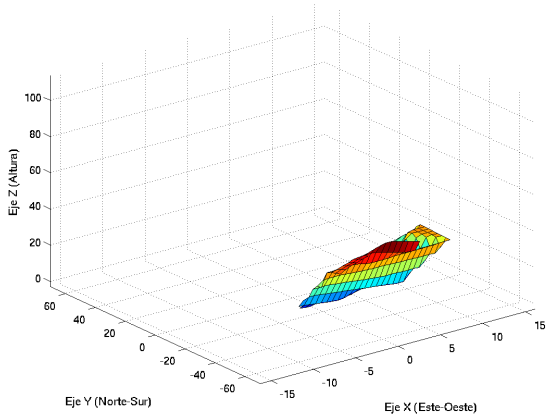
(b)



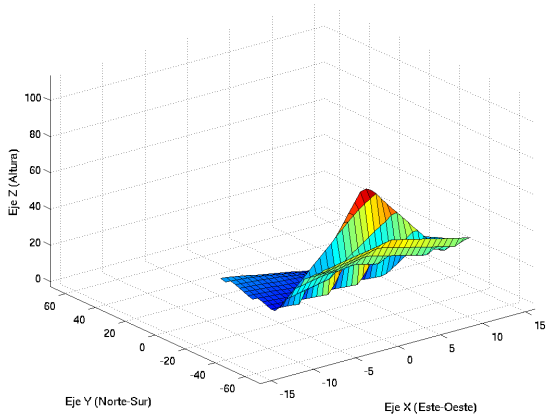
(c)



(d)

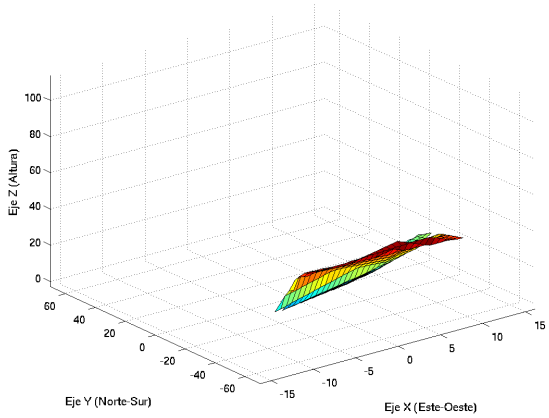


(e)

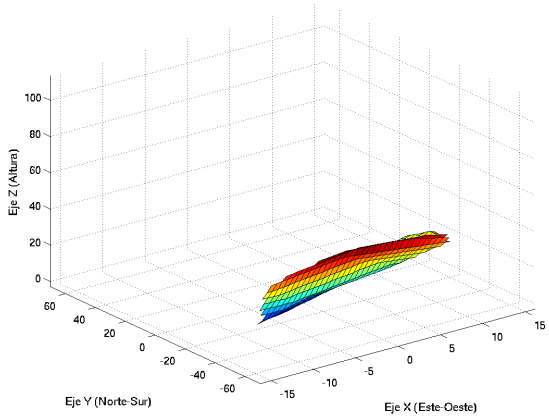


(f)

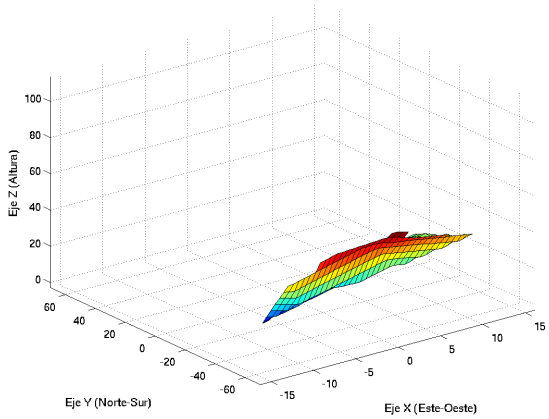
Figura 2.27: Superficie Interacciones Pilar Norte, Meses 1-6.



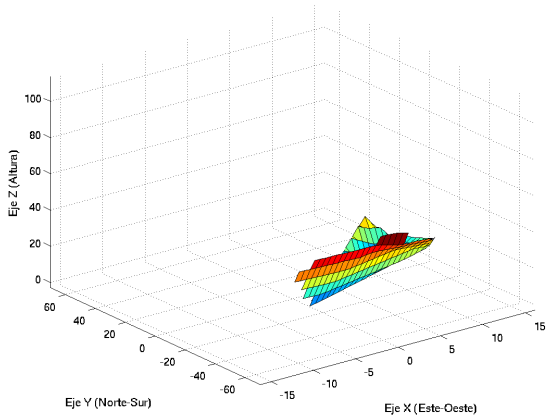
(a)



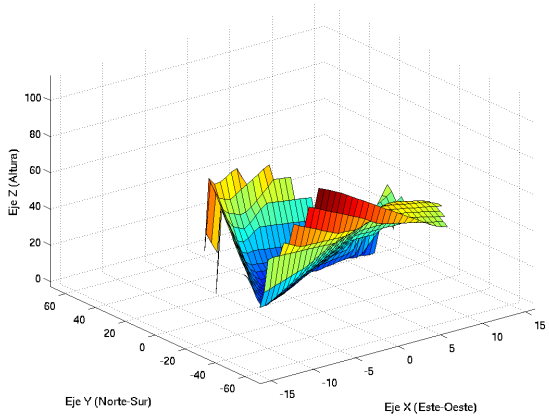
(b)



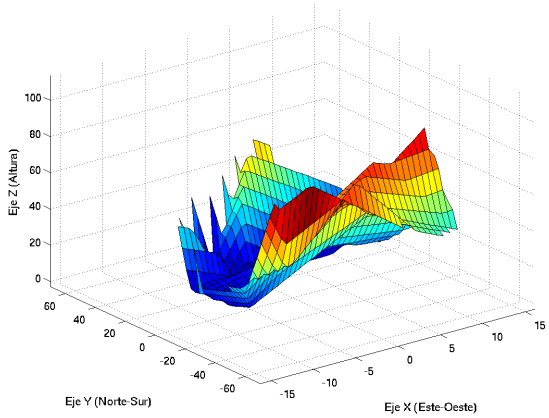
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 2.28: Superficie Interacciones Pilar Norte, Meses 7-12.

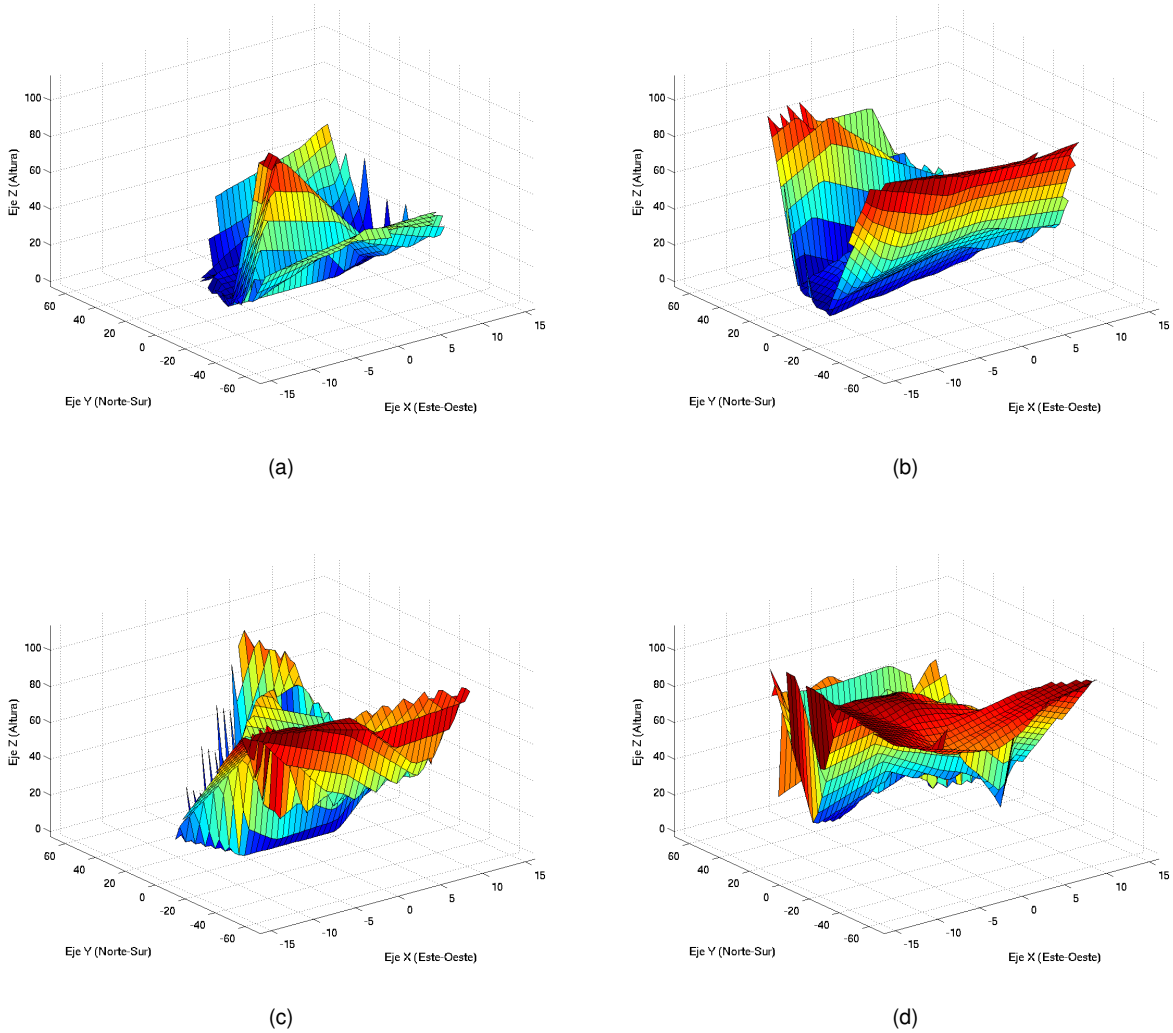


Figura 2.29: Superficie Interacciones Pilar Norte, Meses 13-16.

Análisis de los resultados

Se obtiene una altura de quiebre de aproximadamente 25 [m] en base al criterio de volumen extraído, por otra parte la altura de quiebre alcanzada, utilizando el criterio de cero interacciones, es de alrededor de 80 [m], la diferencia se debe a que este último criterio considera tanto el material fracturado como el extraído por las bateas.

2.4.2. Caso Esemeralda

El ejemplo que se presenta, consiste en datos de extracción 2010-2012.

Input

Los valores de los parámetros mecánicos usados para la simulación son los siguientes:

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
Modulo de Young (E)	56 [GPa]	Resistencia a la Tensión	500 [Pa]
Coeficiente de Poisson (ν)	0.2	Radio de esfera	1.5 [m]
Densidad (ρ)	3648 $\frac{kg}{m^3}$	Desplazaminento Murallas	0.04 [m]
Ángulo de Fricción (ϕ)	$40°$	Desplazamiento Techo	0.08 [m]
Cohesión	500 [MPa]		

El modelo de la Mina Esmeralda tiene dimensiones:

- Alto 80 [m]
- Ancho 80 [m]
- Largo 140 [m]

Output

En las Figuras 2.30 y 2.31 se pueden ver los resultados dada la construcción del volumen extraído.
La superficie de quiebre a partir de los datos anteriores se puede ver en las Figuras 2.32 y 2.33.
Por otra parte en las Figuras 2.34 y 2.35, se pueden ver representados los resultados filtrados por cero interacciones y la superficie construida a partir de dichos datos se puede ver en las Figuras 2.36, 2.37.

Visualización

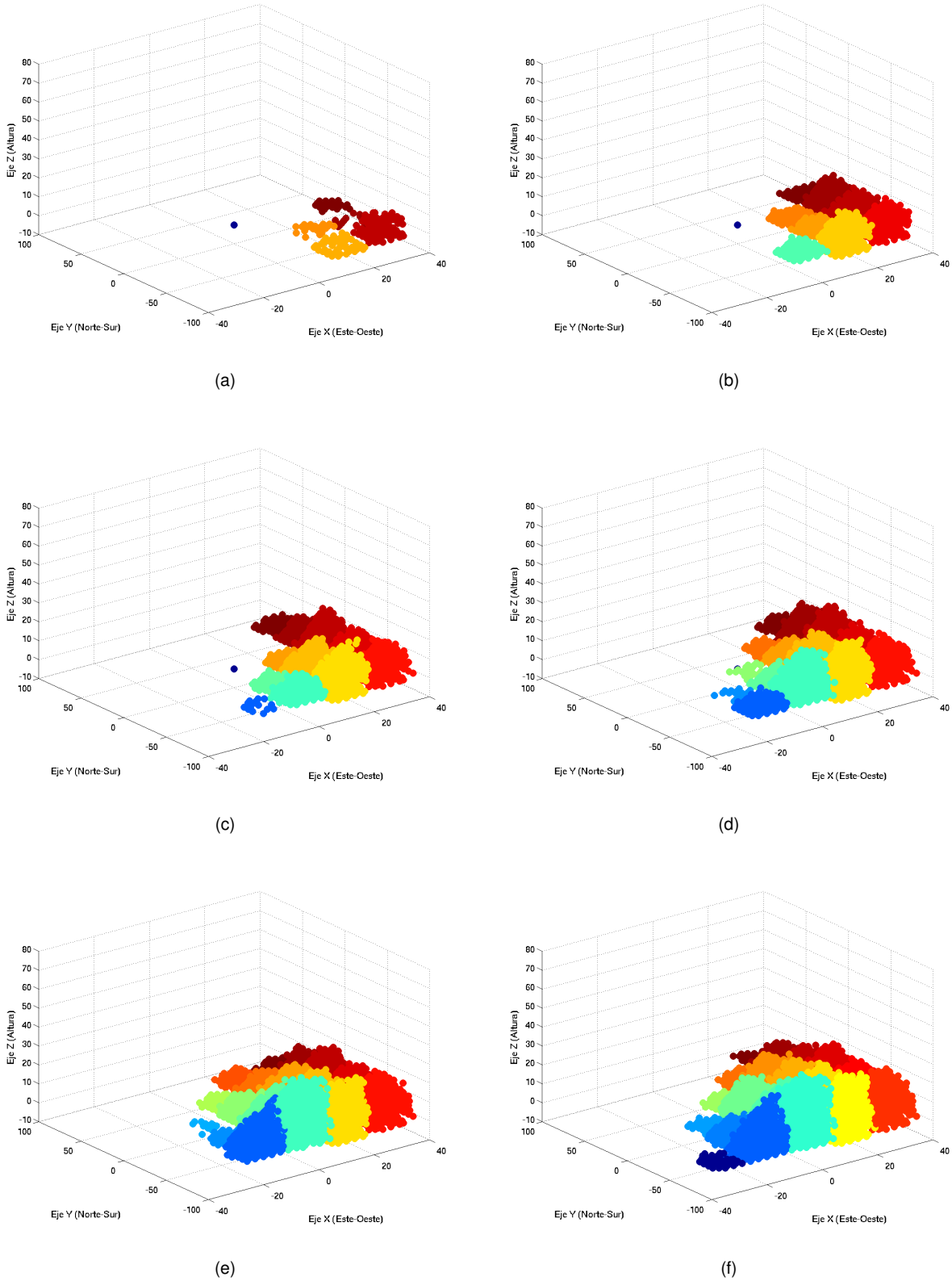
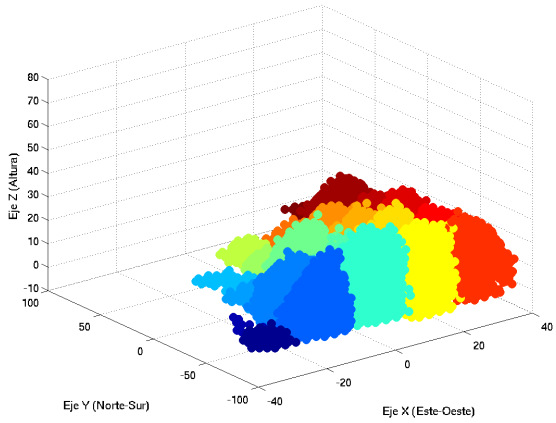
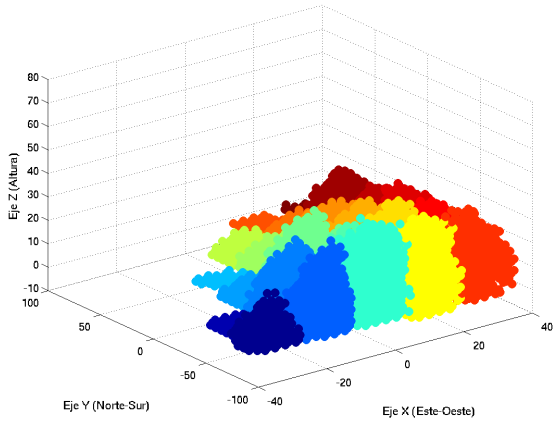


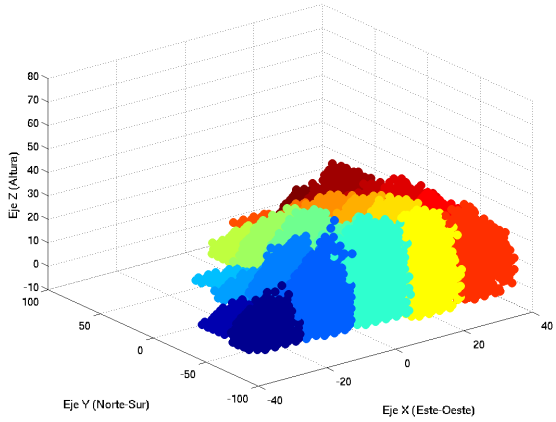
Figura 2.30: Volumen Extraido Esmeralda, Meses 1-6.



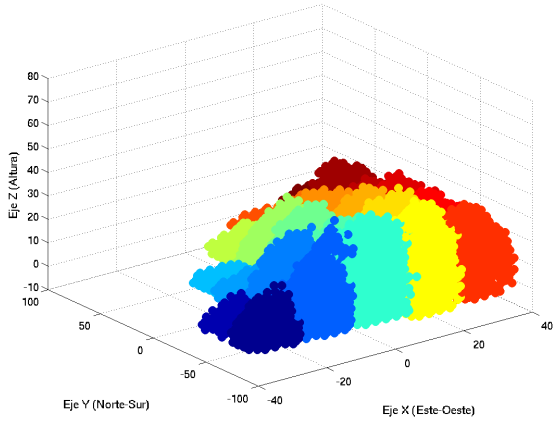
(a)



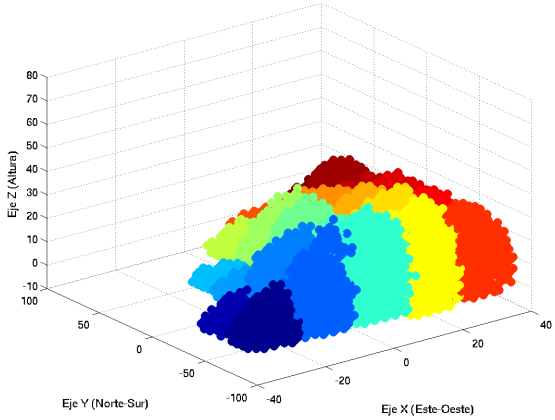
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 2.31: Volumen Extraido Esmeralda, Meses 7-11.

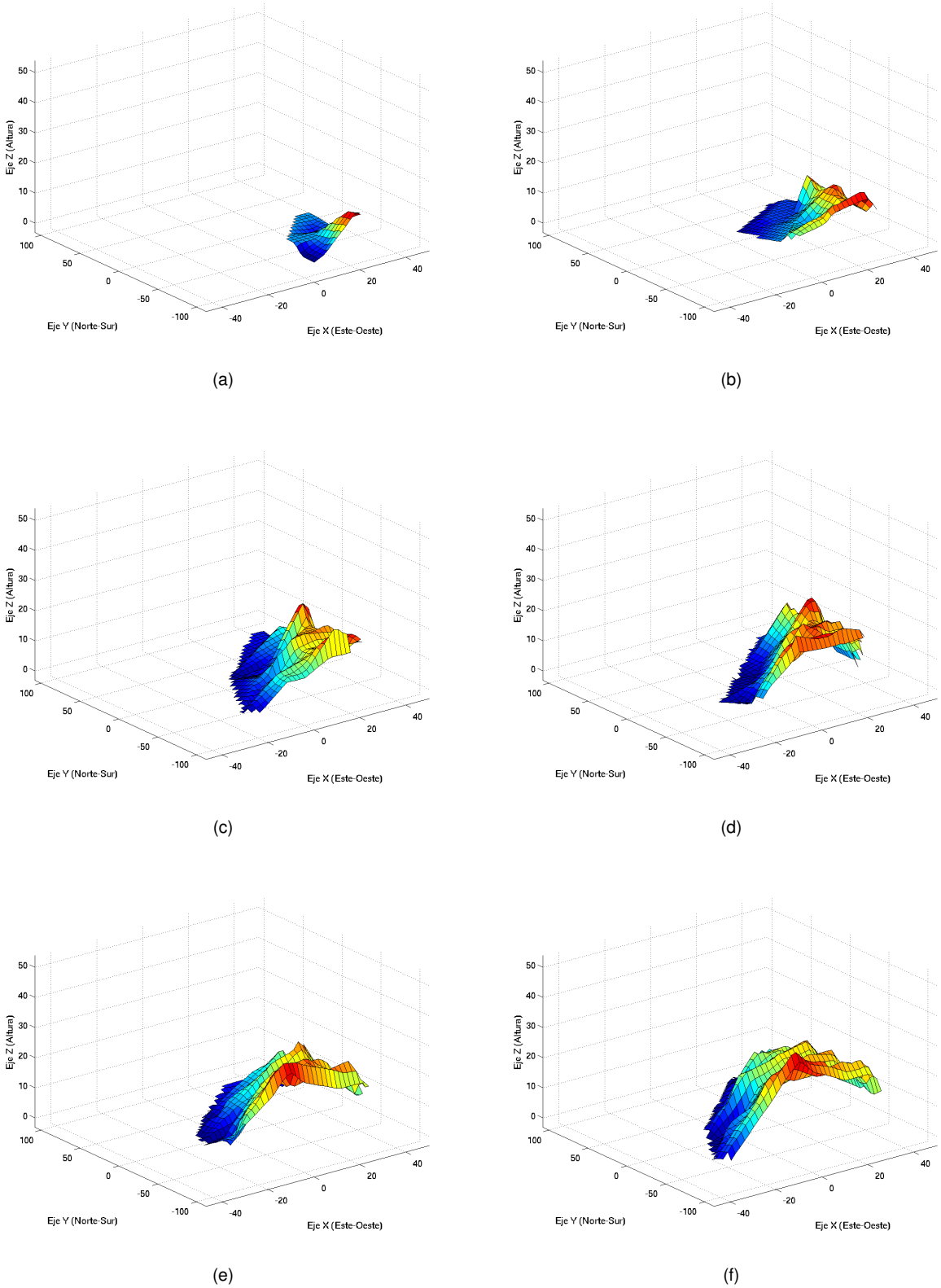
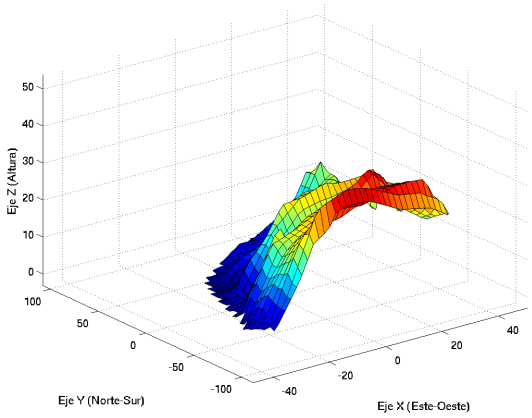
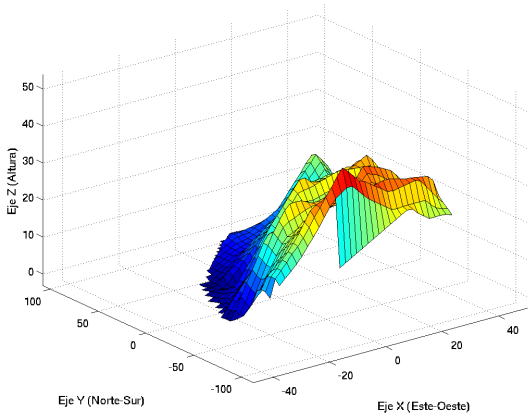


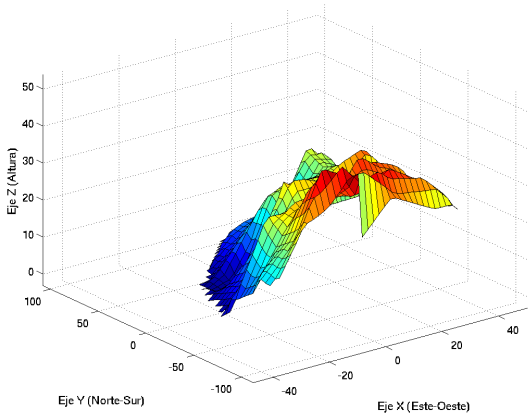
Figura 2.32: Superficie del Volumen Extraido Esmeralda, Meses 1-6.



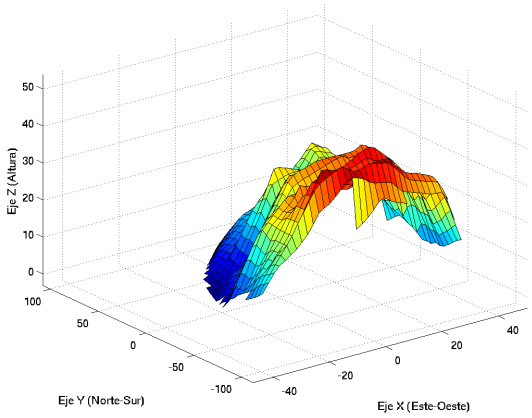
(a)



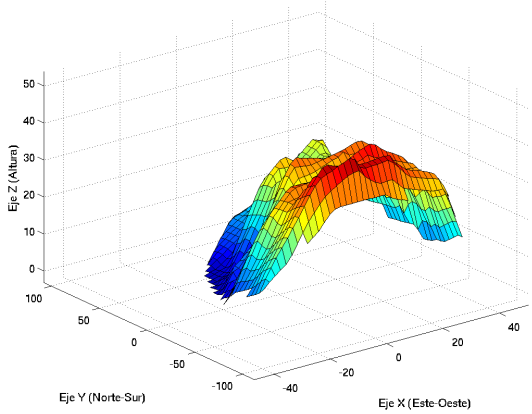
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 2.33: Superficie del Volumen Extraido Esmeralda, Meses 7-11.

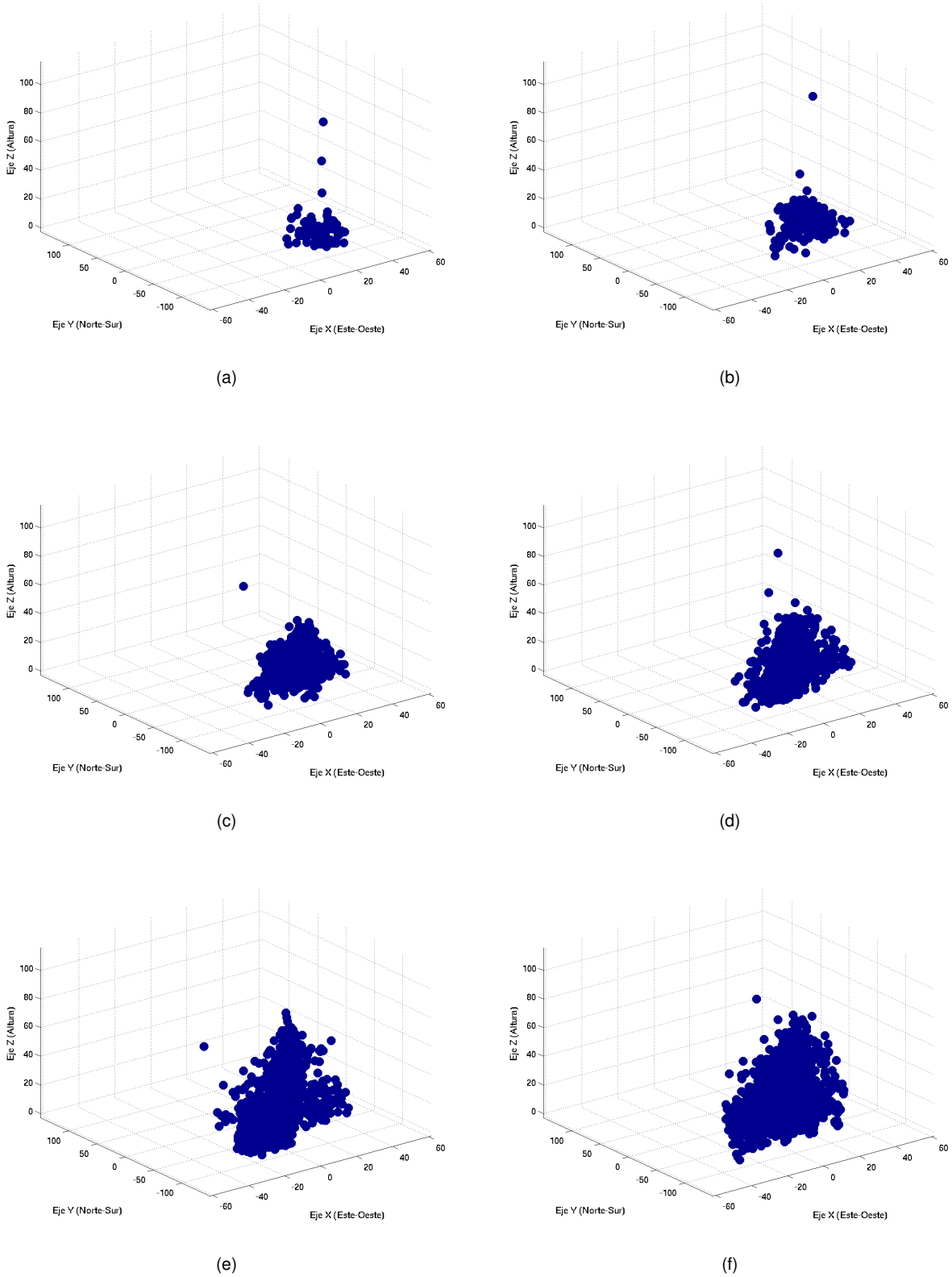
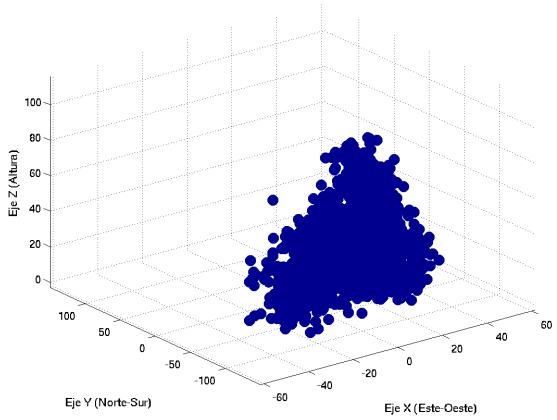
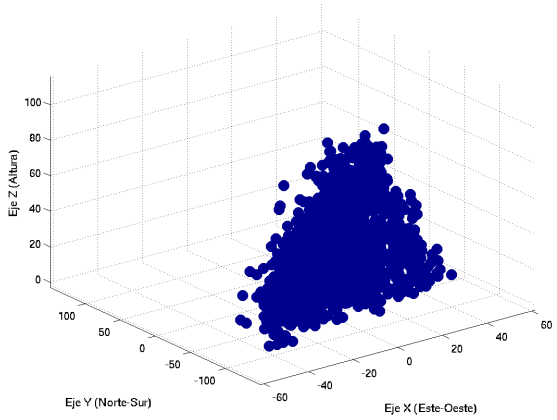


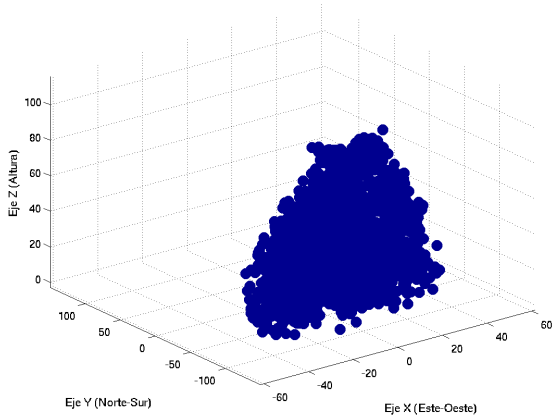
Figura 2.34: Interacciones Esmeralda, Meses 1-6.



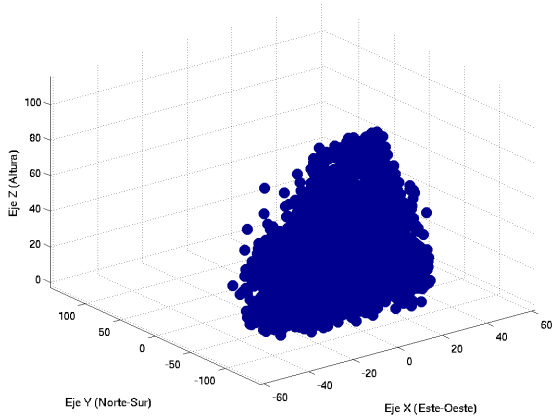
(a)



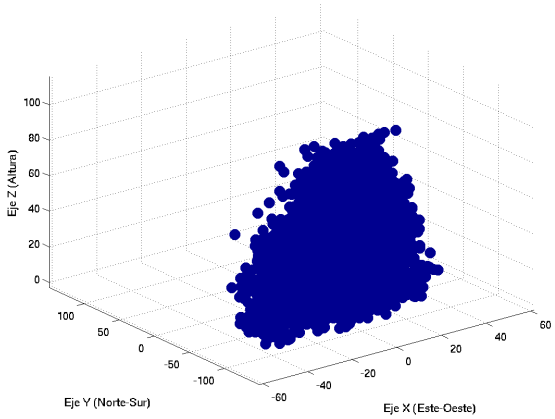
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 2.35: Interacciones Esmeralda, Meses 7-11.

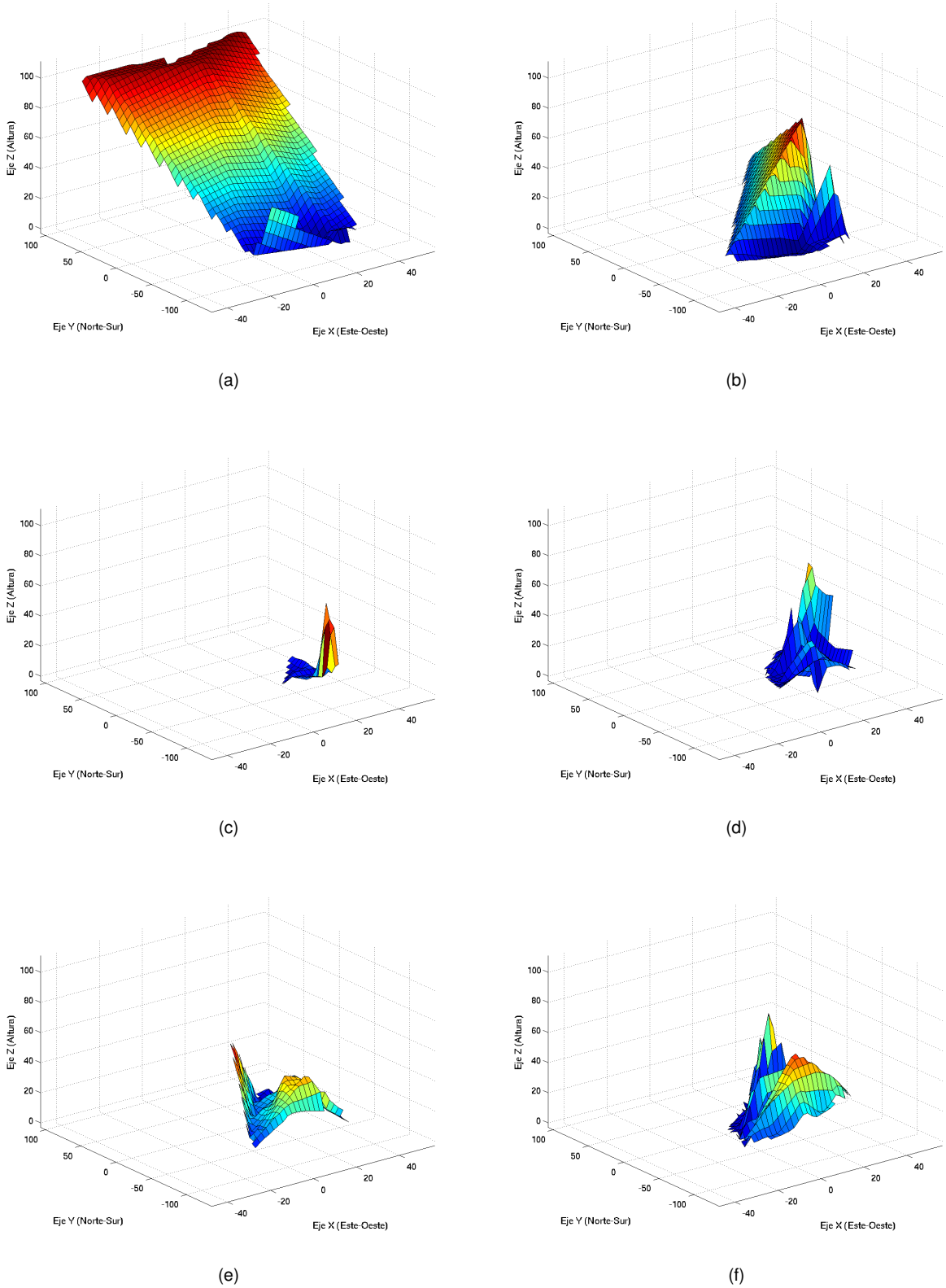
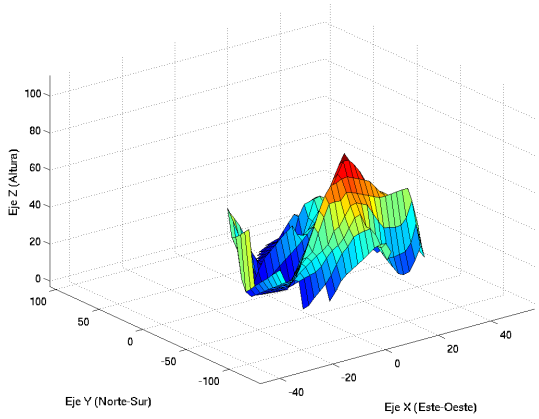
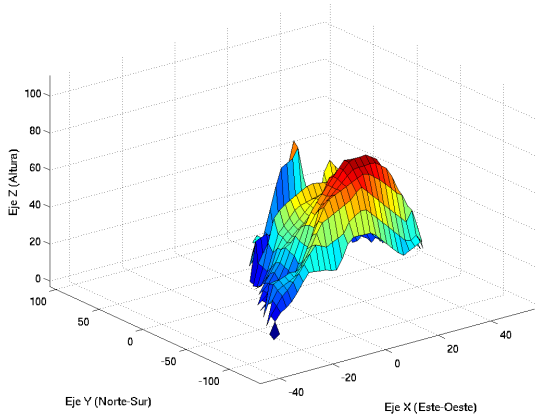


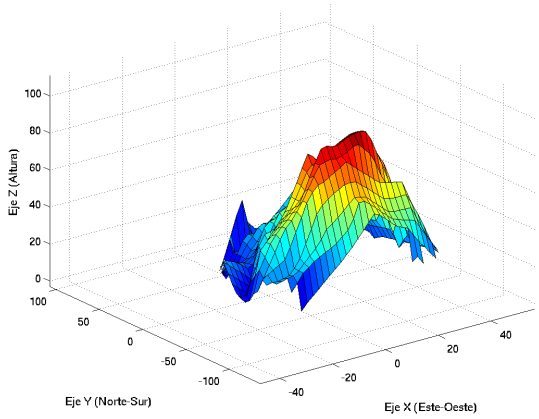
Figura 2.36: Superficie Interacciones Esmeralda, Meses 1-6.



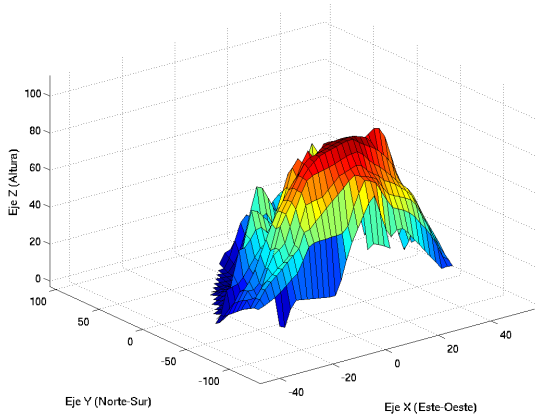
(a)



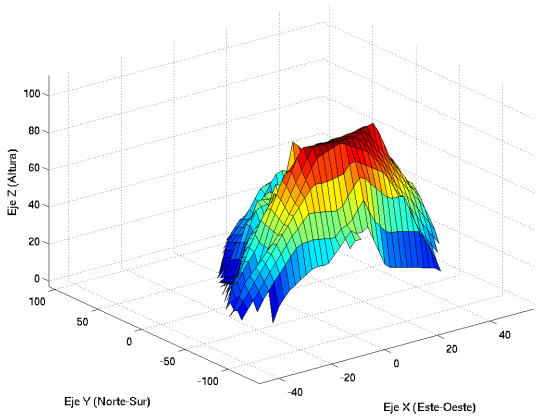
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 2.37: Superficie Interacciones Esmeralda, Meses 7-11.

Análisis de los resultados

Se obtiene una altura de quiebre de aproximadamente 30 [m] en base al criterio de volumen extraído, por otra parte la altura de quiebre alcanzada, utilizando el criterio de cero interacciones, es de alrededor de 60 [m], la diferencia se debe a que este último criterio considera tanto el material fracturado como el extraído por las bateas.

2.4.3. Caso Diablo Regimiento

El ejemplo que se presenta, consiste en datos de extracción 2005-2006.

Input

Los valores de los parámetros mecánicos usados para la simulación son los siguientes:

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
Modulo de Young (E)	56 [GPa]	Resistencia a la Tensión	500 [Pa]
Coeficiente de Poisson (ν)	0.2	Radio de esfera	1.5 [m]
Densidad (ρ)	3648 $\frac{kg}{m^3}$	Desplazaminento Murallas	0.04 [m]
Ángulo de Fricción (ϕ)	$40°$	Desplazamiento Techo	0.08 [m]
Cohesión	500 [MPa]		

El modelo de la Mina Diablo Regimiento tiene dimensiones:

- Alto 80 [m]
- Ancho 215 [m]
- Largo 660 [m]

Output

En las Figuras 2.38, 2.39 y 2.40 se pueden ver los resultados dada la construcción del volumen extraído. La superficie de quiebre a partir de los datos anteriores se puede ver en las Figuras 2.41, 2.42 y 2.43. Por otra parte en las Figuras 2.44, 2.45 y 2.46, se pueden ver representados los resultados filtrados por cero interacciones y la superficie construida a partir de dichos datos se puede ver en las Figuras 2.47, 2.48 y 2.49.

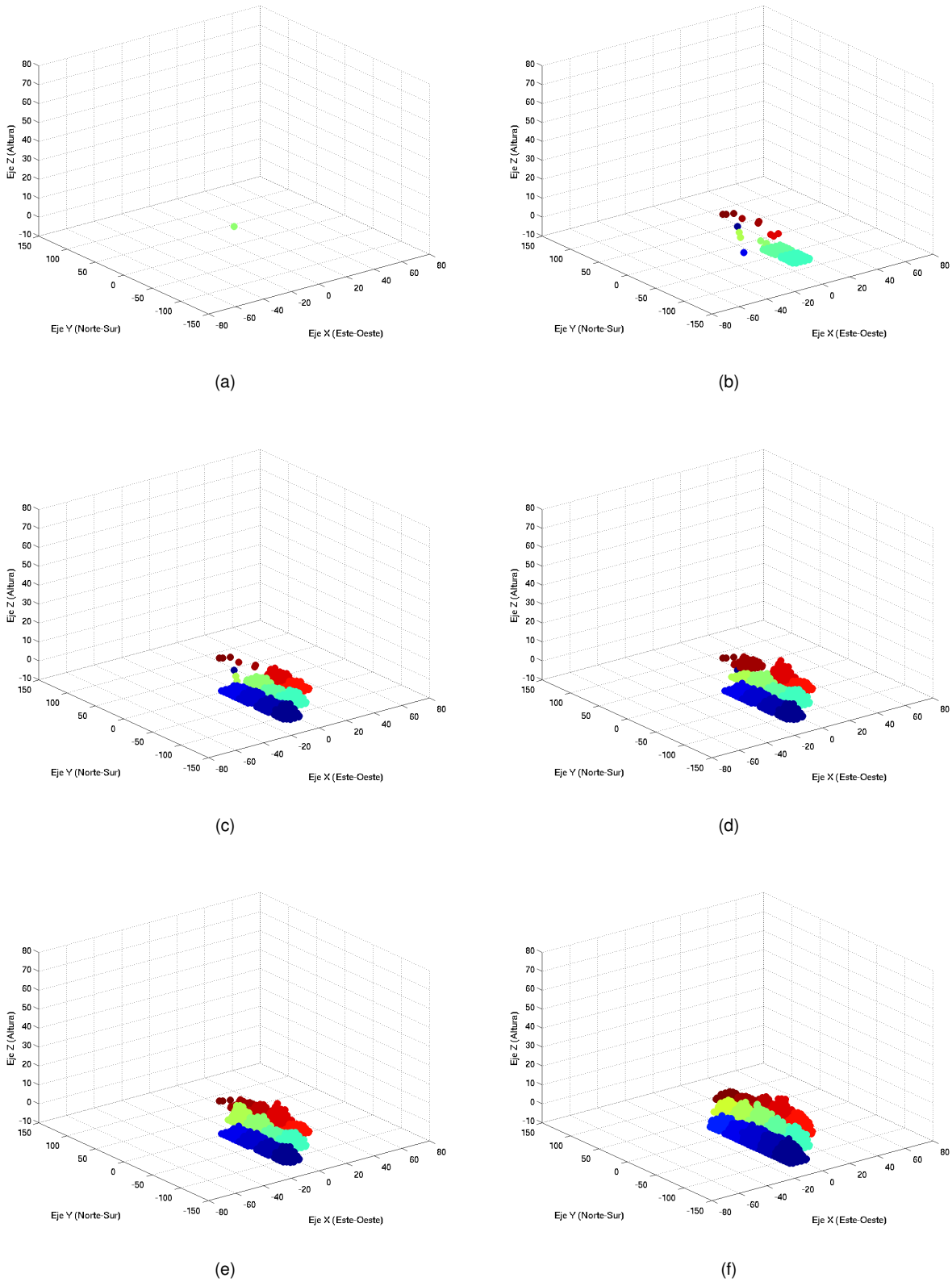


Figura 2.38: Volumen Extraido Diablo Regimiento, Meses 1-6.

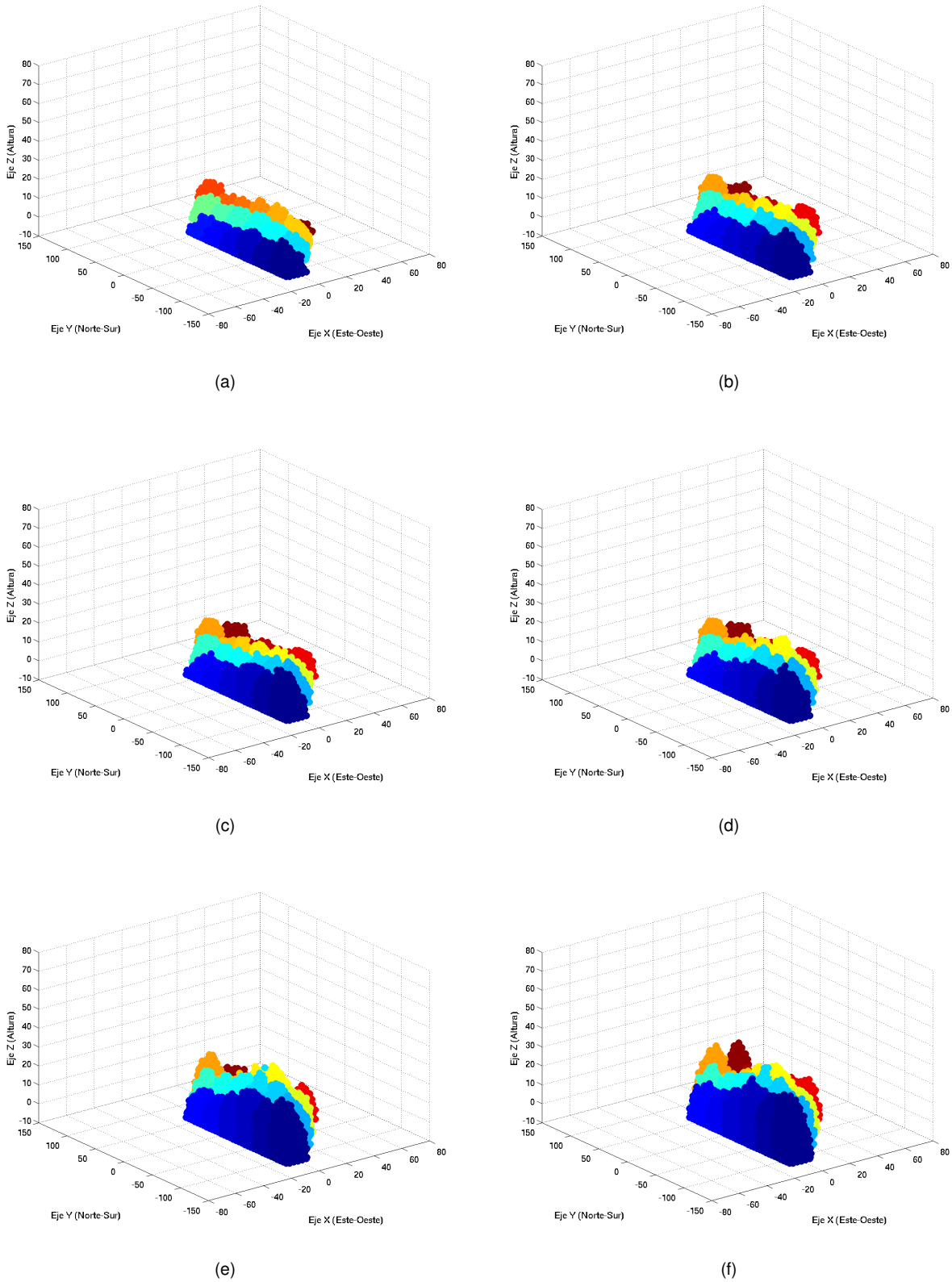
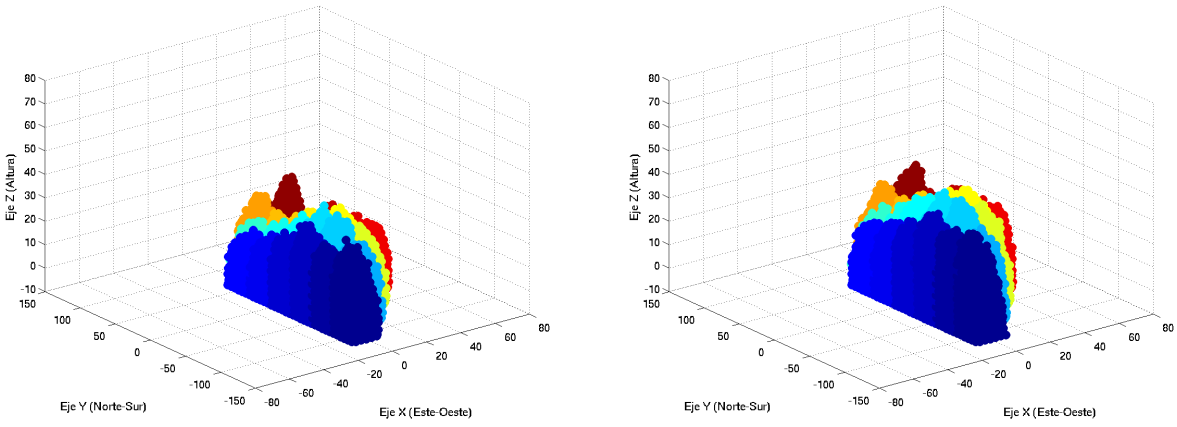


Figura 2.39: Volumen Extraido Diablo Regimiento, Meses 7-12.



(a) (b)

Figura 2.40: Volumen Extraido Diablo Regimiento, Meses 13-16.

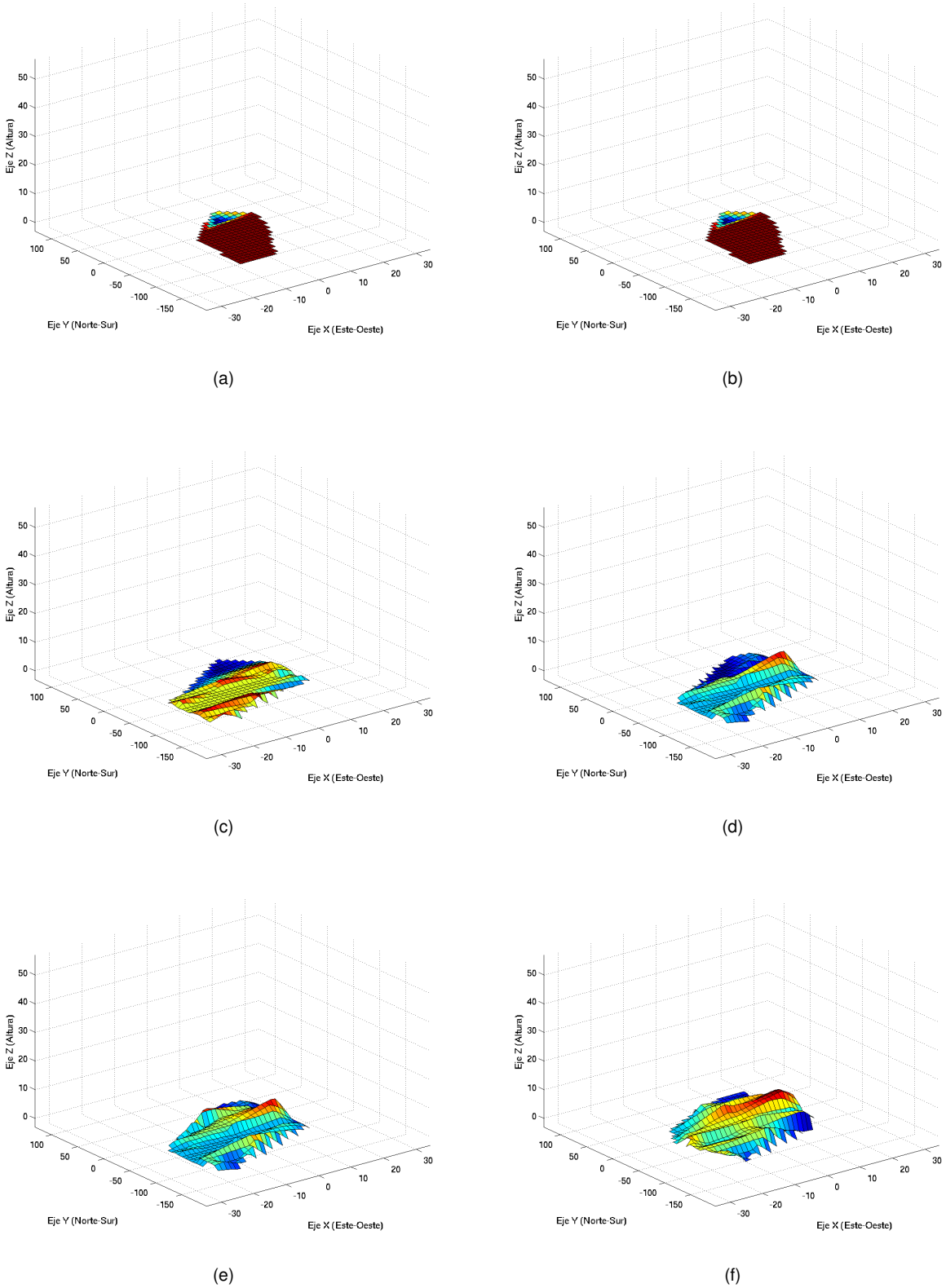
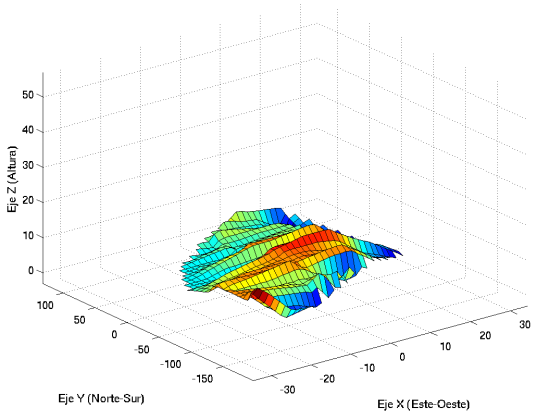
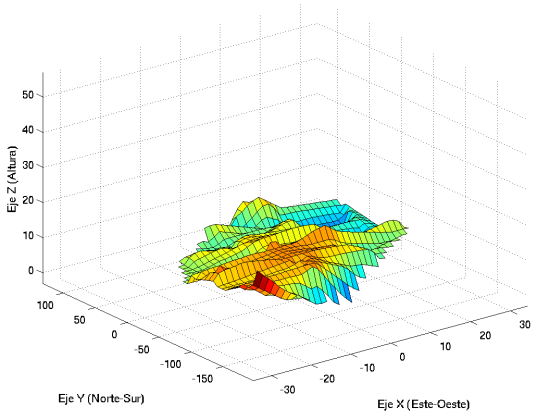


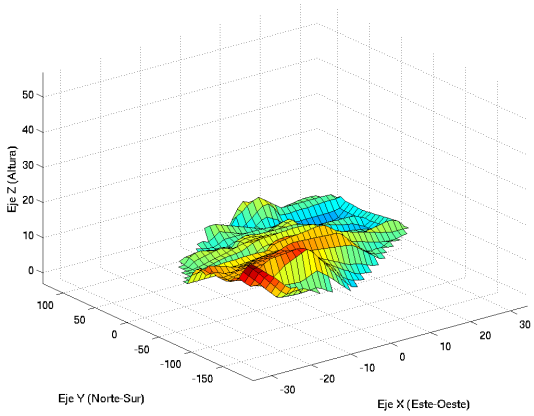
Figura 2.41: Superficie del Volumen Extraido Diablo Regimiento, Meses 1-6.



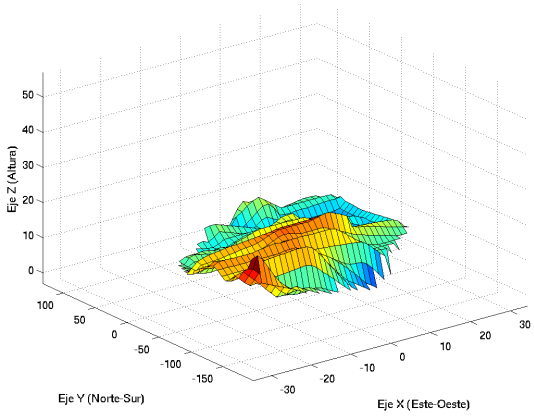
(a)



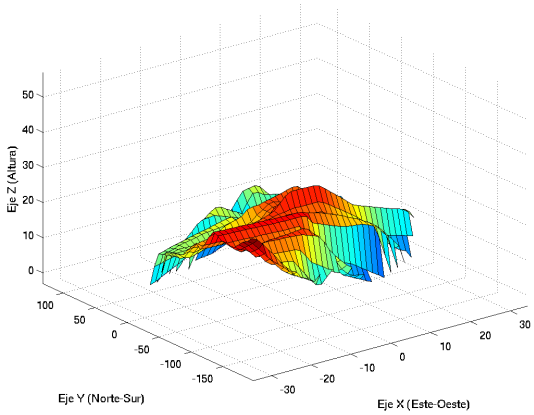
(b)



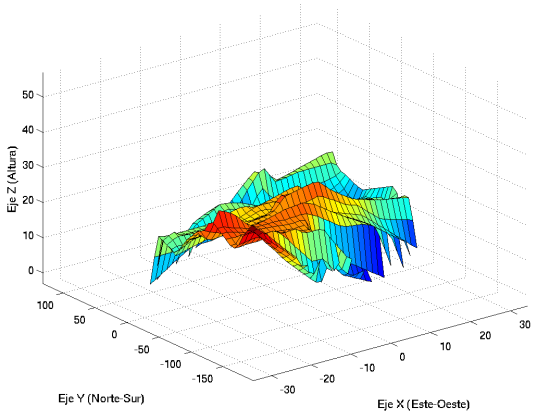
(c)



(d)

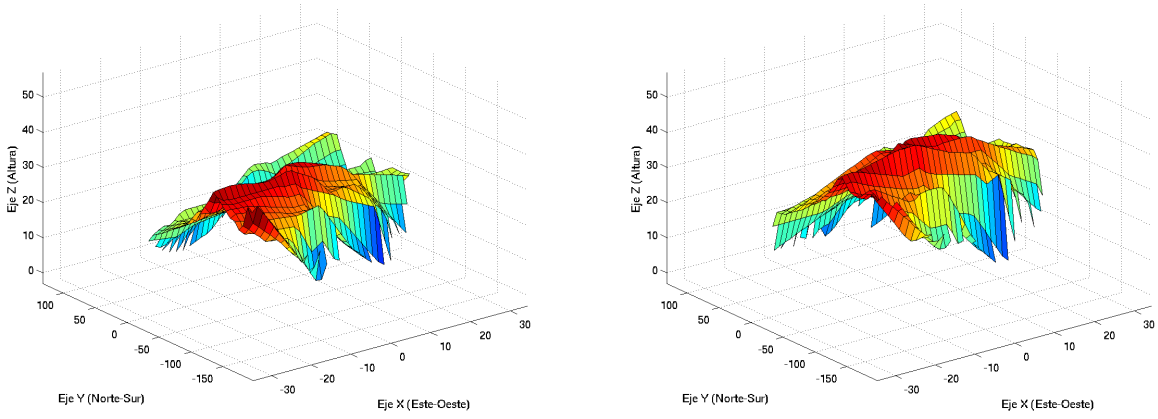


(e)



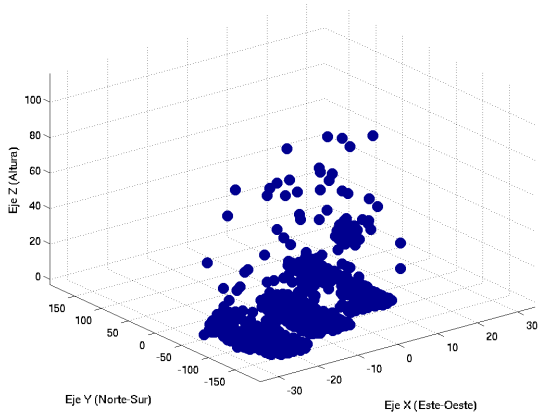
(f)

Figura 2.42: Superficie del Volumen Extraido Diablo Regimiento, Meses 7-12.

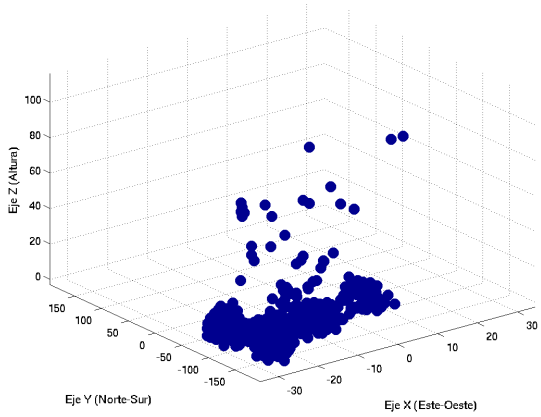


(a) (b)

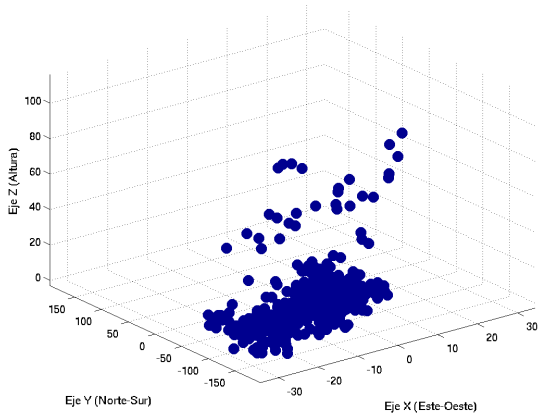
Figura 2.43: Superficie del Volumen Extraido Diablo Regimiento, Meses 13-16.



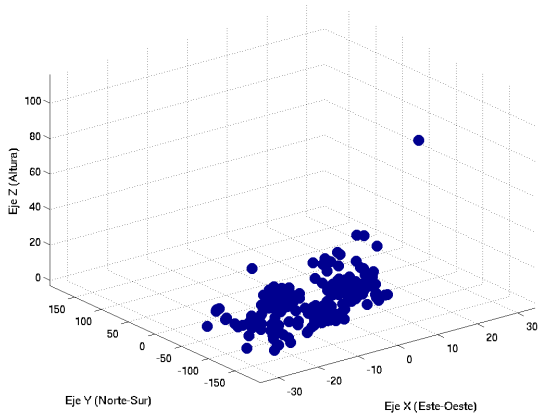
(a)



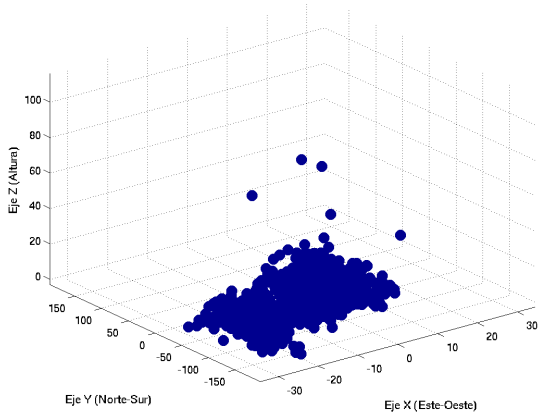
(b)



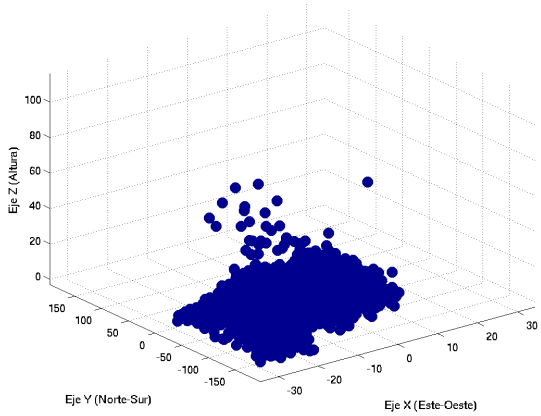
(c)



(d)

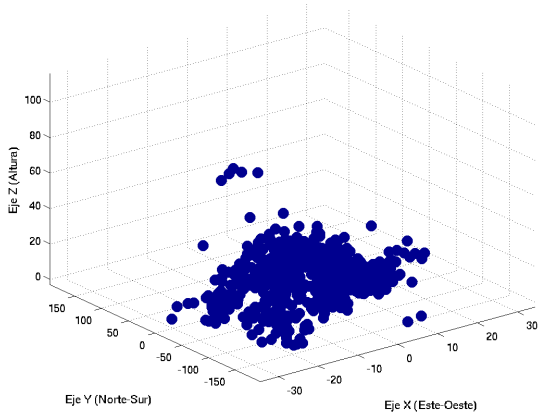


(e)

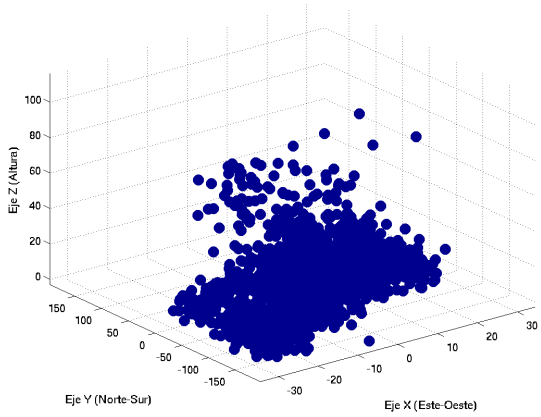


(f)

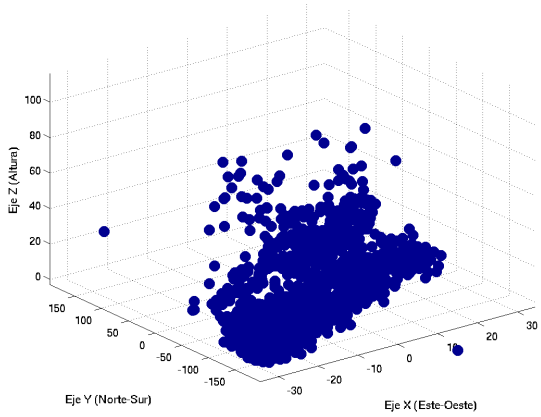
Figura 2.44: Interacciones Diablo Regimiento, Meses 1-6.



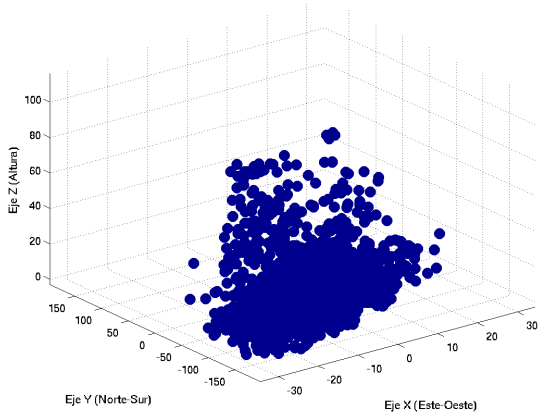
(a)



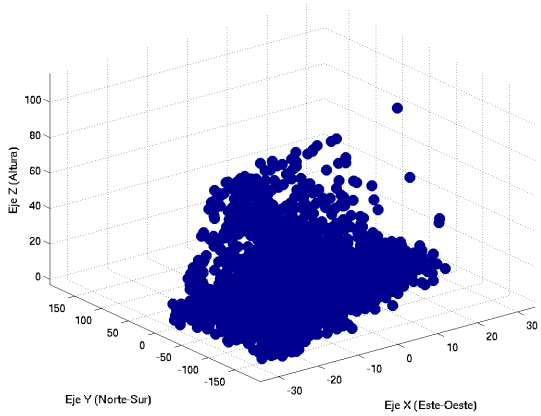
(b)



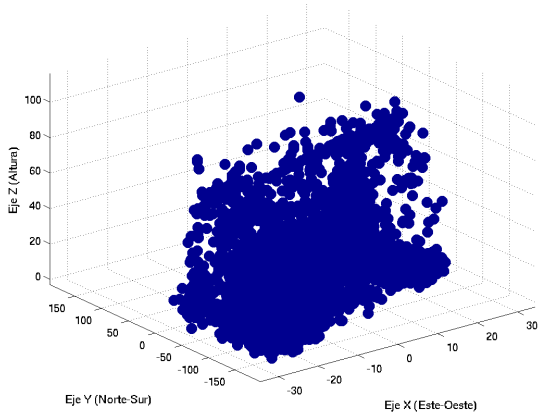
(c)



(d)

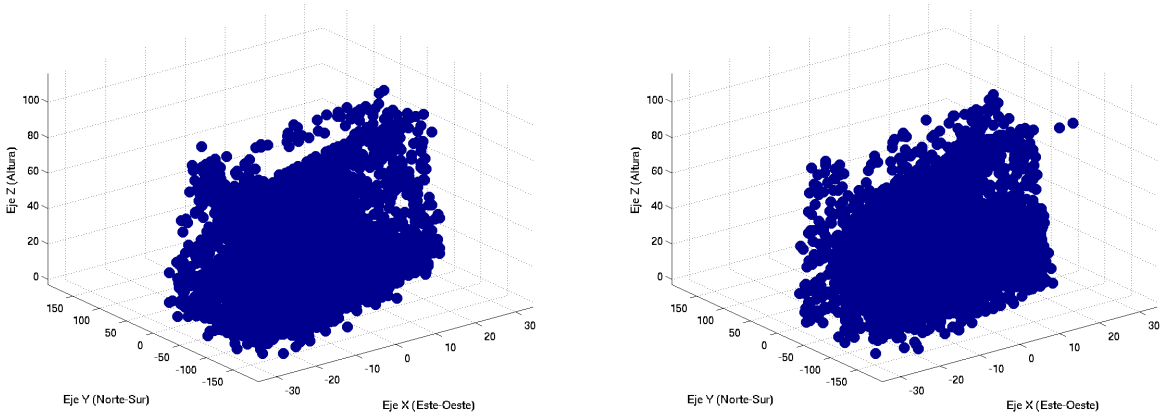


(e)



(f)

Figura 2.45: Interacciones Diablo Regimiento, Meses 7-12.



(a) (b)

Figura 2.46: Interacciones Diablo Regimiento, Meses 13-16.

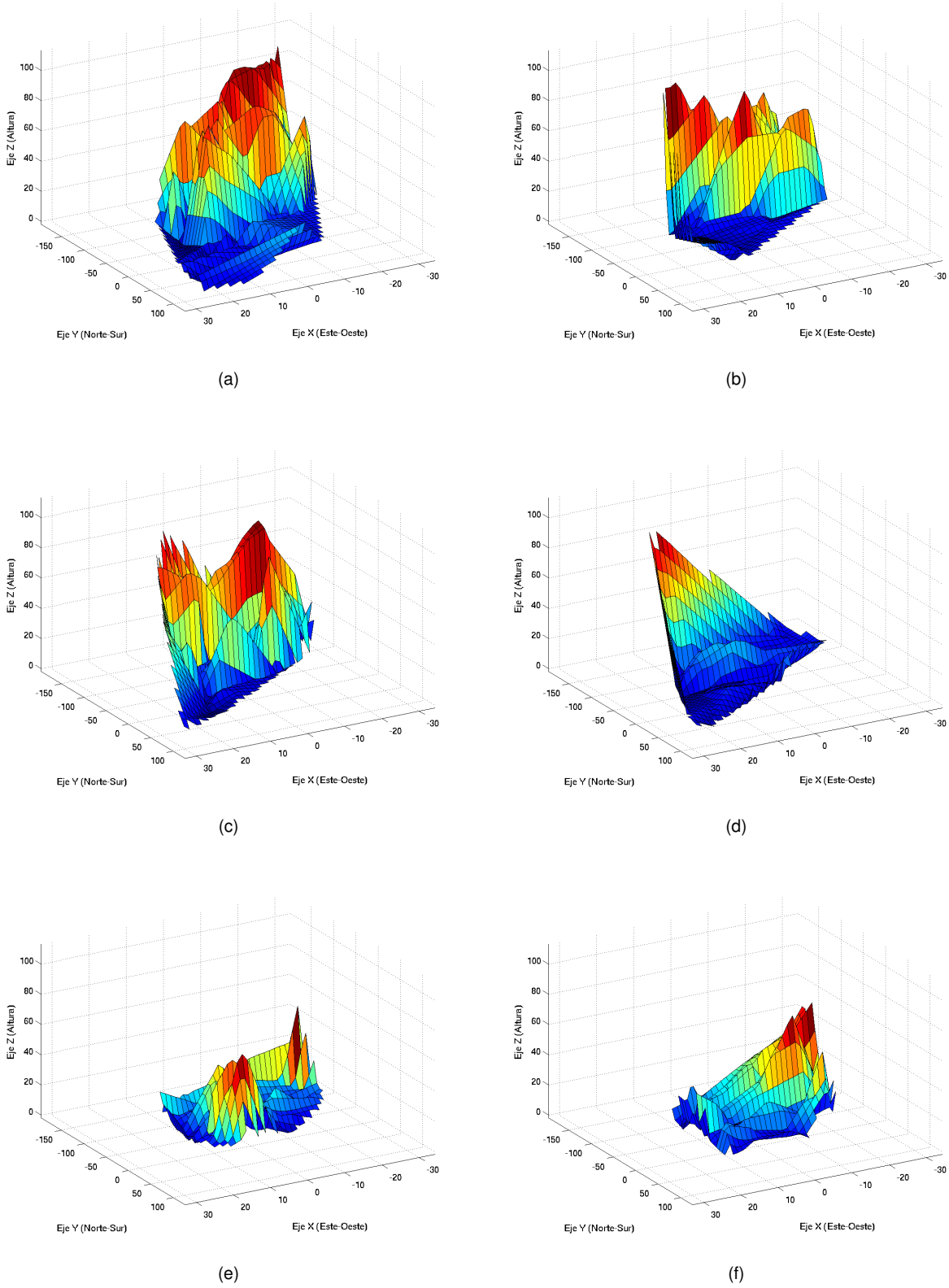


Figura 2.47: Superficie Interacciones Diablo Regimiento, Meses 1-6.

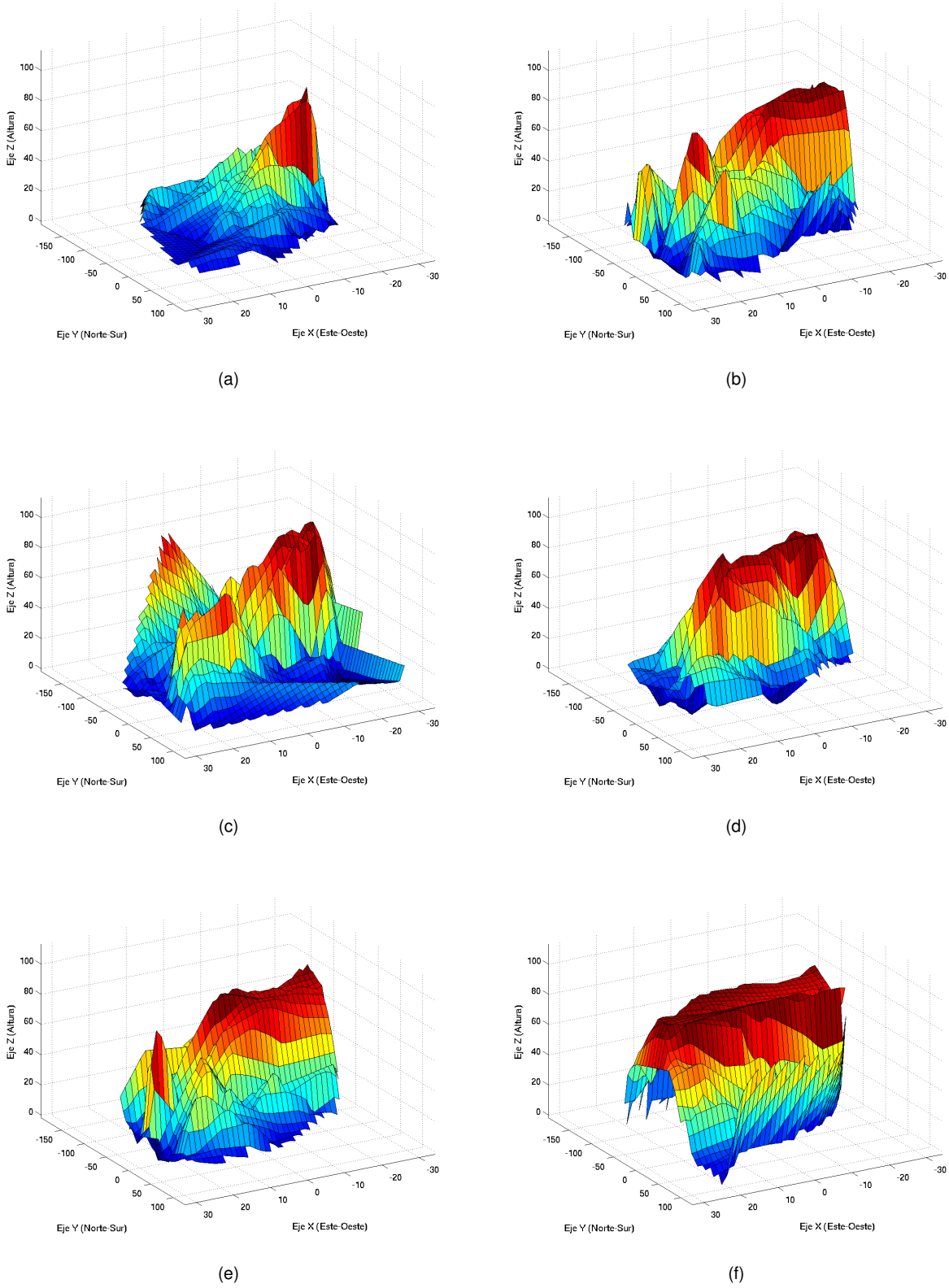
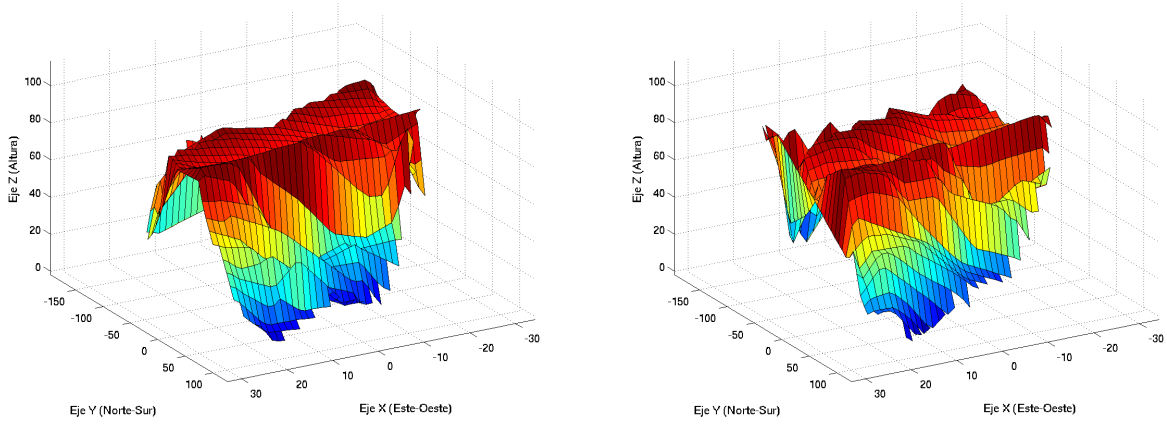


Figura 2.48: Superficie Interacciones Diablo Regimiento, Meses 7-12.



(a) (b)

Figura 2.49: Superficie Interacciones Diablo Regimiento, Meses 13-16

Análisis de los resultados

Se obtiene una altura de quiebre de aproximadamente 25 [m] en base al criterio de volumen extraído, por otra parte la altura de quiebre alcanzada, utilizando el criterio de cero interacciones, es de alrededor de 70 [m], la diferencia se debe a que este último criterio considera tanto el material fracturado como el extraído por las bateas.

2.5. Resultados Generales

La modelación DEM presentada en este trabajo permite reproducir de manera tolerable los esfuerzos producidos en el modelo de flujo gravitacional. El modelo es aplicable a todo tipo de suelo cuyo estructura granular se encuentre saturada de aire, no se considero el grado de saturación por agua ya que los modelos constitutivos que los incorporan son escasos y complejos. La mayor barrera de la modelación corresponde a la imposibilidad de lograr la granulometría del material granular utilizado en las corridas del software, dada la cantidad de partículas que se requieren generar y la posición que estás deben ocupar , lo que instaura un desafío al desarrollo futuro del software. Por otro lado, la manera rápida de modelar y procesar los datos permite analizar nuevos escenarios con diversas propiedades mecánicas, geométricas, condiciones de borde y condiciones iniciales. La validación de los resultados se puede efectuar a través de la medición de subsidencia en la mina.
La ejecución del los codigos ha sido realizada particularmente en una computadora de escritorio con procesador core 2 Duo, 3,16 GHZ, 4GB de RAM, versión 9.10 Ubuntu para el caso de Pilar Norte, cuyo tiempo de ejecución es de no más de 2 días. Para los casos de Mina Esmeralada y Diablo Regimiento el codigo se ha ejecutado en cluster syntagma, dado que el tiempo consumido en una computadora corriente sobre pasan los umbrales aceptables, y en este se ve reducido a alrededor de 1,5 a 2 semanas, en función de la cantidad de volumen a extraer.

2.6. Extensiones futuras

- Incorporar modelo de extracción por geometría Voronoi para determinar una superficie de la cavidad resultante.
- Incorporar granulometría al arreglo de esferas rígidas, como también modelar singularidades del macizo rocoso.
- Incorporar aspectos de la geometría Mina

2.7. Manual de Uso

1. Requesitos necesarios

   Para la compilación de Yade necesita lo siguiente:

   El codigo fuente de Yade esta bajo licencia GNU GPL, y es la fuente primaria de distribucion del software, y por ende, es necesario compilarlo para producir los ejecutables para realizar las simulaciónes.

   El primer paso de la compilacion de Yade es descargar el codigo fuente. La ultima version se puede descargar usando git:

   ```
   git clone git://github.com/yade/trunk.git
   ```

Dentro del repositorio SVN del proyecto estan empaquetados 2 checkouts de Yade, que corresponden a las versiones usadas para los resultados de este proyecto. Debido a cambios en el API de Yade, es posible que futuras versiones requieran cambios en el codigo. Estos paquetes estan almacenados en *external/yade*.

Para compilar Yade, se requieren las siguientes dependencias:

- Ubuntu
- SCONS (Sistema de compilacion)
- GCC y G++, idealmente GCC 4.2 o mayor.
- Boost 1.35 o mayor.
- Qt3 y Qt4.
- Freeglut3.
- libQGLViewer.
- python, numpy, ipython.
- matplotlib.
- Eigen2 (Libreria de Algebra Lineal)
- GDB
- SQLite 3.x
- Libreria Loki.
- Libreria VTK.
- log4cxx

Una vez instaladas, se desempaqueta o descarga el codigo fuente de Yade, y en un terminal, se ejecuta el comando:

```
scons PREFIX=/camino/donde/se/instalara/yade
```

Algunas opciones utiles que se le puedan pasar por linea de comando a scons son:

PREFIX Prefijo de instalacion de Yade, es una carpeta, y dentro de esa carpeta se copiaran los archivos binarios de Yade.

CPPPATH Es un path en el formato PATH estandar de UNIX, el cual contiene carpetas include adicionales para las librerias C++ requeridas.

LIBPATH Es un path en el formato PATH estandar de UNIX, el cual contiene carpetas a buscar por librerias.

QT4DIR Es la carpeta base donde esta instalado Qt4.

La compilacion de Yade toma algunas horas, y una cantidad considerable de memoria RAM (aproximadamente 4-6 GB). Una vez ejecutado scons exitosamente, Yade estara compilado y listo para usarse. Automaticamente se copian los archivos a la carpeta indicada por el parámetro *PREFIX*. Normalmente se agrega la carpeta *PREFIX/bin* al PATH de UNIX para ejecutarlo directamente en un terminal.

2. Pre-procesamientos de Datos

   Datos de extracción diaria Mina en extensión .csv ordenados en 4 columnas como se muestra en el ejemplo a continuación:

```
Identificador Mina   Punto Extraccion  Formato Fecha     Tonelaje
        PI              00_00H           15-sep-10        1086
```

Figura 2.50: Formato datos crudos Codelco

Desde la Terminal ejecutar script en lenguaje python

```
Primero
./generarDatosPorMes.py  ArchivoEntrada ArchivoSalida
```

donde

ArchivoEntrada= Formato y extensión figura 2.50

ArchivoSalida=ExtrMina.csv

Luego

```
./importarDatosExtraccion.py  ArchivoEntrada ArchivoSalida
donde
ArchivoEntrada=Extr{Mina}.csv
ArchivoSalida=Extr-{Mina}.csv
```

Creado Extr-Mina.csv, el siguiente paso es modificar script python bc-testFormato.py como se muestra en la figura 2.51.

```
bateas = BateaContainer(outputFolder ={ "/home/local/{usuario}/datos
bateas.cargarCSV("extr-{Mina}.csv")
```

Figura 2.51: Modificar Código bc-testFormato.py

3. Ejecución Computadora de Escritorio

   Al ejecutar en una computadora de Escritorio se puede visualizar el modelo a través de la interfaz gráfica de Yade, como se observa en la figura 2.52.

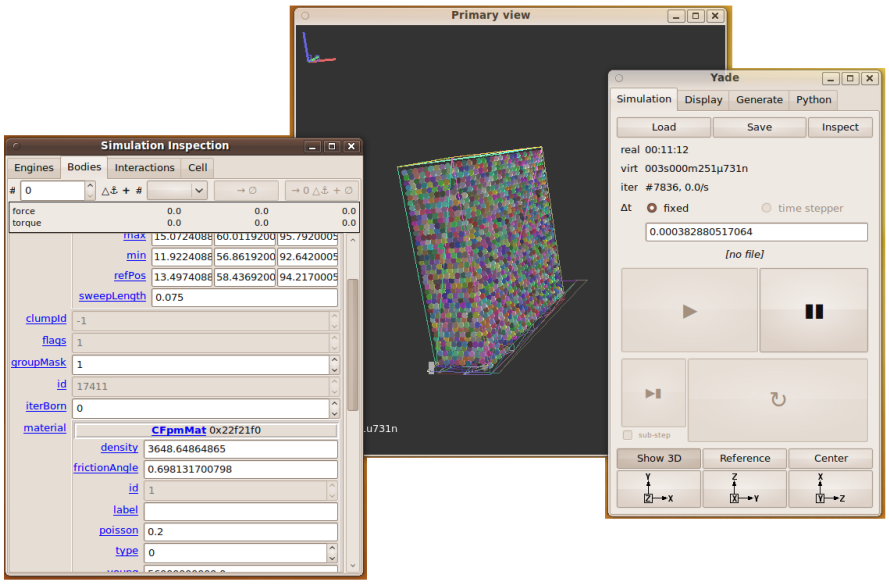


Figura 2.52: Interfaz Gráfica. Fuente Modelación Pilar Norte.

4. Ejecución en el Cluster SYNTAGMA

   El cluster usado para las pruebas del proyecto se llama Syntagma (syntagma.cmm.uchile.cl). Se usa principalmente para ejecutar simulaciónes de gran tamaño, debido a su gran capacidad de computo (12 nucleos) y almacenamiento en memoria (24 GB).

   Para ejecutar trabajos en el Cluster, es necesario preparar un script en Bash que permite que el sistema de cola (Oracle Grid Engine) ejecute el trabajo. El script es el que se puede ver en la Figura 2.53.

```
#$ -cwd
#$ -j n
#$ -notify
#$ -M ${mail}
#$ -m abes
#$ -N mmgeo-yade
#$ -S /bin/bash
#$ -P caving

source ~/.bashrc

cd ~/yade-tests
yade-bzr3041default-batch bc-testFormato.py --job-threads=10
```

Figura 2.53: Script de ejecución en el Cluster

   Algunos parámetros configurables son:

- ${mail} Correo electronico al cual seran enviados los mensajes de inicio, error y fin del trabajo encolado.

El script primero ejecuta el archivo .bashrc, para cargar las variables de entorno del usuario, y luego se mueve a la carpeta yade-tests, y ejecuta yade en modo batch. El ejecutable de Yade en modo batch termina en *-batch*, lo que implica que no usa interfaz grafica de usuario y solo ejecuta trabajos por lotes. Dicho script debe guardarse un archivo dentro del Cluster (tipicamente run-yade.sge). Para ejecutarlo, se usa:

```
qsub run-yade.sge
```

Dicho comando agrega el trabajo a la cola. Para chequear su ejecución, se debe usar el comando *qstat*. Previo a la ejecución de Yade crear carpeta datos-beta y ajustar los siguientes parámetros mécanico del macizo rocoso en el script bc-testFormato.py :

- `E`
- nu
- rho
- phi
- `desplazamiento_caras`
- `desplazamiento_techo`

Mientras la simulación se ejecuta en el Cluster, se crearan en "datos-beta"las siguientes sub-carpetas: positions, removidos e interacciones como se puede ver en la figura 2.54.

```
def exportStateToCSV(self, nombreCarpeta):
    self.exportPositionToCSV(nombreCarpeta + "/positions/positions-%d
    self.exportRemovedToCSV(nombreCarpeta + "/removidos/removidos-%d.
    self.exportYadeState(nombreCarpeta + "/estado-yade.pkl")
    self.exportPositionAndInteractionsToCSV(nombreCarpeta +"/interacc
      /interacciones-%d.csv")
```

Figura 2.54: Script de ejecución bc-testFormato.py

También se puede chequear el avance mirando el archivo *extraccion-bateas.log*, el cual se actualiza constantemente durante la simulación.
Finalmente una vez terminada la ejecución de Yade post-procesar los datos con script de Matlab como se muestra en la figura 2.55.

graficarVolumenExtraido.m

```
>> graficarVolumenExtraido('.../datos-beta');
```

graficarInteracciones.m

```
>> graficarInteracciones('.../interacciones');
```

graficarSuperficie.m

```
>> graficarSuperficie('..../datos-beta');
>> graficarSuperficie('..../interacciones');
```

Figura 2.55: Scripts de ejecución en Matlab

Capítulo 3

Modelo Basado en Gravimetría

3.1. Resumen

En esta linea del proyecto el objetivo es utilizar mediciones de gravimetría para reconstruir la superficie de quiebre de la cavidad.

Proponemos un modelo que relaciona las mediciones de gravimetría en dos instantes distintos y la evolución de la superficie de quiebre entre esos dos instantes.

Basados en esta relación, desarrollamos un método que estima la superficie de quiebre a partir de las mediciones de gravimetría. Dado que nuestro modelo considera evoluciones de la superficie de quiebre, necesitamos tener un instante en el cual conozcamos la superficie de quiebre y tengamos las mediciones de gravimetría al mismo tiempo (por ejemplo, realizando mediciones de gravimetría antes de comenzar la explotación).

3.2. Casos de estudio

3.2.1. Caso Diablo Regimiento

Se presenta la reconstrucción de la superficie de quiebre del 2005 y 2006 de Diablo Regimiento según gravimetría. Se utilizan las mediciones de gravimetría correspondientes a las diferencias de mediciones 2004-2005 y 2004-2006, también se asume que las mediciones de gravimetría del 2004 corresponden al comienzo de la explotación de este sector.

Input

El dominio D se incluye como una lista de puntos en el plano, delimitando la zona de socavación (ver figura 3.1(a)). También se ingresa la diferencia en mediciones entre los años 2004-2005 y 2004-2006 (las posiciones de las mediciones están indicadas en figura 3.1(b), la altura de las mediciones es en el nivel de producción, por lo que la altura es 2190m).

La altura del nivel de hundimiento y asumido como la superficie inferior de la socavación es 20m por encima del nivel de producción, en la altura 2210m.

La densidad de roca solida ingresada es 2.7 ton/m^3, la densidad de roca fracturada rellenando la cavidad que se ingresó en el modelo es 2.2 ton/m^3.

Para la discretización del dominio se subdividió D en una triangulación con 200 vértices al interior.

Output

Se muestra la triangulación del dominio en la figura 3.2.

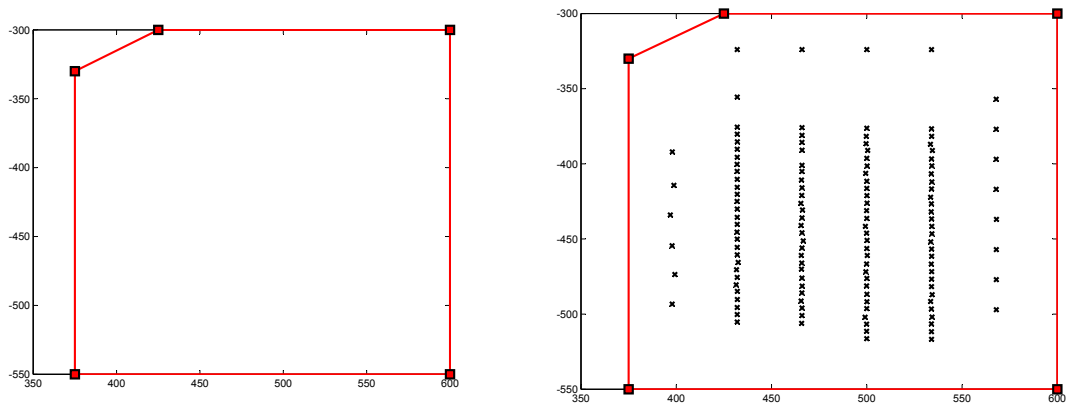


Figura 3.1: (a) Vértices describiendo el dominio D. (b) Posición de las mediciones de gravimetría

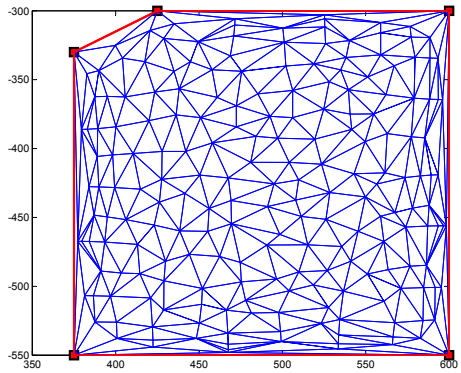


Figura 3.2: Triangulación del dominio con 200 vértices al interior.

Se muestra las reconstrucciones de la superficies de quiebre 2005 y 2006 en las figuras 3.3 y 3.4. Se muestra una comparación de las superficies en la figura 3.5.

El tiempo de cómputo de cada una de estas reconstrucciones fueron aproximadamente de 8 minutos y 15 minutos respectivamente en un computador de escritorio (Intel i7 Q740, 6 GB RAM).

Análisis de los resultados

No contamos con suficiente experimentación y validación de resultados para dar una respuesta concluyente. Una evaluación negativa de estas reconstrucciones es que la estimación obtenida para el 2006 está considerablemente por debajo de quiebres observados en Agosto del 2006. Aún así, nuestras primeras evaluaciones del método y las reconstrucciónes realizadas son positivas.

Las reconstrucciones aquí obtenida tienen semejanza a los resultados de los informes de gravimetría disponibles de Geodatos Ltda., de Agosto del 2006 y Diciembre 2005. Esto no dice que nuestro método sea correcto, pero al menos dice que es competitivo con respecto a métodos utilizados anteriormente.

Algo muy importante, en lo que queremos hacer incapié porque afecta fuertemente este método, es que las densidades considerada para la roca sólida y para el interior de la cavidad de socavación, tienen una tremenda influencia en las alturas de la superficie de quiebre reconstruida. Buenas estimaciones de estas

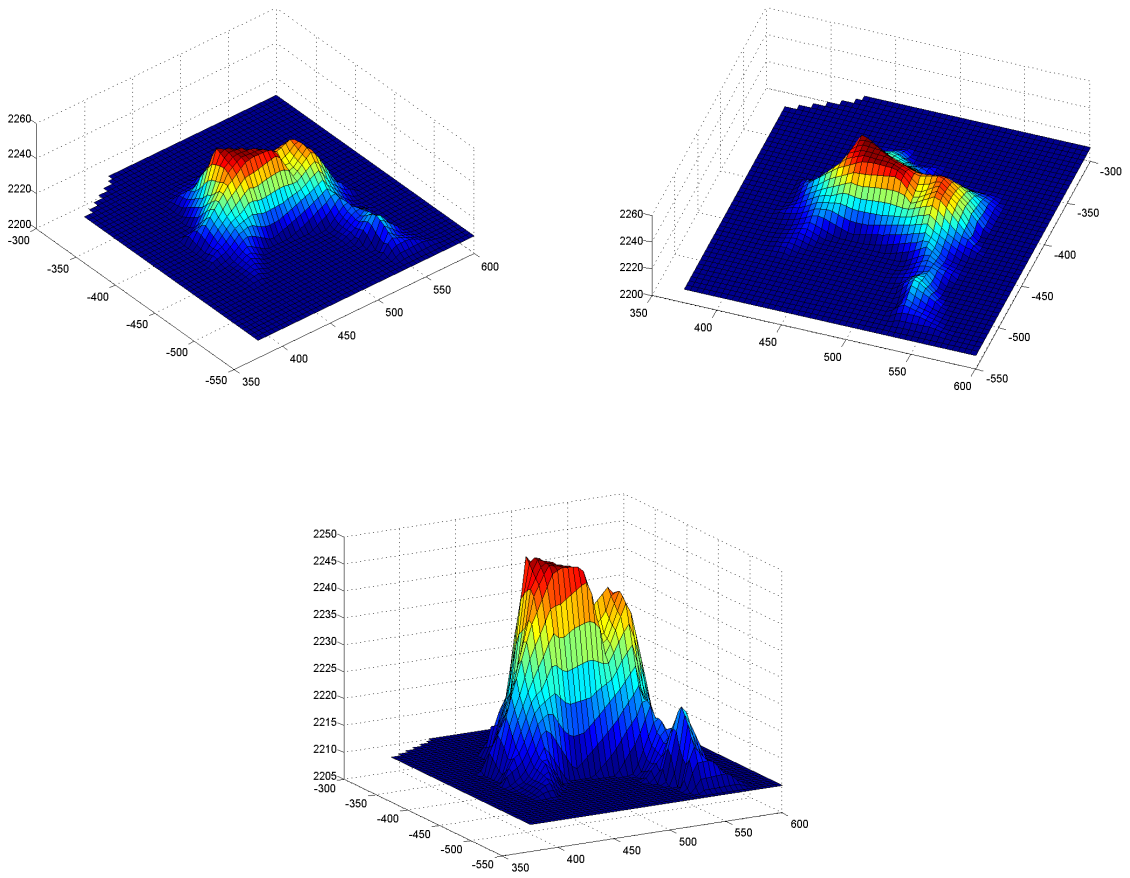


Figura 3.3: Reconstrucción superficie superior cavidad Diablo Regimiento 2005.

densidades son muy importante y se sugiere hacer reconstrucciones de la superficie de quiebre utilizando varias densidades distintas.

Los valores de estas densidades no solo afectan la altura de la reconstrucción, sino también las formas de la superficie reconstruida.

3.2.2. Caso Pilar Norte

Se presenta la reconstrucción de la superficie de quiebre de Noviembre del 2010 y Agosto del 2011 de Pilar Norte según gravimetría. Se utilizan las mediciones de gravimetría correspondientes a las diferencias en mediciones con la linea base de fecha Abril del 2010, se asume que las mediciones de gravimetría de Abril del 2010 corresponden al comienzo de la explotación de este sector.

Input

El dominio D se incluye como una lista de puntos en el plano, delimitando la zona de socavación (ver figura 3.6(a)). También se ingresa la diferencia en mediciones entre Abril 2010 - Noviembre 2010 y Abril 2010 - Agosto 2011 (las posiciones de las mediciones están indicadas en figura 3.6(b), la altura de las mediciones es en el nivel de producción, por lo que la altura es 2101m).

La altura del nivel de hundimiento y asumido como la superficie inferior de la socavación es 19m por encima del nivel de producción, en la altura 2120m.

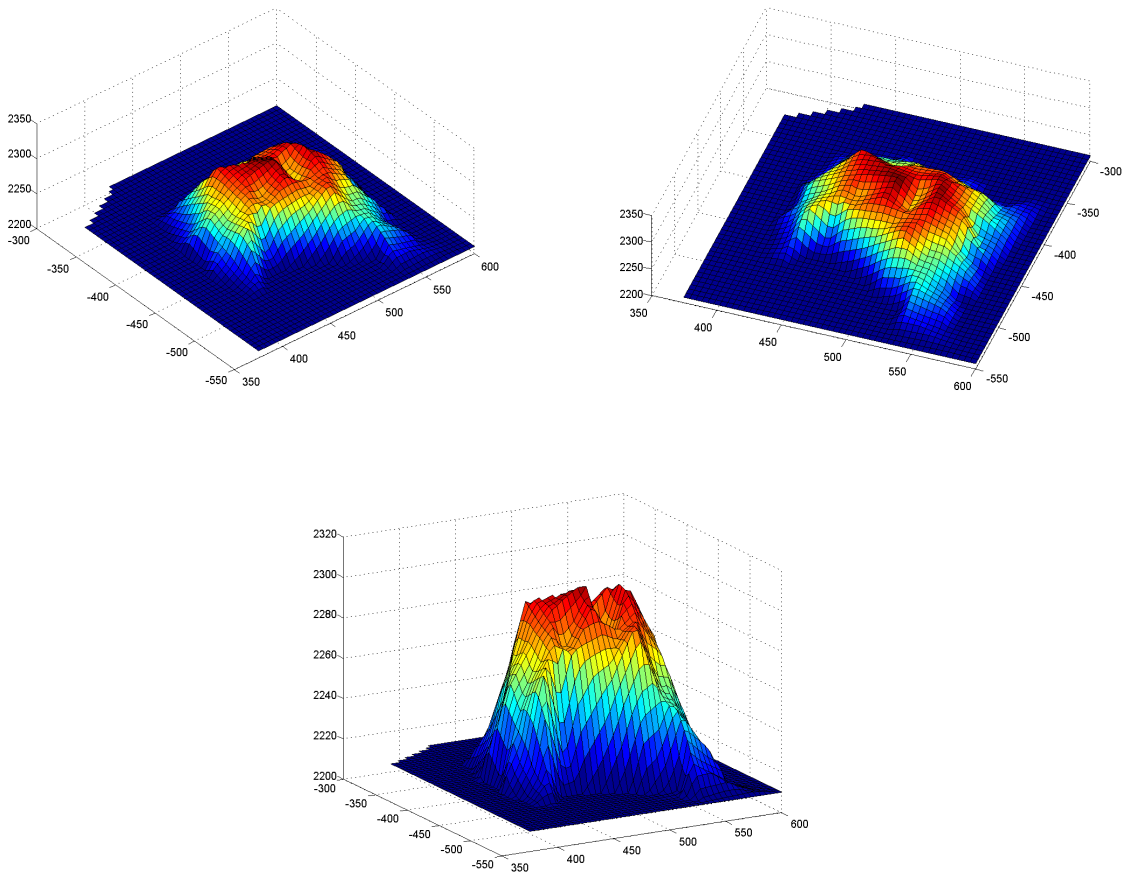


Figura 3.4: Reconstrucción superficie superior cavidad Diablo Regimiento 2006.

La densidad de roca solida ingresada es 2.7 ton/m^3, la densidad de roca fracturada rellenando la cavidad que se ingresó en el modelo es 2.2 ton/m^3.

Para la discretización del dominio se subdividió D en una triangulación con 200 vértices al interior.

Output

Se muestra la triangulación del dominio en la figura 3.7.

Se muestra las reconstrucciones de la superficies de quiebre Noviembre 2010 y Agosto 2011 en las figuras 3.8, 3.9 y 3.10.

El tiempo de cómputo de cada una de estas reconstrucciones fueron aproximadamente 10 minutos un computador de escritorio (Intel i7 Q740, 6 GB RAM).

Análisis de los resultados

Al igual que en el caso de Diablo Regimiento, no contamos con suficiente experimentación y validación de resultados para dar una respuesta concluyente, pero nos informaron que esta estimación de la cavidad está por sobre las estimaciones de extracción (10 a 15 metros según geomecánica operacional).

Algunos aspectos positivos que se pueden concluir de esta reconstrucción es que la reconstrucción de la cavidad no parece ser afectada por considerar como bases, dominios D mas complejos.

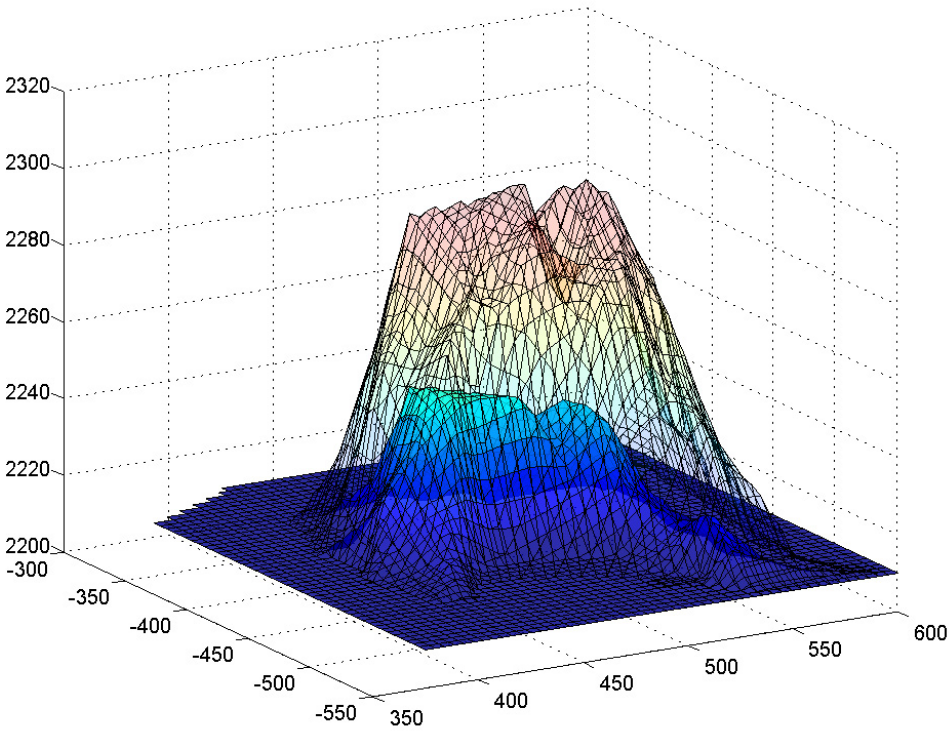


Figura 3.5: Comparación reconstrucciónes superficies Diablo Regimiento 2005 y 2006. La superficies sólida por debajo es la la superficie 2005, la superficie transparente ubicada por encima es la superficie 2006

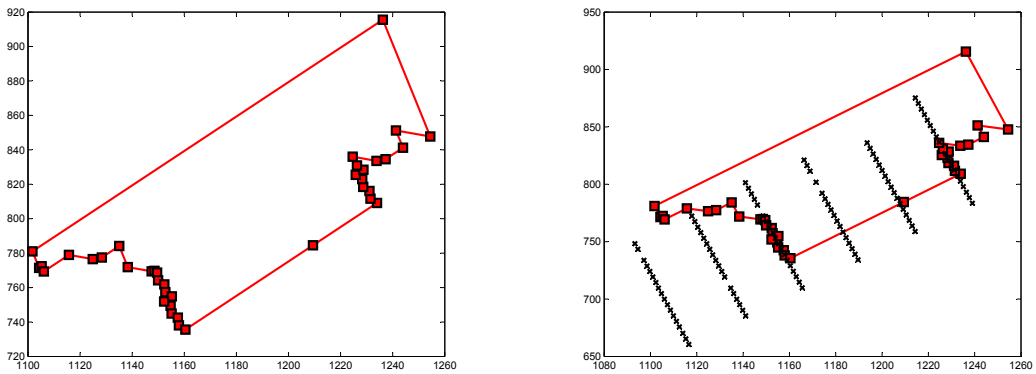


Figura 3.6: (a) Vértices describiendo el dominio D. (b) Posición de las mediciones de gravimetría

3.2.3. Caso Esmeralda Bloque 1

Se presenta la reconstrucción de la superficie de quiebre de Abril del 2012 y Junio del 2012 de Esmeralda Bloque 1 según gravimetría. Se utilizan las mediciones de gravimetría correspondientes a las diferencias en mediciones con la linea base de fecha Septiembre del 2011, se asume que las mediciones de gravimetría de Septiembre del 2011 corresponden al comienzo de la explotación de este sector.

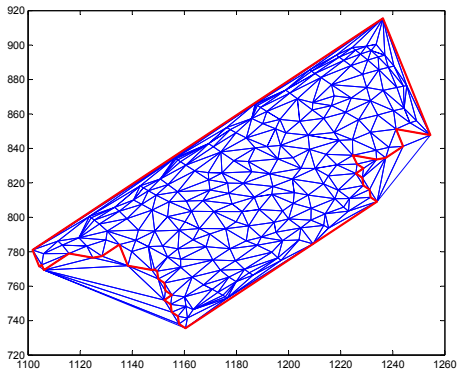


Figura 3.7: Triangulación del dominio con 200 vértices al interior.

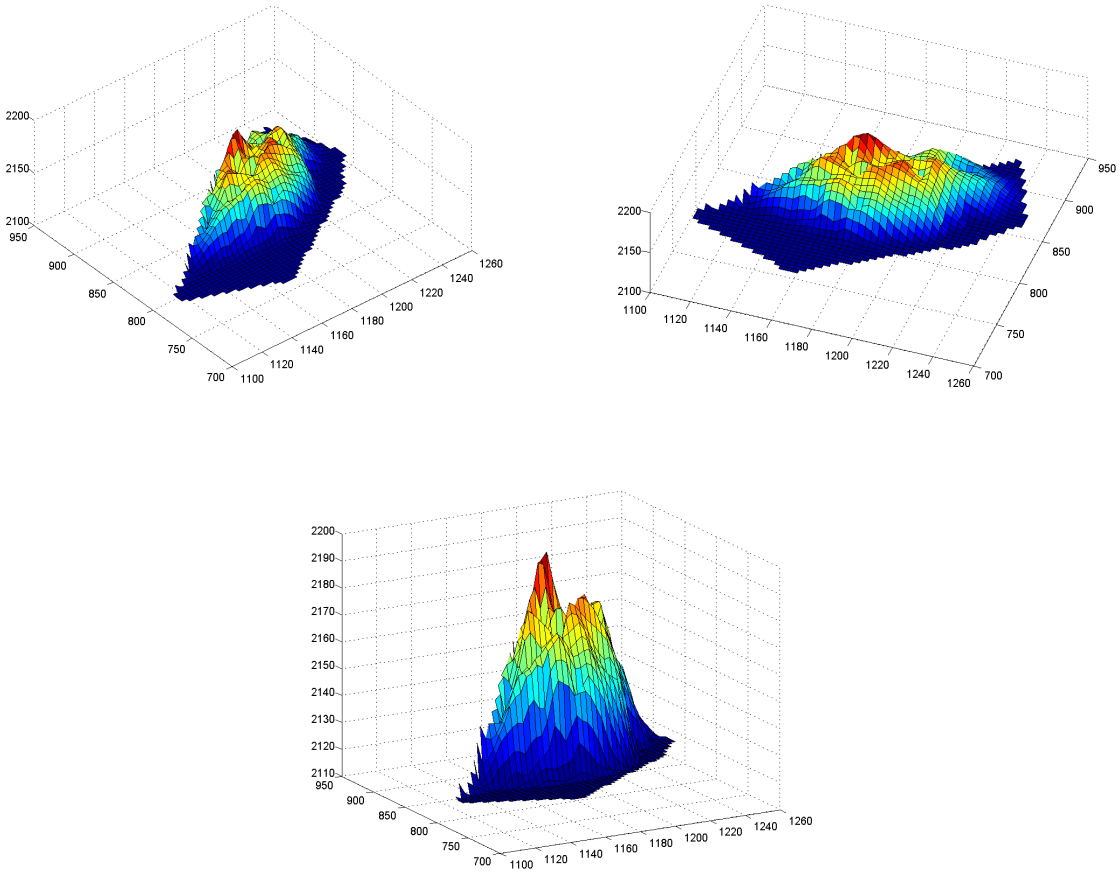


Figura 3.8: Reconstrucción superficie superior cavidad Pilar Norte Noviembre 2010.

Input

El dominio D se incluye como una lista de puntos en el plano, delimitando la zona de socavación (ver figura 3.11(a)). También se ingresa la diferencia en mediciones entre Septiembre 2011 - Abril 2012 y Septiembre 2011 - Junio 2012 (las posiciones de las mediciones están indicadas en figura 3.11(b), la altura de las mediciones es en el nivel de producción, por lo que la altura es 2191m).

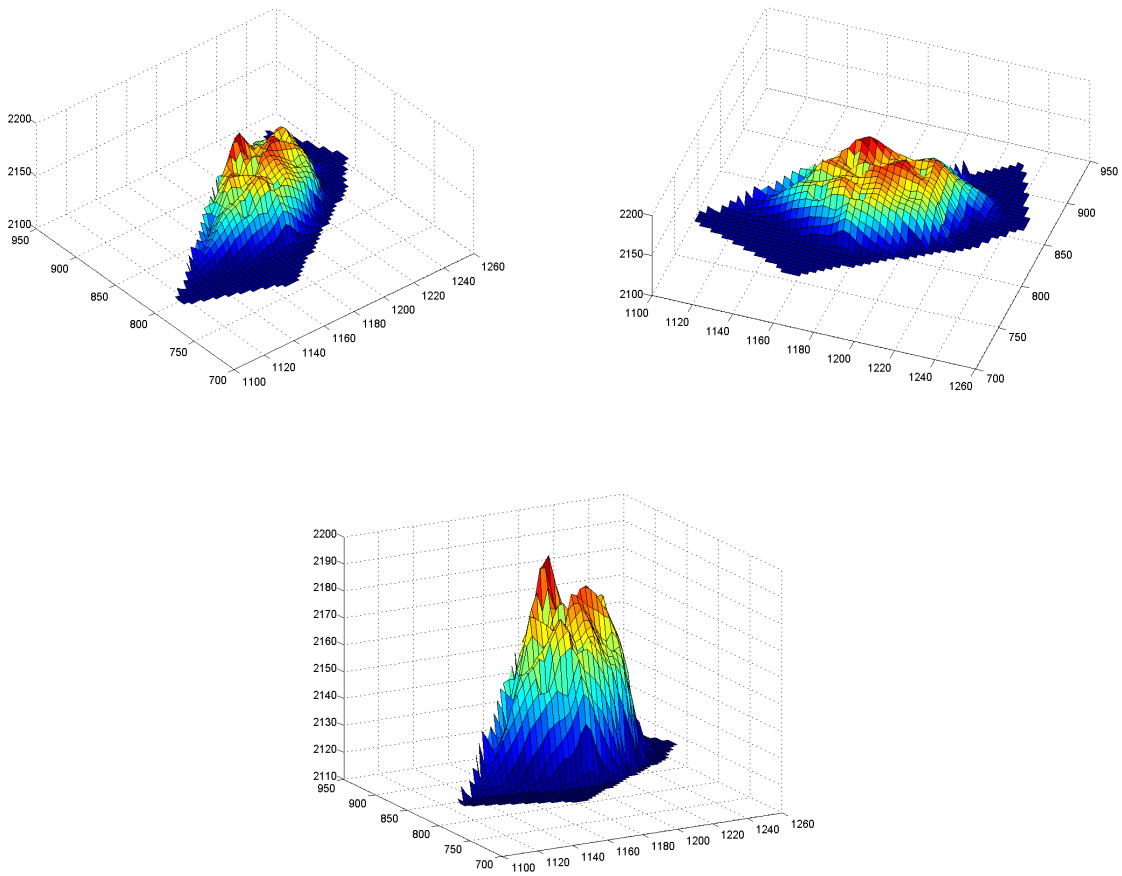


Figura 3.9: Reconstrucción superficie superior cavidad Pilar Norte Agosto 2011.

La altura del nivel de hundimiento y asumido como la superficie inferior de la socavación es 20m por encima del nivel de producción, en la altura 2211m.

La densidad de roca solida ingresada es 2.7 ton/m^3, la densidad de roca fracturada rellenando la cavidad que se ingresó en el modelo es 2.2 ton/m^3.

Para la discretización del dominio se subdividió D en una triangulación con 200 vértices al interior.

Output

Se muestra la triangulación del dominio en la figura 3.12.

Se muestra las reconstrucciones de la superficies de quiebre Abril 2012 y Junio 2012 en las figuras 3.13, 3.14 y 3.15.

El tiempo de cómputo de cada una de estas reconstrucciones fueron aproximadamente 22 minutos un computador de escritorio (Intel i7 Q740, 6 GB RAM).

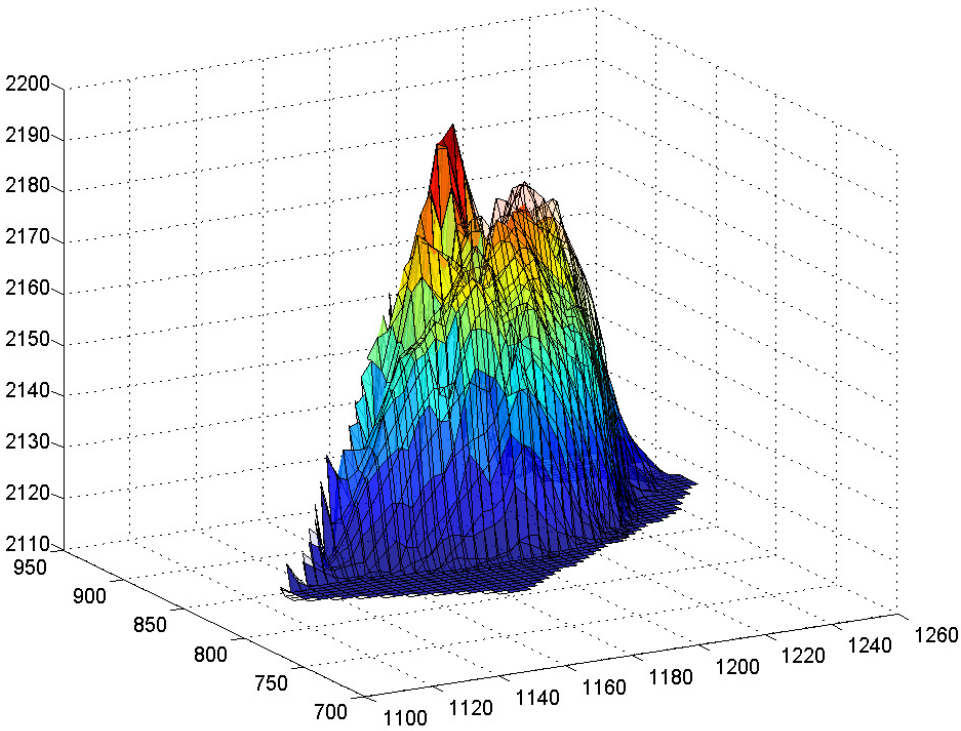


Figura 3.10: Comparación reconstrucciónes superficies Pilar Norte Noviembre 2010 y Agosto 2011. La superficies sólida por debajo es la la superficie 2010, la superficie transparente ubicada por encima es la superficie 2011

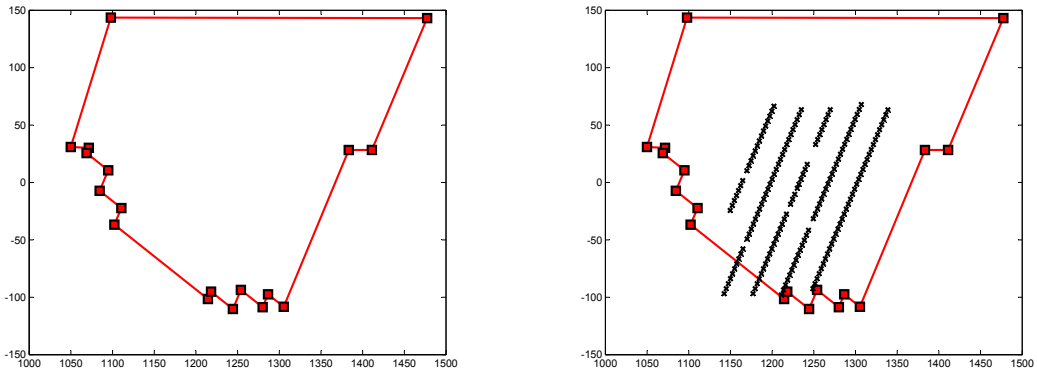


Figura 3.11: (a) Vértices describiendo el dominio D. (b) Posición de las mediciones de gravimetría

Análisis de los resultados

Para esta reconstrucción consideramos como base un dominio D que se extendíia en 50 metros más allá de la socavación. La reconstrucción, usando las mediciones de gravimetría, identifica esta sobredimensión de la base considerada.

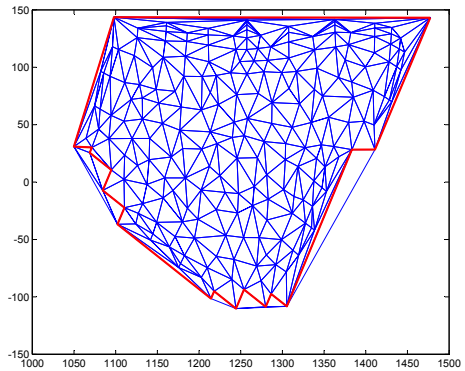


Figura 3.12: Triangulación del dominio con 200 vértices al interior.

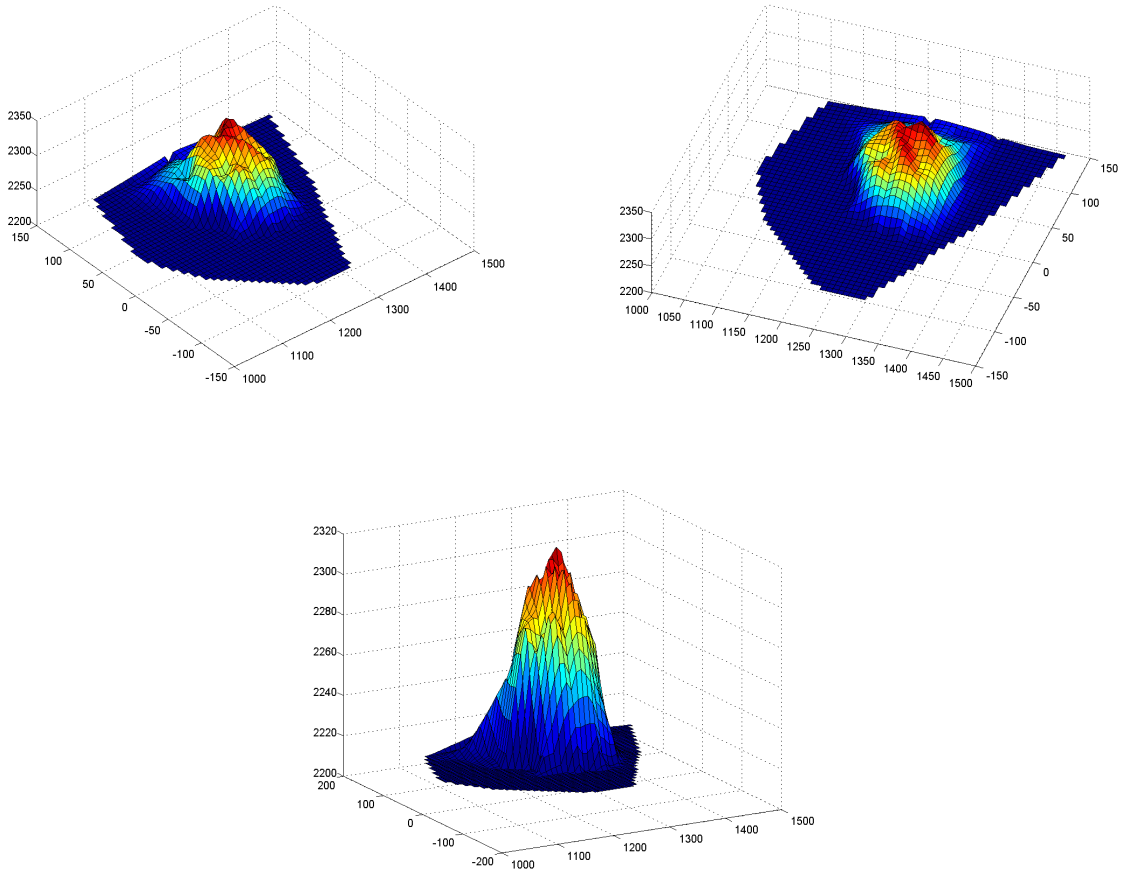


Figura 3.13: Reconstrucción superficie superior cavidad Esmeralda Bloque 1 Abril 2012.

3.3. Resultados Generales

El método propuesto y la implementación realizada de este método presentan un buen comportamiento, con una flexibilidad y rapidez adecuadas para realizar reconstrucciones de la superficie de quiebre con los datos de gravimetría.

Aunque todavía no hay suficiente experimentación y validación para una evaluación concluyente del mé-

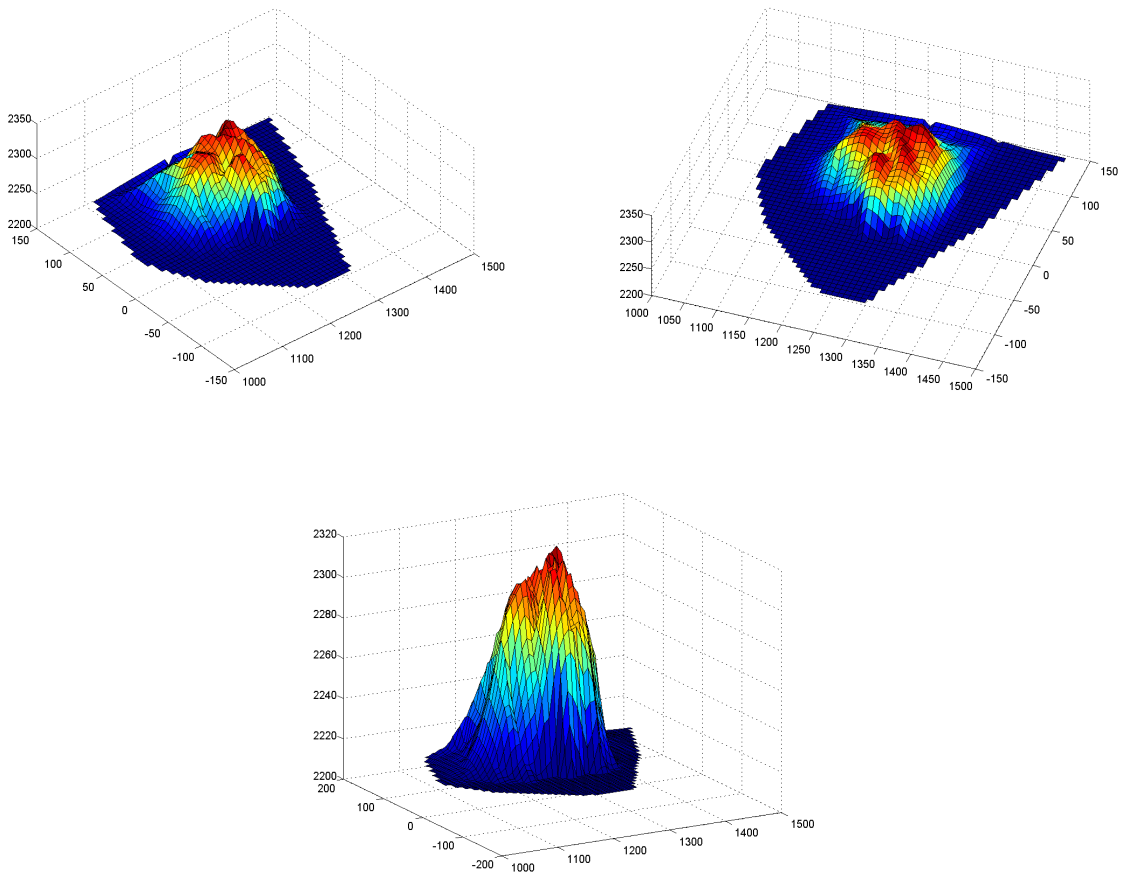


Figura 3.14: Reconstrucción superficie superior cavidad Esmeralda Bloque 1 Junio 2012.

todo, las primeras evaluaciones presentaron fortalezas y debilidades. La fortaleza principal es que este método e implementación parecen ser competitivos con métodos utilizados anteriormente, pero al mismo tiempo es más flexible (es fácil manipular los parámetros de densidad y se pueden imponer restricciones). La principal debilidad es la fuerte dependencia de las alturas reconstrustruidas en función de las densidades ocupadas. El hecho de que la estimación de Diablo Regimiento esté por debajo de la real, mientras que la de Pilar Norte está por encima, son clara muestra de esto. Por supuesto, la mejor solución para esto es tener buenas estimaciones de la densidad promedio de la roca anterior a la extracción y la densidad promedio del relleno de la cavidad.

Una posibilidad para intentar encontrar estas densidades es ocupar los datos de producción (tonelaje de material extraído), puesto que las densidades consideradas en el modelo y el volumen encerrado por las superficies reconstruidas, deberían corresponder a la cantidad de material extraído.

El código es de fácil uso y está bien documentado, por lo que Codelco puede utilizarlo para futuros datos de gravimetría disponible o pueda realizar reconstrucciones con diferentes parámetros.

El código también permite algunos modelos un poco más generales, bajo algunos cambios no demasiado complicados en algunas subrutinas, por ejemplo, se podría incluir densidades de masas un poco más generales que simplemente densidades constantes.

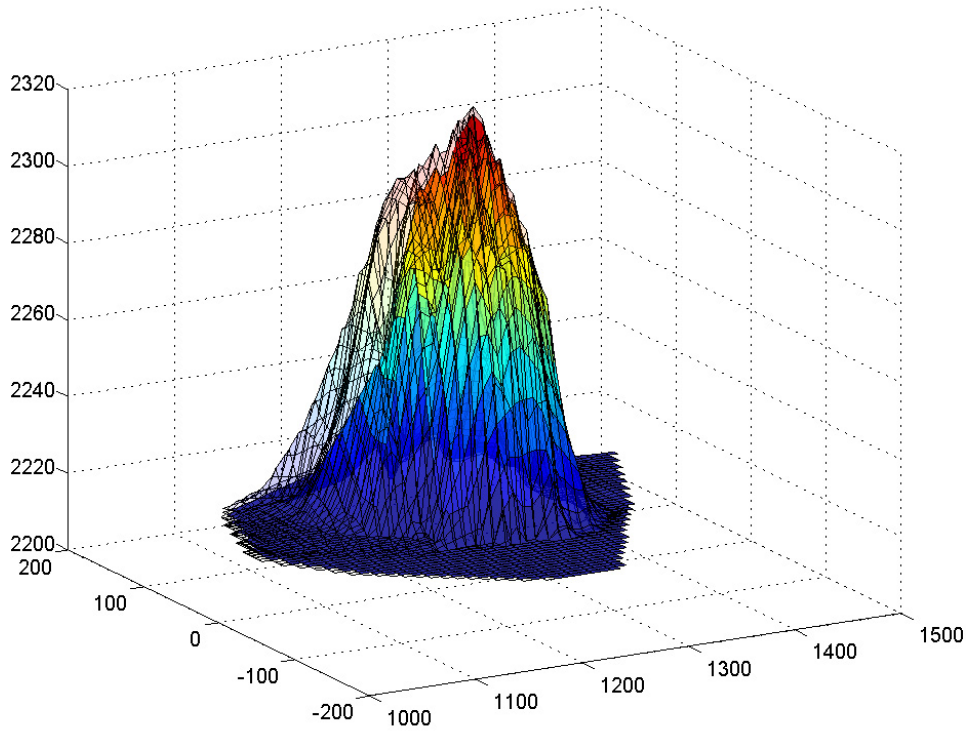


Figura 3.15: Comparación reconstrucciónes superficies Esmeralda Bloque 1 Abril 2012 y Junio 2012. La superficies sólida por debajo es la la superficie Abril 2012, la superficie transparente ubicada por encima es la superficie Junio 2012

3.4. El Modelo

3.4.1. Descripción Teórica

Consideraremos simplificadamente que la cavidad corresponde a un volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ de densidad de masa constante μ, y que el volumen V se puede describir con una base $D \subset \mathbb{R}^2$ y dos funciones $f, g : D \to \mathbb{R}$ que indican los límites inferiores y superiores de V respectivamente, es decir

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z \in [g(x, y), f(x, y)]\}$$

(es decir V es el volumen encerrado por los gráficos de $g(x, y)$ y $f(x, y)$). La función g se asume conocida y la función f corresponde a la superficie que queremos reconstruir.

Bajo estos supuestos, la aceleración de gravedad en el punto (u, v, w) producida por la cavidad es

$$\int\int\int_V G\mu \frac{(x, y, z) - (u, v, w)}{((x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2)^{3/2}} dzdxdy.$$

Con la descripción de V, la componente vertical de la aceleración de gravedad se expresa como

$$
\begin{aligned}
R(u,v,w) &= \int\int_D \int_{g(x,y)}^{f(x,y)} G\mu \frac{z-w}{((x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2)^{3/2}} dzdxdy \\
&= G\mu \int\int_D \frac{-1}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2}}\Big|_{g(x,y)}^{f(x,y)} dxdy \\
&= G\mu\Big(T_g(u,v,w) - T_f(u,v,w)\Big)
\end{aligned}
$$

con

$$
T_f(u,v,w) = \int\int_D \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2+(f(x,y)-w)^2}} dxdy
$$

En el problema de gravimetría propuesto, $R(u,v,w)$ es la medición obtenida con el gravímetro por debajo de la mina al restarle la medición hecha en el mismo lugar cuando la superficie de quiebre era $g(x,y)$, si se tienen las mediciones de gravimetría antes de comenzar la explotación, se puede ocupar $g(x,y)$ como la superficie inferior de la socavación, que es observable antes del comienzo de la explotación. $f(x,y)$ corresponde a la superficie de quiebre actual, que es lo que se quiere determinar.

El objetivo es recuperar $f(x,y)$ ocupando las mediciones $R(u,v,w)$ y las observaciones de $g(x,y)$. Dada las ecuaciones de arriba, esto corresponde a reconstruir $f(x,y)$ para $(x,y) \in D$ del conocimiento de $T_f(u,v,w)$ para los puntos (u,v,w) medidos.

Observación: Arriba G denota la constante de gravitación. Aproximadamente $6{,}674 \times 10^{-11} Nm^2/Kg^2$. μ denota la densidad de la roca, aproximadamente $2{,}7 \times 10^3 Kg/m^3$. Las cantidades $x, y, z, u, v, w, dx, dy, dz$ están en m. Por lo que R descrito arriba estaría en unidades m/s^2 o $10^5 mGal$, donde $mGal$ es la unidad de las mediciones gravimétricas. En resumen, el producto de las constantes que aparecen arriba $G\mu$ en la definición de R es aproximadamente $0{,}0180198 mGal/m$ al considerar las distancias en metros.

3.4.2. Metodología

El problema de inversión de T_f es bastante inestable, por lo que requiere complementar la inversión con conocimiento complementario respecto a la socavación y/o regularización.

Considerando la inestabilidad del problema y la incorporación de restricciones, se propone realizar la inversión del operador T_f mediante un problema de minimización. Si

$$
M(u,v,w) = \frac{R(u,v,w)}{G\mu} - T_g(u,v,w)
$$

corresponde a la **medición** de $T_f(u,v,w)$ en los puntos (u,v,w) (que pueden tener errores), la idea es encontrar f como la función que resuelve el siguiente problema

$$
\begin{aligned}
&\min_f ||T_f - M||_\omega^2 \\
&\text{s.a.} f \in C
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

donde $||\cdot||_\omega^2$ es el cuadrado de la norma L^2 con pesos (suma de los cuadrados) y C es el conjunto factible dado por las restricciones.

El operador $f \mapsto T_f$ es no lineal, y el problema de minimización anterior no tiene una expresión anaítica para su solución, por lo que hay que ocupar métodos numericos para resolverlo. Una forma de acelerar

los métodos de optimización es encontrando expresiones analíticas para las derivadas, en particular, si $m(f) = ||T_f - M||_\omega^2$ y los puntos de medicón son de la forma $(u, v, w(u, v))$, entonces calculamos

$$\frac{\partial m}{\partial f}\Big|_f(x, y) = -2 \int\int_D \frac{(T_f(u, v, w) - M(u, v, w))(f(x, y) - w)}{((x-u)^2 + (y-v)^2 + (f(x, y) - w)^2)^{3/2}} \omega(u, v) dudv$$

donde $\omega \geq 0$ es una función de peso predeterminada (por ejemplo, se puede considerar $\omega \equiv 1$).

3.4.3. Discretización

Después de considerar varias posibilidades, decidimos discretizar el dominio D mediante una triangulación independiente de los puntos de mediciones de gravimetría al momento de resolver el problema de optimización numericamente.

Asumimos que el dominio D es una región poliedral con vertices $\{p_i\}_{i \in I_0}$, dividimos el dominio D en triangulos $\{R_j\}_{j \in J}$ de acuerdo a una familia de vértices $\{p_i\}_{i \in I_0 \cup I_1}$ (una triangulación de Delaunay) que es construida de manera que los triángulos resultantes tengan un área comparable.

Las mediciones se realizan en los puntos $\{(u_k, v_k, w_k)\}_{k \in K}$ de $\mathbb{R}^3$ y hay que considerar pesos $\{\omega_k\}_{k \in K}$ para definir $|| \cdot ||_\omega$.

Nos restringiremos a funciones $f(x)$ lineales en cada R_j. Es decir, dado valores f_i para $i \in I_1$ y la restricción de $f_i = g_i$ para $i \in I_0$, la función $f(x)$ en R_j es una combinación lineal de los valores de f en los vertices de R_j. Explicitamente, si p_{j_1}, p_{j_2} y p_{j_3} son los vertices de R_j, entonces

$$f(t_1 p_{j_1} + t_2 p_{j_2} + t_3 p_{j_3}) = t_1 f_{j_1} + t_2 f_{j_2} + t_3 f_{j_3} \text{ para } t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{3} t_i = 1 \tag{3.2}$$

De esta manera, tenemos que f está completamente determinada por las variables $\{f_i\}_{i \in I_1}$ (y las constantes $\{f_i\}_{i \in I_0}$). Las mediciones de gravimetría sólo son adquiridas en los puntos $\{(u_k, v_k, w_k)\}_{k \in K}$.

En nuestro modelo, estas consideraciones se refleja en que sólo conocemos

$$T_f(u_k, v_k, w_k) = \sum_{j \in J} \int\int_{R_j} \frac{1}{\sqrt{(x-u_k)^2 + (y-v_k)^2 + (f(x, y) - w_k)^2}} dxdy, \qquad k = 1, ..., K$$

con lo que

$$m(f) = \sum_{k \in K} \omega_k \Big(\sum_{j \in J} \int\int_{R_j} \frac{1}{\sqrt{(x-u_k)^2 + (y-v_k)^2 + (f(x, y) - w_k)^2}} dxdy - M(u_k, v_k, w_k) \Big)^2$$

Y podemos calcular las derivadas parciales de la función objetivo respecto a cada $f_i, i \in I_1$. Denotando como $J(i)$ el conjunto de indices de las regiones que contienen a p_i como vértice, obtenemos

$$\frac{\partial m}{\partial f_i} = -2 \sum_{j \in J(i)} \int\int_{R_j} \Big[\frac{\partial f}{\partial f_i}(x, y) \sum_{k \in K} \frac{(T_f(u_k, v_k, w_k) - M(u_k, v_k, w_k))(f(x, y) - w_k)}{((x-u_k)^2 + (y-v_k)^2 + (f(x, y) - w_k)^2)^{3/2}} \omega_k \Big] dxdy \tag{3.3}$$

Las integrales se calcularán numéricamente de manera aproximada .

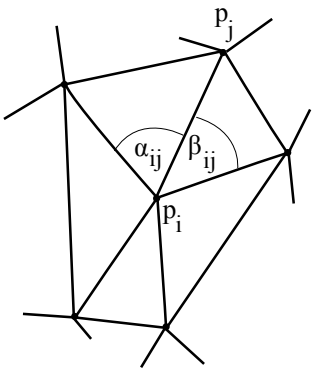


Figura 3.16: Ángulos α_{ij}, β_{ij} que definen w_{ij}.

3.4.4. Regularización de la Función Objetivo

Dado que estamos intentando invertir un operador bastante mal-puesto, una estratégia comunmente usada es agregar un termino regularizador a la función objetivo, por ejemplo, es común penalizar la norma del argumento de la función objetivo, obtieniendo una regularización de tipo Tychonoff. Dado nuestro problema, consideramos mas adecuado incluir un termino de tipo difusivo (que penalice gradientes grandes). Debido a la discretización propuesta del dominio, decidimos penalizar el incumplimiento de la propiedad del valor medio. Mas explicitamente, dado $f = \{f_i\}_{i \in I_1}$, definimos $I(i)$ como el conjunto de índices de los vértices vecinos de p_i , y definimos $E(f)$ como

$$E(f) = \frac{1}{2} \sum_{i \in I_1} \Big(f_i - \sum_{j \in I(i)} \lambda_{ij} f_j \Big)^2 = \frac{1}{2} ||f - \Lambda f||^2$$

donde los pesos λ_{ij} caracterizan las coordenadas de valor medio y $\Lambda = (\lambda_{ij})$ es lo mismo escrito de forma matricial. Explicitamente, los pesos λ_{ij} se calculan como

$$\rho_{ij} = \frac{\tan(\alpha_{ij}/2) + \tan(\beta_{ij}/2)}{||p_j - p_i||}$$
$$\lambda_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{\sum_{j \in I(i)} \rho_{ij}}$$

donde α_{ij}, β_{ij} son los angulos en la triangulación con vertice p_i y adyacentes a $\overline{p_i p_j}$ (ver figura 3.16). Observamos que

$$\frac{\partial E}{\partial f_k}(f) = (f_k - \sum_{j \in I(k)} \lambda_{kj} f_j) - \sum_{i \in I(k)} \lambda_{ik} (f_i - \sum_{j \in I(i)} \lambda_{ij} f_j)$$

o escrito matricialmente

$$\frac{\partial E}{\partial f}(f) = (I - \Lambda^t)(f - \Lambda f).$$

La nueva función objetivo $\tilde{m}(f)$ que consideramos finalmente para la reconstrucción de f, se escribe como

$$\tilde{m}(f) = m(f) + \eta E(f)$$

donde $\eta > 0$ es un parámetro de penalización, que regula cuanta regularidad queremos imponer en la solución. Y el gradiente de esta nueva función objetivo se escribe como

$$\frac{\partial \tilde{m}}{\partial f}(f) = \frac{\partial m}{\partial f}(f) + \eta \frac{\partial E}{\partial f}(f)$$

donde los gradientes de $m(f)$ y de $E(f)$ están escritos explícitamente arriba.

3.4.5. Resolución del Problema de Optimización

Dado que contamos con una expresión explícita para el gradiente de la función objetivo, implementa un método del descenso complementado con una proyección sobre el conjunto factible. En cada paso de descenso, se realiza una búsqueda lineal en la dirección de máximo descenso, nuevamente proyectando sobre el conjunto factible.

Esta parte de la implementación se puede mejorar, considerando direcciones de descenso un poco más inteligentes que el máximo descenso (gradiente conjugado o aproximaciones del Hessiano), y permitiendo restricciones un poco más generales que las que logramos implementar (que sólo permite restricciones independientes en cada valor de $\{f_i\}_{i \in I_1}$), pero esto aumentaría considerablemente la complejidad del algoritmo y la experimentación numérica hasta el momento ha mostrado evidencia de que la implementación actual funciona adecuadamente.

Otra posibilidad a considerar, es el utilizar un solver de optimización externo, pero intentamos entregar una implementación lo más auto-contenida posible.

3.5. Descripción del Software y Manual de Uso

3.5.1. Resumen Estructura de Datos

La información de las mediciones se considera como una lista de valores

$$\left| \; u_k \; \right| \; v_k \; \left| \; w_k \; \right| \; R(u_k, v_k, w_k) \; \left|$$

por lo que *data* será un arreglo de $K \times 4$. Estamos asumiendo que las cantidades $R(u_k, v_k, w_k)$ son positivas que corresponde a considerar que la cavidad a avanzado hacia arriba.

El dominio D va a corresponder a una colección de vértices $\{p_i\}_{i \in I_0} \subset \mathbb{R}^2$ en un orden que determina el polígono del dominio D (un arreglo de $|I_0| \times 2$).

Los vertices $\{p_i\}_{i \in I_1} \subset \mathbb{R}^2$ es una familia de vértices en cualquier orden que junto a los vértices de D determinan la triangulación del D. Todos juntos, los vértices $\{p_i\}_{i \in I_0 \cup I_1}$ son un arreglo de $(|I_0| + |I_1|) \times 2$.

Los triángulos $\{R_j\}_{j \in J}$ van a estar descritos como un objeto *triangulación*, que además contiene todos vértices $\{p_i\}_{i \in I_0 \cup I_1}$ y las relaciones de adyacencia entre vértices y triángulos (o que son calculables del objeto).

Las variables $\{f_i\}_{i \in I_1}$ y las constantes $\{f_i\}_{i \in I_1}$ formarán un arreglo de $(|I_0| + |I_1|) \times 1$.

La función g es un vector $\{g_i\}_{i \in I_0 \cup I_1}$ (un arreglo de $(|I_0| + |I_1|) \times 1$) que nos permita transformar las mediciones de gravimetria $R(u_k, v_k, w_k)$ en las mediciones $M(u_k, v_k, w_k)$ de T_f. La función g también impone una restricción inferior en la reconstrucción de f (estamos considerando evoluciones de la cavidad hacia arriba). Observamos que necesariamente $g > \text{máx}_k\{w_k\}$.

La función $\tilde{m}(\{f_i\}_{i \in I_0 \cup I_1})$ es una función de $\mathbb{R}^{|I_0|+|I+1|} \to \mathbb{R}$ y el gradiente $(\partial \tilde{m}/\partial f)(f)$ es un vector

de tamaño $(|I_0| + |I_1|)$, imponiendo que el gradiente es 0 en I_0.

3.5.2. Resumen Implementación (en Matlab)

Se implementaron rutinas en Matlab para genérar una reconstrucción de f a partir de las mediciones según el método propuesto arriba. Las rutinas principales son

- Una función para ingresar y triangular el dominio definido por $\{p_i\}_{i \in I_0}$ (*createdomain.m*)
- Funciones que transforman las mediciones y restricciones adecuadamente para poder ser ocupadas en nuestro modelo y en nuestra implementación (*gravimetrytransf.m, tranformfunc.m*)
- Una función que resuelve el problema de optimización utilizando método del descenso máximo con proyección sobre el conjunto factible (*recon_optim.m*). En esta función están implementadas las subrutinas para el calculo aproximado de $\tilde{m}(f)$ y su gradiente, calculando varias integrales de manera aproximada (la integración numérica en estas subrutinas es bastante básica y probablemente puede ser mejorada).

3.5.3. Documentación de las Rutinas Principales.

Triangulación del Dominio

- Archivo: createdomain.m
- Comando: [domain areas W IJ nI0 nI]= createdomain(I0,numpoints)
- Descripción: Coloca $numpoints$ vertices al interior de D y luego particiona D de acuerdo a esos vértices según una triangulación de Delaunay . La distribución de los puntos es tal que se generen triángulos con áreas relativamente comparables. Esta función también calcula algunos objetos que solo dependen de la triangulación y que se utilizan en el código posterior.
- Input: $I0$.
  - Tipo: Arreglo de números, de tamaño $nI0 \times 2$, donde $nI0 \in \mathbb{N}$.
  - Descripción: Define el dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, la base de la cavidad, como un polígono. Cada fila de $I0$ contiene las coordenadas (x, y) de cada vertices de D y filas subsecuentes en $I0$ determinan una arista en D, se incluye la arista que une el último elemento de $I0$ con el primero.
  - Observación: $I0$ no puede contener tres vertices consecutivos que sean colineales, las aristas descritas en $I0$ no se deben cruzar (es decir D debe ser un polígono).
- Input: $numpoints$.
  - Tipo: Número entero.
  - Descripción: Define el numero de puntos en la triangulación que subdividira D. Por ende define el número de variables en $f = \{f_k\}_{k=1}^{numpoints}$.
  - Observación: aún incluyendo un termino regularizador en la función objetivo, $numpoints$ no deberíia ser mucho mayor al número de mediciones disponibles.
- Output: $domain$
  - Tipo: Delaunay Triangulation.
  - Descripción: triangulación de D con $numpoints$ vertices dentro de D. En total $domain$ tiene $nI = numpoints + nI0$ vertices y nJ triángulos.

- Output: $areas$
  - Tipo: Vector de números, de largo nJ.
  - Descripción: Vector con el área de cada triangulo en $domain$. Los triángulos fuera de D tienen área 0 asignada.
- Output: W
  - Tipo: Matriz de números, de tamaño $nI \times nI$.
  - Descripción: Matriz con los pesos harmónicos $(W)_{ij} = \lambda_{ij}$ descritos anteriormente.
- Output: IJ
  - Tipo: Matriz binaria, de tamaño $nI \times nJ$.
  - Descripción: Matriz de adyacencia vértice-triángulo de la triangulación del dominio. La entrada ij vale 1 si el vertice i es vértice del triángulo j, de lo contrario es 0.
- Output: $nI0$
  - Tipo: Número entero.
  - Descripción: número de vértices en $I0$.
- Output: nI
  - Tipo: Número entero.
  - Descripción: número de vértices total en la triangulación de D, $nI = nI0 + numpoints$.

Ingreso de los Datos de Gravimetría.

- Archivo: gravimetrytransf.m
- Comando: [measuredTf g] = gravimetrytransf(data, hlevel, rockdensity, cavitydensity, nI, domain, areas);
- Descripción: Transforma los datos de gravimetría y otra información necesaria para la reconstrucción de la superficie de quiebre, de manera de poder ingresarla a las rutinas posteriores.
- Observación: Estámos fijando la superficie inferior de la cavidad a una altura constante $hlevel$, si la superficie inferior no está a una altura constante (si las mediciones de gravimetría corresponden a la diferencia de mediciones con una superficie de altura no constante) habría que modificar el código ligeramente.
- Inputs: $nI, domain, areas$
  - Descripción: Output de la función createdomain.m.
- Input: $data$
  - Tipo: Arreglo de números, de tamaño $K \times 4$, donde $K \in \mathbb{N}$.
  - Descripción: Lista con K mediciones de gravimetría (diferencias). La fila k de $data$ es de la forma $(u_k, v_k, w_k, R(u_k, v_k, w_k))$ donde (u_k, v_k, w_k) es la posición de la medición y donde $R(u_k, v_k, w_k)$ es la medición misma (diferencia).
- Input: $hlevel$
  - Tipo: Número.
  - Descripción: Altura a la que se encuentra el nivel inferior de la cavidad.

- Observación: Asumimos que $hlevel$ esta por encima de los puntos de medición.

- Input: $rockdensity$
  - Tipo: Número positivo.
  - Descripción: Densidad promedio de la roca sólida (sin fragmentar).
- Input: $cavitydensity$
  - Tipo: Número positivo.
  - Descripción: Densidad promedio de la roca fragmentada que rellena la cavidad.
  - Obasevación: Asumimos que $rockdensity > cavitydensity$. Mientras más cercanos sean estos valores, la estimación de la cavidad va a tener mayor altura.
- Output: $measuredTf$
  - Tipo: Arreglo de números, de tamaño $K \times 4$, el mismo tamaño que $data$.
  - Descripción: La fila k de $measuredTf$ es de la forma $(u_k, v_k, w_k, M(u_k, v_k, w_k))$, donde el último elemento corresponde a la medición de de T_f, calculado de acuerdo a la descripción de nuestro modelo como $M(u, v, w) = R(u, v, w)/G\mu - T_g(u, v, w)$, utilizando los inputs de la función gravimetrytransf.m.
- Output: g
  - Tipo: Vector de números, de largo nI.
  - Descripción: Altura de la superficie inferior en cada vértice de $domain$.
  - Observación: Como mencionamos en el subcapítulo Discretización, funciones definidas en D lineales en cada triangulo corresponden a tener un valor para cada vértice de la triangulación. Es decir, g obtenido aquí representa una función $g : D \to \mathbb{R}$.

Reconstrucción de la Superficie de Quiebre.

- Archivo: recon_optim.m
- Comando: [reconf] = recon_optim(domain, nI0, IJ, areas, W, eta, initf, f_lb, f_ub, initupdf, tol, linstol, weights, measuredTf);
- Descripción: Reconstruye la superficie de quiebre $reconf$ correspondiente a las mediciones de gravimetría, utilizando la información requerida, más información complementaria.
- Observación: La reconstrucción de $reconf$ se obtiene resolviendo un problema de optimización mediante método del descenso máximo. Esto involucra varias iteraciones de subrutinas y busquedas, las que requieren criterios de cuanto avanzar y cuando detenerse ingresado como parámetros. Estos parámetros pueden afectar la calidad de la reconstrucción obtenida. En la experimentación realizada se observó que la reconstrucción final era razonablemente robusta respecto a estos parámetros, con consecuencias bastante predecibles (mucha exigencia en el termino regularizador produce soluciones demasiado regulares, un criterio muy laxo de optimalidad produce reconstrucciones de menor calidad, etc).
- Inputs: $domain, nI0, IJ, areas, W$
  - Descripción: Output de la función createdomain.m.
- Input: $measuredTF$

- Descripción: Output de la función gravimetrytransf.m.

- Input: eta
  - Tipo: Número no-negativo.
  - Descripción: Parámetro de penalización en la función objetivo que controla la regularidad exigida en $reconf$. Un valor grande de eta significa una solución mas regular, un valor $eta = 0$ no imponen ninguna restricción en la regularidad de $reconf$ (ver la definicion de la función objetivo $\tilde{m}$, eta corresponde exactamente al η que multiplica $E(f)$.).

- Input: $initf$
  - Tipo: Vector de números, de largo nI.
  - Descripción: $reconf$ se construye como la solución de un problema de optimización. El algoritmo de optimización requiere un punto de partida que se ingresa como $initf$ (luego $initf$ es la primera estimación de $reconf$). Se puede utilizar $initf = g$.

- Input: f_lb, f_up
  - Tipo: Vectores de números, de largo nI.
  - Descripción: Restricciones de $reconf$ por debajo y por encima respectivamente: $reconf$ se construye de manera que $f_lb \leq reconf \leq f_up$ para cada vértice en $dominio$ (para cada componente del los vectores), lo que significa que el valor de las funciónes que representan satisfacen la misma desigualdad en D.

- Input: $initupdf$
  - Tipo: Número positivo.
  - Descripción: En cada paso del método del descenso máximo, cuando cambiamos la estimación actual de de la superficie $reconf$ moviéndonos en la dirección de menos el gradiente, tenemos que restringir el cambio máximo que permitiremos (en metros) en cada paso. $initupdf$ es esa cantidad.
  - Observación: La consecuencia de un $initupdf$ grande es que probablemente necesitaremos menos pasos del método del descenso máximo, pero cada paso es más lento. $initupdf$ pequeño implica que probablemente necesitaremos más pasos del método del gradiente máximo pero cada paso es más rápido.

- Input: tol
  - Tipo: Número entre 0 y 1.
  - Descripción: Entrega el criterio de detención que ocuparemos en el método del descenso máximo. Nos detendremos cuando el cambio en el valor de la función objetivo, entre dos pasos consecutivos del método del descenso máximo, sea un porcentaje menor a $tol * 100\,\%$.
  - Observación: Un valor tol más cercano a cero significa que intentamos obtener $reconf$ más cercano a la solución del problema de optimización (por ende una mejor reconstrucción), pero requiere más iteraciones del método del descenso máximo (más tiempo de cómputo).

- Input: $linstol$

- Tipo: Número entre 0 y 1.
- Descripción: En cada iteración del método del descenso máximo, buscamos el largo óptimo del paso que debemos dar. Encontramos aproximadamente el largo óptimo mediante una búsqueda binaria en el intervalo $[0, initupdf]$ (subrutina minlinesearch en recon_optim.m). Detenemos la búsqueda binaria cuando encontramos un subintervalo cuyos extremos corresponden a valores de la función objetivo suficientemente cercanos: una diferencia menor a un $linstol * 100\,\%$.
- Observación: Un valor $linstol$ cercano a cero significa que cada tal vez necesitaremos menos pasos del método del descenso máximo, pero cada paso es más lento.

- Input: $weights$
  - Tipo: Vector de números no-negativos, de largo K=número del mediciones de gravimetría.
  - Descripción: Vector de pesos que permite en la reconstrucción dar mayor o menor relevancia a ciertas mediciones por sobre otras. Por ejemplo, si se conoce que algunas mediciones tienen menor nivel de error que otras, se les puede dar un mayor peso.
  - Observación: Si no se quiere imponer preferencia por ciertas mediciones, $weights$ es un vector de unos. Si a una medición se le asigna peso 0, eso es equivalente a borrar esa medición.
- Output: $reconf$
  - Tipo: Vector de números, de largo nI.
  - Descripción: Altura de la superficie reconstruida en cada vértice de $domain$.
  - Observación: Corresponde a una representación de la superficie de quiebre reconstruida.

3.5.4. Otras Rutinas

Todas las rutinas, implementadas en archivos .m de Matlab, incluyen comentarios que detallan como funcionan.

3.5.5. Manual de Uso

El script samplerun.m indica en detalle como correr la secuencia de funciones y donde ingresar los valores de entrada. También incluye los ejemplos de como re-crear los casos de estudio de Diablo Regimiento y Pilar Norte presentados en este informe.

Capítulo 4

Estudio de Fuentes Sísmicas con Time-Reversal y Mínimos Cuadrados

4.1. Resumen de la Linea

Durante el proceso de explotación de la mina, los cambios mecánicos que va sufriendo el macizo rocoso producen eventos sísmicos. Estos eventos son registrados por una red de geosensores (ver figura 4.1), y las mediciones obtenidas por la red de geosensores se utilizan para estimar, entre otras cosas, la ubicación de la fuente sísmica (el epicentro) y el tiempo en que ocurrió el evento.

El objetivo principal de esta línea es utilizar las mediciones sísmicas para ahondar en el estudio y caracterización de los eventos sísmicos que ocurren durante el proceso productivo de la mina. Un caracterización adecuada de los eventos sísmicos entrega información mecánica importante de los lugares donde estos ocurren, lo que ayudaría a estimar el avance de la superficie de quiebre durante el proceso de extracción.

Para este estudio se propuso originalmente utilizar el método de time-reversal (descrito en la subsección 4.3.2). Pero a pesar de un comportamiento adecuado en la experimentación sintética, el método no entregó resultados satisfactorios en los casos de mediciones reales (ver Sección 4.4).

Ante los resultados poco satisfactorios obtenidos mediante time reversal, se propuso la alternativa de estudiar las fuentes sísmicas mediante una reconstrucción por mínimos cuadrados y una clasificación de acuerdo a su componente más pequeña (ver subsecciones 4.3.3 y 4.3.4). Esta alternativa produjo resultados más robustos y con una evaluación positiva. En la sección siguiente se presenta el estudio realizado con este método.

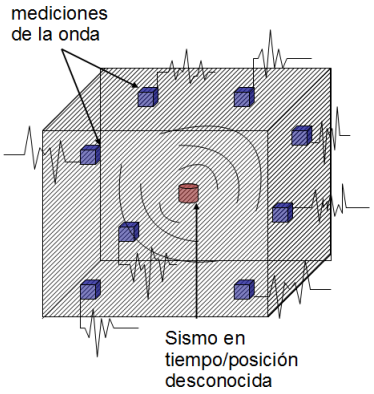


Figura 4.1: Esquema de medición de un evento sísmico: el cilindro rojo representa la fuentes sísmica, los cubos azules representan la red de geosensores donde se obtienen las mediciones del sísmo.

4.2. Estimación con Mínimos Cuadrados y Clasificación

El método que aquí se presenta consiste en dos etapas: 1) una reconstrucción de las fuentes sísmicas modeladas como una fuerza, a partir de las mediciones sísmicas; y 2) una clasificación de las fuentes reconstruidas, separándolas en: fuentes contenidas principalmente en un plano; o fuentes con componentes comparables en todas las direcciones. Se postula que las fuentes sísmicas con componentes comparables en todas las direcciones corresponden a eventos poco confinados y por lo tanto cercanos a la superficie de quiebre.

4.2.1. Estimación de las Fuentes Sísmicas

Para cada evento sísmico se utiliza la estimación del epicentro dada por la red de geosensores y las mediciones de la onda sísmica en los geosensores. Esta información se utiliza para estimar las tres componentes temporales de la fuente sísmica, descrita como una fuerza.

A modo de ejemplo, presentaremos el análisis para el evento sísmico *1998_aug_02_07_30_40.d5g* (registrado así en la red de geosensores), que fue medido por siete sensores. Se conoce la posición espacial de cada sensor y cada sensor mide las tres componente del campo de velocidades de la onda sísmica. Por ejemplo, en la figura 4.2 se muestran las tres componentes del campo de velocidades medidas por el sensor 1 del evento.

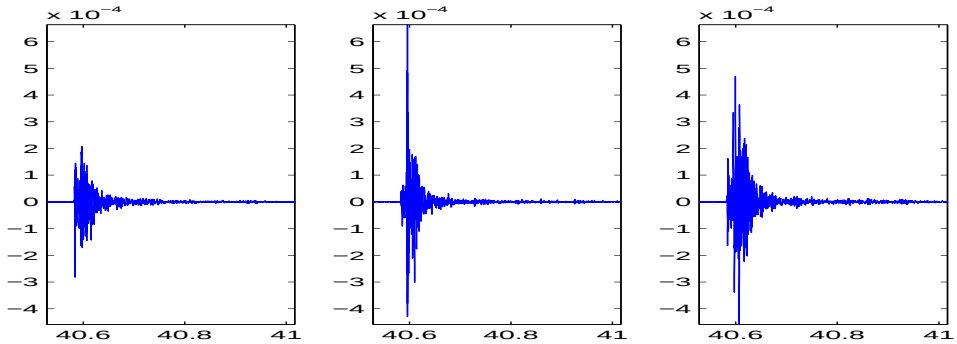


Figura 4.2: Medición del campo de velocidad del sísmo en el sensor 1, evento *1998_aug_02_07_30_40.d5g*.

Utilizando las mediciones de los siete sensores se utiliza el modelo descrito en la subsección 4.3.3 y se estima la fuente sísmica, estimación que se muestra en la figura 4.3

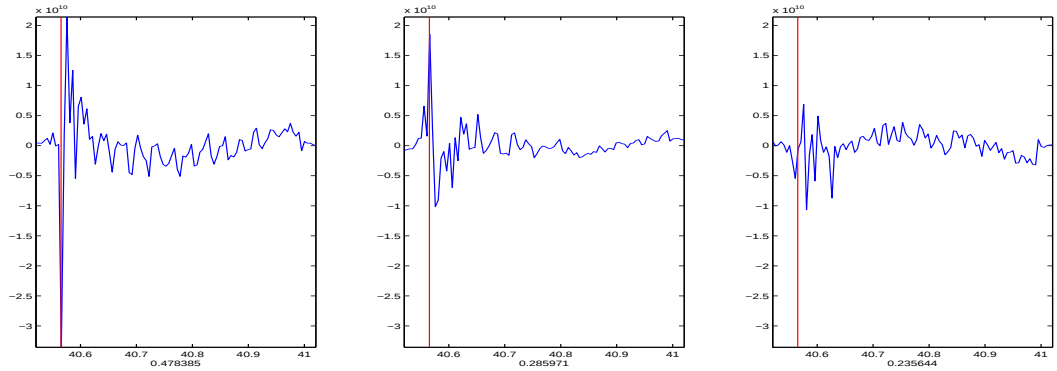


Figura 4.3: Estimación por mínimos cuadrados de la fuente como una fuerza para el evento *1998_aug_02_07_30_40.d5g*. La linea roja representa el tiempo del evento estimado independientemente por la red de geosensores.

La linea azul en la figura 4.3 corresponde a la estimación de la fuente sísmica, que obtenemos mediante mínimos cuadrado. La línea roja corresponde al tiempo de origen del evento, estimado independientemente por la red de geosensores. La concordancia entre ambas estimaciones independientes es un muy buen indicio de la robustez del método.

4.2.2. Clasificación de las Fuentes Sísmicas.

Una vez reconstruida la fuente sísmica, la clasificaremos dependiendo de si es una fuente contenida en un plano, o si es una fuente con componentes comparables en todas las direcciones. La figura 4.3 presenta las componentes X, Y, Z de la reconstrucción de la fuente sísmica, pero una fuente plana no tiene por qué estar alineada con los ejes cartesianos, y por ende el primer paso en la clasificación es una rotación de la fuente que identifique su componente más pequeña. Este análisis de componentes principales, aplicado a la reconstrucción del evento *1998_aug_02_07_30_40.d5g*, entrega el resultado presentado en la figura 4.4.

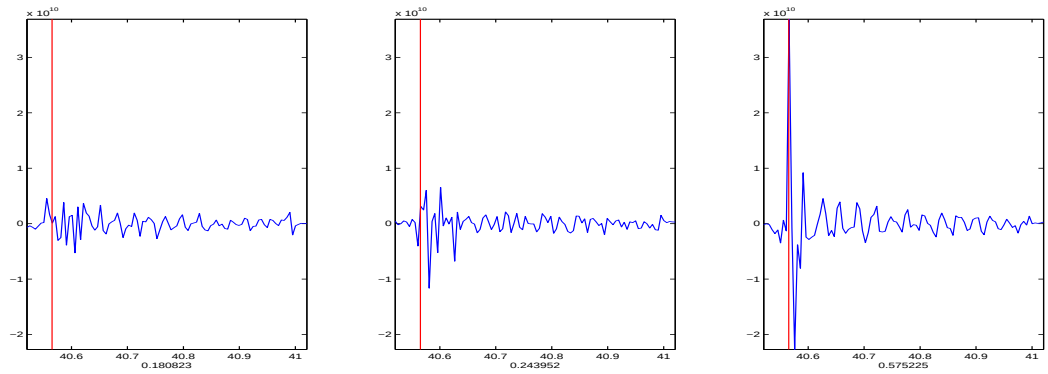


Figura 4.4: Filtro y rotación de la fuente como una fuerza para el evento *1998_aug_02_07_30_40.d5g*. La componente más pequeña contiene un 18 % de la energía total de la fuente.

Para el evento *1998_aug_02_07_30_40.d5g*, la componente más pequeña de la reconstrucción de la fuente sísmica contiene solo un 18 % de la energía total de la fuente (el valor mínimo es 0 %, el valor máximo es 33 %). Incluyendo las consideraciones de errores en las mediciones y en el modelo, en primera instancia esta fuente se clasificaría como una fuente contenida en un plano. Pero para poder realizar una

clasificación adecuada de las fuentes hay que realizar este análisis para una familia de eventos y estudiar la distribución de los valores de la componente más pequeña.

4.2.3. Conclusión Estimación y Clasificación de Fuentes

Aplicamos el método descrito a 29 eventos sísmicos disponibles (ver subsección 4.6.2). Los valores obtenidos para las componentes más pequeñas (después del filtrado y la rotación) se presentan en la figura 4.5

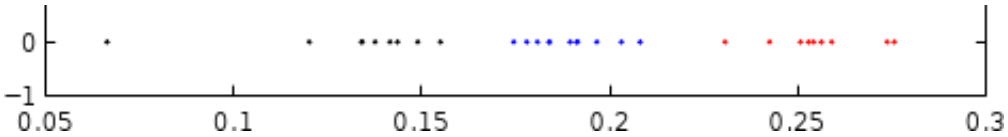


Figura 4.5: Valores de la componente más pequeñas de las fuentes sísmicas reconstruidas. Se considereraron 29 eventos sísmicos. Dada la distribución de los valores, se clasificaron en tres grupos.

El valor para estas cantidades varia entre 0 y 1/3. Valores cercanos a 0 corresponden a fuentes contenidas principalmente en un plano, valores cercanos a 1/3 corresponde a fuentes con componentes comparables en todas las direcciones.

Al estudiar las 29 fuentes reconstruidas se observa acumulamiento de las primeras componentes en tres grupos. Aquellos sismos con primera componente por debajo de 0.165, sismos con primera componente entre 0.165 y 0.22 y sismos con primera componente mayor a 0.22. Por un lado, el número de eventos estudiados no es lo suficientemente grande como para esperar que una estructura tan particular de acumulamiento sea general y sería apresurado hacer tal afirmación. Por otro lado, la familia de eventos considerados si es lo suficientemente grande como para concluir que el método desarrollado permite una diferenciación entre eventos planos y eventos con componente comparables en todas direcciones, siendo una herramienta adecuada para la clasificación de fuentes sísmicas..

En particular, la clasificación obtenida por este método se puede ocupar como información complementaria para la clasificación requerida en otra linea de este proyecto.

4.3. Modelos

4.3.1. Ecuación de Ondas Elástica

Consideraremos que la propagación de la onda sísmica en el medio rocoso esta bien modelada por la ecuación de onda elástica en un medio homogéneo sin fronteras. Es decir, si $u(x, y, z, t)$ representa el desplazamiento en el punto (x, y, z) debido a la onda, en el tiempo t, entonces asumimos que la propagación de la onda u está modelada adecuadamente por la ecuación

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot u) + \mu \nabla \times (\nabla \times u) = F \qquad \text{en} \quad \mathbb{R}^3 \tag{4.1}$$

donde la densidad ρ y los parámetros de Lamé λ, μ se asumen constantes y conocidos. El lado derecho F es la fuente (fuerza localizada) del sísmo.

Para resolver la ecuación (4.1) tenemos una expresión explícita de la función de Green, es decir del campo de desplazamientos en la dirección i debido a un impulso en la dirección j en el tiempo $t = 0$

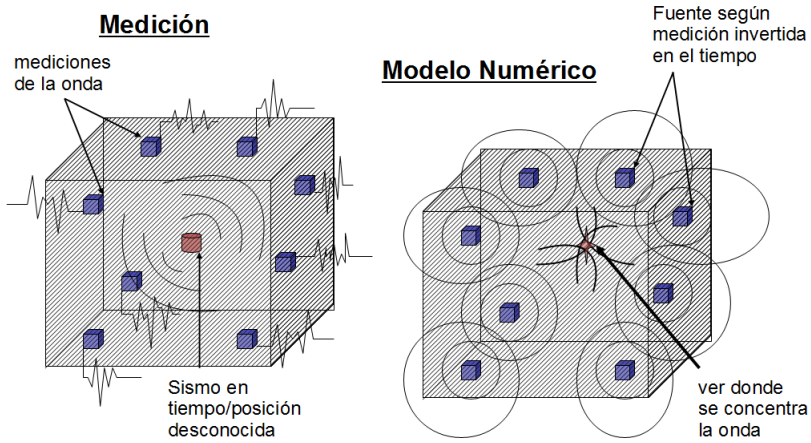


Figura 4.6: Esquema de Time-Reversal.

$(i, j \in \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\})$. Tenemos que $G_i, j = 0$ para $t < 0$ y para $t \geq 0$

$$G_{ij}(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi\rho}\big(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}\big)\frac{t}{r^3}{}_{[\frac{r}{\alpha},\frac{r}{\beta}]}(t) + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\gamma_i\gamma_j\frac{1}{r}\delta(t-\frac{r}{\alpha}) - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2}\big(\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}\big)\frac{1}{r}\delta(t-\frac{r}{\beta})$$

donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\gamma_{\hat{x}} = x/r$ (análogo para $i \in \{\hat{y}, \hat{z}\}$), $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y 0 si $i \neq j$, ${}_A(t) = 1$ si $t \in A$ y 0 si $t \notin A$, $\delta(\cdot)$ es el delta de Dirac en el tiempo (una dimensión) y donde $\alpha = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ y $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ son las velocidades de la onda p y s respectivamente.

4.3.2. Modelo de Time-Reversal

La observación principal que motiva y justifica el método de time reversal es que si $u(x,y,z,t)$ es una solución de la ecuación elástica, entonces $\tilde{u}(x,y,z,t) = u(x,y,z,T-t)$ también es una solución de la ecuación elástica con los $\mathbf{mismos\ coeficientes}$.

Si se mide $u(x,y,z,t)$ en toda la frontera Σ de algún conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, durante un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, se puede resolver la ecuación

$$\rho\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2} - (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\hat{u}) + \mu\nabla\times(\nabla\times\hat{u}) = 0$$
$$\hat{u}(x,y,z,t) = u(x,y,z,t_2-t) \text{ para } (x,y,z) \in \Sigma, t \in [0, t_2-t_1]$$

La unicidad de la solución implica que con condiciones adecuadas $\hat{u}(x,y,z,t) = u(x,y,z,t_2-t)$ en Ω para todo $t \in [0, t_2-t_0]$, obteniendo $u(x,y,z,t_2-t_0)$ en el momento del sísmo y por ende recuperando la fuente sísmica (en principio t_0 no es conocido y también debe ser recuperado en este proceso).

En el método de time-reversal se propone invertir el tiempo en las mediciones y ocuparlas como fuentes sintéticas para producir una onda que se concentre en la fuente sísmica original, recuperando así la posición, el tiempo en que se originó y la forma de ésta (el soporte de la fuente original), ver figura 4.6.

Más específicamente, la onda u (o derivadas temporales de u que permitirían recuperar u) se mide en K estaciones, localizadas en $\{r_k\}_{k=1}^K$ (cada $r_k = (x_k, y_k, z_k)$) y por intervalos de tiempos $[0, T]$ con con $0 < t_0$ y T suficientemente grande. Para cada $k = 1, ..., K$ resolvemos la ecuacion

$$\rho\frac{\partial^2\hat{u}_k}{\partial t^2} - (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\hat{u}_k) - \mu\nabla\times(\nabla\times\hat{u}_k) = \delta_{r_k}(r)u(r_k, T-t) \text{ para } t \geq 0 \qquad (P_k)$$

y definimos $\hat{u} = \sum_{k=1}^{K} \hat{u}_k$. Si la cobertura de los geófonos es suficientemente adecuada respecto al origen de la fuente sísmica, entonces $\hat{u}$ debería relacionarse con la propagación invertida de la onda original (i.e. $u(x, y, z, T - t)$) y la focalización de $\hat{u}$ se podría utilizar para identificar el momento t_0 en que ocurrió el sismo y obtener la forma espacial de la fuente sísmica.

Se puede resolver la ecuación (P_k) ocupando la función de Green, que conocemos explícitamente y está descrita arriba. Si $G = [G_{ij}]_{i,j=1,2,3}$ es la matriz simétrica de 3×3 con componentes G_{ij}, entonces $\hat{u}_k(x, y, z, t)$ se puede calcular como

$$\hat{u}_k(x, y, z, t) = \int_0^t G((x, y, z) - r_k, t - \tau) \cdot u(r_k, T - \tau) d\tau$$

(donde $G \cdot u$ es el producto entre una matriz de 3×3 y un vector en $\mathbb{R}^3$). Es decir $\hat{u}_k$ corresponde a la convolución en el tiempo entre la seña del geófono localizado en r_k invertida en el tiempo, y la función de Green trasladada a r_k.

Una vez construida $\hat{u}$ se puede estudiaría el momento y la forma en la cual se focaliza, lo que debería corresponder al momento y la forma de la fuente sísmica.

4.3.3. Estimación de Fuentes Utilizando Mínimos Cuadrados.

Como describimos anteriormente, una fuente sísmica (una fuerza) localizada en $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y modulada temporalmente según $s(t)$, se puede incluir en la ecuación (4.1) como un lado derecho de la forma $s(t)\delta_{r_0}(r)$.

Denotando la función de Green de la ecuación como $G(r|t)$, podemos calcular el campo de desplazamiento de la onda en el punto $r = (x, y, z)$ en el tiempo t, como

$$u(r, t) = [G(r - r_0|\cdot) * s(\cdot)](t).$$

Las mediciones corresponden (despues de integrar temporalmente si es necesario) al campo de desplazamiento, a lo largo del tiempo, en las posiciones $\{r_k\}_{k=1}^{K}$. Es decir, nuestras mediciones corresponde al conocimiento de $u_k(t) := u(r_k, t)$ para t en un intervalo $T_k \subset \mathbb{R}$.

Asumiendo que la posición r_0 de la fuente es conocida (obtenida por ejemplo mediante tiempos de viaje) y que $s(t)$ esta soportado cerca de un tiempo t_0 conocido (también obtenido por tiempos de viaje por ejemplo), queremos plantear un método de reconstrucción de $s(t)$ mediante mínimos cuadrados.

Consideremos $\{\varphi_j\}_{j=1}^{J}$ una familia de funciónes linealmente independientes, soportadas alrededor de t_0, que nos permitan describir $s(t)$ aproximadamente. Es decir, consideraremos que

$$s(t) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \varphi_j(t), \forall t$$

La familia $\{\varphi_j\}_{j=1}^{J}$ está dada y el objetivo es encontrar $\{\alpha_j\}_{j=1}^{J}$ a partir de las mediciones. Para esto, según el modelo de propagación de onda, tenemos que α_j deberían cumplir, para todo $k = 1, ..., K$ y

para todo $t \in T_k$, que

$$\begin{aligned} u_k(t) &= [G(r_k - r_0) * s](t) \\ &= [G(r_k - r_0) * \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \varphi_j](t) \\ &= \sum_{j=1}^{J} \alpha_j [G(r_k - r_0) * \varphi_j](t). \end{aligned}$$

Encontraremos los valores $\{\alpha_j\}_{j=1}^{j}$ resolviendo la ecuación anterior, o escogiendo aquellos que la se acerquen lo más posible a resolverna. Más explícitamente, encontraremos los α_j como

$$\{\alpha_j\} = \arg\min_{\{\alpha_j\}} \Big(\sum_{k=1}^{K} \int_{T_k} \Big(u_k(t) - \sum_{j=1}^{J} \alpha_j [G(r_k - r_0) * \varphi_j](t) \Big)^2 dt \Big)$$

Como las mediciones temporales son efectivamente discretas, lo anterior se puede escribir de manera matricial como

$$\arg\min ||u - \alpha \cdot A||^2$$

donde $u = (u_k(t))_{k=1,...,K;t\in T_k}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_J)$ y $A = \Big([G(r_k - r_0) * \varphi_j](t) \Big)_{k=1,...,K;t\in T_k;j=1,...,J}$ escritos de manera adecuada. El problema anterior es un problema estándard de mínimos cuadrados y la solución (de menor norma en caso de admitir múltiples minimizantes) se escribe como

$$\hat{\alpha} = u \cdot A^t \cdot (AA^t)^\dagger$$

(donde $B^\dagger$ es la pseudo-inversa de Perron cuando B no es invertible). Esto entrega una reconstrucción de $s(t)$ como

$$\hat{s}(t) = \sum_{j=1}^{J} \hat{\alpha}^j \varphi_j(t)$$

4.3.4. Clasificación de Fuentes Reconstruidas.

Al tener reconstrucciones de las fuentes sísmicas, queremos encontrar una posible clasificación de las fuentes según la proximidad de éstas a la superficie de quiebre. Obteniendo así información sobre la posición de la superficie de quiebre.

En la linea sísmica del proyecto se presentaron ideas y criterios relacionados a la superficie de quiebre, para clasificaciones de las fuentes síismicas. Dado que los investigadores de esa linea entienden mucho mejor que nosotros los mecanismos geofísicos involucrados en la fractura de la roca, nos dimos la libertad de tomar prestado uno de los criterios que propusieron, haciendo aquí explıcito que la autoría de esa idea pertenece a los investigadores de esa linea.

Básicamente, la idea es separar los sísmos en aquellos correspondientes a fracturas de cizalla y en aquellos correspondientes a implosión de roca.

Interpretamos esta caracterización como eventos correspondientes a fuentes sísmicas contenidas mayoritariamente en un plano y fuentes sísmicas con componentes comparables en todas las direcciones.
Para poder identificar estos dos casos, encontramos la dirección de menor proyección para cada fuente sísmica y calculamos la fracción de la fuerza que se proyecta en esa dirección. Ésto se obtiene haciendo un cambio de base de la fuente reconstruida $s(t) \in \mathbb{R}^3$ sobre los vectores propios de la matriz $[S_{ij}]_{i,j=1,2,3}$, donde $S_{ij} = \int s_i(t)s_j(t)dt$.
La proyección de menor componente contiente entre 0 y 1/3 de la fuerza total. Si la menor componente es 0 la fuente sísmica está contenida en un plano, si la menor componente es 1/3 la fuente sísmica tiene componentes completamente comparables en todas las direcciones.
Idealmente, un valor límite para la separación entre fuentes planas y fuentes isotrópicas aparecerá naturalmente al estudiar una familia de eventos sísmicos.

4.4. Resumen Dificultades y Conclusión en Time-Reversal

4.4.1. Tamaño del problema

La primera dificultad que tuvimos que enfrentar al pasar de los test sintéticos a los datos reales, fue el tamaño del problema. Un dominio de $800 \times 800 \times 300$ metros, discretizado cada 10 metros, y con un muestreo temporal comparable al que viene en las mediciones de los sensores, significaba el calculo del alrededor de 2×10^{10} variables, lo que rápidamente se volvía computacionalmente intratable.
Intentando superar esta dificultad, desarrollamos un método de subsampleo variable para las mediciones de los sensores. Cambiamos así mismo la estructura de datos en nuestro modelo numérico y reimplementamos los métodos numéricos de propagación de ondas para poder trabajar con esta nueva estructura de datos. Después de estos cámbios, obtuvimos una implementación que nos permitió correr ejemplos no muy grandes pero con datos reales y cuyos tiempos de computo eran factibles (alrededor de 90 minutos).

4.4.2. Cobertura de Geosensores

La siguiente dificultad que tuvimos que enfrentar, fue la baja cobertura de sensores alrededor de la fuente sísmica. El bajo número de puntos de medición, implica una sobreponderación de los geófonos más cercanos y una sobreponderación de las direcciones con mayor densidad de sensores. Corregimos parcialmente la sobreponderación por distancia (utilizando una primera estimación de las distancias del geófono a la fuente sísmica y la expresión del núcleo de Green), pero no logramos lidiar con la distribución no homogénea de los sensores. De todas maneras, pareciera ser que más alla de estos fenómenos de sobreponderacón, la baja cantidad de puntos de medición en cada evento no permite recobrar demasiada información espacial de la fuente sísmica.

4.4.3. Conclusión

A pesar de los esfuerzos mencionados, nuestra evaluación final del método de time-reversal con las pocas mediciones disponibles (al menos en nuestra implementación) no es positiva. Está lejos de producir resultados al nivel de las expectativas que teníamos. Se observa una focalización de la onda de time reversal

en la posición y tiempos adecuados, pero es de muy baja resolución y no presenta suficiente estabilidad para una estimación robusta de la posición, tiempo de origen y forma espacial de la fuente sísmica. Dada esta evaluación, propusimos como alternativa el método presentado en la sección 4.2.

4.5. Descripción del Software y Manual de Uso

4.5.1. Forma de importar los datos al sistema

La información desde los archivos de texto codificados en ascii se importan por medio de un script en python. El script toma cada archivo de los eventos sísmicos y genera una carpeta con un nombre y además con el sufijo FOLDER.

4.5.2. Descripción de estructuras de datos

Las información de un evento está almacenada en dos clases matlab con los nombres Event.m y Geonsensor.m los cuales están relacionados como se muestra en la figura.
El detalle de estos clases se muestra en la siguiente lista:
Los métodos de las clases se describirán en el resumen de la implementación de las funciones en matlab.

4.5.3. Resumen de implementacion (En Matlab y Python)

Scripts en Python

readFile.py Se usa una rutina en python para separar la informacón desde los documentos de los geófonos y convertirla a archivos que servirán de imput que funciones matlab trasnformen la información a objetos matlab.

patterns.py Conjunto de expresiones regulares con la información necesaria que luego se extraerá mediante readFile.py.

Clases Matlab

Event.m Clase que contiene una lista de geófonos y los parámetros de un evento sísmico especifico. Estos son los atributos de los set de datos entregados por Codelco. Los atributos principales son de esta clase son:

- count: Cantidad de geofonos que hicieron mediciones en el evento sísmico medido.
- name: Nombre del evento sísmico y que tiene caracter único.
- alpha: Velocidad de la onda p.
- beta: Velocidad de la onda s.
- rho: Densidad del medio rocoso
- LocR: Ubicación estimada de la fuente dada por el set de datos.
- origintime: Tiempo estimado de la fuente dado por el set de datos.
- gss: lista de objetos del tipo **geosensor** que representan a cada uno de los geófonos con sus atributos y mediciones.
- src: Donde se almacena la estimación de la fuente
- filtsrc: Estimación de la fuente filtrada.

- err: Error de estimación de la fuente por mínimos cuadrados.

Geonsensor.m Clase que contiene la información de cada uno de los geofonos en un evento específico. Contiene las mediciones y atributos que definen totalmente a un geofono en un evento en específico.

- firsttime: Tiempo de la primera medición del geófono
- lasttime: Tiempo de la última medición del geófono
- resampleSize: Cantidad de mediciones del campo de desplazamiento del sismógrafo remuestreado.
- timeresamplevector: Vector de tiempo remuestreado.
- timevector: Vector de tiempo de la medición
- diferenciaPSvalida: es 0 si el tiempo de llegada de la onda p es menor al tiempo de llegada de la onda s
- medicionesValidas: Vector Booleano (b_1, b_2, b_3) que dice que dimensiones del sismográma tiene mediciones.
- r0: Posición física del geófono.
- hardware_sampling_rate: Frecuencia de muestreo del geófono.
- resampling_rate: Frecuencia variable de remuestreo del campo de desplazamiento de la señal.
- period: Periodo variable, cumple la relación period = 1/resampling_rate
- TriggerPosition: indice del tiempo estimado en donde ocurrió el evento sísmico.
- r_x: Campo de desplazamiento remuestreado en el eje x
- r_y: Campo de desplazamiento remuestreado en el eje y
- r_z: Campo de desplazamiento remuestreado en el eje z
- L: Cantidad de mediciones del sismógrama.
- data: Mediciones.
- t_time: Tiemoo en el cual
- p_time: Tiempo de llevada de la onda p
- s_time: Tiempo de llegada de la onda s
- validP: Flag que indica la validez de la onda p
- validS: Flag que indice la validez de la onda s
- validSP Flag que indica la validez de ambas ondas no, necesariamente es la conjunción de validP y validS.
- IsAccelerometer: Flag que indica si es el geófono es un acelerómetro.
- IsSpeedometer: Flag que indica si el geófono es un velocímetro.
- sensor_id: Clave identificadora del geófono.
- validAll: Flag que dice si en cada uno de los ejes existen mediciones válidas.

Documentación de las Rutinas Principales

Importar información a matlab desde los archivos procesados

- Archivo: script/importEvents.m
- Comando: events = importEvents()
- Descripción: Almacena la información desde los archivos tratados por el script python readFile.py a una vector de objetos Event en matlab.

- input: no recibe parámetros de entrada dado que hace lecturas sobre archivos de texto almacenados en disco.
- output: event lista de objetos del tipo Event que contienen a todos los eventos sísmicos almacenados en la carpeta './project/data sets'

Estimar la fuente de un evento sísmico como una fuerza

- Archivo: script/source.m
- Dependencia: filterLowPassSersor.m scalarGreenKernel.m
- Comando: [src, filtsrc, error] = source(event, nSrc, L, por)
- Dependencia: filterLowPassSersor.m scalarGreenKernel.m
- Descripción: Estima la fuente como una fuerza $\hat{s}(t)$ en un intervalo de tiempo de largo L dado el conjunto de sismógrafos que definen al evento por medio de mínimos cuadrados. Los geofonos son los mismos de **event** con una discretización del dominio con **nSrc** con una fracción **por** de la fuente antes de **event.origin_time** es cual es el valor estimado por codelco.
- input:
  - event: Objeto del tipo Event el cual representa el sísmico del cual se quiere obtener la estimación de la fuente $f(t)$ como una fuerza.
  - nSrc: número de puntos de la discretización uniforme en el tiempo con la cual se va a estimar la fuente.
  - L: largo de la ventana de tiempo en donde se va a estimar la fuente
  - por: porcentaje de la ventana de tiempo que está antes del tiempo de origen estimado por el documento del evento.
- output:
  - src: fuente sismica como una fuerza en el punto r_0 estimado desde los valores dados por las mediciones de los geofonos
  - filtsrc: src pero filtrada eliminando los modos bajos
  - error: error de estimación $\sum_{k,t} \|\hat{u}_k[t] - u_k[t]\|_2^2$

construcción de un sismograma dada una fuente

- Archivo: script/constructsensor.m
- Dependencia: scalarGreenKernel.m
- Comando: [gsRec] = constructsensor(event, index, src)
- Descripción: de el evento **event** considera el dominio temporal del geófono número **index** y recosntruye la señal en ese dominio dado por una fuente de la forma **src**.
- input:
  - event: Evento del cual se desea hacer una reconstrucción de los sismogramas
  - index: Indice del geófono que se quiere estimas dentro de la lista existente en **event**
  - src: Fuente sísmica como fuerza que al ser convolucionada con la función de Green de la ecuación de onda elástica recontruirá al sismograma del geófono index.

- output:
    - gsRec: sismograma reconstruido.

Función de Green

- Archivo: script/scalarGreenKernel.m
- Comando: [G11,G12,G13,G22,G23,G33] = scalarGreenKernel(x,y,z,T, alpha, beta,rho)
- Descripción: retorna cada uno de los elementos de la matriz simétrica que determina a la función de Green de forma discreta.
- input:
    - T: Dominio temporal discretizado en donde se va a calcular la función de Green.
    - (x,y,z): traslación r para hacer el cálculo de $G(r - r_0, t - t_0)$
    - t: traslación de t para hacer el cálculo de $G(r - r_0, t - t_0)$
    - alpha, beta, rho: velocidad de la onda p, onda s y densidad del medio respectivamente.
- output:
    - G11,G12,G13,G22,G23,G33 : Componentes de la matriz simétrica que representa a la función de Green para la ecuación diferencial elástica.
    -

Inversión de un conjunto de sismogramas en el tiempo

- Archivo: sripts/reverse_signal.m
- Dependencia: field.m
- Comando: [X, Y, Z, X_domain, Y_domain, Z_domain, T_domain] = reverse_signal(obj)
- Descripción:Genera la inversión en el tiempo de los sismogramas, eso se obtiene considerando al campo de desplazamiento del sismograma con una fuente.
- input:

Rotación de una fuente sísmica

- Archivo: scripts/rotate.m
- Comando: [rotatesrc] = rotate(src)
- Descripción: Toma un evento sísmico y lo rota mediante un cambio de base con respecto los vectores propios de la matriz de covariaza entre los ejes de la estimación de la fuente como una fuerza.
- src: Fuente sismica
- rotatesrc: Fuente sismica rotada

Remuestreo de un campo de desplazamiento de un sismograma

- Archivo: scripts/variableResample.m
- Comando: geo = variableResample(geo, error)
- Dependencia: find_tail_limit.m
- Descripción: Toma el campo de desplazamiento y la remuestre de forma variable de tal manera de almacenar mediante una cantidad mínima de datos la señal completa. La cantidad de datos remuestreados son los suficientes que produzcan que $\|\hat{u} - u\|_1 <=$ error

- input:
    - geo: Objeto del tipo geosensor sin las mediciones remuestreadas
    - error: Hace referencial al error de remuestreo
- out: geo: Objeto del tipo geosensor con dados remuestreados almacenados en los atributos r_x, r_y, r_z.

Seleccionar la parte de la señal de un sismograma

- Archivo: scripts/windowsErase.m
- Comando: ev = windowsErase(ev)
- Descripción: El costo de encontrar una fuente sismica depende de la cantidad de mediciones implicadas en cada uno de los sismogramas, como una parte del sismograma son solo mediciones ruidosas con se puede omitir para hacer una estimación más rápida en terminos computacionales.
- input ev: Objeto del tipo evento con todas las mediciones de campo de desplazamiento.
- output ev: Objeto del tipo event en el cual la ventana temporal de las mediciones es el tiempo de llegada de la onda p y la onda s

Clusterización de los eventos sismicos

- Archivo: scripts/clustering.m
- comando:
- Descripción: Visualización de la agrupación de las mediciones por medio de un algoritmos de agrupación de k-medias dada una norma l_2 de las componentes filtradas y rotadas de la fuente sísmica (fuerza).

4.5.4. Manual de uso

La importación de los datos desde los archivos dados se hacen mediante el program en python readFile.py que fué programado y testeado en un ambiente linux, dado que las rutas a carpetas son distintas entre los distintos sistemas operativos como lo son windows y otros basados en UNIX se hace necesaria la advertencia. El uso del programa propiamente tal está descrito en dos archivos archivos matlab, en el primero sampletimereversal.m se describe como invertir la señal en el tiempo. En el segundo archivo sampleRecSource.m se describen los pasos para la reconstruccion de una fuente sismica a partir de la información de los geofonos dados por Codelco.

4.6. Anexos

4.6.1. Test Reconstrucción de Fuentes con Mínimos Cuadrados

Para verificar que la implementación de reconstrucción por mínimos cuadrados es correcta, se diseño el siguiente test: mediante una fuente artificial se generan sintéticamente mediciones en las mismas posiciones que las de un evento real. Luego se reconstruye la fuente mediante mínimos cuadrados y se compara con la fuente artificial.

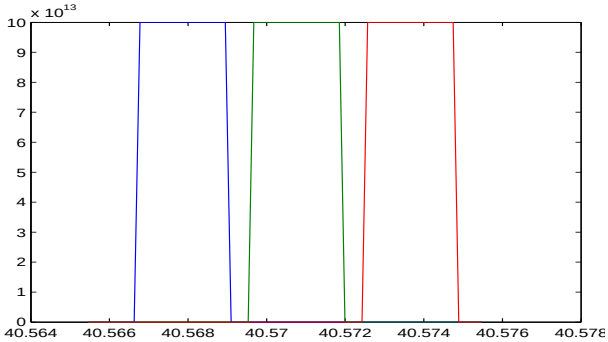


Figura 4.7: Fuente artificial para el test.

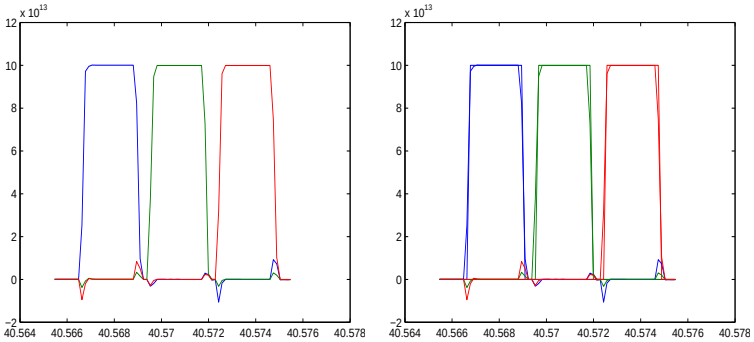


Figura 4.8: a) Reconstrucción de la fuente artificial. b) Sobreposición de la fuente artificial y su reconstrucción.

4.6.2. Eventos Analizados en la Subección 4.2.3

Las fuentes sísmicas, rotadas y filtradas, que se consideraron en la subseccion 4.2.3 son

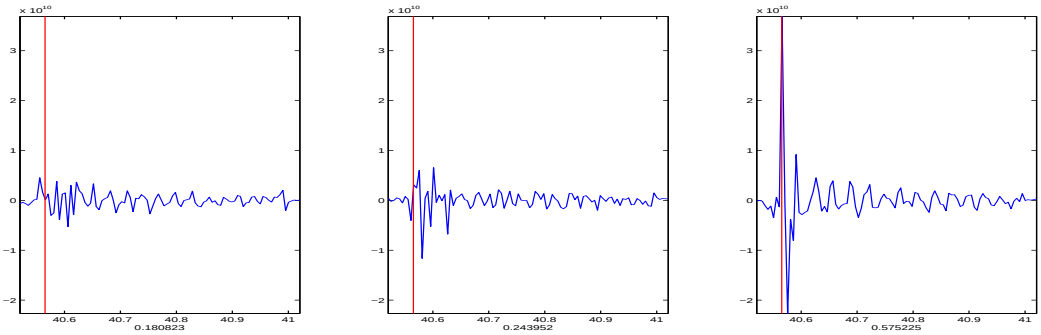


Figura 4.9: Filtro y rotación de la fuente como una fuerza para el evento 1998_aug_02_07_30_40.d5g

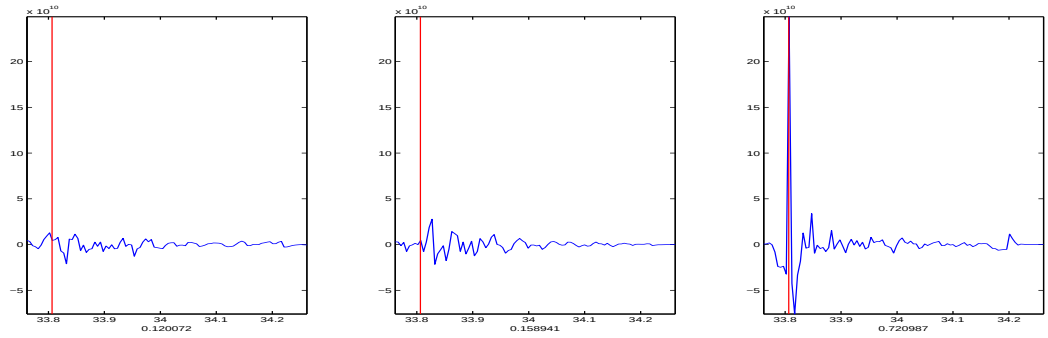


Figura 4.10: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_aug_07_16_24_33.i6b

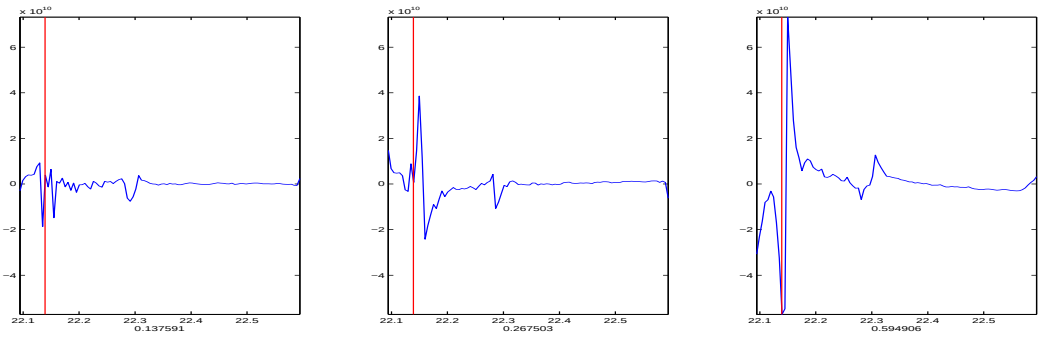


Figura 4.11: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_aug_09_21_49_22.4n3

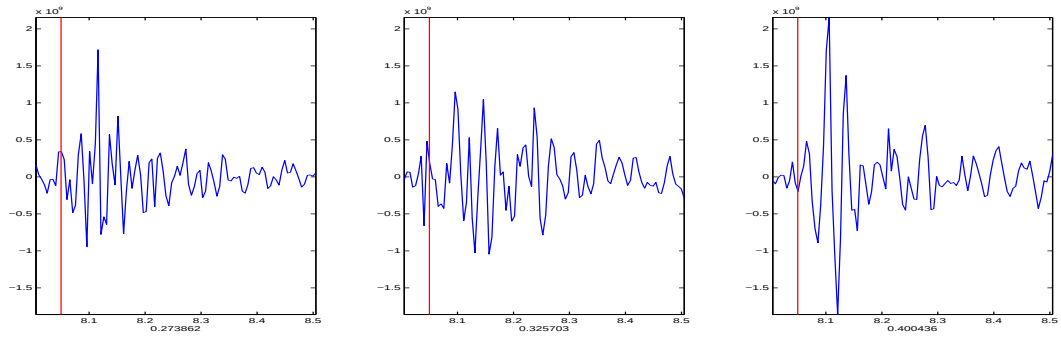


Figura 4.12: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_aug_10_07_42_08.2l6

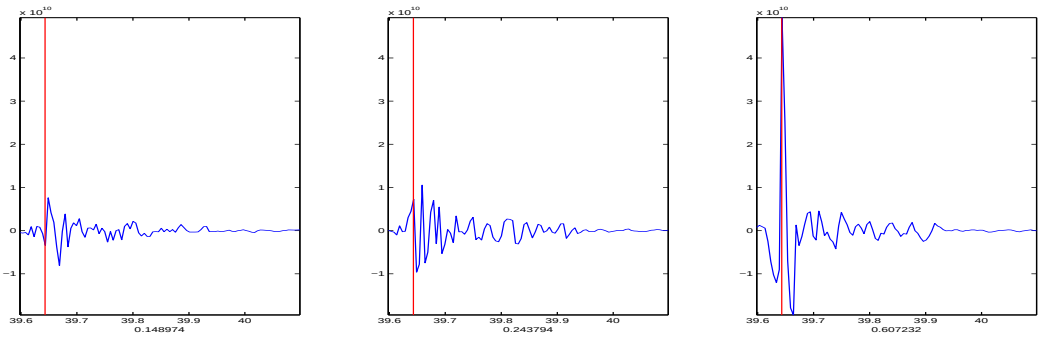


Figura 4.13: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_aug_20_08_37_39.ery

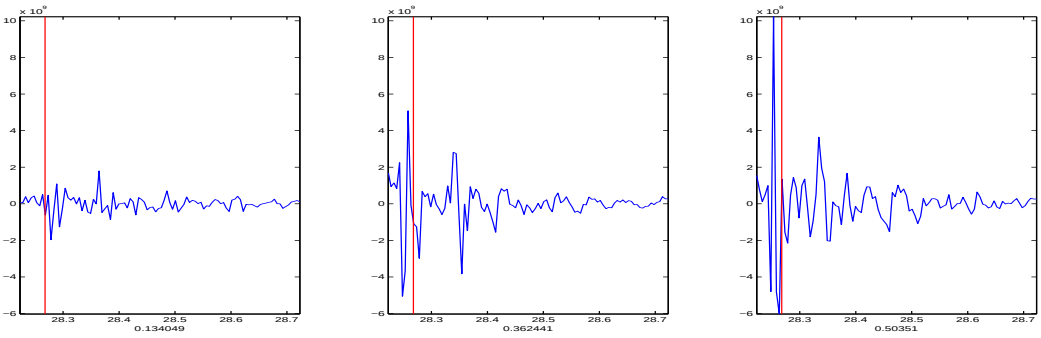


Figura 4.14: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jul_04_13_49_28.6bt

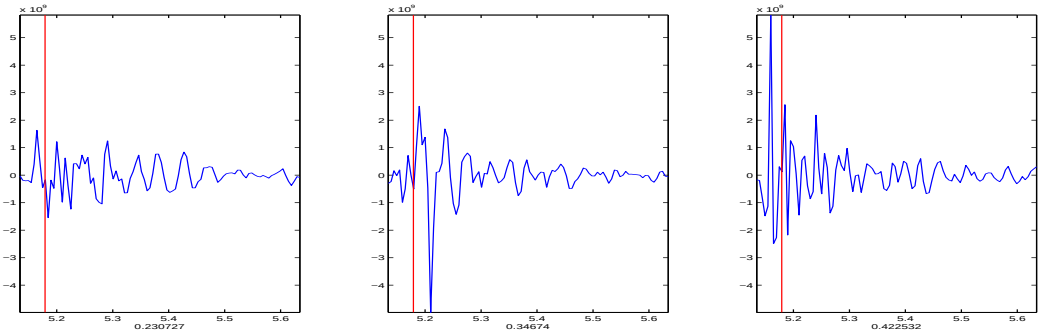


Figura 4.15: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jul_05_02_34_05.5hj

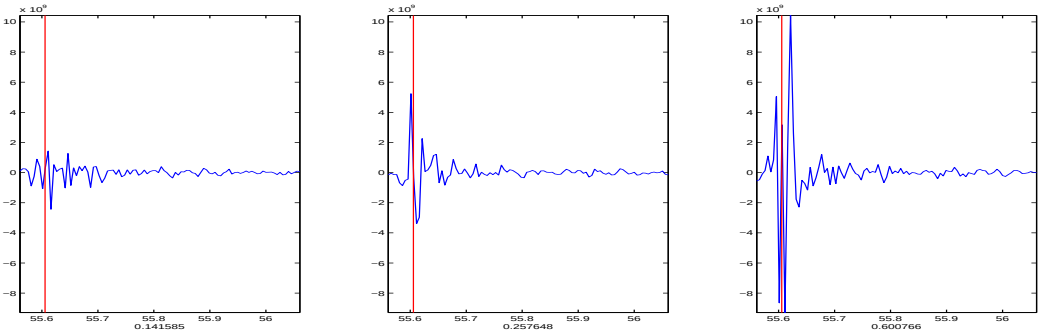


Figura 4.16: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jul_06_12_14_55.e8j

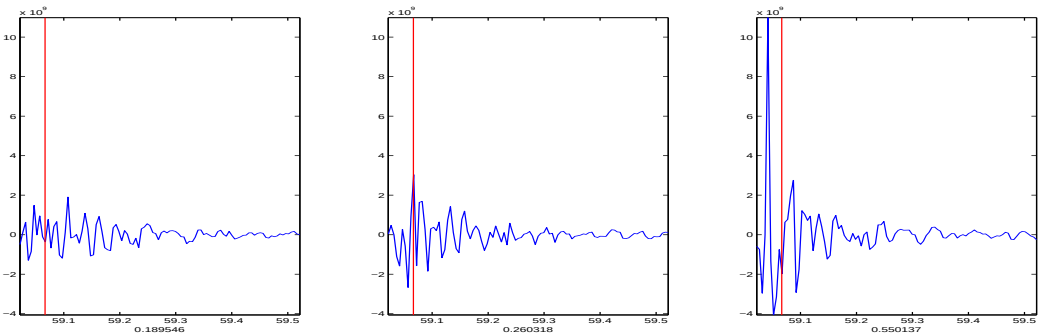


Figura 4.17: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jun_26_10_12_59.2ia

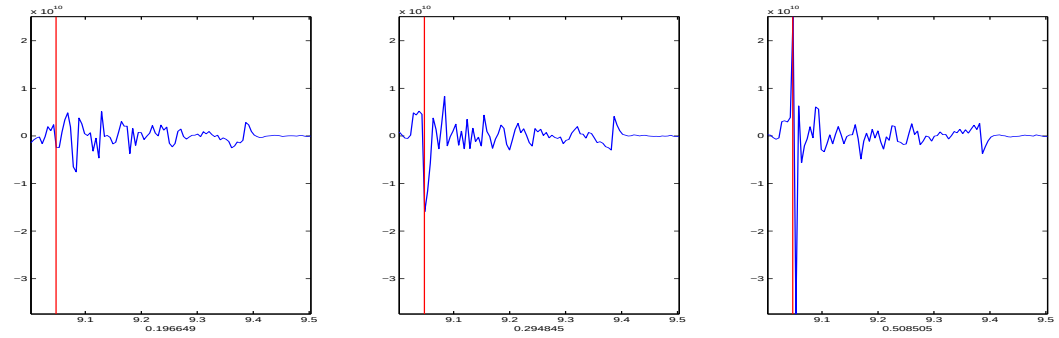


Figura 4.18: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jun_27_06_14_09.2jt

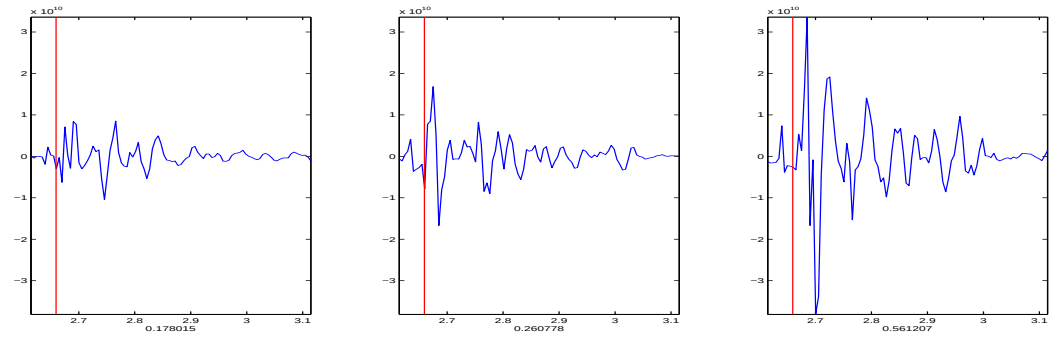


Figura 4.19: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jun_28_12_21_02.exs

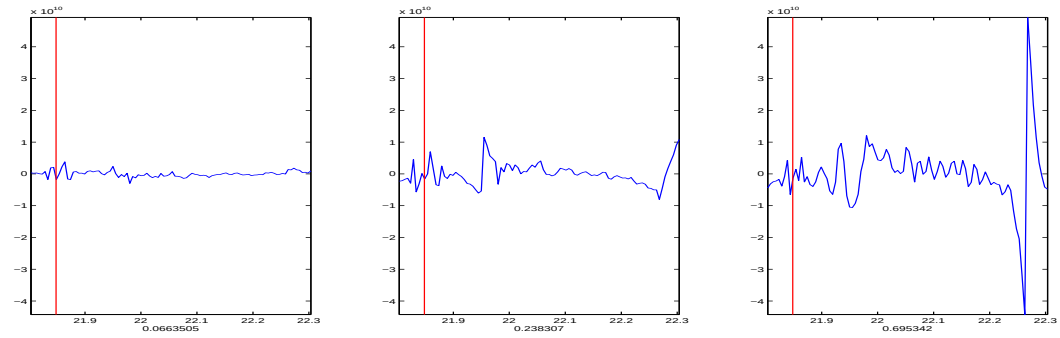


Figura 4.20: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_jun_29_22_24_21.jp6

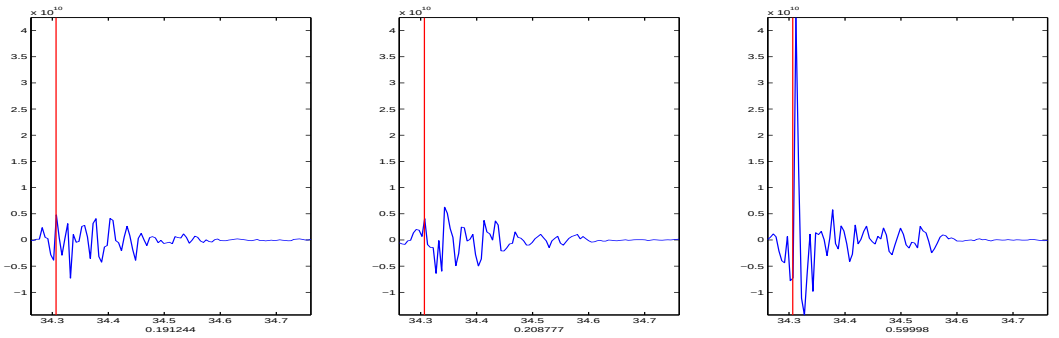


Figura 4.21: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_nov_01_22_40_34.7rv

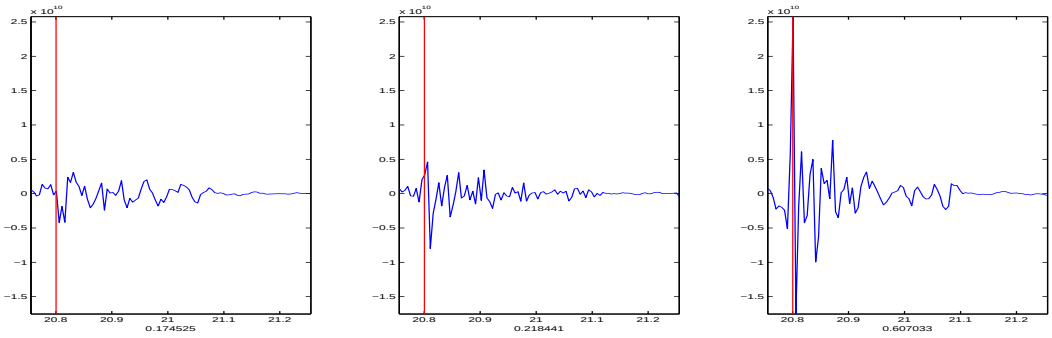


Figura 4.22: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_nov_02_14_15_20.j34

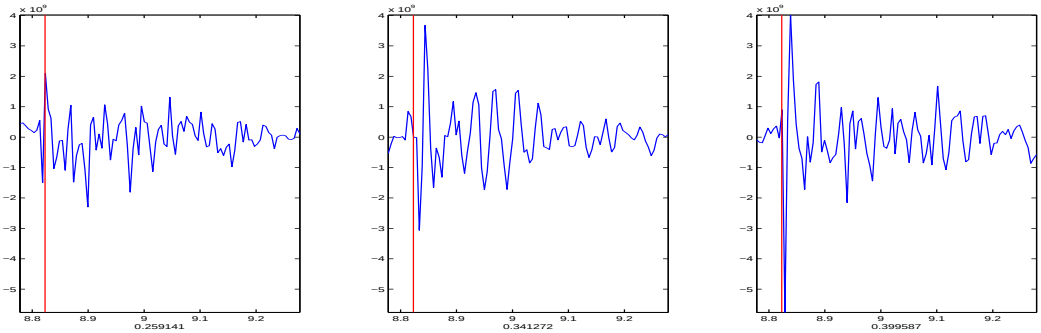


Figura 4.23: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_nov_07_21_23_08.ji5

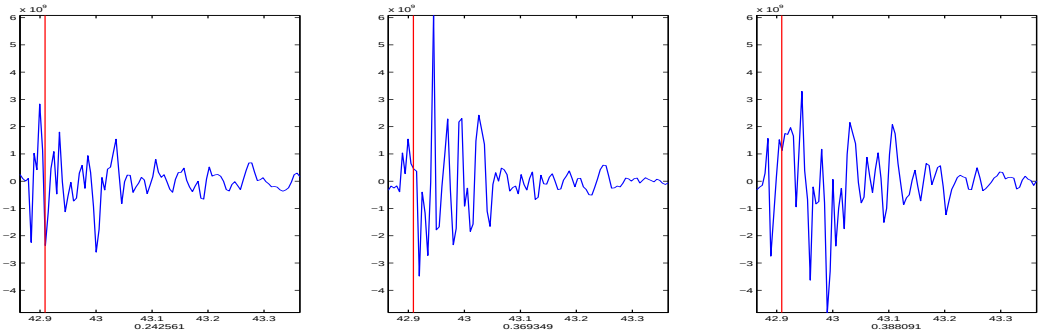


Figura 4.24: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_nov_13_06_30_43.00d

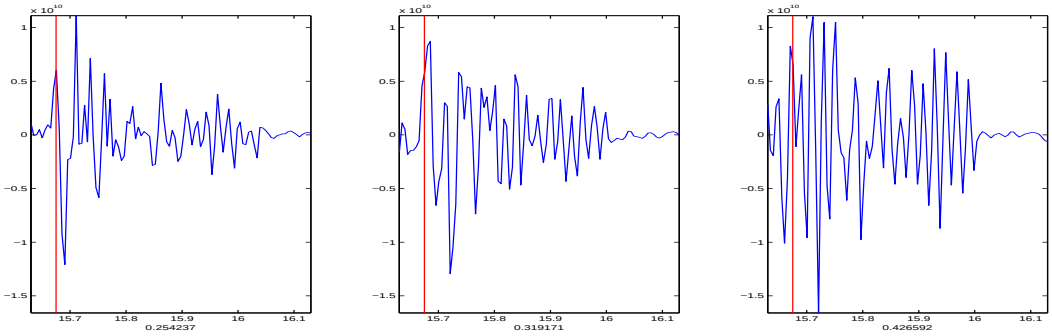


Figura 4.25: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_10_16_00_15.fzn

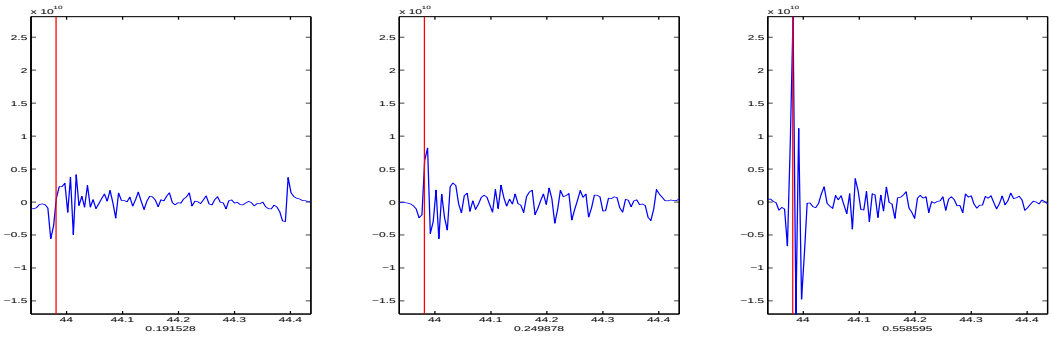


Figura 4.26: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_15_22_38_44.11n

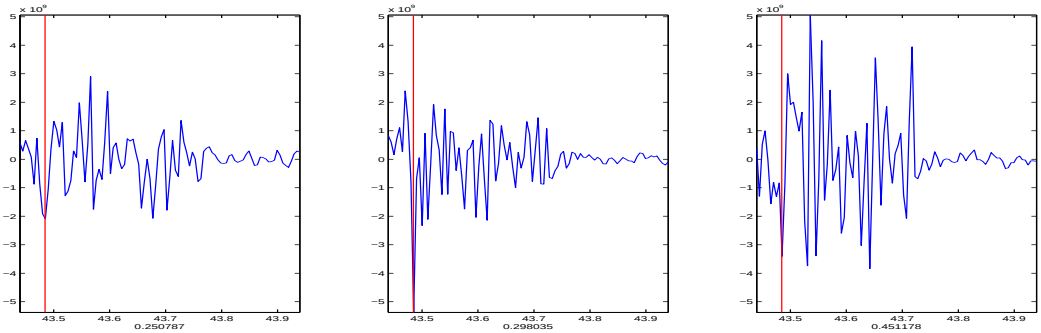


Figura 4.27: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_20_16_06_43.byq

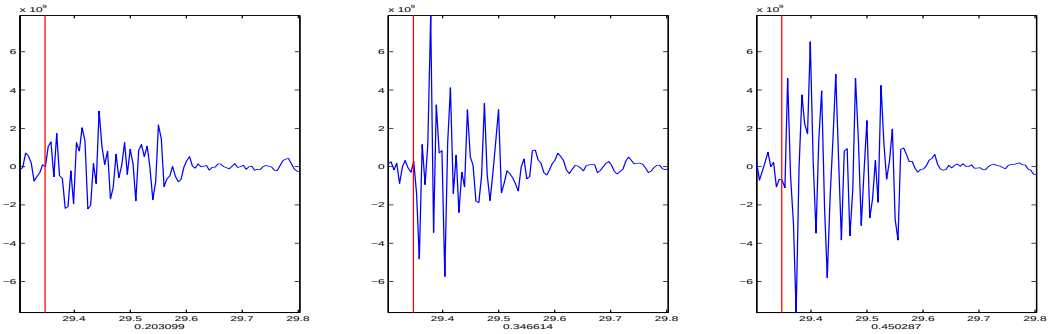


Figura 4.28: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_21_17_20_29.8mp

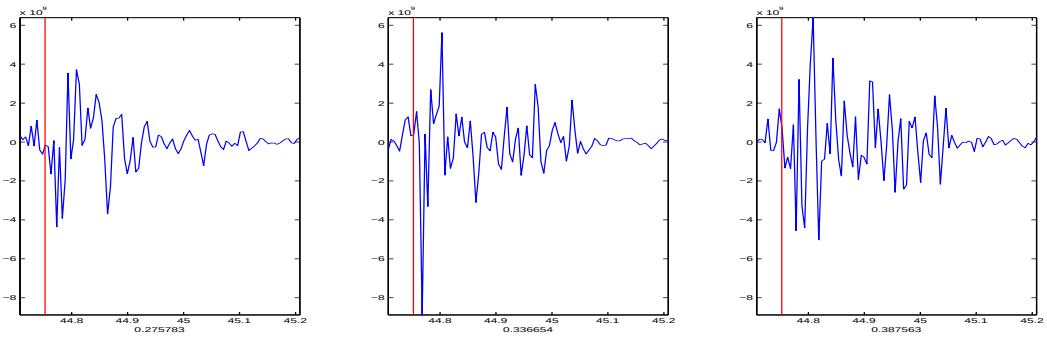


Figura 4.29: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_21_18_22_44.h9e

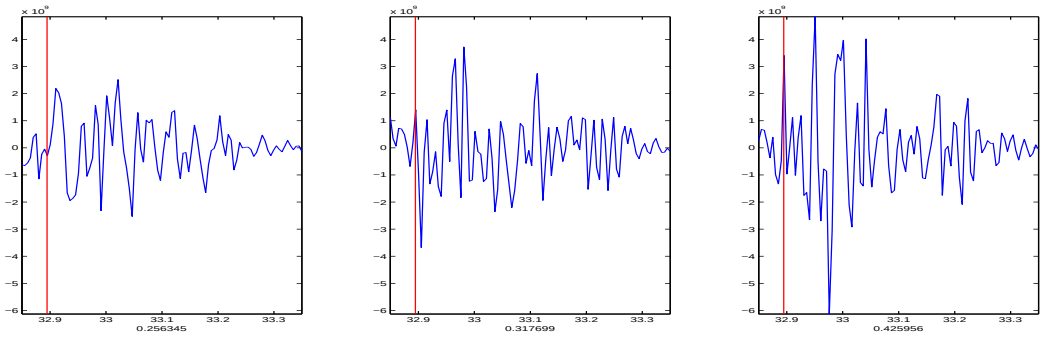


Figura 4.30: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_21_20_10_32.kxv

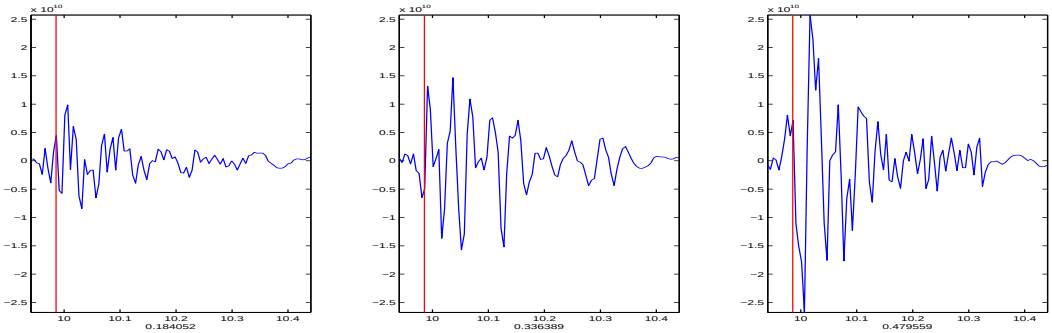


Figura 4.31: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_27_19_38_10.1o0

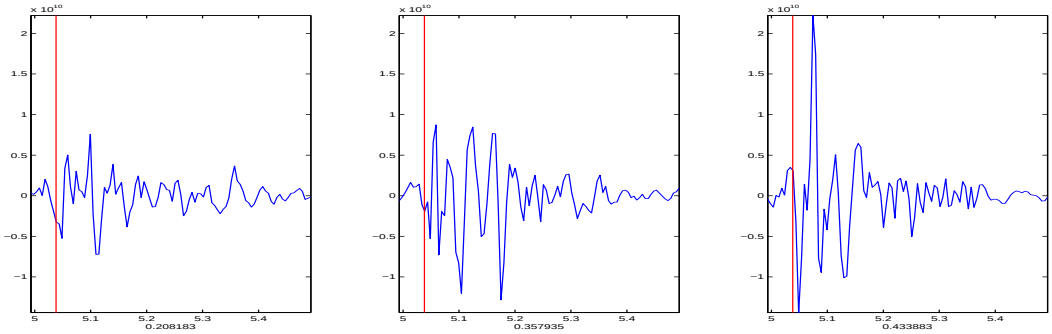


Figura 4.32: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 1998_oct_29_18_22_05.2ph

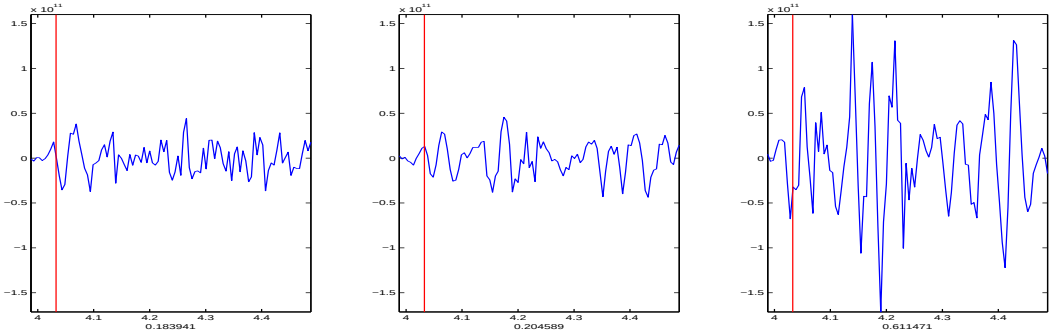


Figura 4.33: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 2011_apr_10_02_27

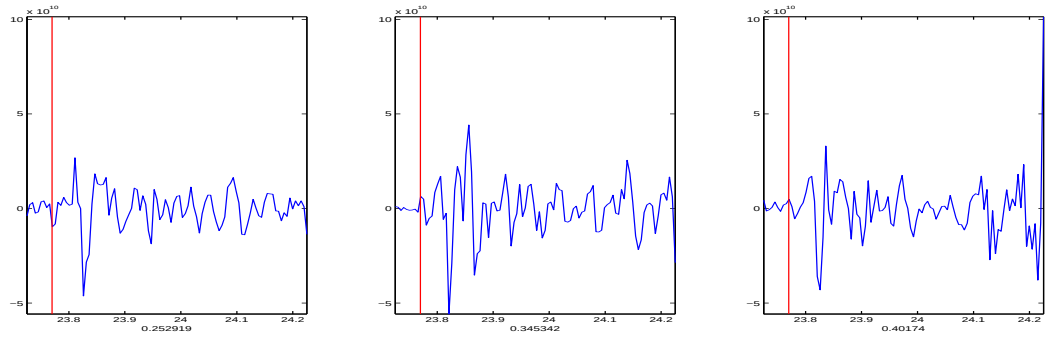


Figura 4.34: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 2011_apr_10_04_56

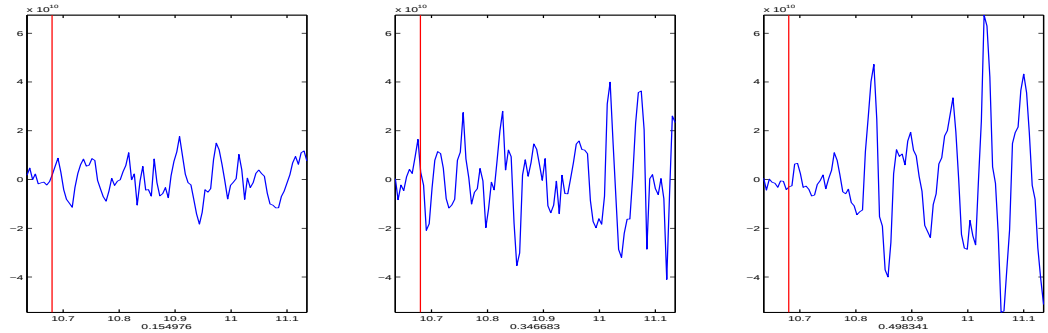


Figura 4.35: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 2011_apr_10_06_00

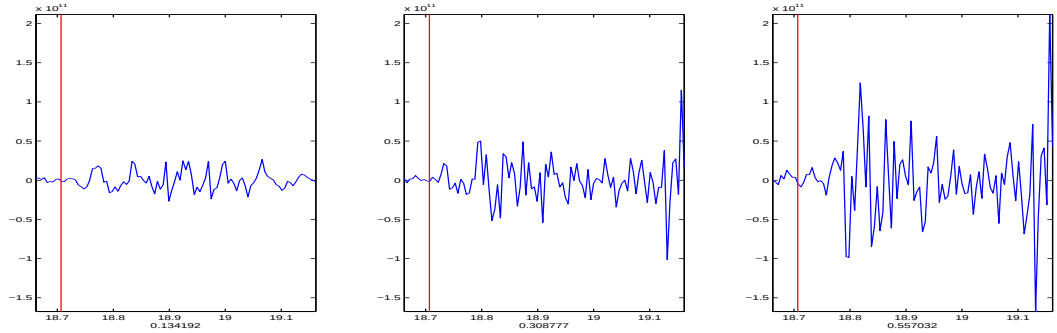


Figura 4.36: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 2011_apr_10_06_16

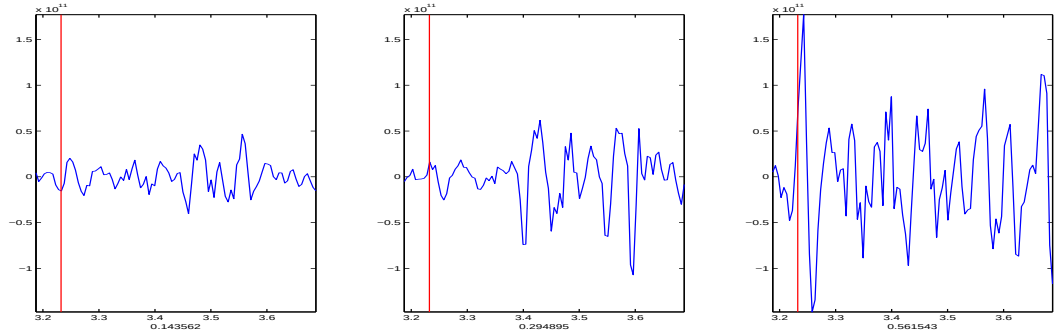


Figura 4.37: Filtro y rotación de la fuente estimada como una fuerza para el evento 2011_apr_10_07_52

4.6.3. Ejemplos Resultados Time-Reversal

En las figuras 4.38 y 4.39 se muestra la propagación de la onda de Time-Reversal para dos eventos. A un nivel z fijo, se grafica el módulo de la onda que se propagá en el tiempo, el tiempo avanza de imagen a imagen en orden de izquierda a derecha, de arriba hacia abajo.

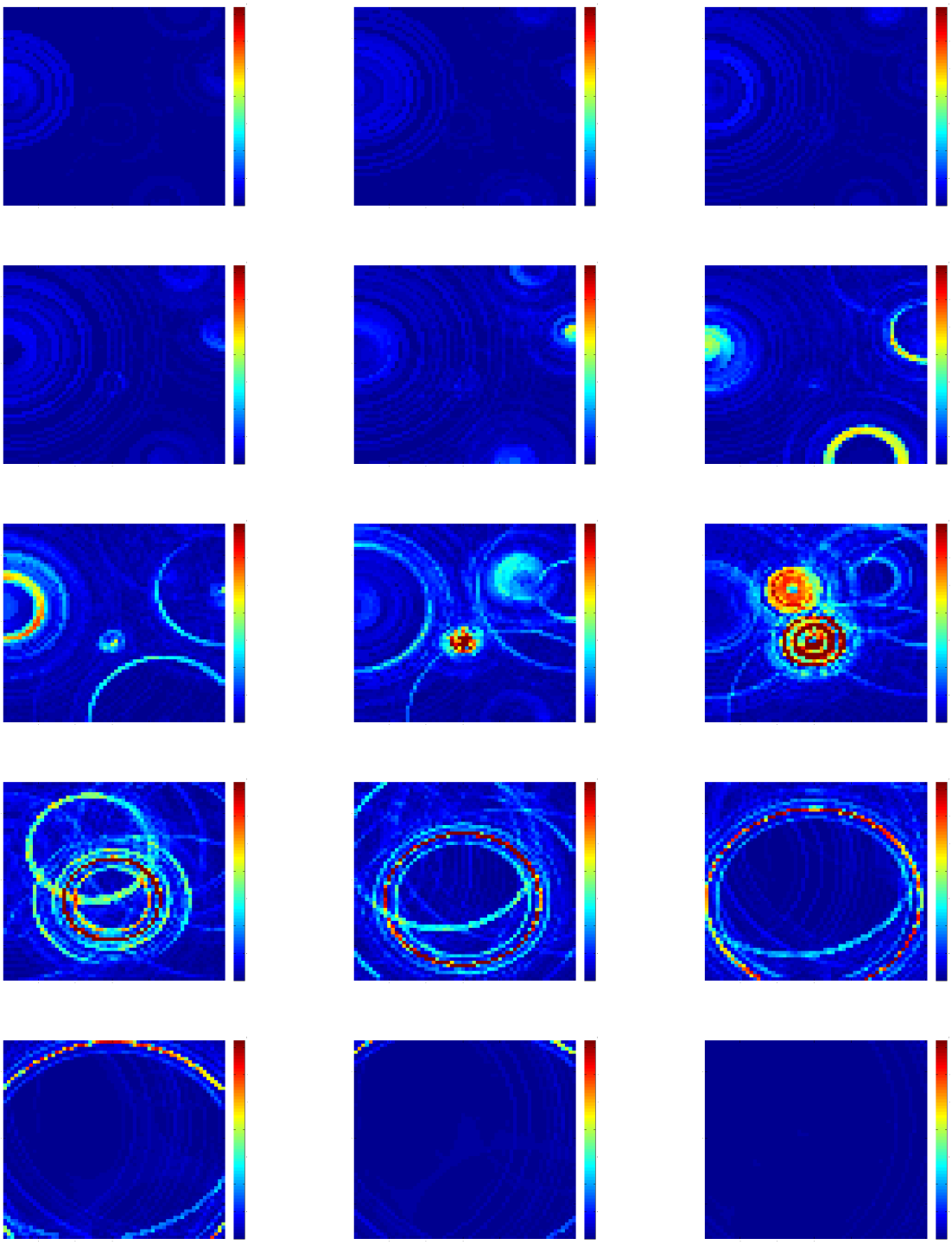


Figura 4.38: Time reversal para el evento 1998_aug_02_07_30_40.d5g

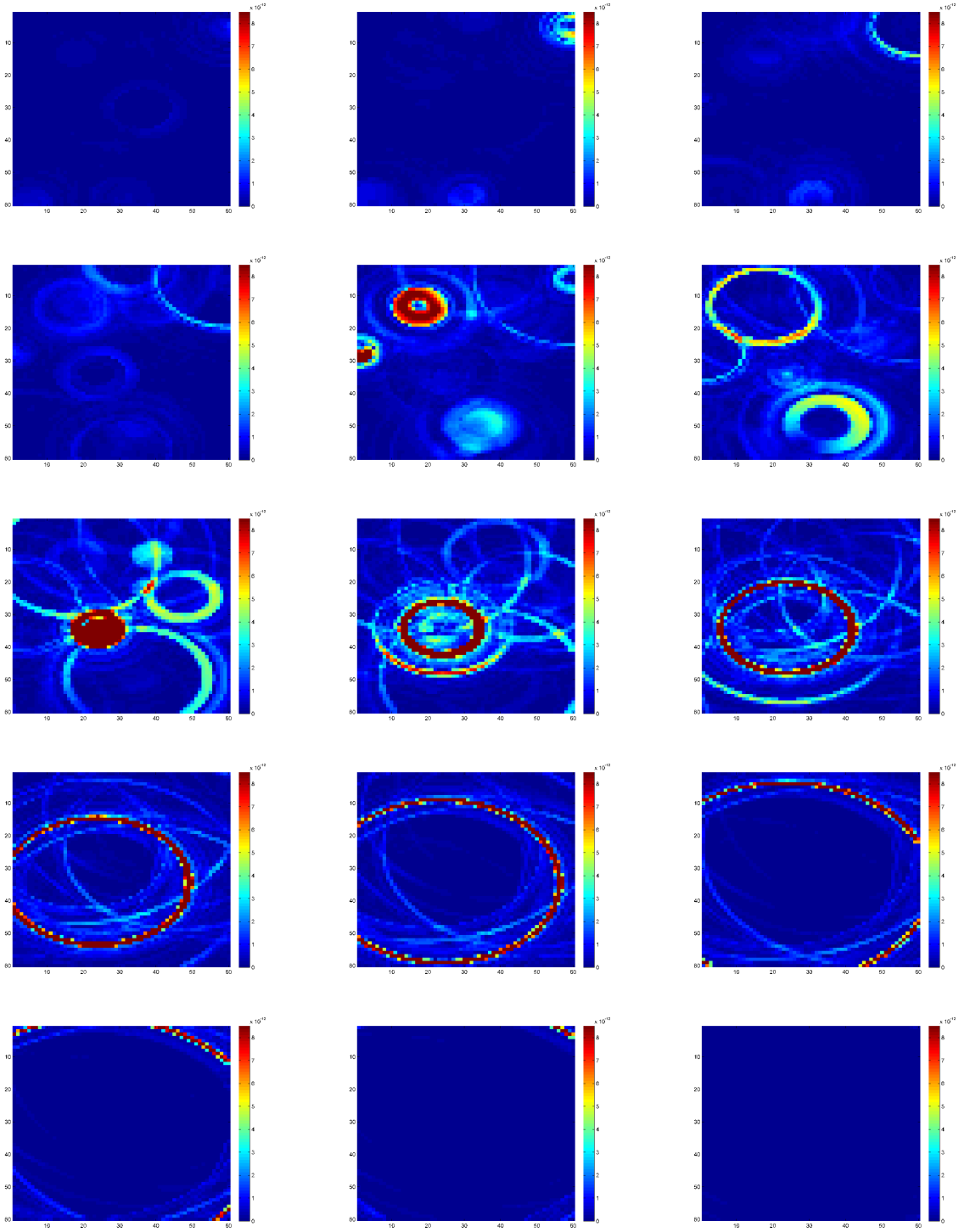


Figura 4.39: Time reversal para el evento 1998_aug_09_21_49_22.4n3

Capítulo 5

Modelación de la Superficie de Caving Usando Elementos Finitos

5.1. Resumen

En el presente Capítulo se dan detalles de la modelación de la superficie de caving por medio de un parámetro de daño.

En esta línea de trabajo, se propuso determinar la superficie de caving en función del tiempo, usando para ello un modelo de comportamiento no-lineal para el macizo rocoso. Dicho modelo depende entre otros parámetros de un campo escalar α, que representa el daño que sufre la roca producto de los esfuerzos. Se resolvieron las ecuaciones de equilibrio y la ecuación para α de forma acoplada usando el método de elementos finitos con el programa Comsol.

Después de obtener resultados para varios casos diferentes (en cuanto a geometría, condiciones de borde, etc.), la conclusión final es que este método puede ser adecuado para modelar la evolución de las superficies de caving; a continuación se dan algunos comentarios importanes:

- Se trabajó con dos modelos o ecuaciones constitutivas para el esfuerzo con daño, la primera corresponde al modelo de daño propuesto originalmente por Lyachikovsky [39] y un segundo modelo es una versión simplificada del anterior.

  En los primeros problemas resueltos, se observó que en la cavidad inicial (así como en la zonas que se modelaron bajo un proceso de 'quemado'de pilares), solo se producía daño en las esquinas, y no en la parte superior de la cavidad. Este daño en las esquinas, que se mostrará en la sección de resultados, podría implicar que la forma como evolucionaría el caving de acuerdo al modelo, no tiene similitud con ninguno de los resultados conocidos para dicha superficie de caving.
- Los modelos de daño considerados permitían determinar superficies (y en general estados de esfuerzos y deformaciones) en el tiempo. Varias de las constantes no eran conocidas ni era posible inferirlas de manera indirecta de las propiedades conocidas para el macizo rocoso. Una de dichas constantes llamada C, mostró particular influencia en la velocidad de propagación del daño.

  Uno de los problemas que se observó en los primeros modelos resueltos es que si dicha constante tenía una magnitud muy pequeña, a medida que se producía el quemado de los pilares, se producía muy poco daño incluso en las esquinas, es decir valores pequeños para C indicaban una velocidad muy baja para la propagación del daño mecánico.

  Por otra parte, valores ligeramente elevados para C, permitían observar formación de zonas de daño en la cavidad inicial y pilares quemados, pero también se observó un incremento excesivo de dicha velocidad, lo que no estaría de acuerdo con las observaciones experimentales, pues de dichas obser-

vaciones se tiene que en muchas ocasiones si la base o zona quemada inferior no es suficientemente 'grande'la superficie de caving podría dejar de expandirse después de un cierto intervalo de tiempo, lo que sugiere que la velocidad de propagación de la cavidad en realidad no se incrementa una vez quemada toda la base, sino mas bien en general se mantendría constante o se reduce.

- Considerando las observaciones anteriores se revisó de manera cuidadosa los valores de las constantes del modelo de Lyachikovsky, en particular las constantes γ y κ (ver ecuaciones (5.1) y (5.6)). Con valores apropiados, en particular de κ, fue posible no solo lograr convergencia con dicho modelo de daño, sino también obtener superficies de falla cuya forma es similar a los resultados esperados para la evolución de dicha superficie.

5.2. Modelo de daño mecánico

Notación

- σ_{ij}: Componente i, j del tensor de esfuerzos.
- ε_{ij}: Componente i, j del tensor de deformaciones.
- λ, μ: Módulos de Lamé.
- γ: Constante de material adicional para generar distintos niveles de daño en tracción y compresión.
- I_1, I_2: Dos primeros invariantes de la deformación.
- α: Parámetro de daño.
- λ_0, μ_0: Valores iniciales (sin daño) para los módulos de Lamé.
- λ_r, μ_r, γ_r: Constantes para el material en un modelo lineal de daño.
- ρ: Densidad de la roca.
- C: Constante asociada a la 'velocidad'de propagación de daño en el caso pseudo-elástico.
- δ_{ij}: Delta de Kronecker.
- η: Viscosidad.
- κ: Coeficiente para la parte 'no-local'del esfuerzo.
- e_{ij}: Velocidad de deformación.

5.2.1. Modelo de daño de Lyachikovsky

De [39] se propone que

$$\sigma_{ij} = (\lambda I_1 - \gamma\sqrt{I_2})\delta_{ij} + \left(2\mu - \gamma\frac{I_1}{\sqrt{I_2}}\right)\varepsilon_{ij} + \eta e_{ij} - \kappa\nabla_i\alpha\cdot\nabla_j\alpha, \tag{5.1}$$

donde $e_{ij} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}}{\mathrm{d}t}$.

En este caso se asume el modelo simplificado para el daño en las propiedades del material

$$\lambda(\alpha) = \lambda_0, \tag{5.2}$$

$$\mu(\alpha) = \mu_0 - \alpha\mu_r, \tag{5.3}$$

$$\gamma(\alpha) = \alpha\gamma_r. \tag{5.4}$$

En (5.1) η se calcula de

$$\eta(\alpha) = \eta_1 + \frac{\eta_2}{\alpha_{cr} - \alpha}, \tag{5.5}$$

donde η_1 y η_2 son constantes y α_{cr} es un valor critico para α que en teoría debería ser igual a 1 (daño total), pero que sin embargo, para efectos de lograr convergencia en la Sección 5.4.3 se asumió ligeramente mayor a 1.

Se tiene que α se calcula de

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = C\left(\mu_r I_2 + \gamma_r I_1\sqrt{I_2} - \frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\varepsilon_{ij}e_{ij} + \kappa\nabla^2\alpha\right). \tag{5.6}$$

En resume se deben resolver en paralelo dos ecuaciones, la de equilibrio $\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0$ y (5.6).

5.2.2. Modelo de daño alternativo

El modelo presentado en la sección anterior presentó una serie de problemas para lograr convergencia en las geometrías estudiadas, por ese motivo se consideró la siguiente variación del modelo original de Lyachikovsky, en donde los esfuerzos σ_{ij} son calculados como

$$\sigma_{ij} = \lambda I_1\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} + \eta e_{ij}, \tag{5.7}$$

donde

$$I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad e_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}, \tag{5.8}$$

y las propiedades mecánicas λ, μ dependen de un parámetro de daño α de forma lineal como

$$\lambda = \lambda_0 - \alpha\lambda_r, \quad \mu = \mu_0 - \alpha\mu_r, \tag{5.9}$$

donde λ_0, λ_r, μ_0 y μ_r son constantes.

La 'viscosidad'de la roca η también se asume depende de manera lineal en el parámetro de daño α

$$\eta = \eta_1 + \alpha\eta_2, \tag{5.10}$$

con η_1, η_2 constantes.

Si $F = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\lambda}{2}I_1^2 + \eta\varepsilon_{ij}e_{ij} + \frac{\kappa}{2}\nabla\alpha\otimes\nabla\alpha\right)$, de $\Gamma_D = -\frac{1}{T}\left(\frac{\partial F}{\partial\alpha} - \nabla_i\frac{\partial F}{\partial(\nabla_i\alpha)}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ se obtiene la ecuación diferencial para α

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = C\left(\frac{\lambda_r}{2}I_1^2 - \frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\varepsilon_{ij}e_{ij} + \kappa\nabla^2\alpha\right). \tag{5.11}$$

Usando (5.7) se resuelve la ecuación de equilibrio (asumiendo un caso cuasi-estático para el cálculo de los desplazamientos)

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0, \tag{5.12}$$

con $b_3 = -g$ (considerando ahora el efecto de la fuerza de gravedad).

De modo que finalmente se resuelve de forma acoplada (5.11) y (5.12) (en el caso de (5.12) con un tiempo ficticio y (5.11) en tiempo real).

5.2.3. Método para predecir la forma de la superficie de caving. Parámetros de material

El método para predecir la forma de la superficie de caving consiste en estudiar la evolución de $\alpha = \alpha(x, y, z, t)$. El parámetro de daño es tal que si $\alpha = 0$ no hay daño y si $\alpha = 1$ la zona se ha dañado

completamente, lo que se podría interpretar como roca completamente fragmentada. Se puede aproximar la forma de la superficie de caving graficando las superficies $\alpha(x, y, z, t) = 1$. Son estas las superficies (en los modelos 2D, las líneas) que se mostrarán en la sección de resultados.
Los parámetros (para los resultados mostrados en la Sección 5.4.1) usados para los modelos son mostrados a continuación:

$$\lambda_0 = 1{,}1 * 10^{10}\mathrm{Pa} \quad \lambda_r = 1 * 10^{10}\mathrm{Pa} \quad \mu_0 = 1{,}67 * 10^{10}\mathrm{Pa} \quad \mu_r = 6{,}7 * 10^{9}\mathrm{Pa} \tag{5.13}$$

$$\eta_1 = 1 * 10^{8}\mathrm{Pa/tiempo} \quad \eta_2 = 1 * 10^{9}\mathrm{Pa/tiempo} \quad \rho = 2600\mathrm{Kg/m}^3 \tag{5.14}$$

en tanto se asumió C de orden de magnitud

$$5 * 10^{-8} \leq C \leq 10^{-7} 1/(\mathrm{Pa\ tiempo}). \tag{5.15}$$

Para κ se consideran el valor

$$\kappa = 1 * 10^{-3}\mathrm{N}. \tag{5.16}$$

Para las cargas 'lejanas'se consideró

$$\sigma_x = -40\mathrm{MPa} \quad \sigma_y = -30\mathrm{MPa} \tag{5.17}$$

y en el caso 3D se consideró además una carga en la dirección z más menos del mismo orden de magnitud.

Observaciones:

- Uno de los parámetros que tiene más influencia en los resultados, en particular en la evolución de α en el tiempo es C.
- Para los primeros resultados mostrados en la Sección 5.4.1 se observó que no se estabilizó el crecimiento del daño, es decir sin necesidad de hacer crecer la base de la cavidad, la zona $\alpha \approx 1$ sigue creciendo hacia la parte superior.
- La unidad de tiempo se puede ajustar con las unidades de las constantes de la ecuación constitutiva anterior, varios de los resultados mostrados a continuación consideran una unidad de tiempo de 'medio día'.
- Para los últimos resultados obtenidos, que son mostrados en la Sección 5.4.3, se observó una gran influencia en el parámetro κ para el modelo mostrado en (5.7)-(5.11). Se generó una superficie de caving cuya forma es similar a los resultados observados de forma experimental.

Para los resultados en 3D mostrados en la Sección 5.4.3 los valores de las constantes para el modelo (5.1) y (5.6) fueron:

$$C = 8 * 10^{8} 1/(\mathrm{Pa\ tiempo}), \quad \lambda_0 = 1{,}1 * 10^{10}\mathrm{Pa}, \quad \lambda_r = 1 * 10\mathrm{Pa}, \tag{5.18}$$

$$\mu_0 = 1{,}67\mathrm{Pa}, \quad \kappa = 1 * 10^{6}\mathrm{N}, \quad \eta_1 = 1 * 10^{8}\mathrm{Pa/tiempo}, \tag{5.19}$$

$$\eta_2 = 1 * 10^{9}\mathrm{Pa/tiempo}, \quad \gamma_r = 8 * 10^{9}\mathrm{Pa}, \quad \alpha_{cr} = 1{,}1. \tag{5.20}$$

Se puede notar aqui que para los resultados a mostrar en la Sección 5.4.3, los valores de algunas de las constantes han variado de manera apreciable en relación a los valores usados inicialmente (con los cuales se obtuvieron los resultados mostrados en la Sección 5.4.1). Nótese en particular el valor de κ en comparación con el valor mostrado en (5.16).

5.2.4. Modelo para 'quemado'de pilares

Uno de los problemas con los modelos fue simular el proceso de 'quemado'de los pilares que forman la cavidad inicial. En la Figura 5.1 tenemos una vista parcial del modelo 2D (deformación plana) del macizo. En dicha figura tenemos una cavidad inicial a, la cual se hace crecer retirando el material bajo b, c y así

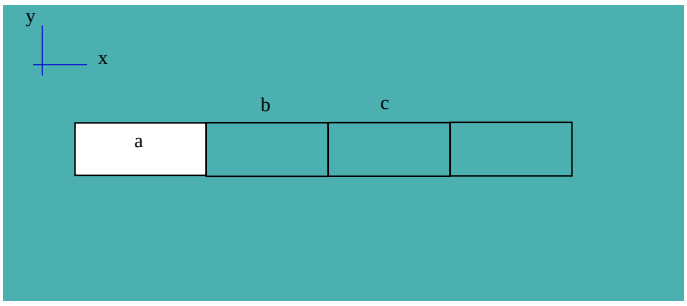


Figura 5.1: Vista esquematica de la zona inicial de la cavidad.

sucesivamente. El problema es como retirar dicho material en el modelo. Se consideraron principalmente tres alternativas:

- En una primera aproximación, para las superficies (que en 2D son líneas) b, c, etc. se asumió una condición de Dirichlet para la componente vertical del desplazamiento v, específicamente se asumió $v = 0$ para dichas superficies (líneas), condiciones de Dirichlet que desaparecían despues de un intervalo de tiempo dado relacionado con los tiempos entre quemado de pilares.

  Este tipo de aproximación, si bien en un inicio funcionó bien, para los modelos 3D mostró resultados que no concuerdan con lo esperado para la evolución del daño. Después de un analisis del modelo de quemado, se concluyó que habrían problemas con estas restricciones al desplazamiento para el comportamiento del macizo, pues dichas restricciones son en el desplazamiento total, pero el modelo del macizo, al recibir las cargas lejanas, primero sufre una contracción en todas sus direcciones, y es sobre esa geometría deformada donde se debería aplicar esas restricciones al desplazamiento en el 'techo'de la cavidad inicial. En otras palabras usar restricciones al desplazamiento implicaría un exceso de daño en particular en las zonas cercanas a las 'esquinasén la cavidad.
- Un segunda aproximación consideró asumir que las fuerzas de reacción en b, c, etc. se podían calcular con un modelo de 'resorte', en otras palabras para dichas superficies se asumió una fuerza external vertical F_R que se modeló como $F_R = -kv$, donde k sería alguna constante por ajustar.

  Este modelo en principio mostró mejores resultados en relación a las zonas de falla, sin embargo en los casos 3D se observó problemas similares a los indicados en el primer punto de esta lista. Una variante del modelo (cuyos resultados se muestran aquí) es considerar a esa fuerza (por unidad de área en el caso 3D o de línea en el caso 2D) como proporcional a la deformación, es decir $F_R = -E\epsilon_y$.

- La última alternativa usada, que es en la que se basan la mayor parte de los resultados mostrados en este informe, fue considerar las zonas a 'quemar'bajo b, c, etc. en la Figura 5.1 con las mismas propiedades mecánicas que el macizo que las rodea, y para cada instante en el que la zona en question es quemada, las propiedades mecánicas son multiplicadas por un factor que las disminuye de forma notoria, tal que presentan muy poca resistencia a las cargas externas, lográndose de manera aproximada el efecto deseado de que estas zonas esten quemadas.

5.3. Descripción Software

El programa utilizado para resolver los modelos con elementos finitos fue el programa Comsol versión 3.5. Este es un programa comercial para modelación mutifísica que permite modificar de forma simple las ecuaciones constitutivas de manera tal de adaptar las ecuaciones usuales de mecánica de solidos a casos nuevos. Este programa posee además la posibilidad de resolver de forma acoplada dos o mas fenómenos separados, en nuestro caso se uso el módulo 'structural mechanics' para resolver la ecuación de equilibrio (caso cuasi-estático) para los esfuerzos (en función de los desplazamientos), en tanto que de forma paralela y acoplada se uso el módulo 'General PDE' para resolver la ecuación en derivadas parciales para el parámetro de daño α; dicha ecuación se resolvió considerando el tiempo.
Mas detalles de este programa se pueden encontrar en:
http://www.comsol.com/ (aquí sale información de la nueva versión de dicho programa)
http://www.comsol.com/products/news/3.5/ (información de la versión más antigua que se uso para los modelos resueltos aquí)

5.4. Casos de estudio

Para la lista mostrada a continuación 2D significa un modelo simplificado en deformación plana para el macizo rocoso, en tanto 3D indica un modelo completamente tridimensional del macizo. Los casos considerados con los modelos de daño mencionados en la Sección 5.2 son los siguientes:

1. Modelo de daño simplificado (ver Sección 5.2.2):
   a) Caso 2D considerando una restricción que cambia en el tiempo para la componente vertical del campo de desplazamientos v para la superficie superior de la cavidad.
   b) Caso 3D considerando una restricción que cambia en el tiempo para el desplazamiento vertical v en la superficie superior de la cavidad.
   c) Caso 2D considerando una fuerza de reacción en el techo de las zona que definen los pilares, calculada como $F_R = -E\epsilon_y$.
   d) Modelo 2D considerando varios casos para las condiciones de borde. Considerando el proceso de quemado de pilares haciendo que las propiedades del material se degraden de forma repentina para los pilares en esa situación.
2. Modelo considerando las ecuaciones para daño originales propuestas por Lyakhovsky (ver Sección 5.2.1).
3. Modelos considerando las ecuaciones de daño originales de Lyakhovsky (modelo de la Sección 5.2.1) y los valores para las constantes (5.18)-(5.20).

a) Casos preliminares 3D con 1, 2 y 3 pilares quemados.

b) Caso final considerando 16 pilares para el problema del modelo del Pilar Norte.

5.4.1. Casos preliminares

En esta sección se muestran resultados considerando en particular las constantes indicadas en (5.13)-(5.16). En una primera parte se considera el modelo simplificado detallado en la Sección 5.2.2, mostrando resultados para problemas en 2D y 3D. En una segunda parte se muestran resultados con el modelo original de daño detallado en la Sección 5.2.1.

Si bien es cierto, los resultados encontrados con las constantes (5.13)-(5.16) no se encuentran cerca de lo esperado (tal como se muestra a continuación), se estima necesario mostrar algunos resultados, debido a que en el proceso de resolver estos modelos, fue posible encontrar una serie de condiciones y simplificaciones que sirvieron para obtener los resultados mostrados en la Sección 5.4.3.

Resultados preliminares caso de modelo de daño modificado

Considerando los problemas para lograr convergencia con el modelo original mostrado en la Sección 5.2.1, se propuso una versión simplificada del mismo en la Sección 5.2.2. En esta sección se muestran resultados para ese caso preliminar.

Caso 2D: Considerando una restricción que cambia en el tiempo para el desplazamiento v en la superficie superior de la cavidad:

Debido a la gran cantidad de recursos computacionales requeridos por los modelos 3D, en un inicio se consideró resolver algunos casos bidimensionales con el propósito de cuantificar de una manera sencilla el efecto de las distintas constantes del modelo de daño y de las condiciones de borde, antes de pasar al caso más realista trabajando con geometrías 3D.

En los resultados mostrados a continuación se tiene:

- Los pilares se ‘queman’cada 60 intervalos de tiempo.
- El proceso de quemado se simula de forma aproximada asumiendo la condición $v = 0$ (restricción en el desplazamiento vertical) válida para un intervalo de tiempo, después del cual la zona definida por el pilar se libera de dicha restricción, simulando el quemado.
- La constante C es tal que $C = 7 * 10^{-8}$.
- En los resultados que se muestran se puede observar que el daño se produce no solo cerca que las superficies quemadas sino también lejos de las mismas en las zonas no quemadas.
- El quemado de pilares se inicia desde el lado izquierdo (ver Figura 5.1).
- El tamaño de cada pilar es de 20m de largo por 5m de alto.
- La escala inferiores (horizontal) y lateral en las figuras que se muestran a continuación indican las distancias en metros.

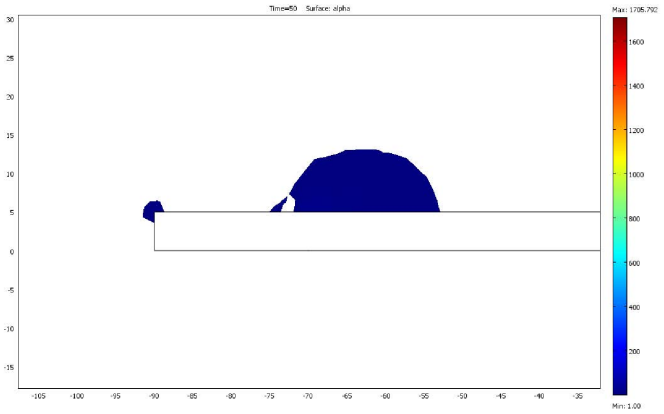


Figura 5.2: Daño $\alpha \geq 1$ para $t = 50$ en donde el primer pilar está quemado desde $t = 0$.

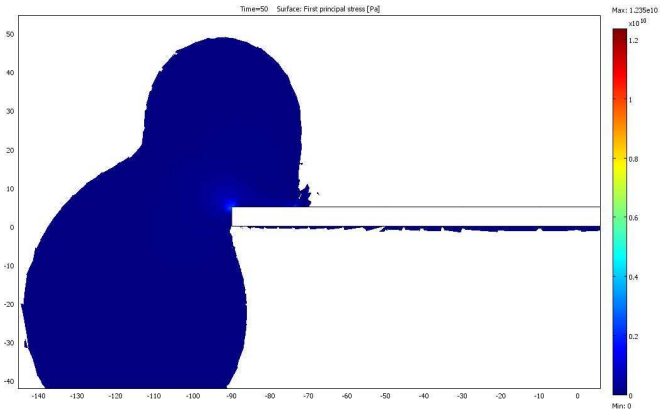


Figura 5.3: Primer esfuerzo principal (positivo) en $t = 50$.

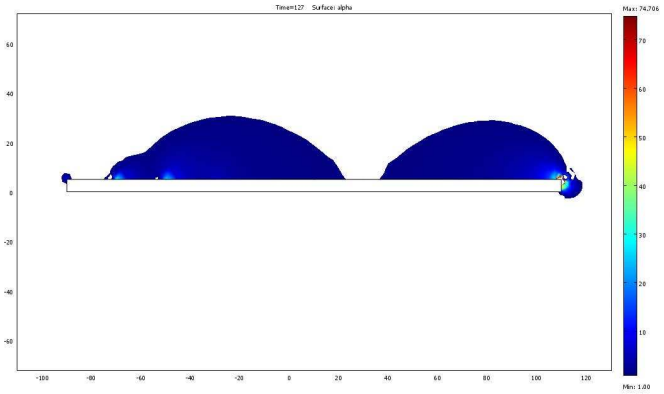


Figura 5.4: Daño $\alpha \geq 1$ para $t = 120$ en donde hay dos pilares quemados.

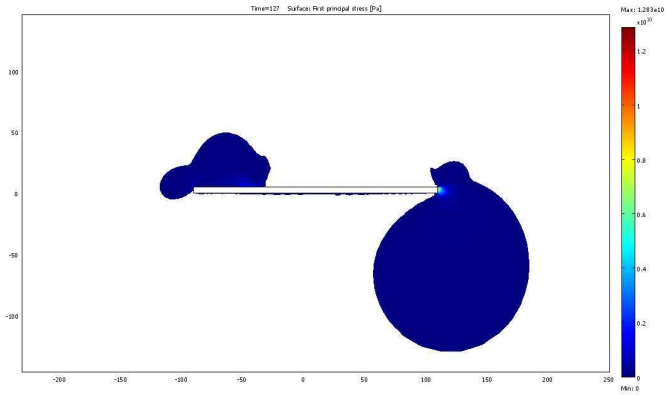


Figura 5.5: Primer esfuerzo pricipal (positivo) en $t = 127$.

Caso 3D, considerando una restricción que cambia en el tiempo para el desplazamiento vertical v en la superficie superior de la cavidad:

- Se tiene 3 pilares fijo y solo uno libre para todo el intervalo de tiempo considerádo. El pilar libre desde el inicio es el de la parte inferior central en la Figura 5.6 (o en el lado inferior izquierdo en la Figura 5.7).
- En la Figura 5.6 los pilares corresponden a los paralelepípedos mostrados en el centro de la misma. Es la superficie superior de estos la que se restringe de desplazarse en el sentido z.
- El tamaño de los pilares es de 20$\times$20 metros^2 de base por 5 metros de altura.
- La constante C es igual a $5 * 10^{-8}$.
- En las figuras que se muestran a continuación, se observa nuevamente aparición de daño ($\alpha \geq 1$) para zonas en donde no debería generarse dicho daño, en particular lejos de donde se ha quemado el primer pilar.

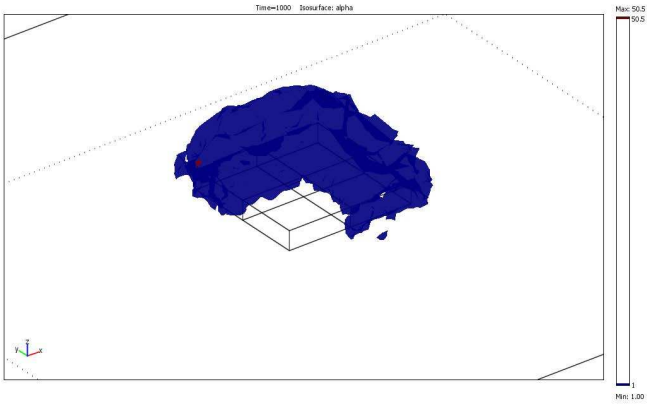


Figura 5.6: Daño $\alpha \geq 1$ en $t = 1000$.

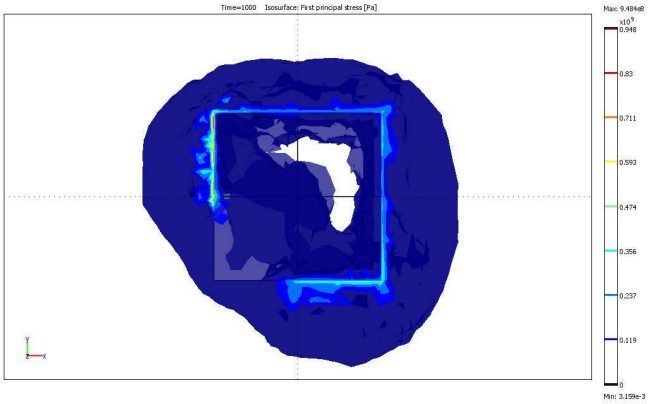


Figura 5.7: Primer esfuerzo principal (positivo) en $t = 1000$. Vista superior de la cavidad.

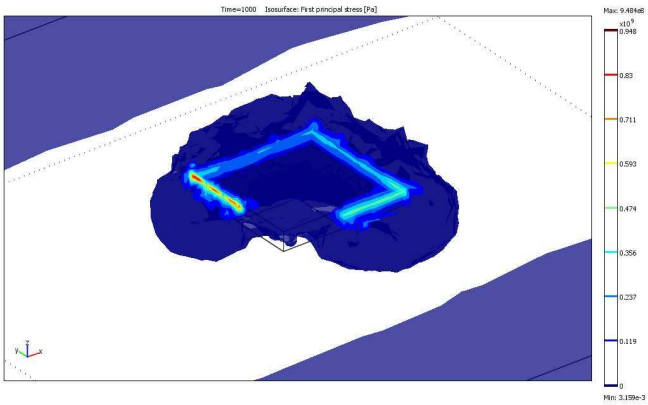


Figura 5.8: Primer esfuerzo principal (positivo) en $t = 1000$. Vista isométrica.

A continuación se muestran resultados com mayor detalle en la geometría y un mayor numero de pilares (que definen la cavidad).

- La geometría consiste de 20 pilares de 4$\times$5 metros^2 de base (ver Figura 5.9) y altura 5 metros.
- La constante C es igual a $5 * 10^{-8}$.
- Caso (a) Todos los pilares (la parte superior de los mismos) no pueden desplazarse en ninguna dirección. Caso (b) Todos los pilares (sus superficies superiores) tienen restricción al desplazamiento salvo uno de los pilares ubicados en la parte central. Caso (c) Todos los pilares (sus superficies superiores) estan en condición libre.

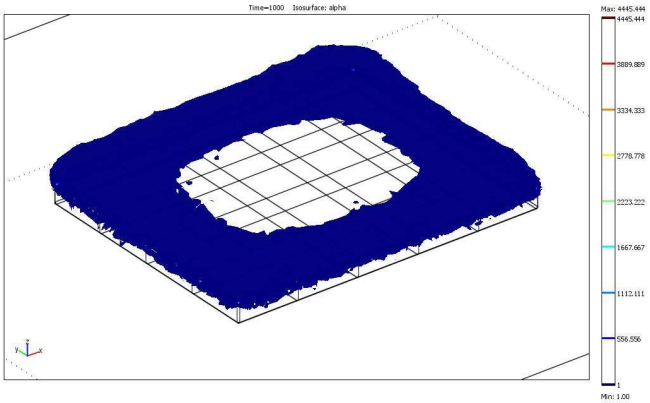


Figura 5.9: Caso (a) zona $\alpha \geq 1$.

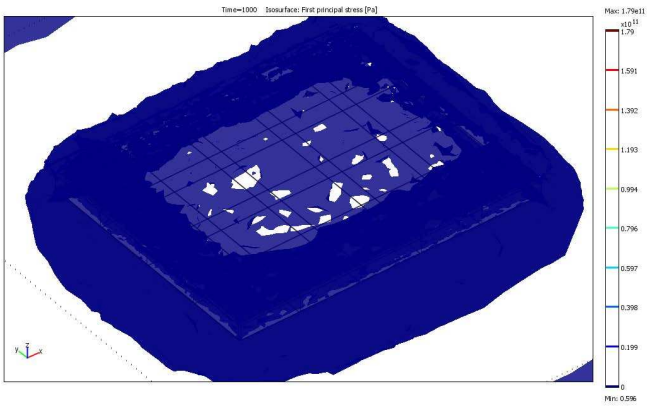


Figura 5.10: Caso (a) zona con primer esfuerzo principal (positivo).

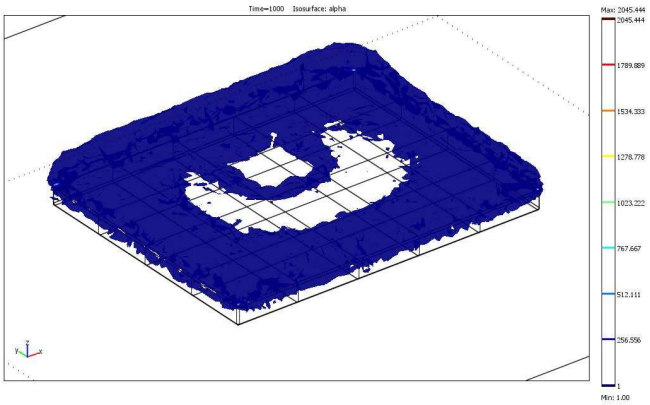


Figura 5.11: Caso (b) zona $\alpha \geq 1$.

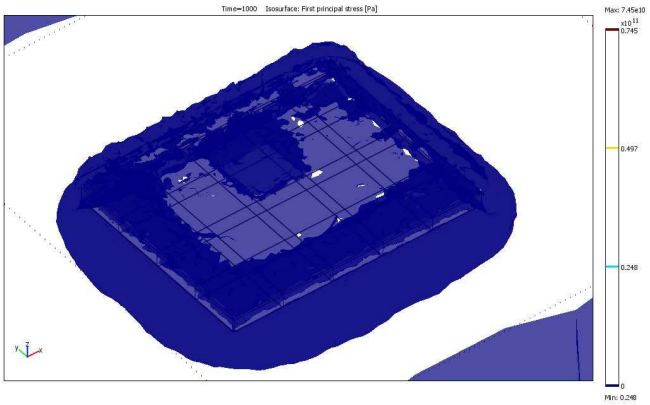


Figura 5.12: Caso (b) zona con primer esfuerzo principal (positivo).

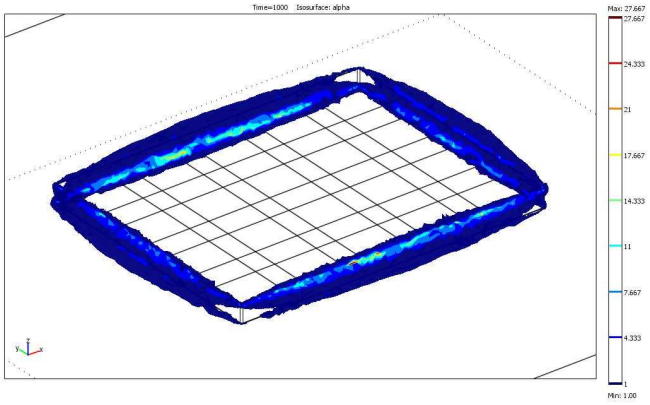


Figura 5.13: Caso (c) zona con $\alpha \geq 1$.

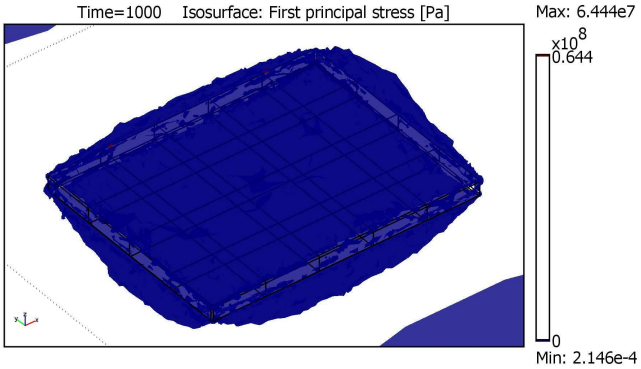


Figura 5.14: Caso (c) zona con primer esfuerzo principal (positivo).

Caso 2D considerando una fuerza de reacción en el techo de las zonas que definen pilares, calculada como $F_R = -E\epsilon_y$:

- El techo de la cavidad (el rectangulo central mostrado en el modelo 2D de la 5.15), está interactuando con resortes (que no se muestran en la figura), que generan una fuerza de reaccíon vertical y horizontal, según las ecuaciones $F_R = -E\epsilon_y$ para el caso vertical y $F_R = -G\epsilon_{xy}$ para el caso horizontal.
- En el caso (a) solo se considerá fuerza de reacción en el sentido vertical.
- En el caso (b) se agrega una reacción similar de corte.
- Se dejo un pilar libre en extremo derecho.

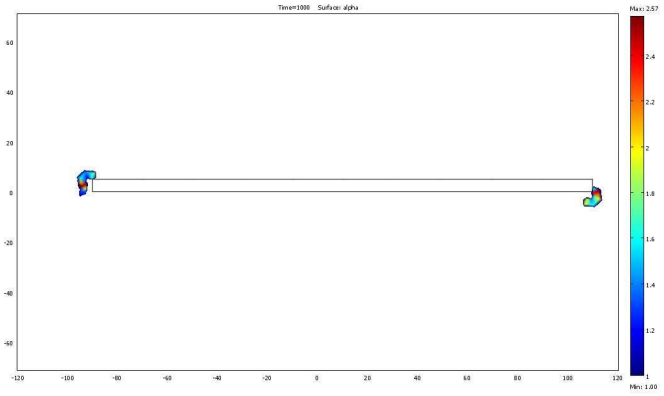


Figura 5.15: Caso (a) zona $\alpha \geq 1$.

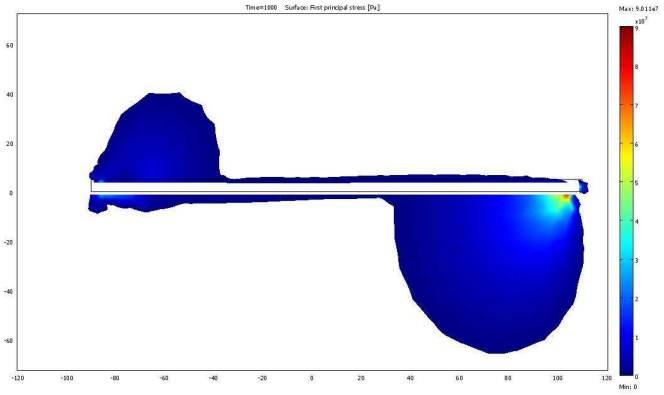


Figura 5.16: Caso (a) zona conprimer esfuerzos principal (parte positiva).

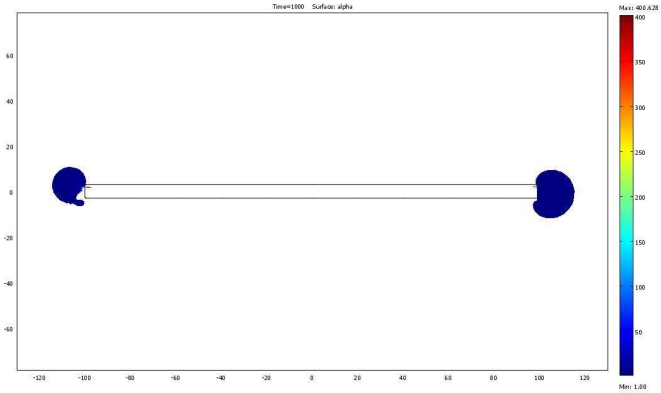


Figura 5.17: Caso (b) zona $\alpha \geq 1$.

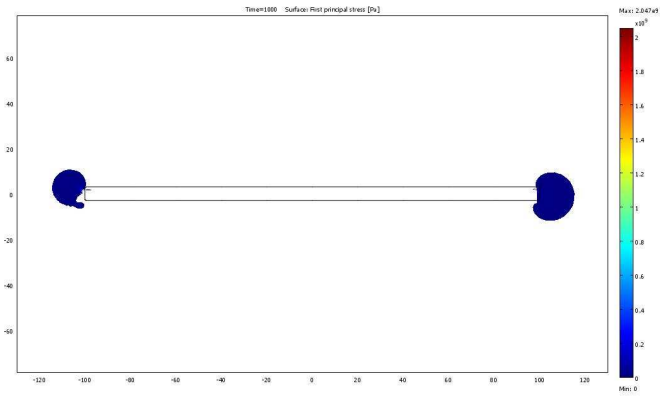


Figura 5.18: Caso (b) zona primer esfuerzos principal (parte positiva).

Caso 2D, varios casos para las condiciones de borde. Considerando el proceso de quemado de pilares haciendo que las propiedades del material se degraden de forma repentina para los pilares en esa situación:

- Los resultados mostrados en esta sección fueron obtenidos para un modelo muy simplificado en donde solo hay dos pilares, tal como se muestra en la Figura 5.19.
- El quemado de un pilar se simula simplemente 'degradando'las propiedades de dicho pilar en el instante en que es quemado.
- Los pilares son de 20 metros de largo por 5 de altura.
- En el caso (a) se asume todas las superficies de la cavidad inicial libre para desplazarse.
- Caso (b) se tiene que los bordes (líneas verticales) del pilar izquierdo no se pueden desplazar.
- Caso (c) se usa el cambio de las propiedades para modelar pilares quemados considerando λ y μ 20 veces más pequeños que las propiedades del material dañado con $\alpha = 1$.

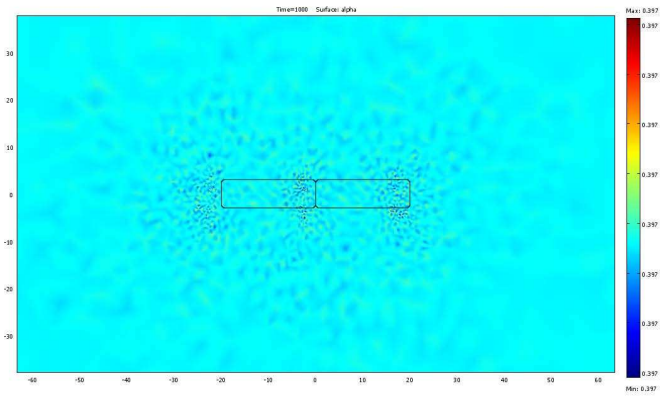


Figura 5.19: Caso (a) zona $\alpha \geq 1$.

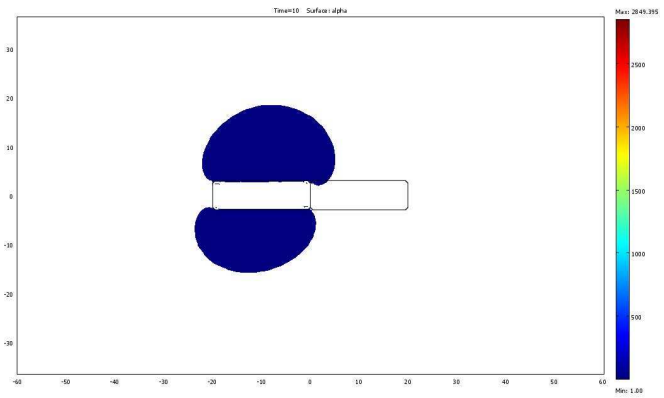


Figura 5.20: Caso (b) zona $\alpha \geq 1$.

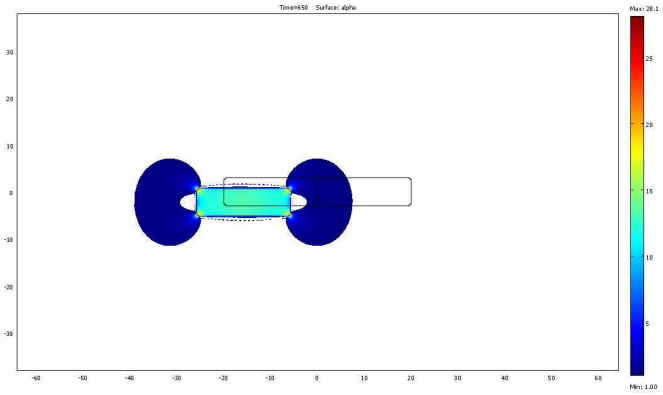


Figura 5.21: Caso (c) zona $\alpha \geq 1$.

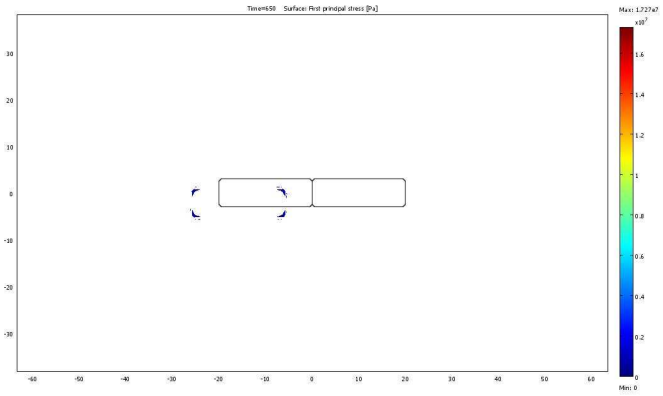


Figura 5.22: Caso (c) zona con primer esfuerzo principal con valores positivos.

En relación a los resultados mostrados aquí se tiene:

- Se comprueba que no sirve establecer otros modelos para las condiciones en los bordes.
- Para el modelo de quemado de pilares en donde se trabaja con propiedades mecánicas mucho menores después del quemado, no hay grandes diferencias con los resultados mostrados con los modelos de las secciones anteriores.

Resultados obtenidos usando el modelo de daño original propuesto por Lyakhovsky

- En esta sección se muestran resultados para el modelo original de daño mostrado en la Sección 5.2.1 considerando los valores para las constantes mostradas en (5.13)-(5.16).
- Debido a problemas para lograr convergencia con los valores de las constantes iniciales (5.13)-(5.16), fue necesario disminuir la magnitud de los esfuerzos lejanos, los que aqui son -866Pa en la dirección en el borde superior (vertical) y -4500Pa en el borde lateral (horizontal).
- Se uso $\eta_{cr} = 1$.
- Se muestra solo un resultado.

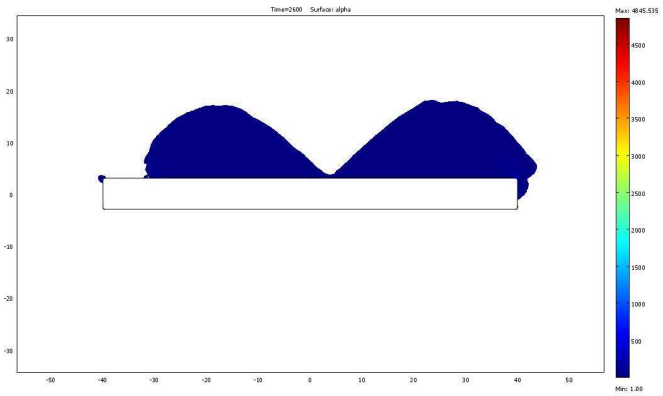


Figura 5.23: Daño zona $\alpha \geq 1$.

5.4.2. Resultados considerando el modelo presentado en la Sección 5.2.1 con las constantes (5.18)-(5.20): Resultados preliminares

Tal como se ha indicado en el Resumen y en la Sección 5.2.3, los últimos resultados obtenidos en este proyecto, considerando el modelo presentado en la Sección 5.2.1 con el nuevo conjunto de constantes mostrada en (5.18)-(5.20), estan mucho más cerca de los resultados esperados para la evolución de la superficie de caving. Se muestran algunos resultados preliminares para un pequeño número de pilares quemados en un caso 3D. En la Sección 5.4.3 se aplican estos resultados a un caso real para modelar el caving en el Pilar Norte.

Resultados preliminares para un pilar quemado

En la Figura 5.24 tenemos una vista de un modelo del macizo de $500 \times 500 \times 200\text{m}^3$. La cara inferior tiene restricción al movimiento en z, una de las caras laterales con normal x tiene restricción al movimiento en dicha dirección y la otra cara con carga lejana $-30 * 10^6$Pa, una de las caras laterales con normal y tiene restricción al movimiento en esa dirección y la otra cara con carga lejana $-30 * 10^6$Pa, finalmente la cara superior tiene una carga lejana $-40 * 10^6$Pa.

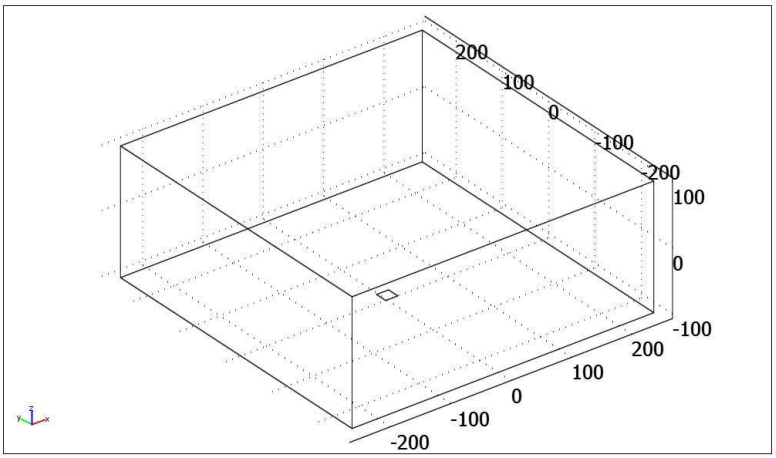


Figura 5.24: Bloque con un pilar quemado.

En la parte central inferior del bloque se ve una superficie cuadrada que representa el techo de un pilar de $20 \times 20\text{m}^2$.

En la Figura 5.25 tenemos una vista del modelo del macizo con la malla de elementos finitos usadas, en donde se puede obervar en particular la mayor densidad de elementos en la zona del 'techo'del pilar a quemar.

En las Figuras 5.26 y 5.27 se tienen vistas isométricas del macizo mostrando las zonas en las cuales el parámetro de daño α es mayor a 1. Se puede apreciar como la forma de la superficie se asemeja más a los resultados conocidos de experimentos. En particular se debe hacer notar que la superficie crece hasta alcanzar un tamaño máximo y se detiene (que es el instante mostrado aquí), es decir el modelo concuerda

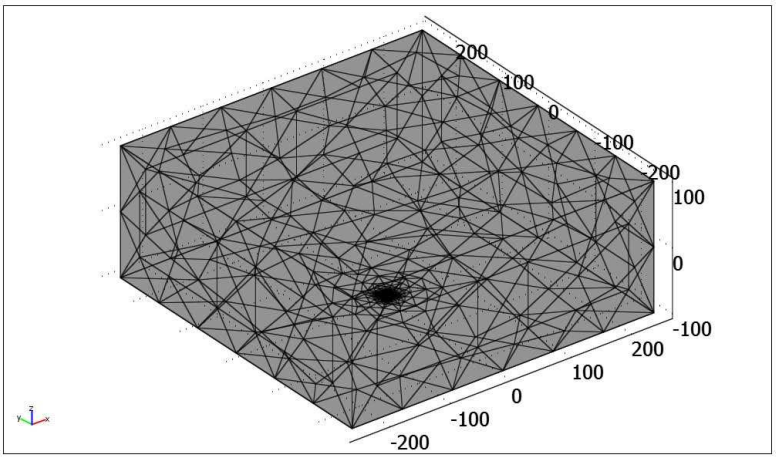


Figura 5.25: Malla para el bloque con un solo pilar.

con la realidad en el sentido que la velocidad de propagación de las superficies de falla o caving tienden a disminuir y acercarce a cero en intervalos largos de tiempo, a menos que el tamaño de la base de la zona quemada sea suficientemente 'grande'.

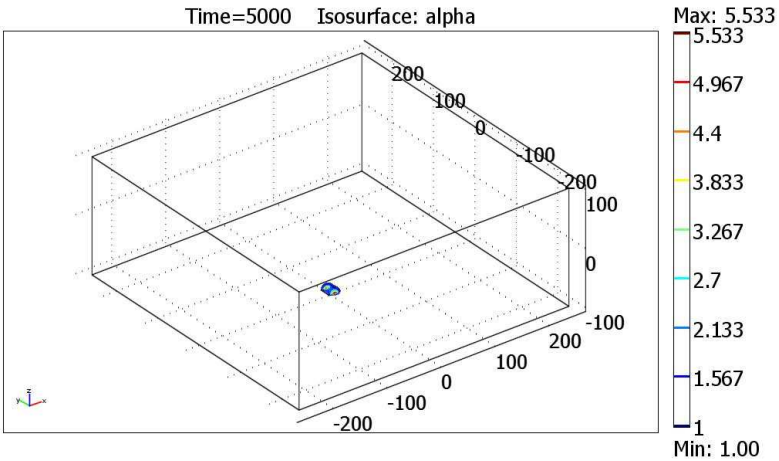


Figura 5.26: Zona de falla $\alpha \geq 1$ vista general.

En las Figuras 5.28-5.30 tenemos vistas de la misma zona de falla mostrada en la Figura 5.27, pero ahora en una vista superior (Figura 5.28) y en los planos $x-z$ e $y-z$ en la Figuras 5.29 y 5.30, respectivamente. El fenómeno de caving se puede separar en dos eventos simultáneos. Por una parte los esfuerzos de compresión en el macizo pueden provocar falla en la roca (que en un criterio muy simplificado se podría asociar a que el módulo del menor esfuezo principal sea mayor a un cierto límite). Dicha falla por com-

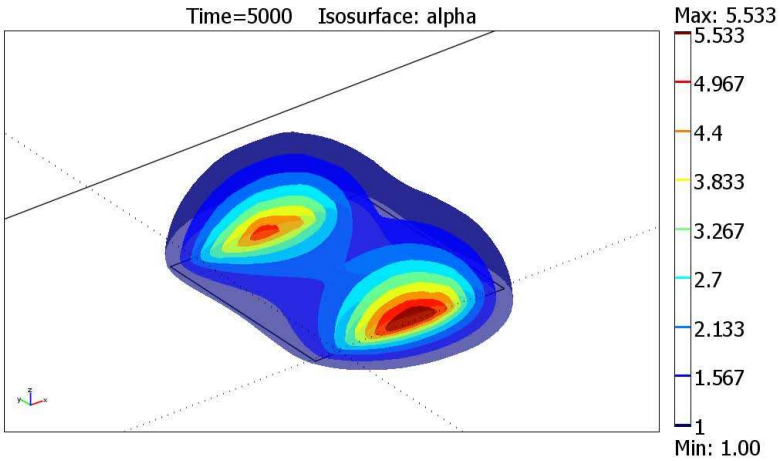


Figura 5.27: Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad.

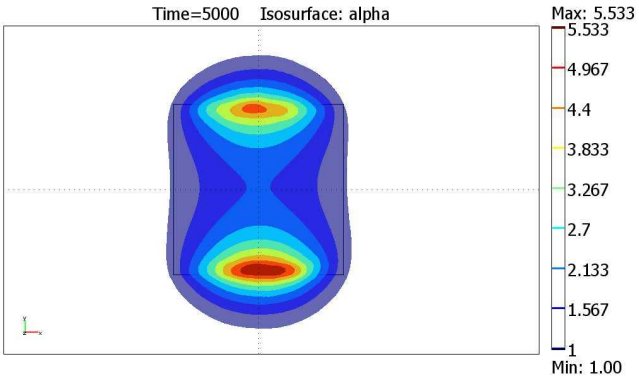


Figura 5.28: Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Plano de planta.

presión se podría manifestar en la presencia de roca desprendida con un alto grado de rotura (es decir de pequeño tamaño). Este tipo de falla en un inicio se produciría sobre todo en las 'esquinas'de las cavidades dejadas por el quemado de los pilares.

Por otro lado, se sabe que los macizos rocosos presentan poca resistencia a la tracción. Si en alguna zona de la superficie de la cavidad hay esfuerzos de tracción que superen ciertos límites (menores en valor absoluto que en el caso anterior), se esperaría falla por tracción que se manifestaría en particular en el desprendimiento de bloques de mayor tamaño de la superficie de caving.

Uno de los problemas presentados en los resultados mostrados en la Sección 5.4.1 fue que la superficie de caving no tenía similitud con los resultados observados de experimentos. La falla se producía en particular en las 'esquinas'de las cavidades dejadas por el quemado de pilares y no había daño apreciable en la parte superior de dichas superficies (en donde en general uno espera un mayor efecto debido a la

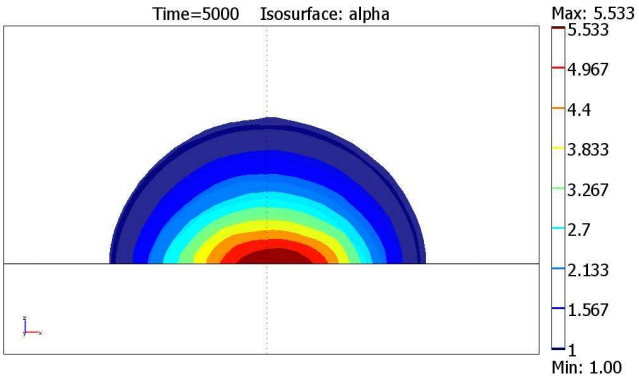


Figura 5.29: Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Vista en plano $x - z$

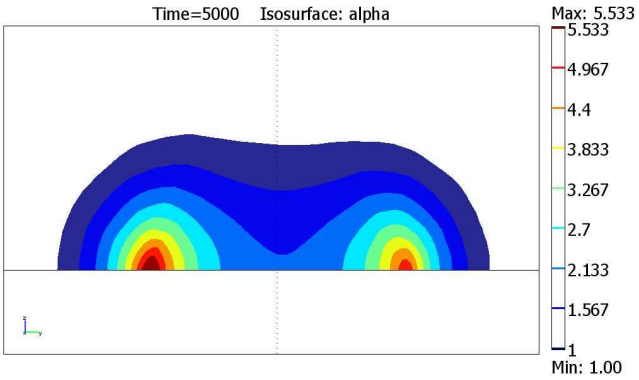


Figura 5.30: Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Vista en plano $y - z$

tracción). El modelo de Lyakhovsky se supone podía distinguir y mostrar estos dos mecanismos de falla indicados anteriormente. Con las constantes usadas para obtener los resultados mostrados en la Sección 5.4.1 no fue posible ver esos fenómenos. Sin embargo en los resultados mostrados aquí si se puede apreciar esto. Para ello a las figuras con el daño α se le agrega una Figura adicional en donde podemos ver el comportamiento del primer esfuerzo principal (positivo) en el instante de interés.

En la Figura 5.31 tenemos la superficie aproximada en la cual es primer esfuerzo principal es positivo. Se puede apreciar que esa zona ocurre justamente en la parte superior de la cavidad.

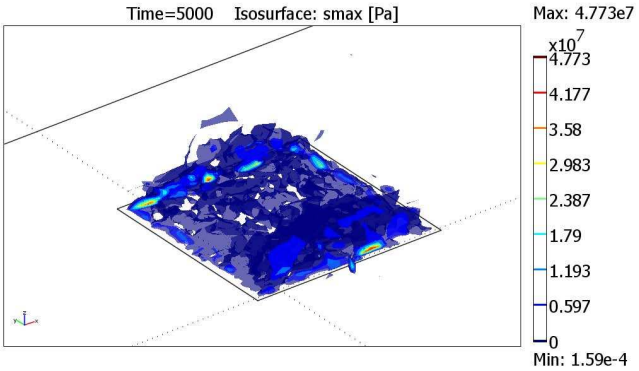


Figura 5.31: Zona para la cual el primer esfuerzo principal es positivo.

Resultados preliminares para dos pilares quemados

En esta Sección se muestran resultados similares al caso anterior, pero considerando dos pilares quemados. Los datos de las constantes y tiempo considerado para mostrar los resultados son los mismos que en el caso anterior.

En la Figura 5.32 podemos ver una vista simplificada de la superficie superior de los pilares a quemar (que son de 20$\times$20 metros^2 cada uno). En este caso se pueden apreciar 4 superficies, pero en esta sección se muestran resultados solo quemando dos de ellas. Se asume la primera (parte inferior central) está ya quemada y despues de un intervalo de tiempo se quema la siguiente (superficie derecha en la Figura 5.32). El proceso de quemado se simula de manera aproximada al asumir una restricción al desplazamiento en la dirección z en la superficie del pilar, que desaparece para el instante de quemado.

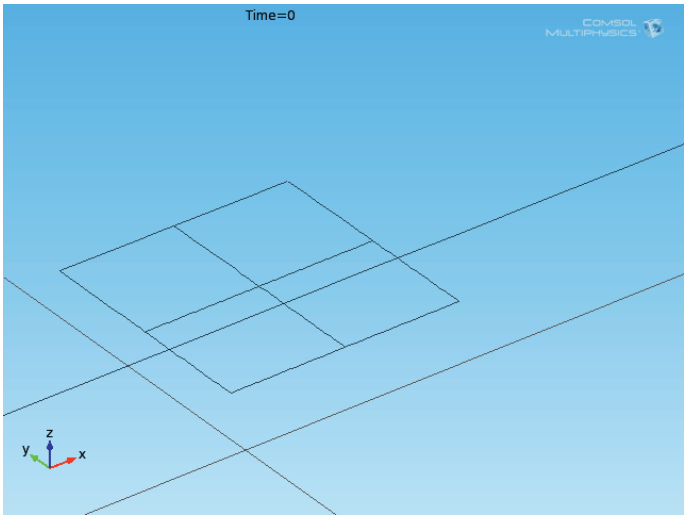


Figura 5.32: Esquema mostrando el techo de los pilares. En este primer ejemplo solo se 'queman'dos pilares.

En las Figuras 5.33 y 5.34 se muestran esquemas del macizo y la malla con las 4 superficies de los pilares, en este caso solo dos de ellas se queman.

En las Figuras 5.35 y 5.36 tenemos vistas isométricas y en detalle de la zona de falla $\alpha \geq 1$ para el caso en que se hayan quemado dos pilares. Se puede observar que la forma de la superficie de caving presenta algunas diferencias (no necesariamente muy notorias) con el caso de un solo pilar.

En las Figuras 5.37-5.39 tenemos vistas de la misma zona de falla mostrada en la Figura 5.36, pero ahora en una vista superior (Figura 5.37) y en los planos $x - z$ e $y - z$ en la Figuras 5.38 y 5.39, respectivamente. En esta ultima vista se pueden ver mayores diferencia en la forma como evolucionó la superficie de caving en comparación con lo mostrado para un pilar en la Figura 5.30.

En la Figura 5.40 tenemos un vista de la zona en donde el primer esfuerzo principal es positivo indicando zonas de posible falla por tracción. Se puede notar algunas diferencias con la figura similar mostrada en el caso de un solo pilar quemado.

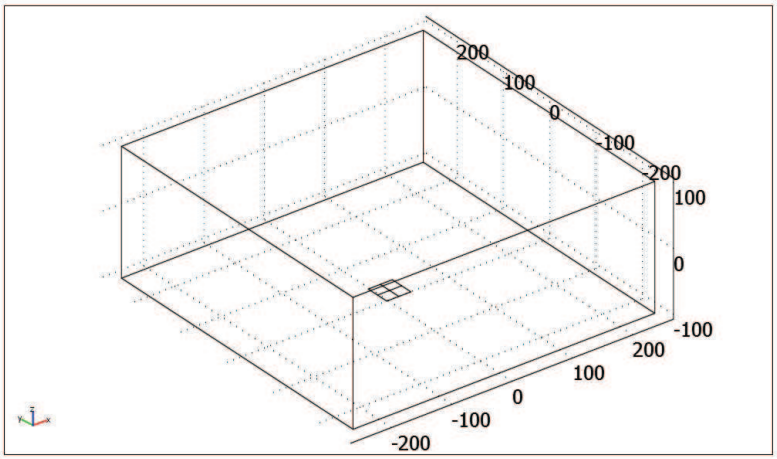


Figura 5.33: Bloque con dos pilares quemados.

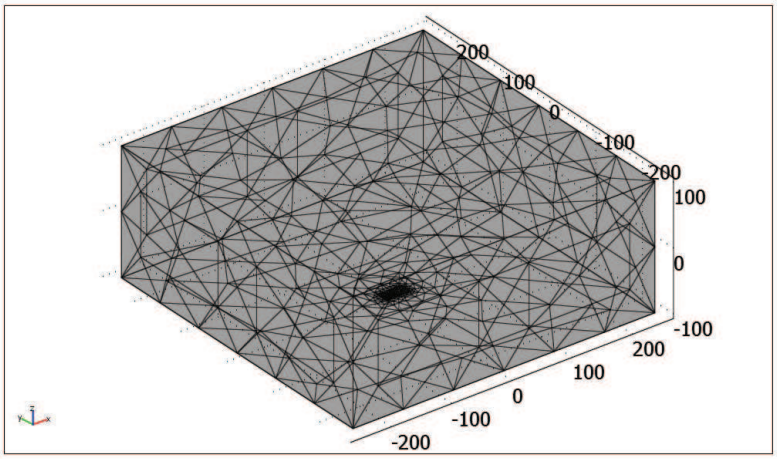


Figura 5.34: Malla para el bloque dos pilares quemados.

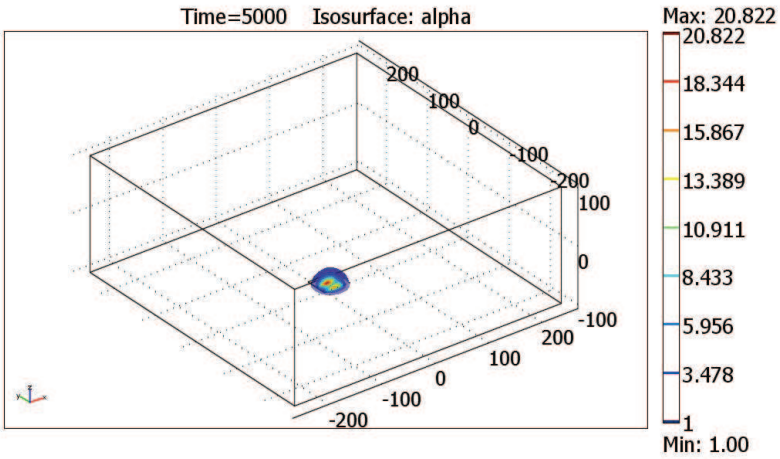


Figura 5.35: Zona de falla $\alpha \geq 1$ vista general.

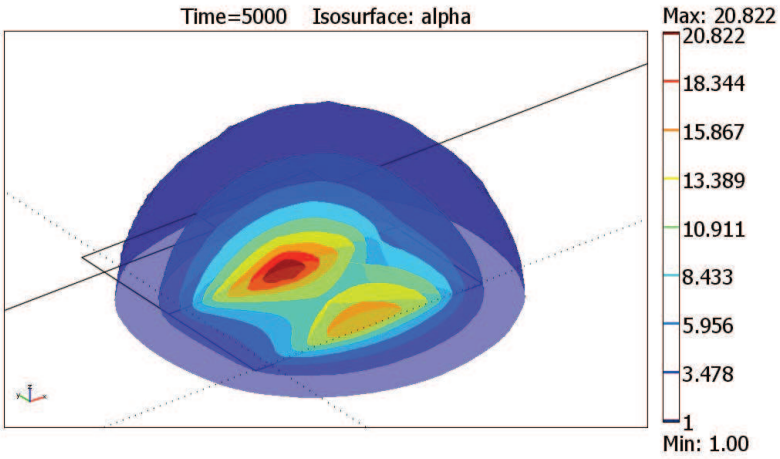


Figura 5.36: Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad.

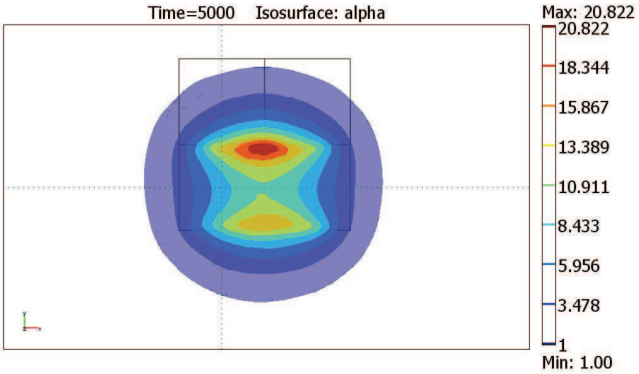


Figura 5.37: Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Plano de planta.

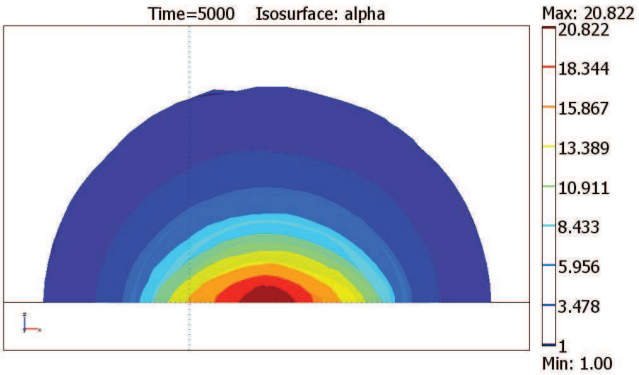


Figura 5.38: Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Vista en plano $x - z$

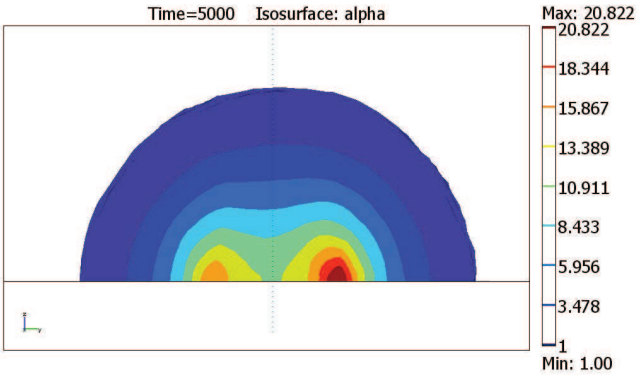


Figura 5.39: Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Vista en plano $y - z$

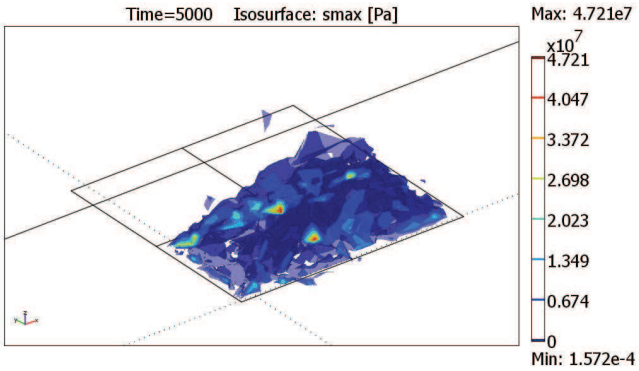


Figura 5.40: Zona para la cual el primer esfuerzo principal es positivo.

Resultados preliminares para tres pilares quemados

En este caso, que es el más interesante desarrollado hasta ahora, se considera el mismo modelo de macizo y del techo de los pilares mostrados en las Figuras 5.32 y 5.33. Ahora se asume el prime pilar quemado (superficie rectangular inferior), el segundo pilar se 'quema'después de un cierto intervalo de tiempo (el pilar de la parte derecha), para finalmente después de otro intervalo de tiempo se 'quemaél pilar de la segunda fila del lado izquierdo. La forma final que tendría la superficie de falla cuando esta se estabiliza se muestra en las siguientes figuras.

En las Figuras 5.41 y 5.42 tenemos vistas isométricas de la forma como evoluciona la superficie de caving en este caso especial con tres pilares quemados. En particular en la Figura 5.42 se puede apreciar ya notorias diferencias en la forma de dicha superficie en comparación con el caso con 1 y 2 pilares quemados.

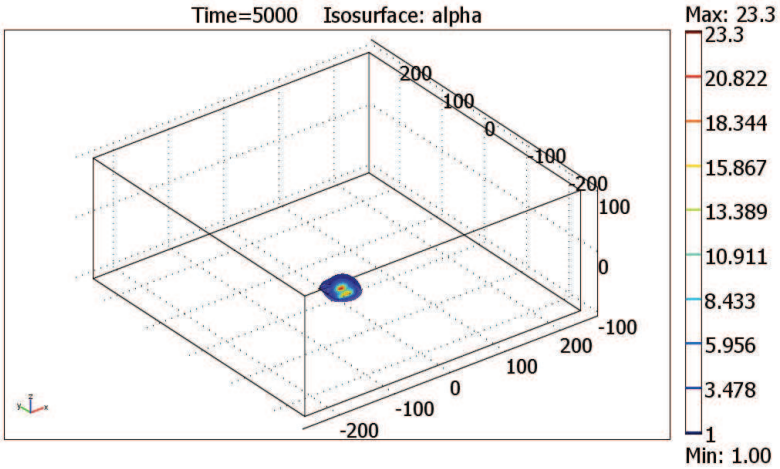


Figura 5.41: Zona de falla $\alpha \geq 1$ vista general.

En las Figuras 5.43-5.45 tenemos vistas de la misma zona de falla mostrada en la Figura 5.42, pero ahora en una vista superior (Figura 5.43) y en los planos $x-z$ e $y-z$ en la Figuras 5.44 y 5.45, respectivamente. La Figura 5.43 es particularmente interesante en relación a la forma de la superficie de falla.

En la Figura 5.46 tenemos un vista de la zona en donde el primer esfuerzo principal es positivo indicando zonas de posible falla por tracción. También se notan diferencias importantes con los casos anteriores con 1 y 2 pilares quemados.

5.4.3. Caso Pilar Norte considerando el modelo presentado en la Sección 5.2.1 con las constantes: Resultados finales (5.18)-(5.20)

En la Figura 5.47 tenemos una vista en planta de la zona definida por los pilares a quemar. Este es un modelo simplificado de la situación que ocurre en el pilar norte. Se tienen 16 pilares..

En la Figura 5.48 se ven detalles de las dimensiones (en metros) de cada pilar (vista superior).

En la 5.49 se aprecia una vista isométrica del modelo del macizo, el cual se asume tiene dimensiones $800 \times 800 \times 300$ metros en las direcciones x, y, z, respectivamente. Los pilares (sus superficies su-

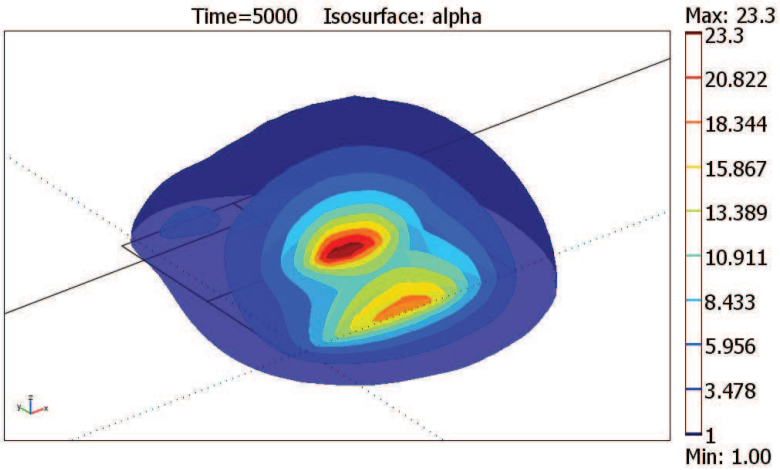


Figura 5.42: Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad.

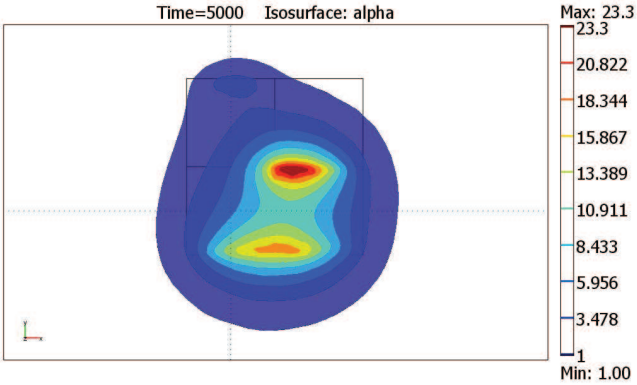


Figura 5.43: Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Plano de planta.

periores) se ubican en la parte inferior del modelo del macizo tal como se hizo en el modelo simplificado mostrado en la sección anterior. Una de las superficies con normal x se asume con restricción al movimiento en dicha dirección, en tanto que en la otra se aplica una carga de -30MPa, una de las superficies con normal y se asume con restricción al desplazamiento en esa dirección y la otra con una carga de -30MPa, finalmente la superficie inferior $z = 0$ se asume no puede desplazarse en la dirección del eje z, en tanto que en $z = 300$m se aplica una carga de compresión de -40MPa. De manera similar a lo hecho en la sección anterior, el quemado de pilares se modela al retirar la restricción al movimiento en la dirección z para las superficies superiores de dichos pilares, a ciertos intervalos regulares de tiempo.

Para este modelo se asumión un proceso de quemado de la siguiente forma (ver Figura 5.47). Primero se asumió que el pilar de la parte inferior izquierda se quemaba después de un intervalo de tiempo de 10000, para a continuación después de un intervalo de tiempo de aproximadamente 10000 se quemo el segundo

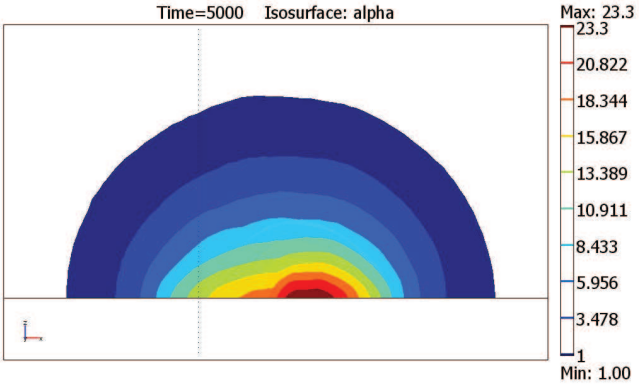


Figura 5.44: Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Vista en plano $x - z$

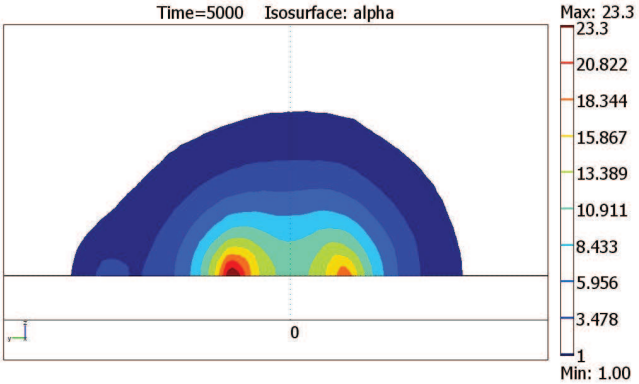


Figura 5.45: Zona de falla $\alpha \geq 1$, vista en detalle cerca del 'techo'de la cavidad. Vista en plano $y - z$

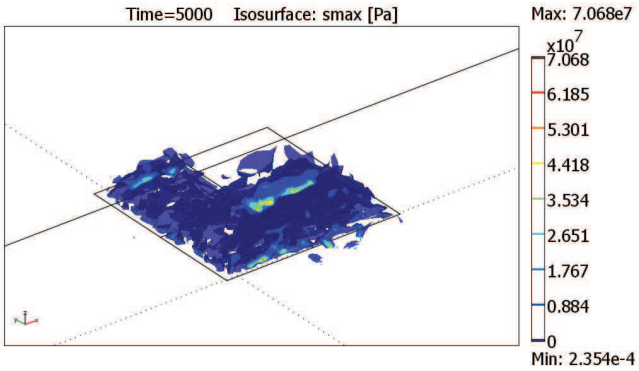


Figura 5.46: Zona para la cual el primer esfuerzo principal es positivo.

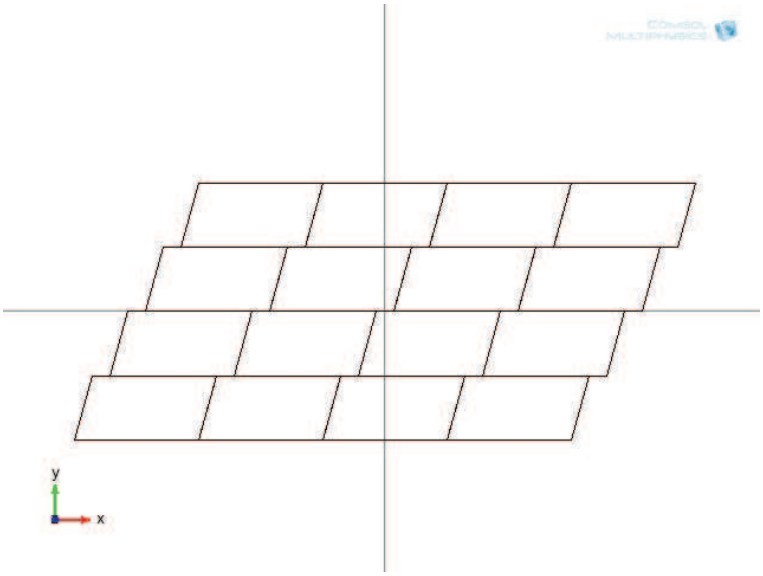


Figura 5.47: Modelo del pilar norte, vista en planta del diseño de los pilares.

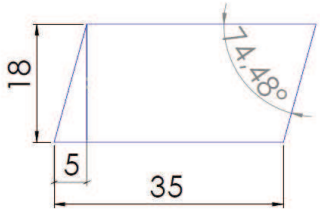


Figura 5.48: Dimensiones y forma de cada pilar, vista superior.

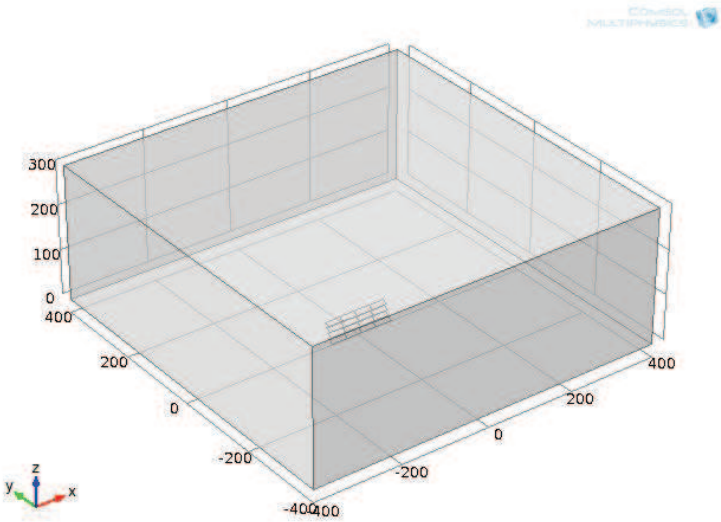


Figura 5.49: Modelo del pilar norte, vista isométrica general.

de la primera columna que se muestra en la Figura 5.48. El tiempo de quemado para el resto de los pilares es aproximadamente constante e igual[1].

[1]Se tuvieron que hacer cambios en los intervalos de tiempo de quemado para los tres casos mostrados a

En las Figuras 5.50 y 5.51 tenemos vistas de la malla para el modelo completo del macizo y el detalle de dicha malla para la zona de los pilares a quemar. En este último caso se puede apreciar la mayor densidad

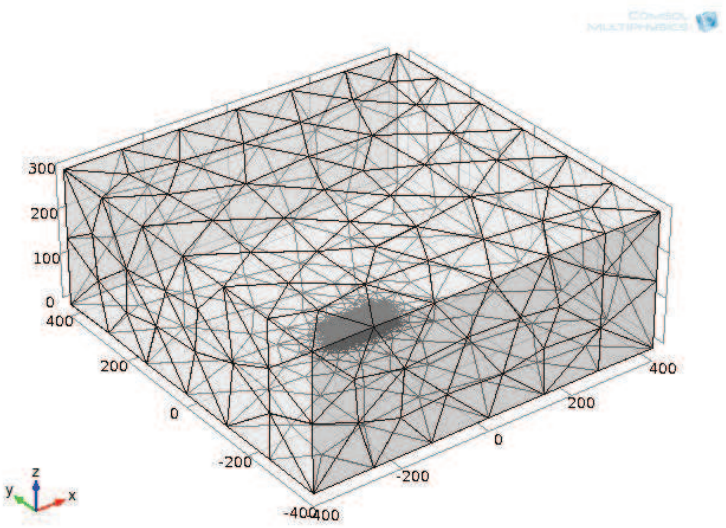


Figura 5.50: Modelo del pilar norte, vista isométrica de la malla del macizo.

de elementos cerca de la zona de quemado de los pilares.

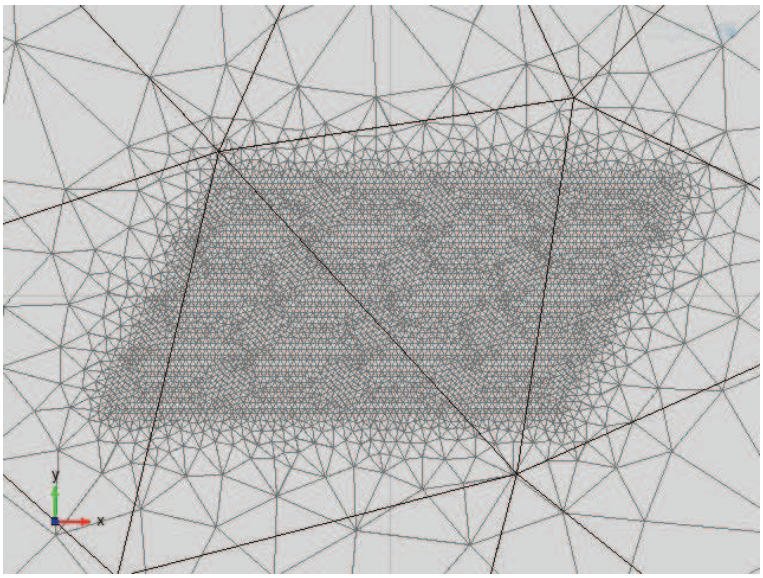


Figura 5.51: Modelo del pilar norte, vista en planta de la malla del macizo.

Para los tres casos mostrados a continuación se uso los siguientes valores para las constantes de la Sección 5.2.1:

$$\lambda_0 = 1{,}1 * 10^{10}\text{Pa}, \quad \lambda_r = 10^{10}\text{Pa}, \quad \mu_0 = 1{,}67 * 10^{10}\text{Pa}, \quad \mu_r = 10^{10}\text{Pa}, \tag{5.21}$$

$$\eta_1 = 10^8\text{Pa} * \text{tiempo}, \quad \eta_2 = 10^9\text{Pa} * \text{tiempo}, \quad \alpha_{cr} = 1{,}1 \tag{5.22}$$

continuación, motivados con la busqueda de situaciones en las que se pudiese obtener convergencia para los modelos.

A continuación se muestra una secuencia de quemado de los pilares, para cada instante de tiempo (de quemado) se muestran tres conjuntos de figuras, con una vista isométrica y en planta del parámetro α, indicando las zonas en que es mayor que 1 (daño en el macizo), y una figura adicional en donde se puede ver ese mismo parámetro en el plano $y - z$. Se consideran tres casos diferentes en relación a los valores de las constantes C_0, κ y γ_r.

Caso 1

En este primer caso para las constantes C_0, κ y γ_r mostradas en la Sección 5.2.1 se asumió:

$$C_0 = 8 * 10^{-8}, \quad \kappa = 5 * 10^2 \mathrm{Pa}, \quad \gamma_r = 6{,}5 * 10^9 \mathrm{Pa}. \tag{5.23}$$

Vistas isométricas de la falla representada por el parámetro α para el pilar norte Caso 1:

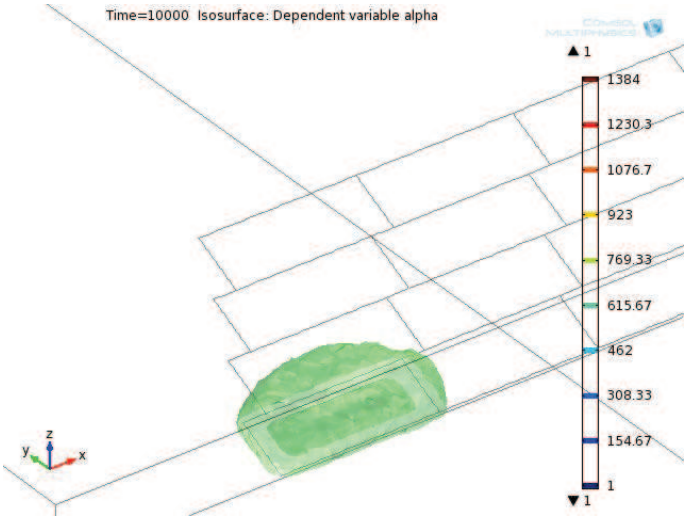


Figura 5.52: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 10000$.

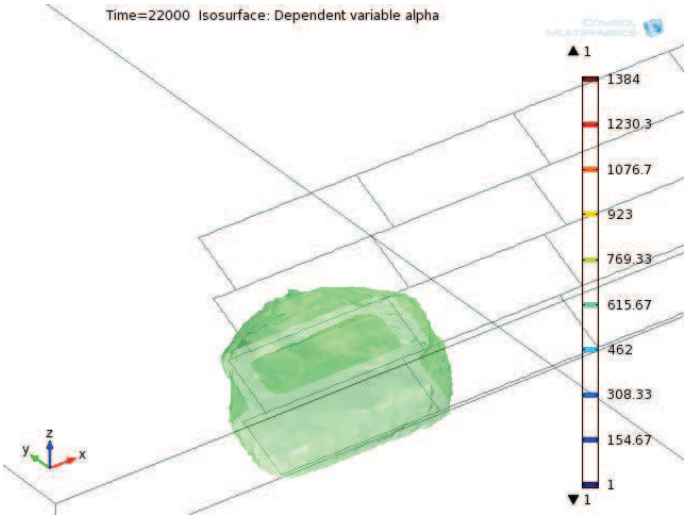


Figura 5.53: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 22000$.

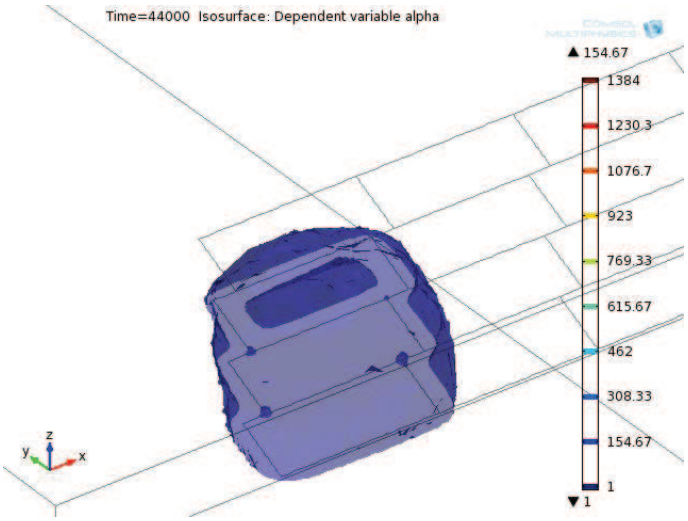


Figura 5.54: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 44000$.

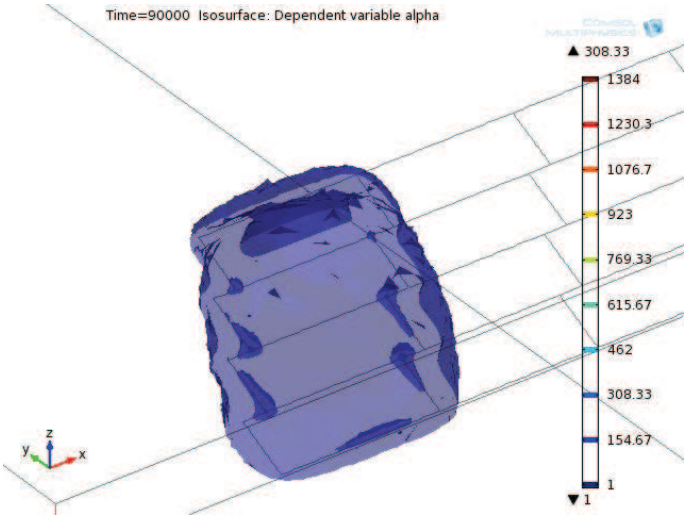


Figura 5.55: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 90000$.

Vistas en planta de la falla representada por el parámetro α para el pilar norte Caso 1:

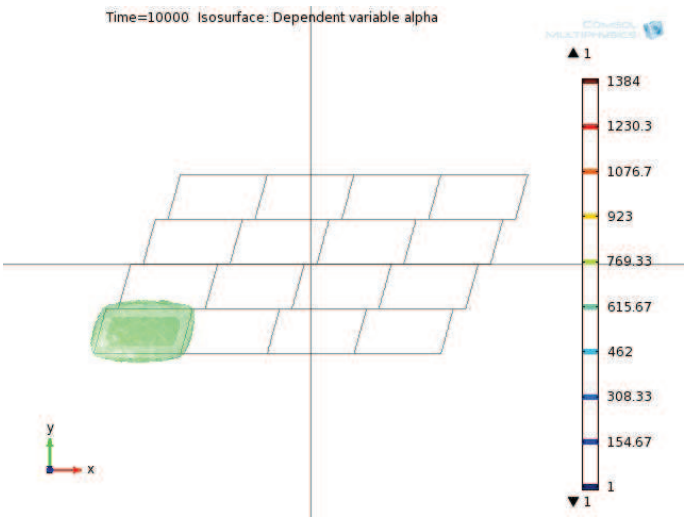


Figura 5.56: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 10000$.

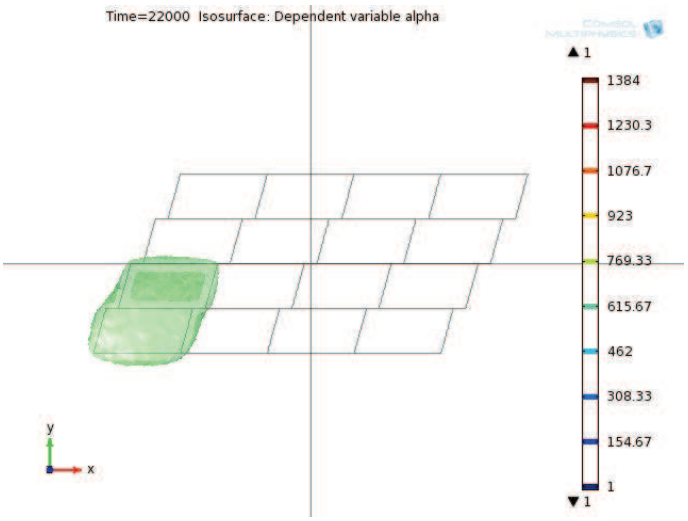


Figura 5.57: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 22000$.

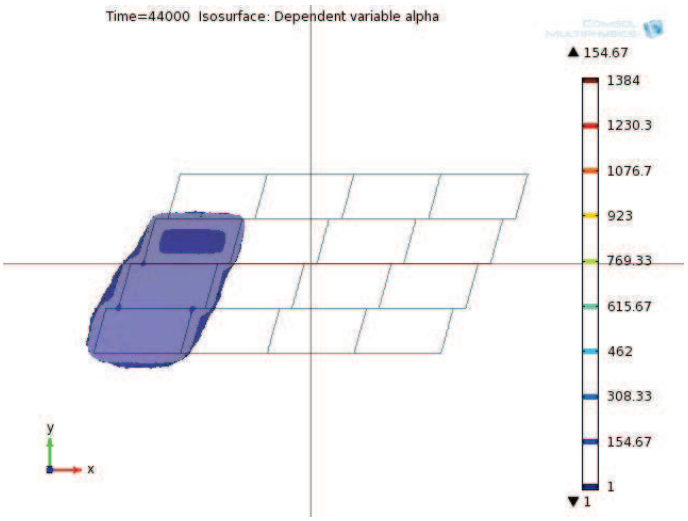


Figura 5.58: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 44000$.

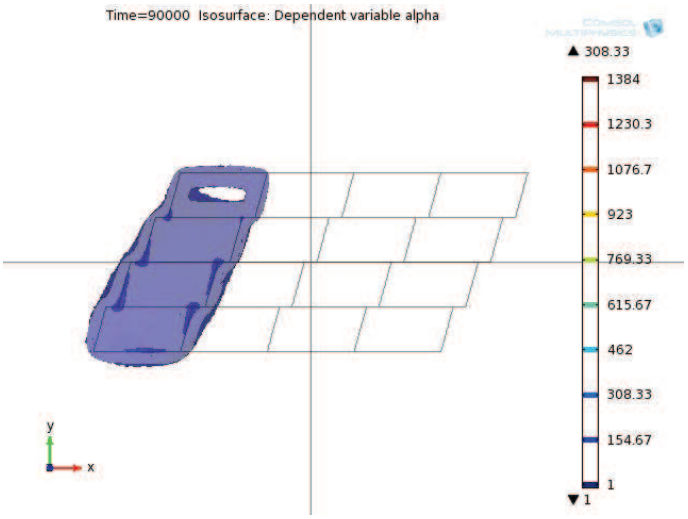


Figura 5.59: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 90000$.

Vistas en el plano $y - z$ de la falla representada por el parámetro α para el pilar norte Caso 1:

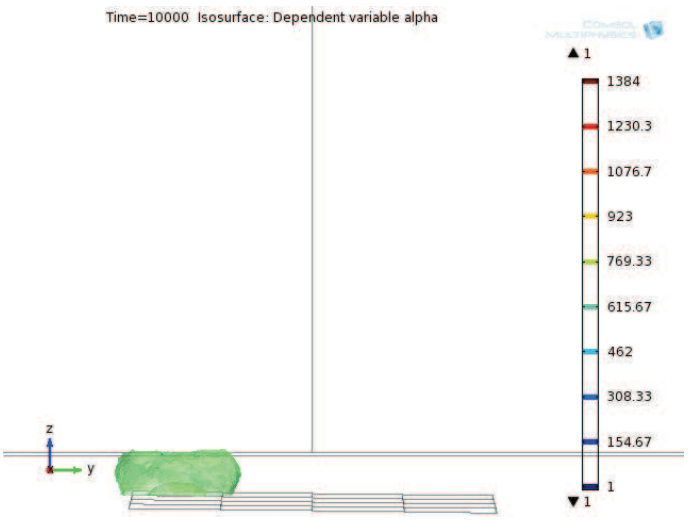


Figura 5.60: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ a del parámetro de daño α para el instante $t = 10000$.

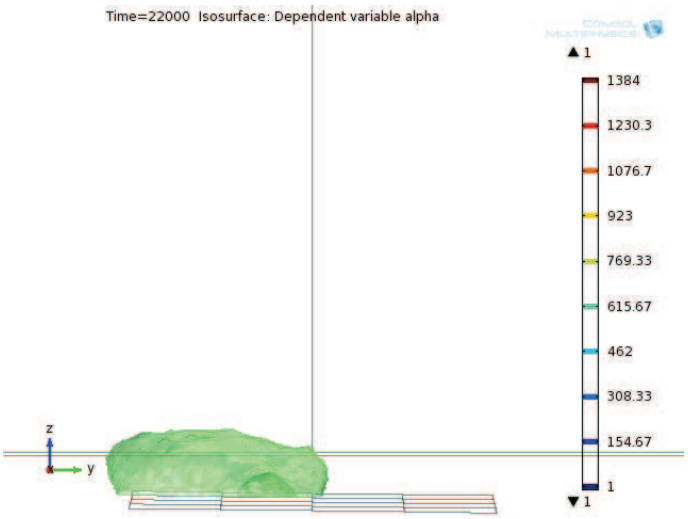


Figura 5.61: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 22000$.

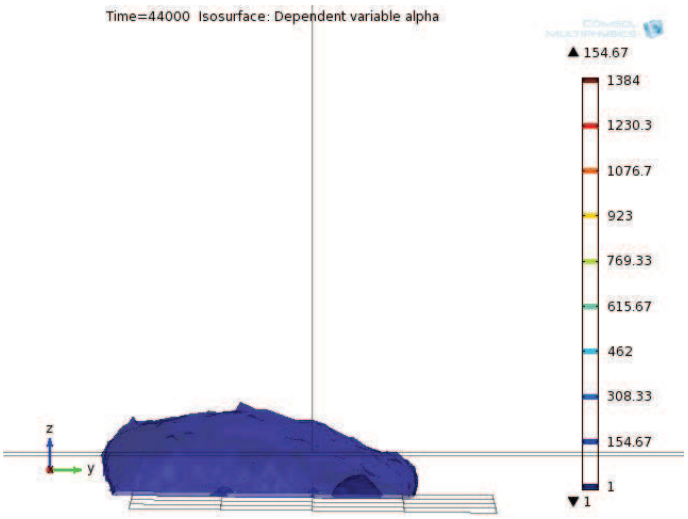


Figura 5.62: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 44000$.

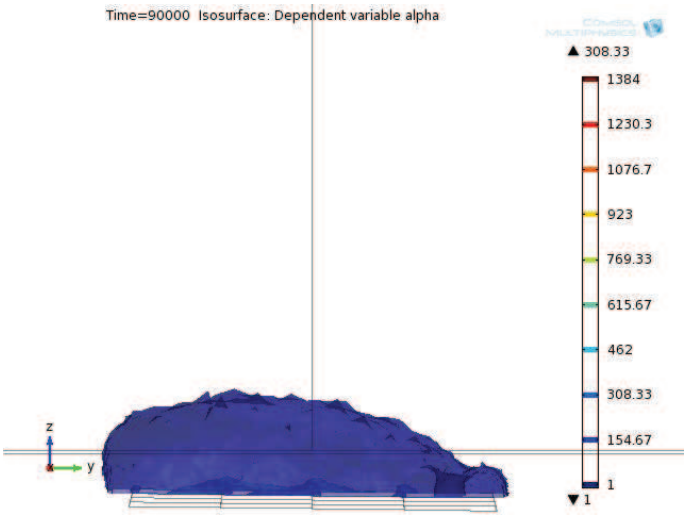


Figura 5.63: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 90000$.

Caso 2

En este segundo caso para las constantes C_0, κ y γ_r mostradas en la Sección 5.2.1 se asumió:

$$C_0 = 6 * 10^{-8}, \quad \kappa = 7 * 10^2 \text{Pa}, \quad \gamma_r = 6{,}3 * 10^9 \text{Pa}. \tag{5.24}$$

La secuencia de quemado de pilares es ligeramente diferente en este caso también.

Vistas isométricas de la falla representada por el parámetro α para el pilar norte Caso 2:

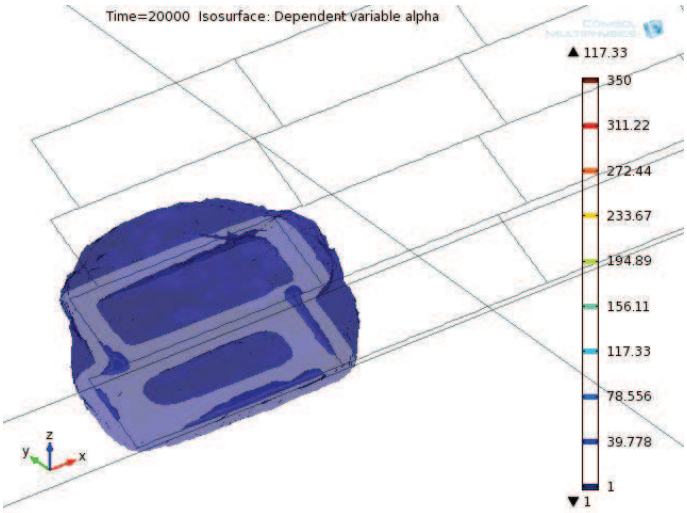


Figura 5.64: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 20000$.

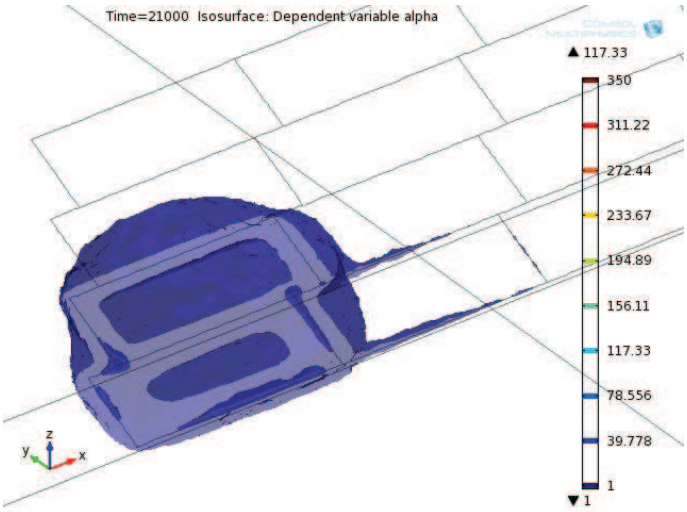


Figura 5.65: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 21000$.

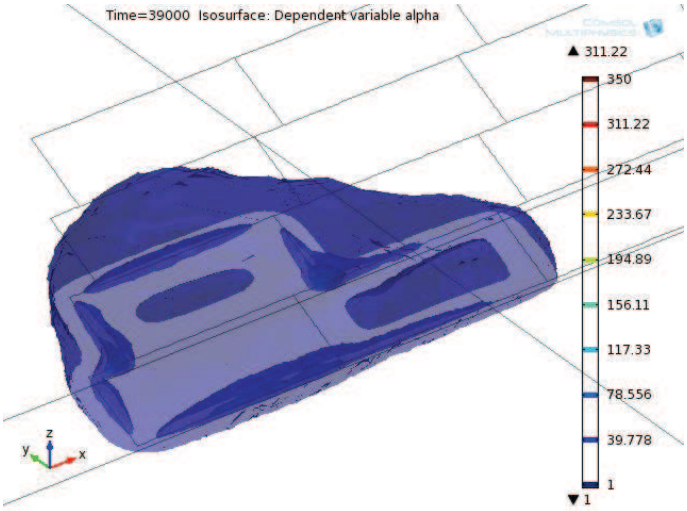


Figura 5.66: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 39000$.

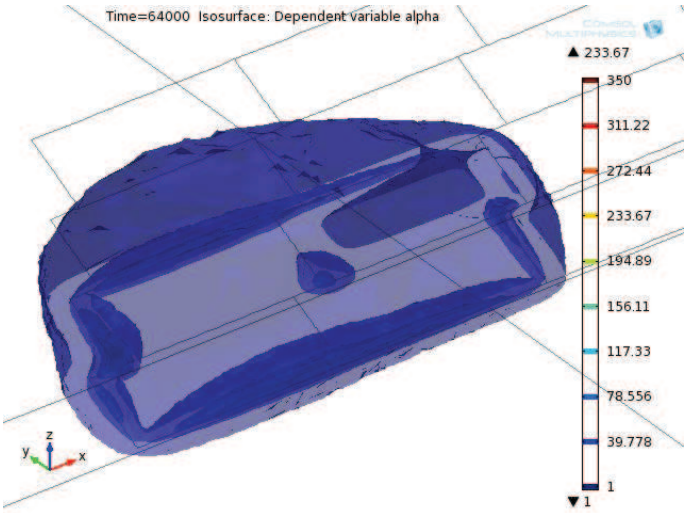


Figura 5.67: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 64000$.

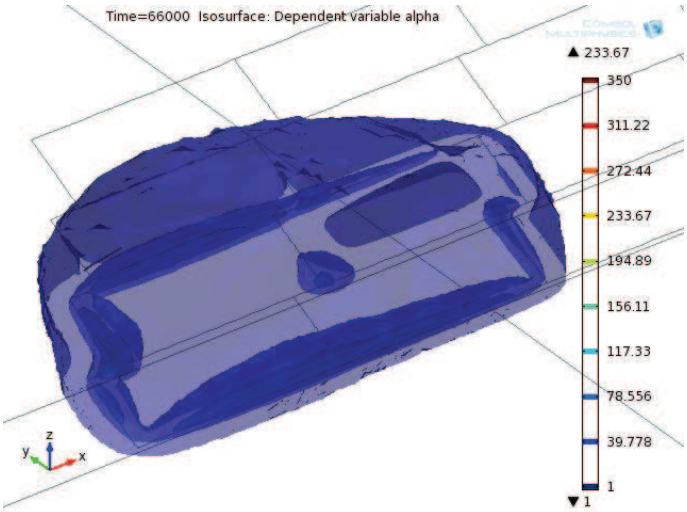


Figura 5.68: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 66000$.

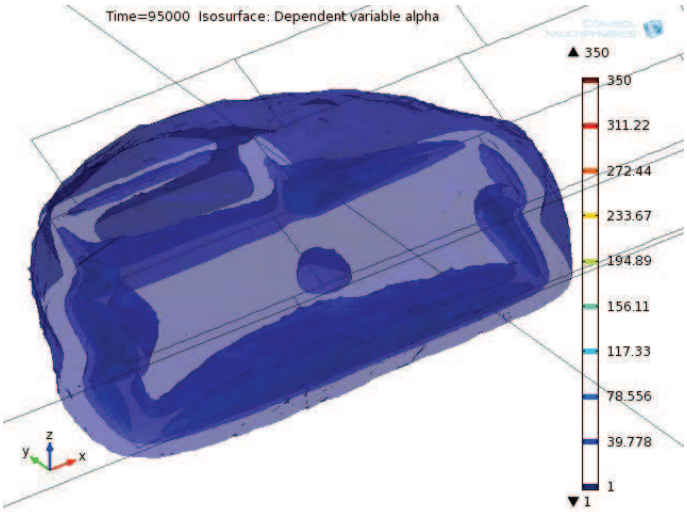


Figura 5.69: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 95000$.

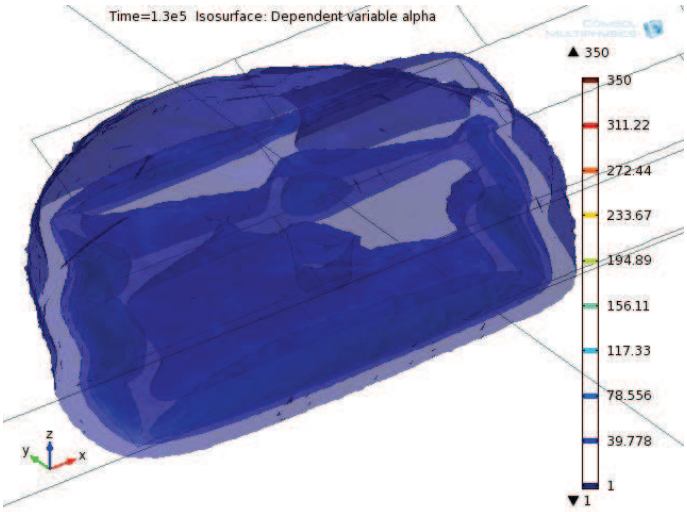


Figura 5.70: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 135000$.

Vistas en planta de la falla representada por el parámetro α para el pilar norte Caso 2:

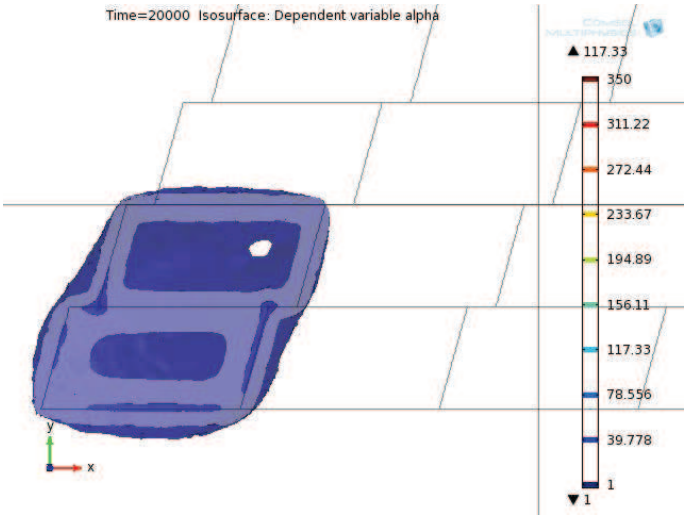


Figura 5.71: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 20000$.

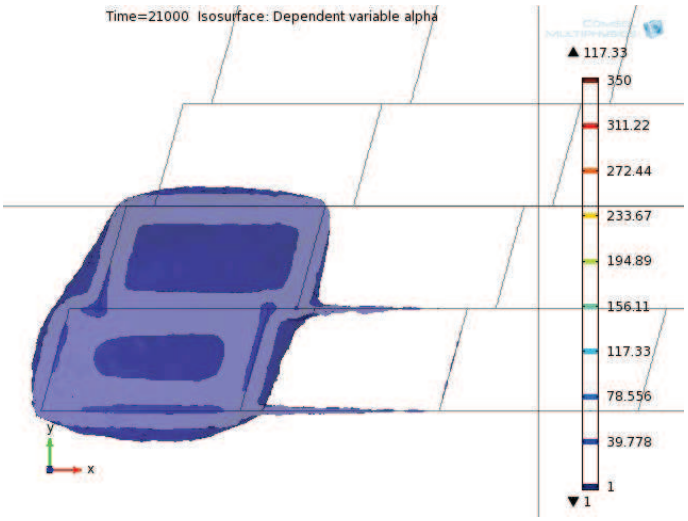


Figura 5.72: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 21000$.

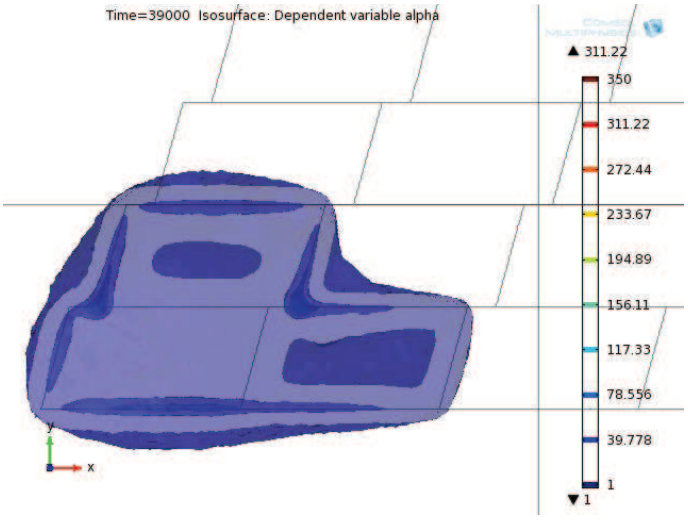


Figura 5.73: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 39000$.

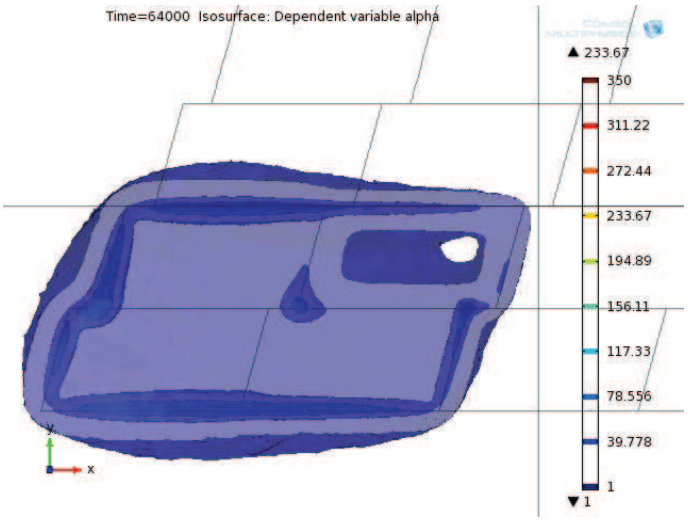


Figura 5.74: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 64000$.

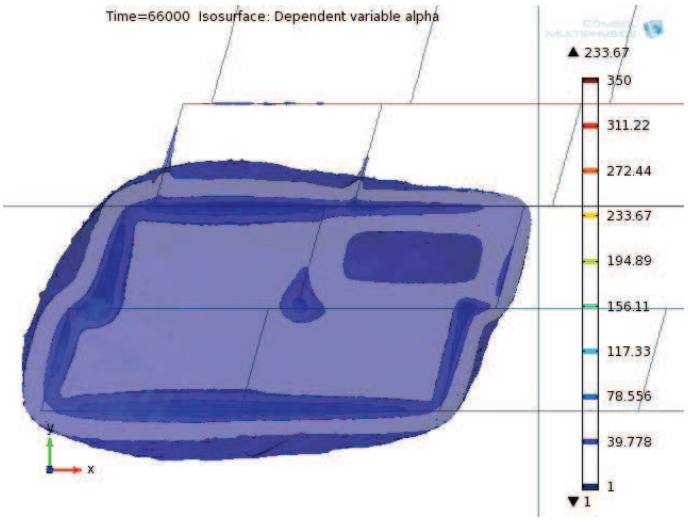


Figura 5.75: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 66000$.

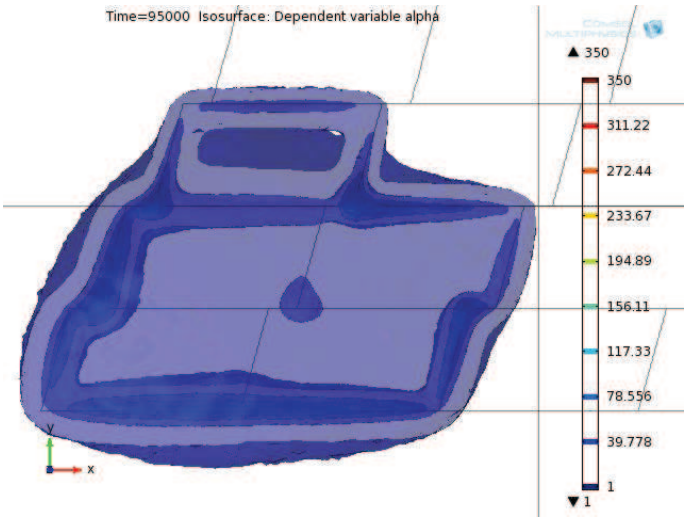


Figura 5.76: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 95000$.

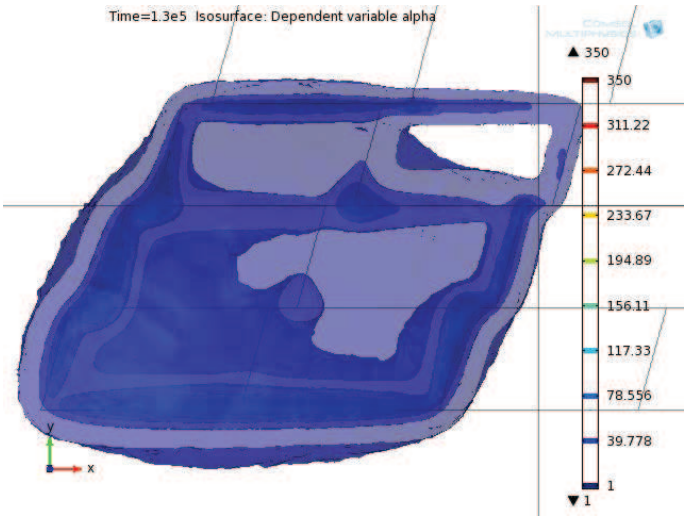


Figura 5.77: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 135000$.

Vistas en el plano $y - z$ de la falla representada por el parámetro α para el pilar norte Caso 2:

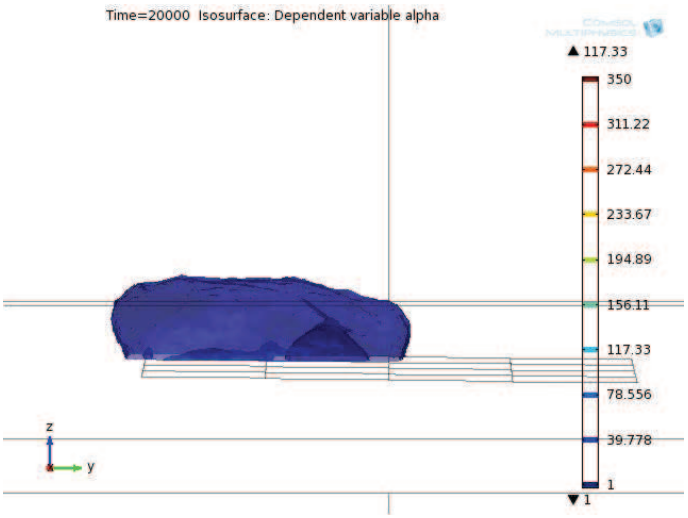


Figura 5.78: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 20000$.

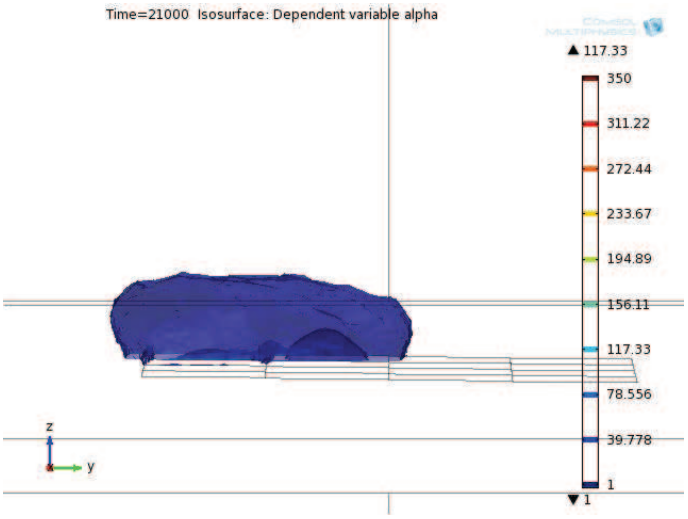


Figura 5.79: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 21000$.

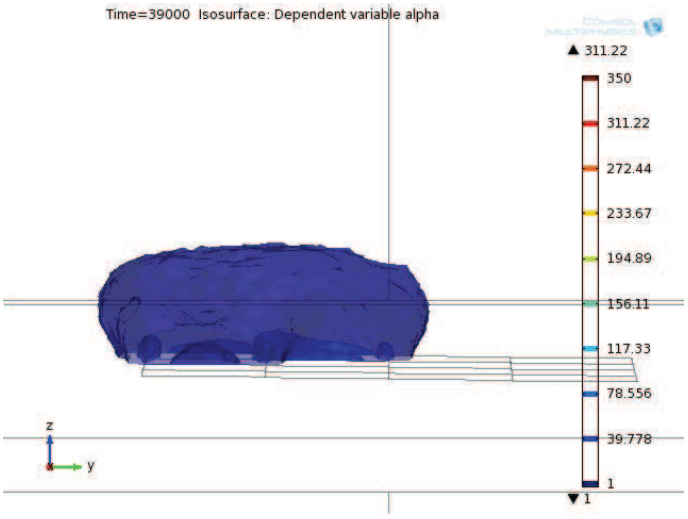


Figura 5.80: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 39000$.

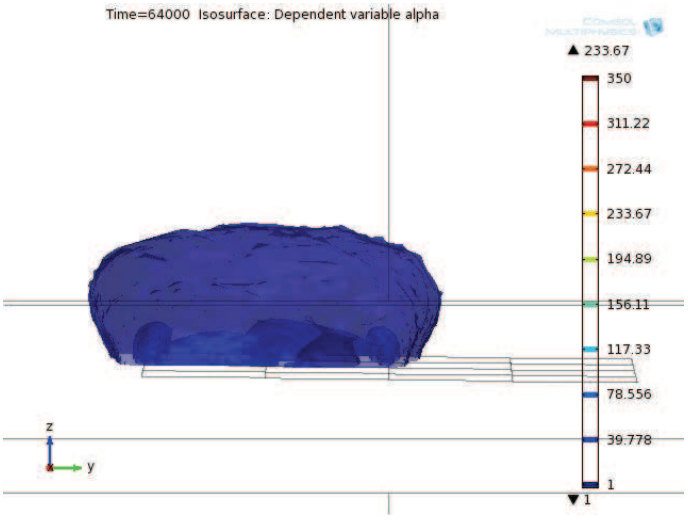


Figura 5.81: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 64000$.

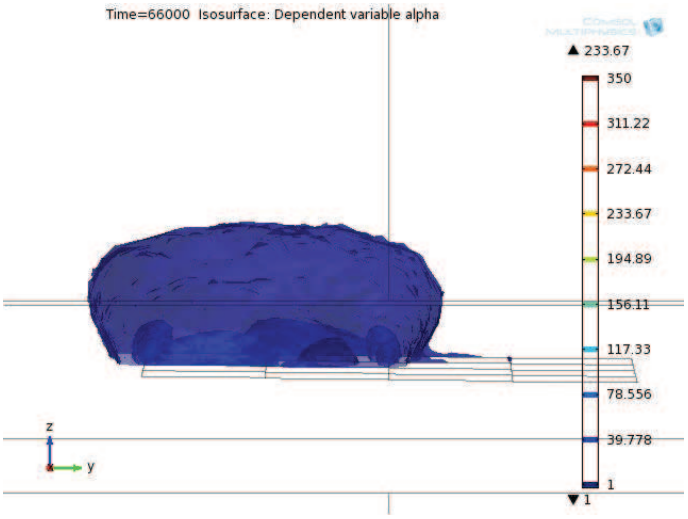


Figura 5.82: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 66000$.

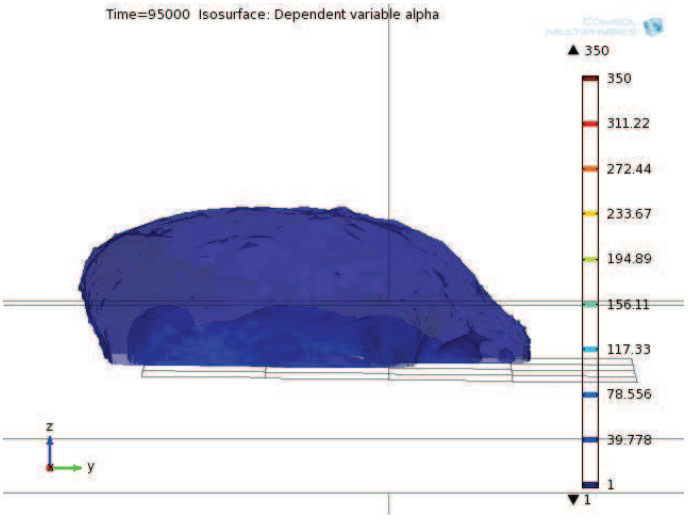


Figura 5.83: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 95000$.

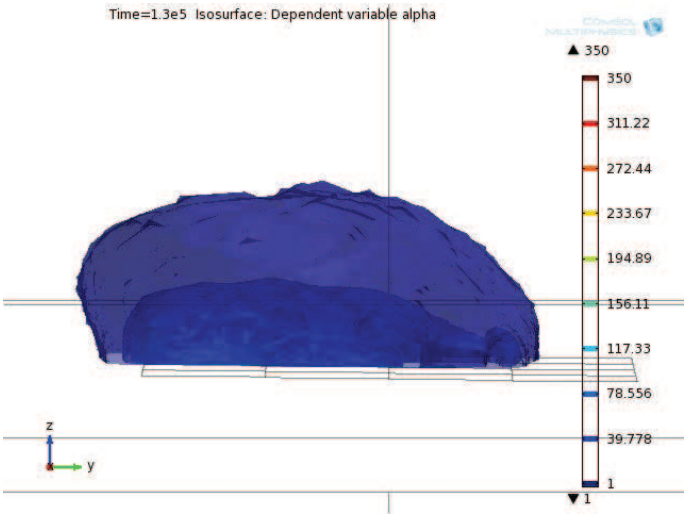


Figura 5.84: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 135000$.

Caso 3

En este último caso para las constantes C_0, κ y γ_r mostradas en la Sección 5.2.1 se asumió:

$$C_0 = 6 * 10^{-8}, \quad \kappa = 10^3 \text{Pa}, \quad \gamma_r = 6{,}15 * 10^9 \text{Pa}. \tag{5.25}$$

Vistas isométricas de la falla representada por el parámetro α para el pilar norte Caso 3:

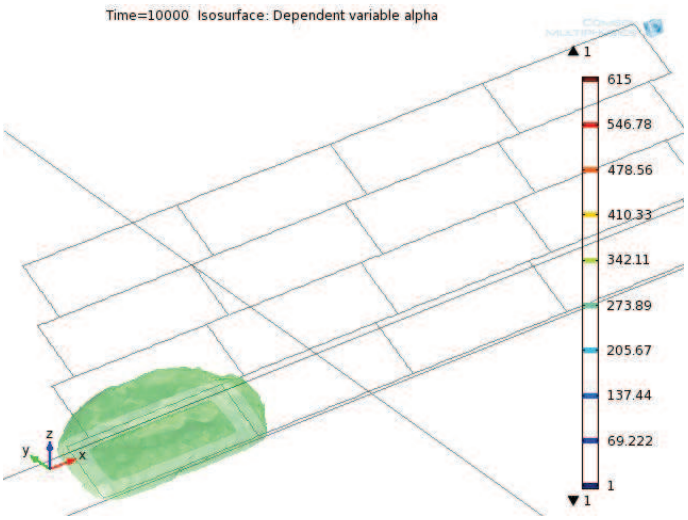


Figura 5.85: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 10000$.

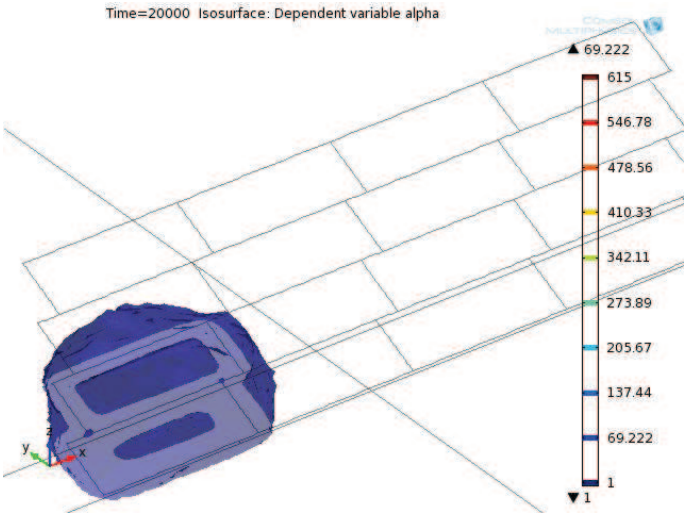


Figura 5.86: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 20000$.

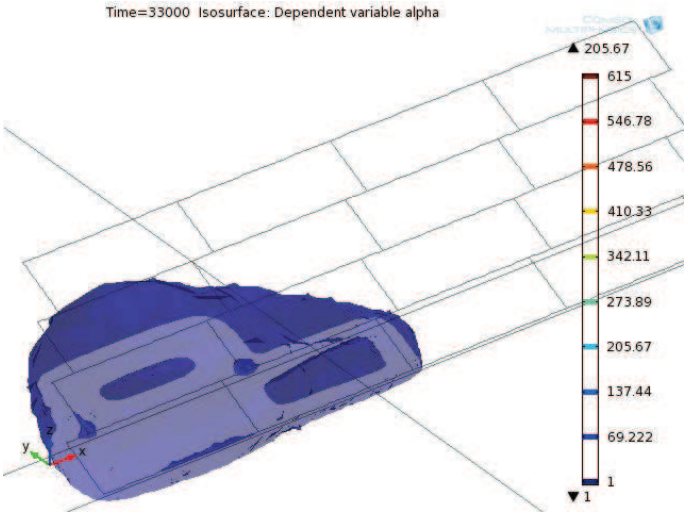


Figura 5.87: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 33000$.

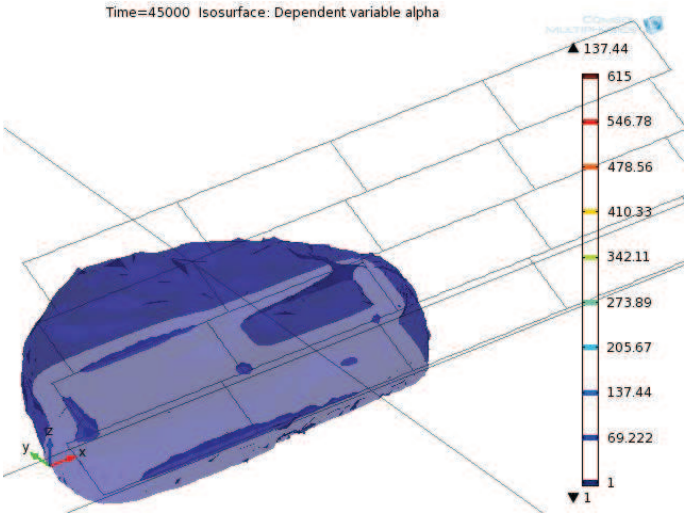


Figura 5.88: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 45000$.

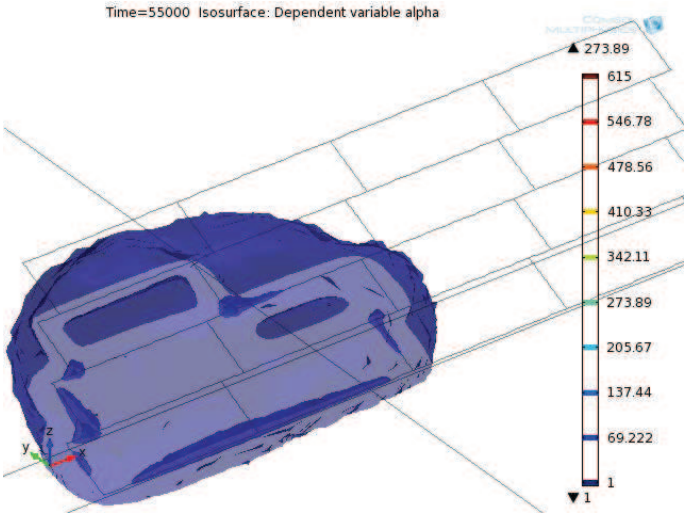


Figura 5.89: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 55000$.

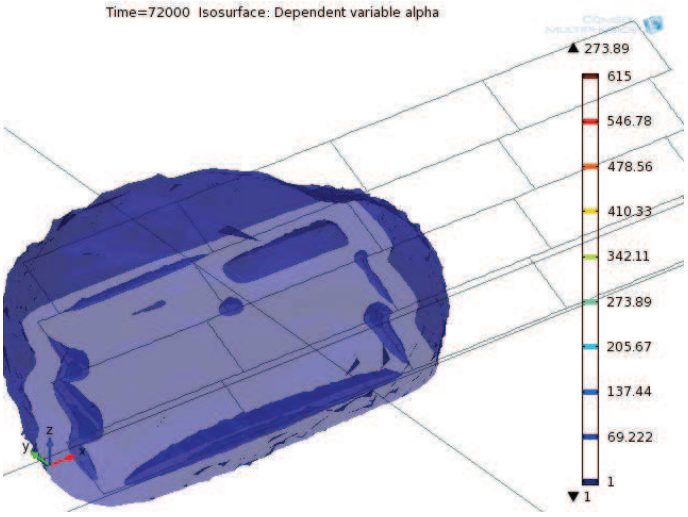


Figura 5.90: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 72000$.

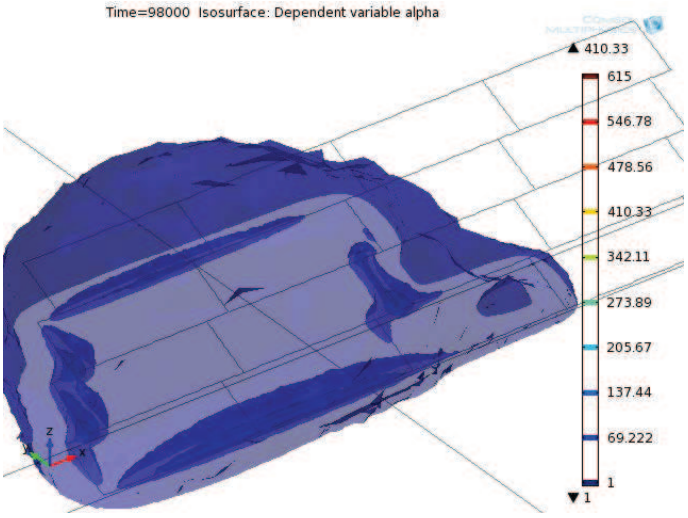


Figura 5.91: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 98000$.

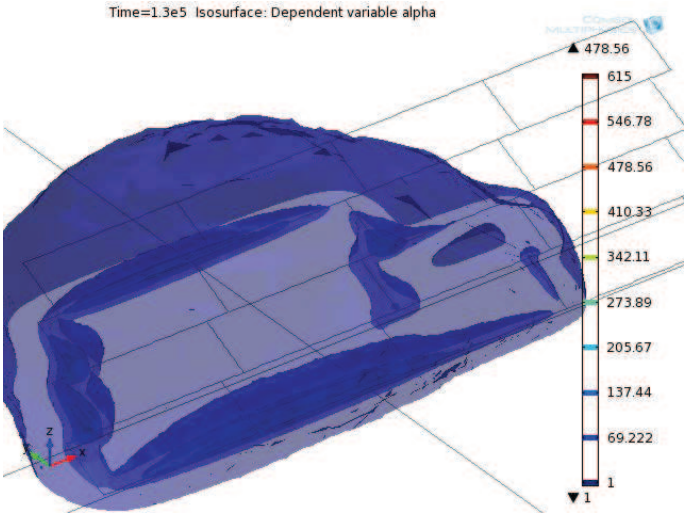


Figura 5.92: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 130000$.

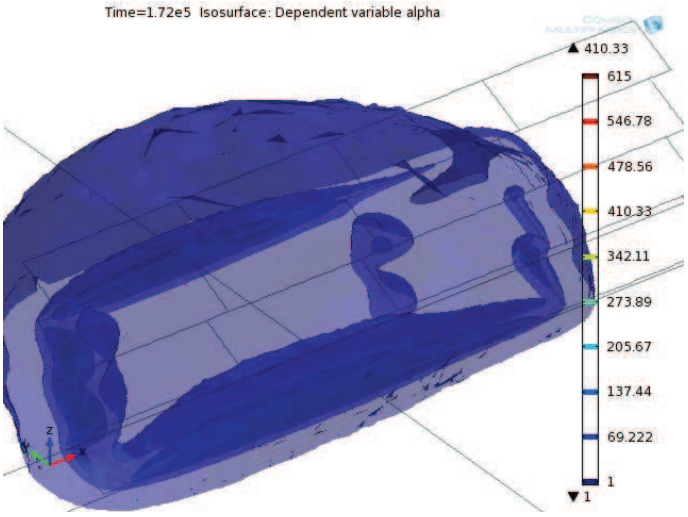


Figura 5.93: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 172000$.

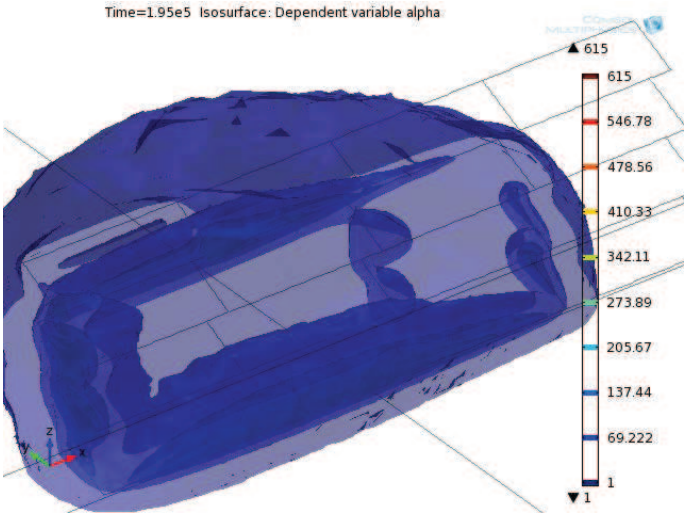


Figura 5.94: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 195000$.

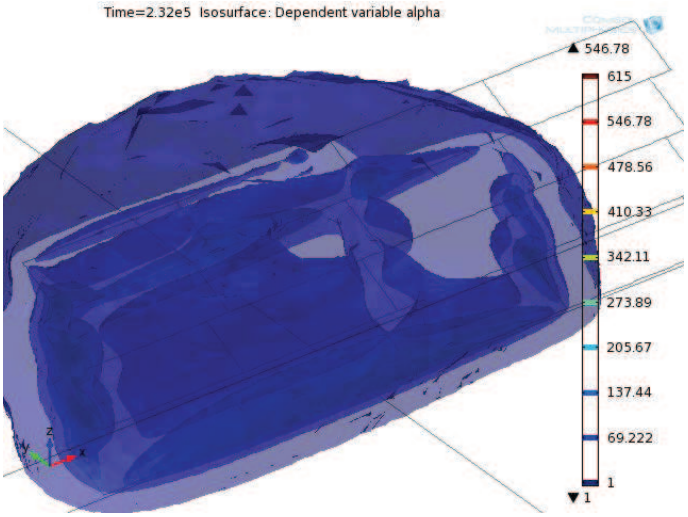


Figura 5.95: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 232000$.

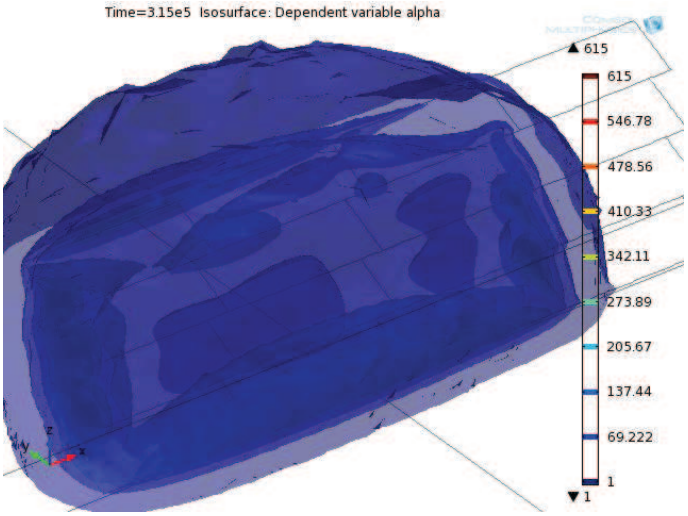


Figura 5.96: Modelo del pilar norte, vista isométrica del parámetro de daño α para el instante $t = 315000$.

Vistas en planta de la falla representada por el parámetro α para el pilar norte Caso 3:

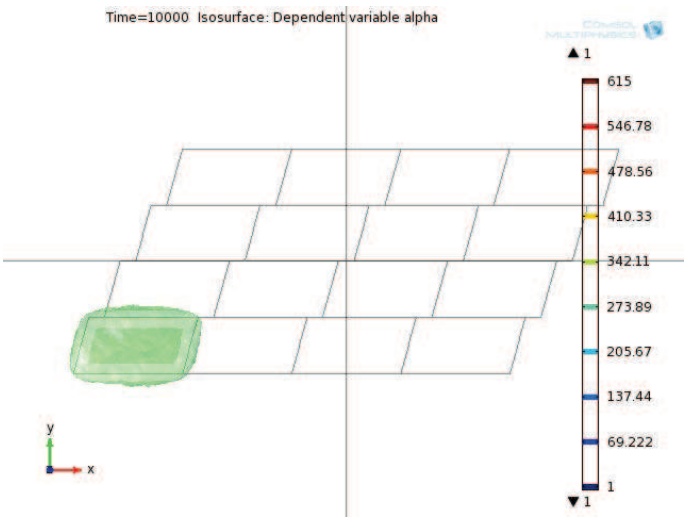


Figura 5.97: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 10000$.

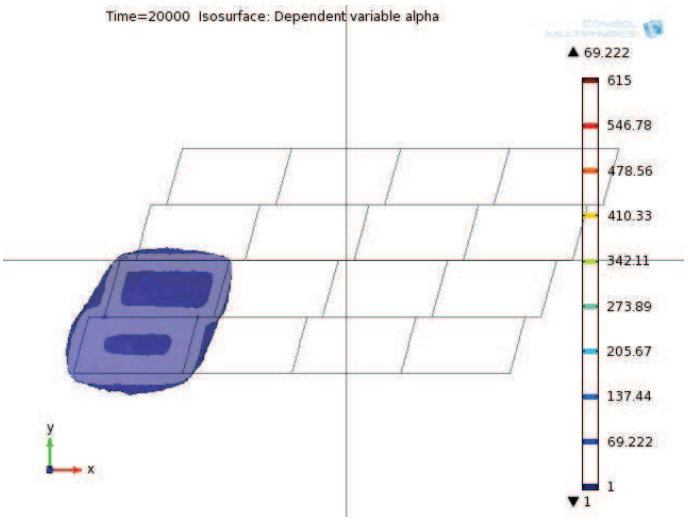


Figura 5.98: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 20000$.

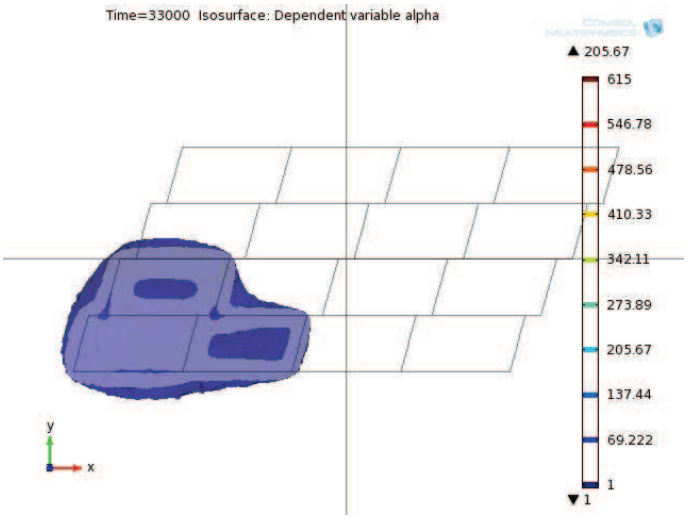


Figura 5.99: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 33000$.

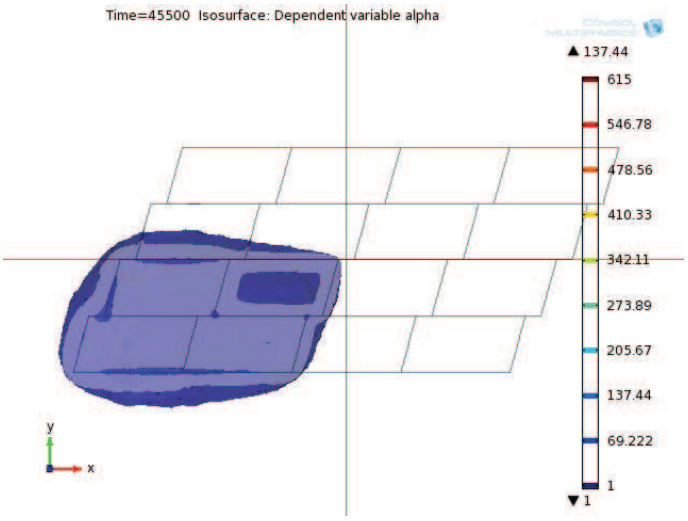


Figura 5.100: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 45000$.

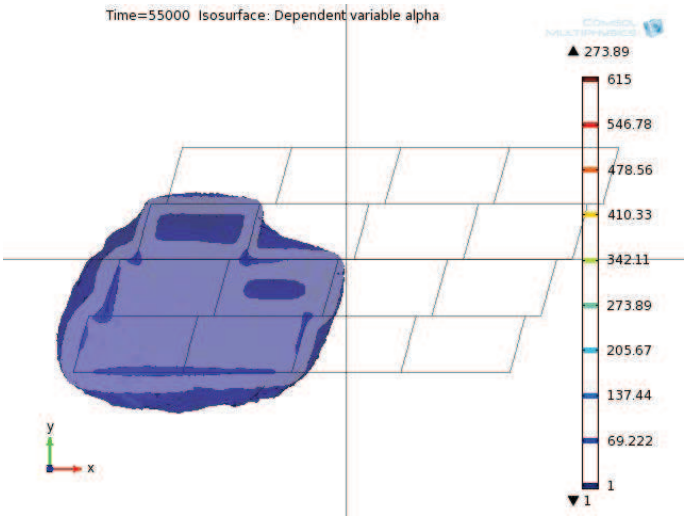


Figura 5.101: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 55000$.

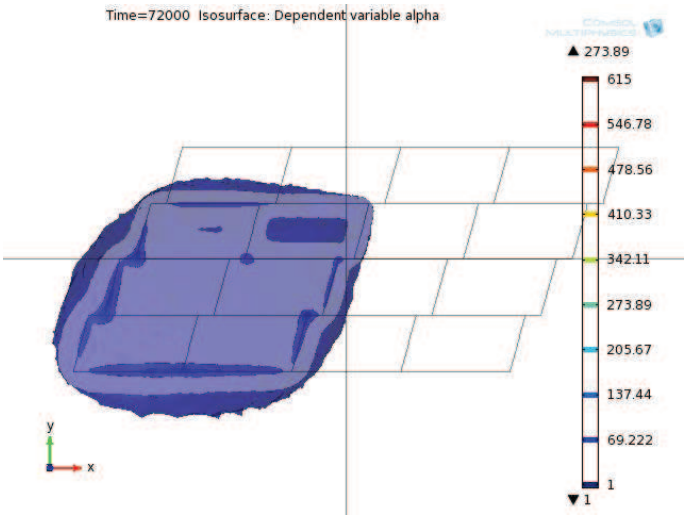


Figura 5.102: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 72000$.

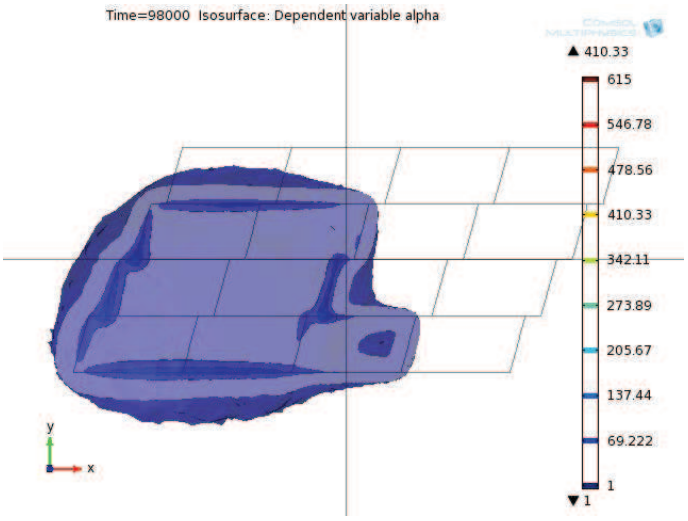


Figura 5.103: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 98000$.

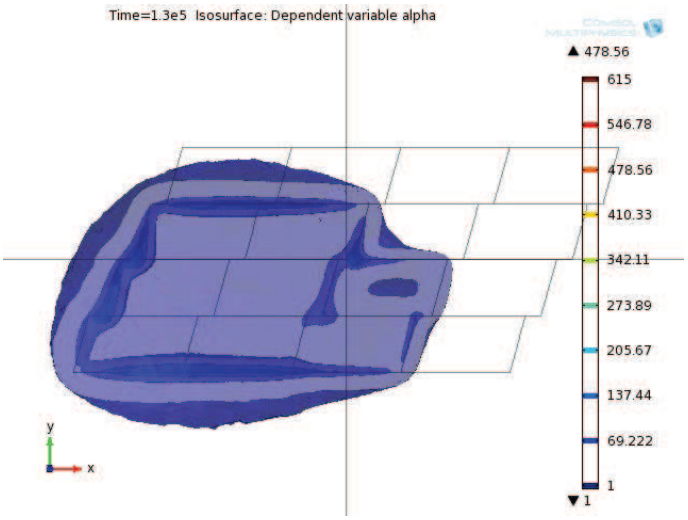


Figura 5.104: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 130000$.

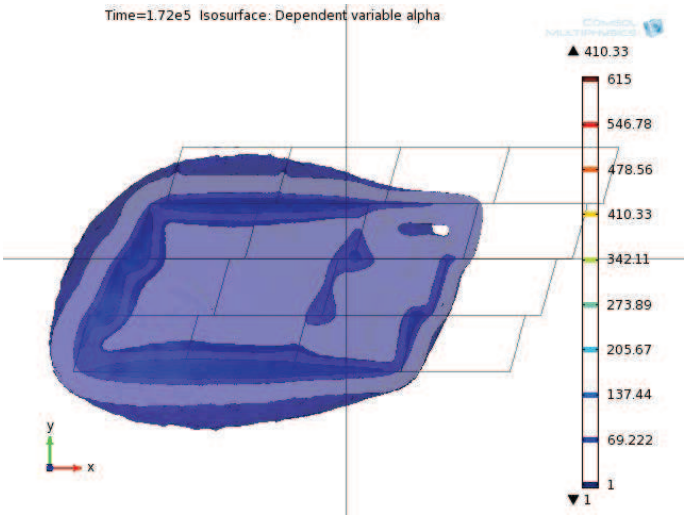


Figura 5.105: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 172000$.

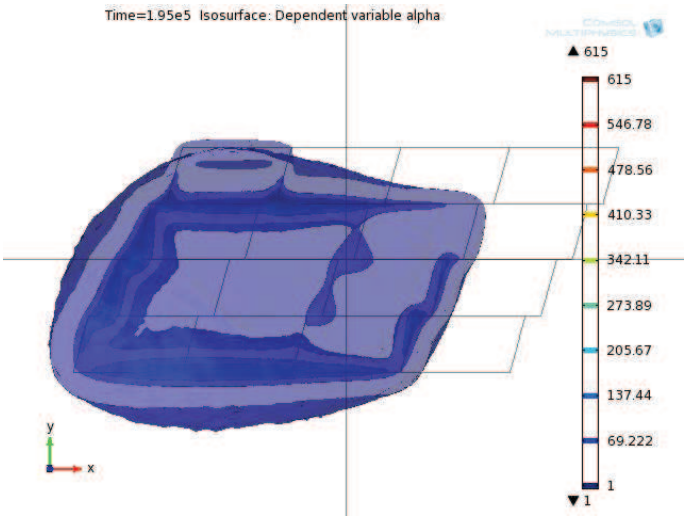


Figura 5.106: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 195000$.

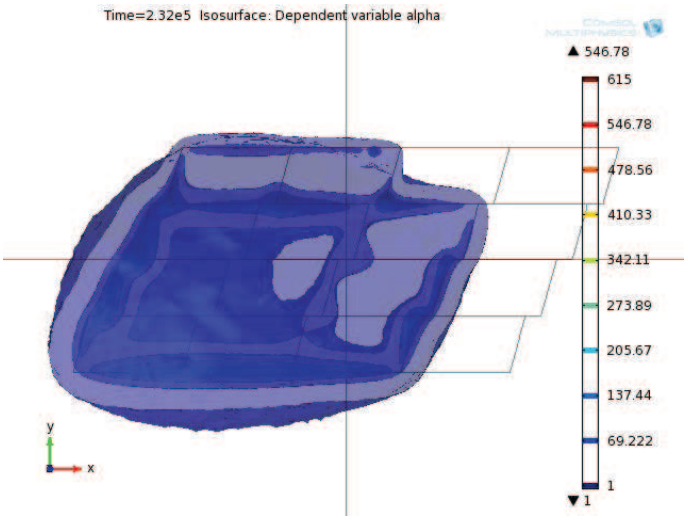


Figura 5.107: Modelo del pilar norte, vista en planta del parámetro de daño α para el instante $t = 232000$.

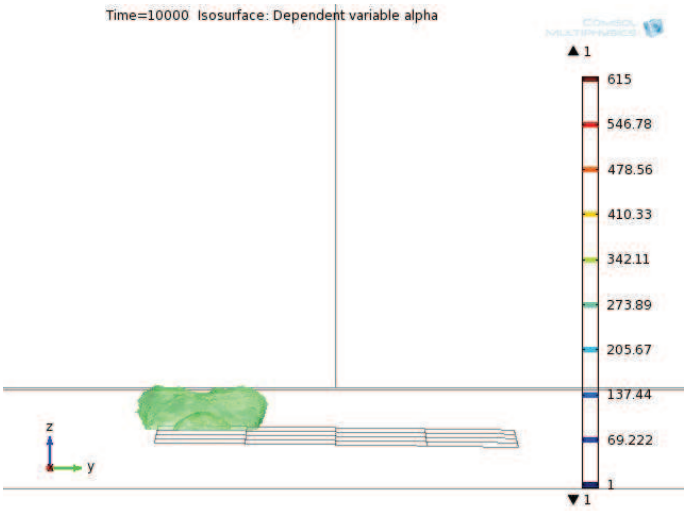


Figura 5.108: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 10000$.

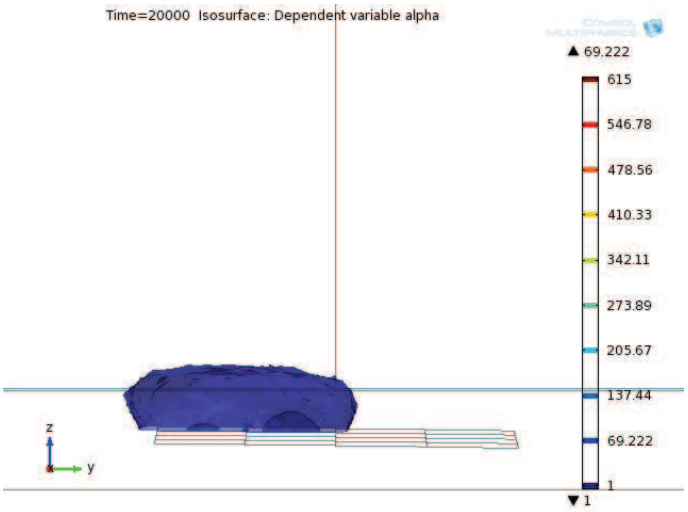


Figura 5.109: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 20000$.

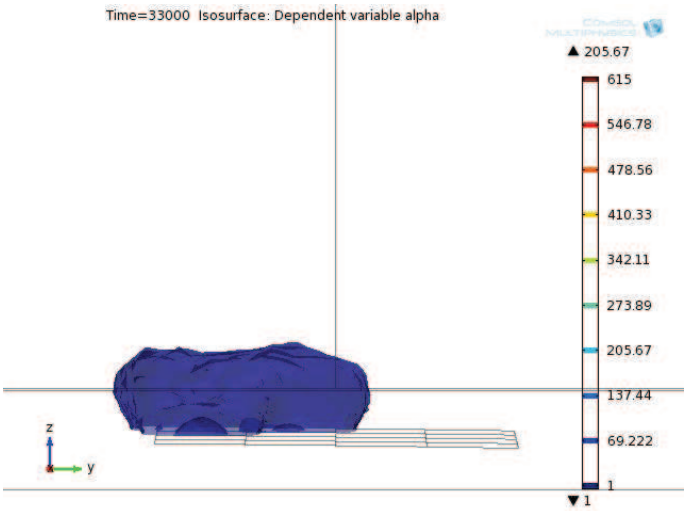


Figura 5.110: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 33000$.

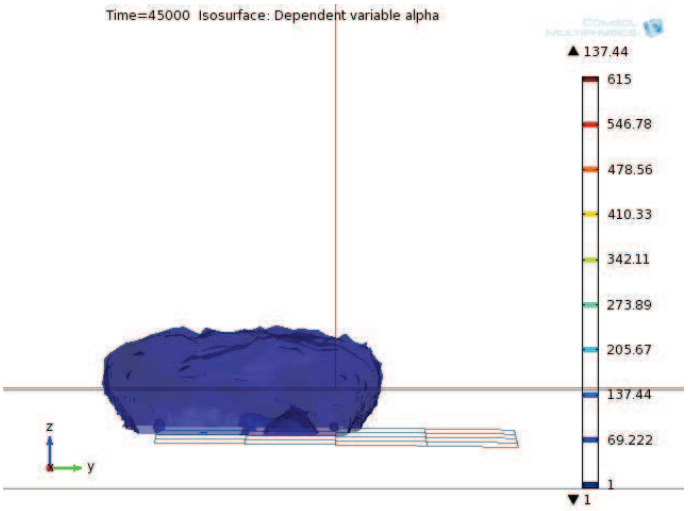


Figura 5.111: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 45000$.

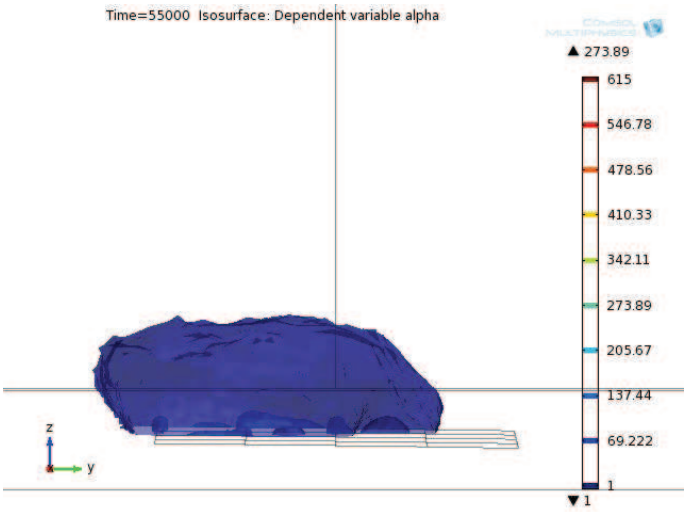


Figura 5.112: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 55000$.

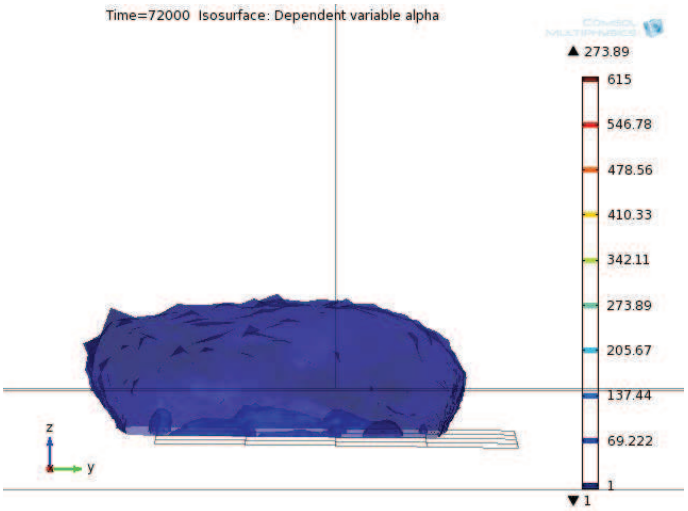


Figura 5.113: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 72000$.

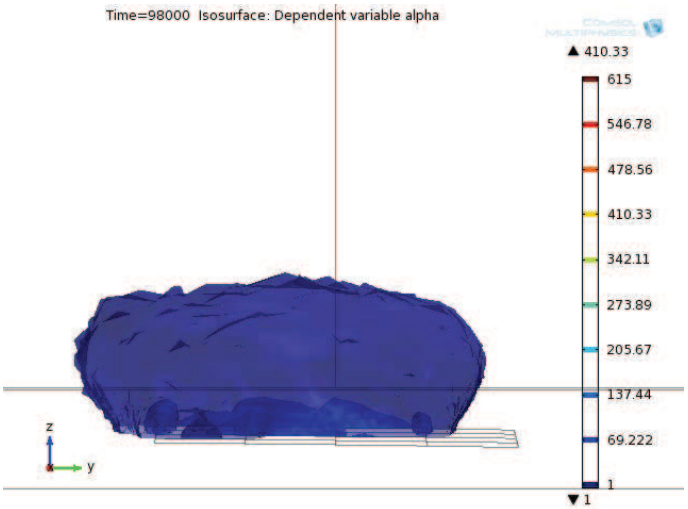


Figura 5.114: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 98000$.

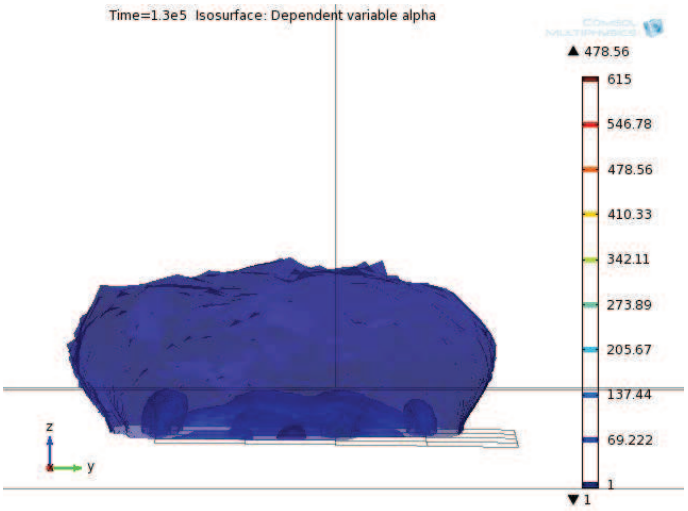


Figura 5.115: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 130000$.

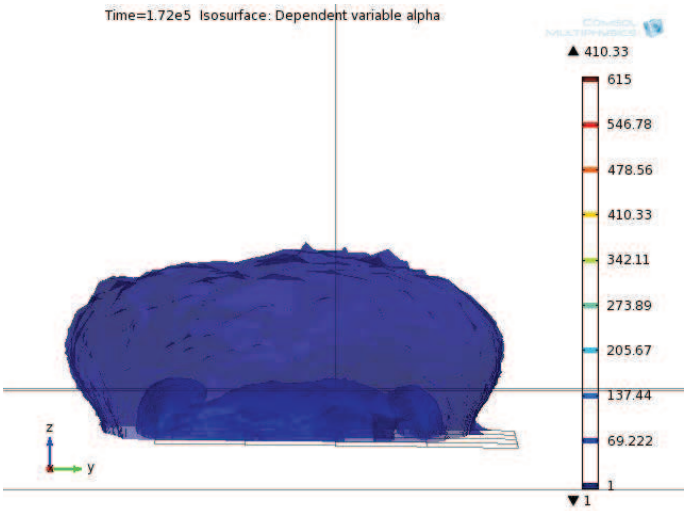


Figura 5.116: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 172000$.

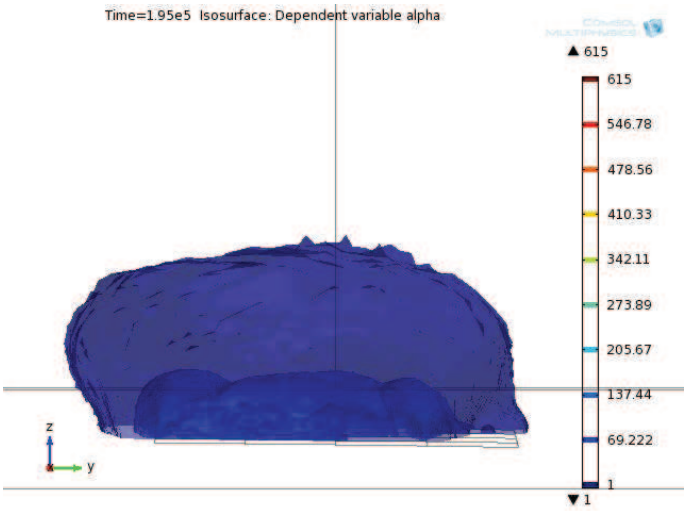


Figura 5.117: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 195000$.

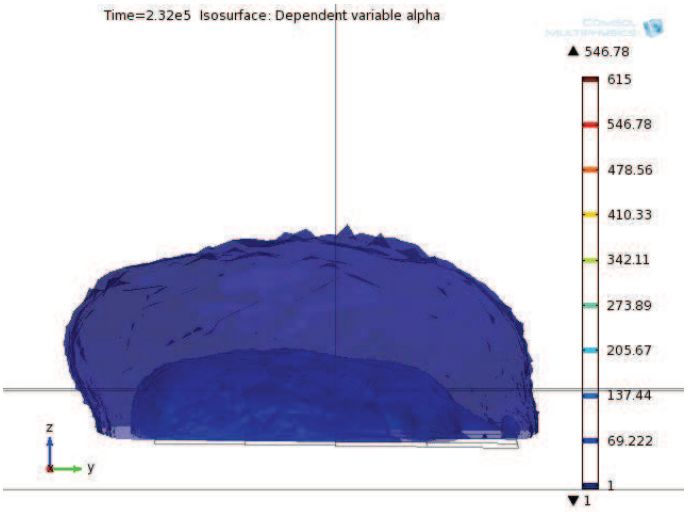


Figura 5.118: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 232000$.

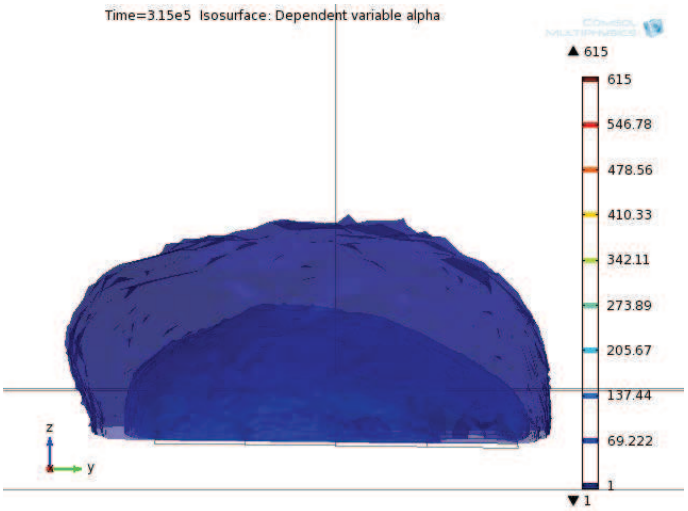


Figura 5.119: Modelo del pilar norte, vista en el plano $y - z$ del parámetro de daño α para el instante $t = 315000$.

Análisis de los resultados

Fue necesario considerar tres casos diferentes, debido a problemas encontrados con el programa para obtener convergencia en los modelos. Al cambiar la geometría, en particular el tamaño del macizo rocoso, se necesitó un cambio en el conjunto de constantes apropiado para lograr resultados con significado físico y también para lograr convergencia. Las constantes que se debieron modificar fueron C_0, κ y γ_r. La constante κ, usada en el caso del macizo de $500 \times 500 \times 200$, era demasiado grande y no entregaba valores coherentes a pesar de lograr convergencia. Al bajar dicha constante a un orden de magnitud de 10^2 a 10^3 se logró obtener una cavidad sobre el pilar con condición libre. Los resultados son muy sensibles al valor de γ_r, relacionado con la diferencia entre el daño por compresión y por tracción. Para valores de γ_r muy bajos (menores a $6 * 10^9$ [Pa]), se comienza a generar daño sobre el pilar pero luego se expande a todo el macizo (es decir se produciría una propagación inestable). Al aumentar γ_r se genera una cavidad estable, pero el programa diverge luego de un valor de tiempo específico, observándose que dicho tiempo es el mismo independiente de la cantidad de pilares quemados, por lo que el problema de convergencia se genera en el primer pilar. Se observó además que el tiempo que tarda en estabilizarse cada pilar (formar una cavidad y que esta no crezca más) aumenta a medida que se queman más pilares. Para γ_r muy grandes (10^7 [Pa] o mayores) el problema no converge.

Se intentó obtener valores específicos de las constantes de modo de generara una cavidad estable y que el programa pudiese llegar a niveles de tiempo suficientemente altos para quemar todos los pilares, sin embargo en los tres casos tratados no se obtuvo eso. Al bajar el parámetro C_0 (de $8 * 10^{-8}$ a $6 * 10^{-8}$), relacionado con la velocidad de propagación del daño, se logró resolver para tiempos mayores aunque disminuyendo la velocidad de daño. Sin embargo bajar más este valor hace que el tiempo en estabilizarse un pilar sea demasiado largo.

La inspección de las figuras, en particular las secuencias para el daño en el plano $y - z$, indica que el método basado en el parámetro de daño y elementos finitos permite obtener resultados similares a los resultados esperados desde el punto de vista experimental.

5.5. Resultados Generales

El modelo de daño usado en este método de simulación del caving, si bien mostró interesantes resultados, permitiendo obtener diferente comportamiento del daño en tracción y en compresión, por otro lado significó un desafío mayor en relación a lograr la convergencia del programa usado. El problema es altamente no lineal, y para lograr resultados de la evolución de la superficie de caving, es necesario resolver estas ecuaciones para intervalos en general grandes de tiempo.

Se realizó una serie larga de estudios preliminares, con el propósito de estudiar la influencia de los distintos parámetros de material, y de las distintas alternativas para modelar el proceso de quemado de pilares. Solo después de ese proceso fue posible pasar a modelos más realistas tridimensionales del macizo. Los últimos resultados mostrados en este capitulo indican que el modelo de daño permite obtener resultados adecuados para el proceso de caving, en donde no solo se puede notar la influencia de quemar los pilares de una forma diferente, sino además, el fenómeno en el cual el caving se detiene si la base quemada es

muy pequeña, lo cual en este capitulo hemos denotado como estabilidad.

5.6. Extensiones futuras

Una primera extensión natural del trabajo presentado en esta línea de investigación seria la búsqueda detallada de las constantes del modelo de daño que permitirían obtener convergencia para el problema para intervalos mas grandes de tiempo, que permitan simular todo el proceso de caving desde su inicio hasta el momento que la superficie de caving se conecte con los niveles superiores. Una vez logrado esto otro paso importante sería comparar los resultados del modelo en cuanto a los tiempos de caving y a la forma del mismo, de modo de calibrar los valores de las constantes y poder simular casos diferentes. Un paso final seria pasar a la etapa de modelar el proceso de caving lateral o socavación.

Capítulo 6

Estudio del Cave Back Usando Información Sísmica.

6.1. Estudio de Cave Back Utilizando Información Sísmica

6.1.1. Breve presentación

Debido a faenas de producción en un complejo de explotación minera es común que ocurran eventos sísmicos. No sólo en el caso de explotación minera por el sistema de *caving*, sino también en otros tipos de faenas subterráneas, se genera lo que se conoce como microsismicidad inducida. El origen está asociado con la redistribución del campo local de esfuerzos y deformaciones, lo que produce fracturamiento, activación de fallas, gatillamiento de microsismicidad, generación de grietas, esto induce y produce zonas de debilidad, lo que conlleva naturalmente la generación de una gran diversidad de eventos sísmicos.
Es por ello que las minas subterráneas cuentan con una red permanente de geófonos que monitorean la actividad sísmica inducida. Estos instrumentos detectan la señal producida por el paso de las ondas sísmicas que se propagan a través del macizo rocoso, las cuales son emitidas desde la fuente de los microsismos. La red de monitoreo permite registrar los trenes de onda que posteriormente son digitalizados y almacenados en lo que se denomina un sismograma (o formas de onda), estos son analizados y procesados para extraer propiedades y parámetros físicos de interés para el monitoreo sísmico de la actividad minera.
La presente línea de trabajo, tiene como base de estudio el trabajo de cuatro meses realizado en el proyecto anterior ([5]) que consistió en estimar la superficie de quiebre de la cavidad. En las subsecciones siguientes se expone el trabajo realizado con posterioridad al proyecto anterior, el cual consiste en robustecer la metodología de estimación de la superficie de quiebre y la evolución de esta en el tiempo - de un punto de vista estadístico -, junto con el estudio de la fuente sísmica por medio del modelamiento de las formas de ondas.

6.1.2. Objetivos generales del estudio

El objetivo general de la presente línea de investigación es desarrollar e implementar una metodología robusta para estimar la superficie de quiebre de la cavidad y su evolución en el tiempo, utilizando información de sismicidad. Dado que utilizando sólo la ubicación espacial (hipocentros) de los eventos no permite estimar la superficie de quiebre en forma objetiva, se proponen dos estrategias,

(i) Estudiar y analizar parámetros de la fuente sísmica procesados y disponibles en el catálogo de sismicidad, con el fin de plantear en forma robusta un criterio de selección de eventos para definir la zona de transición, para así mejorar la metodología desarrollada en el proyecto anterior.

(ii) Realizar un análisis sismológico detallado de la fuente sísmica para un conjunto de eventos seleccio-

nados del catálogo, con el fin de, caracterizar globalmente las formas de onda y/o estimar el tipo de mecanismo focal de cada evento, para conectarla con la hipótesis de trabajo.

Ambos puntos enunciados están orientados a introducir mejoras en el estudio realizado en el proyecto anterior, siendo la idea general del presente proyecto proponer y desarrollar una metodología robusta de la estimación de la superficie de quiebre, que permita hacer un seguimiento de la misma en el tiempo.

6.1.3. Fundamento y marco general del proyecto

De un punto de vista de la mecánica de la ruptura, sismos que ocurren cerca de la superficie de quiebre se comportan mecánicamente distinto de eventos que ocurren en zonas de mayor confinamiento dentro de la roca competente. Esto es producto de las diferencias en la amplitud y dirección del campo de esfuerzos solicitante y circundante a la fuente en uno y otro caso. Una diferenciación entre familias de eventos permitiría definir una zona de transición que se postula estaría en directa relación con la superficie de quiebre de la cavidad.

La Fig. 6.1 ilustra esquemáticamente la idea de estimar una zona de transición, los puntos rojos corresponden a los hipocentros, la zona café anaranjada representa la cavidad y la zona encerrada en azul corresponde a la zona llamada de transición. La superficie de quiebre englobaría eventos que, de acuerdo a un criterio de selección dado por algún parámetro de fuente u otro estimador físico o índice, K_f, acotado en un cierto intervalo $[a, b]$, permitiría seleccionar un conjunto de puntos (eventos) los cuales ayudarían a estimar una superficie en 3D.

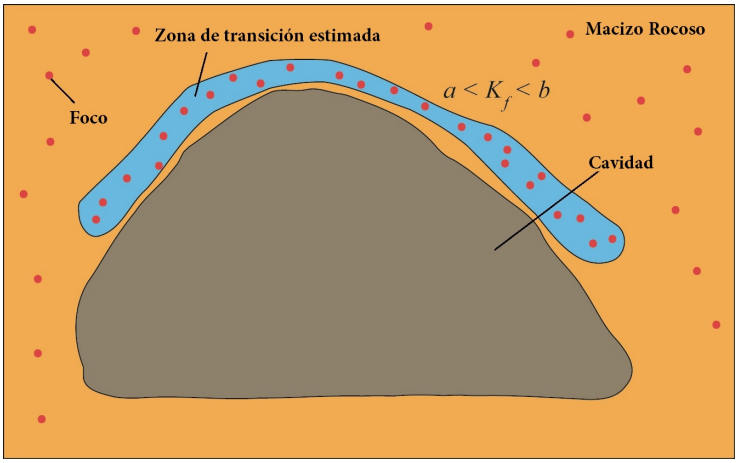


Figura 6.1: Esquema de un corte vertical mostrando la cavidad y el macizo rocoso con la ubicación espacial de los hipocentros. La zona en azul define la zona llamada de transición.

Varios parámetros físicos de la fuente que se calculan sistemáticamente durante el monitoreo sísmico están disponibles en el catálogo, entre ellos se puede enumerar (1) la energía sísmica de la onda P y S, (2) el momento sísmico escalar, (3) la caída de esfuerzo estática y dinámica, (4) la frecuencia de esquina de la onda P y S. Además, para cada evento están en la base de datos las formas de ondas registradas por las estaciones. A partir de estos parámetros se pueden calcular otros parámetros físicos, tales como el volumen aparente, por ejemplo. Por otro lado, es posible definir índices que permitan mejorar la selección de eventos por los cuales trazar la superficie.

Parámetros de la Fuente Sísmica e Índices

Se busca introducir mejoras en el criterio de selección de alguno de los parámetros o índices ya estudiados, que permita discriminar eventos con cambios de volumen importante en la fuente. Estos eventos deberían estar controlados por mecanismos de componente isótropa dominante, a diferencia de los que presentan una componente de cizalle pura que ocurrirían en una zona de mayor confinamiento.
Entre los parámetros explorados se pueden emunerar,

i) Energía Sísmica. La energía sísmica radiada por las ondas de volumen P y S, a través de mediciones del cuociente entre la energía de la onda P y S.
ii) Caídas de Esfuerzo. Se plantea otra hipótesis de trabajo que dice que eventos con valores bajos de caída de esfuerzo aparente ocurren principalmente en zonas altamente fracturadas o dañadas, es decir cercanas a la superficie de quiebre. En cambio, eventos ubicados a una profundidad comparable que presenten valores de caída de esfuerzo aparente mayores, estarían generándose en zonas en donde la roca es más competente. En el caso de la caída de esfuerzo dinámica, es otro parámetro que se relaciona con el proceso de ruptura en la fuente.
iii) Frecuencias de Esquina. Adicionalmente, se estudiarán las frecuencias de esquina de la onda P y S, analizando los cuocientes respectivos.

Análisis de las Formas de Onda

Una manera de confrontar las hipótesis de trabajo planteadas, - eventos de cizalle versus eventos con componente isótropa dominante - es analizar los tensores de momento sísmico de los eventos. La zona de transición buscada separaría eventos que ocurren en ambientes confinados de los que ocurrirían en las zonas cercanas a la superficie de quiebre (en donde existirían cambios de volumen importantes o desprendimiento considerable de material). Los tensores de momento tienen información sobre el tipo de mecanismo de la fuente, los que a su vez pueden ser relacionados con el proceso de *caving*. La forma rigurosa de establecer el tipo de mecanismo de la fuente es calculando y analizando los tensores de momento sísmico de los eventos, sin embargo, esto no se realiza de manera rutinaria durante el proceso de monitoreo sísmico, ya que este tipo de cálculo requiere de un proceso de modelamiento cuidadoso.
Para atacar este problema, se han analizado las formas de ondas para un conjunto de eventos seleccionados del catálogo, con el fin de modelar la fuente por medio de,

(i) Modelamiento directo de formas de onda, dado un tensor de momento sísmico general.

La etapa de modelamiento de formas de ondas tiene por objetivo modelar el campo completo de desplazamientos dado un tensor de momento sísmico general. Los principales parámetros para calcular sismogramas sintéticos serán extraídos de la información contenida en los datos entregados por el SGM, tales como duración, momento sísmico, tasa de muestreo, etc. Ambos análisis incluyen el procesamiento de las formas de onda, análisis de las series de tiempo, tratamiento tiempo-frecuencia de señales, implementación de filtros, análisis de señal/ruido, entre otros.

6.1.4. Etapas desarrolladas

En el presente informe se detallan a grandes rasgos las etapas de trabajo desarrolladas en esta segunda fase de estudio.

Trazado de la superficie y sismicidad

Se ha documentado el software y código computacional desarrollado. Se han hecho ajustes a la parte de visualización de resultados.
Se detalla en el presente informe, la metodología que permite trazar la superficie de quiebre. Una vez identificado y caracterizados los eventos, con su respectiva posición espacial, a través del estudio de los parámetros e índices, se define y estima la superficie en 3D que permite separar espacialmente eventos de tipo cizalle de los que no lo son. La diferenciación de estos eventos se realizó sólo en base a los índices, K_f, definidos en este estudio.
Para complementar la información de la implementación, se incluyen algunas metodologías desarrolladas principalmente en el proyecto anterior, por lo que se entrega la documentación apropiada para cada una de las subrutinas y programas computacionales escritos en lenguaje de programación científico, así como también el código fuente (*sotfware*), que se entrega en su totalidad junto con este informe.

Análisis de las formas de onda

Se ha seleccionado un subcatálogo en base al cociente de las energía sísmica de la onda P y la onda S. Se analizaron y procesaron las formas de onda en velocidad registradas por los geófonos triaxiales. Se implementaron las subrutinas que permiten modelar el campo de ondas elástico completo para un tensor de momento sísmico general. Además se implementó la descomposición de un tensor de momento sísmico, el cual permite entonces a partir de un tensor cualquiera determinar sus distintas contribuciones tales como, parte doble-cupla, isótropa y dipolo vectorial lineal compensado, que se detalla en subsecciones siguientes. El modelamiento numérico de las formas de onda se detalla en su totalidad en las secciones siguientes.

6.2. Descripción del Método

En esta sección se detalla brevemente la base de datos utilizada para generar la superficie de quiebre que es el catálogo de sismicidad multiparamétrica. Se describe y detalla el método implementado, así como la manera de definir los valores que permiten clasificar distintas familias de eventos.

6.2.1. Parámetros de la fuente sísmica y definición de índices

El complejo minero del yacimiento subterráneo de la división El Teniente de Codelco, posee una red de sensores que moniteorean la actividad sísmica local inducida en dicha mina. El monitoreo permanente de la actividad sísmica subterránea es manejado a través de un software comercial, que es distribuido por *ISS International*. Este programa permite básicamente, (1) administrar la red de sensores para monitorear la actividad de sismicidad inducida en la mina (por sistema de gatillamiento), y (2) mantener una base de datos actualizada de multiparámetros estimados rutinariamente para cada evento sísmico.

Sismicidad en la mina Esmeralda

El catálogo analizado corresponde al de la Mina Esmeralda, abarcando el período de tres años y medio, comprendido específicamente entre el 01/07/1996 al 31/12/1999. La Fig. 6.2 muestra la evolución temporal del número de eventos (frecuencia) ocurridos cada 30 días y del número acumulado total en función del tiempo. A partir del día 600 aproximadamente se observa un incremento en la tasa de la actividad sísmica, llevando hasta esa fecha sólo un número acumulado total de 2000 eventos. Es importante hacer notar que el proceso de inicio del *caving* está monitoreado sísmicamente en este catálago, así como también el proceso productivo posterior.

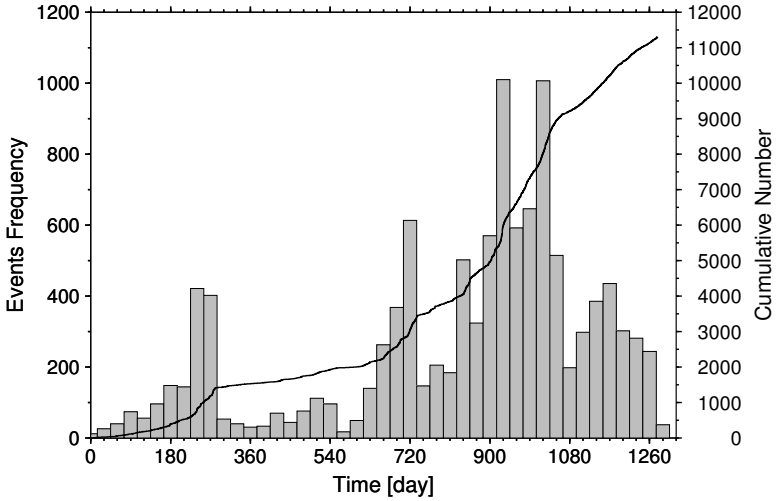


Figura 6.2: Frecuencia de eventos cada 30 días, y número total acumulado de eventos del catálogo.

Parámetros de la fuente sísmica tabulados en el catálogo

Dentro de los parámetros de la fuente sísmica estimados para cada evento en forma rutinaria por el sistema de monitoreo sísmico se pueden enumerar,

- Hipocentro, que comprende la posición espacial (coordenadas) y tiempo origen.
- Momento sísmico escalar, M_0.
- Energía sísmica radiada, de la onda P, E_P y de la onda S, E_S.
- Frecuencias de esquina, f_c, estimadas para la onda P o S.
- Caída de esfuerzo estática, $\Delta\sigma_s$ y dinámica, $\Delta\sigma_d$.

Adicionalmente, otros parámetros de interés que se pueden calcular para cada evento son,

- Volumen aparente, V_a, dado por la expresión,

$$V_a = \frac{M_0^2}{2\mu E_{tot}}. \tag{6.1}$$

  en donde μ es la rigidez del material en el foco sísmico y E_{tot} es la energía sísmica radiada total.
- Caída de esfuerzo aparente, $\Delta\sigma_a$, dada por la expresión,

$$\Delta\sigma_a = \frac{\mu E_{tot}}{M_0}. \tag{6.2}$$

Energía sísmica radiada de la onda P y S

Algunos modelos teóricos simples de fuente permiten calcular la energía sísmica radiada. El modelo propuesto por Boatwright & Fletcher [41] encuentra que el cuociente q, entre la energía de la onda S y P es,

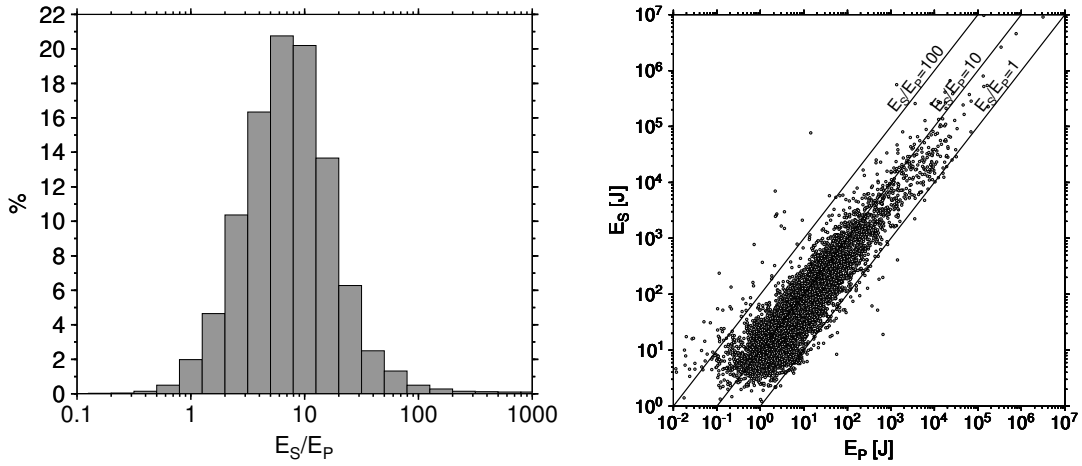
$$q = \frac{E_S}{E_P} = \frac{3}{2}\frac{v_P^5}{v_S^5}\frac{1}{\gamma^3} \tag{6.3}$$

donde γ es el cuociente de las raíces cuadráticas medias de la frecuencia de esquina de la onda P y S. Las frecuencias de esquina tienen expresiones del tipo, $f_c = k_c c/r_0$, con k_c una constante que relaciona el radio de la fuente circular y f_c. Si se asume que los k_c, en promedio, tienen valores cercanos entre sí, tanto para la onda P y S, la Ec. (6.3) se puede escribir en forma simplificada como,

$$\frac{E_S}{E_P} = \frac{3}{2}\frac{v_P^2}{v_S^2}, \tag{6.4}$$

si el material es un sólido de Poisson, entonces la razón teórica para un sismo de cizalle es $E_S/E_P = 4{,}5$.

La Fig. 6.3a muestra el histograma del cociente de las energías calculados para el catálogo. La distribución de este cociente muestra seguir una distribución normal, en donde el rango fluctúa entre 1 y 100, principalmente. La energía de la onda S en función de la energía de la onda P se muestra en la Fig. 6.3b, en la cual se han trazado líneas que muestran curvas de nivel con valores constantes de E_S/E_P, iguales a 1, 10 y 100.



(a) Histograma cuociente, E_S/E_P.

(b) E_S versus E_P.

Figura 6.3: Energía sísmica.

La razón entre la energía sísmica de la onda S y onda P, es utilizado como un índice K_f para ser usado como un estimador de la superficie de quiebre de la cavidad. Este permite definir una zona de transición entre eventos sísmicos de cizalle puro y eventos no doble-cupla. Para eventos de cizalle, en donde el deslizamiento friccional es predominante en relación con la componente isótropa o explosiva, son eventos que radian ondas de corte S que son más energéticas que su contraparte puramente compresional o de ondas P. Luego, para eventos de magnitud comparable, eventos no doble-cupla, con componente isótropa importante deberían estar dominados por cuocientes bajos de E_S/E_P.

Caída de esfuerzo

Durante la ocurrencia de un evento sísmico, hay una redistribución del campo de esfuerzos total en la región cercana al sismo debido al proceso mismo de ruptura, que es acompañado de deformación elástica e inelástica. Los sismogramas registrados por una red de monitoreo no permiten medir los valores de esfuerzos absolutos, antes, durante y después de la ocurrencia de un sismo. Sin embargo, es posible obtener estimaciones de las diferencias, o caídas de esfuerzo, con respecto al valor existente antes de la ruptura, utilizando las formas de onda.

La caída de esfuerzo estática (*static stress drop*) representa la reducción en el promedio del esfuerzo de cizalle en o muy cercano a la zona de fallamiento de un sismo. La caída de esfuerzo estática fue introducida como una medida de la razón entre el desplazamiento final sobre la falla y la dimensión de la fuente sísmica, r_0, es decir $\Delta\sigma \propto u/r_0$. La caída de esfuerzo dinámica, se refiere a la diferencia entre el valor antes del sismo y el valor alcanzado durante el proceso mismo de ruptura. Por otro lado, la caída de esfuerzo aparente puede ser estimada por medio de la razón entre la energía sísmica de ondas elásticas y el momento sísmico, ver Ec. (6.2).

Para efecto de la estimación, y evolución en el tiempo de la superficie de quiebre, se utilizaron entonces dos cuocientes para definir esta superficie,

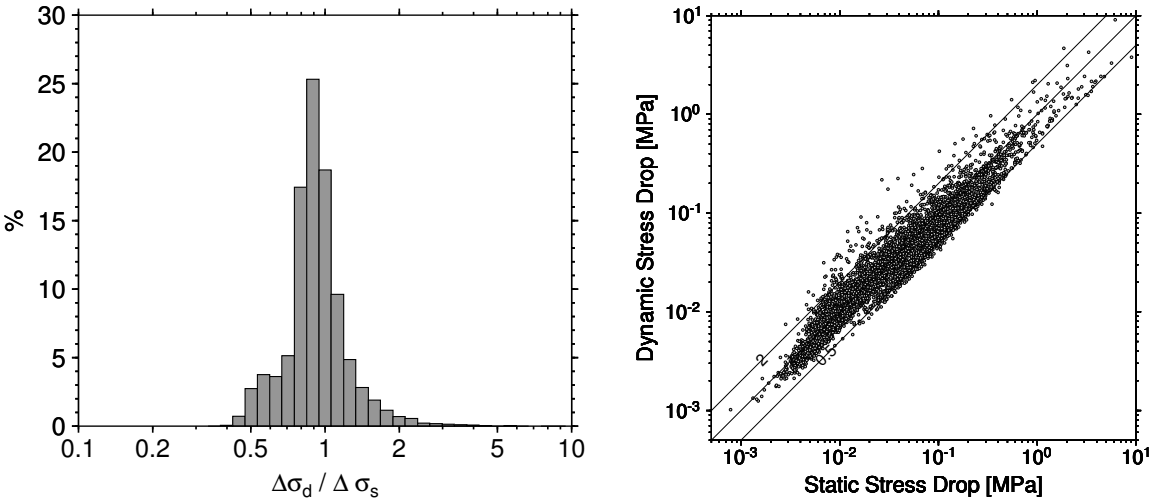
i) La razón entre la caída de esfuerzo dinámica y estática, es decir, $\Delta\sigma_d/\Delta\sigma_s$.

ii) La razón entre la caída de esfuerzo aparente y estática, es decir, $\Delta\sigma_a/\Delta\sigma_s$.

En ambos casos, se asume que eventos con valores bajos de $\Delta\sigma_d/\Delta\sigma_s$ y $\Delta\sigma_a/\Delta\sigma_s$, son eventos sísmicos que se comportan mecánicamente en la fuente como eventos que son no doble-cuplas (NDC). El primer cociente es justificado por el hecho que la estimación de caída de esfuerzo dinámica está relacionada con el esfuerzo que predomina durante el proceso mismo de ruptura, friccional y de deslizamiento, sobre el plano de falla. Para eventos de cizalle, se esperaría que $\Delta\sigma_d$ sea mayor, comparativamente hablando, que $\Delta\sigma_s$. Un razonamiento similar, cabe para la razón, $\Delta\sigma_a/\Delta\sigma_s$, puesto que $\Delta\sigma_a$ es proporcional a la energía sísmica radiada, y si el evento es no doble-cupla, entonces su energía radiada sería menor que si es doble-cupla, para eventos con una magnitud similar.

La Fig. 6.4a muestra el histograma del cociente, $\Delta\sigma_d/\Delta\sigma_s$, con un valor medio que bordea el valor 1, aproximadamente. Se observa una asimetría en la distribución, la cual puede ser causada por el hecho que en los primeros meses, los eventos presentaron valores de esfuerzos más altos, en comparación con los valores estimados para eventos ocurridos después, en un estado posterior, en donde el proceso de faena productiva y de explotación entró en marcha. El parámetro $\Delta\sigma_d$ en función de $\Delta\sigma_s$ es graficado en la Fig. 6.4b, esta representación gráfica tiene trazada tres líneas paralelas que dan cuenta de valores constantes de la razón $\Delta\sigma_d/\Delta\sigma_s$, es decir 2, 1 y 0.5. En ambos casos se observa que el cuociente fluctúa entre 0.5 y 2, dejando en evidencia que ambos parámetros son proporcionales entre sí.

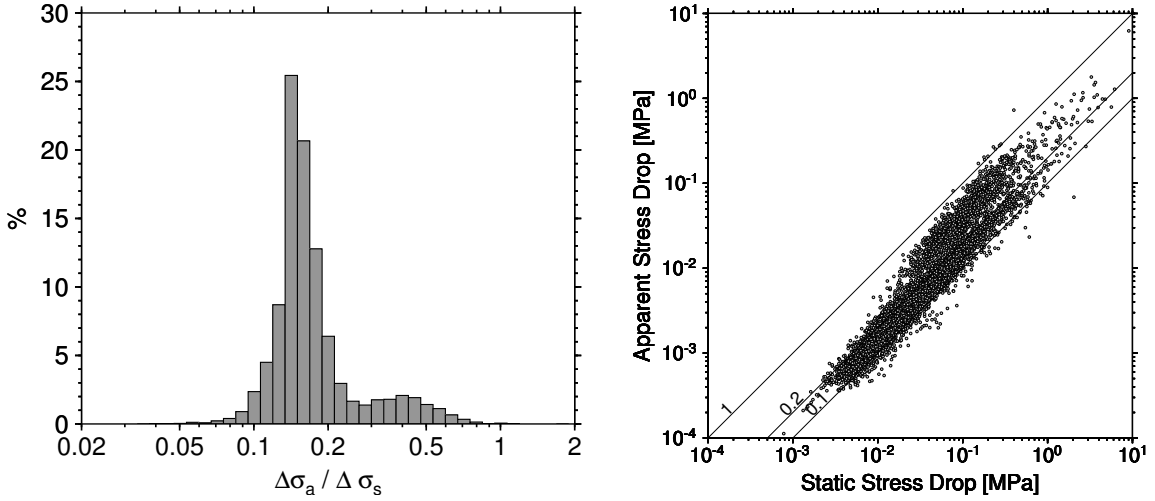
En el caso de la razón $\Delta\sigma_a/\Delta\sigma_s$, la distribución de este cociente es mostrada en la Fig. 6.5a. Nuevamente, se observa una asimetría en la distribución estadística. La dependencia de $\Delta\sigma_a$ como función de $\Delta\sigma_s$ está graficada en la Fig. 6.5b. En ambos gráficos, se concluye que la razón, $\Delta\sigma_a/\Delta\sigma_s$, varía mayoritariamente entre 1 y 0.1.



(a) Histograma cuociente, $\Delta\sigma_d/\Delta\sigma_s$.

(b) $\Delta\sigma_d$ versus $\Delta\sigma_s$.

Figura 6.4: Parámetros de caída de esfuerzo.



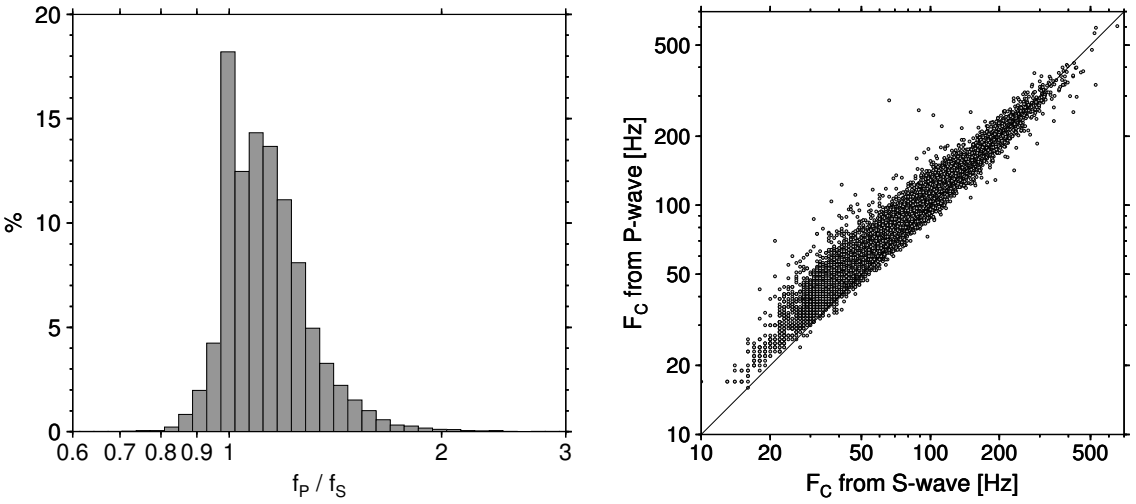
(a) Histograma cuociente, $\Delta\sigma_a/\Delta\sigma_s$.

(b) $\Delta\sigma_a$ versus $\Delta\sigma_s$.

Figura 6.5: Parámetros de caída de esfuerzo aparente y estática.

Frecuencias de esquina

Otro parámetro que caracteriza la duración de la ruptura en la fuente sísmica es la frecuencia de esquina, que son parámetros rutinariamente estimados para la onda P y onda S durante el monitoreo sísmico. La Fig. 6.6 muestra gráficos resumenes de los valores y dependencia entre la frecuencia de esquina de la onda P y S, del catálogo. El histograma de la razón f_P/f_S es mostrado en 6.6a, que presenta una cierta simetría en la distribución de este estimador, con valores que varían principalmente entre 0.9 y 1.8. Además, deja en evidencia que un buen porcentaje del conjunto de valores es dominado por la condición de que $f_P > f_S$. En la Fig. 6.6b se muestra la dependencia de la frecuencia de esquina de la onda P en función de la frecuencia de esquina de la onda S. La diagonal representa valores en que $f_P = f_S$. Las frecuencias de esquina graficadas alrededor de los 20 Hz muestran que estos valores pueden estar afectadas a problemas de redondeo numérico al momento de almacenar el valor estimado final en el catálogo.



(a) Histograma cociente, f_P/f_S.

(b) f_P versus f_S.

Figura 6.6: Parámetros de frecuencias de esquina, onda P y S.

Al igual que la energía sísmica, la estimación de las frecuencias de esquina es un cálculo que reviste gran dificultad. Los modelos de fuente teóricos por ejemplo, muestran que la frecuencia de esquina observada en un receptor cualquiera, depende del azimut (dirección a la fuente) y de supuestos hechos sobre la cinemática de la ruptura, a saber, la velocidad de ruptura, directividad y distribución de la amplitud del desplazamiento. El cociente de las frecuencias de esquina podría ser otro indicador de eventos no doble-cupla y que ayudaría a definir una clasificación de familias de eventos destinadas a estimar la superficie de quiebre. Para eventos en que $f_P > f_S$, serían entonces candidatos a ser eventos del tipo no doble-cupla.

6.2.2. Metodología de trazado de la superficie

Una vez que se ha escogido un parámetro basado en la física de la fuente sísmica, los datos del catálogo se filtran según algunas condiciones y criterios de selección tales como.

- Error de localización (< 20 m).
- Número de estaciones aceptadas (> 5)
- Magnitud ($M_w > -0{,}5$)

Lo anterior se ha hecho con el fin de incrementar la confiabilidad de los datos con los que se trabajará, dado que la estimación de la superficie en el espacio requiere al menos contar con una buena localización de estos puntos en el espacio.

Una parte crucial, es la elección de un criterio que permita delimitar zonas de transición de acuerdo a las hipótesis de trabajo. Para fijar ideas, los cocientes que se van a explorar son los siguientes,

- Razón de la energía sísmica de la onda S sobre la onda P, E_S/E_P.
- Razón, $\Delta\sigma_d/\Delta\sigma_s$.
- Razón, $\Delta\sigma_a/\Delta\sigma_s$.

Criterio de Separación

El estudio que se ha hecho, está basado en el análisis del cociente entre dos parámetros, pero debido a que son variables que toman valores en escalas altas, es conveniente trabajarlos en escala logarítmica, así, si se quiere estudiar un modelo de la forma

$$\frac{y}{x} = b \Longleftrightarrow y = bx$$

gracias a que se usarán parámetros positivos, se puede utilizar logaritmos

$$y = bx \Longleftrightarrow \log(y) = \log(b) + \log(x)^{1}$$

si definimos $u = \log(x)$, $v = \log(y)$, $a = \log(b)$, tenemos finalmente que

$$v = a + u,$$

el cual corresponde a un modelo lineal, con pendiente unidad.

Para determinar el valor de a, se utiliza el método de los mínimos cuadrados, esto es, dado un conjunto de datos $\{(u_i, v_i)\}_{i=1}^{n}$ se quiere encontrar el valor de a que minimice los errores cuadráticos:

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} (v_i - (a + u_i))^2$$

Como es usual, la solución se obtiene al resolver la ecuación de derivada nula:

$$2 \sum_{i=1}^{n} (v_i - (a + u_i))(-1) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i - u_i) - \sum_{i=1}^{n} a = 0$$

$$na = \sum_{i=1}^{n} (v_i - u_i)$$

$$\boxed{a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (v_i - u_i)}$$

y de aquí se puede obtener el valor de b, pues simplemente está dado por $b = 10^a$.

También se puede disponer de la desviación estandar, por medio de la expresión

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (v_i - (a + u_i))^2}.$$

La recta definida enteriormente junto con la estimación de sus constantes permite distinguir tres conjuntos que se seleccionan de acuerdo a la razón x/y,

- $\frac{y}{x} \in [10^{a-\sigma}, 10^{a+\sigma}]$

[1] $\log$ denota el logaritmo en base 10.

- $\frac{y}{x} > 10^{a+\sigma}$
- $\frac{y}{x} < 10^{a-\sigma}$

Aplicando lo anterior al catálogo comprendido entre el evento 2500 hasta el último (este valor fue elegido debido a que los primeros eventos están asociados al comienzo de la explotación minera y provocan una redistribución muy alta de esfuerzos). Los valores de separación y las tres familias de eventos asociadas se muestran en las siguientes figuras:

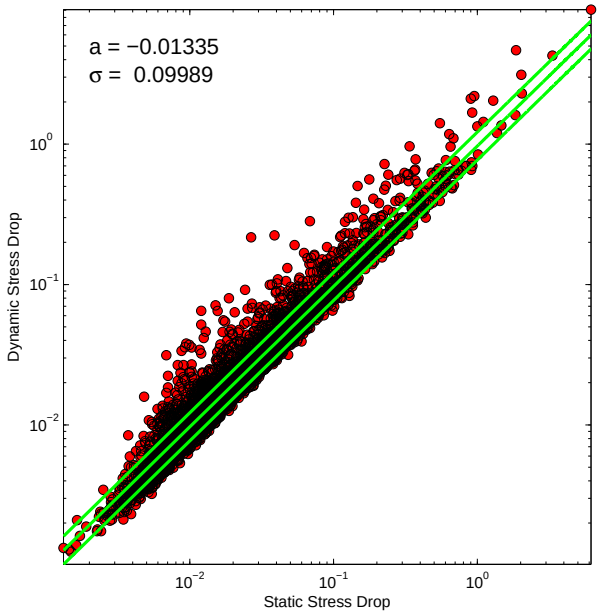


Figura 6.7: Valores de separación para $\frac{\Delta\sigma_d}{\Delta\sigma_s}$

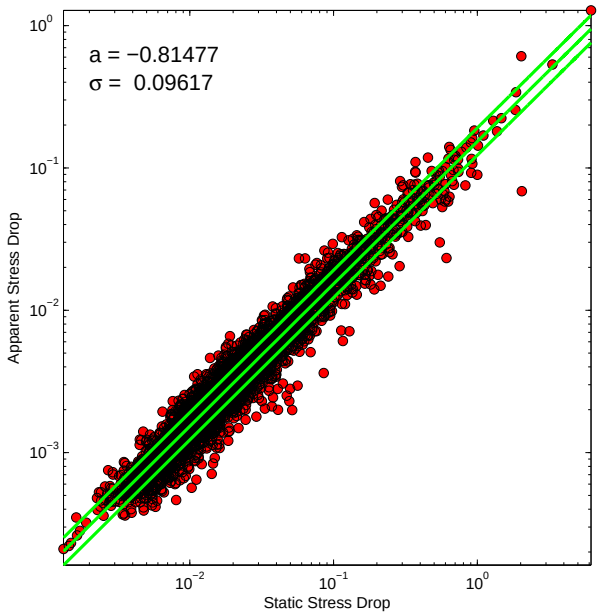


Figura 6.8: Valores de separación para $\frac{\Delta\sigma_a}{\Delta\sigma_s}$

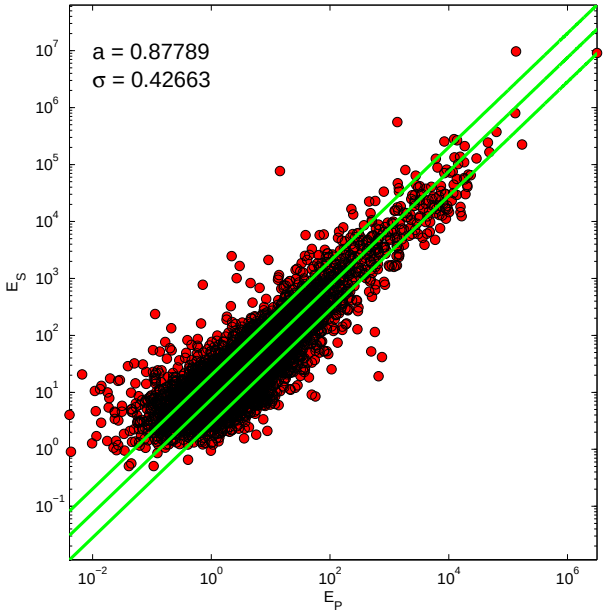


Figura 6.9: Valores de separación para $\frac{E_s}{E_p}$

Las tres rectas que aparecen en los gráficos, corresponden a la recta de mínimos cuadrados y sus respectivas traslaciones en $+\sigma$ y $-\sigma$ (desviación estándar). Con estos valores es posible estudiar un subconjunto de eventos y analizar cuáles quedan separados por las rectas anteriores para poder escoger los que definirán la superficie.

Trazado de la superficie estimada

Una vez que se ha seleccionado una cierta cantidad de puntos, el trazado de la superficie se vuelve un problema meramente geométrico, y existen muchos métodos que permiten construir una superfecie que interpola los puntos, como las triangulaciones, envoltura convexa, etc. El problema es que los datos tienen errores asociados a su ubicación espacial, por lo que la interpolación no es una buena alternativa. Para mitigar esta problemática, se ha optado por construir una superficie que ajuste los puntos en el sentido de los mínimos cuadrados.

Dado un conjunto de puntos en el espacio $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^n$ se busca una superficie con un modelo polinomial:

$$z(x, y) = \sum_{j=0}^{g_1} \sum_{k=0}^{g_2} a_{jk} x^j y^k$$

que minimice el error cuadrático:

$$\min_{a_{jk} \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} (z(x_i, y_i) - z_i)^2 \qquad \forall (j, k) \in \{0, ..., g_1\} \times \{0, ..., g_2\}$$

o que minimice una cantidad más general, que considere *pesos* asociados a cada punto, esto es, si tenemos $\{(x_i, y_i, z_i, w_i)\}_{i=1}^n$ donde w_i representa el peso asociado al punto (x_i, y_i, z_i), se quiere resolver

$$\min_{a_{jk} \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} w_i (z(x_i, y_i) - z_i)^2 \qquad \forall (j, k) \in \{0, ..., g_1\} \times \{0, ..., g_2\}$$

Es claro que el primer caso es considerar que todos los puntos tienen igual peso.

El problema se resuelve de imponer la condición de derivada nula:

$$\frac{\partial}{\partial a_{jk}} \sum_{i=1}^{n} w_i (z(x_i, y_i) - z_i)^2 = 0$$

$$2 \sum_{i=1}^{n} w_i (z(x_i, y_i) - z_i) \frac{\partial z(x_i, y_i)}{\partial a_{jk}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i z(x_i, y_i) \frac{\partial z(x_i, y_i)}{\partial a_{jk}} = \sum_{i=1}^{n} w_i z_i \frac{\partial z(x_i, y_i)}{\partial a_{jk}}$$

Pero $\dfrac{\partial z(x_i, y_i)}{\partial a_{jk}} = x_i^j y_i^k$ y reemplazando $z(x_i, y_i)$:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^j y_i^k \sum_{l=0}^{g_1} \sum_{m=0}^{g_2} a_{lm} x^l y^m = \sum_{i=1}^{n} w_i z_i x_i^j y_i^k$$

Lo que corresponde a un sistema lineal de ecuaciones, el cual puede escribirse:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^0 y_i^0 x_i^0 y_i^0 & \sum_{i=1}^{n} x_i^0 y_i^1 x_i^0 y_i^0 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{g_1} y_i^{g_2} x_i^0 y_i^0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^0 y_i^0 x_i^0 y_i^1 & \sum_{i=1}^{n} x_i^0 y_i^1 x_i^0 y_i^1 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{g_1} y_i^{g_2} x_i^0 y_i^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^0 y_i^0 x_i^{g_1} y_i^{g_2} & \sum_{i=1}^{n} x_i^0 y_i^1 x_i^{g_1} y_i^{g_2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{g_1} y_i^{g_2} x_i^{g_1} y_i^{g_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ \vdots \\ a_{g_1 g_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} w_i z_i x_i^0 y_i^0 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i z_i x_i^0 y_i^1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} w_i z_i x_i^{g_1} y_i^{g_2} \end{pmatrix}$$

Con esto, se completa la resolución matemática del problema al resolver el sistema anterior.

6.3. Caso de Estudio - Esmeralda - Estimación de la Superficie de Quiebre Usando Parámetros Sísmicos

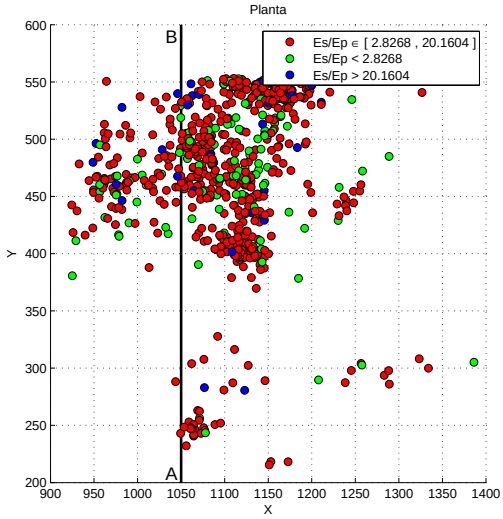
En las subsecciones siguientes, se presenta un caso de estudio, en donde se aplica la metodología antes detallada al catálogo completo de sismicidad de la mina Esmeralda. A modo introductorio se presentan los resultados aplicados a un subconjunto de eventos ocurridos en un pequeño intervalo de tiempo, para luego estudiar la evolución temporal completa de la superficie de quiebre estimada usando el catálogo completo.

6.3.1. Aplicación de la metodología a un subcatálogo

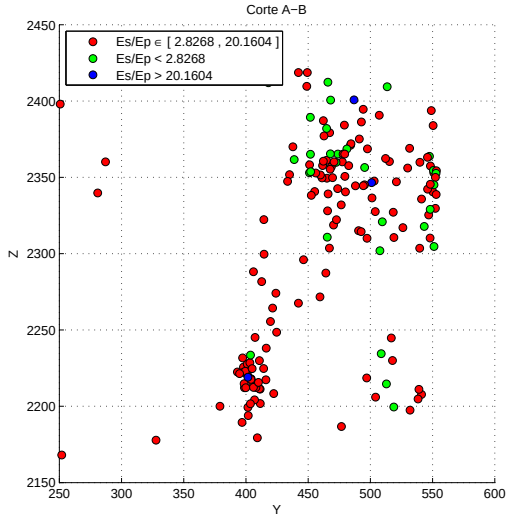
Aplicar la metodología anterior resulta sencillo, pues basta considerar un subconjunto del catálogo para estudiar el avance de la superficie.

Si se disponen de n eventos en el catálogo, un subcatálogo, consiste en considerar los eventos que van desde las posiciones k_1 hasta k_2 $(1 \leq k_1 < k_2 \leq n)$.

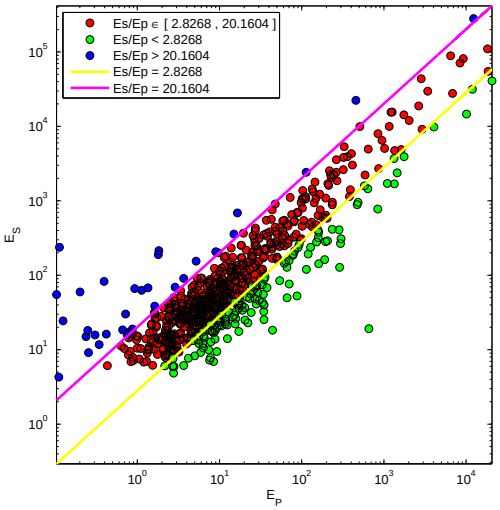
A modo de ilustración, si se toma $k_1 = 4000$ y $k_2 = 6000$, podemos aplicar la metodología anterior a los tres parámetros a estudiar:



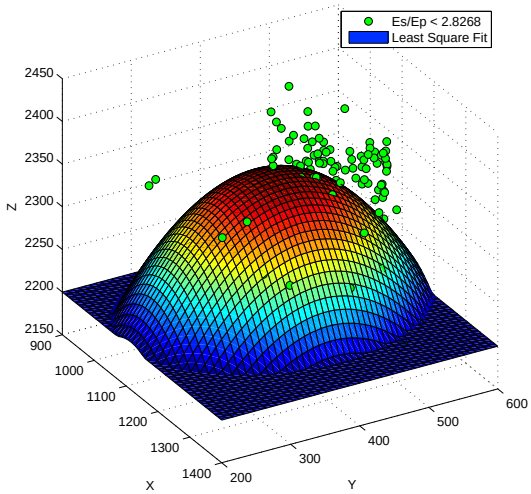
(a) Sismicidad en planta



(b) Sismicidad en profundidad

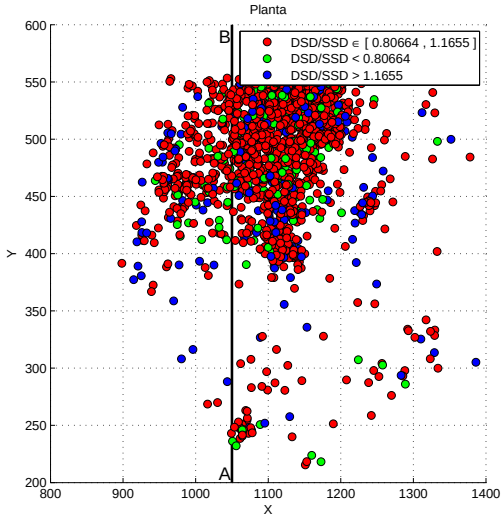


(c) Separación en tres familias

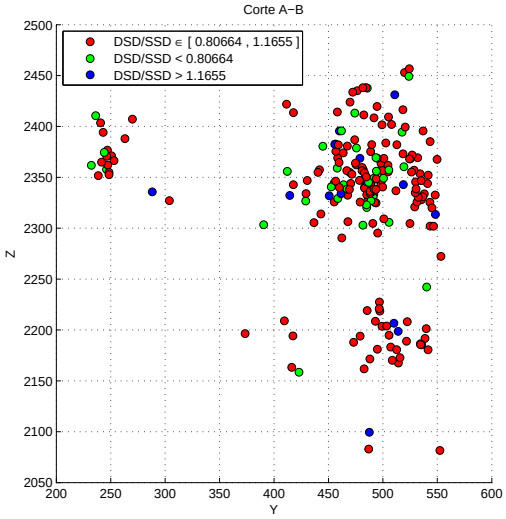


(d) Trazado de la superficie

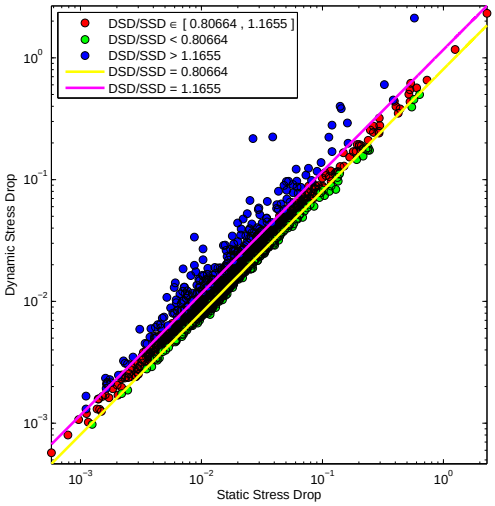
Figura 6.10: Aplicación de la metodología al subcatálogo comprendido entre $k_1 = 4000$ y $k_2 = 6000$, usando $\frac{E_s}{E_p}$



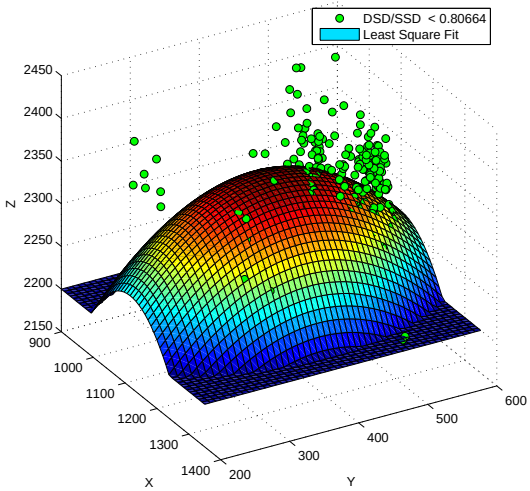
(a) Sismicidad en planta



(b) Sismicidad en profundidad

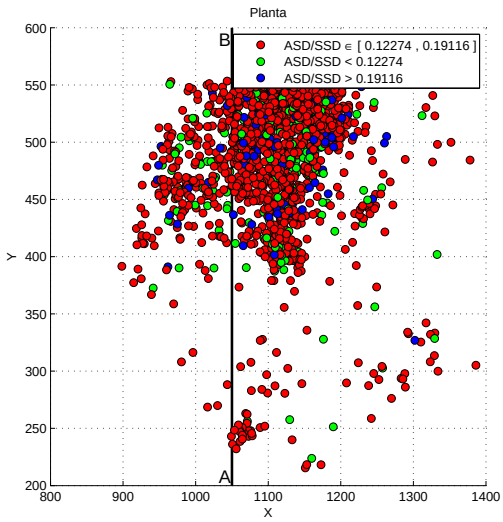


(c) Separación en tres familias

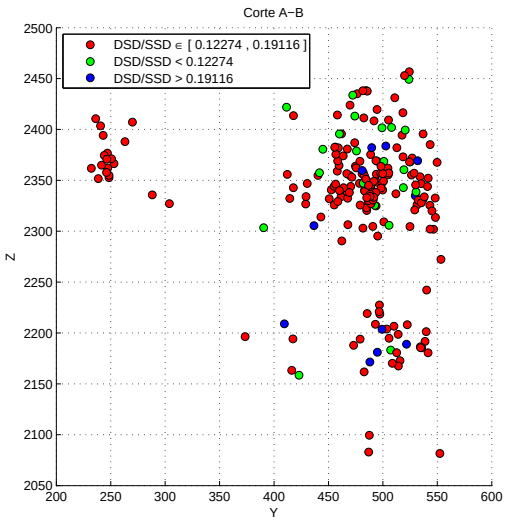


(d) Trazado de la superficie

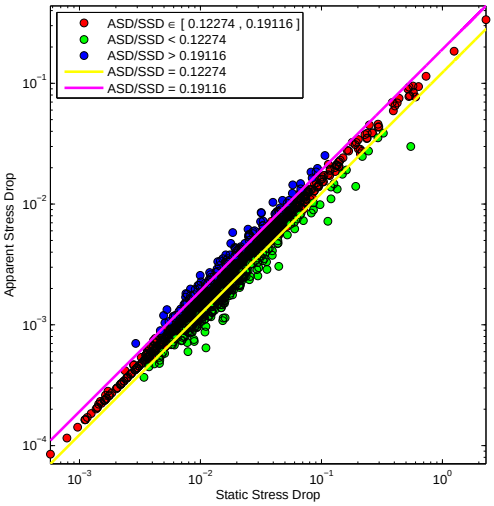
Figura 6.11: Aplicación de la metodología al subcatálogo comprendido entre $k_1 = 4000$ y $k_2 = 6000$, usando $\frac{\Delta\sigma_d}{\Delta\sigma_s}$



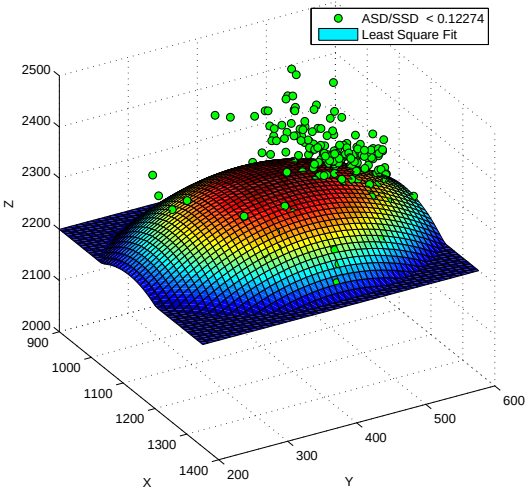
(a) Sismicidad en planta



(b) Sismicidad en profundidad



(c) Separación en tres familias



(d) Trazado de la superficie

Figura 6.12: Aplicación de la metodología al subcatálogo comprendido entre $k_1 = 4000$ y $k_2 = 6000$, usando $\frac{\Delta\sigma_d}{\Delta\sigma_s}$

6.3.2. Evolución temporal de la superficie

La evolución en el tiempo de la superficie, se traduce en aplicar la metodología anterior a subcatálogos correlativos, por ejemplo agrupando cada 500 eventos, los cuales son mostradas en la Fig. 6.13, 6.14 y 6.15 considerando las razones E_S/E_P, $\Delta\sigma_d/\Delta\sigma_s$, y $\Delta\sigma_a/\Delta\sigma_s$ respectivamente. Hay que señalar que cuando la superficie evoluciona y alcanza cierto nivel superior (el nivel de conexión), ésta debe adaptarse a la actual geometría y evolucionar modelando el *caving*. En este caso, se usó la cota superior $z_m = 2400$ m.

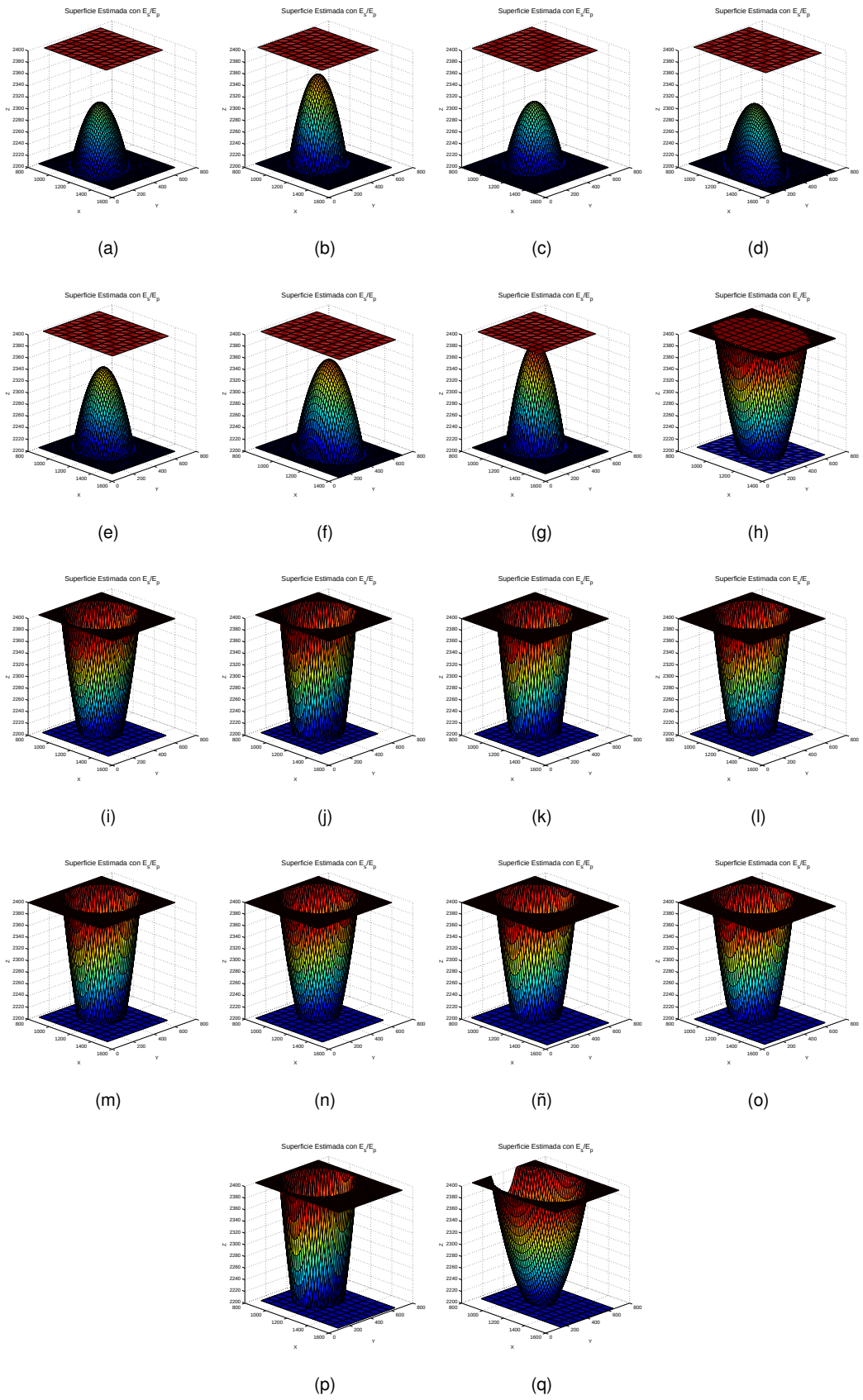


Figura 6.13: Evolución de la superficie de quiebre, vista cada 500 eventos, usando $\frac{E_s}{E_p}$

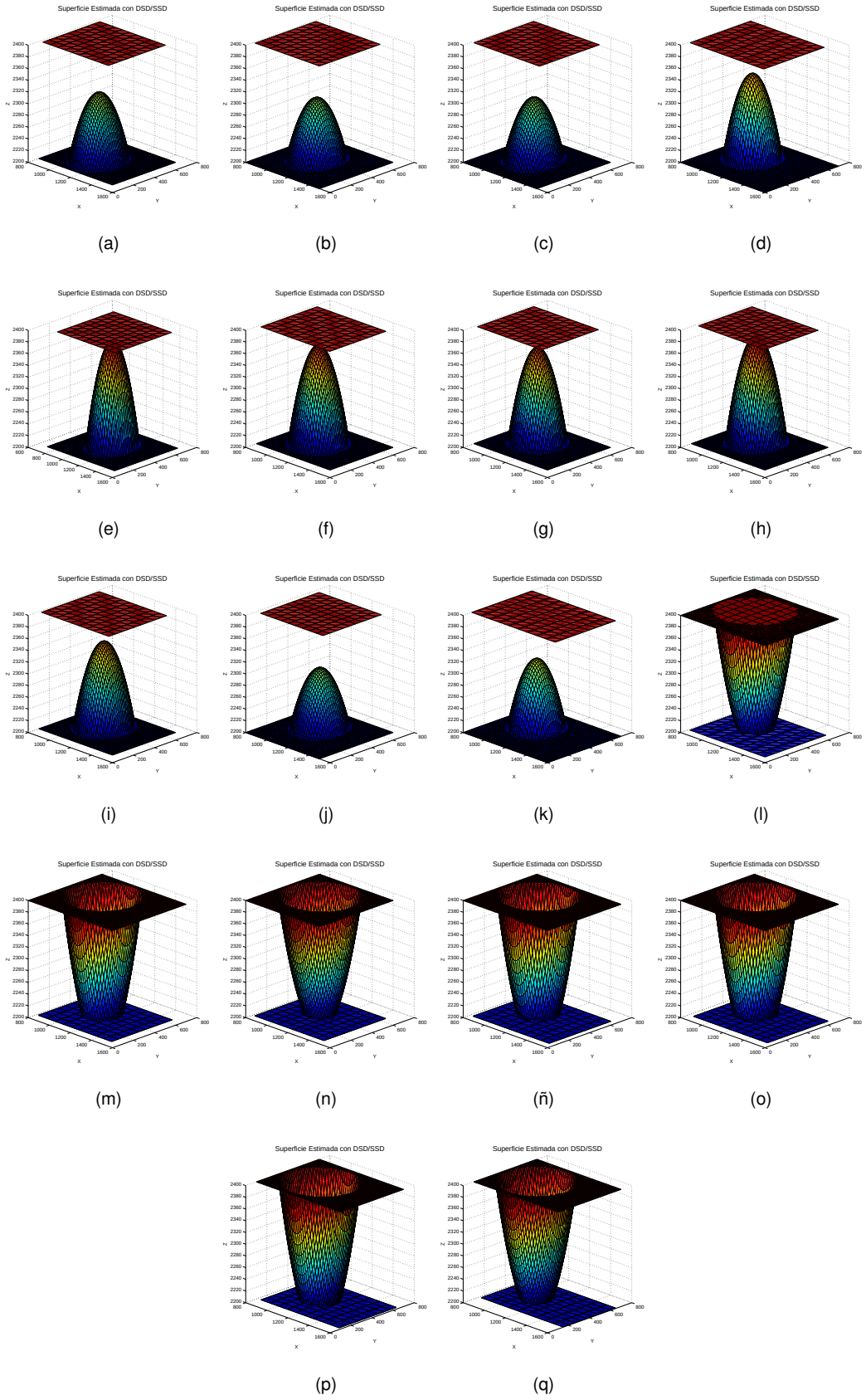


Figura 6.14: Evolución de la superficie de quiebre, vista cada 500 eventos, usando $\frac{\Delta\sigma_d}{\Delta\sigma_s}$

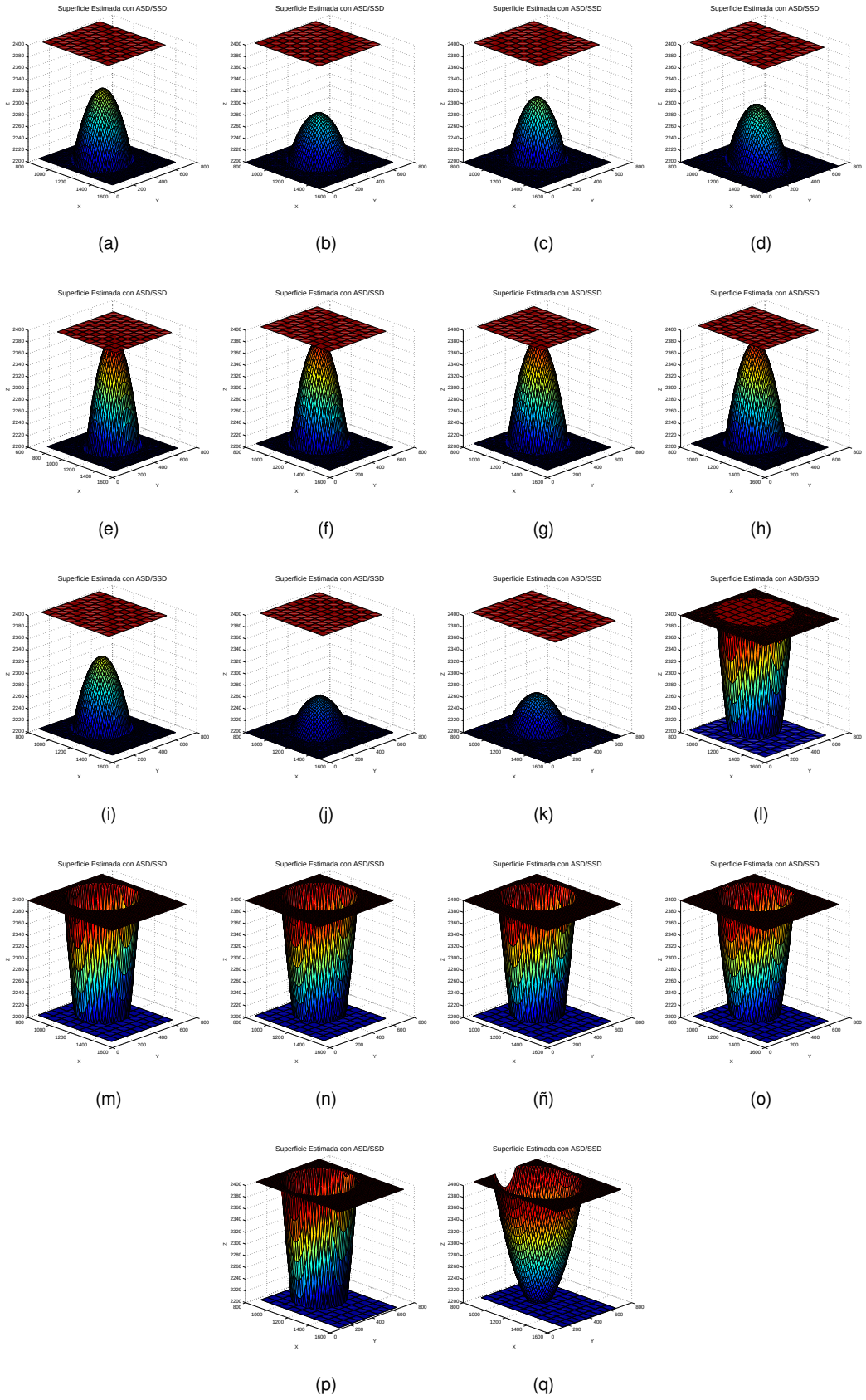


Figura 6.15: Evolución de la superficie de quiebre, vista cada 500 eventos, usando $\frac{\Delta\sigma_a}{\Delta\sigma_s}$

6.4. Caso de Estudio - Análisis y Modelamiento de las Formas de Ondas

La presente sección resume los principales resultados del análisis y modelamientos de formas de ondas para algunos de los eventos sísmicos seleccionados en el catálogo de Esmeralda de la mina El Teniente. El subcatálogo seleccionado está en relación con el criterio de selección de índices, K_f, basado específicamente en los valores del cociente entre la energía de la onda S y P. Esto, con objeto de obtener, a primer orden, alguna observación clara en los datos de formas de ondas, de las hipótesis de trabajo planteadas en este proyecto en la cual está basado el presente estudio. Estas hipótesis dicen relación directa con el criterio definido para el trazado de la superficie de quiebre.

6.4.1. Ecuaciones básicas del teorema de representación de fuentes sísmicas

Se presentan brevemente las ecuaciones basadas en el teorema de representación de fuentes sísmicas ([40]) que dan cuenta del campo vectorial de desplazamientos $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ observado en el punto $(\mathbf{x}, t)$. Así, la componente n del desplazamiento se puede escribir como una integral de superficie sobre la superficie Σ en donde se genera ya sea una discontinuidad en los desplazamientos o las tracciones. El kernel de esta representación integral, es la multiplicación entre la derivada espacial de la función de Green, $G_{np}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)$, del medio con el tensor densidad de momento sísmico, $m_{pq}(\boldsymbol{\xi}, t)$, para el caso de discontinuidades en los desplazamientos, $[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]$ a través de Σ,

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \iint_{\Sigma} m_{pq}(\boldsymbol{\xi}, \tau) G_{np,q}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) d\Sigma \tag{6.5}$$

en donde $\boldsymbol{\xi}$ corresponde a un punto en la fuente (o falla Σ), la variable τ está asociada con la evolución temporal de la dislocación en la fuente, la derivada actuando sobre la función de Green está aplicada con respecto a la coordenada ξ_q. En notación tensorial usual, los subíndices repetidos indican suma sobre los valores del índice en el rango $1, 2, 3$. La ecuación 6.5 no toma en cuenta los efectos de discontinuidades en las tracciones actuando a través de la superficie Σ, en este caso se asumen que son continuas.

El tensor densidad de momento sísmico se relaciona, en este caso, con la discontinuidad de desplazamiento $[u(\boldsymbol{\xi}, \tau)]$ que está actuando en la superficie Σ en donde se genera esta discontinuidad. En el caso de un medio elástico, isótropo y homogéneo, se tiene,

$$m_{pq} = \lambda \nu_k [u_k(\boldsymbol{\xi}, \tau)] \delta_{pq} + \mu(\nu_p [u_q(\boldsymbol{\xi}, \tau)] + \nu_q [u_p(\boldsymbol{\xi}, \tau)]), \tag{6.6}$$

en donde λ y μ son los parámetros elásticos de Lame y $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi})$ es la normal en cada punto de Σ.

La figura 6.16 muestra gráficamente la superficie Σ en donde actúa la discontinuidad de desplazamiento. La normal a cada punto en esta superficie está dada por el vector normal unitario $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi})$ y el campo de desplazamiento es calculado en todo el medio circundante.

Las ecuaciones son absolutamente generales, y sólo en el caso de que las dimensiones de la falla Σ sean pequeñas comparadas con la longitud de onda emitida por la fuente, se habla entonces de una aproximación en fuente puntual, luego se introduce así el tensor de momento sísmico, M_{pq} dado por,

$$M_{pq} = \iint_{\Sigma} m_{pq} d\Sigma \tag{6.7}$$

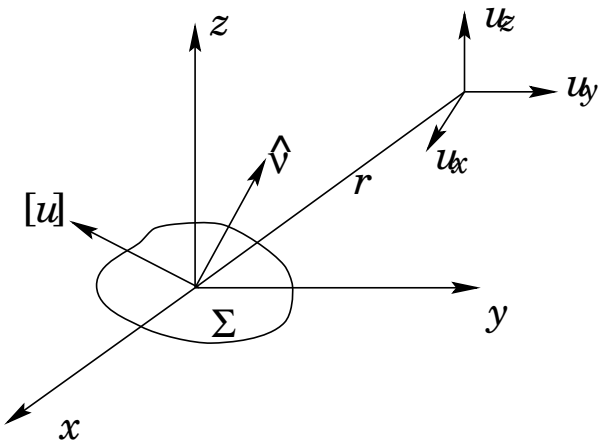


Figura 6.16: Sistema cartesiano de coordenadas.

y finalmente la ecuación (6.5) se reduce a,

$$u_n(\mathbf{x},t) = M_{pq} * G_{np,q}, \tag{6.8}$$

en donde $*$ es el operador de convolución temporal.

Función de Green para un medio infinitamente extendido, homogéneo

En el caso que el medio elástico sea infinitamente extendido, la función de Green se conoce de manera exacta para un medio isótropo y homogéneo,

$$\begin{aligned} G_{nm}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau) &= \frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_n\gamma_m - \delta_{nm})\frac{1}{r^3}\int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau'\delta(t-\tau-\tau')d\tau' \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\gamma_n\gamma_m\frac{1}{r}\delta(t-\tau-\frac{r}{\alpha}) \\ &- \frac{1}{4\pi\rho\beta^2}(\gamma_n\gamma_m - \delta_{nm})\frac{1}{r}\delta(t-\tau-\frac{r}{\alpha}), \end{aligned} \tag{6.9}$$

donde $\delta(\cdot)$ es la delta de Dirac, $\boldsymbol{\gamma}$ es el vector director unitario y α, β son la velocidades de propagación de las ondas P y S. El vector director se define como,

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}}{r},$$

siendo $r = \|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\|$ la distancia de la fuente al observador, y las componentes γ_p corresponden a los cosenos directores.

Finalmente se presenta el campo total de desplazamiento para un medio infinitamente extendido, isótropo, elástico y homogéneo, haciendo la convolución entre el tensor de momento y la función de Green, a saber,

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{x},t) &= RP^{near}_{npq}\frac{1}{4\pi\rho}\frac{1}{r^4}\int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau M_{pq}(t-\tau)d\tau \\ &+ RP^{inter(P)}_{npq}\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\frac{1}{r^2}M_{pq}(t-\frac{r}{\alpha}) - RP^{inter(S)}_{npq}\frac{1}{4\pi\rho\beta^2}\frac{1}{r^2}M_{pq}(t-\frac{r}{\beta}) \\ &+ RP^{far(P)}_{npq}\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3}\frac{1}{r}\dot{M}_{pq}(t-\frac{r}{\alpha}) - RP^{far(S)}_{npq}\frac{1}{4\pi\rho\beta^3}\frac{1}{r}\dot{M}_{pq}(t-\frac{r}{\beta}), \end{aligned} \tag{6.10}$$

los factores RP_{npq} (tensores de tercer orden) son conocidos como los patrones de radiación, asociados a los distintos términos del campo total. Así, se habla del patrón de radiación de campo cercano, RP_{npq}^{near}, campo intermedio, $RP_{npq}^{inter(P,S)}$ de la onda P o S, y el campo lejano, $RP_{npq}^{far(P,S)}$ para la onda P o S. Las expresiones analíticas en cada caso están dadas por,

$$\left\{\begin{array}{lcl} RP_{npq}^{near} & = & 15\gamma_n\gamma_p\gamma_q - 3\gamma_n\delta_{pq} - 3\gamma_p\delta_{nq} - 3\gamma_q\delta_{np} \\ RP_{npq}^{inter(P)} & = & 6\gamma_n\gamma_p\gamma_q - \gamma_n\delta_{pq} - \gamma_p\delta_{nq} - \gamma_q\delta_{np} \\ RP_{npq}^{inter(S)} & = & 6\gamma_n\gamma_p\gamma_q - \gamma_n\delta_{pq} - \gamma_p\delta_{nq} - 2\gamma_q\delta_{np} \\ RP_{npq}^{far(P)} & = & \gamma_n\gamma_p\gamma_q \\ RP_{npq}^{far(S)} & = & \gamma_n\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\delta_{np} \end{array}\right\} \tag{6.11}$$

6.4.2. Orientación de un plano de falla cualquiera

En sismología, es necesario muchas veces asociar la fuente sísmica, en primera aproximación, a planos de falla en donde se generan las rupturas. La figura 6.17 muestra un plano de falla orientado con respecto a sistema cartesiano XYZ. El plano tiene un azimut o *strike* medido con respecto al norte, $\hat{x}$, dado por el ángulo ϕ_S, y un buzamiento o *dip* del plano medido con respecto a la horizontal dado por el ángulo δ. De la misma figura es posible deducir los siguientes vectores, (1) el vector unitario que apunta en la dirección del *strike*, $\hat{s} = \sin\phi_S\hat{x} + \cos\phi_S\hat{y}$, (2) el vector unitario que apunta en la dirección perpendicular al *strike*, $\hat{p} = \cos\phi_S\hat{x} - \sin\phi_S\hat{y}$ y (3) el vector unitario que apunta en la dirección del *dip*, $\hat{d} = \cos\delta\hat{p} - \sin\delta\hat{z}$.

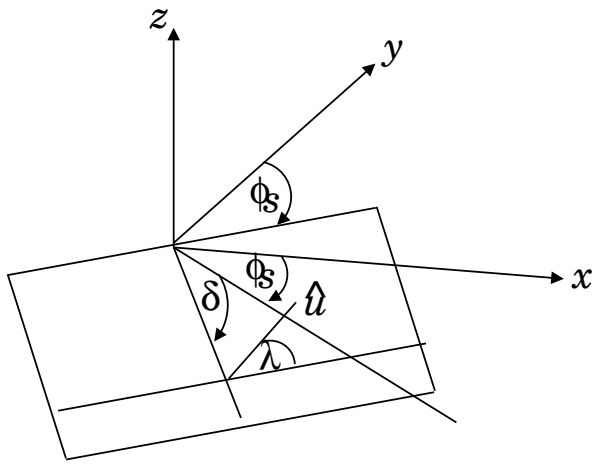


Figura 6.17: Orientación de un plano de falla en un sistema cartesiano xyz.

Para calcular el vector normal al plano de falla basta hacer el producto cruz entre $\hat{d}$ y $\hat{s}$,

$$\hat{\nu} = \hat{d} \times \hat{s} = \sin\delta\cos\phi_S\hat{x} - \sin\delta\sin\phi_S\hat{y} + \cos\delta\hat{z}.$$

El vector unitario $\hat{u}$ coincide con la dirección del deslizamiento sobre el plano de falla y en este caso se asume que pertenece por lo tanto al plano de falla. La orientación de este vector, se define a través de un ángulo medido con respecto a una linea paralela midiéndose el ángulo λ conocido como *slip* o *rake*. Este vector apunta en la dirección en la que ocurre la discontinuidad de desplazamiento en el plano de falla, y

se puede calcular como, $\hat{u} = \cos\lambda\hat{s} - \sin\lambda\hat{d}$, con un poco de álgebra se obtiene,

$$\hat{u} = (\cos\lambda\sin\phi_S - \sin\lambda\cos\delta\cos\phi_S)\hat{x} + (\cos\lambda\cos\phi_S + \sin\lambda\cos\delta\sin\phi_S)\hat{y} + \sin\lambda\sin\delta\hat{z}$$

6.4.3. Cálculo del campo total de desplazamiento para un tensor de momento general

A continuación se presentan las ecuaciones finales para el campo total de desplazamiento para el caso de un medio infinitamente extendido, isótropo, elástico y homogéneo para el caso de un tensor de momento general. Se va a suponer que se puede separar el tensor de momento M_{pq}, de la siguiente manera

$$M_{pq}(\boldsymbol{\xi}, t) = M_{pq}(\boldsymbol{\xi})M(t),$$

en donde $M(t)$ es una función temporal escalar, conocida como función fuente temporal normalizada, caracterizada por un tiempo llamado *rise-time*, τ_r, tal como muestra la figura 6.18. La parte puramente

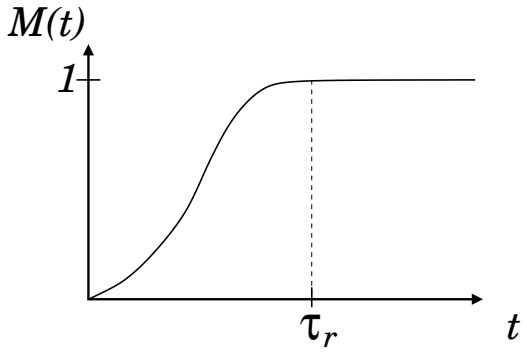


Figura 6.18: Función fuente temporal normalizada a la unidad.

tensorial $M_{pq}(\mathbf{x})$ de amplitud es lo que a partir de datos sismológicos se busca estimar para un evento sísmico cualquiera.

Bajo estas hipótesis, se observa que existe una dependencia lineal del desplazamiento con M_{pq}, a continuación se presenta a título ilustrativo la representación matricial de cada uno de los términos presentes en las expresiones 6.11, son estas expresiones las que luego permiten calcular las contribuciones del campo cercano, intermedio y lejano en forma matricial,

$$\gamma_n\gamma_p\gamma_q M_{pq} = \left\{ \begin{array}{cccccc} \gamma_x\gamma_x^2 & \gamma_x\gamma_y^2 & \gamma_x\gamma_z^2 & \gamma_x 2\gamma_x\gamma_y & \gamma_x 2\gamma_x\gamma_z & \gamma_x 2\gamma_y\gamma_z \\ \gamma_y\gamma_x^2 & \gamma_y\gamma_y^2 & \gamma_y\gamma_z^2 & \gamma_y 2\gamma_x\gamma_y & \gamma_y 2\gamma_x\gamma_z & \gamma_y 2\gamma_y\gamma_z \\ \gamma_z\gamma_x^2 & \gamma_z\gamma_y^2 & \gamma_z\gamma_z^2 & \gamma_z 2\gamma_x\gamma_y & \gamma_z 2\gamma_x\gamma_z & \gamma_z 2\gamma_y\gamma_z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{zz} \\ M_{xy} \\ M_{xz} \\ M_{yz} \end{array} \right\}$$

siendo $\mathbf{M} = \{M_{xx}\ M_{yy}\ M_{zz}\ M_{xy}\ M_{xz}\ M_{yz}\}^T$ el vector que contiene las seis componentes independientes del tensor de momento sísmico. Los otros términos se pueden expresar como,

$$\gamma_n\delta_{pq}M_{pq} = \left\{ \begin{array}{cccccc} \gamma_x & \gamma_x & \gamma_x & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_y & \gamma_y & \gamma_y & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_z & \gamma_z & \gamma_z & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \mathbf{M}$$

$$\gamma_p \delta_{nq} M_{pq} = \gamma_q \delta_{np} M_{pq} = \left\{ \begin{array}{cccccc} \gamma_x & 0 & 0 & \gamma_y & \gamma_z & 0 \\ 0 & \gamma_y & 0 & \gamma_x & 0 & \gamma_z \\ 0 & 0 & \gamma_z & 0 & \gamma_x & \gamma_y \end{array} \right\} \mathbf{M}$$

Para calcular el campo completo basta agrupar los términos anteriores según corresponda a los distintos términos del campo de ondas. En forma matricial se tiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) &= \left\{ \frac{1}{4\pi\rho}\frac{1}{r^4}\mathbf{A}_N \int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau M(t-\tau)d\tau \right. \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\frac{1}{r^2}\mathbf{A}_{IP} M(t-\tfrac{r}{\alpha}) - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2}\frac{1}{r^2}\mathbf{A}_{IS} M(t-\tfrac{r}{\beta}) \\ &+ \left. \frac{1}{4\pi\rho\alpha^3}\frac{1}{r}\mathbf{A}_{FP}\dot{M}(t-\tfrac{r}{\alpha}) - \frac{1}{4\pi\rho\beta^3}\frac{1}{r}\mathbf{A}_{FS}\dot{M}(t-\tfrac{r}{\beta}) \right\} \quad \mathbf{M} \end{aligned}$$

en donde se ha incluido la función temporal escalar, $M(t)$ y los términos del patrón de radiación matriciales son,

- Campo cercano, $\mathbf{A}_N$.
- Campo intermedio de la onda P y S, respectivamente, $\mathbf{A}_{IP}$, $\mathbf{A}_{IS}$.
- Campo lejano de la onda P y S, respectivamente, $\mathbf{A}_{FP}$, $\mathbf{A}_{FS}$.

Esta última representación es útil al momento de buscar plantear el problema inverso para encontrar entonces el tensor de momento sísmico general a partir del modelamiento de las formas de onda.

6.4.4. Análisis y descomposición de un tensor de momento sísmico general

Una de las herramientas fundamentales para analizar las propiedades mecánicas de la fuente sísmica de cada evento es estudiar y analizar el tensor de momento sísmico. Es sabido que los eventos sísmicos se generan porque en ciertas zonas el nivel de esfuerzos solicitante excede los niveles de resistencia del material, generando entonces fracturas.

Si las fracturas se producen a través de alguno de los dos planos de fallas perpendiculares, como muestra la Figura 6.19 (derecha), esto es debido a la acción de fuerzas de tracción T y de presión, P. La representación usada en sismología es representar esto a través de una esfera focal (figura 6.19, centro), que muestran en una proyección estereográfica los planos de falla, los colores tiene relación con si es el eje de tracción o presión que actúa ya sea en la dirección horizontal o vertical para este ejemplo en particular. La figura 6.19 (derecha), representa un corte, en donde se muestra la dirección de deslizamiento relativa que se genera a través de los planos de falla y por lo tanto los colores usados como convención en la esfera focal.

Es sabido también, que las fuentes sísmicas de diverso orígen, no sólo ocurren a través de planos de falla bien definidos, estas rupturas pueden generarse también en un volumen, por ejemplo, fuentes del tipo implosivas, o explosivas. La caracterización más general es representar estas fuentes a través de sus tensores de momento sísmico.

Para analizar si la fuente es del tipo de cizalle sobre plano de falla o no, la única manera es obtener o calcular el tensor de momento sísmico asociado. Para ello es necesario descomponer el tensor de momento general en sus distintas componentes, isotrópica (ISO), doble cupla (DC) y dipolo vectorial lineal

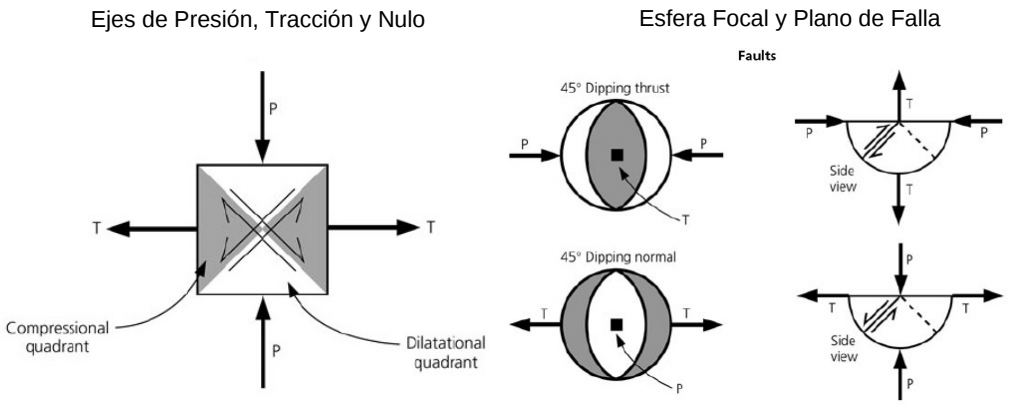
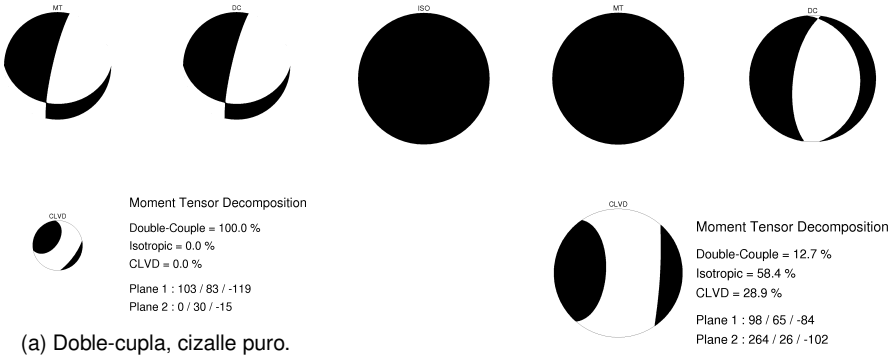


Figura 6.19: Representación de los planos de falla de un evento sísmico a través de su esfera focal.

compesado (CLVD), ver [44]. La descomposición, se realiza básicamente a través de un análisis del tensor de segundo orden M_{pq} a través del cálculo de sus valores y vectores propios.



(a) Doble-cupla, cizalle puro.

(b) Isotrópico.

Figura 6.20: Descomposición de un tensor de momento sísmico. (a) Caso de un sismo doble-cupla dominante, y (b) caso de un sismo con parte isótropa dominante.

La figura 6.20a, presenta a título de ejemplo, la descomposición de un tensor de momento asociado con una fuente del tipo doble-cupla, en donde la ruptura se genera a través de un plano, evento de cizalle puro. En cambio, la fuente de un evento en donde la parte isótropa es dominante, se muestra en la figura 6.20b. En ambos casos se representa gráficamente la parte isotrópica (ISO), doble-cupla (DC) y dipolo vectorial lineal compensado (CLVD) si corresponde a cada caso.

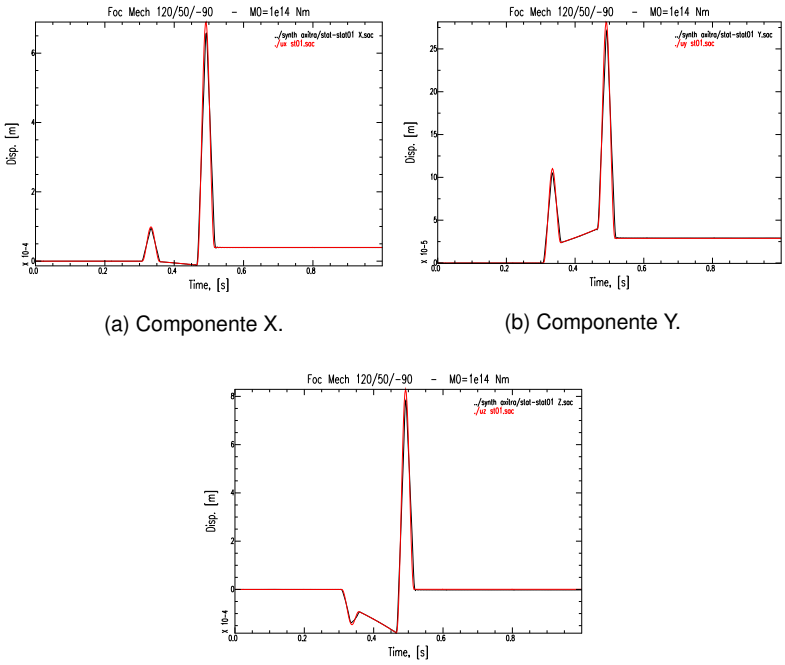
6.4.5. Verificación de los cálculos de sismogramas sintéticos

Con el fin de verificar que la implementación del cálculo de sismogramas sintéticos esté correcta se realizó una comparación con sismogramas modelados con otras técnicas numéricas que modelan el campo completo de ondas en un medio estratificado, con superficie libre. Para este cálculo fue preciso definir un semi-espacio homogéneo y ubicar la fuente y receptores a gran profundidad para evitar los efectos de la superficie libre.

La técnica usada está basada en la metodología de los números de ondas discreto [42], implementada en el programa computacional AXITRA, [43], de distribución gratuita y que es ámpliamente usado dentro

de la comunidad científica. Este programa calcula el campo completo de ondas elástico radiado por una fuente sísmica puntual, para un mecanismo focal de doble-cupla o un mecanismo general y una fuente inmersa en un medio estratificado con superficie libre.

La Fig. 6.21 muestra la comparación entre los sismogramas numéricos calculados con la metodología implementada en este estudio y los calculados con el programa AXITRA. El mecanismo focal usado fue, $\phi = 120$, $\delta = 50$ y $\lambda = -90$, es decir un mecanismo del tipo doble-cupla. El momento sísmico usado fue, $M_0 = 1 \times 10^{14}$ [Nm] y un *rise-time* de 0.05 s. Los receptores están ubicados cerca del hipocentro, a distancias menores a 500 m para simular lo que ocurriría en una mina subterránea.



(a) Componente X.

(b) Componente Y.

(c) Componente Z.

Figura 6.21: Comparación de sismogramas sintéticos calculados en este estudio y los calculados usando el Método de los números de ondas discreto implementado con AXITRA.

Ambos resultados son bastante consistentes, mostrando entonces que la tanto la definición del sistema cartesiano, así como la geometría del plano de falla orientado con respecto a cada sistema cartesiano XYZ está correctamente definido.

6.4.6. Análisis de las formas de onda

La selección de eventos y sus formas de onda fue en base al criterio de los cocientes de la energía sísmica de la onda P y S. Se seleccionaron 24 eventos, tratando de muestrear los distintos rangos de valores del cociente, E_S/E_P. La tabla 6.1 resume el listado de eventos seleccionado junto con sus parámetros sísmicos más relevantes.

La figura 6.22 muestra la ubicación de los geófonos instalados en la mina El Teniente. En este caso se usan coordenadas locales XYZ bajo la convención usada en la mina El Teniente, en donde el norte corresponde a Y, el este a X y la vertical es Z positiva hacia arriba. Este sistema coordenado fue usado para modelar sismogramas sintéticos. Cabe hacer notar que globalmente la nube de sismicidad está bien

Tabla 6.1: Listado de eventos del subcatálogo seleccionado. Cada columna representan la fecha, hora, coordenadas X,Y,Z, el momento sísmico escalar M_0, la energía sísmica radiada por la onda P, E_P y onda S , E_S y el cociente de la energías, E_S/E_P.

No.	Fecha	Hora	X	Y	Z	M_0	E_P	E_S	E_S/E_P
	año/mes/día	hh/mm/ss	[m]	[m]	[m]	[N.m]	[N.m]	[N.m]	
1	19980627	051409	1010.4	485.2	2182.1	4.52e+08	8.38e+00	4.38e+02	52.3
2	19980628	112102	1122.2	552.4	2207.9	2.91e+09	1.35e+01	1.04e+03	77.0
3	19980807	152433	964.1	450.6	2191.7	1.84e+09	2.09e+01	8.96e+02	42.9
4	19980704	124928	1146.4	515.9	2168.3	1.02e+09	1.79e+01	7.46e+02	41.7
5	19980809	204922	965.3	494.5	2283.7	7.30e+08	1.51e+01	3.41e+02	22.6
6	19981029	172205	1064.8	455.2	2344.2	1.93e+09	9.01e+00	2.07e+02	23.0
7	19981027	183810	1084.2	486.9	2400.7	1.57e+09	1.50e+01	3.58e+02	23.9
8	19980629	212421	1163.6	531.9	2190.0	5.86e+08	1.29e+01	2.54e+02	19.7
9	19981101	214034	1062.8	440.4	2354.9	4.96e+08	1.36e+01	1.12e+02	8.2
10	19981102	131520	978.4	440.3	2309.7	3.86e+08	1.32e+01	7.48e+01	5.7
11	19980802	063040	1156.4	439.6	2177.3	2.61e+08	1.05e+01	1.24e+02	11.8
12	19981021	172244	1053.6	456.6	2346.2	6.23e+08	1.22e+01	6.05e+01	5.0
13	19981113	053042	1059.4	494.1	2356.1	5.22e+08	9.15e+00	6.20e+01	6.8
14	19981015	213843	1146.3	434.0	2162.2	2.58e+08	1.49e+01	9.54e+01	6.4
15	19980706	111455	1063.7	447.6	2184.4	3.65e+08	1.49e+01	1.37e+02	9.2
16	19980820	073739	964.3	419.7	2223.2	7.61e+08	1.13e+01	6.97e+01	6.2
17	19980810	064208	1120.0	542.3	2312.3	2.67e+08	1.12e+01	1.73e+01	1.5
18	19981107	202308	1103.3	512.9	2214.7	4.14e+08	8.47e+00	6.94e+00	0.8
19	19981021	191032	1048.0	488.3	2334.2	2.75e+08	1.06e+01	2.92e+01	2.8
20	19980626	091259	1120.7	453.1	2365.0	3.52e+08	1.68e+01	2.79e+01	1.7
21	19981010	150015	1140.8	503.7	2336.3	5.67e+08	1.66e+01	4.51e+01	2.7
22	19980705	013405	1101.6	410.1	2232.9	5.67e+08	1.41e+01	4.24e+01	3.0
23	19981020	150643	1145.9	503.1	2373.1	4.29e+08	7.88e+00	1.28e+01	1.6
24	19981021	162029	1137.9	500.2	2349.4	4.78e+08	1.71e+01	4.18e+01	2.4

cubierta por los distintos receptores instalados.

6.4.7. Modelamiento de formas de onda

Dada entonces las coordenadas de un evento y de las estaciones que lo registraron, se pueden modelar las formas de onda en cada receptor. En todos los casos siguientes se asumieron la siguientes parámetros

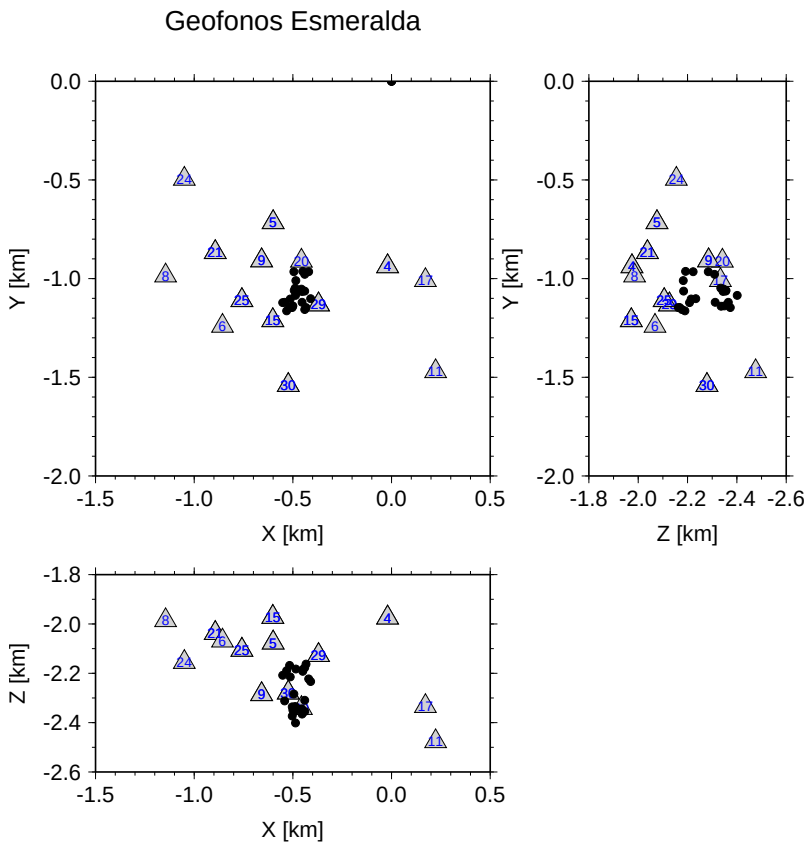


Figura 6.22: Ubicación de los geófonos instalados en la mina El Teniente. Los triángulos representan los geófonos y los puntos negros los hipocentros de los eventos seleccionados.

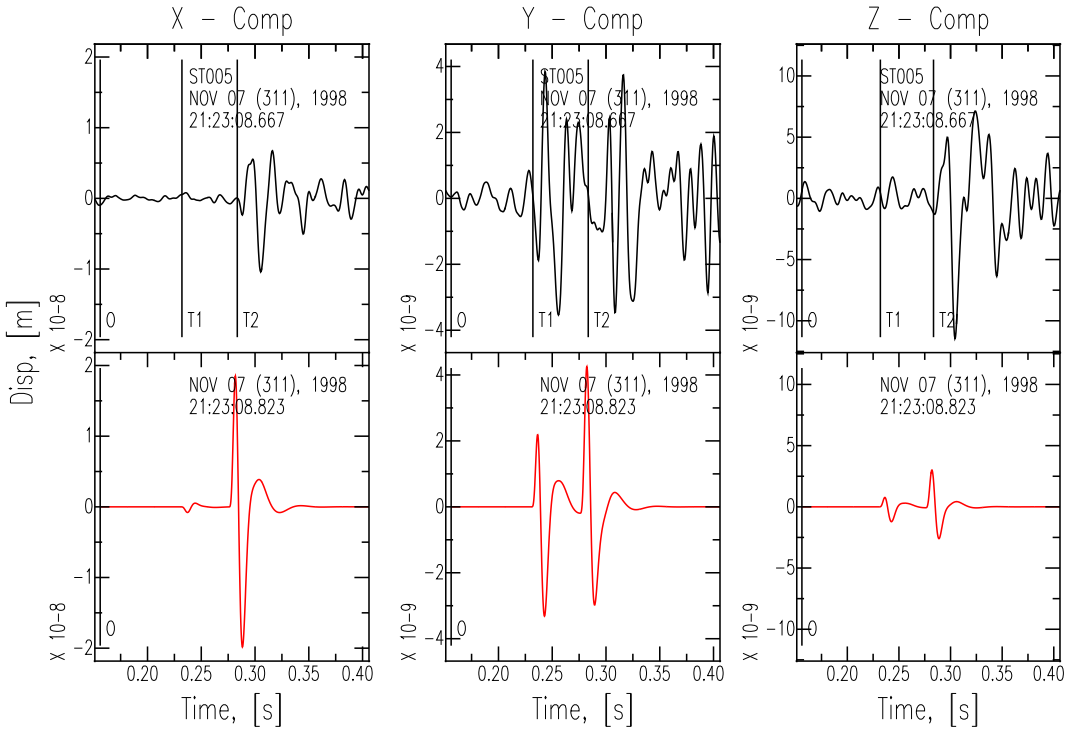
elásticos del medio, velocidad de propagación de la onda P, $V_P = 5600$ m.s^{-1}, velocidad de propagación de la onda S, $V_S = 3500$ m.s^{-1} y densidad del medio, $\rho = 2700$ gr.cm^{-3}. Se asumió un medio infinitamente extendido,

I) 1998 Nov 7, 21h23 - $E_S/E_P = 0{,}8$

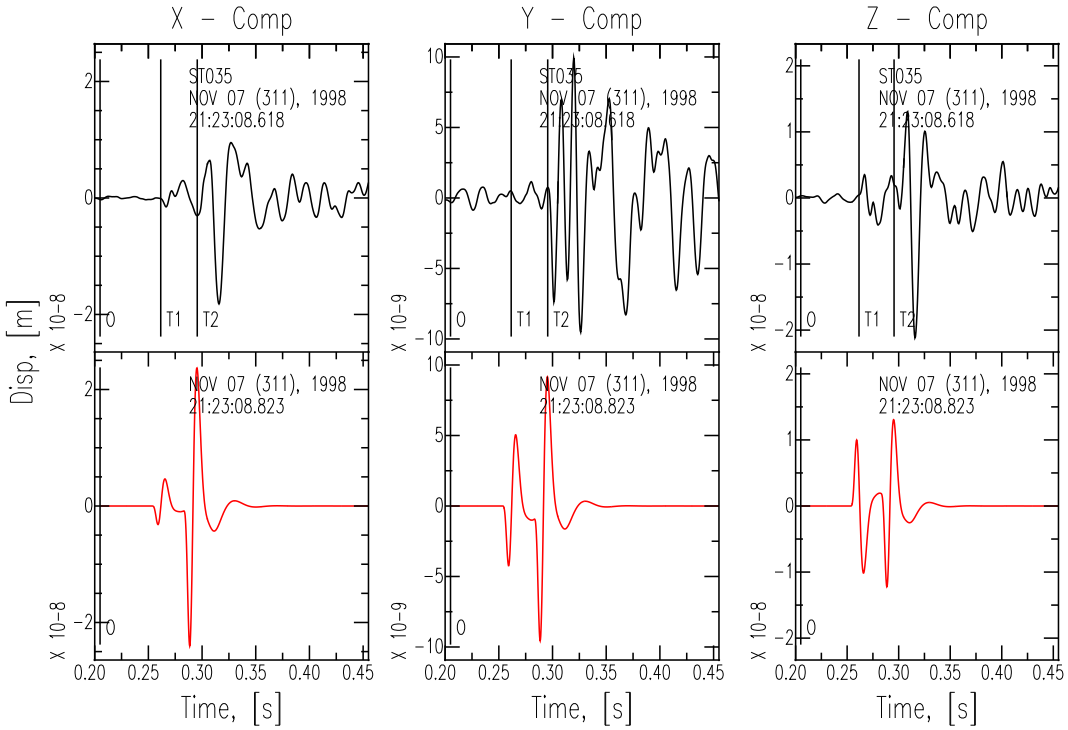
Para este evento, No. 18 (ver tabla 6.1) se tiene que la frecuencia de esquina de la onda P y de la onda S son del orden de 73 Hz y 41 Hz respectivamente, según el catálogo de la mina Esmeralda. El momento sísmico tabulado es, $4{,}14 \times 10^8$ [N.m].

En este caso, se esperaría un evento del tipo isótropo dominante, ya que el cociente E_S/E_P es menor que 4. Para ello se modeló un evento con parte isotrópica de 50 % y 25 % de doble-cupla y 25 % CLVD. Los sismogramas procesados y modelados, en las estaciones St005 y St035, se presentan en la figura 6.23. Para un ajuste, a primer orden de las amplitudes máximas, el momento sísmico escalar para calcular estos sismogramas fue ajustado al valor, $M_0 = 1{,}86 \times 10^8$ [N.m]. El *rise-time* usado, $7{,}5$ [ms].

El tensor de momento, fue de adivinanza, por eso el ajuste de las forma de onda, tanto en amplitud como en polaridades no es perfecto. La forma global indica que el evento sísmico tiene una duración mayor que la modelada. Es interesante notar que el dato presenta mucha mayor complejidad, es decir que después de la llegada de la onda S, aun llega un tren de ondas muy energético, con amplitudes comparables de la amplitud de la onda S. Esto puede ser atribuído a las heterogeneidades del medio como presencia de cavidades, dos eventos ocurriendo en instantes cercanos, por ejemplo.



(a) St005



(b) St035

Figura 6.23: Evento, 1998 Nov 7, 21h23 - $E_S/E_P = 0{,}8$. Filtrados pasa banda, 50-250 Hz.

II) 1998 Jun 26, 10h12 - $E_S/E_P = 1{,}7$

Para este evento, No. 20 (ver tabla 6.1) se tiene que la frecuencia de esquina de la onda P y de la onda S, es del orden de 116 Hz y 73 Hz respectivamente. El momento sísmico tabulado es, $3{,}52 \times 10^8$ [N.m]. En este caso, se esperaría un evento con componente isótropa dominante, ya que el cociente E_S/E_P

es menor que 4. Se modeló un evento con parte isotrópica de 42 % y 34 % de doble-cupla y 23 % CLVD. Los sismogramas procesados y modelados, en las estaciones St006 y St004, se presentan en la figura 6.24. Para un ajuste, a primer orden de las amplitudes máximas, el momento sísmico ajustado fue igual a, $M_0 = 2{,}48 \times 10^8$ [N.m]. El *rise-time* usado, $9{,}5$ [ms].

Las amplitudes de la onda P son mayores que las amplitudes de la onda *S*, un candidato a ser un evento del tipo no doble-cupla de cizalle. En este caso, la duración está bien modelada, y dado que el tensor de momento sísmico es adivinanza no se logra un ajuste perfecto de las formas de ondas observadas y sintéticas.

III) 1998 Jun 27, 6h14 - $E_S/E_P = 52$

Para este evento, No. 1 (ver tabla 6.1) se tiene que la frecuencia de esquina de la onda P y de la onda S, es del orden de 144 Hz y 107 Hz respectivamente. El momento sísmico tabulado es, $4{,}52 \times 10^8$ [Nm].

En este caso, se esperaría un evento de cizalle puro ya que el cociente E_S/E_P es mayor que 4. Se modeló un evento de cizalle del tipo doble-cupla, con parte isotrópica de 0 % y 100 % de doble-cupla y 0 % CLVD. Los sismogramas procesados y modelados, en las estaciones St005 y St036, se presentan en la figura 6.25. Para un ajuste, a primer orden de las amplitudes máximas, el momento sísmico ajustado fue igual a, $M_0 = 5{,}00 \times 10^8$ [N.m]. El *rise-time* usado, 7.5 [ms].

Las sismogramas observados presentan amplitudes de onda S mayores que la onda P, siendo estas observaciones consistentes en los registros de los otros receptores. La duración asumida es bien modelada al comparar sintéticos y observados. Las formas de onda observadas en la estación St036 (figura 6.25b), presenta mayo complejidad en el desarrollo de la coda en comparación con los registros de la estación St005 (figura 6.25a). Esto puede atribuirse a complejidades del medio, cavidades, zonas expuestas a condiciones de borde del tipo superficie libre, por ejemplo.

IV) 1998 Jun 28, 12h21 - $E_S/E_P = 77$

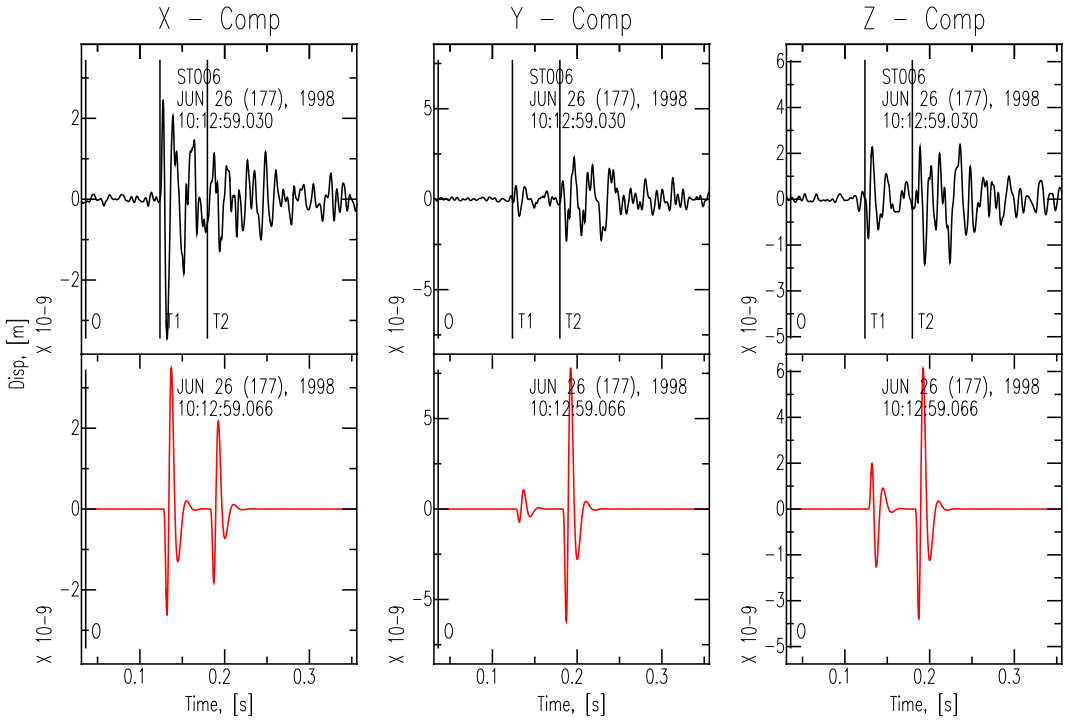
Para este evento, No. 2 (ver tabla 6.1) se tiene que la frecuencia de esquina de la onda *P* y de la onda S, es del orden de 88 Hz y 46 Hz respectivamente. El momento sísmico tabulado es, $2{,}91 \times 10^9$ [Nm].

En este caso, se esperaría un evento de cizalle puro ya que el cociente E_S/E_P es mayor que 4. Se modeló un evento de cizalle del tipo doble-cupla, con parte isótropica de 0 % y 100 % de doble-cupla y 0 % CLVD. Los sismogramas procesados y modelados, en las estaciones St008 y St035, se presentan en la figura 6.26. Para un ajuste, a primer orden de las amplitudes máximas, el momento sísmico ajustado fue igual a, $M_0 = 1{,}00 \times 10^9$ [N.m]. El *rise-time* usado, $9{,}0$ [ms].

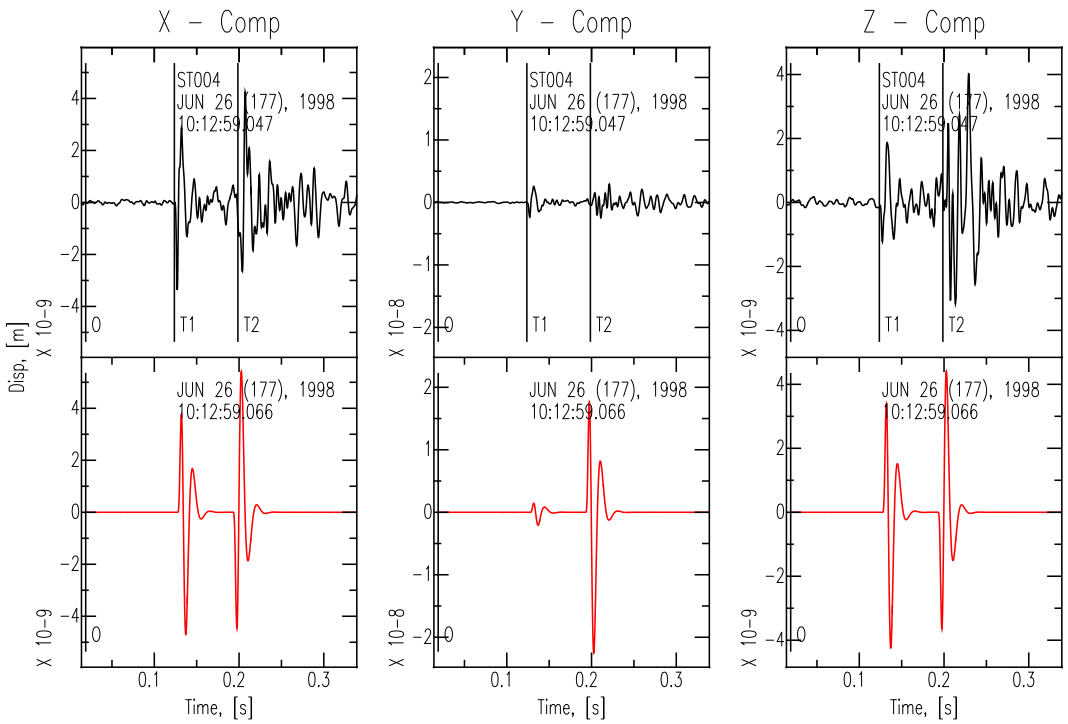
Para este evento, la duración de la fuente está bien modelada, la estación St024 tiene gran complejidad en la coda, a diferencia de la coda observada en la estación St008.

6.4.8. Efectos de la banda pasante

Para ver efecto de la banda pasante del filtro aplicado, se ha hecho una comparación de la señal original con la simulada numéricamente. Cabe señalar que la banda de elección debe estar en relación con el tamaño del evento y por ende de su frecuencia de esquina, la cual cambia entre eventos de distinto tamaño.



(a) St006

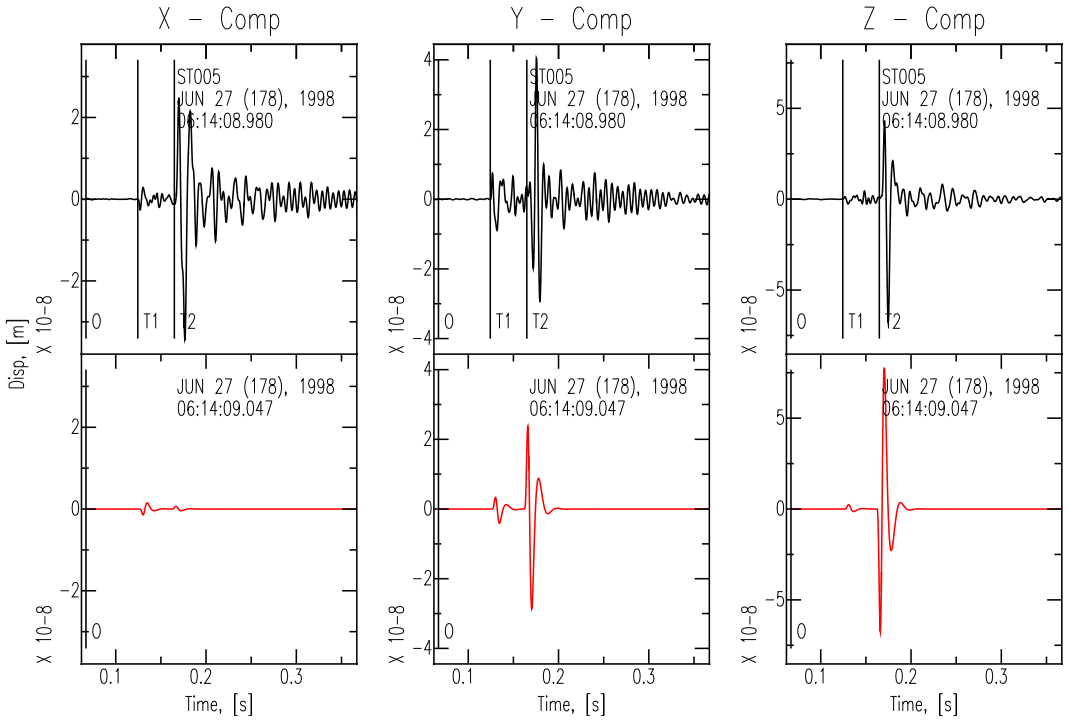


(b) St004

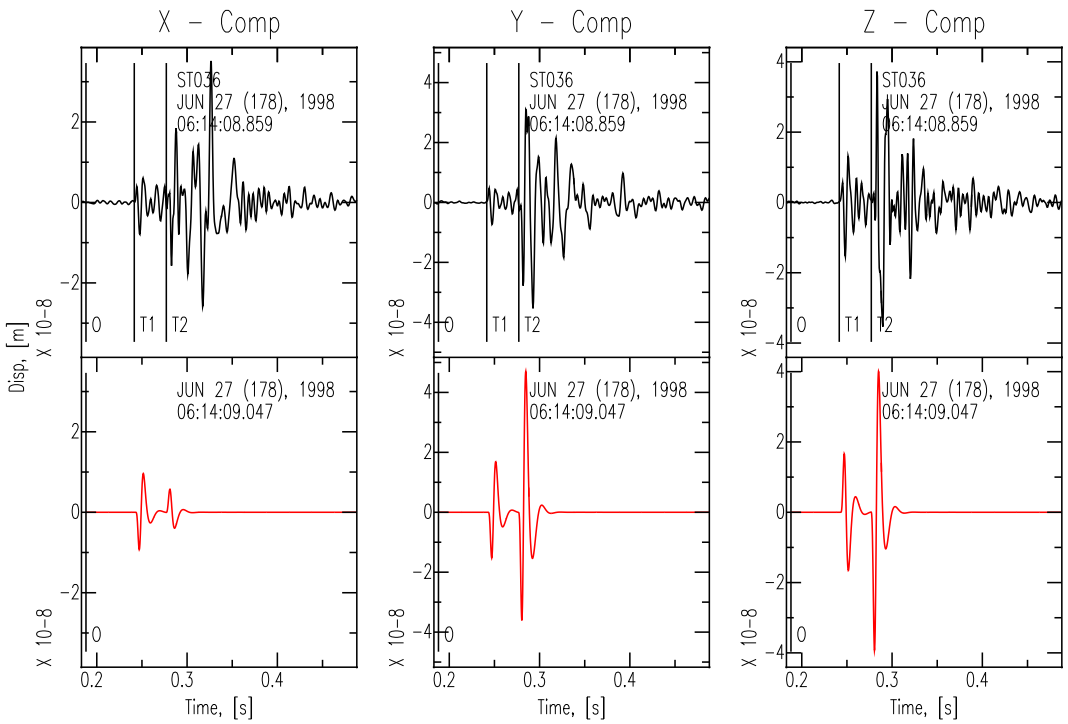
Figura 6.24: Evento, 1998 Jun 26, 10h12 - $E_S/E_P = 1{,}7$. Filtrados pasa banda, 50-250 Hz.

A) Modelamiento Evento Isotrópico

El evento, ocurrido en 1998 Noviembre 7, 21h23, con un cociente de energía de $E_S/E_P = 0{,}8$ es mostrado como ejemplo. Las figuras 6.27 y 6.28 muestran la comparación de señales sin filtrar y filtradas entre 50-250 Hz, para ver efecto del filtro. Este evento es modelado con una componente isótropa dominante. La figura 6.27a y 6.27b muestra la comparación de los sismogramas en desplazamiento, tanto sintéti-



(a) St005

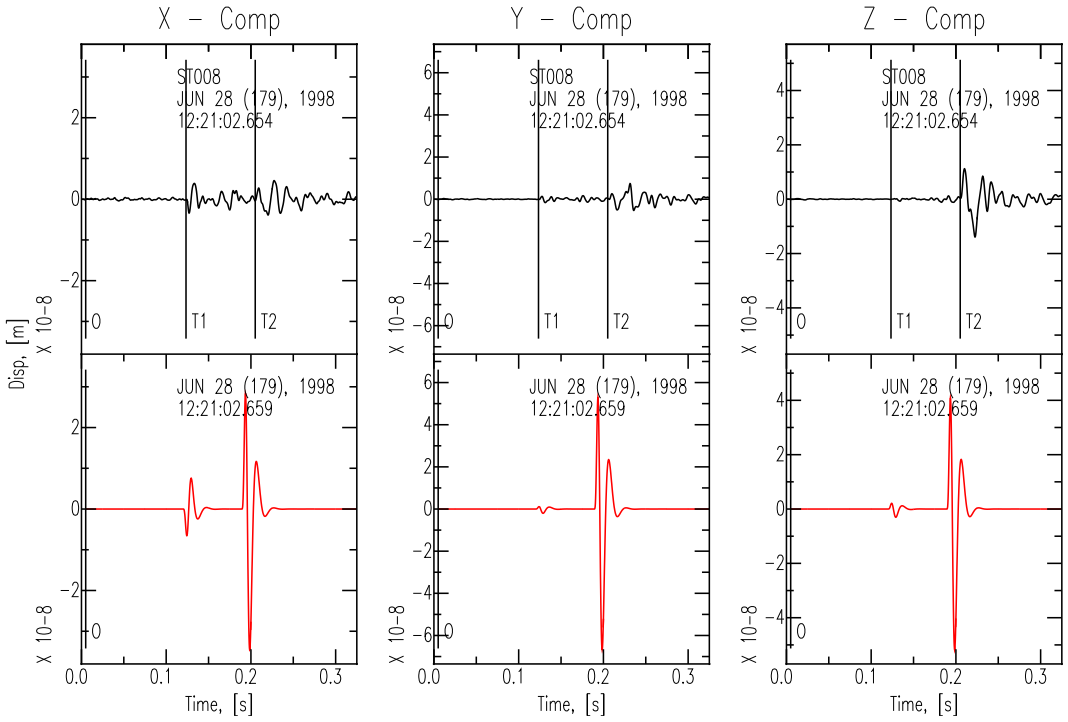


(b) St036

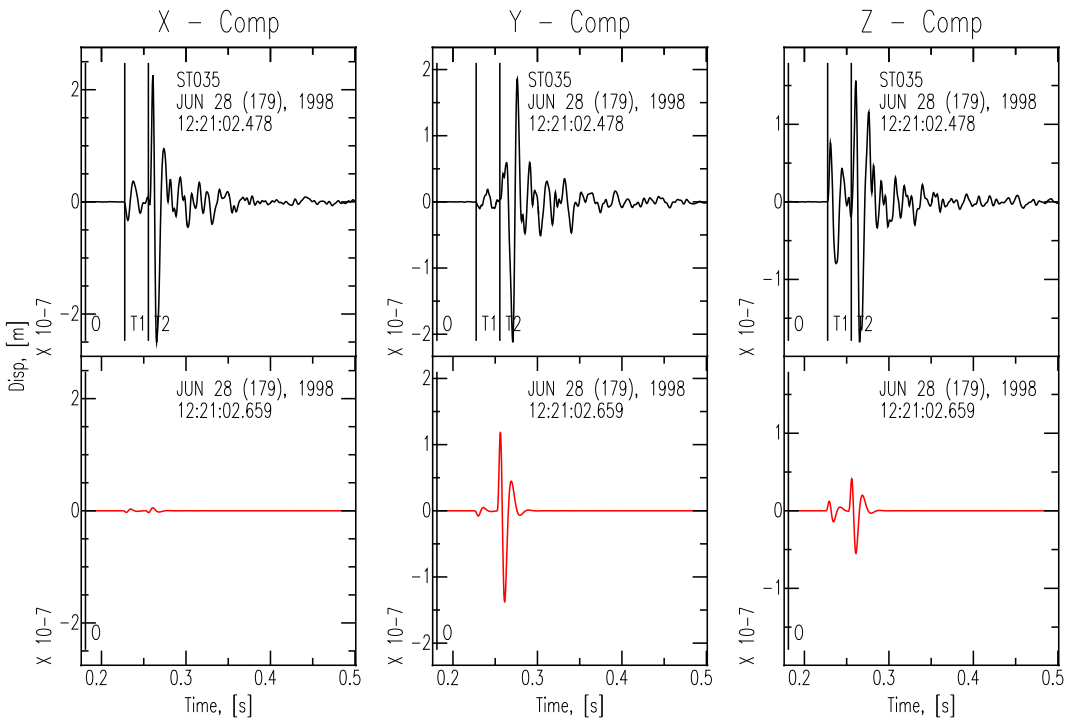
Figura 6.25: Evento, 1998 Jun 27, 6h14 - $E_S/E_P = 52$. Filtrados pasa banda, 50-250 Hz.

cos como observados para la estación St005, en donde se comparan las señales sin filtrar y filtradas respectivamente. Además de los sismogramas sintéticos y observados (tres componentes), se muestra la comparación de las amplitudes de los espectros de Fourier en donde se han superpuesto el modelamiento y la observación.

La figura 6.28a y 6.28b compara los sismogramas en desplazamiento, tanto sintéticos como observados



(a) St008



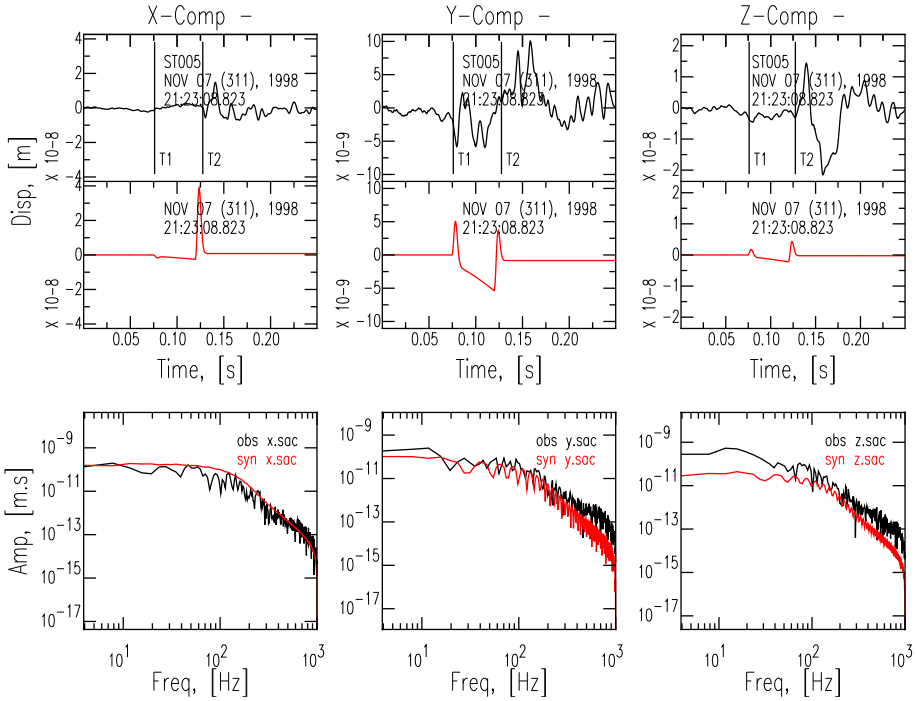
(b) St035

Figura 6.26: Evento, 1998 Jun 28, 12h21 - $E_S/E_P = 77$. Filtrados pasa banda, 50-250 Hz.

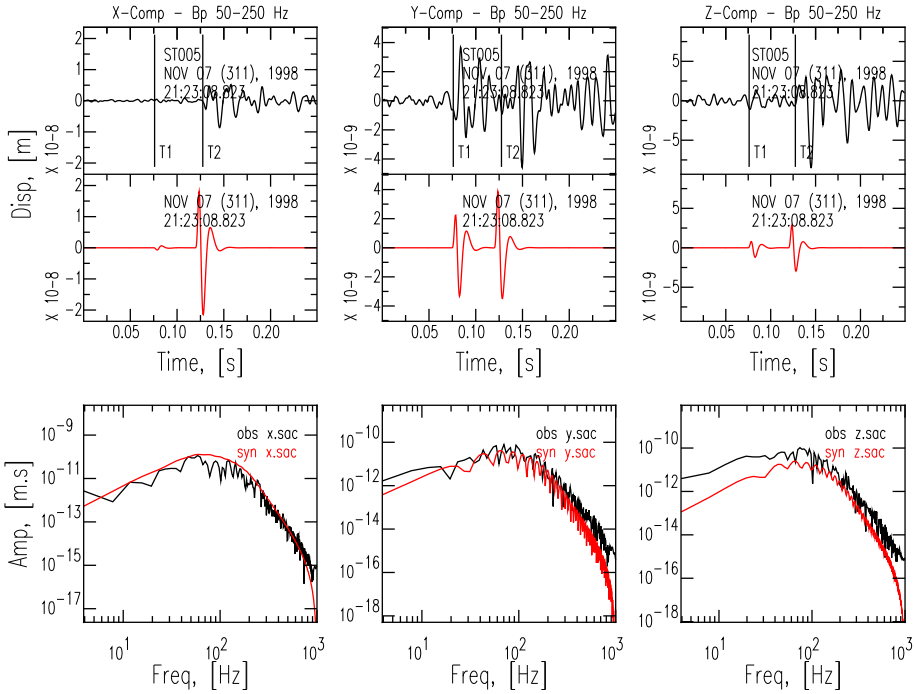
para la estación St035, en donde se comparan las señales sin filtrar y filtradas respectivamente. Además de los sismogramas (tres componentes), se muestra la comparación de las amplitudes de los espectros de Fourier en donde se han superpuesto el modelamiento y la observación.

El filtro de dos polos aplicado, deja pasar una banda alrededor de la frecuencia de esquina del evento. Para esta magnitud, la banda de frecuencia está en acorde con el nivel de energía necesaria para modelar

la fuente de este evento. Las diferencias en amplitud, se deben a que el tensor de momento sísmico es de adivinanza, por lo tanto el patrón de radiación explica principalmente esta diferencia.



(a) Sin filtro.

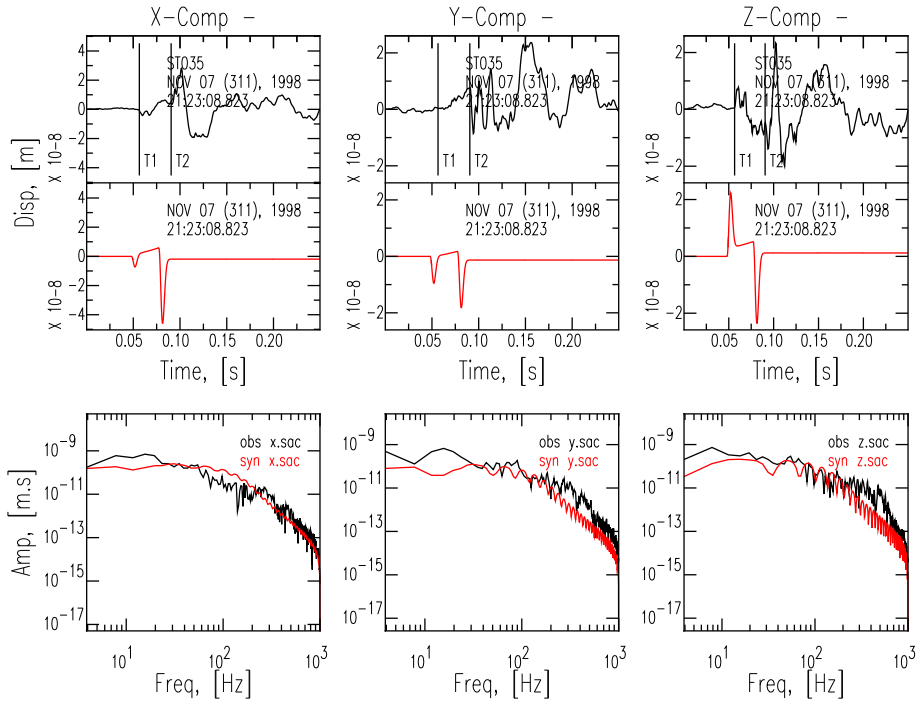


(b) Con filtro.

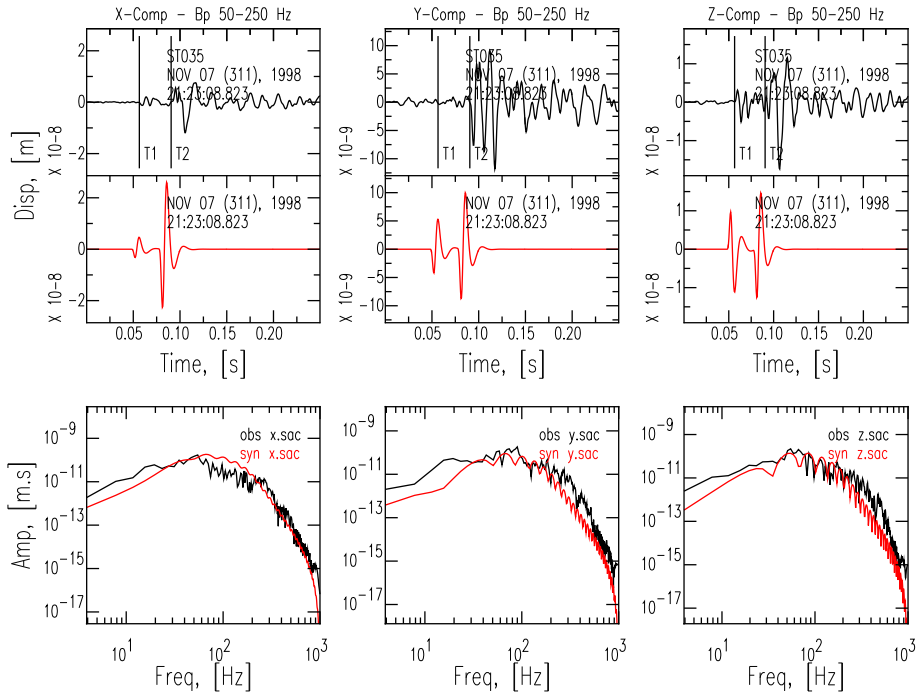
Figura 6.27: Evento, 1998 Nov 7, 21h23 - $E_S/E_P = 0{,}8$. Estación St005. Comparación señal sin filtrar y filtrada.

B) Modelamiento Evento Cizalle

El evento, ocurrido en 1998 Junio 27, 6h14, con un cociente de energía de $E_S/E_P = 52$ (evento de cizalle dominante) es mostrado como ejemplo. Las figuras 6.29 y 6.30 muestran la comparación de señales sin



(a) Sin filtro.



(b) Con filtro.

Figura 6.28: Evento, 1998 Nov 7, 21h23 - $E_S/E_P = 0{,}8$. Estación St035. Comparación señal sin filtrar y filtrada.

filtrar y filtradas entre 50-250 Hz, para ver efecto del filtro. Este evento es modelado con una componente de doble-cupla (cizalle puro).

La figura 6.29a y 6.29b muestra la comparación de los sismogramas en desplazamiento, tanto sintéticos como observados para la estación St005, en donde se comparan las señales sin filtrar y filtradas respectivamente. Además de los sismogramas sintéticos y observados (tres componentes), se muestra la comparación de las amplitudes de los espectros de Fourier en donde se han superpuesto el modelamiento

y la observación.

La figura 6.30a y 6.30b compara los sismogramas en desplazamiento, tanto sintéticos como observados para la estación St036, en donde se comparan las señales sin filtrar y filtradas respectivamente. Además de los sismogramas (tres componentes), se muestra la comparación de las amplitudes de los espectros de Fourier en donde se han superpuesto el modelamiento y la observación.

Nuevamente el filtro de dos polos aplicado es tal que deja pasar una banda alrededor de la frecuencia de esquina del evento. Para esta magnitud, la banda de frecuencia está en acorde con el nivel de energía necesaria para modelar la fuente de este evento. Una diferencia en amplitud importante se observa en la componente X en los regitros de ambas estaciones. Esto puede ser debido a que el tensor de momento sísmico es de adinanza y el patrón de radiación no está entonces bien ajustado en este caso.

6.4.9. Comentarios generales y discusión

Como comentario general, el modelamiento directo de las formas de ondas presenta un comportamiento, a primer orden, coherente con las hipótesis de trabajo planteadas. Los eventos que presentan un cociente E_S/E_P menores que $4{,}5$ (aproximadamente) son candidatos a ser eventos del tipo no doble-cupla, las grandes amplitudes de onda P que se observan mayoritariamente en todos los receptores para un evento dado, hacen pensar que la parte isótropa domina al campo de ondas radiado desde la fuente sísmica.

Sin embargo, es aun dificil plantear que esta sea la única explicación, podría suceder que fuese un efecto atribuible al patrón de radiación, pero si las amplitudes de la onda dominan o son comparables a las amplitudes de la onda S, en varios receptores, entonces, la conclusión es que es un efecto asociado al proceso de ruptura y por lo tanto de su mecanicmo (tensor de momento sísmico).

Aspectos a mejorar.

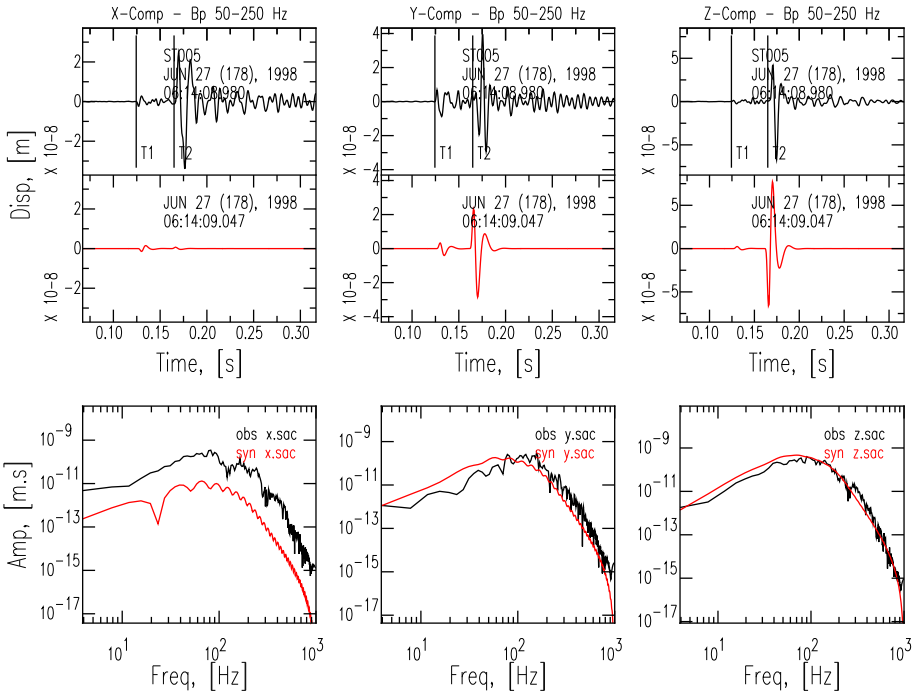
Respecto de las mejoras al modelamiento de las formas de onda, es necesario incluir algún efecto anelástico en la propagación de ondas. El efecto de la atenuación intrínseca modifica (filtra) las formas de ondas, y es un efecto que podría dar mayor información respecto del medio. Podrían existir en el maciso rocoso, zonas por donde viajan las ondas que sean más atenuantes que otras zonas.

Implementar técnicas de inversión del tensor de momento sísmico.

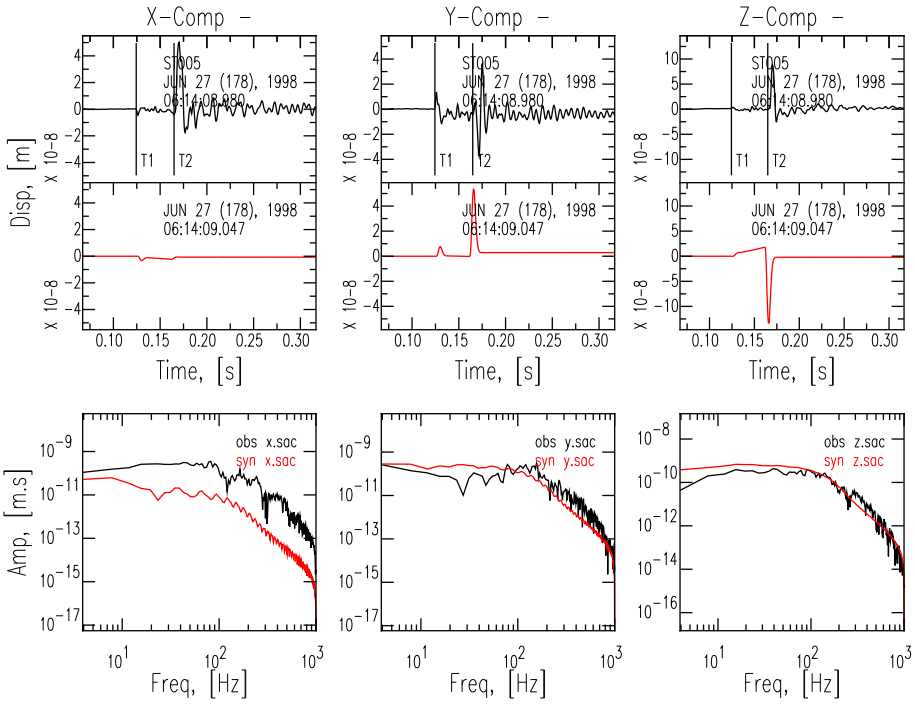
Por otro lado, tener una robustez en la determinación del tensor de momento sísmico, sería a través de la implementación de un método inverso usando las formas de onda. Diversas técnicas pueden ser implemendas (e.g. [47], [45], [48]).

6.5. Extensión Futura y Conclusiones Generales

La metodología de estimación de la superficie de quiebre usando la información de los parámetros sísmicos de la fuente sísmica de los eventos depende fuertemente de los índices K_f escogidos. De las conclusiones obtenidas en el proyecto anterior, es importante destacar que durante la evolución temporal del trazado de la superficie, esta retrocede algunas veces, por lo que es importante introducir la restricción de incluir el estado de la superficie estimada en el tiempo anterior. Esto debe ir adicionalmente con un análisis estadístico para poder definir los rangos posibles de dispersión en profundidad de la superficie. Es



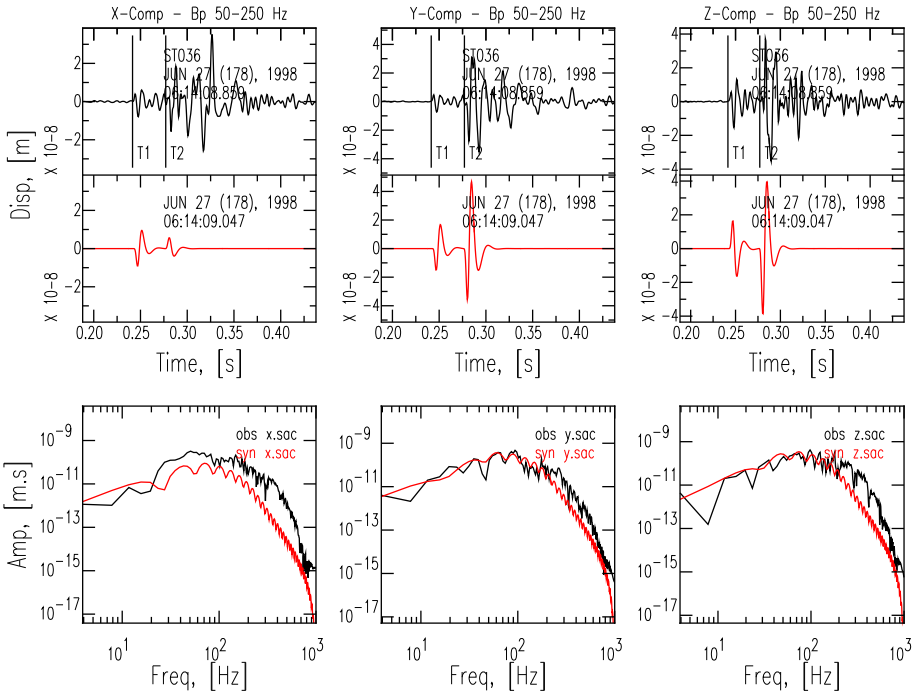
(a) Sin filtro.



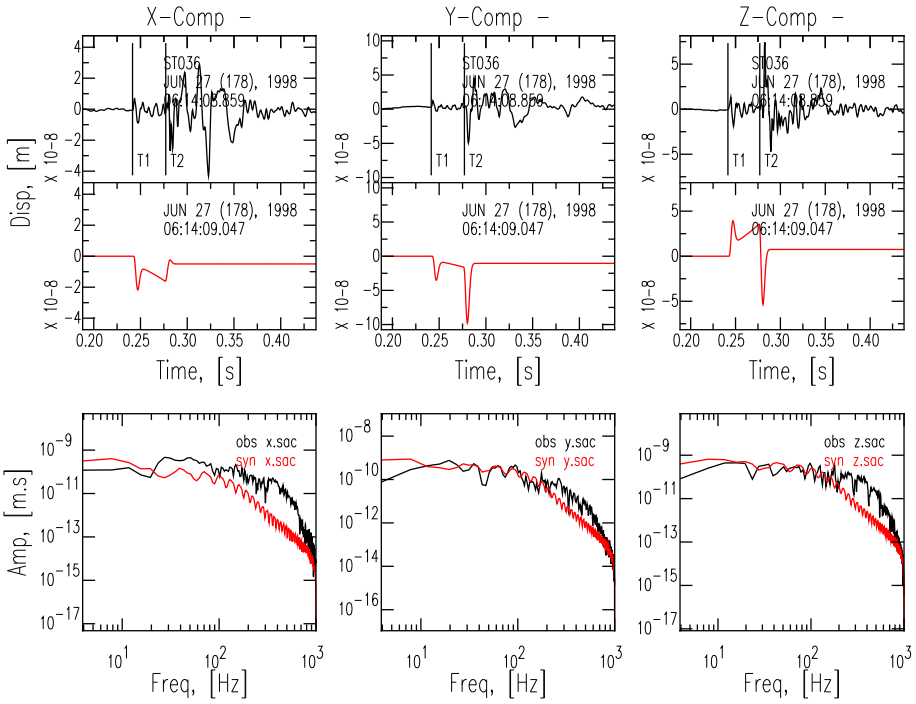
(b) Con filtro.

Figura 6.29: Evento, 1998 Jun 27, 6h14 - $E_S/E_P = 52$. Estación St005. Comparación señal sin filtrar y filtrada.

importante señalar que esta metodología presenta entonces un estimador de la posición de la superficie $3D$ objetiva, y no sujeta a interpretaciones a nivel de usuario, de la mejor o posible superficie de quiebre. Respecto de la superficie $3D$ estimada, también cabe destacar que se ha usado un modelo de superficie ajustada, por mínimos cuadrados, bien especifíco: polinomial de grado 2 tanto en x como en y. Otros modelos de superficie podrían aplicarse mejor, adaptando otras técnicas de trazado de superficies en $3D$, como triangulación, interpolaciones $3D$, por ejemplo. Cabe señalar que la intuición, dado el comporta-



(a) Sin filtro.



(b) Con filtro.

Figura 6.30: Evento, 1998 Jun 27, 6h14 - $E_S/E_P = 52$. Estación St036. Comparación señal sin filtrar y filtrada.

miento mecánico de la roca, dice que superficie de quiebre debería tener un comportamiento y forma más irregular, pero la técnica y ajuste por mínimos cuadrados sólo muestra la tendencia global y de longitud de onda más larga, con una forma muy suavizada.

Se ha entregado el código fuente con su documentación, de manera de poder introducir mejoras en la estimación de cada superficie de quiebre, en trabajos futuros. Los programas principales, así como cada una de las subrutinas desarrolladas en este estudio son entregadas en conjunto con este informe. La parte

faltante es poder integrar estos resultados en un *sotfware* integrador, que recopile la información de todas las superficies estimadas posibles.

En aspectos de modelamiento numérico de las formas de ondas, en conjunto con el análisis de los registros observados en distintos receptores de eventos captados en la mina, los resultados obtenidos en el presente estudio, hacen concluir que las hipotésis de trabajo van en la dirección correcta. Esto dice básicamente que eventos con cocientes bajos de E_S/E_P presentan una componente de cambio de volumen importante, es decir una componente isótropa dominante, en relación con la parte de doble-cupla y del dipolo vectorial lineal compensado. Por otro lado, eventos con cocientes E_S/E_P altos presentan una componente de cizalle dominante, es decir, componente doble-cupla de cizalle. Para confirmar de manera robusta estas conclusiones obtenidas con modelamiento directo de formas de onda, es necesario calcular los tensores de momento sísmico con técnicas de métodos inversos de formas de onda.

Para ir más lejos en el análisis de las superficies de quiebre, la integración es necesaria para poder contrastar estas superficies con las determinadas con otras metodologías. Un mejora en la linea sísmica, y acoplada con la técnica de inversión con *time-reversal*, debería incluir un estudio ya no sólo de parámetros escalares de la fuente sísmica sino más bien atacando el cálculo y análisis de los tensores de momento sísmico. Esto en la perspectiva de que el análisis incluya y contenga información sobre la dirección de los esfuerzos aparentes (o caídas de esfuerzo) principales, obtenidos de los tensores de momento sísmico, por ejemplo, y que caracterize así su componente isótropa respecto de su componente de doble-cupla.

6.6. Software, documentación, código fuente e implementación del trazado de la superficie

6.6.1. Descripción general archivos

A continuación se listan los programas desarrollados y los códigos fuente, tanto de los programas principales como de las subrutinas destinadas a estimar y trazar la superficie de quiebre usando sólo la información del catálogo sísmico. El catálogo es el de la mina Esmeralda, cuyo archivo está adjunto dentro del directorio entregado en su respaldo magnético.

Datos usados y archivos,

i) *sismosesmeralda.evp*, archivo ascii con el listado de eventos analizado que comprende el período desde 1996/07/01 al 1999/12/31.

ii) *evp.header*, archivo ascii que contiene la información de que es cada parámetro que está tabulado en cada columna del archivo anterior.

Las subrutinas y sus códigos entregados en este informe, están en directa relación con los parámetros escalares sísmicos estudiados. Se exploraron los siguientes parámetros y los índices, K_f, definidos por,

1) Energía de las onda P y S. A través del cociente, E_S/E_P.
2) Caídas de esfuerzo dinámica, estática. A través del cociente, *Dynamic/Static*, es decir, $\Delta\sigma_d/\Delta\sigma_s$.
3) Caídas de esfuerzo aparente y estática. A través del cociente, *Apparent/Static*, es decir, $\Delta\sigma_a/\Delta\sigma_s$.

Los programas están separados en dos categorías. Los programas principales que permiten estudiar ya sea sólo un intervalo de tiempo, o generar las secuencias de las superficies estimadas usando todo el

catálogo.

Los códigos están escritos en lenguaje de programación científico *Matlab* y se describen brevemente a continuación.

6.6.2. Programas principales

ApStat.m

Esta subrutina usa el cociente entre el *Apparent Stress Drop* y *Static Stress Drop*, dado un intervalo de tiempo, selecciona un subcatálogo y grafica (1) un mapa con la sismicidad (planta y corte), (2) el trazado de las rectas para definir las bandas de separación y extraer información como las desviaciones estandard, y (3) grafica la superficie en $3D$ ajustada por el criterio de mínimos cuadrados.

ApStatsec.m

Grafica la secuencia completa de las superficies de quiebre estimadas para cada intervalo de tiempo tomando todo el catalogo de la mina Esmeralda.

DynStat.m

Este código usa el cociente entre el *Dynamic Stress Drop* y *Static Stress Drop*, dado un intervalo de tiempo, selecciona un subcatálogo y grafica (1) un mapa con la sismicidad (planta y corte), (2) el trazado de las rectas para definir las bandas de separación y extraer información como las desviaciones estandard, y (3) grafica la superficie en $3D$ ajustada por el criterio de mínimos cuadrados.

DynStatsec.m

Genera la secuencia de supercificies estimadas, subdividiendo el catálogo en varios rangos de tiempo y luego se genera la superficie para cada subintevalo.

energia.m

Este código usa el cociente entre la Energía de la Onda S y de la onda P, E_S/E_P, entonces dado un intervalo de tiempo, selecciona un subcatálogo y grafica (1) un mapa con la sismicidad (planta y corte), (2) el trazado de las rectas para definir las bandas de separación y extraer información como las desviaciones estandard para este cociente y para este subcatálogo, y (3) grafica la superficie en $3D$ ajustada por el criterio de mínimos cuadrados.

Energysec.m

Genera la secuencia de superficies estimadas, subdividiendo el catálogo en varios rangos de tiempo y luego se genera la superficie para cada subintevalo.

secuencia.m

Este es un programa que permite seleccionar el índice, K_f, para luego seleccionar el intervalo de eventos para Trazar la Sequencia de Evolución de la Superficie de Quiebre.

6.6.3. Otros programas

histogramas.m Programa para calcular los histogramas ya sea para cada parámetro sísmico o alguno de los índices K_f definidos.

PendRectas.m Trazado del ajuste de las rectas, para los parámetros de cocientes de *Stress Drop*.

perfiles.m Grafica mapa de la sismicidad, tanto en planta como en perfil. Según el parámetro sísmico escogido, asigna un color a los distintos eventos.

6.6.4. Subrutinas

La lista enumerada a continuación son subroutinas implementadas que forman e integran parte de los programas explicados anteriormente.

- asignar.m
- customDataCursor.m
- filtrar.m
- lagrange.m
- mapeo.m
- reordenar.m
- sfig.m
- superficie.m

Capítulo 7

Análisis Variacional de la Superficie de Socavación

7.1. Resumen

El trabajo realizado en esta línea del proyecto consistió en:

- la formulación de un modelo matemático basado en el cálculo de variaciones para la determinación de la evolución de la superficie de quiebre asociada a la explotación de minas subterráneas mediante la técnica de *block caving* (detallado en la Sección 7.2)
- la formulación de una aproximación por elementos finitos (presentada en la Sección 7.2) para la simulación numérica del modelo variacional propuesto, realizada en conjunto con Leonardo Figueroa, Investigador Postdoctoral del Centro de Investigación en Ingeniería Matemática de la Universidad de Concepción
- la demostración rigurosa de la existencia de soluciones para el problema de optimización infinito-dimensional del modelo propuesto (Sección 7.3), realizada junto a Maëlle Guennec-Allain, alumna en práctica de la Maestría en Matemáticas y Aplicaciones de la Escuela Normal Superior de Cachan en Bretaña (Francia)
- la implementación en un código híbrido Matlab-Python de la aproximación numérica del modelo variacional (Sección 7.4), a cargo de Leonardo Figueroa (Investigador Postdoctoral de la Universidad de Concepción).

Modelo variacional y aproximación numérica

La idea detrás del modelo consiste en considerar el crecimiento de la cavidad como el resultado del desprendimiento de roca a causa de la fuerza de gravedad, mecanismo de fallo que el macizo rocoso decide emplear con el ánimo de liberar energía elástica en las zonas alrededor de la superficie de la cavidad en donde se haya producido la mayor acumulación de tensiones. El método consiste en minimizar un funcional del tipo

$$\underbrace{\int_{\Omega\setminus\chi} W(\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x}}_{\text{Energía elástica}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega_N} \mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S}_{\text{Esfuerzos lejanos}} + \underbrace{\kappa\cdot\text{volumen de la cavidad }\chi}_{\text{Energía de fractura}} \tag{7.1}$$

con respecto a la cavidad χ (la cual aparece como una de las incógnitas del modelo) y al campo de desplazamientos asociado $\mathbf{u} : \Omega\setminus\chi \to \mathbb{R}^2$, usando un método iterativo de descenso. El tercer término corresponde a la energía disipada en el proceso de fractura que lleva al desprendimiento de la roca, y desde el punto de vista matemático cumple el rol de estabilizar el modelo e impedir que la roca colapse completamente con el fin de minimizar la energía elástica. La evolución de la cavidad resulta de la compe-

tencia entre la minimización de los primeros dos términos y la minimización del tercero, y es más rápida o más lenta dependiendo de la magnitud del coeficiente de resistencia a la fractura κ.

El modelo descrito anteriormente se conoce como el *modelo variacional para la propagación brutal de daños de Francfort y Marigo* [32, 31] y ha sido utilizado recientemente por Allaire, Jouve & Van Goethem [23] para el estudio de la propagación de grietas en materiales frágiles. En este documento se muestra cómo adaptar la implementación numérica del modelo propuesta por estos autores (basada en elementos finitos, la derivada con respecto a la forma y la resolución mediante métodos explícitos de barlovento para las ecuaciones de Hamilton-Jacobi) al problema de la evolución de la superficie de quiebre. Por simplicidad se considera un problema bidimensional asociado a la determinación de la superficie de quiebre en la etapa lateral del proceso de *caving*, la cual comienza en el momento en que la cavidad conecta con los niveles superiores de la mina (esto es, con "la superficie"). El modelo variacional, sin embargo, no está limitado al caso bidimensional, y se puede extender, usando las ideas descritas en este informe, al problema en tres dimensiones, a otro tipo de geometrías, a materiales con otras propiedades constitutivas y a problemas con diferentes tipos de condiciones de borde.

Teorema de existencia

Llamemos *configuración* a un par $(E, \mathbf{u})$ conformado por una cavidad E y un campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \Omega \setminus E \to \mathbb{R}^2$ definido en el "macizo rocoso" $\Omega \setminus E$. Nuestro teorema dice que entre todas las configuraciones imaginables $(E, \mathbf{u})$ existe una que es óptima comparada frente a todas las otras, o, más precisamente, que minimiza al funcional de energía

$$J(E, \mathbf{u}) := \int_{\Omega \setminus E} W(\nabla \mathbf{u}) - \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \kappa |E|. \tag{7.2}$$

Este resultado de existencia nos permite tener más confianza en el modelo variacional propuesto y en la posibilidad de aproximarlo computacionalmente, al demostrarnos que el problema cuenta con una buena estructura y con buenas propiedades matemáticas.

Desde el punto de vista técnico, el resultado se obtiene usando el método directo del cálculo de variaciones, utilizando la métrica de Hausdorff y el teorema de Blaschke para la compacidad de las cavidades, una cota a priori en el perímetro de las cavidades y la teoría de las funciones de variación acotada para obtener la convergencia en L^1 de las funciones características (necesaria para demostrar la continuidad de la energía de fractura al pasar al límite en una sucesión minimizante), y la extracción de subsucesiones diagonales y argumentos clásicos de semicontinuidad inferior para integrandos cuadráticos y convexos a la hora de recuperar la semicontinuidad de la energía elástica.

Es debido al uso de los ingredientes mencionados en el párrafo precedente, en especial al uso del teorema de Golab para establecer la correspondencia entre el límite de las cavidades usando la topología de Hausdorff y el límite obtenido mediante la teoría de las funciones de variación acotada, que nos es imposible estudiar en este momento el problema tridimensional. Esta falla, sin embargo, no es exclusiva del problema de la determinación de la superficie de quiebre: es un problema importante abierto en el cálculo de variaciones que de ser resuelto tendría implicaciones inmediatas en el estudio de los problemas de propagación de grietas en mecánica de fracturas, de segmentación de imágenes en visión computacional, en

la formación de rugosidad en superficies a nivel microscópico en materiales policristalinos y en el diseño de semiconductores, entre otros.

Implementación numérica

En la Sección 7.4 se describe el código fuente de la implementación en Matlab y Python del algoritmo variacional para la determinación de la superficie de quiebre. Entre las etapas del desarrollo del código se encuentran las siguientes: la elaboración de una rutina para la resolución mediante elementos finitos de problemas de minimización elípticos con coeficientes de difusión discontinuos; la resolución de problemas elípticos con términos de fuente singulares concentrados en superficies; la implementación numérica de un método de barlovento para la resolución de ecuaciones de transporte; la implementación de un algoritmo de redistanciamiento para las curvas de nivel; y el desarrollo de rutinas para la elaboración de gráficos y la visualización de los resultados.

7.2. El Modelo

7.2.1. Supuestos del modelo

1. *Caving lateral:*

   a) **Dominio computacional:** Ω es un rectángulo. El macizo rocoso ocupa la región $\Omega \setminus \chi_0$.

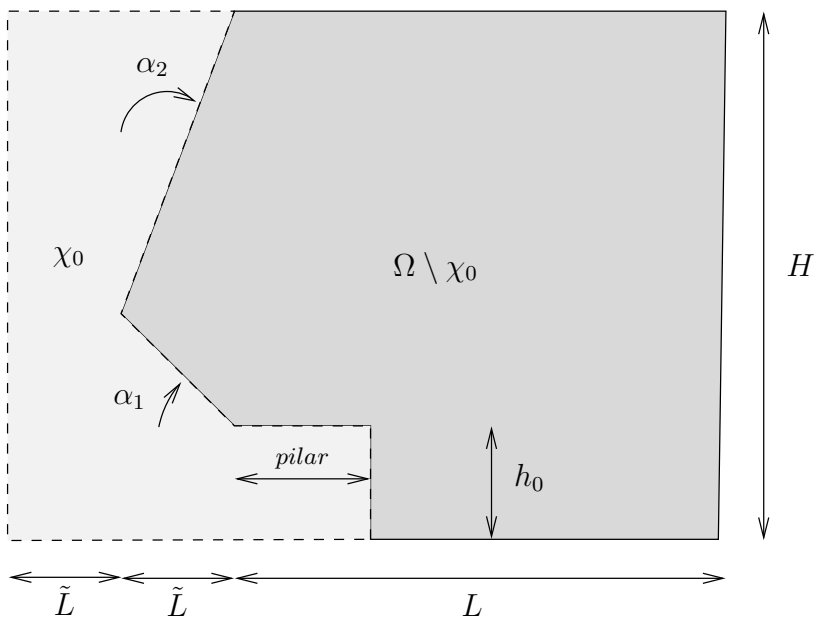


Figura 7.1: Dominio computacional caving lateral

   b) **Pilares (Fig. 7.2):** Llamamos ω_i a la base del pilar $\# i$.

   c) **Bateas (Fig. 7.3):** Suponemos que debajo de cada pilar hay una *batea* que conecta el *nivel de hundimiento*, o *nivel de socavación* (el nivel superior) con el *nivel de producción* (el nivel inferior). Cada batea puede estar o no en funcionamiento (i.e., la roca debajo de cada batea puede estar extrayéndose o no). Si el pilar $\# 1$ ha sido *hundido* (decimos también *tronado*, *dinamitado* o *quemado*) pero la batea $\# 1$ aún no está en funcionamiento, la roca molida del pilar $\# 1$ no caerá. Si la batea $\# 1$ entra en operación, el pilar $\#1$ empezará a caer. Éste caerá en forma gradual, a

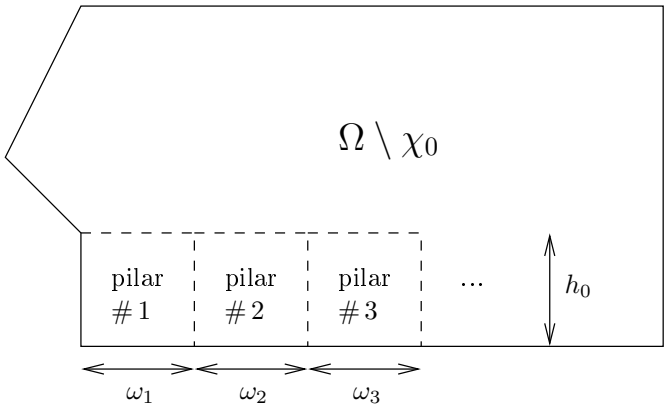


Figura 7.2: Pilares

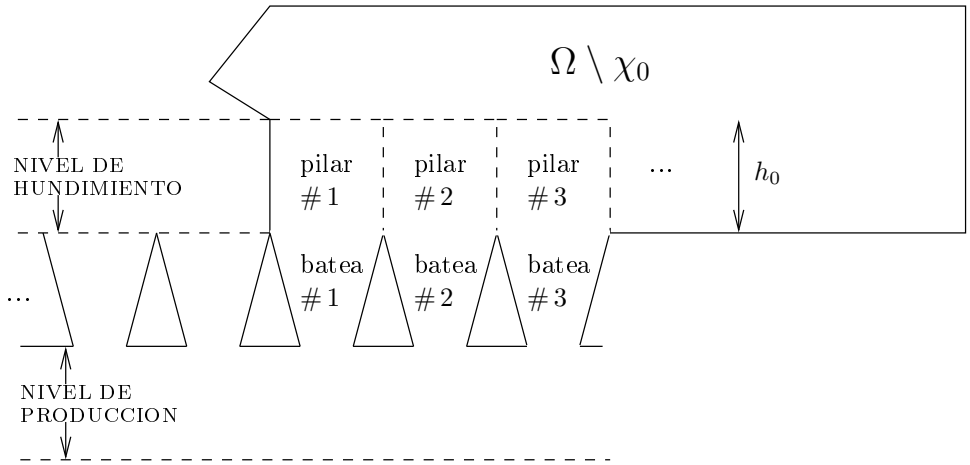


Figura 7.3: Bateas

medida que avance la extracción en el nivel de producción, sin embargo la parte del macizo rocoso sobre el pilar $\#1$ quedará inmediatamente sin sustento.

d) **Avance de la socavación y la extracción:**

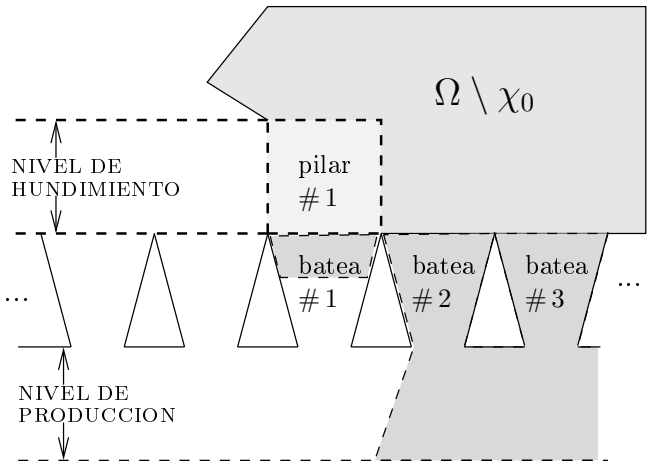


Figura 7.4: Situación anterior a la simulación: el pilar $\#1$ ha sido hundido pero la batea $\#1$ aún no entra en operación.

La simulación comienza en el instante inicial t_1 en que el pilar $\#2$ es hundido y la batea $\#1$ entra en operación (suponemos que suceden simultáneamente). Puesto que la parte del macizo sobre el

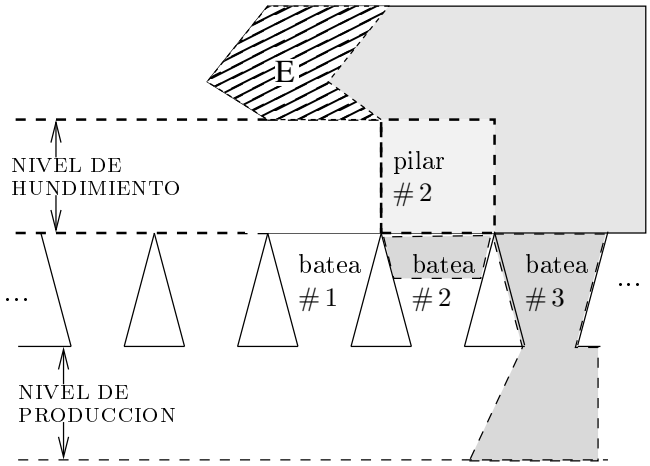


Figura 7.5: Instante inicial t_1: hundimiento del pilar $\# 2$ y puesta en marcha de la batea $\#1$.

pilar $\# 1$ queda sin sustento, consideramos que el pilar $\# 1$ desaparece (Fig. 7.5).

La Fig. 7.4 representa el instante inmediatamente anterior: el pilar $\#1$ ha sido hundido pero la batea $\# 1$ aún no comienza a operar. Suponemos que los ángulos α_1 y α_2 en la Fig. 7.4 tienen valores conocidos (los cuales se especifican más adelante en la matriz de escenarios).

No tomamos en cuenta el hecho de que el pilar $\#2$ haya sido hundido. Como la batea $\# 2$ aún no opera y el pilar aún no cae, consideramos que sigue formando parte del macizo rocoso, con sus mismas propiedades mecánicas.

Suponemos que el hundimiento de los pilares siguientes se rige por el siguiente criterio: en el instante t_1, el macizo rocoso incluye la región denotada por E en la Fig. 7.5. Esta parte del macizo empieza a desprenderse, por efecto de la gravedad, hasta el instante t_2 en que el ángulo que forma el macizo rocoso con la horizontal (α_1 en la Fig. 7.1) alcanza un valor crítico (el mismo que en el instante anterior al hundimiento del pilar $\# 2$, Fig. 7.4, el cual será especificado por el usuario como dato de entrada). En ese momento se detona el pilar $\# 3$ y se pone en funcionamiento la batea $\# 2$.

2. Macizo rocoso lineal elástico homogéneo e isotrópico (descrito por dos parámetros: los módulos de Young E y de Poisson ν; mismas propiedades mecánicas en tracción y en compresión). Densidad de energía elástica correspondiente a la deformación $\mathbf{u}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$

$$W(\nabla \mathbf{u}) = \mu |\mathbf{e}(\mathbf{u})|^2 + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} \mathbf{e}(\mathbf{u}))^2, \quad \mathbf{e}(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}. \tag{7.3}$$

Esfuerzos:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}) + \lambda(\operatorname{tr} \mathbf{e}(\mathbf{u}))\mathbf{I}. \tag{7.4}$$

3. Minimización de energía: postulamos que si nos restringimos a una porción determinada del macizo rocoso, sujeta a la acción de la fuerza de gravedad y a la compresión vertical y lateral del resto de la roca, dicha porción querrá deformarse, entre todas las maneras en que podría deformarse, de la manera en que el trabajo mecánico realizado para llegar a esa deformación sea el menor posible. Vemos el desprendimiento de roca como un recurso del que dispone la porción del macizo rocoso en consideración para liberar las tensiones y la energía acumuladas en su interior. Postulamos que el macizo rocoso

utilizará dicho recurso cada vez que la energía que se libere como resultado del desprendimiento de una de sus partes sea mayor al costo en términos de energía de fractura en el que deba incurrir. Este es el principio de minimización de energía en mecánica de fracturas, principio en el cual está basado, entre otros, el modelo de evolución cuasi-estática de daños de Francfort y Marigo [32, 31].

La cavidad generada por el desprendimiento de roca será estable si la ganancia en términos de energía liberada asociada al desprendimiento de una porción adicional del macizo no compensa el precio que hay que pagar en términos de energía de fractura. En este modelo suponemos que *la cavidad nunca alcanza una configuración estable*, habrá desprendimiento de roca siempre. Esto es porque antes de que alcance una configuración estable se pondrá en funcionamiento una nueva batea y desaparecerá otro pilar. La caída del mineral será modelada mediante un flujo de descenso, de acuerdo al cual se irán eliminando en forma sucesiva pequeñas porciones de roca alrededor de la superficie de quiebre guíados por el criterio de la minimización de la energía. En otras palabras, la ubicación y el volumen de cada porción de roca a eliminar serán escogidos en función del principio de maximización de la ganancia energética (energía liberada menos energía de fractura).

4. Suponemos que la energía disipada en el proceso de fractura es proporcional al volumen del mineral desprendido del macizo rocoso. En particular, el costo asociado al crecimiento de la cavidad es independiente tanto de la posición del material desprendido dentro del macizo rocoso, como de la dirección hacia la cual avanza la cavidad.
5. Condiciones de borde:
   - esfuerzos lejanos (presión vertical y lateral) sobre el macizo rocoso $\Omega \setminus \chi$ que suponemos se mantienen constantes en el tiempo.
   - Condición Dirichlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ en la parte inferior $\partial\Omega_D$ de $\partial\Omega$.
   - Condición de frontera libre $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{0}$ en $\partial\chi \cap \partial\Omega_N$, donde $\partial\Omega_N = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_D$.
6. Suponemos que es suficiente con triangular el dominio de una vez y para siempre.

7.2.2. Escenarios

Escenario	caving	pilar [m]	N	L [m]	socavación h_0 [m]	H (m)	α_1 [grados]	α_2 [grados]
a)	lateral	20	5	200	15	150	45	60
b)	lateral	20	5	200	15	150	30	60
c)	lateral	34	5	200	15	150	45	60
d)	lateral	34	5	200	15	150	30	60
e)	lateral	20	5	200	5	150	45	60
f)	lateral	20	5	200	5	150	30	60
g)	lateral	34	5	200	5	150	45	60
h)	lateral	34	5	200	5	150	30	60
i)	lateral	20	3	120	15	75	45	60

7.2.3. Notación

- $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \dfrac{\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T}{2}$.
- $\mathbf{I}$ es la matriz identidad.
- Los siguientes nos son dados al comienzo del programa como parámetros:
  - la densidad de masa ρ,
  - el prefactor η (e.g. 10^{-3}) para el módulo de Young y la densidad de masa en la cavidad (ver Sección 7.2.8, p. 284),
  - la aceleración de la gravedad $\mathbf{g} = (0, gravedad)$,
  - los esfuerzos lejanos laterales y verticales:

$$\mathbf{g}_{lat} = (presLateral, 0), \qquad \mathbf{g}_{sup} = (0, presVertical). \tag{7.5}$$

Tal como en [23], definimos

$$\rho_\chi(x,y) := \rho(1-\chi(x,y)) + \eta\rho\chi(x,y) \tag{7.6}$$

$$\mathbf{g}_\chi(x,y) := \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{si } x = 0 \text{ (lado izquierdo)}, \\ (1-\chi(x,y))\mathbf{g}_{sup}, & \text{si } y = H \text{ (parte superior)}, \\ \mathbf{g}_{lat}, & \text{si } y = 2\tilde{L} + L \text{ (lado derecho)}, \end{cases} \tag{7.7}$$

$$\mu_\chi(x,y) := \mu(1-\chi(x,y)) + \eta\mu\chi(x,y) \tag{7.8}$$

$$\lambda_\chi(x,y) := \lambda(1-\chi(x,y)) + \eta\lambda\chi(x,y). \tag{7.9}$$

Dada una deformación $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ denotamos el tensor de esfuerzos por

$$\boldsymbol{\sigma}_\chi(x,y) := 2\mu_\chi(x,y)\mathbf{e}(\mathbf{u}(x,y)) + \lambda_\chi(\operatorname{tr}\mathbf{e}(\mathbf{u}(x,y)))\mathbf{I}. \tag{7.10}$$

Llamamos $\mathbf{u}_\chi$ a la única solución del problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_\chi = \rho_\chi\mathbf{g}, & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u}_\chi(x,0) = \mathbf{0}, & \text{para todo } x, \\ \boldsymbol{\sigma}_\chi(x,y)\mathbf{n}(x,y) = \mathbf{g}_\chi(x,y), & \text{para todo } (x,y) \in \partial\Omega \text{ tal que } y > 0. \end{cases} \tag{7.11}$$

- Trabajaremos con una triangulación $\mathcal{T}_h = \{T_1, \ldots, T_{\mathbf{nele}}\}$ de Ω (suponemos que Ω es poligonal, lo cual se cumple en este caso en el que Ω es un rectángulo) tal que

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\mathbf{nele}} T_k, \qquad \operatorname{Int} T_k \cap \operatorname{Int} T_l = \varnothing \text{ si } k \neq l \qquad \text{y} \qquad \operatorname{diam} T_k < h \quad \forall\, k. \tag{7.12}$$

Ésta será representada por la siguiente estructura de datos:

  - Un arreglo $\mathbf{nnode} \in \mathbb{R}^{\mathbf{nnode}\times 2}$ cuyas filas contienen las coordenadas de los $\mathbf{nnode}$ nodos de la triangulación

- Un arreglo $\mathbf{ele} \in \mathbb{N}^{\mathbf{nele}\times 3}$ cuyas filas contienen los índices (esto es, los correspondientes números de fila en $\mathbf{node}$) de los vértices en sentido antihorario de los $\mathbf{nele}$ triángulos (también llamados elementos o símplices) de la triangulación.

El k-ésimo triángulo de $\mathcal{T}_h$ es entonces

$$T_k = \operatorname{conv}\left(\left\{\mathbf{node}(\mathbf{ele}(k,l),:) : l \in \{1,2,3\}\right\}\right), \tag{7.13}$$

donde conv denota la envoltura convexa.

- Dado $T \subset \mathbb{R}^2$ llamamos $\mathcal{P}^1(T)$ al conjunto de las funciones lineales con valores reales definidas en T. Dada una triangulación $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_{\mathbf{nele}}\}$ llamamos $\mathcal{P}^1(\mathcal{T})$ al conjunto de funciones

$$\mathcal{P}^1(\mathcal{T}) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tales que } f|_T \in \mathcal{P}^1(T)\ \forall\, T \in \mathcal{T}\}. \tag{7.14}$$

7.2.4. Método de descenso

Como situación inicial, estudiamos la evolución de la cavidad en el *caving lateral* a partir de una geometría inicial, sin tener en cuenta el proceso de socavación. Utilizamos el método iterativo de descenso propuesto por Allaire, Jouve & Van Goethem [23].

Parámetros/variables de entrada

- Socavación h_0 (altura del nivel de hundimiento)
- Otros parámetros del dominio: largo L, alto H, ángulo de extracción α_1, ángulo de subsidencia α_2. Calculamos $\tilde{L}$ (ver Fig. 7.6) a partir de la relación

$$\tilde{L} = \frac{H - h_0}{\tan\alpha_1 + \cot\alpha_2}. \tag{7.15}$$

- Constantes elásticas E y ν (módulos de Young y de compresibilidad) y densidad ρ del macizo rocoso:

E [Gpa]	ν	ρ [ton/m^3]
56	0.12	2.77

(Roca "CMET Hw", estimación mina Esmeralda sector entre XC-acceso 3 y XC-acceso 4.

Fuente: Alfredo Ponce, email del 7/05/12, datos provenientes de Seguel, J. 2009)

A partir de ellas calculamos las constantes de Lamé λ y μ (en [Gpa]; ver, e.g., [27, Sect. 3.8])

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{7.16}$$

- Presión (esfuerzos lejanos) lateral: 34 MPa,

$$\mathbf{g}_{lat}(x,y) = (presLateral, 0), \quad presLateral = -34 \cdot 10^6 \tag{7.17}$$

Fuente: charla de R. Bustamante reunión 26/04/2012

Tener cuidado al comparar $\mathbf{g}_{lat}$ (medido en MPa) y E (medido en GPa).

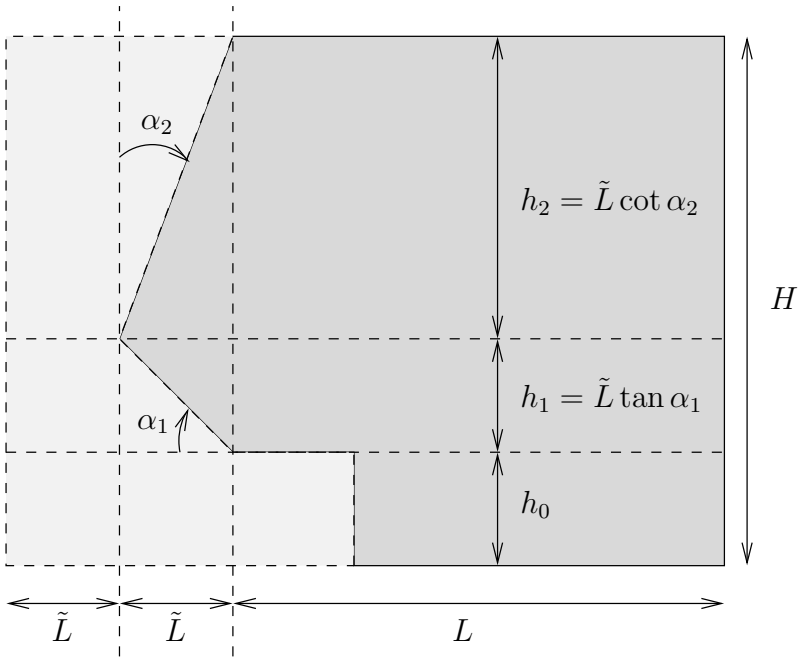


Figura 7.6: Determinación del ancho $\tilde{L}$

- Presión vertical: 16 MPa

$$\mathbf{g}_{sup}(x,y) = (0, presVertical), \quad presVertical = -16 \cdot 10^6 \tag{7.18}$$

Fuente: charla de R. Bustamante reunión 26/04/2012

- Aceleración de la gravedad: $gravedad = -9{,}8\, m/s^2$

$$\mathbf{g}(x,y) = (0, gravedad), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{7.19}$$

- Prefactor η para el módulo de Young y para la densidad de masa en el espacio vacío, valor por defecto: $\eta = 10^{-3}$ (ver Sección 7.2.8 en la p. 284).
- Tenacidad $\kappa > 0$ (energía de fractura disipada por unidad de volumen de roca desprendida). En los experimentos numéricos en [23, Sect. 6] utilizan los siguientes valores de κ (E^0 y E^1 denotan el módulo de Young en la parte sana y en la parte dañada del material, respectivamente)

E^1	E^0	κ
1000	500	1
1000	10^{-3}	3,5
3000	$3 \cdot 10^{-3}$	$1{,}4 \cdot 10^{-3}$
1	10^{-3}	10^{-7}
1000	10^{-3}	8000
10000	1	1

(7.20)

es decir, κ debe ser determinado a prueba y error. Para una roca con módulo de Young del orden de $56 \cdot 10^9$ proponemos que κ esté dado inicialmente por $\kappa = 10^3$, y que este valor se modifique de acuerdo a los resultados de las simulaciones (a mayor κ, menor será la velocidad de propagación de la cavidad).

Incógnitas/variables de salida

- Una sucesión creciente de cavidades (de funciones características)

$$\chi^0 \leq \chi^1 \leq \chi^2 \leq \cdots \leq \chi_\Omega$$

  correspondientes a los pasos $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, ... del ciclo que define el método iterativo de descenso
- Una sucesión de desplazamientos $(u^k(x,y), v^k(x,y))$ obtenida mediante el método iterativo de descenso (el desplazamiento $k+1$ tendrá menos energía que el k). Queremos encontrar, en cada paso k del ciclo, un campo de desplazamientos (u^k, v^k) definido en todo el dominio computacional Ω (no sólo en $\Omega \setminus \chi^k$).

Preliminares

- *Discretización del dominio:* Realizamos una partición del dominio rectangular $\Omega = [0, 2\tilde{L} + L] \times [0, H]$ en pequeños rectángulos de ancho δ_x y alto δ_y. Dividimos cada rectángulo en dos triángulos rectángulos trazando una diagonal. A cada uno de los triángulos resultantes lo llamaremos un *elemento* de la triangulación. Elegimos un mallado de este tipo ya que el método con el que resolvemos la ecuación de Hamilton-Jacobi (7.50) así lo requiere (ver, sin embargo, la Sección 7.2.11, p. 300, en donde se detalla un algoritmo para la resolución de la ecuación de Hamilton-Jacobi en elementos finitos arbitrarios).
- *Inicialización de la función de nivel:* Llamamos χ^0 a la cavidad inicial y definimos la función de nivel inicial ψ^0

$$\psi^0(x,y) := \begin{cases} -d(x,y) & \text{si } (x,y) \in \chi^0 \\ d(x,y) & \text{si } (x,y) \in \Omega \setminus \chi^0 \end{cases} \tag{7.21}$$

  i.e.,

$$\psi_0(x,y) := \Big(1 - 2\chi_0(x,y)\Big) \cdot d(x,y), \tag{7.22}$$

  donde $d(x,y)$ es la función distancia a la interfaz (en la sección 7.2.6, p. 280 se propone una manera de calcularla).
- *Cálculo de los esfuerzos iniciales:* Calculamos el campo de desplazamientos (u^0, v^0) asociado a la

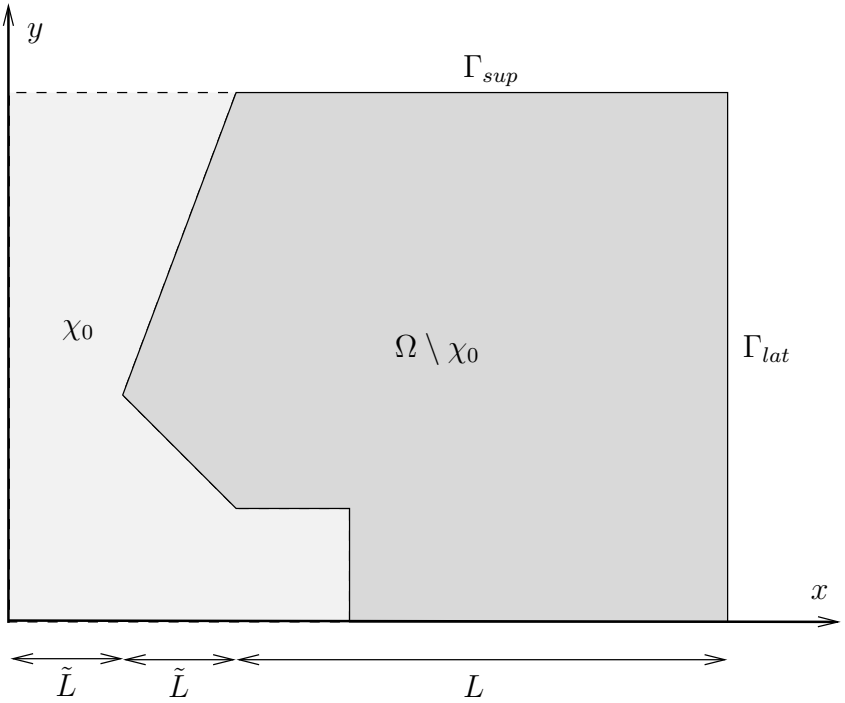


Figura 7.7: Partes Neumann de la frontera

cavidad χ^0 minimizando el funcional

$$\int_{\Omega\setminus\chi^0} \left[\mu|\mathbf{e}(\mathbf{u})|^2 + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\mathbf{e}(\mathbf{u}))^2 - \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{u}\right] \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{7.23}$$

$$- \int_{\Gamma_{sup}} \mathbf{g}_{sup}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S(x,H) - \int_{\Gamma_{lat}} \mathbf{g}_{lat}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}S(L,y) \tag{7.24}$$

$$= \int_{\Omega\setminus\chi^0} \left[\frac{1}{2}(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right) - gravedad\cdot\rho v\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{7.25}$$

$$- presLateral \int_{x=2\tilde{L}}^{2\tilde{L}+L} v(x,H)\,\mathrm{d}x - presVertical \int_{y=0}^{H} u(2\tilde{L}+L,y)\,\mathrm{d}y, \tag{7.26}$$

(Γ_{sup} y Γ_{lat} se muestran en la Figura 7.7) bajo la restricción

$$u(x,0) = v(x,0) = 0 \quad \text{para todo } x. \tag{7.27}$$

- *Observaciones:*
  - Hemos elegido la esquina inferior izquierda de Ω (ver Fig. 7.7) como origen del sistema de coordenadas
  - Los desplazamientos y distancias están siendo medidas en metros
  - La fuerza está siendo medida en newtons $N = kg\cdot m/s^2$
  - La energía está siendo medida en joules $J = N\cdot m$
  - La unidad de peso utilizada es el kilogramo. Hemos cambiado de $\rho = 2770$ kg/m^3 a $\rho = 2770$ kg/m^2 en esta versión bidimensional del problema.

- También el pascal $Pa = N/m^2$ (fuerza por unidad de área) lo estamos reinterpretando como N/m (fuerza por unidad de longitud).
- Los esfuerzos lejanos están siendo medidos en pascales Pa. Junto con la integral de v sobre Γ_{sup}, obtenemos una cantidad medida en

$$\underbrace{Pa \cdot m \cdot m}_{presVertical \cdot v \cdot \mathrm{d}x} = (N/m) \cdot m^2 = N \cdot m = J. \tag{7.28}$$

- Hay que tener cuidado al reemplazar los valores de λ y μ, los cuáles vienen dados en $GPa = 10^9 Pa$.
- *Coeficientes discontinuos.* Lo más conveniente es calcular los esfuerzos de dos maneras distintas: primero, minimizando la energía solamente en el macizo rocoso $\Omega \backslash \chi^0$; segundo, resolviendo el sistema en todo el dominio computacional Ω y no sólo en $\Omega \backslash \chi^0$, usando coeficientes de Lamé discontinuos (ver sección "coeficientes discontinuos" en la página 284). Puesto que en el algoritmo de minimización alternada los esfuerzos tendrán que calcularse muchas veces (cada vez que crezca un poco la cavidad), y dado que sería muy costoso estar discretizando un nuevo dominio en cada iteración, es importante calcular los esfuerzos usando un dominio fijo y coeficientes discontinuos. Por otra parte, en el instante inicial, el que estamos describiendo en este momento, el macizo rocoso inicial es conocido, y conviene discretizarlo directamente y calcular los esfuerzos minimizando la energía sólo en $\Omega \setminus \chi^0$, para efectos de comparación y validación del método de minimización de energía utilizando elementos finitos, un dominio fijo y coeficientes discontinuos. El método consiste en minimizar el funcional

$$J_{elast}(\mathbf{u}, \chi) = \int_\Omega \left[\mu_\chi |\mathbf{e}(\mathbf{u}_\chi)|^2 + \frac{\lambda_\chi}{2}(\operatorname{tr} \mathbf{e}(\mathbf{u}_\chi))^2 - \rho_\chi \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_\chi\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega \cap \{y>0\}} \mathbf{g}_\chi \cdot \mathbf{u}_\chi \,\mathrm{d}S \tag{7.29}$$

$$= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(1-(1-\eta)\chi(x,y))(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right. \tag{7.30}$$

$$+ \frac{1}{2}(1-(1-\eta)\chi(x,y))\mu\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right) \tag{7.31}$$

$$\left. - gravedad \cdot (1-(1-\eta)\chi(x,y))\rho v\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{7.32}$$

$$- presLateral \cdot \int_{x=0}^{2\tilde{L}+L} (1-\chi(x,H))v(x,H)\,\mathrm{d}x \tag{7.33}$$

$$- presVertical \cdot \int_{y=0}^{H} u(2\tilde{L}+L, y)\,\mathrm{d}y, \tag{7.34}$$

con respecto a $\mathbf{u} = (u, v)$ (fijando $\chi = \chi^0$; η, ρ, λ y μ han sido dados como datos de entrada), bajo la restricción

$$u(x,0) = v(x,0) = 0 \quad \text{para todo } x. \tag{7.35}$$

La forma débil de la ecuación de Euler-Lagrange está dada por

$$\int_\Omega \Bigg[(1-(1-\eta)\chi(x,y))(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\right) \tag{7.36}$$

$$+(1-(1-\eta)\chi(x,y))\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right) \tag{7.37}$$

$$-\,gravedad\cdot(1-(1-\eta)\chi(x,y))\rho\tilde{v}(x,y)\Bigg]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{7.38}$$

$$-\,presLateral\cdot\int_{x=0}^{2\tilde{L}+L}(1-\chi(x,H))\tilde{v}(x,H)\,\mathrm{d}x \tag{7.39}$$

$$-\,presVertical\cdot\int_{y=0}^{H}\tilde{u}(2\tilde{L}+L,y)\,\mathrm{d}y, \tag{7.40}$$

(con $\chi=\chi^0$) para todo par $(\tilde{u},\tilde{v})\in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ de funciones test tal que

$$\tilde{u}(x,0)=\tilde{v}(x,0)=0 \quad \text{para todo } x\in[0,2\tilde{L}+L]. \tag{7.41}$$

Ciclo principal

Iteración desde $k=0$ hasta $k=\infty$:

1. Suponemos que conocemos la cavidad χ^k, la correspondiente función de nivel ψ^k y el correspondiente campo de desplazamientos $\mathbf{u}^k=(u^k,v^k):\Omega\to\mathbb{R}^2$.
2. Calcular la derivada con respecto a la cavidad, de la siguiente manera (posponemos la explicación hasta la sección 7.2.9, p. 295): en cada elemento del mallado, calcular

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla\psi^k(x,y)}{|\nabla\psi^k(x,y)|},\quad \mathbf{n}^\perp=\frac{(-\frac{\partial\psi^k}{\partial y}(x,y),\frac{\partial\psi^k}{\partial x}(x,y))}{|\nabla\psi^k(x,y)|}, \tag{7.42}$$

luego

$$e^k_{tt}(x,y)=\mathbf{n}^\perp\cdot\Big(\mathbf{e}(\mathbf{u}^k(x,y)))\mathbf{n}^\perp\Big) \tag{7.43}$$

$$e^k_{nn}(x,y)=\mathbf{n}\cdot\Big(\mathbf{e}(\mathbf{u}^k(x,y))\mathbf{n}\Big), \tag{7.44}$$

$$e^k_{tn}(x,y)=\mathbf{n}^\perp\cdot\Big(\mathbf{e}(\mathbf{u}^k(x,y))\mathbf{n}\Big) \tag{7.45}$$

y, finalmente,

$$\mathcal{E}(x,y):=\mu^k\Big((e^k_{nn})^2+2(e^k_{tn})^2-(e^k_{tt})^2\Big)+\frac{\lambda^k}{2}(\operatorname{tr}\mathbf{e}(\mathbf{u}^k(x,y)))(e^k_{nn}-e^k_{tt}), \tag{7.46}$$

$$\mathcal{D}(x,y)=\kappa+(1-\eta)\rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{u}^k+2\big((1-\chi^k)\mathcal{E}-\chi^k\mathcal{E}\big), \tag{7.47}$$

siendo λ^k y μ^k las funciones λ_χ y μ_χ (definidas en la sección de notación) correspondientes a $\chi=\chi^k$.

3. Calcular el frente de velocidad $\mathcal{V}^k$ resolviendo la ecuación

$$\int_\Omega (\nabla \mathcal{V}^k \cdot \nabla v + \mathcal{V}^k v)\,\mathrm{d}V = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(s_\varepsilon \circ \psi^k)|\mathcal{D}v\,\mathrm{d}V \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega), \tag{7.48}$$

con

$$\nabla(s_\varepsilon \circ \psi^k)(x,y) = \frac{\varepsilon^2 \nabla\psi^k(x,y)}{(\psi^k(x,y)^2+\varepsilon^2)^{3/2}}, \qquad \left(s_\varepsilon(t) := \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}\right). \tag{7.49}$$

El parámetro ε se elige de forma tal que sea pequeño pero a la vez permita reemplazar la integral $-\int_\Sigma \mathcal{D}v\,\mathrm{d}S$ por una integral que involucre unos pocos elementos alrededor de la interfaz Σ. En nuestros cálculos numéricos definimos ε como cinco veces la longitud del segmento más largo de la malla que es parte de la interfaz (elección para la cual la integral se calcula sobre una banda de unos 10 elementos de ancho alrededor de la interfaz).

4. Calcular ψ^{k+1} resolviendo la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} + \mathcal{V}|\nabla\psi| = 0 \tag{7.50}$$

con condición inicial ψ^k, el frente de velocidad $\mathcal{V}^k$ calculado en la parte anterior y después de un pseudo-espacio de tiempo δs_k escogido de modo que $J(\chi^{k+1}) \le J(\chi^k)$.

Allaire-Jouve-Van Goethem resuelven esta ecuación con un método explícito de barlovento (*upwind*) en una malla Cartesiana [23, final de la p. 5028]. Por simplicidad, en el presente documento se detalla la implementación de un método de barlovento de primer orden, sin embargo existen métodos de orden superior que pueden ser utilizados en caso de ser necesario.

a) Asumimos que estamos trabajando en una malla Cartesiana con triángulos rectángulos de lados δ_x y δ_y. Llamemos $\psi^k_{i,j}$ y $\mathcal{V}^k_{i,j}$ al valor de ψ^k y $\mathcal{V}^k$ en el nodo (i,j). El nodo $(i,j+1)$ está por encima de (i,j).

b) Calcular

$$G^k_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\operatorname{máx}\{a_+^2, b_-^2\} + \operatorname{máx}\{c_+^2, d_-^2\}}, & \text{si } \psi^k_{i,j} > 0 \\ \sqrt{\operatorname{máx}\{a_-^2, b_+^2\} + \operatorname{máx}\{c_-^2, d_+^2\}}, & \text{si } \psi^k_{i,j} < 0, \end{cases} \tag{7.51}$$

donde $\zeta_+ = \operatorname{máx}\{\zeta, 0\}$ y $\zeta_- = \operatorname{mín}\{\zeta, 0\}$ (para $\zeta \in \{a,b,c,d\}$), siendo

$$a = D_x^- \psi^k_{i,j} = \frac{\psi^k_{i,j} - \psi^k_{i-1,j}}{\delta_x}, \tag{7.52}$$

$$b = D_x^+ \psi^k_{i,j} = \frac{\psi^k_{i+1,j} - \psi^k_{i,j}}{\delta_x}, \tag{7.53}$$

$$c = D_y^- \psi^k_{i,j} = \frac{\psi^k_{i,j} - \psi^k_{i,j-1}}{\delta_y}, \tag{7.54}$$

$$d = D_y^+ \psi^k_{i,j} = \frac{\psi^k_{i,j+1} - \psi^k_{i,j}}{\delta_y} \tag{7.55}$$

(en la p. 297 se ofrece una breve explicación).

c) Si un elemento es atravesado por la interfaz $\psi^k = 0$, esto es, si tenemos alguna de las dos situaciones siguientes:

1) el elemento es el triángulo T con vértices P, Q y R, los cuales son tales que $\psi(P) < 0$, $\psi(Q) < 0$ y $\psi(R) \geq 0$, o bien tales que $\psi(P) \leq 0$, $\psi(Q) \leq 0$ y $\psi(R) > 0$; ó
2) el elemento es el triángulo con vértices P, Q y R, los cuales son tales que $\psi(P) > 0$, $\psi(Q) > 0$ y $\psi(R) \leq 0$, o bien tales que $\psi(P) \geq 0$, $\psi(Q) \geq 0$ y $\psi(R) < 0$.

recalcular $G^k_{i,j}$, donde (i,j) es el nodo correspondiente al vértice R, mediante la siguiente fórmula:

$$G^k_{i,j} := \frac{\left\| \frac{\overrightarrow{PR}}{|\psi^k(R)-\psi^k(P)|} + \frac{\overrightarrow{RQ}}{|\psi^k(Q)-\psi^k(R)|} \right\|}{\left| \det\left(\frac{\overrightarrow{PR}}{|\psi^k(R)-\psi^k(P)|}, \frac{\overrightarrow{RQ}}{|\psi^k(Q)-\psi^k(R)|} \right) \right|}. \tag{7.56}$$

Si los elementos son triángulos rectángulos de ancho δ_x y alto δ_y, la fórmula es equivalente a

$$G^k_{i,j} := \frac{\sqrt{|\psi^k(Q)-\psi^k(R)|^2 \|\overrightarrow{PR}\|^2 + |\psi^k(R)-\psi^k(P)|^2 \|\overrightarrow{RQ}\|^2}}{\delta_x \delta_y}. \tag{7.57}$$

La fórmula (7.56) se explica en la Sección 7.2.10 (página 298).

d) Elegir un paso de tiempo δs_k. La condición CFL (de Courant-Friedrichs-Lewy) para el método a implementar es del tipo $\delta s_k < \delta_x$ [35, p. 7], por lo cual se recomienda definir inicialmente δs_k, por ejemplo, como $\delta s_k = \frac{1}{10}\delta_x$ (el factor $\frac{1}{10}$ es arbitrario). En caso de ser necesario, el paso de tiempo puede reducirse.

e) Guardar una copia de los valores de $\psi^k_{i,j}$, u^k, v^k y χ^k, en caso que haya que recomenzar desde este punto del ciclo según se indica en el paso 4*i*).

f) Actualizar ψ usando la ecuación

$$\psi^{k+1}_{i,j} = \psi^k_{i,j} - \delta s_k \mathcal{V}^k_{i,j} G^k_{i,j} \tag{7.58}$$

g) Calcular la nueva función característica

$$\chi^{k+1}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(x,y) \geq 0 \\ 0 & \text{si } \psi(x,y) < 0 \end{cases} \tag{7.59}$$

h) Calcular el nuevo campo de desplazamientos $\mathbf{u}^{k+1} = (u^{k+1}, v^{k+1}) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ minimizando $J_{elast}(\mathbf{u}, \chi^{k+1})$, donde J_{elast} es el funcional de energía elástica definido en la página 271, bajo la restricción

$$u(x,0) = v(x,0) = 0 \quad \text{para todo } x. \tag{7.60}$$

De ser posible, incorporar el campo de desplazamientos anterior (u^k, v^k) como condición inicial para una mayor eficiencia.

i) Si $J\big((u^{k+1}, v^{k+1}), \chi^{k+1}\big) \geq J\big((u^k, v^k), \chi^k\big)$, donde $J(\mathbf{u}, \psi)$ es el funcional de energía

$$J(\mathbf{u}, \chi) = J_{elast}(\mathbf{u}, \chi) + \kappa \int_\Omega \chi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \tag{7.61}$$

dividir el paso de tiempo δs_k a la mitad y recomenzar desde el paso 4*f*) (con los valores anteriores de χ^k, ψ^k, u^k y v^k).

5. *Irreversibilidad:* aseguramos la irreversibilidad de la evolución de la cavidad procediendo como Allaire-Jouve-Van Goethem en [23], reemplazando χ^{k+1} por $\text{máx}(\chi^{k+1}, \chi^0)$ y restableciendo el valor anterior de ψ

$$\psi_{i,j}^{k+1} = \psi_{i,j}^{k} \tag{7.62}$$

si $\psi_{i,j}^{k} < 0$ y $\psi_{i,j}^{k+1} > 0$ (recordemos que $\psi < 0$ en la cavidad, ver eq. (7.21)).

6. *Reinicialización de la función de nivel:* como vimos anteriormente, la derivada con respecto a la forma involucra componentes normales y tangenciales de los tensores de deformación y esfuerzos, en donde las direcciones normal y tangente se definen tomando como referencia el vector $\mathbf{n} = \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}$. Sin embargo, al actualizar ψ^{k+1} (primero siguiendo la ecuación de transporte, después restableciendo los valores anteriores en la región en donde se haya violado la irreversibilidad) algunas curvas de nivel pueden quedar muy cerca, o muy lejos, unas de otras (Fig. 7.8), lo cual puede producir inestabilidad y falta de convergencia [34, 36]. Otra posible dificultad es que la manera como se propaga la cavidad se vea afectada por una inicialización de ψ de mala calidad, tal como se menciona en [23].

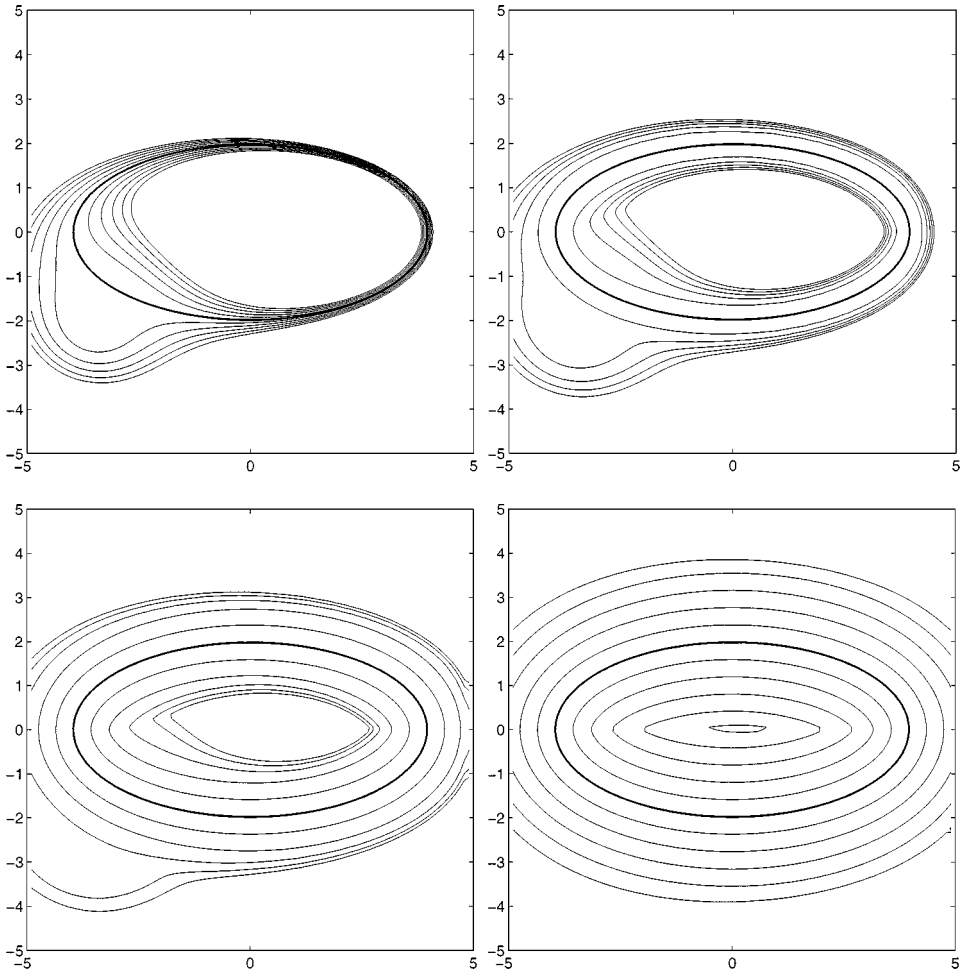


FIG. 9. The results of applying the new method for the initial conditions given by (24). The domain is $\Omega = [-5, 5] \times [-5, 5]$ and we are using a 200×200 grid $\Delta t = 0.5\Delta x$. The number of iterations is $0, 10, 25, 50$ starting from the top left and finishing in the lower right. The contours run from -1 to 1 and are spaced by 0.2.

Figura 7.8: Reinicialización de la función de nivel [35, Fig. 9]

Para remediar esto, en [23] la función ψ^{k+1} se reinicializa usando el método de Russo & Smereka [35]. El método consiste en dejar que $\phi = \psi^{k+1}$ evolucione según la ecuación

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \operatorname{sgn}(\phi^{(0)})(1 - |\nabla \phi|), \tag{7.63}$$

vista como ecuación de Hamilton-Jacobi con la superficie de la cavidad como fuente de información. En la ecuación anterior la función signo se define como

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{7.64}$$

Concretamente, el método es el siguiente:

a) Para cada (i, j), llamar $\phi_{i,j}^{(0)}$ al valor de $\psi_{i,j}^{k+1}$.

b) Marcar los nodos (i, j) tales que

$$\phi_{i,j}^{(0)}\phi_{i-1,j}^{(0)} < 0, \quad \phi_{i,j}^{(0)}\phi_{i+1,j}^{(0)} < 0, \quad \phi_{i,j}^{(0)}\phi_{i,j-1}^{(0)} < 0 \quad \text{ó} \quad \phi_{i,j}^{(0)}\phi_{i,j+1}^{(0)} < 0 \tag{7.65}$$

(i.e., nodos que están a menos de un punto en la malla de la interfaz $\phi = 0$). Al conjunto de tales nodos lo llamaremos $\Sigma^{(0)}$.

c) Para cada $(i, j) \in \Sigma^{(0)}$, calcular una expresión $m_{i,j}$ que refleje, en forma aproximada, la máxima derivada direccional de $\phi^{(0)}$ al pasar de un extremo al otro de un rectángulo de la malla Cartesiana. Si fuera un problema unidimensional, la sugerencia de [35, pp. 7,8] de definir m_i como $\frac{|\phi_{i+1}-\phi_{i-1}|}{2\delta_x}$, o a partir de una fórmula más robusta como

$$m_i := \text{máx}\left\{\frac{|\phi_{i+1} - \phi_i|}{2\delta_x}, \frac{|\phi_{i+1} - \phi_i|}{\delta_x}, \frac{|\phi_i - \phi_{i-1}|}{\delta_x}, \varepsilon\right\}, \tag{7.66}$$

donde ε es algún número pequeño, es intuitiva y no requiere explicación.

Para el caso bidimensional, sugieren calcular $m_{i,j}$ a partir de la expresión

$$m_{i,j} := \sqrt{\frac{|\phi_{i+1,j}^{(0)} - \phi_{i-1,j}^{(0)}|^2}{(2\delta_x)^2} + \frac{|\phi_{i,j+1}^{(0)} - \phi_{i,j-1}^{(0)}|^2}{(2\delta_y)^2}}, \tag{7.67}$$

la cual es quizás menos intuitiva que en el caso unidimensional pero está probada por Russo & Smereka numéricamente. También es posible utilizar una fórmula más robusta como

$$m_{i,j} := \text{máx}\left\{\sqrt{\frac{|\phi_{i+1,j}^{(0)} - \phi_{i-1,j}^{(0)}|^2}{(2\delta_x)^2} + \frac{|\phi_{i,j+1}^{(0)} - \phi_{i,j-1}^{(0)}|^2}{(2\delta_y)^2}}, \right. \tag{7.68}$$

$$\frac{|\phi_{i+1,j}^{(0)} - \phi_{i,j}^{(0)}|}{\delta_x}, \frac{|\phi_{i,j}^{(0)} - \phi_{i-1,j}^{(0)}|}{\delta_x}, \tag{7.69}$$

$$\left. \frac{|\phi_{i,j+1}^{(0)} - \phi_{i,j}^{(0)}|}{\delta_y}, \frac{|\phi_{i,j}^{(0)} - \phi_{i,j-1}^{(0)}|}{\delta_y}, \varepsilon\right\}. \tag{7.70}$$

d) Para cada $(i,j) \in \Sigma^{(0)}$, calcular

$$D_{i,j} = \frac{|\phi_{i,j}^{(0)}|}{m_{i,j}}. \tag{7.71}$$

Esta es una aproximación numérica de la distancia desde el nodo (i,j) a la interfaz $\phi^{(0)} = 0$. La fórmula proviene del hecho de que si el problema fuera unidimensional y $\phi^{(0)}$ fuera una función lineal se tendría que $m_{i,j} = \frac{\phi_{i,j}-0}{D_{i,j}}$ (dado que $\phi^{(0)}$ se anula en la interfaz).

e) Para cada $(i,j) \in \Sigma^{(0)}$, calcular la cantidad auxiliar

$$\begin{aligned} aux_{i,j} := \text{máx}\Bigg\{ & \sqrt{\left|\frac{\phi_{i+1,j}^{(0)} - \phi_{i-1,j}^{(0)}}{2}\right|^2 + \left|\frac{\phi_{i,j+1}^{(0)} - \phi_{i,j-1}^{(0)}}{2}\right|^2}, \\ & |\phi_{i+1,j}^{(0)} - \phi_{i,j}^{(0)}|,\ |\phi_{i,j}^{(0)} - \phi_{i-1,j}^{(0)}|, |\phi_{i,j+1}^{(0)} - \phi_{i,j}^{(0)}|,\ |\phi_{i,j}^{(0)} - \phi_{i,j-1}^{(0)}|,\ |\phi_{i,j}^{(0)}| \Bigg\}. \end{aligned} \tag{7.72}$$

f) Para cada (i,j), definir la siguiente versión regularizada de la función $\operatorname{sgn}(\phi(x,y))$ (inspirada en [35, eq. (14)])

$$S_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{\phi_{i,j}^{(0)}}{aux_{i,j}} & \text{si } (i,j) \in \Sigma^{(0)}, \\[2ex] \operatorname{sgn}(\phi_{i,j}^{(0)}), & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{7.73}$$

g) Iterar unas pocas veces el siguiente algoritmo:

1) Tal como en (7.51), calcular

$$G_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} \sqrt{\text{máx}\{a_+^2, b_-^2\} + \text{máx}\{c_+^2, d_-^2\}}, & \text{si } \phi_{i,j}^{(0)} > 0 \\[2ex] \sqrt{\text{máx}\{a_-^2, b_+^2\} + \text{máx}\{c_-^2, d_+^2\}}, & \text{si } \phi_{i,j}^{(0)} < 0, \end{cases} \tag{7.74}$$

donde $\zeta_+ = \text{máx}\{\zeta, 0\}$ y $\zeta_- = \text{mín}\{\zeta, 0\}$ (para $\zeta \in \{a,b,c,d\}$), siendo

$$a = D_x^- \phi_{i,j}^{(n)} = \frac{\phi_{i,j}^{(n)} - \phi_{i-1,j}^{(n)}}{\delta_x}, \tag{7.75}$$

$$b = D_x^+ \phi_{i,j}^{(n)} = \frac{\phi_{i+1,j}^{(n)} - \phi_{i,j}^{(n)}}{\delta_x}, \tag{7.76}$$

$$c = D_y^- \phi_{i,j}^{(n)} = \frac{\phi_{i,j}^{(n)} - \phi_{i,j-1}^{(n)}}{\delta_y}, \tag{7.77}$$

$$d = D_y^+ \phi_{i,j}^{(n)} = \frac{\phi_{i,j+1}^{(n)} - \phi_{i,j}^{(n)}}{\delta_y} \tag{7.78}$$

(en la p. 297 se ofrece una breve explicación). La diferencia con (7.51) es que la dirección desde donde proviene la información se determina usando los valores iniciales $\phi^{(0)}$ en vez de los valores actuales $\phi^{(n)}$.

2) Si $(i,j) \in \Sigma^{(0)}$, redefinir $G_{i,j}^{(n)}$ como

$$G_{i,j}^{(n)} := \frac{|\phi_{i,j}^{(n)}|}{D_{i,j}} \tag{7.79}$$

Las razones por las que esta modificación es conveniente (y en ocasiones necesaria) se exponen en [35, Sect. 3]. En forma resumida, el método de barlovento funciona bien siempre que las cantidades involucradas se calculen desde donde viene la información, en este caso desde la interfaz, luego hay que evitar que se estén consultando valores de $\phi^{(n)}$ del otro lado de la interfaz (por esto se aproxima el gradiente como $\frac{\phi^{(n)}-0}{D_{i,j}}$, i.e., se toman como referencia a la interfaz y al hecho de que $\phi^{(n)} = 0$ en la interfaz, no a los valores que están del otro lado).

3) Definir

$$\phi_{i,j}^{(n+1)} = \phi_{i,j}^{(n)} + \delta s \cdot S_{i,j} \cdot (1 - G_{i,j}^{(n)}). \tag{7.80}$$

El criterio CFL para escoger el paso de tiempo es $\delta s < \text{mín}\{\delta_x, \delta_y\}$ (de acuerdo a [35, p. 7]).

h) Redefinir $\psi_{i,j}^{k+1}$ como el último valor calculado de $\phi_{i,j}^{(n)}$.

7.2.5. Avance de la socavación

El modelo completo para la determinación de la evolución de la superficie de quiebre consta de dos partes, dos ciclos anidados, uno *exterior* que considera la evolución de las condiciones de borde (en este caso el avance de la socavación), y otro *interior* en el que se resuelve, para cada instante t_i del ciclo exterior, el problema de minimización alternada mediante el método iterativo de descenso de Allaire, Jouve & Van Goethem [23] descrito en la Sección 7.2.4.

Eliminación de un pilar

Al momento de eliminar el pilar $\omega_i \times [0, h_0]$, con $\omega_i = (izqPilar_i, derPilar_i) \subset (0, L + 2\tilde{L})$ (ver Figura 7.7, p. 270; inicialmente $izqPilar_2 = 2\tilde{L} + pilar$ y $derPilar_2 = 2\tilde{L} + 2pilar$, donde $pilar$ es el largo de los pilares especificado en el escenario de la Sección 7.2.2 elegido para la simulación), proponemos actualizar la función de nivel ψ a partir de las siguientes expresiones. Usamos la notación de (7.13) y escribimos nuestras ecuaciones directamente en la versión discretizada $\mathbf{psi} \in \mathbb{R}^{\mathbf{nnode}}$ de la función de nivel $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$, dada por

$$\mathbf{psi}(j) = \psi\Big(\mathbf{node}(j,:)\Big), \qquad j = 1, \ldots, \mathbf{nnode}. \tag{7.81}$$

Para cada $j = 1, \ldots, \mathbf{nnode}$,

1. Sean $x = \mathbf{node}(j,1)$ e $y = \mathbf{node}(j,2)$.
2. Si $x <= derPilar_i$, $y >= h_0$ y $\mathbf{psi}(j) >= 0$,

$$dist = y - h_0; \tag{7.82}$$

$$\mathbf{psi}(j) = \mathbf{psi}(j) * dist/(1 + dist); \tag{7.83}$$

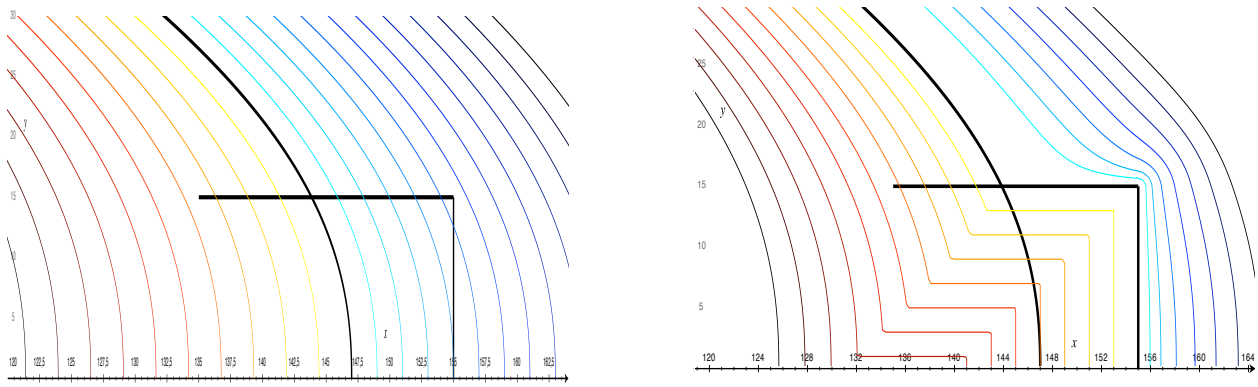


Figura 7.9: Curvas de nivel antes y después de la eliminación de un pilar

3. Si $x >= derPilar_i$, $y >= h_0$ y $\mathbf{psi}(j) >= 0$,

$$dist = \sqrt{(x - derPilar_i)^2 + (y - h_0)^2}; \tag{7.84}$$

$$\mathbf{psi}(j) = \mathbf{psi}(j) * dist/(1 + dist); \tag{7.85}$$

4. Si $x >= derPilar_i$, $y < h_0$ y $\mathbf{psi}(j) >= 0$,

$$dist = x - derPilar_i; \tag{7.86}$$

$$\mathbf{psi}(j) = \mathbf{psi}(j) * dist/(1 + dist); \tag{7.87}$$

5. Si $x <= derPilar_i$ e $y < h_0$,

$$dist = \text{mín}\{derPilar_i - x, h_0 - y\} \tag{7.88}$$

$$\mathbf{psi}(j) = \text{mín}\{\mathbf{psi}(j), -dist\}. \tag{7.89}$$

Tras actualizar ψ del modo descrito anteriormente, proponemos reinicializar ψ usando el método de Russo & Smereka [35] (explicado en el paso 6 del ciclo principal, p. 275), recalcular la función característica de la cavidad

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(x, y) \geq 0, \\ 0 & \text{si } \psi(x, y) < 0, \end{cases} \tag{7.90}$$

calcular (u^0, v^0) minimizando $J(\mathbf{u}, \chi)$ (tal como en el paso 4*h*) del ciclo principal, p. 274) y ejecutar el ciclo principal (Sección 7.2.4) desde el principio.

En caso de que la función mín usada en la actualización propuesta para ψ genere dificultades, una alternativa es reemplazar el valor absoluto $|t|$ utilizado en

$$\text{mín}\{a, b\} = \frac{a + b}{2} - \frac{|b - a|}{2} \tag{7.91}$$

por la función $\frac{t^2}{\sqrt{t^2+\delta^2}}$, para algún valor pequeño del parámetro δ, i.e., considerar que

$$\text{mín}\{a, b\} \approx \frac{a + b}{2} - \frac{(b - a)^2}{2\sqrt{\delta^2 + (b - a)^2}}. \tag{7.92}$$

7.2.6. Inicialización de la función distancia

Sean h_0, H, α_1, α_2 y $pilar$ los parámetros del modelo (los de la matriz de escenarios). Llamemos

$$x_1 = \tilde{L}, \quad x_2 = x_1 + \tilde{L}, \quad x_3 = x_2 + pilar \tag{7.93}$$

$$h_1 = \tilde{L}\tan\alpha_1, \quad h_2 = \tilde{L}\cot\alpha_2. \tag{7.94}$$

Distancia a un segmento

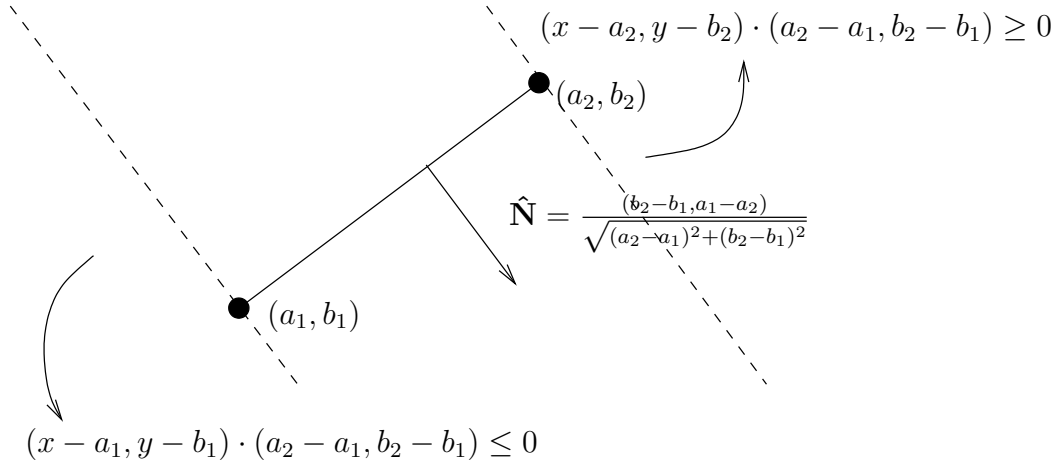


Figura 7.10: Función de distancia a un segmento recto

El segmento recto une al punto (a_1, b_1) con el punto (a_2, b_2). Definimos

$$f(x, y, a_1, b_1, a_2, b_2) \tag{7.95}$$

$$:= \begin{cases} \sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}, & \text{si } (a_2-a_1)(x-a_1) \leq (b_2-b_1)(b_1-y) \\ \dfrac{|(b_2-b_1)(x-a_1)+(a_1-a_2)(y-b_1)|}{\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}}, & \text{si } (a_2-a_1)(x-a_1) \geq (b_2-b_1)(b_1-y) \\ & \text{y } (a_2-a_1)(x-a_2) \leq (b_2-b_1)(b_2-y) \\ \sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2} & \text{si } (a_2-a_1)(x-a_2) \geq (b_2-b_1)(b_2-y) \end{cases} \tag{7.96}$$

Función distancia a la interfaz

Definimos

$$d(x, y) := \text{mín}\{f(x, y, x_1, h_0+h_1, x_2, H), \tag{7.97}$$

$$f(x, y, x_1, h_0+h_1, x_2, h_0), \tag{7.98}$$

$$f(x, y, x_2, h_0, x_3, h_0), \tag{7.99}$$

$$f(x, y, x_3, h_0, x_3, 0)\}. \tag{7.100}$$

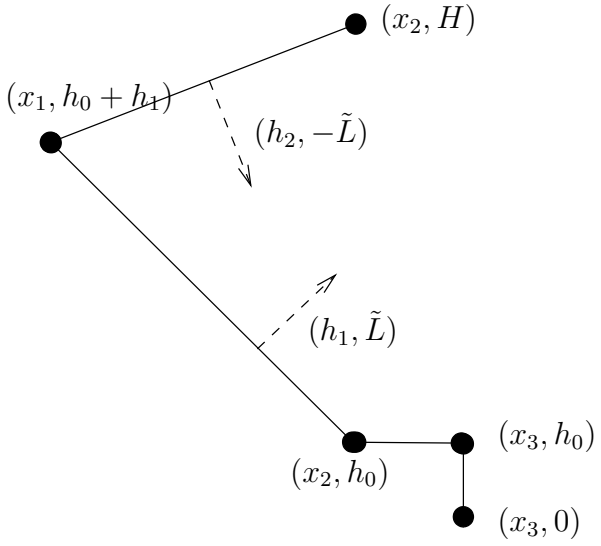


Figura 7.11: Interfaz inicial en el caving lateral

Cavidad inicial

Definimos:

$$\chi^0(x,y) := \text{máx}\left\{\left(\mathbb{1}_{h_2(x-x_2)\geq\tilde{L}(y-H)}\right)\left(\mathbb{1}_{h_1(x-x_2)\geq\tilde{L}(h_0-y)}\right)\left(\mathbb{1}_{y\geq h_0}\right), \mathbb{1}_{x\geq x_3}\right\}, \tag{7.101}$$

donde

$$\mathbb{1}_{h_2(x-x_2)\geq\tilde{L}(y-H)} := \begin{cases} 1, & \text{si } h_2(x-x_2) \geq \tilde{L}(y-H) \\ 0, & \text{si } h_2(x-x_2) < \tilde{L}(y-H). \end{cases} \tag{7.102}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{si } (x-x_2, y-H)\cdot(h_2, -\tilde{L}) \geq 0 \\ 0, & \text{si } (x-x_2, y-H)\cdot(h_2, -\tilde{L}) < 0 \end{cases} \tag{7.103}$$

y

$$\mathbb{1}_{h_1(x-x_2)\geq\tilde{L}(h_0-y)} := \begin{cases} 1, & \text{si } (x-x_2, y-h_0)\cdot(h_1, \tilde{L}) \geq 0 \\ 0, & \text{si } (x-x_2, y-h_0)\cdot(h_1, \tilde{L}) < 0. \end{cases} \tag{7.104}$$

7.2.7. Cantidad de material en elementos alrededor de la interfaz

Descripción del problema

Dadas una malla $\mathcal{T}$ que triangula un dominio poligonal Ω y una función de nivel $\psi \in \mathcal{P}^1(\mathcal{T}) \cap \mathrm{C}(\Omega)$ se desea obtener para cada triángulo $T \in \mathcal{T}$ la proporción $prop_T$ de su área que intersecta aquella parte del dominio Ω en la cual $\psi \geq 0$; esto es:

$$prop_T := \frac{|T \cap \{x \in \Omega \colon \psi(x) \geq 0\}|}{|T|} \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}. \tag{7.105}$$

La función ψ viene representada por el arreglo $\mathbf{psi} \in \mathbb{R}^{\mathbf{nnode}}$ que contiene su evaluación en los nodos de la triangulación. Por lo tanto,

$$\mathbf{psi}(k) = \psi(\mathbf{node}(k,:)) \qquad \forall\, k \in 1 : \mathbf{nnode}.$$

Representaremos $T \in \mathcal{T} \mapsto prop_T \in \mathbb{R}$ por un arreglo $\mathbf{prop} \in \mathbb{R}^{\mathbf{nele}}$, de manera que

$$\mathbf{prop}(k) = prop_{T_k} \qquad \forall\, k \in 1 : \mathbf{nele}.$$

Identificación de triángulos que no intersectan la interfaz

Como los valores de ψ al interior de cada triángulo coinciden con la interpolación lineal de sus valores en los vértices, aquellos triángulos cuya evaluación de ψ en cada uno de sus vértices es mayor o igual que 0 están completamente en la zona en la cual $\psi \geq 0$.

$$\mathbf{psi}(\mathbf{ele}(k,l)) \geq 0 \quad \forall\, l \in 1:3 \implies \mathbf{prop}(k) = 1. \tag{7.106}$$

Análogamente,

$$\mathbf{psi}(\mathbf{ele}(k,l)) \leq 0 \quad \forall\, l \in 1:3 \wedge \operatorname*{mín}_{l \in 1:3} \mathbf{psi}(\mathbf{ele}(k,l)) < 0 \implies \mathbf{prop}(k) = 0. \tag{7.107}$$

Tratamiento de triángulos que intersectan la interfaz

Los triángulos que no caen bajo el criterio al lado izquierdo de (7.106) ni de (7.107) necesariamente tienen al menos un vértice donde ψ es negativo y al menos un vértice donde ψ es positivo.
Un detalle que facilita las cuentas es que la proporción $prop_T$ para un triángulo $T \in \mathcal{T}$ depende solamente de los valores que asume ψ en los vértices de T. En efecto, si $B\colon \hat{T} \to T$ es cualquier función afín que transforma el triángulo de referencia $\hat{T} = \operatorname{conv}(\{(0,0),(1,0),(0,1)\})$ en el triángulo T y $\hat{\psi} := \psi \circ B$, desde la definición (7.105) se tiene

$$prop_T = \frac{\displaystyle\int_{T \cap \psi^{-1}([0,\infty))} 1}{\displaystyle\int_T 1} = \frac{\det(\nabla B) \displaystyle\int_{B^{-1}(T) \cap B^{-1}(\psi^{-1}([0,\infty)))} 1}{\det(\nabla B) \displaystyle\int_{B^{-1}(T)} 1} = \frac{\displaystyle\int_{\hat{T} \cap \hat{\psi}^{-1}([0,\infty))} 1}{\displaystyle\int_{\hat{T}} 1}. \tag{7.108}$$

Como ψ es una función afín en T, $\hat{\psi}$ lo es también en $\hat{T}$ y por lo tanto está completamente definida por sus evaluaciones en los vértices de $\hat{T}$, que coinciden con las evaluaciones de ψ en los vértices de T. La libertad de elegir cualquiera de las funciones afines que transforman $\hat{T}$ en T nos permite obtener la conclusión adicional de que podemos permutar los vértices de T (y $\hat{T}$) sin afectar esto el valor de $prop_T$, lo que se traduce en que podemos enfocar nuestra atención en dos casos.

- *Caso de solamente un vértice negativo:* Permutando los vértices de manera que $\hat{\psi}(0,0) < \hat{\psi}(1,0) \leq \hat{\psi}(0,1)$ es fácil ver que solamente para

  $$a := \frac{\hat{\psi}(0,0)}{\hat{\psi}(0,0) - \hat{\psi}(1,0)} \in (0,1] \qquad \text{y} \qquad b := \frac{\hat{\psi}(0,0)}{\hat{\psi}(0,0) - \hat{\psi}(0,1)} \in (0,1)$$

  se tiene que

  $$\hat{\psi}(a,0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \hat{\psi}(0,b) = 0.$$

  Por lo tanto, se tiene la situación dibujada en la izquierda de la figura 7.109: el área del subconjunto de $\hat{T}$ donde $\hat{\psi} \geq 0$ (pintado gris en la figura) es el área completa del triángulo $\hat{T}$ menos el área del

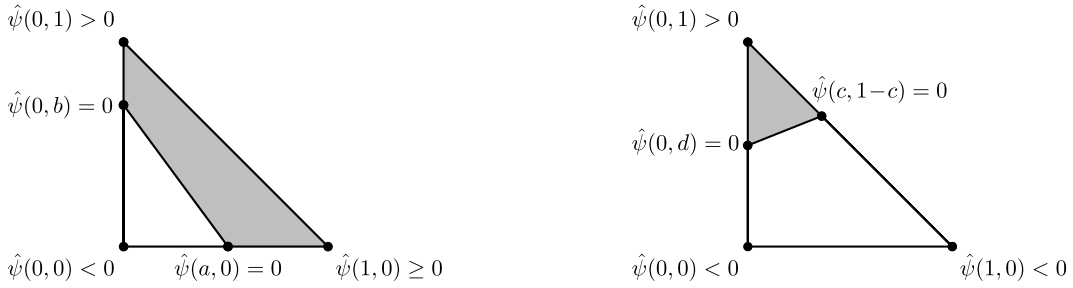


Figura 7.12: Dos posibles formas de la preimagen por una función afín de los reales no-negativos

triángulo de vértices $(0,0)$, $(a,0)$ y $(0,b)$. Dividiendo la cantidad resultante por el área completa del triángulo $\hat{T}$ da, de acuerdo a (7.108),

$$prop_T = 1 - a\,b = 1 - \frac{\hat{\psi}(0,0)^2}{\left(\hat{\psi}(0,0) - \hat{\psi}(1,0)\right)\left(\hat{\psi}(0,0) - \hat{\psi}(0,1)\right)}. \tag{7.109}$$

- *Caso de dos vértices negativos:* Permutando los vértices de manera que $\hat{\psi}(0,0) \leq \hat{\psi}(1,0) < \hat{\psi}(0,1)$ se tiene que solamente para

$$c := \frac{\hat{\psi}(0,1)}{\hat{\psi}(0,1) - \hat{\psi}(1,0)} \in (0,1] \qquad \text{y} \qquad d := \frac{\hat{\psi}(0,0)}{\hat{\psi}(0,0) - \hat{\psi}(0,1)} \in (0,1)$$

se tiene que

$$\hat{\psi}(c,1-c) = 0 \qquad \text{y} \qquad \hat{\psi}(0,d) = 0.$$

Por lo tanto, se tiene la situación dibujada en la derecha de la figura 7.12 : el área del subconjunto de $\hat{T}$ donde $\hat{\psi} \geq 0$ (pintado gris en la figura) es el área del triángulo de vértices $(0,d)$, $(c,1-c)$ y $(0,1)$. Dividiendo esta área por el área completa del triángulo $\hat{T}$ da, de acuerdo a (7.108),

$$prop_T = c - c\,d = \frac{\hat{\psi}(0,1)^2}{\left(\hat{\psi}(0,1) - \hat{\psi}(1,0)\right)\left(\hat{\psi}(0,1) - \hat{\psi}(0,0)\right)}. \tag{7.110}$$

Implementación

El siguiente código Matlab implementa el procedimiento sugerido por la discusión anterior.

```
function out = prop(ele,psi)
% prop(ele,psi) devuelve un arreglo con la proporción del área de cada
% triángulo representado en ele en la que la función psi es mayor o igual
% que cero.

out = zeros(size(ele,1),1); % Una etiqueta para cada triángulo
% Valores de psi en los vértices de cada triángulo ordenados
vals = sort(psi(ele),2);
% Casos simples. Si psi es cero en todos los vértices se asigna 0 primero
% pero después se reasigna 1, que es lo que corresponde
```

```
out(vals(:,3)<=0) = 0;
out(vals(:,1)>=0) = 1;
% Índices de triángulos que atraviesan la discontinuidad (DST por
% 'discontinuity-straddling triangles')
dst = find(vals(:,1)<0 & vals(:,3)>0);
dst1 = dst(vals(dst,2)>=0); % Índices de DST de tipo 1
dst2 = dst(vals(dst,2)<0); % Índices de DST de tipo 1
% Tratamiento de DST de tipo 1
out(dst1) = 1 - vals(dst1,1).^2 ./ ...
    ( (vals(dst1,2)-vals(dst1,1)) .* (vals(dst1,3)-vals(dst1,1)) );
% Tratamiento de DST de tipo 2
out(dst2) = vals(dst2,3).^2 ./ ...
    ( (vals(dst2,3)-vals(dst2,2)) .* (vals(dst2,3)-vals(dst2,1)) );
```

7.2.8. Coeficientes discontinuos

Se trata de reemplazar el problema

$$\min_{\mathbf{u}} \int_{\Omega\setminus\chi} \left[\mu|\mathbf{e}|^2 + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u})^2\right] \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{7.111}$$

por

$$\min_{\mathbf{u}} \int_{\Omega} \left[\mu(\mathbf{x})|\mathbf{e}|^2 + \frac{\lambda(\mathbf{x})}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u})^2\right] \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{7.112}$$

con

$$(\lambda(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x})) = \begin{cases} (\lambda, \mu) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \chi \\ (0, 0) & \text{si } \mathbf{x} \in \chi, \end{cases} \tag{7.113}$$

o, mejor aún (desde el punto de vista de la estabilidad numérica),

$$(\lambda(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x})) = \begin{cases} (\lambda, \mu) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \chi \\ 10^{-3}(\lambda, \mu) & \text{si } \mathbf{x} \in \chi \end{cases} \tag{7.114}$$

(la elección de 10^{-3} como prefactor es la elección realizada por [23]). La segunda elección de coeficientes discontinuos consiste en considerar que en la cavidad hay, en vez de espacio vacío, un material muy blando, que se ajusta a la manera como quiera deformarse el macizo rocoso. En algunos problemas matemáticos, es posible demostrar [24] que cuando el prefactor tiende a cero, la solución de este problema tiende a la solución del problema original (en donde la cavidad es verdaderamente una cavidad).

Al resolver el problema con coeficientes discontinuos usando elementos finitos, encontramos que la solución satisface las siguientes *condiciones de transmisión*:

- Los desplazamientos $\mathbf{u}$ son continuos en la interfaz Σ entre Ω y $\Omega \setminus \chi$. Como consecuencia, se tiene que las componentes tangenciales $\mathbf{e}_{tt}$ del tensor de deformación son continuas en Σ.

- Los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = 2\mu(\mathbf{x})\mathbf{e}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n} + \lambda(\mathbf{x})\big(\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x})\big)\mathbf{n}$ a través de la interfaz Σ son continuos (son los mismos si se calculan desde un lado de la interfaz o desde el otro), aunque los coeficientes λ y μ sean discontinuos en Σ (esto implica que las componentes normales $\mathbf{e}_{tn} = \mathbf{e}_{nt}$ y $\mathbf{e}_{nn}$ del tensor de deformación son necesariamente discontinuas en Σ).

Ejemplo unidimensional

Es posible corroborar que el método de elementos finitos nos entrega las condiciones de transmisión como uno de los resultados del método, no es necesario incorporar estas condiciones artificialmente en el modelo. A manera de ejemplo, estudiamos el problema de valores propios unidimensional

$$\begin{cases} -(c(x)e'(x))' = \lambda e(x), \quad x \in (-1,1) \\ e'(-1) = e'(1) = 0 \end{cases} \tag{7.115}$$

con coeficiente discontinuo de difusión dado por

$$c(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-1,0) \\ 2 & x \in (0,1). \end{cases} \tag{7.116}$$

La Figura 7.13 muestra las primeras ocho funciones propias obtenidas usando elementos finitos con una

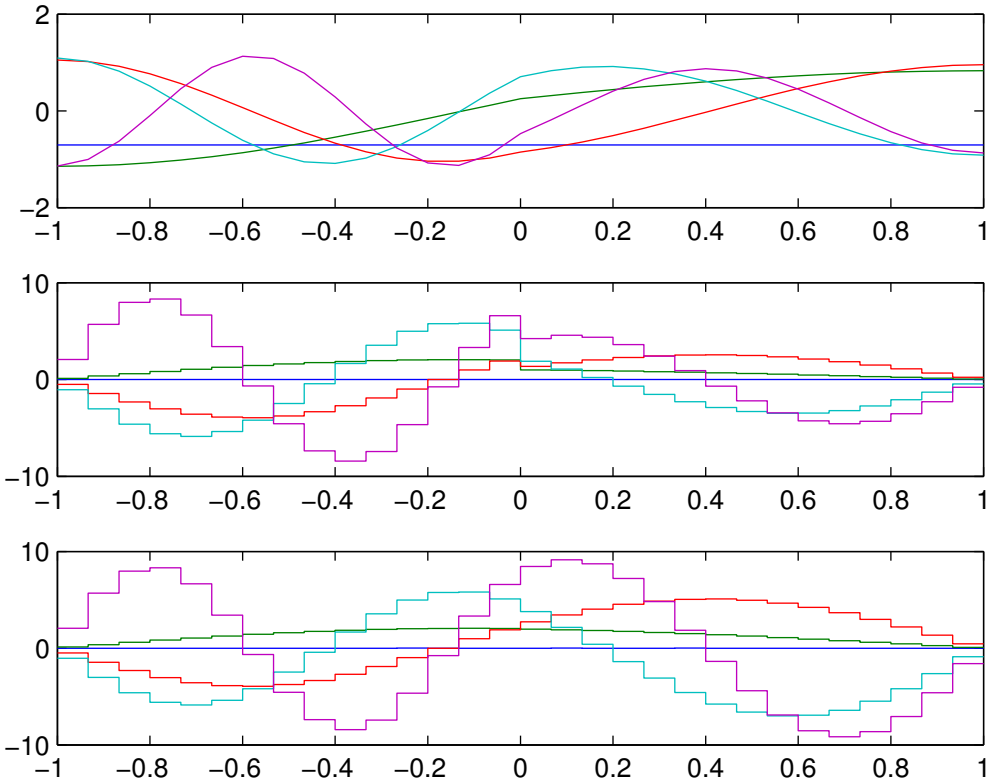


Figura 7.13: Problema unidimensional de valores propios con coeficientes discontinuos usando elementos finitos. La gráfica muestra las funciones propias e_i, sus derivadas discontinuas e_i' y los flujos $c(x)e_i(x)$, siendo e_i la i-ésima función propia.

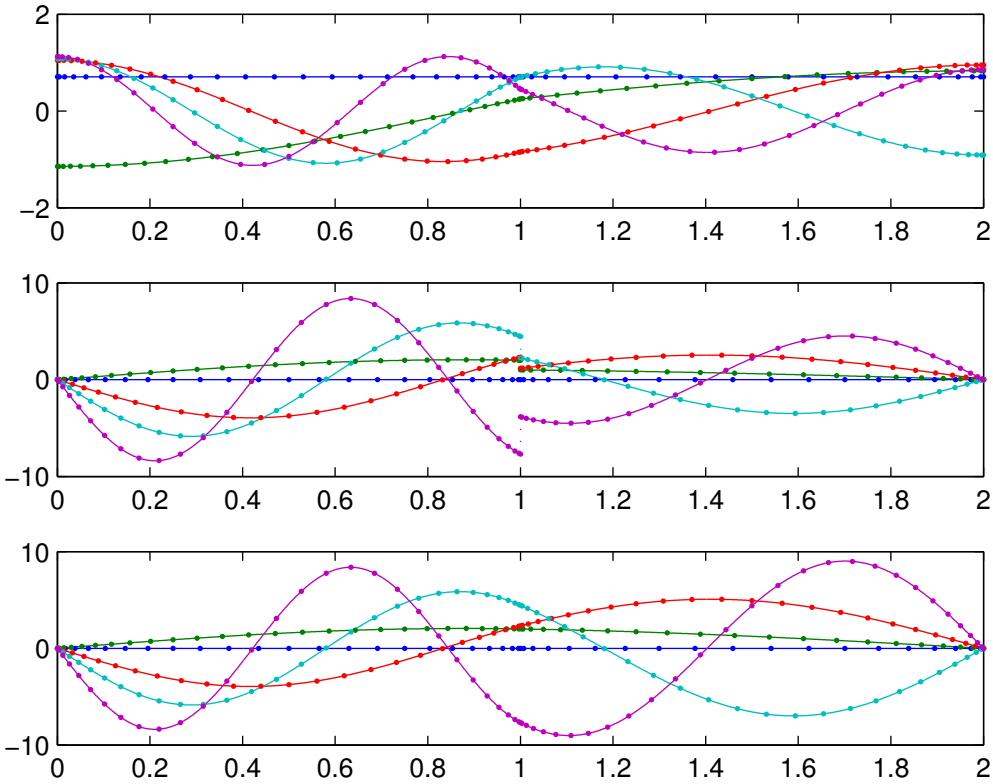


Figura 7.14: Problema unidimensional de valores propios con coeficientes discontinuos usando elementos espectrales. La gráfica muestra las funciones propias e_i, sus derivadas discontinuas e_i' y los flujos $c(x)e_i(x)$, siendo e_i la i-ésima función propia.

partición del intervalo $(-1, 1)$ en 20 subintervalos. Para efectos de validación, comparamos con la solución entregada por la librería `chebfun` de `Matlab` basada en métodos espectrales (Figura 7.14), y con la siguiente solución analítica: buscamos funciones $e(x), x \in (-1, 0)$, y $f(x), x \in (0, 1)$, tales que

$$-(e')' = \lambda e, \qquad -(2f')' = \lambda f, \qquad e(0) = f(0), \qquad e'(0) = 2f'(0). \tag{7.117}$$

La solución más general está dada por:

$$e(x) = A\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x) \tag{7.118}$$

$$f(x) = \frac{A}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{2}}\right) + B\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{2}}\right) \tag{7.119}$$

Tenemos que

$$e'(x) = \sqrt{\lambda}A\cos(\sqrt{\lambda}x) - B\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x) \tag{7.120}$$

$$f'(x) = \sqrt{\lambda}\frac{A}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{\lambda}\frac{B}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{2}}\right) \tag{7.121}$$

Entonces

$$e'(-1) = \sqrt{\lambda}[\cos(\sqrt{\lambda})A - \operatorname{sen}(-\sqrt{\lambda})B] \tag{7.122}$$

$$f'(+1) = \sqrt{\lambda}\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\right)A - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\right)B\right] \tag{7.123}$$

Luego $e'(-1) = f'(1) = 0$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}) & \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.124}$$

El determinante es

$$F(\lambda) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\right)\cos(\sqrt{\lambda}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda})\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\right). \tag{7.125}$$

La siguiente tabla compara los ceros de $F(\lambda)$ con los valores propios obtenidos usando el método espectral y el método de elementos finitos:

Analítico	Chebfun	elementos finitos 130 nodos	elementos finitos 30 nodos
0	-0.0000	-0.000	0.0000
3.2039	3.2039	3.2040	3.2069
14.2184	14.2184	14.2222	14.2790
29.3755	29.3755	29.3908	29.6205
55.4115	55.4115	55.4707	56.3631
83.8486	83.8486	83.9702	85.8030
121.7226	121.7226	122.0082	126.3421
167.5212	167.5212	168.0188	175.5368
214.0536	214.0536	214.9046	227.9153

Ejemplo bidimensional

Las Figuras 7.15 y 7.16 corresponden a soluciones espectrales y de elementos finitos para el problema de valores propios bidimensional

$$-\operatorname{div}(c(x,y)\nabla e(x,y)) = \lambda e(x,y), \quad (x,y) \in (-1,1)^2, \tag{7.126}$$

donde

$$c(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \tag{7.127}$$

con condiciones de contorno Neumann en la frontera de $(-1,1)^2$. En el caso de la resolución usando métodos espectrales, se agregan las condiciones de compatibilidad: que e y $c(x)\frac{\partial e}{\partial x}$ sean continuas en $x = 0$. En la resolución usando elementos finitos, no hace falta agregar estas condiciones, ellas se obtienen en forma automática (son parte de la solución).

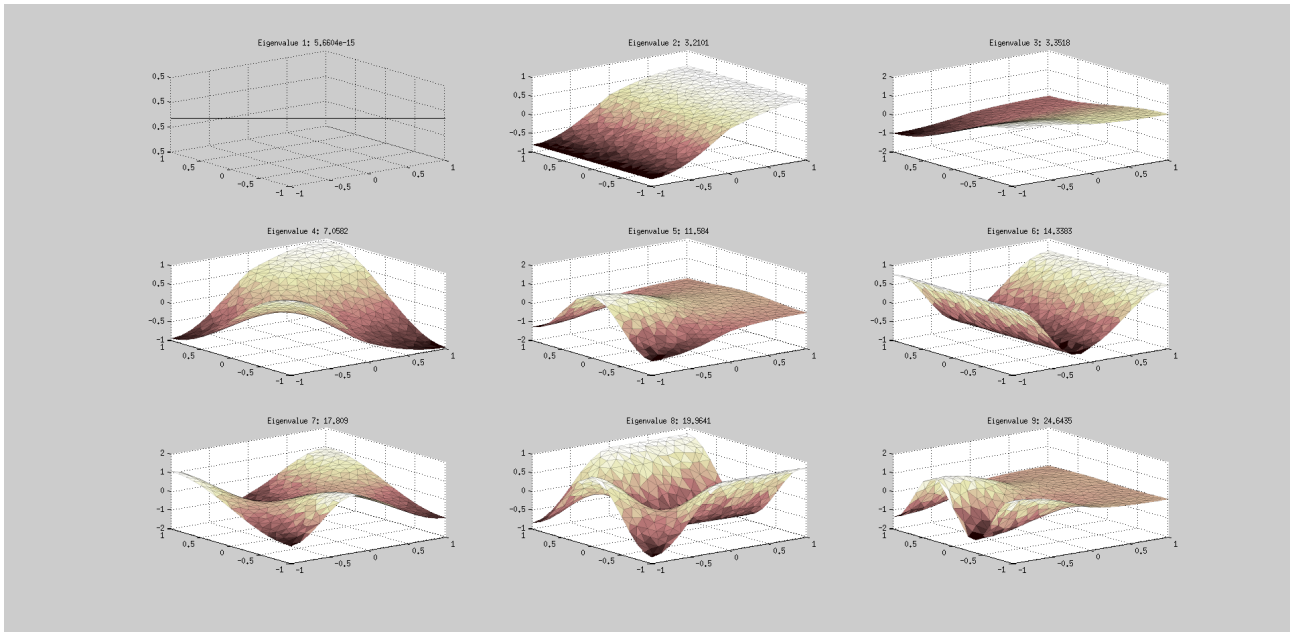


Figura 7.15: Problema espectral en 2d usando elementos finitos

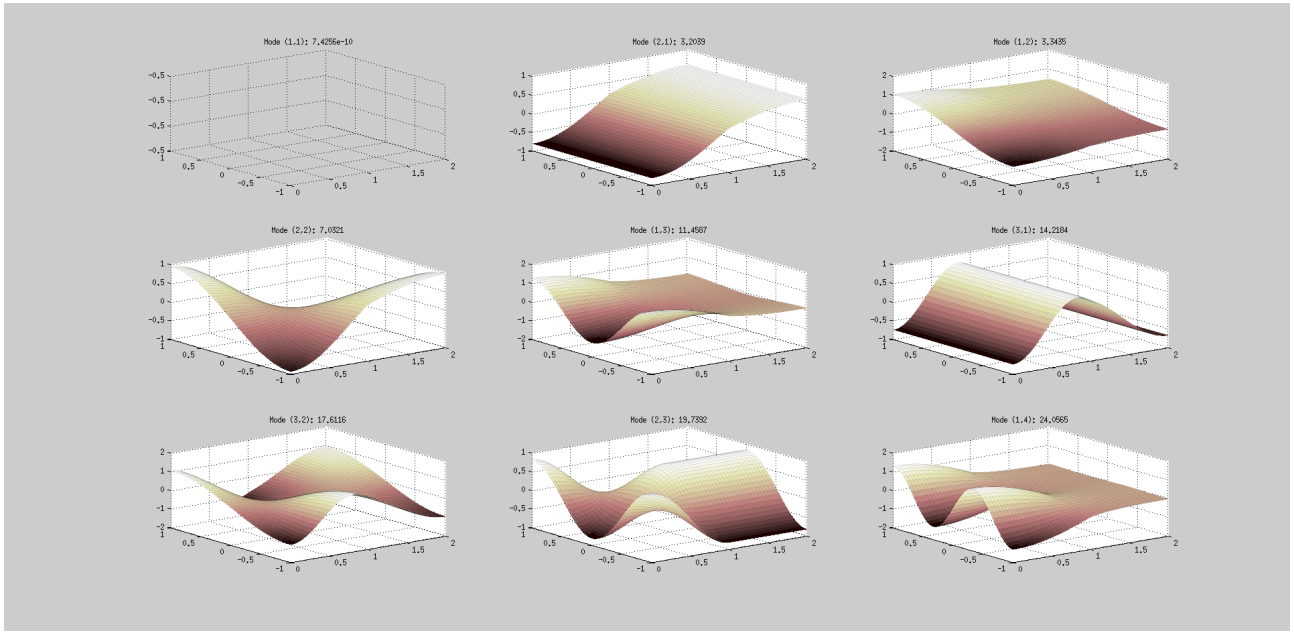


Figura 7.16: Problema espectral en 2d usando métodos espectrales

Validación analítica

Consideramos el problema más general de encontrar los valores propios de $-\operatorname{div}(c\nabla u), u : (-1,1)^2 \to \mathbb{R}$, con condiciones Neumann y

$$c(x,y) = \begin{cases} \rho\mu, & x < 0 \\ \mu, & x > 0 \end{cases}, \quad \mu > 0, \quad 0 < \rho < 1. \tag{7.128}$$

- *Resultado:* Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $\lambda_2 := \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$. Los siguientes son valores propios:

- Caso I: las soluciones de

$$\begin{cases} \lambda > \mu\lambda_2, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - \lambda_2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - \lambda_2}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\rho\mu} - \lambda_2} \\ \qquad +\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\rho\mu} - \lambda_2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\frac{\lambda}{\rho\mu} - \lambda_2}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - \lambda_2} = 0. \end{cases} \tag{7.129}$$

- Caso II: las soluciones de

$$\begin{cases} \rho\mu\lambda_2 < \lambda < \mu\lambda_2, \\ \rho\sqrt{\frac{\lambda}{\rho\mu} - \lambda_2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\frac{\lambda}{\rho\mu} - \lambda_2}\cosh\sqrt{\lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu}} \\ \qquad -\sqrt{\lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu}}\,\mathrm{senh}\,\sqrt{\lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu}}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\rho\mu} - \lambda_2} = 0 \end{cases} \tag{7.130}$$

- Caso III: si $n\sqrt{\rho^{-1} - 1}$ es par, $\lambda = \mu\lambda_2$ también es valor propio.

Aparte de los descritos anteriormente, no hay más valores propios.

Reemplazando $\mu = 2$ y $\rho = \frac{1}{2}$, para comparar con los resultados numéricos, tenemos:

Analítico ($\lambda_2 = \frac{n^2\pi^2}{4}$)	Espectral	elementos finitos
0	0	0
3.2038 ($n = 0/I$)	3.2039	3.2101
3.3435 ($n = 1/II$)	3.3435	3.3518
7.0321 ($n = 1/I$)	7.0321	7.0582
11.4587 ($n = 2/II$)	11.4587	11.584
14.2185 ($n = 0/I$)	14.2184	14.3383
17.6115 ($n = 1/I$)	17.6116	17.809
19.7392 ($n = 2/III$)	19.7392	19.9641
24.0564 ($n = 3/II$)	24.0565	24.6435

- *Justificación:* Utilizamos la técnica de separación de variables. Si $u(x, y) = f(x)g(y)$ entonces

$$-\operatorname{div}(c\nabla u) = \lambda u \tag{7.131}$$

$$\Leftrightarrow -cf''g - cfg'' = \lambda fg \tag{7.132}$$

$$\Leftrightarrow -f''/f - g''/g = \lambda/c \tag{7.133}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-\left(\frac{f''}{f} + \lambda/c\right)}_{\text{función de } x} = \underbrace{g''/g}_{\text{función de } y}. \tag{7.134}$$

- *Problema en la dirección vertical:* Buscamos soluciones de

$$\begin{cases} g''(y) = -\lambda_2 g(y), \quad y \in (-1, 1) \\ g'(-1) = g'(1) = 0 \end{cases}. \tag{7.135}$$

- Si $\lambda_2 < 0$, no hay solución.
- Si $\lambda_2 \geq 0$, la solución es de la forma

$$g(y) = A\cos(\sqrt{\lambda_2}y) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_2}y) \tag{7.136}$$
$$g'(y) = -\sqrt{\lambda_2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_2}y)A + \sqrt{\lambda_2}\cos(\sqrt{\lambda_2}y)B \tag{7.137}$$
$$g'(-1) = \sqrt{\lambda_2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_2})A + \sqrt{\lambda_2}\cos(\sqrt{\lambda_2})B \tag{7.138}$$
$$g'(+1) = -\sqrt{\lambda_2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_2})A + \sqrt{\lambda_2}\cos(\sqrt{\lambda_2})B \tag{7.139}$$

Hay soluciones no triviales que satisfagan las condiciones de borde si y sólo si

$$\lambda_2\,\mathrm{sen}(2\sqrt{\lambda_2}) = \begin{vmatrix} \sqrt{\lambda_2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_2}) & \sqrt{\lambda_2}\cos(\sqrt{\lambda_2}) \\ -\sqrt{\lambda_2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_2}) & \sqrt{\lambda_2}\cos(\sqrt{\lambda_2}) \end{vmatrix} = 0 \tag{7.140}$$

esto es, $\lambda_2 = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$ para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
La solución correspondiente está dada por $(A, B) \parallel (\cos\sqrt{\lambda_2}, \mathrm{sen}\sqrt{\lambda_2})$, i.e.

$$g(y) = A\cos(\sqrt{\lambda_2}y) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_2}y) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}(y-1)\right). \tag{7.141}$$

- *Problema en la dirección horizontal:* Si $u(x,y) = f(x)g(y)$ y $-\mathrm{div}(c\nabla u) = \lambda u$ entonces

$$-f''/f - g''/g = \lambda/c. \tag{7.142}$$

Si $g'' = -\lambda_2 g$ entonces f satisface

$$f''(x) = \lambda_1(x)f(x), \quad x \in (-1,0) \cup (0,1), \tag{7.143}$$

con

$$\lambda_1^- = \lambda_2 - \frac{\lambda}{\rho\mu} \tag{7.144}$$
$$\lambda_1^+ = \lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu} \tag{7.145}$$
$$\lambda_1(x) = \lambda_2 - \lambda/c = \begin{cases} \lambda_1^-, & x \in (-1,0) \\ \lambda_1^+, & x \in (0,1) \end{cases}, \tag{7.146}$$

y las condiciones de borde y de transmisión

$$\begin{cases} f'(-1) &= 0 \\ f'(+1) &= 0 \\ f(0^-) - f(0^+) &= 0 \\ \rho f'(0^-) - f'(0^+) &= 0 \end{cases} \tag{7.147}$$

- *Caso I:* $\lambda > \mu\lambda_2$*:* En este caso $\lambda_1^- = \lambda_2 - \frac{\lambda}{\rho\mu} < 0$ y $\lambda_1^+ = \lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu} < 0$, luego

$$f(x) = \begin{cases} A^-\cos(\sqrt{|\lambda_1^-|}x) + B^-\,\mathrm{sen}(\sqrt{|\lambda_1^-|}x), & x < 0 \\ A^+\cos(\sqrt{|\lambda_1^+|}x) + B^+\,\mathrm{sen}(\sqrt{|\lambda_1^+|}x), & x > 0 \end{cases} \tag{7.148}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\sqrt{|\lambda_1^-|}\,\mathrm{sen}(\sqrt{|\lambda_1^-|}x)A^- + \sqrt{|\lambda_1^-|}\cos(\sqrt{|\lambda_1^-|}x)B^-, & x < 0 \\ -\sqrt{|\lambda_1^+|}\,\mathrm{sen}(\sqrt{|\lambda_1^+|}x)A^+ + \sqrt{|\lambda_1^+|}\cos(\sqrt{|\lambda_1^+|}x)B^+, & x > 0 \end{cases} \tag{7.149}$$

$$f'(-1) = \sqrt{|\lambda_1^-|}\,\mathrm{sen}\sqrt{|\lambda_1^-|}A^- + \sqrt{|\lambda_1^-|}\cos\sqrt{|\lambda_1^-|}B^- \tag{7.150}$$

$$f'(+1) = -\sqrt{|\lambda_1^+|}\,\mathrm{sen}\sqrt{|\lambda_1^+|}A^+ + \sqrt{|\lambda_1^+|}\cos\sqrt{|\lambda_1^+|}B^+ \tag{7.151}$$

$$f(0^-) - f(0^+) = A^- - A^+ \tag{7.152}$$

$$\rho f'(0^-) - f'(0^+) = \rho\sqrt{|\lambda_1^-|}B^- - \sqrt{|\lambda_1^+|}B^+ \tag{7.153}$$

Las condiciones de frontera y de transmisión conducen entonces al sistema

$$\begin{pmatrix} \sqrt{|\lambda_1^-|}\,\mathrm{sen}\sqrt{|\lambda_1^-|} & \sqrt{|\lambda_1^-|}\cos\sqrt{|\lambda_1^-|} & 0 \\ -\sqrt{|\lambda_1^+|}\,\mathrm{sen}\sqrt{|\lambda_1^+|} & 0 & \sqrt{|\lambda_1^+|}\cos\sqrt{|\lambda_1^+|} \\ 0 & \rho\sqrt{|\lambda_1^-|} & -\sqrt{|\lambda_1^+|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B^- \\ B^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.154}$$

el cual tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$\sqrt{|\lambda_1^-|}\sqrt{|\lambda_1^+|}\left(-\sqrt{|\lambda_1^+|}\,\mathrm{sen}\sqrt{|\lambda_1^+|}\cos\sqrt{|\lambda_1^-|} - \rho\sqrt{|\lambda_1^-|}\cos\sqrt{|\lambda_1^+|}\,\mathrm{sen}\sqrt{|\lambda_1^-|}\right) = 0, \tag{7.155}$$

esto es, si

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - \lambda_2}\,\mathrm{sen}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - \lambda_2}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\rho\mu} - \lambda_2} + \rho\sqrt{\frac{\lambda}{\rho\mu} - \lambda_2}\,\mathrm{sen}\sqrt{\frac{\lambda}{\rho\mu} - \lambda_2}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - \lambda_2} = 0. \tag{7.156}$$

- *Caso II:* $\rho\mu\lambda_2 < \lambda < \mu\lambda_2$*:* En este caso $\lambda_1^- = \lambda_2 - \frac{\lambda}{\rho\mu} < 0$ y $\lambda_1^+ = \lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu} > 0$, luego

$$f(x) = \begin{cases} A^-\cos(\sqrt{|\lambda_1^-|}x) + B^-\,\mathrm{sen}(\sqrt{|\lambda_1^-|}x), & x < 0 \\ A^+\cosh(\sqrt{|\lambda_1^+|}x) + B^+\,\mathrm{senh}(\sqrt{|\lambda_1^+|}x), & x > 0 \end{cases} \tag{7.157}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\sqrt{|\lambda_1^-|}\,\mathrm{sen}(\sqrt{|\lambda_1^-|}x)A^- + \sqrt{|\lambda_1^-|}\cos(\sqrt{|\lambda_1^-|}x)B^-, & x < 0 \\ \sqrt{|\lambda_1^+|}\,\mathrm{senh}(\sqrt{|\lambda_1^+|}x)A^+ + \sqrt{|\lambda_1^+|}\cosh(\sqrt{|\lambda_1^+|}x)B^+, & x > 0 \end{cases} \tag{7.158}$$

$$f'(-1) = \sqrt{|\lambda_1^-|}\,\mathrm{sen}\sqrt{|\lambda_1^-|}A^- + \sqrt{|\lambda_1^-|}\cos\sqrt{|\lambda_1^-|}B^- \tag{7.159}$$

$$f'(+1) = \sqrt{|\lambda_1^+|}\,\mathrm{senh}\sqrt{|\lambda_1^+|}A^+ + \sqrt{|\lambda_1^+|}\cosh\sqrt{|\lambda_1^+|}B^+ \tag{7.160}$$

$$f(0^-) - f(0^+) = A^- - A^+ \tag{7.161}$$

$$\rho f'(0^-) - f'(0^+) = \rho\sqrt{|\lambda_1^-|}B^- - \sqrt{|\lambda_1^+|}B^+ \tag{7.162}$$

Las condiciones de frontera y de transmisión conducen entonces al sistema

$$\begin{pmatrix} \sqrt{|\lambda_1^-|}\operatorname{sen}\sqrt{|\lambda_1^-|} & \sqrt{|\lambda_1^-|}\cos\sqrt{|\lambda_1^-|} & 0 \\ \sqrt{|\lambda_1^+|}\operatorname{senh}\sqrt{|\lambda_1^+|} & 0 & \sqrt{|\lambda_1^+|}\cosh\sqrt{|\lambda_1^+|} \\ 0 & \rho\sqrt{|\lambda_1^-|} & -\sqrt{|\lambda_1^+|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B^- \\ B^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.163}$$

el cual tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$\sqrt{|\lambda_1^-|}\sqrt{|\lambda_1^+|}\left(\sqrt{|\lambda_1^+|}\operatorname{senh}\sqrt{|\lambda_1^+|}\cos\sqrt{|\lambda_1^-|} - \rho\sqrt{|\lambda_1^-|}\cosh\sqrt{|\lambda_1^+|}\operatorname{sen}\sqrt{|\lambda_1^-|}\right) = 0, \tag{7.164}$$

esto es, si

$$\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\rho\mu} - \lambda_2}\operatorname{sen}\sqrt{\frac{\lambda}{\rho\mu} - \lambda_2}\cosh\sqrt{\lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu}} - \sqrt{\lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu}}\operatorname{senh}\sqrt{\lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu}}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\rho\mu} - \lambda_2} = 0. \tag{7.165}$$

- *Caso III:* $\lambda = \mu\lambda_2$: En este caso $\lambda_1^- = \lambda_2 - \frac{\lambda}{\rho\mu} = \lambda_2(1-\rho^{-1}) < 0$ y $\lambda_1^+ = \lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu} = 0$, luego

$$f(x) = \begin{cases} A^-\cos(\sqrt{|\lambda_1^-|}x) + B^-\operatorname{sen}(\sqrt{|\lambda_1^-|}x), & x < 0 \\ A^+ + B^+x, & x > 0 \end{cases} \tag{7.166}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\sqrt{|\lambda_1^-|}\operatorname{sen}(\sqrt{|\lambda_1^-|}x)A^- + \sqrt{|\lambda_1^-|}\cos(\sqrt{|\lambda_1^-|}x)B^-, & x < 0 \\ B^+, & x > 0 \end{cases} \tag{7.167}$$

$$f'(-1) = \sqrt{|\lambda_1^-|}\operatorname{sen}\sqrt{|\lambda_1^-|}A^- + \sqrt{|\lambda_1^-|}\cos\sqrt{|\lambda_1^-|}B^- \tag{7.168}$$

$$f'(+1) = B^+ \tag{7.169}$$

$$f(0^-) - f(0^+) = A^- - A^+ \tag{7.170}$$

$$\rho f'(0^-) - f'(0^+) = \rho\sqrt{|\lambda_1^-|}B^- - B^+ \tag{7.171}$$

Las condiciones de frontera y de transmisión conducen entonces al sistema

$$\begin{pmatrix} \sqrt{|\lambda_1^-|}\operatorname{sen}\sqrt{|\lambda_1^-|} & \sqrt{|\lambda_1^-|}\cos\sqrt{|\lambda_1^-|} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \rho\sqrt{|\lambda_1^-|} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B^- \\ B^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.172}$$

el cual tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$-\rho|\lambda_1^-|\operatorname{sen}\sqrt{|\lambda_1^-|} = 0, \tag{7.173}$$

esto es, si

$$\frac{n\sqrt{\rho^{-1}-1}}{2} = \sqrt{\frac{(\rho^{-1}-1)\lambda_2}{\pi^2}} = \frac{\sqrt{|\lambda_1^-|}}{\pi} \in \mathbb{Z}, \tag{7.174}$$

en cuyo caso el valor propio es $\lambda = \mu\lambda_2$.

- *Caso IV:* $\lambda = \rho\mu\lambda_2$.

  En este caso $\lambda_1^- = \lambda_2 - \frac{\lambda}{\rho\mu} = 0$ y $\lambda_1^+ = \lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu} > 0$, luego

$$f(x) = \begin{cases} A^- + B^- x, & x < 0 \\ A^+ \cosh(\sqrt{|\lambda_1^+|}x) + B^+ \operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda_1^+|}x), & x > 0 \end{cases} \tag{7.175}$$

$$f'(x) = \begin{cases} B^-, & x < 0 \\ \sqrt{|\lambda_1^+|}\operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda_1^+|}x)A^+ + \sqrt{|\lambda_1^+|}\cosh(\sqrt{|\lambda_1^+|}x)B^+, & x > 0 \end{cases} \tag{7.176}$$

$$f'(-1) = B^- \tag{7.177}$$

$$f'(+1) = \sqrt{|\lambda_1^+|}\operatorname{senh}\sqrt{|\lambda_1^+|}A^+ + \sqrt{|\lambda_1^+|}\cosh\sqrt{|\lambda_1^+|}B^+ \tag{7.178}$$

$$f(0^-) - f(0^+) = A^- - A^+ \tag{7.179}$$

$$\rho f'(0^-) - f'(0^+) = \rho B^- - \sqrt{|\lambda_1^+|}B^+ \tag{7.180}$$

Las condiciones de frontera y de transmisión conducen entonces al sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{|\lambda_1^+|}\operatorname{senh}\sqrt{|\lambda_1^+|} & 0 & \sqrt{|\lambda_1^+|}\cosh\sqrt{|\lambda_1^+|} \\ 0 & \rho & -\sqrt{|\lambda_1^+|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B^- \\ B^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.181}$$

el cual no tiene soluciones no triviales pues el determinante del sistema

$$|\lambda_1^+|\operatorname{senh}\sqrt{|\lambda_1^+|} > 0. \tag{7.182}$$

- *Caso V:* $\lambda < \rho\mu\lambda_2$.

  En este caso $\lambda_1^- = \lambda_2 - \frac{\lambda}{\rho\mu} > 0$ y $\lambda_1^+ = \lambda_2 - \frac{\lambda}{\mu} > 0$, luego

$$f(x) = \begin{cases} A^- \cosh(\sqrt{|\lambda_1^-|}x) + B^- \operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda_1^-|}x), & x < 0 \\ A^+ \cosh(\sqrt{|\lambda_1^+|}x) + B^+ \operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda_1^+|}x), & x > 0 \end{cases} \tag{7.183}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt{|\lambda_1^-|}\operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda_1^-|}x)A^- + \sqrt{|\lambda_1^-|}\cosh(\sqrt{|\lambda_1^-|}x)B^-, & x < 0 \\ \sqrt{|\lambda_1^+|}\operatorname{senh}(\sqrt{|\lambda_1^+|}x)A^+ + \sqrt{|\lambda_1^+|}\cosh(\sqrt{|\lambda_1^+|}x)B^+, & x > 0 \end{cases} \tag{7.184}$$

$$f'(-1) = -\sqrt{|\lambda_1^-|}\,\mathrm{senh}\,\sqrt{|\lambda_1^-|}A^- + \sqrt{|\lambda_1^-|}\cosh\sqrt{|\lambda_1^-|}B^- \tag{7.185}$$

$$f'(+1) = \sqrt{|\lambda_1^+|}\,\mathrm{senh}\,\sqrt{|\lambda_1^+|}A^+ + \sqrt{|\lambda_1^+|}\cosh\sqrt{|\lambda_1^+|}B^+ \tag{7.186}$$

$$f(0^-) - f(0^+) = A^- - A^+ \tag{7.187}$$

$$\rho f'(0^-) - f'(0^+) = \rho\sqrt{|\lambda_1^-|}B^- - \sqrt{|\lambda_1^+|}B^+ \tag{7.188}$$

Las condiciones de frontera y de transmisión conducen entonces al sistema

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{|\lambda_1^-|}\,\mathrm{senh}\,\sqrt{|\lambda_1^-|} & \sqrt{|\lambda_1^-|}\cosh\sqrt{|\lambda_1^-|} & 0 \\ \sqrt{|\lambda_1^+|}\,\mathrm{senh}\,\sqrt{|\lambda_1^+|} & 0 & \sqrt{|\lambda_1^+|}\cosh\sqrt{|\lambda_1^+|} \\ 0 & \rho\sqrt{|\lambda_1^-|} & -\sqrt{|\lambda_1^+|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B^- \\ B^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.189}$$

el cual no tiene soluciones no triviales pues el determinante del sistema es

$$\sqrt{|\lambda_1^-|}\sqrt{|\lambda_1^+|}\left(\sqrt{|\lambda_1^+|}\,\mathrm{senh}\,\sqrt{|\lambda_1^+|}\cosh\sqrt{|\lambda_1^-|} + \rho\sqrt{|\lambda_1^-|}\cosh\sqrt{|\lambda_1^+|}\,\mathrm{senh}\,\sqrt{|\lambda_1^-|}\right) > 0. \tag{7.190}$$

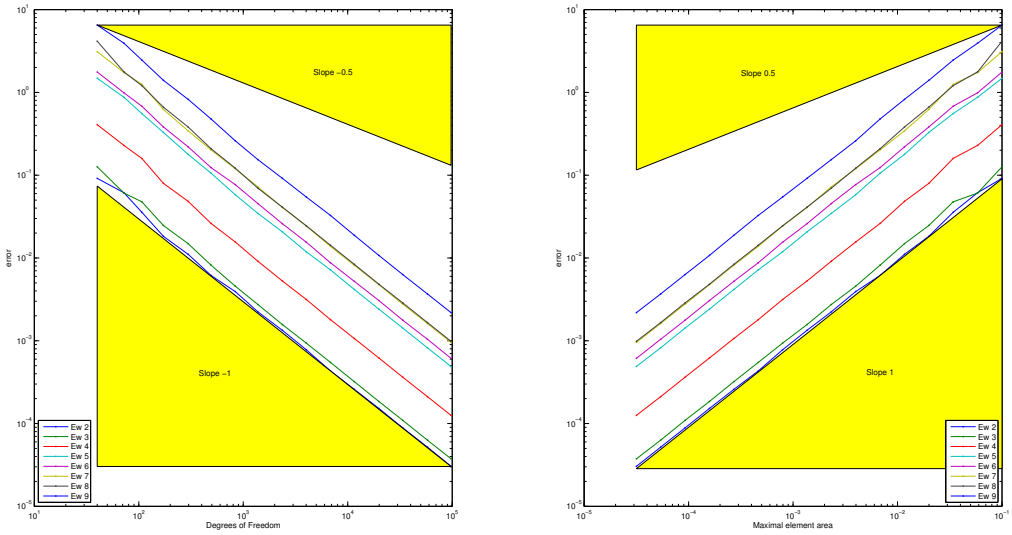


Figura 7.17: Tasa de convergencia usando una malla adaptada al coeficiente discontinuo

Mallado independiente de la discontinuidad

La Figura 7.18 muestra que el método de elementos finitos tiene una buena tasa de convergencia aún si la malla no se adapta a la discontinuidad de los coeficientes (corresponde al cálculo de los valores propios para el problema elíptico usando una malla normal cuyos elementos son atravesados por la discontinuidad de $c(x, y)$), aunque el algoritmo converge en forma más lenta que en el caso en que los elementos del mallado no son atravesados por la discontinuidad de $c(x, y)$ (cf. Figura 7.17). Los valores propios encontrados con el mallado normal coinciden con los encontrados usando una malla adaptada a la discontinuidad.

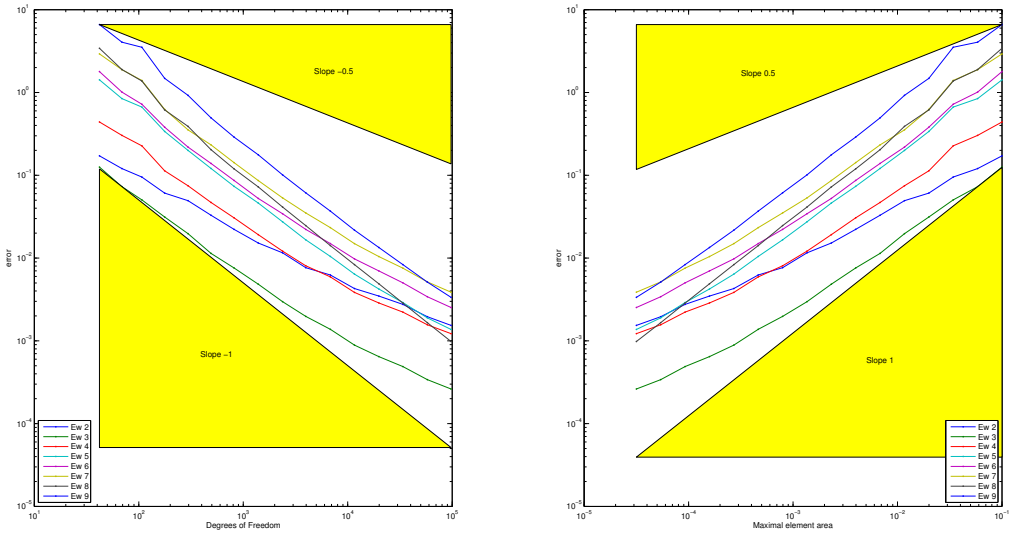


Figura 7.18: Tasa de convergencia usando una malla normal

7.2.9. Derivada con respecto a la forma [23]

La derivada con respecto a la forma $J'(\chi)(\boldsymbol{\theta})$ del funcional de energía

$$J(\chi) := \int_\Omega \left[\mu_\chi |\mathbf{e}(\mathbf{u}_\chi)|^2 + \frac{\lambda_\chi}{2}(\operatorname{tr}\mathbf{e}(\mathbf{u}_\chi))^2 - \rho_\chi \mathbf{g}\cdot\mathbf{u}_\chi\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega\cap\{y>0\}} \mathbf{g}_\chi\cdot\mathbf{u}_\chi\,\mathrm{d}S + \kappa\int_\Omega \chi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{7.191}$$

la cual se define como el único funcional lineal sobre $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ tal que

$$J(\chi\circ(\mathbf{id}+\boldsymbol{\theta})) = J(\chi) + J'(\chi)(\boldsymbol{\theta}) + o(\boldsymbol{\theta}), \quad \text{con} \quad \lim_{\boldsymbol{\theta}\to\mathbf{0}} \frac{|o(\boldsymbol{\theta})|}{\|\boldsymbol{\theta}\|_{W^{1,\infty}}} = 0 \tag{7.192}$$

($\chi\circ(\mathbf{id}+\boldsymbol{\theta})$ es la función $\mathbf{x}\mapsto\chi(\mathbf{x}+\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}))$), está dada [23, Th. 3.1] por

$$J'(\chi)(\boldsymbol{\theta}) = \int_\Sigma \mathcal{D}(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \int_\Sigma \Big((\mathbf{f}^0-\mathbf{f}^1)\cdot\mathbf{p}_\chi + (j^0-j^1)(\mathbf{x},\mathbf{u}_\chi)\Big)\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{n}, \tag{7.193}$$

en donde:

- Σ es la interfaz entre la cavidad χ y el macizo rocoso $\Omega\setminus\chi$, la cual suponemos intersecta a $\partial\Omega$ en a lo más dos puntos;
- $\mathbf{f}^0 = \eta\rho\mathbf{g}$;
- $\mathbf{f}^1 = \rho\mathbf{g}$;
- $j^0(\mathbf{x},\mathbf{w}) := \kappa - \eta\rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{w}$;
- $j^1(\mathbf{x},\mathbf{w}) := -\rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{w}$;
- $\mathbf{p}_\chi$ es la solución del llamado problema adjunto

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_\chi(\mathbf{p}_\chi) = \rho_\chi\mathbf{g} + (1-\chi)\frac{\partial j^1}{\partial\mathbf{w}}(\mathbf{x},\mathbf{u}_\chi) + \chi\frac{\partial j^0}{\partial\mathbf{w}}(\mathbf{x},\mathbf{u}_\chi), & \text{en } \Omega,\\ \mathbf{p}_\chi(x,y) = \mathbf{0}, & \text{si } y=0,\\ \boldsymbol{\sigma}_\chi(\mathbf{p}_\chi;x,y)\mathbf{n}(x,y) = \mathbf{g}_\chi(x,y) + \frac{\partial h_\chi}{\partial\mathbf{w}}(x,y,\mathbf{u}_\chi), & \text{si } (x,y)\in\partial\Omega \text{ e } y>0, \end{cases} \tag{7.194}$$

siendo $h_\chi(\mathbf{x}, \mathbf{w}) := -\mathbf{g}_\chi \cdot \mathbf{w}$ (las definiciones de j^0, j^1 y h_χ están en las ecuaciones (3.3) y (3.5) de [23], pero hay que reemplazar $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ en (3.5) por $\rho_\chi \mathbf{g}$ y $\mathbf{g}_\chi$ en nuestro caso);

- el vector $\mathbf{n}$ en la expresión $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}$ es el normal unitario exterior a χ en la interfaz Σ;
- $\mathcal{D}(\mathbf{x})$ está dado por

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}) := -\sigma_{nn}(\mathbf{u}_\chi)[e_{nn}(\mathbf{p}_\chi)] + e_{tt}(\mathbf{u}_\chi)[\sigma_{tt}(\mathbf{p}_\chi)] - 2[e_{tn}(\mathbf{u}_\chi)]\sigma_{tn}(\mathbf{p}_\chi) \tag{7.195}$$

$$+ \frac{1}{2}(\sigma_{nn}(\mathbf{u}_\chi)[e_{nn}(\mathbf{u}_\chi)] - e_{tt}(\mathbf{u}_\chi)[\sigma_{tt}(\mathbf{u}_\chi)] + 2\sigma_{tn}(\mathbf{u}_\chi)[e_{tn}(\mathbf{u}_\chi)]), \tag{7.196}$$

en donde los subíndices n y t denotan las componentes normales y tangenciales con respecto al vector normal $\mathbf{n}$ y los factores de la forma $[e_{nn}]$, $[\sigma_{tt}]$, etc., denotan el salto de la cantidad correspondiente al atravesar la interfaz (calculado como e_{nn} en el macizo rocoso menos e_{nn} en la cavidad).

Es fácil ver que en este caso el problema adjunto es

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_\chi(\mathbf{p}_\chi) = \rho_\chi \mathbf{g} + -(1-\chi)\rho\mathbf{g} - \chi\eta\rho\mathbf{g} = 0, & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{p}_\chi(x,y) = \mathbf{0}, & \text{si } y = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}_\chi(\mathbf{p}_\chi; x, y)\mathbf{n}(x,y) = \mathbf{g}_\chi(x,y) + -\mathbf{g}_\chi(x,y) = 0, & \text{si } (x,y) \in \partial\Omega \text{ e } y > 0, \end{cases} \tag{7.197}$$

cuya única solución es $\mathbf{p}_\chi \equiv 0$, luego el problema se simplifica y tenemos que

$$J'(\chi)(\boldsymbol{\theta}) = \int_\Sigma \mathcal{D}(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S, \tag{7.198}$$

con

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}) := \underbrace{\kappa + (1-\eta)\rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_\chi}_{j^0 - j^1} + \frac{1}{2}(\sigma_{nn}(\mathbf{u}_\chi)[e_{nn}(\mathbf{u}_\chi)] - e_{tt}(\mathbf{u}_\chi)[\sigma_{tt}(\mathbf{u}_\chi)] + 2\sigma_{tn}(\mathbf{u}_\chi)[e_{tn}(\mathbf{u}_\chi)]) \tag{7.199}$$

$$= \kappa + (1-\eta)\rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_\chi + \left[\frac{1}{2}(\sigma_{nn}(\mathbf{u}_\chi)e_{nn}(\mathbf{u}_\chi) - e_{tt}(\mathbf{u}_\chi)\sigma_{tt}(\mathbf{u}_\chi) + 2\sigma_{tn}(\mathbf{u}_\chi)e_{tn}(\mathbf{u}_\chi))\right] \tag{7.200}$$

Tal como describen en [23, p. 5028], los saltos $[\alpha]$ de cantidades discontinuas α a través de la interfaz los calculamos del siguiente modo:

$$\mathcal{D}_{approx} = [\mathcal{E}]_{approx} = 2((1-\chi)\mathcal{E} - \chi\mathcal{E}), \tag{7.201}$$

siendo χ una función constante en cada elemento definida como

$$\chi(K) = \frac{\text{área de } (K \cap \text{ cavidad})}{\text{área de } K} \tag{7.202}$$

(el prefactor 2 en la definición de $\mathcal{D}_{approx}$ aparece por razones numéricas).

Finalmente, vemos que

$$\sigma_{nn}(x,y) = \mathbf{n}\cdot\Big(\boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{u}(x,y))\mathbf{n}\Big) \tag{7.203}$$

$$= \mathbf{n}\cdot\Big(2\mu(x,y)\mathbf{e}(\mathbf{u}(x,y))\mathbf{n} + \lambda(x,y)(\operatorname{tr}\mathbf{e}(\mathbf{u}(x,y))\mathbf{n}\Big) \tag{7.204}$$

$$= 2\mu_\chi e_{nn}(x,y) + \lambda_\chi \operatorname{tr}\mathbf{e}(\mathbf{u}(x,y)), \tag{7.205}$$

$$\sigma^k_{tt}(x,y) = 2\mu_\chi e_{tt}(x,y) + \lambda_\chi \operatorname{tr}\mathbf{e}(\mathbf{u}(x,y)), \tag{7.206}$$

$$\sigma_{tn}(x,y) = 2\mu_\chi(x,y)e_{tn}(x,y), \tag{7.207}$$

luego

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\sigma_{nn}e_{nn} - e_{tt}\sigma_{tt} + 2\sigma_{tn}e_{tn}) \tag{7.208}$$

$$= (\mu_\chi e_{nn} + \frac{\lambda_\chi}{2}\operatorname{tr}\mathbf{e})e_{nn} - (\mu_\chi e_{tt} + \frac{\lambda_\chi}{2}\operatorname{tr}\mathbf{e})e_{tt} + (2\mu_\chi e_{tn})e_{tn} \tag{7.209}$$

$$= \mu_\chi(e^2_{nn} + 2e^2_{tn} - e^2_{tt}) + \frac{\lambda_\chi}{2}(\operatorname{tr}\mathbf{e})(e_{nn} - e_{tt}). \tag{7.210}$$

7.2.10. Actualización de la función de nivel [35]

Cálculo de $|\nabla\psi|$ lejos de la interfaz

La idea es que en el gradiente $|\nabla\psi(x,y)|$ que aparece en la ecuación de Hamilton-Jacobi hay que calcular las derivadas viniendo desde la interfaz. La razón es que al hacer

$$\delta\psi = -(\mathcal{V}|\nabla\psi|)\delta s \tag{7.211}$$

toda la acción se concentra en la interfaz (pues $\mathcal{V}$ se anula rápidamente al alejarse de la interfaz). Para ilustrar la situación, consideremos un ejemplo unidimensional con nodos uniformemente espaciados, con $\delta_x = 0{,}1$, en donde los valores de ψ son

ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}
$-0{,}6$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$0{,}0$	$+0{,}1$	$+0{,}2$	$+0{,}3$

(7.212)

Supongamos que la interfaz quiere desplazarse hacia la derecha, con velocidad $\mathcal{V}\delta s = 0{,}23$ en la interfaz, extendida a los demás nodos del siguiente modo:

$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$	$i=10$
$0{,}0$	$0{,}0$	$0{,}0$	$0{,}0$	$0{,}07$	$0{,}15$	$0{,}23$	$0{,}15$	$0{,}07$	$+0{,}0$

(7.213)

Al actualizar ψ según $\delta\psi = -(\mathcal{V}|\nabla\psi|)\delta s$ tendremos

ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}
$-0{,}6$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}27$	$-0{,}25$	$-0{,}23$	$-0{,}05$	$+0{,}13$	$+0{,}3$

(7.214)

es decir, los valores de ψ tienden a ser muy cercanos unos de otros en los nodos 4, 5, 6 y 7, y después ψ da saltos grandes en los nodos 8 y 9.

¿Qué pasa si después la interfaz quiere desplazarse nuevamente? $\delta\psi$ se hace más pequeño en donde $|\nabla\psi|$ se hace pequeño, y se amplifica en donde $|\nabla\psi|$ se hace más grande. Supongamos que el nuevo campo de velocidad se concentra en el cero de ψ, entre los nodos $i = 7$ e $i = 8$. Es importante calcular $\nabla\psi$ viniendo desde la interfaz, i.e., desde donde viene la señal que se propaga como una onda haciendo que se actualicen los valores de la función de nivel. En el nodo $i = 7$ queremos mirar hacia el nodo $i = 8$ en vez de hacia $i = 6$ (para que no se separen tanto los valores de ψ entre los nodos 7 y 8), y en el nodo $i = 10$ miremos hacia el nodo $i = 9$ y no hacia el nodo $i = 11$. Esto es lo que se logra al definir la función gradiente G_{ij} como fue definida en la ecuación (7.51):

- si el nodo (i, j) está por debajo de la interfaz, hay que calcular la derivada vertical desde arriba, i.e., hay que tener en cuenta a $d = D_y^+\psi$ en vez de a $c = D_y^-\psi$. Si $\psi_{i,j} > 0$, estamos en la zona en donde $\frac{\partial\psi}{\partial y} < 0$ (pues la interfaz está arriba y en la interfaz $\psi = 0$) luego logramos capturar a d en vez de a c con la expresión $\text{máx}\{c_+^2, d_-^2\}$ (ya que c y d son negativos, como $\frac{\partial\psi}{\partial y}$). Si $\psi_{i,j} < 0$, estamos en la zona en donde $\frac{\partial\psi}{\partial y} > 0$, luego $|d| = \text{máx}\{c_-^2, d_+^2\}$.
- si el nodo (i, j) está por encima de la interfaz, hay que calcular la derivada vertical desde abajo, i.e., hay que tener en cuenta a $c = D_y^-\psi$ en vez de a $d = D_y^+\psi$. Si $\psi_{i,j} > 0$, estamos en la zona en donde $\frac{\partial\psi}{\partial y} > 0$ (pues la interfaz está abajo y en la interfaz $\psi = 0$) luego logramos capturar a c en vez de a d con la expresión $\text{máx}\{c_+^2, d_-^2\}$ (ya que c y d son positivos, como $\frac{\partial\psi}{\partial y}$). Si $\psi_{i,j} < 0$, estamos en la zona en donde $\frac{\partial\psi}{\partial y} < 0$, luego $|c| = \text{máx}\{c_-^2, d_+^2\}$.
- La explicación para el uso de $\text{máx}\{a_+^2, b_-^2\}$ si $\psi_{i,j} > 0$ y $\text{máx}\{a_-^2, b_+^2\}$ si $\psi_{i,j} < 0$, es análoga (pero con izquierda y derecha y derivando ψ con respecto a x).

Cálculo de $|\nabla\psi|$ cerca de la interfaz

Queremos demostrar que si T es un triángulo con vértices P, Q y R y si $\psi \in \mathcal{P}^1(T)$ es tal que

1. $\psi(P) < 0, \psi(Q) < 0$ y $\psi(R) \geq 0$, o bien
2. $\psi(P) \leq 0, \psi(Q) \leq 0$ y $\psi(R) > 0$

entonces

$$\underbrace{\frac{|\psi(R) - 0|}{\text{dist}(R, \ell)}}_{:=G_{i,j}} = \frac{\left\| \frac{\overrightarrow{PR}}{|\psi(R)-\psi(P)|} + \frac{\overrightarrow{RQ}}{|\psi(Q)-\psi(R)|} \right\|}{\left| \det\left(\frac{\overrightarrow{PR}}{|\psi(R)-\psi(P)|}, \frac{\overrightarrow{RQ}}{|\psi(Q)-\psi(R)|} \right) \right|}, \tag{7.215}$$

en donde ℓ es la recta que contiene a $T \cap \psi^{-1}(\{0\})$ (la expresión al lado izquierdo es una aproximación numérica de $|\nabla\psi|$ en el elemento T).

Sean

$$A = PR \cap \{\psi = 0\}, \qquad B = QR \cap \{\psi = 0\}. \tag{7.216}$$

La expresión para $G_{i,j} = G(R)$ está dada entonces por

$$G(R) = \frac{|\psi(R) - 0|}{\text{dist}(R, \ell)} = \frac{|\psi(R)|}{|\det(\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AB})|/\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{|\psi(R)|\|\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RB}\|}{|\det(\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{RB})|}. \tag{7.217}$$

Como estamos suponiendo que ψ es una función afín en T tenemos que

$$\overrightarrow{AR} = \frac{\|\overrightarrow{AR}\|}{\|\overrightarrow{PR}\|}\overrightarrow{PR} = \frac{|\psi(R)-\psi(A)|}{|\psi(R)-\psi(P)|}\overrightarrow{PR} = \frac{|\psi(R)|}{|\psi(R)-\psi(P)|}\overrightarrow{PR} \tag{7.218}$$

$$\overrightarrow{RB} = \frac{\|\overrightarrow{RB}\|}{\|\overrightarrow{RQ}\|}\overrightarrow{RQ} = \frac{|\psi(R)-\psi(B)|}{|\psi(R)-\psi(Q)|}\overrightarrow{RQ} = \frac{|\psi(R)|}{|\psi(R)-\psi(Q)|}\overrightarrow{RQ}. \tag{7.219}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\psi(R)^2$ obtenemos la fórmula (7.215).

Caso de prueba

Consideremos el caso de una elipse que comienza con semiejes de largo 5 y 3 y se reduce gradualmente al segmento que va desde $(-4,0)$ hasta $(0,4)$. Las ecuaciones están dadas por

$$\mathbf{x}(r,\theta,s) = (a(s)r\cos\theta, b(s)r\operatorname{sen}\theta) \tag{7.220}$$

$$b(s) = \sqrt{9-s} \tag{7.221}$$

$$a(s) = \sqrt{25-s}, \quad 0 < s < 9. \tag{7.222}$$

La evolución de a y b se escoge de modo que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(a(s)^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(b(s)^2)$, para que $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s}$ sea siempre perpendicular a $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\theta}$. Tomemos

$$\psi(s,y_1,y_2) = \sqrt{\frac{y_1^2}{a(s)^2} + \frac{y_2^2}{b(s)^2}} - 1, \tag{7.223}$$

$$\mathcal{V}(s,y_1,y_2) = -\sqrt{\frac{y_1^2}{4a(s)^4} + \frac{y_2^2}{4b(s)^4}}, \tag{7.224}$$

lo cual corresponde a

$$\psi(s,\mathbf{x}(r,s,\theta)) = r-1, \tag{7.225}$$

$$\mathcal{V}(s,\mathbf{x}(r,s,\theta)) = -\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s}\right|, \tag{7.226}$$

$$(y_1,y_2) = \mathbf{x}(r,s,\theta). \tag{7.227}$$

Esta elección de ψ y $\mathcal{V}$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\nabla\psi(s,y_1,y_2) = 0 \tag{7.228}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial\psi}{\partial s} + \mathcal{V}|\nabla\psi| = 0, \tag{7.229}$$

luego la solución de esta ecuación de Hamilton-Jacobi debe encoger la elipse $r = 1, s = 0$ hasta convertirla en un segmento recto al cabo de $s = 9$.

7.2.11. Posibles mejoras

- Trabajar con el problema del cumplimiento en lugar del problema elástico completo, siguiendo las indicaciones descritas en [24].

- Reducir el dominio computacional a la mitad, asumiendo una evolución de la cavidad simétrica con respecto al eje vertical, lo cual requiere la implementación de una condición de contorno de deslizamiento libre en dicho eje.
- Implementar un método Cartesiano de barlovento de segundo orden para la resolución de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi [37, appendix B].

Ecuación de Hamilton-Jacobi usando elementos finitos

En la Sección 7.2.4 propusimos simular la evolución de la superficie de quiebre resolviendo la ecuación de transporte (7.50) y la ecuación de reinicialización (7.63) mediante el método de Russo & Smereka [35], usando una malla Cartesiana y diferencias finitas. Dicho método es relativamente fácil de comprender e implementar, y su eficiencia y eficacia han sido comprobadas numéricamente por distintos autores, sin embargo para el problema en consideración puede resultar más conveniente alguno de los métodos propuestos por Barth & Sethian [26] para resolver ecuaciones de Hamilton-Jacobi usando elementos finitos. Las ventajas de estos métodos son que permiten resolver la ecuación de transporte y el problema fuente de elasticidad usando el mismo mallado, que tienen un mayor nivel de precisión y que se prestan mejor para ser integrados en algoritmos adaptativos en donde el mallado se refine cerca de la frontera libre. A continuación describiremos brevemente uno de los métodos propuestos por estos autores, a saber, el *método de coeficientes positivos*.

Tanto (7.50) como (7.63) son ecuaciones del tipo

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} + F(x,y)|\nabla \phi(x,y)| = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{7.230}$$

con $F(x,y) = \mathcal{V}(x,y)$ y $f(x,y) = 0$ en el caso de (7.50), y con $F(x,y) = f(x,y) = \operatorname{sgn}(\phi^{(0)}(x,y))$ en el caso de (7.63). El algoritmo propuesto en [26, Secc. 5.1] para la resolución de (7.230) es el siguiente (para facilitar la exposición consideraremos el caso bidimensional, sin embargo en [26, Secc. 5.1] se detalla como implementar el algoritmo en un espacio de dimensión arbitraria):

1. Buscamos aproximar la solución de (7.230) por funciones $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ en el espacio estándar

$$\mathcal{V}_1^h = \mathcal{P}^1(\mathcal{T}) \cap C(\Omega) \tag{7.231}$$

de elementos finitos lineales por partes (usamos la notación de (7.13); h denota el mayor diámetro de los triángulos en $\mathcal{T}$). Si llamamos $\mathbf{v}_j$ al nodo

$$\mathbf{v}_j := \mathbf{node}(j,:), \quad j = 1, 2, \ldots, \mathbf{nnode} \tag{7.232}$$

y llamamos δs al paso de tiempo, la solución aproximada $\phi(x,y;s)$ está determinada por los valores

$$\mathbf{phi}(j,n) := \phi(\mathbf{v}_j; n \cdot \delta s) = \phi(\mathbf{node}(j,:); n \cdot \delta s), \quad j = 1, 2, \ldots, \mathbf{nnode}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{7.233}$$

de ϕ en los nodos de la triangulación en los distintos instantes $s = \delta s$, $s = 2\delta s$, ..., del pseudo-tiempo s. Suponemos también que el coeficiente $F(x,y)$ y el término fuente $f(x,y)$ pertenecen a $\mathcal{V}_1^h$, i.e., que están representados por arreglos $\tilde{F}, \tilde{f} \in \mathbb{R}^{\mathbf{nnode}}$ tales que

$$\tilde{F}(j) = F\Big(\mathbf{node}(j,:)\Big), \quad \tilde{f}(j) = F\Big(\mathbf{node}(j,:)\Big), \quad j = 1, \ldots, \mathbf{nnode}. \tag{7.234}$$

El objetivo es determinar los valores de $\mathbf{phi}(:, n+1)$ a partir de los valores de $\mathbf{phi}(:, n)$, $\tilde{F}$ y $\tilde{f}$.

2. Se definen los arreglos $\nabla N \in \mathbb{R}^{\mathbf{nele}\times 3\times 2}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{\mathbf{nele}\times 3\times 2}$, $\bar{F} \in \mathbb{R}^{\mathbf{nele}}$ y $\bar{f} \in \mathbb{R}^{\mathbf{nele}}$ del siguiente modo: para cada $k = 1, \ldots, \mathbf{nele}$,

$$\bar{F}(k) := \frac{\tilde{F}\Big(\mathbf{ele}(k,1)\Big) + \tilde{F}\Big(\mathbf{ele}(k,2)\Big) + \tilde{F}\Big(\mathbf{ele}(k,3)\Big)}{3} \quad \text{y} \tag{7.235}$$

$$\bar{f}(k) := \frac{\tilde{f}\Big(\mathbf{ele}(k,1)\Big) + \tilde{f}\Big(\mathbf{ele}(k,2)\Big) + \tilde{f}\Big(\mathbf{ele}(k,3)\Big)}{3} \tag{7.236}$$

(estas expresiones conciden con las definiciones de $\bar{F} = \fint_T F$ y de $\bar{f} = \fint_T f$ en [26, p. 22]). En cuanto a ∇N, para cada $i = 1, 2, 3$

a) sea

$$\mathbf{p}_{k,i} = \mathbf{node}\Big(\mathbf{ele}(k,i), :\Big), \quad i = 1, 2, 3 \tag{7.237}$$

el nodo i del elemento T_k;

b) sea $N_{k,i}(x, y) \in \mathcal{P}^1(T_k)$ la función base determinada por

$$N_{k,i}(\mathbf{p}_j) = \delta_{ij}, \quad j = 1, 2, 3; \tag{7.238}$$

c) sea $\nabla N(k, i, :)$ el vector $\nabla(N_{k,i}) \in \mathbb{R}^2$ (el cual es constante pues $N_{k,i} \in \mathcal{P}^1(T_k)$);

d) sea $\mathbf{n}(k, i, :)$ el vector

$$\mathbf{n}(k, i, :) = 2|T_k|\nabla N(k, i, :), \tag{7.239}$$

donde $|T_k|$ denota el área de T_k (i.e., $\mathbf{n}_i$ es perpendicular al segmento de ∂T_k opuesto al vértice $\mathbf{p}_{k,i}$ y su magnitud está dada por la longitud de dicho segmento).

3. Se introducen las variables auxiliares $\mathbf{phi}*(j)$, $\mathbf{w}(j)$ y $\mathbf{z}(j)$, $j = 1, \ldots, \mathbf{nnode}$, inicializadas en $\mathbf{phi}*(j) = \mathbf{w}(j) = \mathbf{z}(j) = 0$ para todo j. Su rol será explicado más adelante.

4. Para cada $k = 1, \ldots, \mathbf{nele}$:

a) Sea $\nabla\phi^n \in \mathbb{R}^2$ el vector

$$\nabla\phi^n = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{phi}(\mathbf{ele}(k,j); n)\nabla N(k, j, :). \tag{7.240}$$

b) Para cada $i = 1, 2, 3$ sea

$$K_i = \frac{\bar{F}(k)\nabla\phi^n \cdot \mathbf{n}(k, i, :)}{2|\nabla\phi^n|}. \tag{7.241}$$

c) Sea

$$\delta\phi = K_1\mathbf{phi}(\mathbf{ele}(k,1), n) + K_2\mathbf{phi}(\mathbf{ele}(k,2), n) + K_3\mathbf{phi}(\mathbf{ele}(k,3), n). \tag{7.242}$$

d) Para cada $i = 1, 2, 3$ sea

$$\delta\phi_i = \frac{K_i^+}{K_1^- + K_2^- + K_3^-} \sum_{j=1}^{3} K_j^- \Big(\mathbf{phi}\Big(\mathbf{ele}(k,i), n\Big) - \mathbf{phi}\Big(\mathbf{ele}(k,j), n\Big)\Big), \tag{7.243}$$

en donde $K_j^+ = \operatorname{máx}\{0, K_j\}$ y $K_j^- = \operatorname{mín}\{0, K_j\}$, $j = 1, 2, 3$.

e) Para cada $i = 1, 2, 3$, sea

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{\text{máx}\left(0, \frac{\delta\phi_i}{\delta\phi}\right)}{\sum_{j=1}^{3} \text{máx}\left(0, \frac{\delta\phi_j}{\delta\phi}\right)} \tag{7.244}$$

f) Para cada $i = 1, 2, 3$, se actualizan $\mathbf{phi}*$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{z}$ en los vértices de T_k de la siguiente forma:

$$\mathbf{phi}*(\mathbf{ele}(k,i)) = \mathbf{phi}*(\mathbf{ele}(k,i)) + \tilde{\alpha}_i\Big(\delta\phi - f_k|T_k|\Big) \tag{7.245}$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{ele}(k,i)) = \mathbf{w}(\mathbf{ele}(k,i)) + \tilde{\alpha}_i|T_k|, \tag{7.246}$$

y, si $\delta\phi_i > 0$, entonces para cada $j = 1, 2, 3$, $j \neq i$ ejecutar la operación

$$\mathbf{z}(\mathbf{ele}(k,i)) = \mathbf{z}(\mathbf{ele}(k,i)) + \frac{K_i^+|K_j^-|}{K_1^+ + K_2^+ + K_3^+}. \tag{7.247}$$

5. Para cada $j = 1, \ldots, \mathbf{nnode}$,

a) Elegir un paso de tiempo δs tal que

$$0 \leq \delta s \leq \min_{j=1,\ldots,\mathbf{nnode}} \frac{\mathbf{w}(j)}{\mathbf{z}(j)}. \tag{7.248}$$

b) Calcular

$$\mathbf{phi}(j, n+1) = \mathbf{phi}(j, n) - \delta s \frac{\mathbf{phi}*(j)}{\mathbf{w}(j)}. \tag{7.249}$$

c) Repetir el ciclo 3.–4*f*) para recalcular $\mathbf{phi}*$ y $\mathbf{w}$ usando los valores de $\mathbf{phi}(:, n+1)$ en lugar de los de $\mathbf{phi}(:, n)$, y redefinir finalmente $\mathbf{phi}(:, n+1)$ como

$$\mathbf{phi}(j, n+1) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{phi}(j, n) + \mathbf{phi}(j, n+1)\Big) - \frac{\delta s}{2}\frac{\mathbf{phi}*(j)}{\mathbf{w}(j)}. \tag{7.250}$$

La idea del método es resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi con término fuente

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} + H(x, y, \nabla\phi(x, y)) = f(x, y) \tag{7.251}$$

actualizando ϕ mediante la ecuación

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\delta s} = -\mathcal{H}_j^n \tag{7.252}$$

(comparar con (7.249)), en donde $\mathcal{H}_j^n$ es una aproximación numérica de $H(x, y, \nabla\phi(x, y)) - f(x, y)$ en $(x, y) = \mathbf{v}_j = \mathbf{node}(j, :)$. La ecuación de Hamilton-Jacobi no tiene solución única, sin embargo es posible recuperar, entre las distintas soluciones de la ecuación, aquella que tiene mayor significado físico, agregando un término de viscosidad y tomando el límite cuando el coeficiente de viscosidad tiende a cero (es el celebrado método de la viscosidad introducido por Crandall & Lions, uno de los trabajos por los cuales le fue entregada la Medalla Fields a P.L. Lions en 1994, [33]). Existen algunas maneras de definir $\mathcal{H}_j^n$ bajo las cuales es posible demostrar que la ecuación (7.252) converge a la solución viscosa de la ecuación de Hamilton-Jacobi a medida que el ancho de la partición tiende a cero [26, p. 5], [28]. Una de estas maneras es usando una malla Cartesiana y la aproximación descrita en la Sección 7.2.4. En el caso de triangulaciones en elementos finitos más generales, es posible demostrar que el algoritmo converge a la solución viscosa si se cumplen, por ejemplo, las siguientes condiciones

- $\mathcal{H}_j^n$ es de la forma

$$\mathcal{H}_j^n = \frac{\sum_{k=1}^{\mathbf{nele}} \alpha_j^k |T_k| \fint_{T_k} (H(x,y,\nabla\phi^n) - f(x,y))\,\mathrm{d}(x,y)}{\sum_{k=1}^{\mathbf{nele}} \alpha_j^k |T_k|}, \tag{7.253}$$

en donde α_j^k toman valores entre 0 y 1 y son tales que $\alpha_j^k = 0$ cada vez que el vértice $\mathbf{v}_j$ no pertenece al elemento T_k (i.e., $\mathcal{H}_j^n$ es un promedio ponderado de los valores de $H(x,y,\nabla\phi) - f(x,y)$ en los elementos que están alrededor de $\mathbf{v}_j$)

- al escribir $\mathcal{H}_j^n$ en términos de los valores de ϕ^n en los vértices, i.e., reemplazando $\nabla\phi$ en $H(x,y,\nabla\phi(x,y))$ usando la relación

$$\phi(x,y;n\delta s) = \sum_{i=1}^{3} \phi_j^n N_{k,i}(x,y) \quad \Rightarrow \quad \nabla\phi(x,y;n\delta s) = \sum_{i=1}^{3} \phi_j^n \nabla N_{k,i}, \tag{7.254}$$

la expresión resultante $\mathcal{H}_j^n = G_j(\phi^n)$ y el paso de tiempo δs son tales que

$$\frac{\partial G_j}{\partial \phi_i^n} \leq 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq \delta s \leq \left(\frac{\partial G_j}{\partial \phi_j^n}\right)^{-1}, \quad \forall\, i,j = 1,\ldots,\mathbf{nele},\ i \neq j. \tag{7.255}$$

En [26, Secc. 3.1] Barth & Sethian proponen un método que satisface ambas condiciones, el cual, sin embargo, termina involucrando aproximaciones no locales de los gradientes e imponiendo restricciones sobre la geometría de las triangulaciones. Por estas razones terminan proponiendo como una mejor alternativa (en el caso en que $H(x,y,\nabla\phi)$ sea homogéneo con respecto a $\nabla\phi$, lo cual se cumple en particular para Hamiltonianos de la forma $H(x,\nabla\phi) = F(x)|\nabla\phi|$) el método cuya implementación hemos descrito en las páginas precedentes, en el cual $\mathcal{H}_j^n$ es de la forma (7.253) y es tal que al escribirlo en términos de los valores de la función incógnita en los nodos (considerando el caso $f(x,y) = 0$ en el cual se encuentran presentes todas las dificultades) puede representarse como

$$\mathcal{H}_j^n = \sum_{i=1, i\neq j}^{\mathbf{nnode}} \beta_j^i(\phi^n)(\phi_j^n - \phi_i^n), \tag{7.256}$$

con

$$\beta_j^i \geq 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq \delta s \leq \left(\sum_{l=1, l\neq j}^{\mathbf{nele}} \beta_j^l(\phi^n)\right)^{-1}, \quad \forall\, i,j = 1,2,\ldots,\mathbf{nele},\ i \neq j, \tag{7.257}$$

i.e., la estructura del Hamiltoniano numérico es similar a la descrita por las ecuaciones (7.255).

En efecto,

$$\fint_{T_k} H(\nabla\phi) = \fint_{T_k} (F(x,y)|\nabla\phi(x,y)|) = |\nabla(\phi|_{T_k})| \fint_{T_k} F = \bar{F}(k)|\nabla(\phi|_{T_k})|, \tag{7.258}$$

ya que $\phi \in \mathcal{V}_1^h$ y, por lo tanto, $\nabla\phi$ es constante en T_k. Tenemos entonces que

$$\fint_{T_k} H(\nabla\phi) = \bar{F}(k)\frac{\nabla(\phi|_{T_k})}{|\nabla(\phi|_{T_k})|} \cdot \nabla(\phi|_{T_k}) = \sum_{i=1}^{3} \bar{F}(k)\frac{\nabla(\phi|_{T_k})}{|\nabla(\phi|_{T_k})|} \cdot \phi(\mathbf{p}_{k,i})\nabla N_{k,i} \tag{7.259}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{|T_k|}\left(\frac{\bar{F}(k)\nabla(\phi|_{T_k}) \cdot \mathbf{n}_{k,i}}{2|\nabla(\phi|_{T_k})|}\right)\phi(\mathbf{p}_{k,i}) = \frac{1}{|T_k|}\sum_{i=1}^{3} K_{k,i}\phi(\mathbf{p}_{k,i}), \tag{7.260}$$

donde hemos usado (7.240), (7.239) y (7.241).

Por un lado, la ecuación anterior nos muestra que

$$\delta\phi^{(T)} = |T| \fint_T H(\nabla\phi) \tag{7.261}$$

en cada elemento $T \in \mathcal{T}$, donde $\delta\phi^{(T)}$ es el de la ecuación (7.242). Esto, junto a (7.245), (7.246) y (7.249) implican que

$$\mathcal{H}_j^n = \frac{\sum_{T\in\mathcal{T}} \tilde{\alpha}_j^{(T)} |T| \fint_T H(\nabla\phi)}{\sum_{T\in\mathcal{T}} \tilde{\alpha}_j^{(T)} |T|}, \tag{7.262}$$

i.e., $\mathcal{H}_j^n$ es de la forma (7.253).

Por otro lado, escribiendo $K_{k,i} = K_{k,i}^- + K_{k,i}^+$ tenemos que

$$|T_k| \fint_{T_k} H(\nabla\phi) = \sum_{i=1}^{3} K_{k,i}\phi(\mathbf{p}_{k,i}) = \sum_{j=1}^{3} K_{k,j}^-\phi(\mathbf{p}_{k,j}) + \sum_{i=1}^{3} K_{k,i}^+\phi(\mathbf{p}_{k,i}) \tag{7.263}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^3 K_{k,i}^+}{\sum_{i=1}^3 K_{k,i}^+} \sum_{j=1}^{3} K_{k,j}^-\phi(\mathbf{p}_{k,j}) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\sum_{j=1}^3 K_{k,j}^-}{\sum_{j=1}^3 K_{k,j}^-} K_{k,i}^+\phi(\mathbf{p}_{k,i}). \tag{7.264}$$

Ahora bien, los $K_{k,i}$, $i = 1, 2, 3$, tienen la propiedad especial de ser tales que $\sum_{i=1}^3 K_{k,i} = 0$ (heredan esta propiedad de los $\mathbf{n}_{k,i}$, los cuales suman cero pues la suma de los vectores área correspondientes a las caras de un poliedro es siempre igual a cero). Por lo tanto $\sum_{i=1}^3 K_{k,i}^- = -\sum_{i=1}^3 K_{k,i}^+$ y

$$\delta\phi^{(T_k)} = |T_k| \fint_{T_k} H(\nabla\phi) \tag{7.265}$$

$$= \frac{1}{\sum_{l=1}^3 K_{k,l}^+} \sum_{i=1}^{3} \left(K_{k,i}^+ \sum_{j=1}^{3} K_{k,j}^-\phi(\mathbf{p}_{k,j}) - \left(\sum_{j=1}^{3} K_{k,j}^- \right) K_{k,i}^+\phi(\mathbf{p}_{k,i}) \right) \tag{7.266}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{K_{k,i}^+}{K_{k,1}^+ + K_{k,2}^+ + K_{k,3}^+} \sum_{j=1}^{3} K_{k,j}^- \Big(\phi(\mathbf{p}_{k,j}) - \phi(\mathbf{p}_{k,i}) \Big) = \sum_{i=1}^{3} \delta\phi_i^{(T_k)}, \tag{7.267}$$

donde $\delta\phi_i^{(T_k)}$ ha sido definido en (7.243). Esto motiva la elección de los ponderadores $\tilde{\alpha}_i^{(T_k)}$ en (7.244): supongamos que $\delta\phi_i^{(T_k)} \geq 0$ para todo $k = 1, \ldots, \mathbf{nele}$ y todo $i = 1, 2, 3$ (lo cual es cierto, p. ej., si la triangulación es aguda, de acuerdo a [26, p. 12]). La descomposición

$$\delta\phi^{(T_k)} = \sum_{i=1}^{3} \delta\phi_i^{(T_k)}$$

refleja que en cada elemento $T \in \mathcal{T}$, la cantidad $\frac{\delta\phi_i^{(T_k)}}{\delta\phi^{(T_k)}}$ nos dice cuánto del Hamiltoniano $H(\nabla\phi)$ en el elemento T de debe a la contribución realizada por el vértice i. El paso siguiente consiste en invertir los papeles: $\frac{\delta\phi_i^{(T_k)}}{\delta\phi^{(T_k)}}$ será elegido como el parámetro que determina qué tanto vamos a tener en cuenta a cada elemento T_k alrededor de un vértice $\mathbf{v}_j$ a la hora de calcular $H(\nabla\phi)$ en $\mathbf{v}_j$.

De cualquier manera (i.e., aún en el caso en que algunos de los $\delta\phi_i^{(T_k)}$ sean negativos), lo que queremos señalar en este momento es que al combinar (7.262) con

$$\sum_{T\in\mathcal{T}} \tilde{\alpha}_j^{(T)} |T| \fint_{|T|} H(\nabla\phi) = \sum_{T\in\mathcal{T}} \text{máx}\left\{0, \frac{\delta\phi_{\mathbf{v}_j}^{(T)}}{\delta\phi^{(T)}}\right\} \delta\phi^{(T)} = \sum_{T\in\mathcal{T}_j} \delta\phi_{\mathbf{v}_j}^{(T)}, \tag{7.268}$$

en donde

$$\mathcal{T}_j = \{T \in \mathcal{T} : \delta\phi_{\mathbf{v}_j}^{(T)} > 0\} \neq \varnothing, \tag{7.269}$$

obtenemos que

$$\mathcal{H}_j^n = \sum_{i=1}^{\mathbf{nnode}} \frac{\left(\sum\limits_{\substack{T\in\mathcal{T}_j \\ \mathbf{v}_i\in T_j}} \frac{K_{T,\mathbf{v}_j}^{+}|K_{T,\mathbf{v}_i}^{-}|}{\sum_{l=1}^{3} K_{T,l}^{+}} \right)}{\sum_{T\in\mathcal{T}} \tilde{\alpha}_j^{(T)}|T|}(\phi_j^n - \phi_i^n), \tag{7.270}$$

lo cual, junto a (7.248), demuestra (7.257).

La condición para el paso de tiempo en (7.257) asegura que al actualizar ϕ_j^{n+1} según la operación

$$\phi_j^{n+1} = \left(1 - \sum_{i=1, i\neq j}^{\mathbf{nnode}} \delta s \beta_j^i\right)\phi_j^n + \sum_{i=1, i\neq j}^{\mathbf{nnode}} \delta s \beta_j^i \phi_i^n \tag{7.271}$$

estaremos calculando ϕ_j^{n+1} como una combinación lineal de los ϕ_i^n en donde los $\mathbf{nnode}$ coeficientes involucrados son todos positivos (de ahí el nombre *método de los coeficientes positivos*). Al calcular cada ϕ_j^{n+1} como una combinación lineal convexa de los valores anteriores de ϕ obtenemos un método que satisface una versión discreta del principio del máximo, tanto de carácter global:

$$\operatorname*{mín}_{i=1,\ldots,\mathbf{nnode}} \phi_i^n \leq \phi_j^{n+1} \leq \operatorname*{máx}_{i=1,\ldots,\mathbf{nnode}} \phi_i^n, \quad j = 1, \ldots, \mathbf{nnode} \tag{7.272}$$

como de carácter local:

$$\operatorname*{mín}_{\substack{i=1,\ldots,\mathbf{nnode} \\ \mathbf{v}_i \text{ adyacente a } \mathbf{v}_j}} \phi_i^n \leq \phi_j^{n+1} \leq \operatorname*{máx}_{\substack{i=1,\ldots,\mathbf{nnode} \\ \mathbf{v}_i \text{ adyacente a } \mathbf{v}_j}} \phi_i^n, \quad j = 1, \ldots, \mathbf{nnode}, \tag{7.273}$$

lo cuál se traduce en la estabilidad del modelo en la norma del máximo [26, pp. 5, 12 y 18]. La exactitud del método se estudia a través de distintos ejemplos en [26, Secc. 5.3] (se demuestra que el error es esencialmente inversamente proporcional al tamaño de la partición en el caso en que la solución del problema sea regular, e inversamente proporcional a la raíz cúbica del tamaño de la partición ante la presencia de singularidades).

El paso 5*c*) corresponde a un método conocido de integración numérica en dos etapas [26, Secc. 4.1.2] mediante el cual la precisión numérica pasa de ser de primer orden con respecto al paso de tiempo a ser $O\Big((\delta s)^2\Big)$.

Finalmente mencionamos que además del método de los coeficientes positivos, Barth & Sethian proponen un método variacional de tipo Petrov-Galerkin [26, Secc. 3.3], el cual demuestra tener un order de convergencia ligeramente más alto a pesar de no satisfacer las propiedades que sí satisface el método de coeficientes positivos, a saber, las versiones discretas del principio del máximo. Una ventaja adicional que ofrece este método es que permite evitar las oscilaciones de las curvas de nivel que en ocasiones se presentan ante la presencia de discontinuidades en las derivadas de la solución de la ecuación (estas podrían presentarse en el problema de la evolución de la superficie de quiebre si dicha superficie tuviera esquinas u otro tipo de singularidades geométricas).

7.3. Teorema de existencia

En esta Sección presentamos un resultado de existencia de minimizadores para el problema de discontinuidad libre asociado a la determinación de la superficie de quiebre. Este resultado está basado en los trabajos y en los métodos de Fonseca, Fusco, Leoni & Millot [30] y de Bonnetier & Chambolle [25]. Para mayor información sobre la notación utilizada y sobre la teoría clásica de existencia de minimizadores en el cálculo de variaciones sugerimos al lector consultar alguno de los libros estándar en ecuaciones en derivadas parciales y en elasticidad no lineal, como los de Evans [29], Ciarlet [27] y Ambrosio, Fusco & Pallara [22]. Por razones que se explicarán más adelante, consideraremos solamente el problema bidimensional. Sea $\Omega = (0, L) \times (0, H)$, donde H y L son constantes positivas. Nos restringiremos al estudio de cavidades que puedan representarse por funciones del tipo $x = h(z)$, de la siguiente manera:

$$E = \{(x, z) \in [0, L_0] \times [0, H_0] : x \leq h(z)\}, \tag{7.274}$$

donde $L_0 < L$ y $H_0 < H$ son constantes prefijadas y $h : [0, H_0] \to [0, L_0]$. Supondremos además que el perímetro de la cavidad nunca sobrepasa un valor prefijado M:

$$\int_0^H \sqrt{1 + h'(z)^2}\, \mathrm{d}z = \mathrm{Per}(E) \leq M, \tag{7.275}$$

para evitar que la frontera de las cavidades oscile de forma incontrolada. Definimos entonces la siguiente clase de cavidades admisibles:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \{E \subset [0, L_0] \times [0, H_0] : E &\text{ es un subgrafo asociado a alguna función} \\ &\text{semicontinua superiormente } h : [0, H_0] \to [0, L_0] \text{ con perímetro } \mathrm{Per}\, E \leq M\}. \end{aligned} \tag{7.276}$$

Pedimos que las funciones de “altura” (alturas horizontales) sean semicontinuas superiormente para que las cavidades $E \in \mathcal{A}$ sean subconjuntos cerrados de $[0, L_0] \times [0, H_0]$ (lo cual hace que el dominio de definición $\Omega \setminus E$ del campo de desplazamientos sea un conjunto abierto). Dotamos a $\mathcal{A}$ con la topología inducida por la distancia de Hausdorff $d_{\mathcal{H}}$, cuya definición recordamos brevemente: dados dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^2$, la distancia de Hausdorff entre A y B está dada por

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset \mathcal{N}_\varepsilon(B) \text{ y } B \subset \mathcal{N}_\varepsilon(A)\}, \tag{7.277}$$

donde $\mathcal{N}_\varepsilon(C)$ denota la vecindad tubular de ancho ε de un conjunto C:

$$\mathcal{N}_\varepsilon(C) = \{z \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{dist}(z, C) < \varepsilon\}. \tag{7.278}$$

Sea $\Gamma = ([0, L] \times \{H\}) \cup (\{L\} \times [0, H])$. Denotamos por $\mathbf{g} : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ al campo de esfuerzos lejanos (la compresión lateral y vertical) y suponemos que $\mathbf{g} \in L^2(\Gamma)$ y $\mathbf{g} = 0$ en $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Denotamos por $\mathbf{u} : \Omega \setminus E \to \mathbb{R}^2$ al campo de desplazamientos. La densidad de energía elástica correspondiente a esta deformación es

$$W(\nabla \mathbf{u}) = \mu |\mathbf{e}(\mathbf{u})|^2 + \frac{\lambda}{2}(\mathrm{div}\, \mathbf{u})^2, \qquad \mathbf{e}(\mathbf{u}_i) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}.$$

Finalmente, recordemos que estamos asumiento que la energía disipada en el proceso de fractura es proporcional al volumen total de roca desprendida.

Definimos

$$\mathcal{C}(E) = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega \setminus E; \mathbb{R}^2) : \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ c.t.p. en } [L_0, L] \times \{0\}\}. \tag{7.279}$$

Definimos la clase de pares admisibles conjunto-función como

$$X = \{(E, \mathbf{u}) : E \in \mathcal{A}, \mathbf{u} \in \mathcal{C}(E)\}. \tag{7.280}$$

El siguiente es nuestro resultado de existencia:

Teorema 7.3.1. *El funcional $J : X \to [0, \infty)$,*

$$J(E, \mathbf{u}) := \int_{\Omega \setminus E} W(\nabla \mathbf{u}) - \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \kappa |E|, \tag{7.281}$$

tiene un minimizador en X, es decir, existe $(E_0, \mathbf{u}_0) \in X$ tal que

$$J(E_0, \mathbf{u}_0) = \text{ínf}\{J(E, \mathbf{u}) : (E, \mathbf{u}) \in X\}. \tag{7.282}$$

El teorema se demuestra mediante el método directo del cálculo de variaciones, es decir, aplicando los resultados de compacidad y semicontinuidad inferior que demostraremos en este capítulo a una sucesión minimizante $\{(E_n, \mathbf{u}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, es decir, una sucesión en X tal que

$$J(E_n, \mathbf{u}_n) \to \text{ínf}\{J(E, \mathbf{u}) : (E, \mathbf{u}) \in X\}. \tag{7.283}$$

7.3.1. Compacidad

Sea $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{A}$ asociada a la sucesión de funciones $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Gracias a la semicontinuidad superior de las funciones h_n, todas las cavidades E_n son subconjuntos compactos de $\overline{\Omega}$, el cual también es compacto. En virtud del teorema de Blaschke, tenemos que existe un conjunto compacto E al que las cavidades E_n convergen cuando $n \to \infty$ en el sentido de la distancia de Hausdorff. Más aún, tenemos el siguiente lema.

Lema 7.3.1. *Sea $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{A}$ asociada a las funciones $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $E_n \to E$ a medida que $n \to \infty$ en la métrica de Hausdorff, para algún $E \subset \overline{\Omega}$. Entonces E es un subgrafo asociado a una función semicontinua superiormente $h : [0, H_0] \to [0, L_0]$, dada por*

$$h(z) = \sup \left\{ \liminf_{n \to \infty} h_n(z_n) : z_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} z \right\}, \tag{7.284}$$

y $\operatorname{Per} E \leq M$.

Demostración. Paso 1. Sea $z_0 \in [0, H_0]$ tal que $(0, z_0)$ pertenece a la proyección de E sobre el eje z. Llamamos $L_{\text{máx}}$ a

$$L_{\text{máx}} := \sup\{x \geq 0 : (x, z_0) \in E\}. \tag{7.285}$$

Supongamos, buscando llegar a una contradicción, que existe $x_0 \in [0, L_{\text{máx}}]$ tal que $(x_0, z_0) \notin E$. Como E es cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B((x_0, z_0), \varepsilon) = \varnothing$. Luego, gracias a la convergencia de Hausdorff de E_n a E, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B((x_0, z_0) \cap E_n) = \varnothing$ para todo $n \geq n_0$.
Considere la banda horizontal $C = \{(x, z) \in [0, L_0] \times [0, H_0] : z_0 - \varepsilon \leq z \leq z_0 + \varepsilon\}$. Por definición de $L_{\text{máx}}$, existe $x > x_0 + \varepsilon$ tal que $(x, z_0) \in E$. Sea $\{(x_n, z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(x_n, z_n) \in E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $(x_n, z_n) \to (x, z_0)$ cuando $n \to \infty$. Como E_n es un subgrafo, $[(0, z_n), (x_n, z_n)] \subset E_n$. Sin embargo, este segmento debe intersectar a $B((x_0, z_0), \varepsilon)$ en un segmento de longitud positiva para $n \geq N$ luego $B((x_0, z_0), \varepsilon) \cap E_n \neq \varnothing$ y esto contradice el hecho de que $B((x_0, z_0), \varepsilon) \cap E_n = \varnothing$ para $n \geq n_0$.

Paso 2. Sea $z \in [0, H_0]$ tal que $(0, z)$ pertenece a la proyección de E sobre el eje z. Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n \to z$ cuando $n \to \infty$. Definimos

$$h_n(z_n) = \sup\{x \geq 0 : (x, z_n) \in E_n\} \tag{7.286}$$

$$h(z) = \sup\{x \geq 0 : (x, z) \in E\}. \tag{7.287}$$

Sabemos que $[(0, z_n), (h_n(z_n), z_n)] \subset E_n$ y $E_n \to E$ en la métrica de Hausdorff. Queremos mostrar que

$$((0, z), (\liminf_{n\to\infty} h_n(z_n), z)) \subset E. \tag{7.288}$$

Supongamos, buscando una contradicción, que $h(z) < l = \liminf_{n\to\infty} h_n(z_n)$. Esto implica que $(l, z) \in \mathbb{R}^2 \setminus E$, el cual es un abierto. Por lo tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B((l, z), \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus E$. En consecuencia, el segmento $((l - \varepsilon, z), (l, z)) \subset \mathbb{R}^2 \setminus E$. Más aún, gracias a la convergencia de Hausdorff de los E_n hacia E, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B((l, z), \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus E_n$ para todo $n \geq n_0$. Sea $x \in (l - \varepsilon, l)$. Para todo n lo suficientemente grande, $h_n(z_n) < x$. Tomando el límite a los dos lados de la desigualdad se obtiene que $l \leq x < l$, lo cual es contradictorio. Esto muestra que

$$\sup\left\{\liminf_{n\to\infty} h_n(z_n) : z_n \to z\right\} \leq h(z). \tag{7.289}$$

Para mostrar la desigualdad inversa, sea $z \in [0, H_0]$. Como $(h(z), z) \in E$ y $E_n \to E$, existe una sucesión $\{(x_n, z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en E_n tal que

$$\begin{cases} z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \\ x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} h(z) \end{cases}. \tag{7.290}$$

Como $x_n \leq h_n(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ya que cada E_n es un subgrafo), entonces

$$h(z) = \lim_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} h_n(z_n), \tag{7.291}$$

lo cual implica que

$$h(z) \leq \sup \left\{ \liminf_{n\to\infty} h_n(z_n) : z_n \to z \right\}. \tag{7.292}$$

Paso 3. Como

$$\operatorname{Per} E_n = \int_0^{H_0} \sqrt{1 + h_n'(z)^2}\, \mathrm{d}z \leq M < \infty, \tag{7.293}$$

la sucesión está acotada en $BV(0, H_0)$. Por lo tanto, extrayendo una subsucesión de ser necesario, $h_n \to \tilde{h}$ en $L^1(0, H_0)$ y $\mathcal{L}^1$-casi en todas partes, para alguna función $\tilde{h} \in BV(0, H_0)$.

Queremos mostrar que $\tilde{h} = h$ $\mathcal{L}^1$-c.t.p. en $[0, H_0]$. Sea $N_0 \subset (0, H_0)$ tal que $\mathcal{L}^1(N_0) = 0$ y $h_n(z) \to \tilde{h}(z)$ para todo $z \in (0, H_0) \setminus N_0$. Por definición de h, se sigue que $\tilde{h}(z) \leq h(z)$ para todo $z \in (0, H_0) \setminus N_0$. Ahora demostraremos la desigualdad inversa. Extrayendo una subsucesión en caso de ser necesario, el teorema de Blaschke nos permite concluir que existe un compacto K tal que $\partial E_n \to K$ en la métrica de Hausdorff. Como ∂E_n es conexo (por ser la frontera de un subgrafo cerrado en $\mathbb{R}^2$), gracias al teorema de Golab tenemos que K es conexo y

$$\mathcal{H}^1(K) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{H}^1(\partial E_n) < \infty. \tag{7.294}$$

Afirmamos que $\partial E \subset K$. En efecto, supongamos que existe $(x, z) \in \partial E \setminus K$. Entonces si n es lo suficientemente grande, $B((x, z), \varepsilon) \cap \partial E_n = \varnothing$ para algún $\varepsilon > 0$ independiente de n. En otras palabras, $B((x, z), \varepsilon) \subset E_n$ ó $B((x, z), \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus E_n$ para n grande. Como $E_n \to E$ en la métrica de Hausdorff, deducimos que $B((x, z), \varepsilon) \subset E$ o bien $B((x, z), \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus E$, lo cual es imposible. Por lo tanto, (7.294) implica que $\mathcal{H}^1(\partial E) < \infty$. Fijemos $z \in [0, H_0]$ y definamos $K_z := K \cap \{(x, z) : x \geq 0\}$. Afirmamos que K_z es conexo. En efecto, si (x_1, z), $(x_2, z) \in K_z$, con $0 < x_1 < x_2$, y $x \in (x_1, x_2)$, entonces existen dos sucesiones $\{(x_{i,n}, z_{i,n})\}_{n\in\mathbb{N}}$, $i = 1, 2$, tales que $(x_{i,n}, z_{i,n}) \in E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $(x_{i,n}, z_{i,n}) \to (x_i, z)$ a medida que $n \to \infty$. Extrayendo una subsucesión de ser necesario, podemos asumir que $z_{1,n} \leq z_{2,n}$ y $x_{1,n} < x < x_{2,n}$ para todo n. Más aún, es posible demostrar que $\partial E_n \cap \{(x, z) : z \in [z_{1,n}, z_{2,n}], x \geq 0\}$ es conexo. Luego, para todo n existe $z_n \in [z_{1,n}, z_{2,n}]$ tal que $(x, z_n) \in \partial E_n$. Usando el hecho de que $(x, z_n) \to (x, z)$, deducimos que $(x, z) \in K$, lo cual muestra que K_z es conexo.

Denotemos por N_1 el conjunto de puntos $z \in [0, H_0]$ tales que $\mathcal{H}^1(K_z) > 0$. Entonces N_1 es a lo más numerable pues $\mathcal{H}^1(K) < \infty$. Más aún, como K_z es conexo y $(h(z), z) \in \partial E \subset K$ para todo z, inferimos que $K_z = \{(h(z), z)\}$ para todo $z \in [0, H_0] \setminus N_1$ tal que $h(z) > 0$. Tomemos una altura $z \in [0, H_0] \setminus (N_0 \cup N_1)$. Afirmamos que $\tilde{h}(z) \geq h(z)$. En efecto, supongamos que $\tilde{h}(z) < h(z)$. Por definición de h, existe $z_{n_k} \to z$ tal que $h_{n_k}(z_{n_k}) \to h(z)$. Fijemos un $x \in (\tilde{h}(z), h(z))$. Como $z \notin N_0$, $h_{n_k}(z) \to \tilde{h}(z)$. Por ende $h_{n_k}(z) < x < h_{n_k}(z_{n_k})$ para todo k lo suficientemente grande. Observe que $(x, z_{n_k}) \in \partial E_{n_k}$ para una cantidad finita de valores de k. En efecto, si lo contrario se cumpliera, concluiríamos

que $(x,z) \in K$, lo cual contradice nuestra suposición pues $K_z = \{(h(z),z)\}$. Luego, podemos suponer que $(x, z_{n_k}) \notin \partial E_{n_k}$ para todo k suficientemente grande. Como $x < h_{n_k}(z_{n_k})$, deducimos que $(x, z_{n_k}) \in \operatorname{Int} E_{n_k}$. Por otra parte, como $x > h_{n_k}(z)$ tenemos que $(x,z) \notin E_{n_k}$. Usando el hecho de que ∂E_{n_k} es conexo, concluimos que existe $z'_{n_k} \to z$ tal que $(x, z'_{n_k}) \in \partial E_{n_k}$, pero esto implicaría que $(x,z) \in K$, lo cual nuevamente contradice el hecho de que $K_z = \{(h(z),z)\}$. Por lo tanto hemos mostrado que $\tilde{h}(z) = h(z)$ para todo $z \in [0, H_0] \setminus (N_0 \cup N_1)$.
Se concluye que $E_n \to E$ en L^1 y, finalmente, que

$$\operatorname{Per} E \leq \liminf_{n\to\infty} \operatorname{Per} E_n \leq M. \tag{7.295}$$

□

7.3.2. Semicontinuidad inferior

En la clase X, consideramos la siguiente noción de convergencia, motivados por el lema de la sección anterior:

Definición 7.3.1. *Decimos que una sucesión de pares $\{(E_n, \mathbf{u}_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge a $(E, \mathbf{u}) \in X$ cuando $n \to \infty$, lo cual denotamos por $(E_n, \mathbf{u}_n) \overset{X}{\to} (E, \mathbf{u})$, si se cumplen las siguientes condiciones:*

$$(i)\ E_n \to E \text{ en la métrica de Hausdorff,} \tag{7.296}$$

$$(ii)\ \mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ débilmente en } H^1(\Omega \setminus E; \mathbb{R}^2). \tag{7.297}$$

Teorema 7.3.2. *El funcional J definido en (7.281) es semicontinuo inferiormente con respecto a la convergencia introducida en la definición anterior, esto es,*

$$(E_n, \mathbf{u}_n) \overset{X}{\to} (E, \mathbf{u}) \quad \Rightarrow \quad J(E, \mathbf{u}) \leq \liminf_{n\to\infty} J(E_n, \mathbf{u}_n). \tag{7.298}$$

Mostraremos la semicontinuidad inferior de cada término por separado, comenzando por la semicontinuidad inferior de la energía elástica.

Lema 7.3.2. *Si $\{(E_n, \mathbf{u}_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una sucesión tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} J(E_n, \mathbf{u}_n) < \infty$, entonces existe una subsucesión, a la que seguiremos llamando $\{(E_n, \mathbf{u}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, y un par $(E, \mathbf{u}) \in X$, tal que*

$$(E_n, \mathbf{u}_n) \overset{X}{\to} (E, \mathbf{u}) \quad y \quad \int_{\Omega\setminus E} W(\nabla \mathbf{u})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega\setminus E_n} W(\nabla \mathbf{u}_n)\, \mathrm{d}x. \tag{7.299}$$

Demostración. Gracias al Lema 7.3.1, sabemos que existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $E_n \to E$ en la métrica de Hausdorff.
Sea $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos abiertos contenidos de manera compacta en $\overline{\Omega} \setminus E$, con fronteras lo suficientemente regulares, tal que $[L_0, L] \times \{0\} \subset F_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y tal que

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i = \Omega \setminus E. \tag{7.300}$$

Fijemos $i \in \mathbb{N}$. Sea $\delta := d_{\mathcal{H}}(F_i, E) > 0$. Como $E_n \to E$ en la métrica de Hausdorff, por definición tenemos que

$$\exists\, N_i \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geq N_i, \ E_n \subset \mathcal{N}_{\delta/2}(E). \tag{7.301}$$

Como $F_i \subset \Omega \setminus \mathcal{N}_{\delta/2}(E)$, entonces

$$\forall\ n \geq N_i, \ F_i \subset \Omega \setminus E_n. \tag{7.302}$$

Definimos ahora n_i tal que

$$n_i = \text{mín}\{N_i \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geq N_i, \ F_i \subset \Omega \setminus E_n\}. \tag{7.303}$$

Mostremos ahora que $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es creciente. Como $F_i \subset F_{i+1}$,

$$\forall\, n \geq n_{i+1}, \ F_i \subset F_{i+1} \subset \Omega \setminus E_n. \tag{7.304}$$

Por lo tanto

$$\forall\, n \geq n_{i+1}, \ F_i \subset \Omega \setminus E_n, \tag{7.305}$$

lo cual implica que

$$n_{i+1} \geq n_i. \tag{7.306}$$

Se concluye que $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es creciente.
Fijemos $i \in \mathbb{N}$. Gracias a lo anterior,

$$\forall\, n \geq n_i, \quad \int_{F_i} |\mathbf{e}(\mathbf{u}_n)|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} \leq \int_{\Omega\setminus E_n} |\mathbf{e}(\mathbf{u}_n)|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{7.307}$$

Esto implica que

$$\sup_{n\geq n_i} \int_{F_i} |\mathbf{e}(\mathbf{u}_n)|^2 \leq \sup_{n\geq n_i} \int_{\Omega\setminus E_n} |\mathbf{e}(\mathbf{u}_n)|^2 < \infty \tag{7.308}$$

porque hemos supuesto que la energía está acotada. Dado que $\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ en $[L_0, L] \times \{0\}$, es posible aplicar la desigualdad de Korn con condición de borde en el conjunto F_i y obtener que

$$\forall\, n \geq n_i, \ \exists\, C(F_i, L_0) > 0 : \ \|\mathbf{u}_n\|_{H^1(F_i;\mathbb{R}^2)} \leq C(F_i, L_0) \int_{F_i} |\mathbf{e}(\mathbf{u}_n)|^2. \tag{7.309}$$

Como se vio anteriormente, esta integral está acotada, lo cual permite concluir que $\{\mathbf{u}_n\}_{n\geq n_i}$ está acotada en $H^1(F_i;\mathbb{R}^2)$.
Como $\{\mathbf{u}_n\}_{n\geq n_i}$ está acotada en $H^1(F_1;\mathbb{R}^2)$, existe una subsucesión que converge debilmente en F_1. Por lo tanto, existe una subsucesión $\{\mathbf{u}_{\varphi_1(n)}\}_{n\geq n_1}$, con $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ creciente, que converge debilmente en F_1 a alguna función $\mathbf{v}_1 \in H^1(F_1;\mathbb{R}^2)$. Como $\{\mathbf{u}_{\varphi_1(n)}\}_{n\geq n_2}$ es, a su vez, acotada en $H^1(F_2;\mathbb{R}^2)$, existe una función $\psi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal

que $\{\mathbf{u}_{\varphi_1\circ\psi_2(n)}\}_{n\geq n_2}$ converge debilmente en F_2. Denotaremos por φ_2 a $\varphi_1\circ\psi_2$. Tenemos entonces que $\{\mathbf{u}_{\varphi_2(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debilmente en F_2 a alguna función $\mathbf{v}_2 \in H^1(F_2;\mathbb{R}^2)$. Usando el mismo método, vemos que $\{\mathbf{u}_{\varphi_k(n)}\}_{n\geq n_k}$ coverge en F_k, para todo $k\in\mathbb{N}$, a una función $\mathbf{v}_k \in H^1(F_k;\mathbb{R}^2)$ con $\varphi_k = \varphi_1\circ\psi_1\circ\psi_2\circ\cdots\circ\psi_k$. Si llamamos $\varphi(n)$ a $\varphi_n(n)$, obtenemos que $\{\mathbf{u}_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debilmente a una función $\mathbf{u}$ definida por $\mathbf{u}=\mathbf{v}_i$ en F_i para cada i.

Sea ω un abierto contenido compactamente en $\Omega\setminus E$. Por definición de $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, existe $i\in\mathbb{N}$ tal que $\omega\subset F_i$. Por lo tanto, $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}$ cuando $n\to\infty$, debilmente en $H^1(\omega;\mathbb{R}^2)$. Luego, como ω es arbitrario, $\mathbf{u}\in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega\setminus E;\mathbb{R}^2)$. Obtenemos entonces que:

$$\int_{\Omega\setminus E}\mu|\mathbf{e}(\mathbf{u})|^2+\frac{\lambda}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 = \lim_{i\to\infty}\int_{F_i}\mu|\mathbf{e}(\mathbf{u})|^2+\frac{\lambda}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 \tag{7.310}$$

$$\leq \liminf_{i\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{F_i}\mu|\mathbf{e}(\mathbf{u}_n)|^2+\frac{\lambda}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u}_n)^2 \tag{7.311}$$

$$\leq \liminf_{i\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega\setminus E_n}\mu|\mathbf{e}(\mathbf{u}_n)|^2+\frac{\lambda}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u}_n)^2 \tag{7.312}$$

$$= \liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega\setminus E_n}\mu|\mathbf{e}(\mathbf{u}_n)|^2+\frac{\lambda}{2}(\operatorname{div}\mathbf{u}_n)^2 \tag{7.313}$$

donde hemos usado el resultado clásico de semicontinuidad inferior de la integral de un integrando cuadrático convexo de $\nabla\mathbf{u}$ con respecto a la convergencia débil en $H^1(F_i;\mathbb{R}^2)$. Finalmente,

$$\int_{\Omega\setminus E}W(\nabla\mathbf{u}) \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega\setminus E_n}W(\nabla\mathbf{u}_n). \tag{7.314}$$

Adicionalmente, vemos que

$$\int_{\Omega\setminus E}\mu|\mathbf{e}(\mathbf{u})|^2 \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega\setminus E_n}W(\nabla\mathbf{u}_n)\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leq \liminf_{n\to\infty}J(E_n,\mathbf{u}_n)<\infty. \tag{7.315}$$

Gracias a la desigualdad de Poincaré, $\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega\setminus E;\mathbb{R}^2)}<\infty$, esto es, $\mathbf{u}$ pertence a $H^1(\Omega\setminus E;\mathbb{R}^2)$ y no solamente a $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega\setminus E;\mathbb{R}^2)$. □

Lema 7.3.3. *La energía de superficie es continua, esto es,*

$$(E_n,\mathbf{u}_n)\overset{X}{\to}(E,\mathbf{u}) \quad\Rightarrow\quad \int_\Gamma \mathbf{g}\cdot\mathbf{u} = \lim_{n\to\infty}\int_\Gamma \mathbf{g}\cdot\mathbf{u}_n. \tag{7.316}$$

Demostración. Es suficiente mostrar que el funcional

$$\begin{array}{rccc} L & : & H^1(\tilde\Omega;\mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{R} \\ & & \mathbf{u} & \mapsto & \int_\Gamma \mathbf{g}\cdot\mathbf{u}, \end{array} \tag{7.317}$$

con $\tilde\Omega := \Omega\setminus[0,L_0]\times[0,H_0]$, es lineal y continuo en $H^1(\tilde\Omega;\mathbb{R}^2)$. Gracias al teorema de traza,

$$|L(\mathbf{u})| = \left|\int_\Gamma \mathbf{g}\cdot\mathbf{u}\right| \tag{7.318}$$

$$\leq \|\mathbf{g}\|_{L^2(\Gamma)}\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma)} \tag{7.319}$$

$$\leq C\|\mathbf{g}\|_{L^2(\Gamma)}\|\mathbf{u}\|_{H^1(\tilde\Omega)}. \tag{7.320}$$

Por lo tanto L es continuo (claramente también es lineal), y como $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}$ cuando $n \to \infty$ tenemos que

$$L(\mathbf{u}_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L(\mathbf{u}). \tag{7.321}$$

□

Lema 7.3.4. *El término de energía de fractura es semicontinuo inferiormente, esto es*

$$E_n \to E \text{ en la métrica de Hausdorff} \quad \Rightarrow \quad \kappa|E| = \lim_{n\to\infty} \kappa|E_n|. \tag{7.322}$$

Demostración. Usando el mismo argumento que en la demostración del Lema 7.3.1 obtenemos que $\chi_{E_n} \to \chi_E$ en $L^1(\Omega)$. Por otra parte,

$$||E_n| - |E|| \leq |E_n \triangle E| = \left| \int_\Omega \chi_{E_n} - \chi_E \right| \leq \int_\Omega |\chi_{E_n} - \chi_E|. \tag{7.323}$$

Por lo tanto,

$$|E_n| - |E| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty. \tag{7.324}$$

□

Demostración del Teorema 7.3.1. Sea $\{(E_n, \mathbf{u}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizante y sea $(E_0, \mathbf{u}_0)$ tal que $(E_n, \mathbf{u}_n) \overset{X}{\to} (E_0, \mathbf{u}_0)$. En virtud de la semicontinuidad inferior, tenemos que

$$J(E_0, \mathbf{u}_0) \leq \liminf_{n\to\infty} J(E_n, \mathbf{u}_n) = \inf_{(E,\mathbf{u})\in X} J(E, \mathbf{u}), \tag{7.325}$$

esto es, $(E_0, \mathbf{u}_0)$ es la solución buscada al problema de minimización. □

7.3.3. Observaciones finales

Problema tridimensional

Hemos restringido nuestro estudio al caso bidimensional debido a la falta de un teorema de Golab tridimensional: no existe ningún teorema que demuestre que el límite de Hausdorff de una sucesión de conjuntos conexos es siempre conexo. Al no tener este teorema, no podemos mostrar que el límite L^1 de las cavidades coincide con su límite Hausdorff en la demostración del Lema 7.3.1.

Cota a priori en el perímetro

Sin la hipótesis de que el perímetro de las cavidades permanece por debajo de un valor prefijado M, la frontera de las cavidades en una sucesión minimzante podría, en principio, desarrollar oscilaciones cada vez mayores de manera incontrolada. Si esto sucediera, la sucesión convergería a una cavidad E de volumen mayor al de las cavidades de la sucesión, es decir, tendríamos que

$$|E| \geq \liminf_{n\to\infty} |E_n|. \tag{7.326}$$

Esto es lo contrario de lo que necesitamos para demostrar la semicontinuidad inferior del funcional de energía de fractura y la existencia de minimizadores para el funcional de energía total.

Para superar esta dificultad, una idea sería utilizar la teoría de la homogeneización en la cual se demostraría la existencia de una "solución estable" agrandando el dominio de configuraciones admisibles y demostrando, posteriormente, que la solución en realidad pertence al dominio original. El dominio del funcional extendido contendría funciones de densidad de cavidad, y no sólo funciones características. El objetivo sería demostrar que, al final, la energía mínima se alcanza en una función característica. Estudiamos el artículo *Stable damage in a brittle continuous medium*, de Francfort & Marigo [32], sin embargo descubrimos que la hipótesis de que las cavidades sean subgrafos es incomparible con los argumentos en la teoría de la homogeneización.

En resumen, para poder demostrar la semicontinuidad de la energía de fractura y la existencia de soluciones para el problema de la determinación variacional de la superficie de quiebre hemos asumido que el perímetro de las cavidades no sobrepasa un valor dado. Esta hipótesis parece razonable desde el punto de vista físico, sin embargo sería deseable obtenerla como una consecuencia del modelo y no como el punto de partida.

Parámetros L_0 y H_0

Es importante que las cavidades no interactúen con las partes superior y derecha de la frontera de Ω, en donde las compresiones lateral y vertical toman la forma de condiciones de tipo Neumann no homogéneas. Si fuera necesario estudiar la evolución de la cavidad hasta que conecta con la "superficie" (los niveles superiores de la mina), no sólo el teorema de existencia que aquí hemos presentado se vería afectado: el modelo mismo dejaría de ser adecuado (la condición de tracción en la frontera dejaría de ser realista).

7.4. Implementación numérica

En esta sección se describe el código fuente de la implementación en Matlab y Python del algoritmo variacional para la determinación de la superficie de quiebre.

Lista de archivos

El código consta de los siguientes archivos:

- Archivos principales

  1. `director.m` 2. `elasticidad.m` 3. `transporte.m`

- Módulos auxiliares para la generación de mallados (requeridos por `director.m`)

  4. `mc.m` 5. `meshsize.m`

- Módulos de preparación de los datos para enviar a elasticidad.m (requeridos por `director.m`)

  6. `initializeMatrices.m` 8. `initializePsi.m`
  7. `stima3.m` 9. `prop.m`

- Módulos auxiliares requeridos por `elasticidad.m`

10. `quadRule.m`

- Módulos auxiliares para redistanciamiento (requeridos por `director.m`)

11. `recomputaPsi.m`
12. `recomputaPsi.py`

- Módulos para la elaboración de gráficos (invocados por `director.m`)

13. `exportaTodo.m`
14. `suite1.py`
15. `P0Plot.py`

Jerarquía de archivos

Los archivos en la lista anterior se son llamados de acuerdo a la siguiente jerarquía:

- `director.m`
  - `mc.m`
    - `meshsize.m`
  - `initializeMatrices.m`
    - `stima3.m`
  - `initializePsi.m`
  - `prop.m`
  - `elasticidad.m`
    - `quadRule.m`
  - `transporte.m`
  - `recomputaPsi.m`
    - `recomputaPsi.py`
  - `exportaTodo.m`
  - `suite1.py`
    - `P0Plot.py`

Descripción del código fuente

El archivo principal es `director.m`, al cual debe proveerse de las siguientes variables de entrada:

1. `materiales`: Estructura con las propiedades de los materiales involucrados.
2. `contorno`: Contorno del dominio computacional completo.
3. `tipos`: Vector con los tipos de condición de contorno prescritos en cada segmento descrito en `contorno`.
4. `raya`: Lista de vértices de una poli-línea que describe la interfaz inicial.
5. `cntmcz`: Contorno del macizo inicial.

6. `acGrav`: Función que recibe una lista de coordenadas y devuelve el vector aceleración de gravedad en aquellas coordenadas.
7. `contacto`: Función que recibe una lista de coordenadas y una lista de vectores normales y devuelve el vector de fuerzas de contacto en aquellas coordenadas asociadas con aquellas direcciones normales.
8. `maxArea`: Máxima área admisible para los elementos de la triangulación.
9. `NSteps`: Número de pasos del algoritmo de minimización a ser ejecutados.
10. `zoom`: Arreglo de 2×2 con coordenadas de esquina inferior derecha y superior izquierda para efectos de graficación.
11. `sufijo`: Cadena de caracteres con texto para poner de sufijo en los nombres de los videos producidos.

Al ser ejecutado, `director.m` realiza las siguientes tareas:

1. Llama al código `mc.m` para generar una malla cartesiana
2. Llama al código `initializeMatrices.m` para generar varias matrices que se pueden precomputar (ahorrando mucho tiempo de código)
3. Llama al código `initializePsi.m` para inicializar la función distancia con signo que llamamos ψ.
4. Iterativamente:
   a) Llama al código `elasticidad.m`, que a su vez
   b) Construye el sistema de elasticidad discontinuo a partir de matrices precomputadas y el ψ que recibe, y lo resuelve.
   c) Calcula los esfuerzos asociados al desplazamiento computado en el paso anterior.
   d) Calcula las funciones $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{V}$
   e) Calcula la energía elástica y la energía de fractura
   f) Calcula un tamaño de paso adecuado para transportar la función ψ a la velocidad dada por $\mathcal{V}$
5. Llama a `transporte.m` para transportar la función ψ a la velocidad dada por $\mathcal{V}$ usando la técnica de barlovento (*upwind*)
6. Impone la irreversibilidad del avance de la cavidad
7. Llama a `recomputaPsi.m` (que a su vez llama a `recomputaPsi.py`) para efectuar el redistanciamiento de la función distancia con signo ψ.
8. Llama `exportaTodo.m` para guardar en el disco duro los datos necesarios para generar los gráficos.
9. Llama al código Python `suite1.py` que a su vez:
   a) Lee los datos necesarios del disco duro.
   b) Genera los gráficos y lo guarda en formato PNG.
   c) Llama al comando externo `ffmpeg` para hilar los gráficos generados en videos de formato AVI.
10. Guarda los tiempos de cómputo y graficación en archivos de texto.

Otras piezas de *software* involucradas

Como se indica más arriba, el código llama al comando externo (de código abierto) `ffmpeg` para generar videos.

Como la llamada al programa principal `director.m` es complicada solemos ejecutarla via un programa auxiliar que prepara las entradas. Ese programa auxiliar puede quedar después de registro de todos los parámetros de cada simulación. Al final de la lista de programas incluimos un ejemplo de tal programa auxiliar.

7.5. Resultados Generales

Se ha logrado proponer una nueva alternativa para la determinación de la superficie de quiebre en la técnica de *block caving*, usando métodos variacionales. El modelo propuesto ha sido desarrollado y explicitado desde el punto de vista conceptual, habiéndose logrado una comprensión acabada de sus propiedades matemáticas y de su aproximación numérica. Se han realizado, finalmente, algunas simulaciones preliminares, luego de una fase de desarrollo y mejoramiento de la implementación numérica.

Todos los cómputos fueron realizados en un computador Linux de escritorio con procesador Intel i5-2400 (cuatro núcleos, velocidad de reloj de $3{,}10$ GHz) y 6 GB de memoria RAM

7.5.1. Socavación

En este caso se simula una situación de socavación como la de la figura 7.1 con siguientes datos de entrada geométricos, materiales y físicos, respectivamente:

$pilar$	L	h_0	H	α_1	α_2
20 [m]	200 [m]	15 [m]	150 [m]	$45°$	$60°$

η	κ	E	ν	ρ
10^{-3}	10^3 J/m^2	56 [GPa]	0.12	$2{,}77$ ton/m^2

$gravedad$	$presLateral$	$presVertical$
$9{,}8$ [m/s^2]	-34 [MPa]	-16 [MPa]

Se debe notar que la tenacidad κ y la densidad ρ están en unidades adaptadas a simulaciones bidimensionales como las aquí presentadas; esto es también, implícitamente, el caso de la unidad de presión Pascal (véase la discusión al respecto en la subsección 7.2.4).

Se ejecutaron 150 pasos de pseudo-tiempo con un área máxima prescrita para los triángulos de la malla de 10 [m^2]. Este cómputo tomó $138{,}2$ segundos y la generación de la correspondiente serie de videos tomó $534{,}4$ segundos.

En la figura 7.19 se observa que la cavidad avanza solamente en la dirección horizontal.

De la figura 7.20, que muestra los esfuerzos en el paso 75 (elegido arbitrariamente; la situación no cambia mucho en los otros pasos), se desprende que la explicación radica en que los esfuerzos se concentran completamente en la parte de abajo del dominio.

La figura 7.21 muestra la velocidad de propagación de la función distancia con signo a la interfaz ψ en la

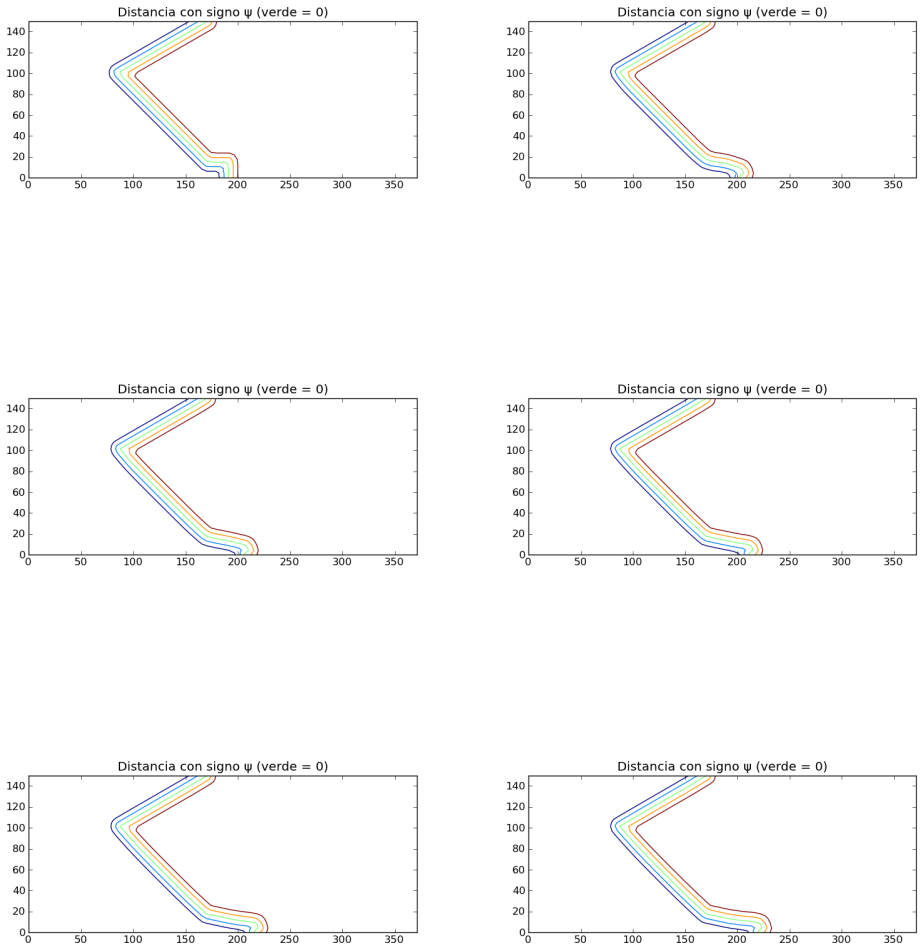


Figura 7.19: Curvas de nivel de la distancia con signo ψ a la interfaz macizo-cavidad en el caso de la socavación en los pasos de pseudotiempo 1, 25, 50, 75, 100, 125 y 150. El macizo se halla a la derecha.

única zona del dominio en la que tiene una magnitud significativa.

7.5.2. Socavación modificada

Este caso es una versión modificada del caso anterior en la cual se modificó los ángulos α_1 y α_2 y se aumentó la anchura del pilar de manera de dejar más material del macizo "colgando" y se agregó una banda de macizo debajo del dominio anterior.

Este cómputo tomó $202{,}8$ segundos y la generación de la correspondiente serie de videos tomó $535{,}9$ segundos.

Como se observa en la figuras 7.22 y 7.23, en este caso sí se observa desprendimiento desde la "nariz" del macizo, aunque el crecimiento de la cavidad sigue siendo abrumadoramente en la dirección horizontal.

7.5.3. Cavidad elíptica en macizo rectangular

Este caso corresponde a la evolución de una cavidad bidimensional en una porción rectangular del macizo rocoso sometida a compresiones vertical y lateral significativas (la superficie de quiebre es la tercera de

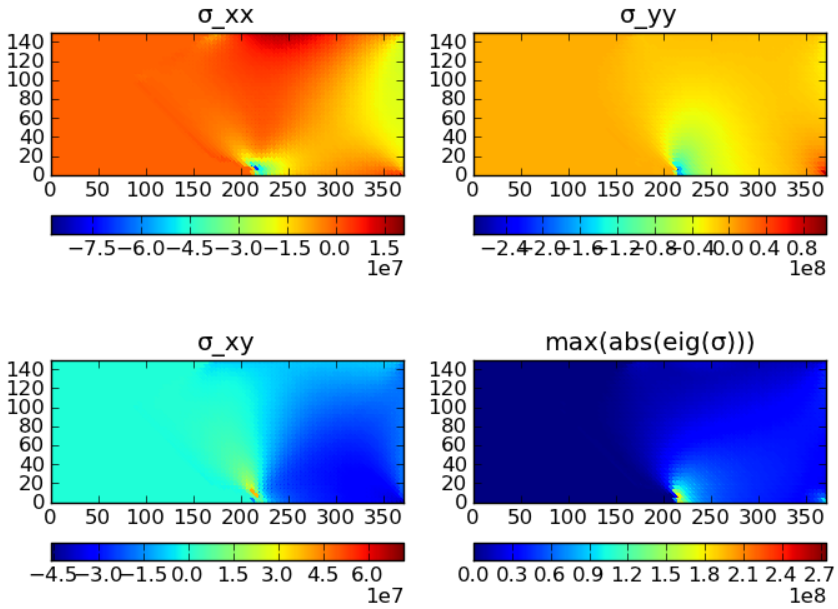


Figura 7.20: Esfuerzos a 75 pasos de pseudo tiempo en el caso de la socavación.

las curvas de nivel). Concretamente, se trata de una cavidad inicial con forma de elipse, con semiejes de 30 [m] y $18{,}75$ [m], al interior de una porción de 200 [m] $\times$ 150 [m] del macizo rocoso. El módulo de Young es 56 [GPa] y el de compresibilidad $0{,}12$. La densidad de masa es $2{,}77$ [ton/m^2]. La compresión lateral es normal a la frontera del dominio computacional y de 34 [MPa] de magnitud. La compresión vertical es de 16 [MPa].

Calcular la evolución en el ejemplo anterior tomó alrededor de 10 min. Se ejecutaron 150 pasos del pseudo-tiempo en la resolución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. La malla consta de triángulos con un área máxima prescrita de 5 [m^2].

Los resultados numéricos obtenidos en aparecen en la figura 7.24.

A pesar de ser este un problema completamente simétrico respecto a la dirección horizontal, la solución numérica desarrolla una asimetría. Para investigar el origen de este asimetría se procedió a repetir el experimento con la malla invertida en la dirección horizontal. La solución numérica obtenida en ese caso presenta la misma asimetría anterior, pero reflejada en la dirección horizontal. Por lo tanto se llega a la conclusión de que el método como está ahora implementado es sensible a la asimetría en la naturaleza del mallado regular utilizado, el cual tiene una preferencia por triángulos con una orientación (lado diagonal respecto a las direcciones coordenadas de tipo '/') por sobre la otra (lado diagonal de tipo '\').

7.5.4. Cavidad rectangular en macizo rectangular

Este caso es muy similar al anterior salvo en que la cavidad inicial esta vez es rectangular. Para este caso se calcularon 100 pasos pseudo-temporales y se usó un área máxima prescrita para los triángulos de la

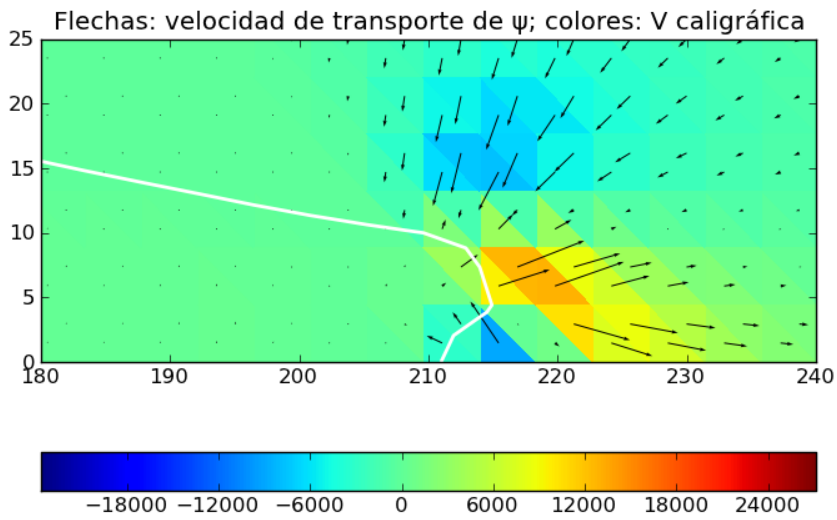


Figura 7.21: Velocidad de transporte de ψ y rapidez con signo $\mathcal{V}$ a 75 pasos de pseudo tiempo en el caso de la socavación (detalle).

malla de 7 [m^2]. El tiempo de cálculo fue de alrededor de 23 minutos[1].

En la figura 7.25 se observa el estado en los pasos 1 y 100 de la simulación. Se observa la aparición de "rutas" de quiebre que siguen las esquinas. La relativa asimetría del caso anterior también se presenta en este caso.

7.5.5. Variación de la tenacidad κ

Se ejecutó una serie de pruebas para estudiar el efecto que tiene modificar la tenacidad κ (este es el programa de ejemplo `c19.m` incluido en el código provisto).

Comenzando con una cavidad elíptica en un dominio rectangular como la de la figura 7.26, se ejecutaron 100 pasos pseudotemporales para cada κ en el conjunto

$$\{10, 22, 46, 100, 215, 464, 1000, 2154, 4642, 10000, 21544, 46416, 100000\} \text{ [J/m}^2\text{]};$$

esto es, el redondeamiento a enteros del rango uniforme en escala logarítmica de 13 miembros entre e incluyendo a 10^2 [J/m^2] y 10^5 [J/m^2].

El estado de la interfaz después de los 100 pasos pseudotemporales aparece en la figura 7.27. Se observa que el método es sensible a κ solamente en forma binaria:

- Si κ es menor a cierto umbral (en este caso, alrededor de 4600 [J/m^2]), el método evoluciona, a grandes rasgos, de la misma manera.
- Si κ es mayor a ese umbral, la interfaz no evoluciona en absoluto: desprender material del macizo es demasiado caro.

[1] Este experimento fue ejecutado con una versión anterior del código que corría muy ineficientemente al ser invocado en forma remota. Esta ineficiencia fue corregida en el código presentado en la sección 7.4.

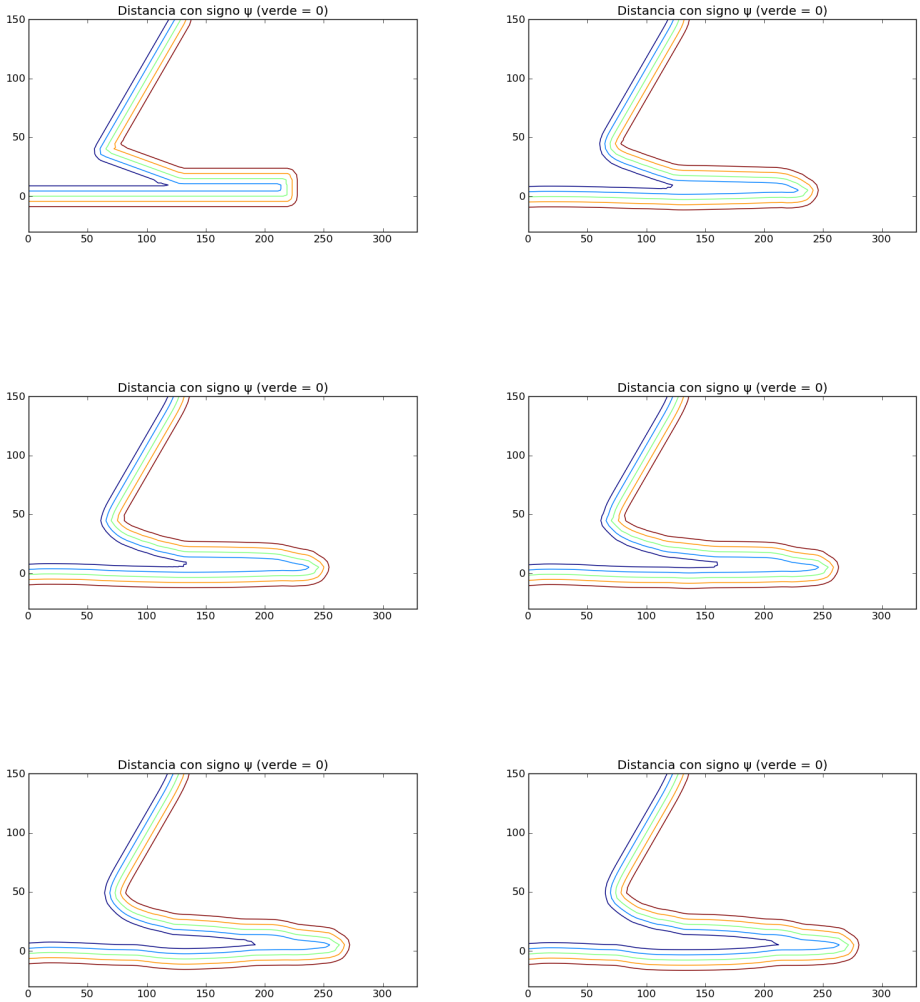


Figura 7.22: Curvas de nivel de la distancia con signo ψ a la interfaz macizo-cavidad en el caso de la socavación modificada en los pasos de pseudotiempo 1, 25, 50, 75, 100, 125 y 150. El macizo se halla a la derecha.

7.6. Extensiones futuras

Los experimentos numéricos realizados en esta fase del proyecto muestran que el modelo variacional descrito en este informe es capaz de predecir la evolución de una cavidad dentro de un macizo rocoso sujeto a la acción de esfuerzos lejanos. Sin embargo, algunos aspectos del modelo numérico, como la influencia de la presencia de esquinas en la propagación de la cavidad, o la presencia de asimetrías en la evolución de la cavidad ante condiciones de borde simétricas, deben ser comprendidas mejor y requieren un estudio numérico más completo.

En tal sentido es deseable la implementación de elementos finitos distintos que entreguen aproximaciones de mayor calidad para el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$, ya que la evolución de la interfaz depende directamente de este tensor y actualmente está representado por derivadas de funciones meramente lineales a trozos y continuas (esto es, la aproximación usada para el vector deformación $\mathbf{u}$).

También se debe tomar en cuenta que en esta implementación se ha replanteado un problema que es

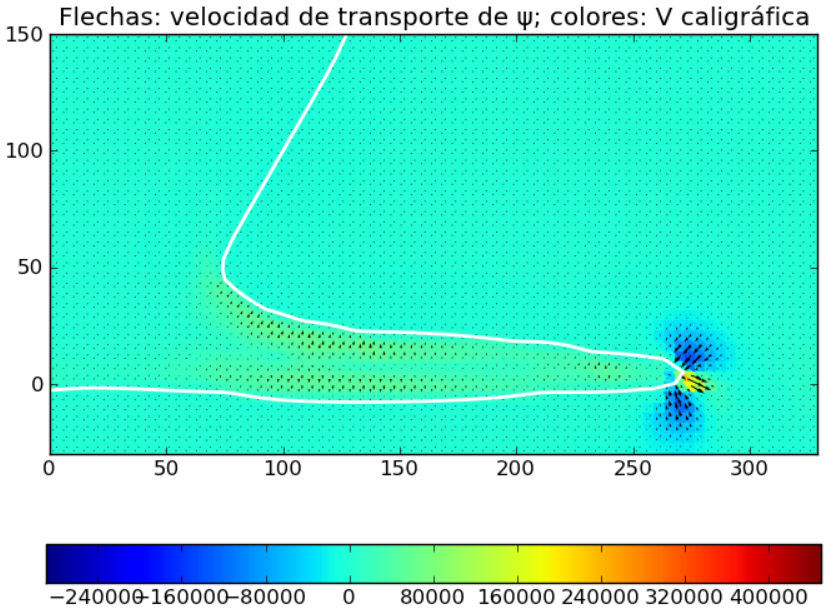


Figura 7.23: Velocidad de transporte de ψ y rapidez con signo $\mathcal{V}$ a 124 pasos de pseudo tiempo en el caso de la socavación modificada.

originalmente tridimensional a uno bidimensional. No puede descartarse que aspectos esenciales del modelo se hayan perdido en esta transición. La confección de un código que trate el problema tridimensional es, por lo tanto, una extensión muy natural.

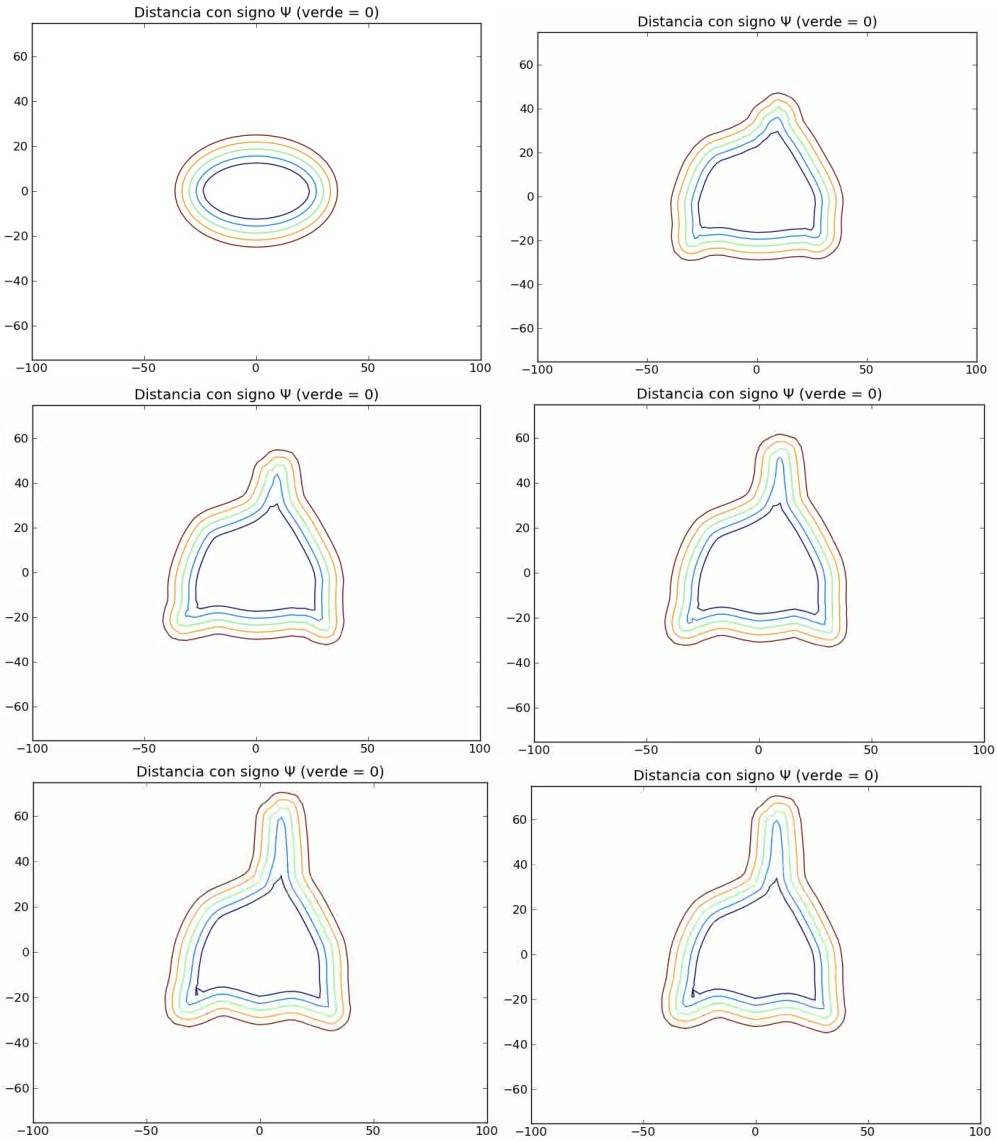


Figura 7.24: Curvas de nivel de la distancia con signo ψ a la interfaz macizo-cavidad en el caso de la cavidad elíptica en un macizo rectangular en los pasos de pseudotiempo 1, 25, 50, 75, 100, 125 y 150. El macizo se halla afuera de la elipse inicial.

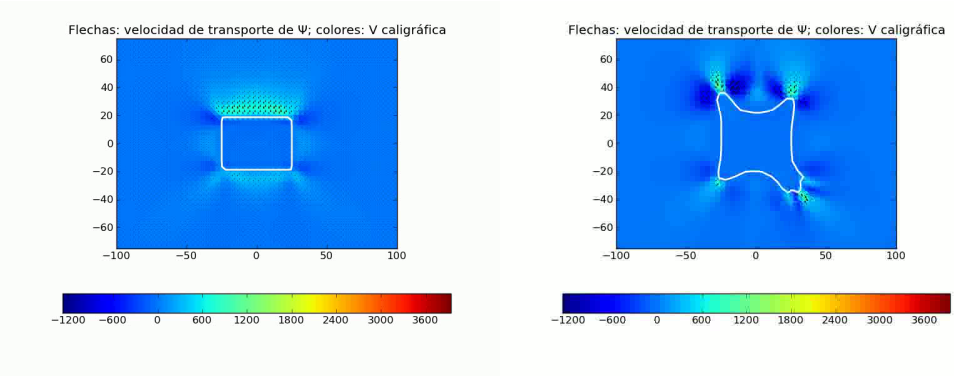


Figura 7.25: Velocidad de transporte de ψ y rapidez con signo $\mathcal{V}$ en los pasos 1 y 100 de pseudo tiempo en el caso de una cavidad rectangular en un macizo rectangular.

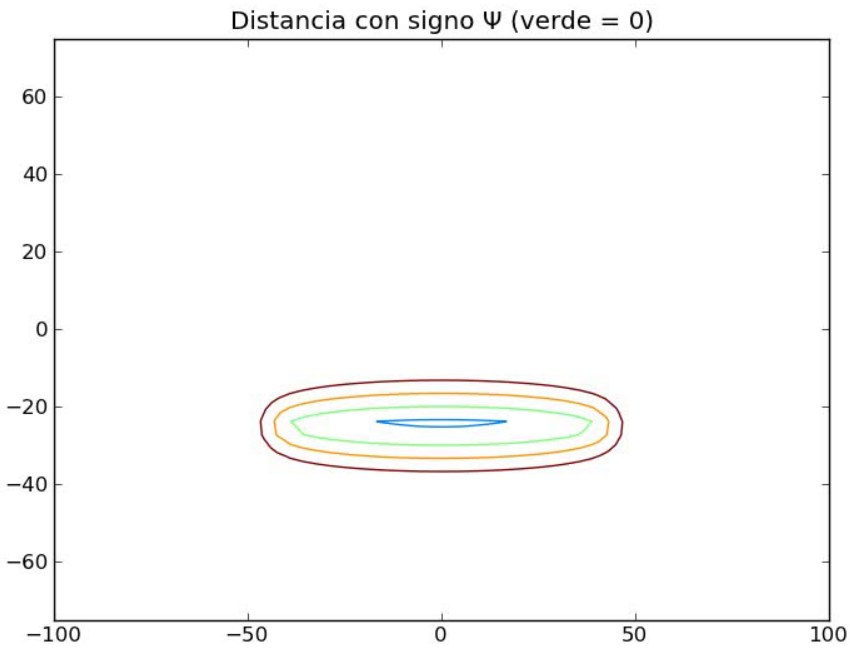


Figura 7.26: Estado inicial para el experimento de variación la tenacidad κ.

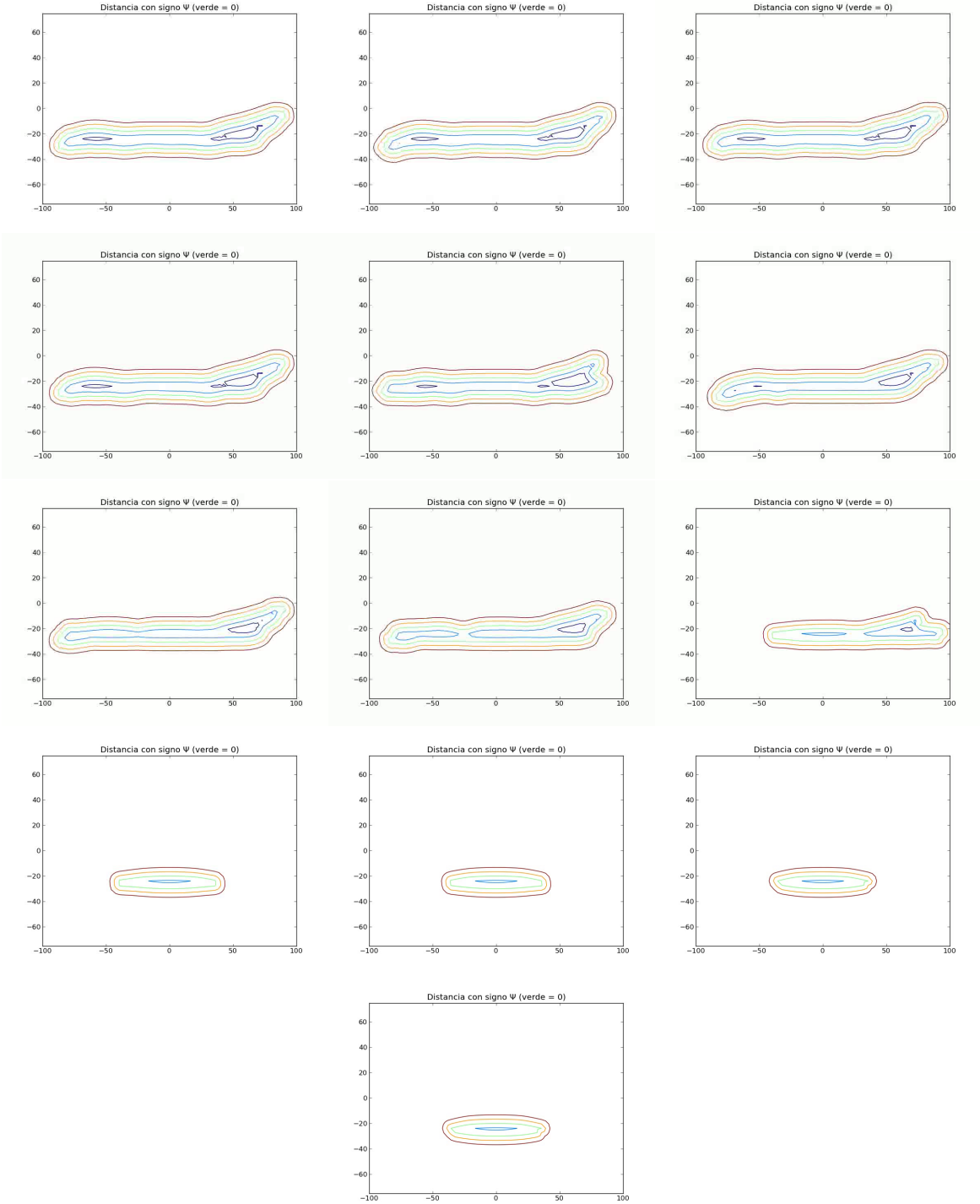


Figura 7.27: Estado final para el experimento de variación de la tenacidad con κ igual a 10, 22, 46, 100, 215, 464, 1000, 2154, 4642, 10000, 21544, 46416 y 100000 [J/m^2].

Bibliografía

[1] M. Fink, D. Cassereau, A. Derode, C. Prada, P. Roux, M. Tanter, J.-L. Thomas and F. Wu, *'Time-Reversed Acoustics'*, Rep. Prog. Phys. **63** (2000).

[2] Superintendencia de Geomecánica TTE-GRMD. Modelo para monitoreo de Caving. Noviembre 2010.

[3] P.A. Cundall, O.D. Strack, A discrete numerical model for granular assemblies, Geotechnique 29 (1979) 47-65.

[4] MMGeo. Estudio 2D de Escenarios de Interés en el Pre-acondicionamiento y Determinación de la Cavidad Máxima Estable en 3D. Marzo, 2011.

[5] R. Manásevich, F. Basso, R. Bustamante, M. Fuentes, A. Gonzalez, D. Morales, E. Salas, J. Ruiz, M. Valdenegro. *Un estudio para la determinación de la superficie de quiebre en una mina subterránea en El Teniente*. Octubre, 2011.

[6] Lyakhovsky V., Ben-Zion Y., Agnon A., Distributed damage, faulting, and friction. *Journal of Geophysical Research* **102** 27,635-27,649 (1997).

[7] Lyakhvsky V., Hamiel Y., Ben-Zion Y., A non-local visco-elastic damage model and dynamic fracturing. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* Doi:10.1016/j.jmps.2011.05.016

[8] K. Aki, P.G. Richards, *Quantitative Seismology*, 2nd. Ed., University Science Books, Sausalito, 2002.

[9] M. Fink, D. Cassereau, A. Derode, C. Prada, P. Roux, M. Tanter, J.-L. Thomas and F. Wu, *'Time-Reversed Acoustics'*, Rep. Prog. Phys. **63** (2000).

[10] J-P. Fouque, J. Garnier, G. Papanicolaou, K. Solna, *Wave Propagation and Time Reversal in Randomly Layered Media*, Springer, New York, 2010.

[11] V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 2006.

[12] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, 2nd. Ed., Springer, New York, 2011.

[13] A.I. Prilepko, D.G. Orlovskii, I.A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, Marcel Dekker, New York, 2000.

[14] Ambrosio, L., Fusco, N., and Pallara, D. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems.* Oxford University Press, New York, 2000.

[15] Ambrosio, L., and Tortorelli, V. M. On the approximation of free discontinuity problems. *Boll. Un. Mat. Ital. B (7) 6*, 1 (1992), 105–123.

[16] Bourdin, B., Francfort, G. A., and Marigo, J.-J. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *J. Mech. Phys. Solids 28* (2000), 797–826.

[17] Bourdin, B., Francfort, G. A., and Marigo, J.-J. The variational approach to fracture. *J. Elasticity 91*, 1-3 (2008), 5–148.

[18] Burke, S., Ortner, C., and Süli, E. An adaptive finite element approximation of a variational model of brittle fracture. *SIAM J. Numer. Anal. 48* (2010), 980–1012.

[19] Fonseca, I., Fusco, N., Leoni, G., and Millot, V. Material voids in elastic solids with

anisotropic surface energies. *J. Math. Pures et Appl.* (2011). doi:10.1016/j.matpur.2011.07.003.

[20] Francfort, G. A., and Marigo, J.-J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *J. Mech. Phys. Solids 46*, 8 (1998), 1319–1342.

[21] Mumford, D., and Shah, J. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure. Appl. Math. 42* (1989), 577–685.

[22] L Ambrosio, N Fusco, and D Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford University Press, New York, 2000.

[23] Grégoire Allaire, François Jouve, and Nicolas Van Goethem. Damage and fracture evolution in brittle materials by shape optimization methods. *J. Comput. Phys.*, 230(12):5010–5044, 2011.

[24] Grégoire Allaire. La méthode d'homogénéisation pour lóptimisation topologique de structures élastiques. *MATAPLI, bulletin de la SMAI*, 53, 1998.

[25] E Bonnetier and A Chambolle. Computing the equilibrium configuration of epitaxially strained crystalline films. *SIAM J. Appl. Math.*, 62(4):1093–1121, 2002.

[26] Timothy J. Barth and James A. Sethian. Numerical Schemes for the Hamilton- Jacobi and Level Set Equations on Triangulated Domains. *Journal of Computational Physics*, 145(1):1–40, 1998.

[27] Philippe G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. I*, volume 20 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.

[28] M G Crandall and P L Lions. Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Mathematics of Computation*, 43(167):1–19, 1984.

[29] Lawrence C Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[30] I Fonseca, N Fusco, G Leoni, and V Millot. Material voids in elastic solids with anisotropic surface energies. *J. Math. Pures Appl.*, 96(6):591–639, 2011.

[31] Gilles A Francfort and Adriana Garroni. A Variational View of Partial Brittle Damage Evolution. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 182(1):125–152, 2006.

[32] Gilles A Francfort and Jean-Jacques Marigo. Stable damage evolution in a brittle continuous medium. *European J. Mech. A Solids*, 12(2):149–189, 1993.

[33] Pierre L. Lions. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman London, 1982.

[34] Stanley Osher and Ronald Fedkiw. *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, volume 153 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[35] Giovanni Russo and Peter Smereka. A Remark on Computing Distance Functions. *Journal of Computational Physics*, 163(1):51–67, September 2000.

[36] James A. Sethian. *Level set methods and fast marching methods*, volume 3 of *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1999.

[37] M Sussman and E Fatemi. An Efficient, Interface-Preserving Level Set Redistancing Algorithm and Its Application to Interfacial Incompressible Fluid Flow. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(4):1165–1191, 1999.

[38] Lyakhovsky V., Ben-Zion Y., Agnon A., Distributed damage, faulting and frction. *Journal of Geophysical Research* **102** 27635-27649, (1823).

[39] Lyakhovsky V., Hamiel Y., Ben-Zion Y., A non-local visco-elastic damage model and dynamic fracturing. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* DOI:10.1016/j.jmps.2011.05.016

[40] Aki, K., and P.G. Richards, *Quantitative Seismology*, 2nd. Ed., University Science Books, Sausalito, 2002.

[41] Boatwright, J. and J.B. Fletcher (1984) *The Partition of Radiated Energy Between P and S Waves.* Bull. Seis. Soc. Am. Vol. 74, No. 2, pp. 361-376.

[42] Bouchon, M. (1981), *A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media.* Bull. Seism. Soc. Am., 71, 959-971.

[43] Coutant, O. (1989), *Programme de simulation numerique AXITRA.* Report LGIT,Grenoble.

[44] Jost, M.L. and R. B. Herrmann (1989), *A Student's Guide to and Review of Moment Tensors.* Seis. Res. Lett., Vol. 6, No. 2, 37-57.

[45] Julian, B.R., Miller, A. D. and Foulger, G.R. (1998), *Non-double-couple Earthquakes - Theory.* Reviews of Geophysics, Vol. 36, No. 4, pp. 525-549.

[46] Julian, B.R., Miller, A. D. and Foulger, G.R. (1998b), *Non-double-couple Earthquakes - Observations.* Reviews of Geophysics, Vol. 36, No. 4, pp. 551-568.

[47] Sileny, J., and A. Milev (2008), *Source mechanism of mining induced seismic events - Resolution of double couple and non double couple models.* Tectonophysics, 456, pp. 3-15,doi:10.1016/j.tecto.2006.09.021.

[48] Trifu, C.I. and Shumila, V. (2002), *Reliability of Seismic Moment Tensor Inversion for Induced Microseismicity at Kidd Mine, Ontario.* Pure and Applied Geophysics, 159, pp. 145-164.

[49] E.T. Brown. Block Caving Geomechanics. 2003.

[50] R. Manásevich, F. Basso, R. Bustamante, M. Fuentes, A. Gonzalez, D. Morales, E. Salas, j. Ruiz, M. Valdenegro. Un estudio para la determinación de la superficie de quiebre en una mina Subterránea en El Teniente. Mayo, 2011.

[51] L. Jing. A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modeling for rock mechanics and rock engineering, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 40 (2003) 283-353.

[52] D.O Potyondy, P.A Cundall, A bonded-particle model for rock, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 41 (2004) 1329-1364.

[53] CAI, M., KAISER, P., MORIOKA, H., MINAMI, M., MAEJIMA, T., TASAKA, Y., KUROSE, H. (2007). FLAC/PFC coupled numerical simulation of AE in large-scale underground excavations. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 44(4), 550-564.

[54] Hadjigeorgiou, J., Esmaieli, K., Grenon, M. (2009). Stability analysis of vertical excavations in hard rock by integrating a fracture system into a PFC model. Tunnelling and Underground Space Technology incorporating Trenchless Technology Research, 24(3), 296-308.

[55] Ivars, D. M., Pierce, M. E., Darcel, C., Reyes-Montes, J., Potyondy, D. O., Young, R. P., Cundall, P. A. (2011). The synthetic rock mass approach for jointed rock mass modelling. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 48(2), 219-244.

[56] Scholtes, L., Donzé, F.-V., Khanal, M. (2011). Scale effects on strength of geomaterials, case study Coal. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 59(5), 1131-1146.

[57] Superintendencia de Geomecánica TTE-GRMD. Modelo para monitoreo de Caving. Noviembre 2010.

[58] MMGeo. Estudio 2D de Escenarios de Interés en el Pre-acondicionamiento y Determinación de la Cavidad Máxima Estable en 3D. Marzo, 2011.

[59] P.A. Cundall, O.D. Strack, A discrete numerical model for granular assemblies, Geotechnique 29 (1979) 47-65.

[60] F.Basso y A.Gonzalez, (2012), *Propuesta de estudio para la División El Teniente de Codelco-Chile , Sobre la*

determinación de la superficie de quiebre en El Teniente. CMM, MMGEO Lab., 12, pp. 12-19.

[61] F.Basso,S.Gaete,A.Gonzáles,R.Manásevich,D.Morales, M. Valdenegro,R.Zepeda , (2012), *Maximum stable cavity estimation in 3D* CMM, MMGEO Lab., .

[62] Goodman,R. Shi, G. , (1985), *Block Theory and its application to rock engineering* New Jersey:Prentice-Hall Inc.:1985., .

[63] Mineral Engineering. Geometrical Identification of Three- dimensional Rock Block Systems Using Topological Techniques. 24(6):331–338, 1987.

[64] SHI Genhua. PRODUCING JOINT POLYGONS [U+FF0C] CUTTING JOINT BLOCKS AND FINDING KEY BLOCKS FOR GENERAL FREE SURFACES. 25(11), 2006.

[65] M. Ghazal, R. Hadj-Hassen, F. and Tijani. A new numerical model to study isolated rock blocks around underground excavations taking into account in-situ stresses. *Centre de Géosciences, Mines-ParisTech, Fontainebleau, France*, 2011.

[66] C. González-Palacio, a. Menéndez-Díaz, a.E. Álvarez Vigil, and C. González-Nicieza. Identification of non-pyramidal key blocks in jointed rock masses for tunnel excavation. *Computers and Geotechnics*, 32(3):179–200, April 2005.

[67] A Jafari, M Khishvand, and H Rahami. Developing an algorithm for reconstruction blocky systems in discontinuous media : three-dimensional analysis. 2011.

[68] P.H.S.W. Kulatilake, Liangqing Wang, Huiming Tang, and Ye Liang. Evaluation of rock slope stability for Yujian River dam site by kinematic and block theory analyses. *Computers and Geotechnics*, 38(6):846–860, September 2011.

[69] Jianyong Li, Jian Xue, Jun Xiao, and Ying Wang. Block theory on the complex combinations of free planes. *Computers and Geotechnics*, 40:127–134, March 2012.

[70] Youjun Ning, Jun Yang, Xinmei An, and Guowei Ma. Modelling rock fracturing and blast-induced rock mass failure via advanced discretisation within the discontinuous deformation analysis framework. *Computers and Geotechnics*, 38(1):40–49, January 2011.

[71] H Owladeghaffari. Toward Fuzzy block theory. 2003.

[72] Ying Wang. Three dimensional sphere analysis method of block theory. *2010 International Conference on Computer Application and System Modeling (ICCASM 2010)*, (Iccasm):V1–578–V1–582, October 2010.

[73] NengXiong Xu. Identifying rock blocks based on hierarchical rock-mass structure model. *Science in China Series D: Earth Sciences*, 52(10):1612–1623, July 2009.

[74] Q Yu, Y Ohnishi, G Xue, and D Chen. A generalized procedure to identify three-dimensional rock blocks around complex excavations. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODS IN GEOMECHANICS*, (July 2008):355–375, 2009.

[75] Yuting Zhang, Ming Xiao, and Juntao Chen. A new methodology for block identification and its application in a large scale underground cavern complex. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 25(2):168–180, March 2010.

[76] Yuting Zhang, Ming Xiao, Xiuli Ding, and Aiqing Wu. Improvement of methodology for block identification using mesh gridding technique. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 30:217–229, July 2012.

Apéndice A

Manual de Clases CME3D

Índice general

1 Namespace Index **1**

1.1 Namespace List 1

2 Class Index **3**

2.1 Class Hierarchy 3

3 Class Index **5**

3.1 Class List 5

4 Namespace Documentation **7**

4.1 TRIANGULATOR Namespace Reference 7

4.1.1 Detailed Description 7

5 Class Documentation **9**

5.1 Ui::BaseSocavacionForm Class Reference 9

5.2 BaseSocavacionTab Class Reference 10

5.3 Batea Class Reference 10

5.4 BateaItem Class Reference 11

5.5 BateasList Class Reference 12

5.6 Bloque< Poliedro > Class Template Reference 12

5.7 Bloque< Poliedro >::Cara Class Reference 13

5.8 CME3D Class Reference 14

5.9 CME3D::CME3D_Estadisticas Class Reference 16

5.10 TRIANGULATOR::CTriangulator Class Reference 17

5.11 dlgSerieExt Class Reference 17

5.12 Ui::dlgSerieExt Class Reference 18

5.13 EstadisticasBatea Class Reference 18

5.14 estadisticasModel Class Reference 19

5.15 FamiliaPlanos Class Reference 19

5.16 Ui::HidrofracturaForm Class Reference 20

5.17 HidrofracturaTab Class Reference 21

5.18 HistogramItem Class Reference 21

5.19 LectorCSV Class Reference 22

5.20 Poliedro::Line Class Reference . . . 22
5.21 Ui::MacizoForm Class Reference . . . 23
5.22 MacizoTab Class Reference . . . 24
5.23 MainWindow Class Reference . . . 25
5.23.1 Member Function Documentation . . . 25
5.23.1.1 lee_Voronoi . . . 25
5.24 Ui::MainWindow Class Reference . . . 26
5.25 MBatea Class Reference . . . 26
5.25.1 Member Function Documentation . . . 27
5.25.1.1 setPoint . . . 27
5.25.1.2 SortPoints . . . 27
5.26 paramDominio Struct Reference . . . 27
5.27 ParametrosBaseSocavacion Struct Reference . . . 28
5.28 ParametrosDominio Struct Reference . . . 28
5.29 ParametrosHidrofracturas Struct Reference . . . 28
5.30 paramPlano Struct Reference . . . 29
5.31 paramZonaSoc Struct Reference . . . 29
5.32 Plano Class Reference . . . 29
5.33 Poliedro::Plano Class Reference . . . 30
5.34 PlanoModel Class Reference . . . 31
5.34.1 Detailed Description . . . 32
5.35 Poliedro::Point Class Reference . . . 32
5.36 Poliedro Class Reference . . . 33
5.37 PoligonoModel Class Reference . . . 34
5.37.1 Detailed Description . . . 35
5.38 HistogramItem::PrivateData Class Reference . . . 35
5.39 Ui::ProcesarForm Class Reference . . . 35
5.40 ProcesarModel Class Reference . . . 36
5.41 ProcesarTab Class Reference . . . 36
5.42 ReporteUI Class Reference . . . 37
5.43 SerieExtraccionModel Class Reference . . . 37
5.44 Triangulator Class Reference . . . 37
5.44.1 Detailed Description . . . 38
5.45 Triangulo Class Reference . . . 39
5.46 Poliedro::Triangulo Class Reference . . . 39
5.47 TRIANGULATOR::TVec Class Reference . . . 39
5.48 Ui_BaseSocavacionForm Class Reference . . . 40
5.49 Ui_dlgSerieExt Class Reference . . . 41
5.50 Ui_HidrofracturaForm Class Reference . . . 42
5.51 Ui_MacizoForm Class Reference . . . 44

5.52 Ui_MainWindow Class Reference 45
5.53 Ui_ProcesarForm Class Reference 46
5.54 Poliedro::Vector Class Reference 48
5.55 Vertice Class Reference 48
5.56 Poliedro::Vertice Class Reference 49
5.57 Viewfrm Class Reference 49
5.58 CME3D::Visitante Class Reference 49

Capítulo 1

Indice de namespaces

1.1. Lista de 'namespaces'

Lista de toda la documentación de los 'namespaces', con una breve descripción:

TRIANGULATOR 7

Capítulo 2

Índice de clases

2.1. Jerarquía de la clase

Esta lista de herencias esta ordenada aproximadamente por orden alfabético:

Batea 10
BateaItem 11
BateasList 12
Bloque< Poliedro > 12
Bloque< Poliedro >::Cara 13
CME3D 14
CME3D::CME3D_Estadisticas 16
dlgSerieExt 17
EstadisticasBatea 18
estadisticasModel 19
HistogramItem 21
LectorCSV 22
Poliedro::Line 22
MBatea 26
paramDominio 27
ParametrosBaseSocavacion 28
ParametrosDominio 28
ParametrosHidrofracturas 28
paramPlano 29
paramZonaSoc 29
Plano 29
Poliedro::Plano 30
  FamiliaPlanos 19
PlanoModel 31
Poliedro::Point 32
Poliedro 33
PoligonoModel 34
HistogramItem::PrivateData 35
ProcesarModel 36
ReporteUI 37
SerieExtraccionModel 37
Triangulator 37
  TRIANGULATOR::CTriangulator 17
Triangulo 39
Poliedro::Triangulo 39
TRIANGULATOR::TVec 39
Ui_BaseSocavacionForm 40

Ui::BaseSocavacionForm . . . 9
BaseSocavacionTab . . . 10
Ui_dlgSerieExt . . . 41
Ui::dlgSerieExt . . . 18
Ui_HidrofracturaForm . . . 42
Ui::HidrofracturaForm . . . 20
HidrofracturaTab . . . 21
Ui_MacizoForm . . . 44
Ui::MacizoForm . . . 23
MacizoTab . . . 24
Ui_MainWindow . . . 45
Ui::MainWindow . . . 26
MainWindow . . . 25
Ui_ProcesarForm . . . 46
Ui::ProcesarForm . . . 35
ProcesarTab . . . 36
Poliedro::Vector . . . 48
Vertice . . . 48
Poliedro::Vertice . . . 49
Viewfrm . . . 49
CME3D::Visitante . . . 49

Capítulo 3

Índice de clases

3.1. Lista de clases

Lista de las clases, estructuras, uniones e interfaces con una breve descripción:

Ui::BaseSocavacionForm 9
BaseSocavacionTab 10
Batea 10
BateaItem 11
BateasList 12
Bloque< Poliedro > 12
Bloque< Poliedro >::Cara 13
CME3D 14
CME3D::CME3D_Estadisticas 16
TRIANGULATOR::CTriangulator 17
dlgSerieExt 17
Ui::dlgSerieExt 18
EstadisticasBatea 18
estadisticasModel 19
FamiliaPlanos 19
Ui::HidrofracturaForm 20
HidrofracturaTab 21
HistogramItem 21
LectorCSV 22
Poliedro::Line 22
Ui::MacizoForm 23
MacizoTab 24
MainWindow 25
Ui::MainWindow 26
MBatea 26
paramDominio 27
ParametrosBaseSocavacion 28
ParametrosDominio 28
ParametrosHidrofracturas 28
paramPlano 29
paramZonaSoc 29
Plano 29
Poliedro::Plano 30
PlanoModel 31
Poliedro::Point 32
Poliedro 33
PoligonoModel 34
HistogramItem::PrivateData 35

Ui::ProcesarForm 35
ProcesarModel 36
ProcesarTab 36
ReporteUI 37
SerieExtraccionModel 37
Triangulator 37
Triangulo 39
Poliedro::Triangulo 39
TRIANGULATOR::TVec 39
Ui_BaseSocavacionForm 40
Ui_dlgSerieExt 41
Ui_HidrofracturaForm 42
Ui_MacizoForm 44
Ui_MainWindow 45
Ui_ProcesarForm 46
Poliedro::Vector 48
Vertice 48
Poliedro::Vertice 49
Viewfrm 49
CME3D::Visitante 49

Capítulo 4

Documentación de namespaces

4.1. Referencia del Namespace TRIANGULATOR

Clases

- class **TVec**
- class **CTriangulator**

'typedefs'

- typedef unsigned int **TU32**
- typedef std::vector< **TVec** > **TVecVector**
- typedef std::vector< TU32 > **TU32Vector**

4.1.1. Descripción detallada

Copyright (c) 2009 by John W. Ratcliff `jratcliffscarab@gmail.com`

Portions of this source has been released with the PhysXViewer application, as well as Rocket, CreateDynamics, ODF, and as a number of sample code snippets.

If you find this code useful or you are feeling particularily generous I would ask that you please go to `http://www.amillionpixels.us` and make a donation to Troy DeMolay.

DeMolay is a youth group for young men between the ages of 12 and 21. It teaches strong moral principles, as well as leadership skills and public speaking. The donations page uses the 'pay for pixels' paradigm where, in this case, a pixel is only a single penny. Donations can be made for as small as $4 or as high as a $100 block. Each person who donates will get a link to their own site as well as acknowledgement on the donations blog located here `http://www.amillionpixels.blogspot.com/`

If you wish to contact me you can use the following methods:

Skype ID: jratcliff63367 Yahoo: jratcliff63367 AOL: jratcliff1961 email: `jratcliffscarab@gmail.com`

The MIT license:

Permission is hereby granted, free of charge, to any person obtaining a copy of this software and associated documentation files (the "Software"), to deal in the Software without restriction, including without limitation the rights to use, copy, modify, merge, publish, distribute, sublicense, and/or sell copies of the Software, and to permit persons to whom the Software is furnished to do so, subject to the following conditions:

The above copyright notice and this permission notice shall be included in all copies or substantial portions of the Software.

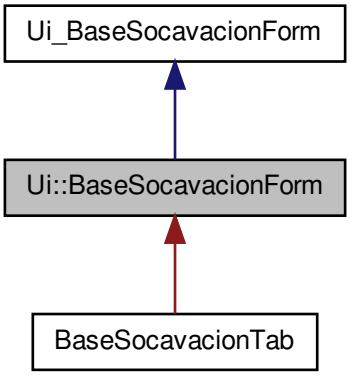
THE SOFTWARE IS PROVIDED "AS IS", WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND, EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO THE WARRANTIES OF MERCHANTABILITY, FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE AND NONINFRINGEMENT. IN NO EVENT SHALL THE AUTHORS OR COPYRIGHT HOLDERS BE LIABLE FOR ANY CLAIM, DAMAGES OR OTHER LIABILITY, WHETHER IN AN ACTION OF CONTRACT, TORT OR OTHERWISE, ARISING FROM, OUT OF OR IN CONNECTION WITH THE SOFTWARE OR THE USE OR OTHER DEALINGS IN THE SOFTWARE.

Capítulo 5

Documentación de las clases

5.1. Referencia de la Clase Ui::BaseSocavacionForm

Diagrama de herencias de Ui::BaseSocavacionForm



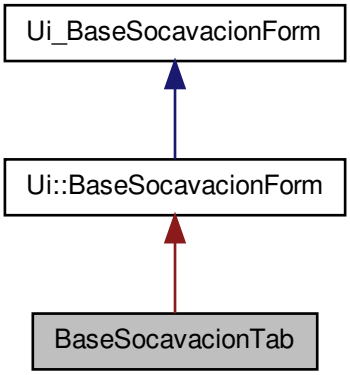
Otros miembros heredados

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui_BaseSocavacionForm.h

5.2. Referencia de la Clase BaseSocavacionTab

Diagrama de herencias de BaseSocavacionTab



Slots públicos

- void **agregarVolumen** ()
- void **agregarPunto** ()
- void **agregarBatea** ()
- void **quitarBatea** ()
- void **actualizarBatea** (QListWidgetItem ∗)
- void **setDatos** ()
- void **importarSerie** ()
- void **importarGeo** ()
- bool **isVacio** ()

Métodos públicos

- **BaseSocavacionTab** (QWidget ∗parent=0)
- QVector< **ParametrosBaseSocavacion** > **parametros** () const
- void **setParametros** (const QVector< **ParametrosBaseSocavacion** > &params)

Otros miembros heredados

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/BaseSocavacionTab.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/BaseSocavacionTab.cpp

5.3. Referencia de la Clase Batea

Métodos públicos

- **Batea** (const string &nombre, const vector< **Poliedro** > &geometriaZS, const BloquesList &dominio, const int id, const double v_e, const double dt, const vector< double > serieExtraccion)
- int **iterar** (**ReporteUI** *ui)
- void **inestabilizar** ()
- bool **esEstable** () const
- void **guardarHistorial** ()
- **EstadisticasBatea getEstadisticas** ()
- void **genSource** (**Bloque**< **Poliedro** > *vecino)
- vtkSmartPointer< vtkPoints > **getVtkPoints** ()

Atributos públicos

- int **id**
- string **nombre**
- double **v_e**
- double **dt**
- double **V_ext**
- double **V_final**
- vector< double > **serieExtraccion**
- EstadoBatea **estado**
- BloquesList **dominio**
- BloquesList **bloquesExtraidos**
- BloquesList **caverna**
- BloquesList **frontera**
- BloquesList **verdaderosExtraidos**
- int **nBloquesExtraidos**
- vector< double > **historialVolumenes**
- vector< BloquesList > **historialBloquesExtraidos**
- vector< BloquesList > **historialVerdaderosExtraidos**

Tipos protegidos

- enum **EstadoBatea** { **REMOVIENDO**, **DETENIDO**, **ESTABLE** }

Métodos protegidos

- int **_iterar** (**ReporteUI** *ui)
- void **paso** ()

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/batea.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/batea.cpp

5.4. Referencia de la Clase Batealtem

Tipos públicos

- enum **BatealtemRole** {
  POLIGONO, **PROFUNDIDAD**, **ALTURA**, **V_E**,
  DT }

Métodos públicos

- **BateaItem** (const QList< QPointF >, const QList< double >)
- void **setData** (int, const QVariant &)
- QVariant **data** (int) const
- float **getProfundidad** () const
- float **getAltura** () const
- float **getVelocidadExtraccion** () const
- float **getDeltaT** () const
- void **setProfundidad** (double)
- void **setProfundidad** (QString)
- void **setAltura** (double)
- void **setAltura** (QString)
- void **setVelocidadExtraccion** (double)
- void **setVelocidadExtraccion** (QString)
- void **setDeltaT** (double)
- void **setDeltaT** (QString)
- void **extraerPorSerie** (bool b=true)
- bool **extraePorSerie** () const

Atributos públicos

- QListWidgetItem * **item**
- **PoligonoModel** * **poligono**
- **SerieExtraccionModel** * **serie**
- float **profundidad**
- float **altura**
- float **v_e**
- float **dt**
- std::string **nombre**
- bool **extrae_por_serie**

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/bateaitem.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/bateaitem.cpp

5.5. Referencia de la Clase BateasList

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/bateaslist.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/bateaslist.cpp

5.6. Referencia de la plantilla de la Clase Bloque< Poliedro >

Clases

- class **Cara**

Tipos públicos

- typedef **Poliedro::Plano Plano**
- typedef **Poliedro::Vector Vector**

Métodos públicos

- **Bloque** (const double lx, const double ly, const double lz)
- **Bloque** (const double lx, const double ly, const double lz, const double x0, const double y0, const double z0)
- **Bloque** (const **Bloque** &B)
- **Bloque** (const **Poliedro** &P)
- **Bloque** & **operator=** (const **Bloque** &B)
- Ubicacion **split** (**Plano** &P, **Bloque** ∗∗B)
- bool **cae** ()
- void **remove** ()
- int **indexOfNormal** (**Vector** &v)
- double **getVolumen** ()
- double **getDiametro** ()
- void **display** (char ∗)
- void **printVecinos** ()
- void **breakSurface** (int nBatea, int offsetaltura, vtkSmartPointer< vtkPoints > points, vtkSmartPointer< vtkImageData > image)
- void **displayStats** ()

Métodos públicos estáticos

- static vector< **Bloque** < **Poliedro** > ∗ > **getBloquesZonaSoc** (const **paramZonaSoc** &pZS, const **paramDominio** &pD)

Atributos públicos

- **Poliedro P**
- bitset< MAX_BATEAS > **removido**
- std::vector< **Cara** ∗ > **caras**

Amigas

- ostream & **operator**<< (ostream &ofs, **Bloque**< **Poliedro** > &B)
- istream & **operator**>> (istream &ofs, **Bloque**< **Poliedro** > &B)

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/bloque.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/bloque.cpp

5.7. Referencia de la Clase Bloque< Poliedro >::Cara

Métodos públicos

- **Cara** (const **Cara** &c)
- **Cara** (const **Vector** &_normal)
- **Cara** (const **Vector** &_normal, vector< **Bloque** ∗ > _vecinos)

- void **addVecino** (**Bloque** ∗vecino)
- void **addVecinos** (const vector< **Bloque** ∗ > &_vecinos)
- void **printVecinos** ()
- **Cara** & **operator=** (const **Cara** &c)

Atributos públicos

- **Vector normal**
- vector< **Bloque** ∗ > **vecinos**

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/bloque.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/bloque.cpp

5.8. Referencia de la Clase CME3D

Clases

- class **CME3D_Estadisticas**
- class **Visitante**

Métodos públicos

- **CME3D** (const int argc, const char ∗∗argv)
- void **crearDominio** ()
- bool **inZonaSoc** (**BloqueCME3D** ∗b)
- bool **inHF** (**BloqueCME3D** ∗b)
- bool **inCaidos** (**BloqueCME3D** ∗b)
- void **crearZonaSoc** ()
- int **loadInteractive** ()
- int **interactive** (const vector< **paramPlano** > &input_planos, const **paramDominio** &input_dominio, const struct **ParametrosHidrofracturas** &paramsHf, const list< vector< double > > &az_inc_d_list_Hf)
- void **interactive_leerPlanos** (const char ∗archPlanos)
- void **interactive_leerDominio** (const char ∗archZona)
- void **interactive_leerHFPlanos** (const list< vector< double > > &plHf)
- void **crearPlanos** ()
- void **crearBloques** (**ReporteUI** ∗ui)
- void **crearZonaHF** ()
- void **addBatea** (const **paramZonaSoc** &pZS)
- void **eliminarBateas** ()
- void **selectBloquesHF** ()
- void **crearPlanosHF** ()
- void **crearBloquesHF** ()
- void **eliminarZonaHF** ()
- void **quitarZonaSoc** ()
- void **printEstadisticasBloques** ()
- void **reset** ()
- void **caving** (**ReporteUI** ∗ui)
- void **guardarBloques** (**ReporteUI** ∗ui, const std::string &nombreArchivo=std::string("output.vtk"))
- void **getEstadisticas** (**CME3D_Estadisticas** &)
- void **leerHFPlanos** (const char ∗archPlanos)

- void **mapWedges** ()
- void **genSurface** (const std::string &nombreArchivo)
- void **seeSurface** ()
- void **seeEvolutionSurface** ()
- int **importPlanos** (const vector< **paramPlano** > &planos)
- int **importDominio** (const **paramDominio** &dominio)
- int **importZonaSoc** (const **paramZonaSoc** &zonaSoc, const **paramDominio** &dominio)
- int **importHF** (const **ParametrosHidrofracturas** &paramsHf, const list< vector< double > > norm_d_list_-Hf)

Métodos públicos estáticos

- static void **guardarBloquesDebug** (**BloqueCME3D** *B, **BloqueCME3D** *vecino)

Atributos públicos

- list< vector< double > > **norm_d_list**
- list< vector< double > > **norm_d_HF_list**
- vector< **paramPlano** > **input_planos**
- **paramDominio input_dominio**
- **paramZonaSoc input_zonaSoc**
- **BloqueCME3D** * **zonaDom**
- vector< **FamiliaPlanos** > **familias**
- int **nPlanos**
- vector< **BloqueCME3D** * > **bloques**
- vector< **BloqueCME3D** * > **bloques_removidos**
- double **zonaDomLx**
- double **zonaDomLy**
- double **zonaDomLz**
- double **zonaDom_x0**
- double **zonaDom_y0**
- double **zonaDom_z0**
- vector< **Batea** * > **bateas**
- vector< **BloqueCME3D** * > **bloques_zonaSoc**
- double **zonaSocLx** [2]
- double **zonaSocLy** [2]
- double **zonaSocLz** [2]
- double **zonaSoc_x0** [2]
- double **zonaSoc_y0** [2]
- double **zonaSoc_z0** [2]
- **BloqueCME3D** * **zonaHF**
- vector< **PlanoCME3D** > **planosHF**
- vector< **BloqueCME3D** * > **bloques_hf**
- double **zonaHF_lx**
- double **zonaHF_ly**
- double **zonaHF_lz**
- double **zonaHF_x0**
- double **zonaHF_y0**
- double **zonaHF_z0**
- const char * **cme3dFile**
- bool **loadBloques**

Amigas

- class **Viewfrm**
- ofstream & **operator**<< (ofstream &ofs, **CME3D** &cme3d)
- ifstream & **operator**>> (ifstream &ifs, **CME3D** &cme3d)

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/cme3d.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/cme3d.cpp

5.9. Referencia de la Clase CME3D::CME3D_Estadisticas

Métodos públicos

- void **init** ()

Atributos públicos

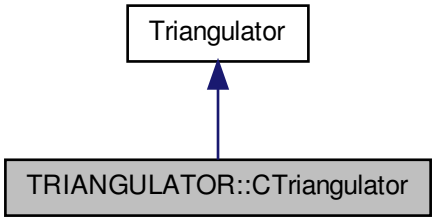
- vector< double > **volumenes**
- vector< double > **volumenesCaidos**
- vector< double > **volumenesNoCaidos**
- vector< double > **volumenesZonaSoc**
- vector< double > **volumenesZonaHF**
- vector< double > **diametros**
- double **maxVolumen**
- double **minVolumen**
- double **maxVolumenHF**
- double **minVolumenHF**
- double **maxVolumenSoc**
- double **minVolumenSoc**
- double **maxDiametro**
- double **minDiametro**
- double **avgDiametro**
- double **avgVolumen**
- double **avgVolumenCaidos**
- double **avgVolumenNoCaidos**
- double **avgVolumenZonaSoc**
- double **avgVolumenZonaHF**
- double **volumenTotal**
- double **volumenCaidosTotal**
- double **volumenNoCaidosTotal**
- double **volumenZonaSocTotal**
- double **volumenZonaHFTotal**
- int **nBloques**
- int **nBloquesCaidos**
- int **nBloquesNoCaidos**
- int **nBloquesZonaSoc**
- int **nBloquesZonaHF**

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/cme3d.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/cme3d.cpp

5.10. Referencia de la Clase TRIANGULATOR::CTriangulator

Diagrama de herencias de TRIANGULATOR::CTriangulator



Métodos públicos

- **CTriangulator** ()

  Default constructor.
- ∼**CTriangulator** ()

  Default destructor.
- void **triangulate** (TU32Vector &indices)

  Triangulates the contour.
- **TVec get** (const TU32 id)

  Returns the given point in the triangulator array.
- virtual void **reset** (void)
- virtual void **addPoint** (float x, float y, float z)
- virtual void **addPoint** (double x, double y, double z)
- virtual unsigned int ∗ **triangulate** (unsigned int &tcount, double epsilon)
- virtual void **getPoint** (unsigned int index, double &x, double &y, double &z) const
- virtual void **getPoint** (unsigned int index, float &x, float &y, float &z) const

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/Triangulator.cpp

5.11. Referencia de la Clase dlgSerieExt

Métodos públicos

- **dlgSerieExt** (QWidget ∗parent=0)

Atributos públicos

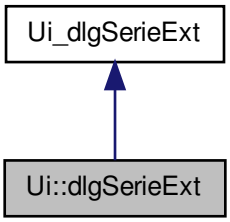
- QVector< **ParametrosBaseSocavacion** > **p**
- QHash< QString, QHash< QString,
  double > ∗ > **PEhash**
- QHash< QString, double > **Prodhash**

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui/dlgserieext.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui/dlgserieext.cpp

5.12. Referencia de la Clase Ui::dlgSerieExt

Diagrama de herencias de Ui::dlgSerieExt



Otros miembros heredados

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui_dlgserieext.h

5.13. Referencia de la Clase EstadisticasBatea

Métodos públicos

- void **ShowStd** ()

Atributos públicos

- **Batea** ∗ **batea**
- double **totalVolumen**
- double **minVolumen**
- double **maxVolumen**
- double **avgVolumen**
- double **minDiametro**
- double **maxDiametro**
- double **avgDiametro**
- int **nBloquesExtraidos**
- std::vector< double > **volumenesBloquesExtraidos**
- std::vector< double > **diametrosBloquesExtraidos**
- std::vector< double > **historialVolumenesExtraidos**

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/estadisticasbatea.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/estadisticasbatea.cpp

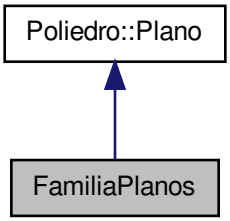
5.14. Referencia de la Clase estadisticasModel

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/estadisticasmodel.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/estadisticasmodel.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/estadisticasmodel.cpp
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/estadisticasmodel.cpp

5.15. Referencia de la Clase FamiliaPlanos

Diagrama de herencias de FamiliaPlanos



Métodos públicos

- **FamiliaPlanos** (const **FamiliaPlanos** &familia)
- **FamiliaPlanos** (**Vector** normal, double d)
- **FamiliaPlanos** (**Vector** normal, double distMax, double distMin, double d)
- **FamiliaPlanos** & **operator=** (const **FamiliaPlanos** &familia)
- **FamiliaPlanos** $*$ **getFamiliaMenor** () const
- void **setFamiliaMenor** (**FamiliaPlanos** $*$fi)
- **FamiliaPlanos** $*$ **getFamiliaMayor** () const
- void **setFamiliaMayor** (**FamiliaPlanos** $*$fd)
- int **getSize** ()
- void **dividirBloques** (vector$<$ **Bloque**$<$ **Poliedro** $>$ $*$ $>$ &bloques, QString prefijoReporte, int &nPlano, int totalPlanosFamilia, int totalPlanos, **ReporteUI** $*$ui)
- void **printFamilia** ()

Tipos protegidos

- typedef **Poliedro::Vector Vector**

Métodos protegidos estáticos

- static void **crearFamilia** (**FamiliaPlanos** ∗∗ppFamilia, **Vector** normal, vector< double >::const_iterator begin, vector< double >::const_iterator end)

Atributos protegidos

- **FamiliaPlanos** ∗ **F_i**
- **FamiliaPlanos** ∗ **F_d**

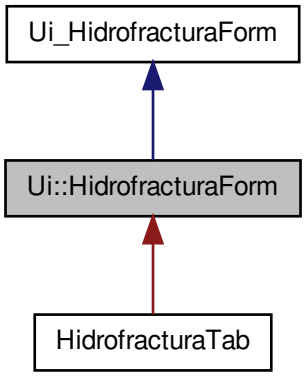
Otros miembros heredados

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/familiaplanos.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/familiaplanos.cpp

5.16. Referencia de la Clase Ui::HidrofracturaForm

Diagrama de herencias de Ui::HidrofracturaForm



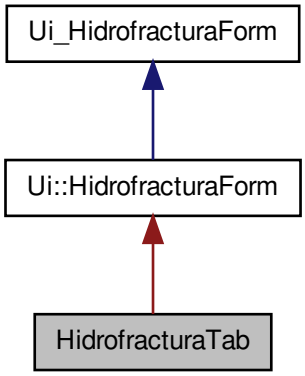
Otros miembros heredados

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui_HidrofracturaForm.h

5.17. Referencia de la Clase HidrofracturaTab

Diagrama de herencias de HidrofracturaTab



Slots públicos

- void **agregarPlano** ()

Métodos públicos

- **HidrofracturaTab** (QWidget *parent=0)
- **ParametrosHidrofracturas parametros** () const
- void **setParametros** (const **ParametrosHidrofracturas** &params)

Otros miembros heredados

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/HidrofracturaTab.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/HidrofracturaTab.cpp

5.18. Referencia de la Clase HistogramItem

Clases

- class **PrivateData**

Tipos públicos

- enum **HistogramAttribute** { **Auto** = 0, **Xfy** = 1 }

Métodos públicos

- **HistogramItem** (const QString &title=QString::null)
- **HistogramItem** (const QwtText &title)
- void **setData** (const QwtIntervalData &data)
- const QwtIntervalData & **data** () const
- void **setColor** (const QColor &)
- QColor **color** () const
- virtual QwtDoubleRect **boundingRect** () const
- virtual int **rtti** () const
- virtual void **draw** (QPainter ∗, const QwtScaleMap &xMap, const QwtScaleMap &yMap, const QRect &) const
- void **setBaseline** (double reference)
- double **baseline** () const
- void **setHistogramAttribute** (HistogramAttribute, bool on=true)
- bool **testHistogramAttribute** (HistogramAttribute) const

Métodos protegidos

- virtual void **drawBar** (QPainter ∗, Qt::Orientation o, const QRect &) const

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/histogram_item.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/histogram_item.cpp

5.19. Referencia de la Clase LectorCSV

Métodos públicos

- QList< **Plano** > **leerCSV** (QString nombreArchivo)

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/LectorCSV.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/LectorCSV.cpp

5.20. Referencia de la Clase Poliedro::Line

Métodos públicos

- **Line** (**Point** &P0, **Point** &P1)
- **Line** (const **Line** &l)
- **Line** & **operator=** (const **Line** &l)
- **Vector getDirection** () const
- bool **operator==** (const **Line** &l) const
- void **displayStats** () const

Atributos públicos

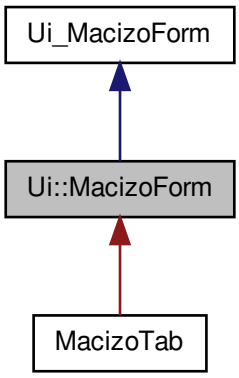
- **Point P0**
- **Point P1**
- **Point P2**

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/polyhedro.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/polyhedro.cpp

5.21. Referencia de la Clase Ui::MacizoForm

Diagrama de herencias de Ui::MacizoForm



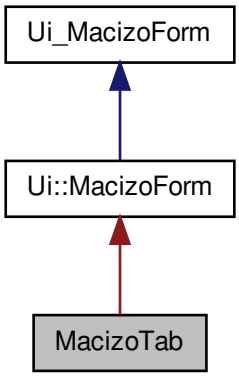
Otros miembros heredados

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui_MacizoForm.h

5.22. Referencia de la Clase MacizoTab

Diagrama de herencias de MacizoTab



Slots públicos

- void **agregarPlano** ()

Métodos públicos

- **MacizoTab** (QWidget ∗parent=0)
- QList< **Plano** > **planosEstructura** ()
- **ParametrosDominio parametros** () const
- void **setParametros** (const **ParametrosDominio** &params)

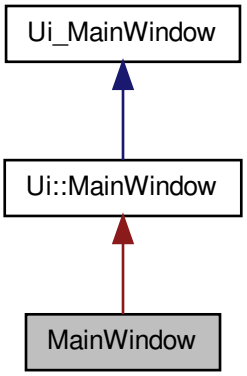
Otros miembros heredados

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/MacizoTab.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/MacizoTab.cpp

5.23. Referencia de la Clase MainWindow

Diagrama de herencias de MainWindow



Slots públicos

- void **abrir** ()
- void **abrirXML** ()
- void **guardar** ()
- void **exportarXML** ()
- void **importar_Voronoi** ()
- void **importar_Series** ()

  Esta función importa todas las bateas y su representación voronoi.
- void **lee_Voronoi** (const QString &fileName)

  Esta función importa toda la producción por batea y agrupa por semana,mes ..
- void **salir** ()
- void **on_action_GeoProd_triggered** ()

Métodos públicos

- **MainWindow** (QWidget *parent=0)
- void **serializar** (const QString &nombreArchivo) const
- void **deserializar** (const QString &nombreArchivo)
- void **cargarXML** (const QString &nombreArchivo)

Otros miembros heredados

5.23.1. Documentación de las funciones miembro

5.23.1.1. void MainWindow::lee_Voronoi (const QString & *fileName*) [slot]

Esta función importa toda la producción por batea y agrupa por semana,mes ..

Traslada puntos de la base.

Inicializa Hash con los periodos a considerar (YYYYMM

Ya estan creadas las bateas y su geometria (baseSocavacion). Ademas se sabe las fechas limites a cosiderar.

Segunda pasada sobre el archivo para obtener información de extracción

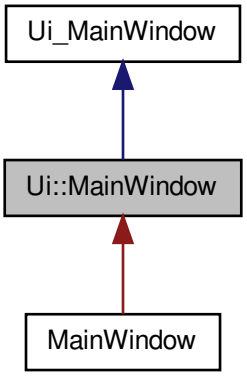
error el periodo no es considerado

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/MainWindow.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/MainWindow.cpp

5.24. Referencia de la Clase Ui::MainWindow

Diagrama de herencias de Ui::MainWindow



Otros miembros heredados

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui_MainWindow.h

5.25. Referencia de la Clase MBatea

Métodos públicos

- **MBatea** (QString name)
- void **SortPoints** ()

  Esta funcion ordena los puntos en el sentido contrario al sentido del reloj.
- void **setPoint** (qreal x, qreal y)

  Asigna un nuevo punto a la geometria del polygono del punto de extraccion.
- void **setSerieExtr** (QList< double > lstSer)
- void **setSerieExtr** (int per, double s)
- void **reateBaseSocavacion** (**ParametrosBaseSocavacion** &r)

Atributos públicos

- QString **nBatea**
- QList< QVector2D > **lstPoint**
- QList< QPointF > **baseSocavacion**
- QList< double > **serieExtraccion**
- bool **extrae_por_serie**
- float **profundidad**
- float **altura**
- float **v_e**
- float **dt**
- QDate **begDate**
- QDate **endDate**
- int **nPserie**

5.25.1. Documentación de las funciones miembro

5.25.1.1. void MBatea::setPoint (qreal *x*, qreal *y*)

Asigna un nuevo punto a la geometria del polygono del punto de extraccion.

Autor

Mario Fernandez

5.25.1.2. void MBatea::SortPoints ( )

Esta funcion ordena los puntos en el sentido contrario al sentido del reloj.

Autor

Mario Fernandez

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/Mbatea.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/Mbatea.cpp

5.26. Referencia de la Estructura paramDominio

Atributos públicos

- int **Lx**
- int **Ly**
- int **Lz**
- int **x0**
- int **y0**
- int **z0**

La documentación para esta estructura fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/global.h

5.27. Referencia de la Estructura ParametrosBaseSocavacion

Atributos públicos

- std::string **nombre**
- QList< QPointF > **baseSocavacion**
- QList< double > **serieExtraccion**
- bool **extrae_por_serie**
- float **profundidad**
- float **altura**
- float **v_e**
- float **dt**

La documentación para esta estructura fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/Estructuras.h

5.28. Referencia de la Estructura ParametrosDominio

Atributos públicos

- float **ancho**
- float **largo**
- float **alto**
- float **origenX**
- float **origenY**
- float **origenZ**
- QList< **Plano** > **planosEstructura**

La documentación para esta estructura fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/Estructuras.h

5.29. Referencia de la Estructura ParametrosHidrofracturas

Atributos públicos

- float **xMin**
- float **xMax**
- float **yMin**
- float **yMax**
- float **zMin**
- float **zMax**
- QList< **Plano** > **planosHidrofracturas**

La documentación para esta estructura fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/Estructuras.h

5.30. Referencia de la Estructura paramPlano

Atributos públicos

- double **inc**
- double **az**
- double **d**

La documentación para esta estructura fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/global.h

5.31. Referencia de la Estructura paramZonaSoc

Atributos públicos

- string **nombre**
- int **nbCoords**
- vector< double > **listOfx**
- vector< double > **listOfy**
- vector< double > **serieExtraccion**
- double **deep**
- double **h**
- double **v_e**
- double **dt**

La documentación para esta estructura fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/global.h

5.32. Referencia de la Clase Plano

Métodos públicos

- **Plano** (double nx=0, double ny=0, double nz=0, double d=0, bool normalized=true)
- **Plano** (const **Vector** &n, double d, bool normalized=true)
- **Vector getNormal** () const
- double **getD** () const
- **Plano opuesto** () const
- bool **operator==** (const **Plano** &Pl) const
- PlanoInterPlano **intersectar** (const **Plano** &Pl, Linea &l) const
- PlanoInterLinea **intersectar** (const Linea &l, **Vector** &v) const
- Ubicacion **ubicacion** (const **Vector** &v) const
- Ubicacion **ubicacion** (const **Cara** &c) const
- Ubicacion **ubicacion** (const **Poliedro** &P) const
- bool **pertenece** (const **Vector** &v) const
- bool **getPlanoFormandoLinea** (vector< **Plano** > &planos, **Plano** &seleccionado, Linea &l, bool borrarDePlanos=false)
- **Plano** (const **Plano** &plano)
- **Plano** & **operator=** (const **Plano** &plano)
- void **setAzimuth** (float azimuth)
- float **azimuth** () const

- void **setInclinacion** (float inclinacion)
- float **inclinacion** () const
- void **setDistancia** (float distancia)
- float **distancia** () const

Atributos protegidos

- **Vector n**
- double **d**
- **Vector V0**

Atributos protegidos estáticos

- static double **SMALL_NUM**

Amigas

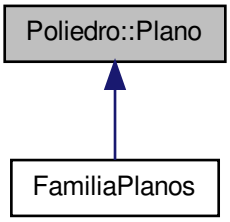
- ostream & **operator**<< (ostream &os, const **Plano** &Pl)

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/plano.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/Plano.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/plano.cpp

5.33. Referencia de la Clase Poliedro::Plano

Diagrama de herencias de Poliedro::Plano



Tipos públicos

- enum **ansPlPl** { **IGUALES**, **PARALELOS**, **LINEA** }
- enum **ansPlL** {
  VACIO, **DENTRO_PLANO**, **PUNTO_DENTRO**, **PUNTO_FUERA**,
  PUNTO_BORDE }
- enum **ansCaraArriba** { **CARA_ABOVE**, **CARA_BELOW**, **CARA_SHARED**, **CARA_INSIDE** }
- enum **ansAbove** { **ABOVE**, **BELOW**, **INSIDE** }

Métodos públicos

- **Plano** (double nx, double ny, double nz, double d)
- **Plano** (**Vector** n, double d)
- **Plano** (const **Plano** &P)
- **Plano** & **operator=** (const **Plano** &P)
- void **init** ()
- bool **estaArriba** (const **Poliedro** &P)
- bool **estaAbajo** (const **Poliedro** &P)
- ansCaraArriba **caraArriba** (const **Poliedro::Plano** &pl)
- **Plano opposite** () const
- **Vector vectorOrtogonal** ()
- bool **operator==** (const **Plano** &Pl) const
- bool **addPunto** (**Point** &p)
- void **addEdgeToPlano** (const **Poliedro::Line** &l)
- **Plano** (const **Vector** &n, const **Point** &p)
- **Vector getNormal** () const
- ansPlPl **intersect** (const **Plano** &P, **Line** &L) const
- ansPlL **intersect** (const **Line** &l, **Point** &p) const
- **Point getV0** () const
- ansAbove **above** (const **Point** &p) const
- ansAbove **above** (const **Vector** &p) const
- Ubicacion **ubicacion** (const **Vector** &p) const
- Ubicacion **ubicacion** (const vector< **Vector** > &p) const
- bool **compare** (const **Plano** &p)
- void **displayStats** () const
- bool **contains** (const **Point** &p) const
- void **deletePoints_Edges** ()
- vector< **Point** > **sortVertices** (int orientacion=-1) const
- double **getArea** () const

Atributos públicos

- **Vector normal**
- **Point V0**
- double **a**
- double **b**
- double **c**
- double **d**
- vector< **Point** * > **listOfPoints**
- vector< **Line** * > **listOfEdges**

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/polyhedro.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/polyhedro.cpp

5.34. Referencia de la Clase PlanoModel

```
#include <PlanoModel.h>
```

Métodos públicos

- **PlanoModel** (QObject ∗parent=0)
- int **rowCount** (const QModelIndex &parent=QModelIndex()) const
- int **columnCount** (const QModelIndex &parent=QModelIndex()) const
- QVariant **data** (const QModelIndex &index, int role=Qt::DisplayRole) const
- Qt::ItemFlags **flags** (const QModelIndex &index) const
- bool **setData** (const QModelIndex &index, const QVariant &value, int role=Qt::EditRole)
- QVariant **headerData** (int section, Qt::Orientation orientation, int role=Qt::DisplayRole) const
- void **setPlanos** (const QList< **Plano** > &planos)
- QList< **Plano** > **planos** () const
- void **insertarPlano** (float azimuth, float inclinacion, float distancia)

5.34.1. Descripción detallada

Modelo que representa una lista de Planos en 3 dimensiones.

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/PlanoModel.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/PlanoModel.cpp

5.35. Referencia de la Clase Poliedro::Point

Métodos públicos

- **Point** (const double a, const double b, const double c)
- **Point** (const **Point** &p)
- **Point** (const **Vector** &v)
- **Point** & **operator=** (const **Point** &p)
- **Point** & **operator=** (const **Vector** &v)
- **Point operator+** (const **Point** &a) const
- **Point operator-** (const **Point** &a) const
- **Point operator**∗ (double lambda) const
- bool **operator==** (const **Point** &p) const
- void **displayStats** () const

Atributos públicos

- double **x**
- double **y**
- double **z**

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/polyhedro.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/polyhedro.cpp

5.36. Referencia de la Clase Poliedro

Clases

- class **Line**
- class **Plano**
- class **Point**
- class **Triangulo**
- class **Vector**
- class **Vertice**

Tipos públicos

- enum **ansEstaDentro** { **DENTRO**, **FUERA**, **BORDE** }

Métodos públicos

- **Poliedro** (double lx, double ly, double lz)
- **Poliedro** (double lx, double ly, double lz, double x0, double y0, double z0)
- **Poliedro** (const **Poliedro** &P)
- **Poliedro** & **operator=** (const **Poliedro** &P)
- **Poliedro** (vector< **Plano** > &listOfPlanos)
- **Poliedro** (const **paramZonaSoc** &pZS, const **paramDominio** &pD)
- **Poliedro** (const **Triangulo** &t, double h, double d)
- void **setNewFromPlanos** (vector< **Plano** > &vec)
- Ubicacion **split** (const **Plano** &P, **Poliedro** &P1, **Poliedro** &P2)
- bool **esVolumen** ()
- vector< **Vector** > **getNormales** ()
- bool **intersection** (const **Poliedro** &p) const
- bool **isIntersectingPoli** (const **Poliedro** &p) const
- bool **_isIntersectingPoli** (const **Poliedro** &p) const
- vector< **Triangulo** > **triangulate** ()
- void **display** ()
- bool **nextPoint** (const **Point** &previousPoint, const **Point** &currentPoint, const **Plano** &currentPlane, **Point** &resultPoint)
- void **displayStats** () const
- void **displayCompleteStats** ()
- void **exportToFile** (char *fileName)
- **Line** & **addEdge** (**Line** &p)
- **Plano** & **addCara** (**Plano** &Pl)
- Ubicacion **cutByPlano** (const **Plano** &p, **Poliedro** &P1, **Poliedro** &P2)
- vector< **Vector** > **getVertices** () const
- void **printVertices** () const
- **Vector getCentroide** () const
- double **getVolumenRandom** (int nPoints=5000) const
- double **getVolumen** () const
- double **getDiametro** () const
- ansEstaDentro **estaDentro** (const **Vector** &v) const
- ansEstaDentro **estaDentroStrict** (const **Vector** &v) const

Métodos públicos estáticos

- static vector< **Poliedro** > **getListOfPoliedrosZonaSoc** (const **paramZonaSoc** &pZS, const **paramDominio** &pD)
- static vector< **Poliedro** > **crearNoConvexo** (const **paramZonaSoc** &pZS)
- static void **displayVarios** (vector< **Poliedro** > vec)

Atributos públicos

- vector< **Plano** * > **caras**
- int **ncaras**
- vector< **Line** * > **edges**
- int **nedges**

Atributos públicos estáticos

- static double **INFINITO**

Amigas

- ostream & **operator**<< (ostream &ofs, **Poliedro** &P)
- istream & **operator**>> (istream &ifs, **Poliedro** &P)

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/polyhedro.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/polyhedro.cpp

5.37. Referencia de la Clase PoligonoModel

```
#include <PoligonoModel.h>
```

Métodos públicos

- **PoligonoModel** (QObject *parent=0)
- int **rowCount** (const QModelIndex &parent=QModelIndex()) const
- int **columnCount** (const QModelIndex &parent=QModelIndex()) const
- QVariant **data** (const QModelIndex &index, int role=Qt::DisplayRole) const
- Qt::ItemFlags **flags** (const QModelIndex &index) const
- bool **setData** (const QModelIndex &index, const QVariant &value, int role=Qt::EditRole)
- QVariant **headerData** (int section, Qt::Orientation orientation, int role=Qt::DisplayRole) const
- void **setPoligono** (const QList< QPointF > &poligono)
- QList< QPointF > **poligono** () const
- bool **insertRows** (int row, int count, const QModelIndex &parent=QModelIndex())
- bool **removeRows** (int row, int count, const QModelIndex &parent=QModelIndex())
- void **agregarPunto** (float x, float y)

5.37.1. Descripción detallada

Modelo que representa una lista de coordenadas en 2D (Poligono).

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/PoligonoModel.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/PoligonoModel.cpp

5.38. Referencia de la Clase HistogramItem::PrivateData

Atributos públicos

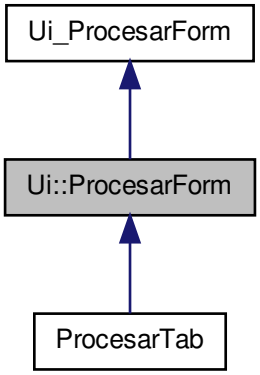
- int **attributes**
- QwtIntervalData **data**
- QColor **color**
- double **reference**

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/histogram_item.cpp

5.39. Referencia de la Clase Ui::ProcesarForm

Diagrama de herencias de Ui::ProcesarForm



Otros miembros heredados

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui_ProcesarForm.h

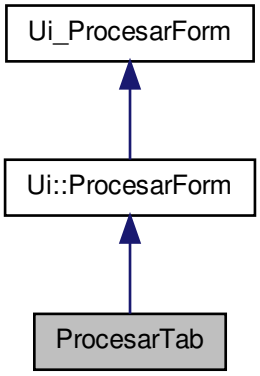
5.40. Referencia de la Clase ProcesarModel

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/procesarmodel.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/procesarmodel.cpp

5.41. Referencia de la Clase ProcesarTab

Diagrama de herencias de ProcesarTab



Slots públicos

- void **crearGeometria** ()
- void **procesar** ()
- void **computarGeometria** ()
- void **refrescarEstadisticas** ()
- void **refrescarHistograma** ()
- void **seleccionarArchivoSalida** ()

Métodos públicos

- **ProcesarTab** (**HidrofracturaTab** ∗hidroTab, **MacizoTab** ∗mTab, **BaseSocavacionTab** ∗baseTab, QWidget ∗parent=0)
- QPushButton ∗ **procesarButtonWidget** ()
- QString **generarScriptV4D** (const QList< **Triangulo** > &triangulos)
- void **guardarScriptV4D** (const QString &textoScript)
- void **inicioProcesamiento** ()
- void **finProcesamiento** ()

Otros miembros heredados

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/ProcesarTab.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/ProcesarTab.cpp

5.42. Referencia de la Clase ReporteUI

Métodos públicos

- **ReporteUI** (**ProcesarTab** ∗tab)
- void **mensaje** (const QString &msj)
- void **mensaje** (const std::string &msj)
- void **progreso** (float porcentaje)
- void **incrementar** (float porcentaje)

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/ReporteUI.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/ReporteUI.cpp

5.43. Referencia de la Clase SerieExtraccionModel

Métodos públicos

- **SerieExtraccionModel** (QObject ∗parent=0)
- int **rowCount** (const QModelIndex &parent=QModelIndex()) const
- int **columnCount** (const QModelIndex &parent=QModelIndex()) const
- QVariant **data** (const QModelIndex &index, int role=Qt::DisplayRole) const
- Qt::ItemFlags **flags** (const QModelIndex &index) const
- bool **setData** (const QModelIndex &index, const QVariant &value, int role=Qt::EditRole)
- QVariant **headerData** (int section, Qt::Orientation orientation, int role=Qt::DisplayRole) const
- void **setSerie** (const QList< double > &serie)
- QList< double > **getSerie** () const
- bool **insertRows** (int row, int count, const QModelIndex &parent=QModelIndex())
- bool **removeRows** (int row, int count, const QModelIndex &parent=QModelIndex())
- void **agregarVolumen** (double)

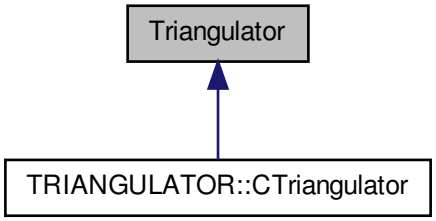
La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/serieextraccionmodel.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/serieextraccionmodel.cpp

5.44. Referencia de la Clase Triangulator

```
#include <Triangulator.h>
```

Diagrama de herencias de Triangulator



Métodos públicos

- virtual void **addPoint** (double x, double y, double z)=0
- virtual void **addPoint** (float x, float y, float z)=0
- virtual unsigned int * **triangulate** (unsigned int &tcount, double epsilon=0.00000000001)=0
- virtual void **reset** (void)=0
- virtual void **getPoint** (unsigned int index, float &x, float &y, float &z) const =0
- virtual void **getPoint** (unsigned int index, double &x, double &y, double &z) const =0

5.44.1. Descripción detallada

Copyright (c) 2009 by John W. Ratcliff `jratcliffscarab@gmail.com`

Portions of this source has been released with the PhysXViewer application, as well as Rocket, CreateDynamics, ODF, and as a number of sample code snippets.

If you find this code useful or you are feeling particularily generous I would ask that you please go to `http://www.amillionpixels.us` and make a donation to Troy DeMolay.

DeMolay is a youth group for young men between the ages of 12 and 21. It teaches strong moral principles, as well as leadership skills and public speaking. The donations page uses the 'pay for pixels' paradigm where, in this case, a pixel is only a single penny. Donations can be made for as small as $4 or as high as a $100 block. Each person who donates will get a link to their own site as well as acknowledgement on the donations blog located here `http://www.amillionpixels.blogspot.com/`

If you wish to contact me you can use the following methods:

Skype ID: jratcliff63367 Yahoo: jratcliff63367 AOL: jratcliff1961 email: `jratcliffscarab@gmail.com`

The MIT license:

Permission is hereby granted, free of charge, to any person obtaining a copy of this software and associated documentation files (the "Software"), to deal in the Software without restriction, including without limitation the rights to use, copy, modify, merge, publish, distribute, sublicense, and/or sell copies of the Software, and to permit persons to whom the Software is furnished to do so, subject to the following conditions:

The above copyright notice and this permission notice shall be included in all copies or substantial portions of the Software.

THE SOFTWARE IS PROVIDED "AS IS", WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND, EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO THE WARRANTIES OF MERCHANTABILITY, FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE AND NONINFRINGEMENT. IN NO EVENT SHALL THE AUTHORS OR COPYRIGHT HOLDERS BE LIABLE FOR ANY CLAIM, DAMAGES OR OTHER LIABILITY, WHETHER IN AN ACTION OF CONTRACT, TORT

OR OTHERWISE, ARISING FROM, OUT OF OR IN CONNECTION WITH THE SOFTWARE OR THE USE OR OTHER DEALINGS IN THE SOFTWARE.

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/Triangulator.h

5.45. Referencia de la Clase Triangulo

Atributos públicos

- **Vertice v0**
- **Vertice v1**
- **Vertice v2**

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/ProcesarTab.h

5.46. Referencia de la Clase Poliedro::Triangulo

Métodos públicos

- void **toFile** (char ∗fileName)

Atributos públicos

- **Vertice v0**
- **Vertice v1**
- **Vertice v2**

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/polyhedro.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/polyhedro.cpp

5.47. Referencia de la Clase TRIANGULATOR::TVec

Métodos públicos

- **TVec** (double _x, double _y, double _z)

Atributos públicos

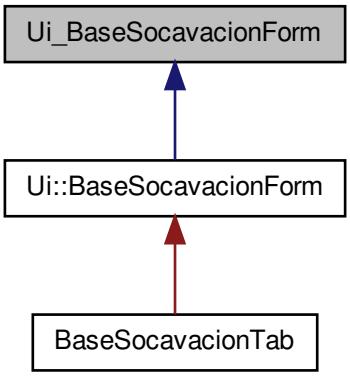
- double **x**
- double **y**
- double **z**

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/Triangulator.cpp

5.48. Referencia de la Clase Ui_BaseSocavacionForm

Diagrama de herencias de Ui_BaseSocavacionForm



Métodos públicos

- void **setupUi** (QWidget ∗BaseSocavacionForm)
- void **retranslateUi** (QWidget ∗BaseSocavacionForm)

Atributos públicos

- QHBoxLayout ∗ **horizontalLayout**
- QGroupBox ∗ **BateasgroupBox**
- QHBoxLayout ∗ **horizontalLayout_2**
- QListWidget ∗ **bateasList**
- QGridLayout ∗ **gridLayout_3**
- QPushButton ∗ **agregarBateaButton**
- QPushButton ∗ **quitarBateaButton**
- QSpacerItem ∗ **horizontalSpacer**
- QSpacerItem ∗ **verticalSpacer**
- QPushButton ∗ **btnImpGeoBase**
- QGroupBox ∗ **groupBox_2**
- QVBoxLayout ∗ **verticalLayout_2**
- QGridLayout ∗ **gridLayout**
- QLabel ∗ **label_3**
- QLabel ∗ **label_4**
- QLineEdit ∗ **alturaEdit**
- QLineEdit ∗ **profundidadEdit**
- QLabel ∗ **label_5**
- QLabel ∗ **label_6**
- QLabel ∗ **label_7**
- QLabel ∗ **label_8**
- QLabel ∗ **label_9**
- QLabel ∗ **label_10**

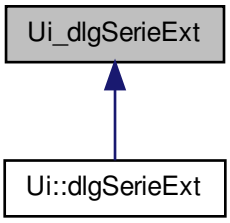
- QLineEdit ∗ **v_eEdit**
- QLineEdit ∗ **dtEdit**
- QLabel ∗ **label_11**
- QLineEdit ∗ **nombreEdit**
- QHBoxLayout ∗ **horizontalLayout_3**
- QGroupBox ∗ **groupBox**
- QGridLayout ∗ **gridLayout_4**
- QTableView ∗ **baseSocavacionView**
- QSpacerItem ∗ **horizontalSpacer_2**
- QVBoxLayout ∗ **verticalLayout_4**
- QGridLayout ∗ **gridLayout_5**
- QLabel ∗ **label**
- QLineEdit ∗ **xLineEdit**
- QLineEdit ∗ **zLineEdit**
- QLabel ∗ **label_2**
- QPushButton ∗ **agregarButton**
- QSpacerItem ∗ **verticalSpacer_2**
- QGroupBox ∗ **groupBox_3**
- QGridLayout ∗ **gridLayout_2**
- QGridLayout ∗ **gridLayout_6**
- QTableView ∗ **serieExtraccionView**
- QGridLayout ∗ **gridLayout_7**
- QLabel ∗ **label_12**
- QLineEdit ∗ **volumenEdit**
- QPushButton ∗ **agregarVolumenButton**
- QSpacerItem ∗ **verticalSpacer_3**
- QPushButton ∗ **importarSerieButton**
- QCheckBox ∗ **habilitarSerieCheckBox**

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui_BaseSocavacionForm.h

5.49. Referencia de la Clase Ui_dlgSerieExt

Diagrama de herencias de Ui_dlgSerieExt



Métodos públicos

- void **setupUi** (QDialog ∗**dlgSerieExt**)
- void **retranslateUi** (QDialog ∗**dlgSerieExt**)

Atributos públicos

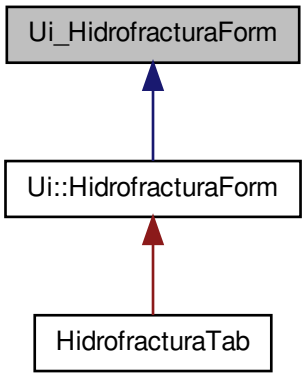
- QGroupBox ∗ **grdBox**
- QRadioButton ∗ **radioButton_W**
- QRadioButton ∗ **radioButton_M**
- QRadioButton ∗ **radioButton_S**
- QRadioButton ∗ **radioButton_Y**
- QToolButton ∗ **toolButton**
- QLabel ∗ **flename**
- QPushButton ∗ **btnCancela**
- QPushButton ∗ **btnProcesa**
- QPushButton ∗ **btnSalir**

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui_dlgserieext.h

5.50. Referencia de la Clase Ui_HidrofracturaForm

Diagrama de herencias de Ui_HidrofracturaForm



Métodos públicos

- void **setupUi** (QWidget ∗HidrofracturaForm)
- void **retranslateUi** (QWidget ∗HidrofracturaForm)

Atributos públicos

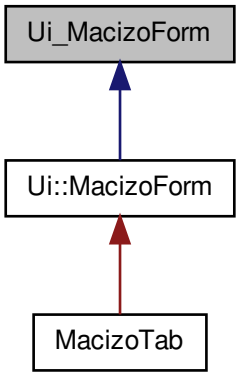
- QVBoxLayout ∗ **verticalLayout**
- QGroupBox ∗ **groupBox**
- QGridLayout ∗ **gridLayout_2**
- QGridLayout ∗ **gridLayout**
- QLabel ∗ **label**
- QLabel ∗ **label_2**
- QLabel ∗ **label_3**
- QLineEdit ∗ **minX**
- QLineEdit ∗ **minY**
- QLineEdit ∗ **minZ**
- QLabel ∗ **label_4**
- QLineEdit ∗ **maxX**
- QLabel ∗ **label_5**
- QLabel ∗ **label_6**
- QLineEdit ∗ **maxY**
- QLineEdit ∗ **maxZ**
- QLabel ∗ **label_10**
- QLabel ∗ **label_11**
- QLabel ∗ **label_12**
- QGroupBox ∗ **groupBox_2**
- QGridLayout ∗ **gridLayout_4**
- QGridLayout ∗ **gridLayout_3**
- QLabel ∗ **label_7**
- QLineEdit ∗ **hidroAzimuth**
- QLabel ∗ **label_8**
- QLineEdit ∗ **hidroInclinacion**
- QLabel ∗ **label_9**
- QLineEdit ∗ **hidroDistancia**
- QLabel ∗ **label_13**
- QLabel ∗ **label_14**
- QHBoxLayout ∗ **horizontalLayout**
- QSpacerItem ∗ **horizontalSpacer**
- QPushButton ∗ **agregarButton**
- QTableView ∗ **hidrofracturasView**

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui_HidrofracturaForm.h

5.51. Referencia de la Clase Ui_MacizoForm

Diagrama de herencias de Ui_MacizoForm



Métodos públicos

- void **setupUi** (QWidget ∗MacizoForm)
- void **retranslateUi** (QWidget ∗MacizoForm)

Atributos públicos

- QGridLayout ∗ **gridLayout_3**
- QGroupBox ∗ **groupBox**
- QGridLayout ∗ **gridLayout_2**
- QGridLayout ∗ **gridLayout**
- QLabel ∗ **label**
- QLabel ∗ **label_2**
- QLabel ∗ **label_3**
- QLineEdit ∗ **largoEstructuraEdit**
- QLineEdit ∗ **anchoEstructuraEdit**
- QLineEdit ∗ **altoEstructuraEdit**
- QLabel ∗ **label_13**
- QLabel ∗ **label_14**
- QLabel ∗ **label_15**
- QLabel ∗ **label_4**
- QLabel ∗ **label_5**
- QLabel ∗ **label_10**
- QLabel ∗ **label_6**
- QLabel ∗ **label_11**
- QLabel ∗ **label_12**
- QLineEdit ∗ **origenXEdit**
- QLineEdit ∗ **origenYEdit**
- QLineEdit ∗ **origenZEdit**
- QGroupBox ∗ **groupBox_2**

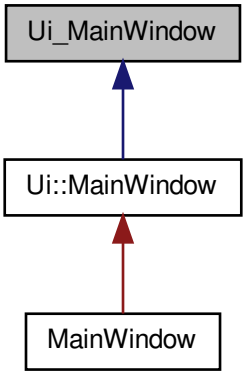
- QGridLayout ∗ **gridLayout_5**
- QGridLayout ∗ **gridLayout_4**
- QLabel ∗ **label_7**
- QLineEdit ∗ **estructuraAzimuth**
- QLabel ∗ **label_8**
- QLineEdit ∗ **estructuraInclinacion**
- QLabel ∗ **label_9**
- QLineEdit ∗ **estructuraDistancia**
- QLabel ∗ **label_22**
- QLabel ∗ **label_24**
- QHBoxLayout ∗ **horizontalLayout**
- QPushButton ∗ **agregarButton**
- QSpacerItem ∗ **horizontalSpacer**
- QPushButton ∗ **pushButton**
- QTableView ∗ **estructuraView**

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui_MacizoForm.h

5.52. Referencia de la Clase Ui_MainWindow

Diagrama de herencias de Ui_MainWindow



Métodos públicos

- void **setupUi** (QMainWindow ∗**MainWindow**)
- void **retranslateUi** (QMainWindow ∗**MainWindow**)

Atributos públicos

- QAction ∗ **actionAbrir**
- QAction ∗ **actionGuardar**

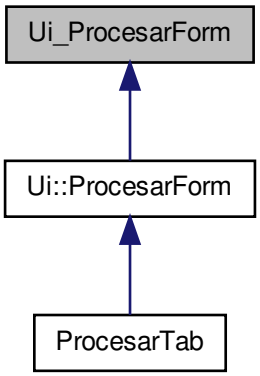
- QAction ∗ **actionSalir**
- QAction ∗ **actionAbrir_XML**
- QAction ∗ **actionExportar**
- QAction ∗ **action_GeoProd**
- QAction ∗ **actionProduccion**
- QAction ∗ **actionAcerca_de**
- QAction ∗ **actionVer_Ayuda**
- QAction ∗ **actionGuardar_Resultado**
- QAction ∗ **Produccion_Mensual**
- QAction ∗ **actionSuperficie**
- QAction ∗ **actionEvoluci_n_Superficie**
- QAction ∗ **actionCunas**
- QWidget ∗ **centralwidget**
- QMenuBar ∗ **menubar**
- QMenu ∗ **menuArchivo**
- QMenu ∗ **menuImportar**
- QMenu ∗ **menuAyuda**
- QStatusBar ∗ **statusbar**

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui_MainWindow.h

5.53. Referencia de la Clase Ui_ProcesarForm

Diagrama de herencias de Ui_ProcesarForm



Métodos públicos

- void **setupUi** (QWidget ∗ProcesarForm)
- void **retranslateUi** (QWidget ∗ProcesarForm)

Atributos públicos

- QVBoxLayout * **verticalLayout**
- QGroupBox * **groupBox**
- QVBoxLayout * **verticalLayout_2**
- QHBoxLayout * **horizontalLayout_3**
- QLabel * **label**
- QComboBox * **bateasCBox**
- QHBoxLayout * **horizontalLayout**
- QGroupBox * **bloquesGroupBox**
- QGridLayout * **gridLayout_3**
- QLabel * **label_6**
- QLineEdit * **bloquesCreadosEdit**
- QLabel * **label_5**
- QLineEdit * **bloquesCaidosEdit**
- QLabel * **label_4**
- QLineEdit * **bloquesNoCaidosEdit**
- QGroupBox * **groupBox_2**
- QGridLayout * **gridLayout_4**
- QLabel * **label_3**
- QLineEdit * **volumenTotalEdit**
- QLabel * **label_7**
- QLineEdit * **volumenMaxEdit**
- QLabel * **label_10**
- QLineEdit * **volumenAvgEdit**
- QLabel * **label_9**
- QLineEdit * **volumenMinEdit**
- QGroupBox * **groupBox_3**
- QGridLayout * **gridLayout_5**
- QLabel * **label_13**
- QLineEdit * **diametroAvgEdit**
- QLabel * **label_11**
- QLineEdit * **diametroMaxEdit**
- QLabel * **label_12**
- QLineEdit * **diametroMinEdit**
- QFrame * **frame**
- QGridLayout * **gridLayout**
- QwtPlot * **plot**
- QGridLayout * **gridLayout_2**
- QLabel * **fileLabel**
- QLabel * **label_14**
- QLabel * **label_2**
- QSpinBox * **nValoresHistogramaBox**
- QLabel * **label_8**
- QComboBox * **datosHistogramaCBox**
- QToolButton * **fileButton**
- QProgressBar * **progressBar**
- QHBoxLayout * **horizontalLayout_2**
- QLabel * **mensajesLabel**
- QPushButton * **procesarButton**

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui_ProcesarForm.h

5.54. Referencia de la Clase Poliedro::Vector

Métodos públicos

- **Vector** (const double nx, const double ny, const double nz)
- **Vector** (const **Vector** &v)
- **Vector** & **operator=** (const **Vector** &v)
- bool **operator==** (const **Vector** &v) const
- **Vector** (const **Point** &a)
- **Vector** (const **Point** &a, const **Point** &b)
- double **getX** () const
- double **getY** () const
- double **getZ** () const
- **Vector operator-** () const
- double **dot** (const **Vector** &v) const
- **Vector cross** (const **Vector** &v) const
- **Vector operator+** (const **Vector** &v) const
- **Vector operator-** (const **Vector** &v) const
- **Vector operator**$*$ (double a) const
- **Vector opposite** () const
- **Vector normalize** () const
- **Vector masLejano** (const vector$<$ **Vector** $>$ &vecs)
- **Vector ortogonal** ()
- void **displayStats** () const

Atributos públicos

- double **x**
- double **y**
- double **z**

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/polyhedro.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/polyhedro.cpp

5.55. Referencia de la Clase Vertice

Atributos públicos

- float **x**
- float **y**
- float **z**

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/src/ProcesarTab.h

5.56. Referencia de la Clase Poliedro::Vertice

Atributos públicos

- float **x**
- float **y**
- float **z**

La documentación para esta clase fue generada a partir del siguiente fichero:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/polyhedro.h

5.57. Referencia de la Clase Viewfrm

Métodos públicos

- **Viewfrm** (QWidget ∗parent=0)

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui/viewfrm.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/ui/viewfrm.cpp

5.58. Referencia de la Clase CME3D::Visitante

Métodos públicos

- **Visitante** (ostream &ofs)
- void **visit** (**CME3D** &)
- void **visit** (**BloqueCME3D** ∗)
- void **visit** (**BloqueCME3D::Cara** ∗)

Atributos públicos

- vector< **BloqueCME3D** ∗ > **visitados**
- ostream & **ofs**
- string **indent**
- string **indentStep**

La documentación para esta clase fue generada a partir de los siguientes ficheros:

- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/cme3d.h
- /v/mfernand/cmm/CMM/v08/trunk/cme3d.cpp

Apéndice B

Archivos de Voronoi y Producción

Los archivo con las zonas de extracción se encuentran en el DVD dentro de la carpeta ReporteFinal/linea_cme3d/Data/DiabloRegimiento