

数学分析

第三册

编著：曾红刚 陈仁毓 董兴堂 周泽华

2022.8

目 录

第十一章 多元函数的极限与连续性	1
11.1 n 维欧氏空间	1
11.2 \mathbb{R}^n 中的点集	2
11.3 \mathbb{R}^n 的完备性定理	3
11.4 多元向量值函数的极限	4
11.4.1 极限的定义及性质	4
11.4.2 累次极限	7
11.5 多元向量值函数的连续性	9
11.5.1 连续的定义及性质	9
11.5.2 一致连续	11
11.5.3 紧集上连续函数的性质	11
11.5.4 习题11.5	12
11.6 第十一章典型例题选讲	12
11.6.1 例题选讲	12
11.7 第十一章总复习题	16
第十二章 偏导数和全微分	17
12.1 偏导数和全微分的概念	17
12.1.1 偏导数的定义	17
12.1.2 全微分	18
12.1.3 高阶偏导数	21
12.1.4 高阶全微分	23
12.1.5 习题12.1	23
12.2 多元向量值函数的导数与微分	26
12.3 多元函数复合求导	27
12.3.1 习题12.3	32
12.4 隐函数求导法	33
12.4.1 由一个方程确定的函数求导计算	33
12.4.2 由方程组确定的函数求导计算	34
12.4.3 反函数组与坐标变换	37
12.4.4 习题12.4	38
12.5 隐函数存在定理	40
12.5.1 一个方程所确定的隐函数	40
12.5.2 方程组所确定的隐函数	42
12.5.3 习题12.4	44
12.6 第十二章典型例题选讲	45
12.7 第十二章总复习题	49
第十三章 偏导数的应用	55
13.1 偏导数在几何上的应用	55
13.1.1 空间曲线的切线方程和法平面方程	55
13.1.2 曲面的切平面和法线方程	57
13.1.3 习题13.1	59
13.2 方向导数、梯度与泰勒公式	60
13.2.1 方向导数	60
13.2.2 梯度	61
13.2.3 二元函数的泰勒公式	63
13.2.4 习题13.2	64
13.3 无条件极值	64

13.3.1 无条件极值	64
13.3.2 极值的求法	65
13.3.3 函数最值的求法	68
13.3.4 最小二乘法	68
13.3.5 习题13.3	70
13.4 条件极值	71
13.4.1 问题的引入	71
13.4.2 条件极值的必要条件	71
13.4.3 习题13.4	73
13.5 第十三章综合例题选讲	75
13.6 第十三章总复习题	79
第十四章 重积分	81
14.1 引例	81
14.2 矩形区域上二重积分的定义和基本性质	81
14.3 可积性理论	82
14.3.1 可积性(一): 达布理论	82
14.3.2 可积性(二): Lebesgue理论	85
14.4 矩形区域上二重积分的计算	88
14.5 有界集合上的二重积分	90
14.6 有界集合上二重积分的计算	92
14.7 二重积分的换元法	97
14.8 三重积分	100
14.8.1 直角坐标系下三重积分的计算方法	100
14.8.2 利用变量代换计算三重积分	105
14.9 n 重积分	112
14.10 积分的应用	113
14.10.1 重积分在几何上的应用	113
14.10.2 重积分在物理上的应用	115
第十五章 曲线积分和曲面积分的计算	123
15.1 第一类曲线积分的计算	123
15.1.1 习题17-1	126
15.2 第一类曲面积分的计算	127
15.2.1 习题17-2	129
15.3 第二类曲线积分	130
15.3.1 向量场的概念	130
15.3.2 第二类曲线积分的概念及性质	131
15.3.3 第二类曲线积分的计算	134
15.3.4 两类曲线积分的关系	137
15.3.5 习题17-3	138
15.4 第二类曲面积分	139
15.4.1 有向曲面	139
15.4.2 第二类曲面积分的定义	139
15.4.3 第二类曲面积分的计算	142
15.4.4 习题17-4	145
15.5 第十七章总复习题	147
第十六章 各种积分之间的关系及场论初步	151
16.1 格林公式	151
16.1.1 格林公式	151
16.1.2 平面曲线积分与路径无关的条件	156
16.1.3 习题18-1	160

16.2	高斯公式与散度	162
16.2.1	高斯公式	162
16.2.2	沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件	165
16.2.3	散度	166
16.2.4	习题18-2	167
16.3	斯托克斯公式与旋度	168
16.3.1	斯托克斯公式	168
16.3.2	空间曲线积分与路径无关的条件	170
16.3.3	旋度	171
16.3.4	习题18-3	173
16.4	复习题18	174
第十七章 含参变量的积分		179
17.1	含参变量的常义积分	179
17.1.1	含参变量的常义积分	179
17.1.2	习题14.1	183
17.2	含参变量的广义积分	184
17.2.1	一致收敛积分的定义与判别法	184
17.2.2	一致收敛积分的分析性质	185
17.2.3	Gamma函数和Beta函数(欧拉积分)	188
17.2.4	习题14.2	191
17.3	第十四章综合例题选讲	193
17.4	第十四章总复习题	195

第十一章 多元函数的极限与连续性

11.1 n 维欧式空间

我们定义集合

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

x 称为 \mathbb{R}^n 上的一个点, 也可以称为一个向量.

定义 11.1.1 (\mathbb{R}^n 上的线性结构) . 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是 \mathbb{R}^n 中的两个向量, $\lambda \in \mathbb{R}$, 定义 \mathbb{R}^n 上的加法和数乘运算分别为

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

易知在此运算定义下, \mathbb{R}^n 成为一个向量空间, 且维数为 n , 称之为 n 维向量空间.

定义 11.1.2 (\mathbb{R}^n 上的内积结构) . 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是 \mathbb{R}^n 中的两个向量, 定义 \mathbb{R}^n 上的内积为:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

内积满足: (1) $\langle x, x \rangle \geq 0$, 且 $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;

(2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

(3) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;

(4) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, 对 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

配以此内积结构的 \mathbb{R}^n 称之为 n 维欧式空间.

定义 11.1.3 (\mathbb{R}^n 上向量的长度(范数)) 对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 定义 x 的长度为

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

为区别于绝对值符号, 有时也用 $\|x\|$ 表示长度.

定义 11.1.4 (\mathbb{R}^n 上两点之间的距离) 对 $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, x, y 之间的距离定义为

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

易知距离满足下列性质:

(1) $d(x, y) \geq 0$, 且 $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

关于 \mathbb{R}^n 上两点之间的距离, 有下面的性质.

命题 11.1.5 对 $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \forall i = 1, 2, \dots, n$, 有

$$|x_i - y_i| \leq d(x, y) \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

证明.

$$|x_i - y_i| = \sqrt{(x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - y_j)^2} = \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|.$$

■

定义 11.1.6 (球形邻域) 设 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$,

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a, x) < \varepsilon\}.$$

称之为以 a 为心 ε 为半径的开球, ε 很小时称之为 a 的 (球形) ε 邻域.

$$B(\hat{a}, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < d(a, x) < \varepsilon\}.$$

称之为 a 的去心邻域. 此外, $S(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a, x) = \varepsilon\}$ 表示以 a 为心 ε 为半径的球面.

定义 11.1.7 (方形邻域) 设 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$,

$$N(a, \delta) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i - a_i| < \delta, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

称之为 a 的方形邻域.

注 11.1.8 在方形邻域的定义中, δ 可以不一样, 即可以取 $\delta_i > 0$, 满足 $|x_i - a_i| < \delta_i, i = 1, 2, \dots, n$. 此外, 球形邻域和方形邻域之间可以相互转化.

11.2 \mathbb{R}^n 中的点集

下面, 我们给出 \mathbb{R}^n 上的一些点的概念.

定义 11.2.1 (内点, 外点, 边界点和聚点) 设 $E \in \mathbb{R}^n$ 为非空集合, $a \in \mathbb{R}^n$ 为点.

- (1) a 为 E 的内点 $\iff \exists \delta > 0$, 使得 $B(a, \delta) \subset E$. 内点的全体记为 E° .
- (2) a 为 E 的外点 $\iff \exists \delta > 0$, 使得 $B(a, \delta) \cap E = \emptyset$.
- (3) a 为 E 的边界点 $\iff a$ 既不是内点也不是外点 \iff 对 $\forall \delta > 0$, 有 $B(a, \delta) \cap E \neq \emptyset$ 且 $B(a, \delta) \cap E^c \neq \emptyset$, 这里 E^c 表示 E 的余集. E 的边界点的全体记为 ∂E .
- (4) a 为 E 的聚点 \iff 对 $\forall \delta > 0$, 有 $B(\hat{a}, \delta) \cap E \neq \emptyset$. E 的聚点的全体记为 E' .

下面我们给出 \mathbb{R}^n 上的开集和闭集的概念.

定义 11.2.2 (开集, 闭集, 闭包) 设 $E \in \mathbb{R}^n$ 为非空集合.

- (1) E 为开集 $\iff E \subset E^\circ$, 即对 $\forall x \in E, \exists \delta > 0$, 使得 $B(x, \delta) \subset E$.
- (2) E 为闭集 $\iff E^c$ 为开集.
- (3) $E \cup E'$ 称为 E 的闭包, 记为 \bar{E} .

例 11.2.3 $E \in \mathbb{R}^n$ 为开集.

例 11.2.4 $B(a, \delta)$ 为 \mathbb{R}^n 中的开集.

例 11.2.5 E 为闭集 $\iff E = \bar{E}$.

练习 11.2.6 证明下列命题.

- (1) $\{x \in \mathbb{R}^n : d(a, x) = |x - a| > \delta\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的开集.
- (2) 任意有限点集都是闭集.
- (3) 任意多个开集的并仍是开集; 有限多个开集的交仍是开集.
- (4) 任意多个闭集的交仍是闭集; 有限多个闭集的并仍是闭集.
- (5) $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ; \bar{A}^c = (A^\circ)^c$.
- (6) $\partial A = \bar{A} \cap \bar{A}^c = \bar{A} - A^\circ$ 为闭集.

定义 11.2.7 (连通集, 区域, 有界集, 直径) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为集合.

- (1) E 是连通集 $\iff E$ 中的任意两点都能用位于 E 中的连续曲线连接起来.
- (2) E 为区域 $\iff E$ 是连通的开集. 若 E 为区域, 也称 \bar{E} 为闭区域.
- (3) E 为有界集 $\iff \exists M > 0$, 使得对 $\forall x \in E$ 有 $|x| \leq M$.
- (4) E 的直径定义为: $\text{diam} E = \sup\{|x - y| : x, y \in E\}$.

例 11.2.8 证明: E 有界 $\iff \text{diam} E < +\infty$.

11.3 \mathbb{R}^n 的完备性定理

定义 11.3.1 (收敛点列) 设 $\{x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), k = 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}^n$ 是一个点列. 若 $\exists x \in \mathbb{R}^n$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}$, 当 $k > K$ 时, 有

$$d(x^{(k)}, x) = |x^{(k)} - x| < \varepsilon.$$

则称 $\{x^{(k)}\}$ 收敛于 x , 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$.

定理 11.3.2 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x, \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)} = x_j, j = 1, \dots, n.$

证明. 由 $|x_j^{(k)} - x_j| \leq |x^{(k)} - x| \leq \sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j|$ 可得. ■

注 11.3.3 (1) $\lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)} = x_j, j = 1, \dots, n$ 称之为依坐标收敛.

(2) 上述定义的极限也有类似于数列极限的性质, 如极限唯一, 收敛点列有界等.

(3) 借助于点列极限, 可以给出聚点的一个等价定义, 即

x 为 E 的聚点 $\iff \exists \{x^{(k)}\} \subset E$ 且对 $\forall k, x^{(k)} \neq x$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$.

定义 11.3.4 (柯西列) $\{x^{(k)}\} \subset \mathbb{R}^n$ 为柯西列 $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}$, 当 $m, n > K$ 时, 有

$$d(x^{(n)}, x^{(m)}) = |x^{(n)} - x^{(m)}| < \varepsilon.$$

或者等价的, \exists 充分大的正整数 N , 对 $\forall p > N$, 有 $|x^{(n)} - x^{(n+p)}| < \varepsilon$.

定理 11.3.5 收敛点列必为柯西列.

证明. 设 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}$, 当 $k > K$ 时, 有 $|x^{(k)} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. 则当 $m, n > K$ 时, 有

$$|x^{(m)} - x^{(n)}| \leq |x^{(m)} - x| + |x^{(n)} - x| < \varepsilon.$$

■

定理 11.3.6 \mathbb{R}^n 中的柯西列必收敛.

证明. 设 $x^{(k)}$ 为柯西列, 由命题11.1.5可知, $\{x_j^{(k)}\}$ 也为柯西列, 故由实数的柯西收敛准则, $\exists x_j \in \mathbb{R}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)} = x_j, j = 1, \dots, n$. 再由定理11.3.2, $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x = (x_1, \dots, x_n)$. ■

我们知道, 实数的完备性定理有: 确界原理, 单调有界数列必收敛, 柯西收敛准则, 闭区间套定理, 致密性定理, 有限覆盖定理. 因为在 \mathbb{R}^n 中的向量没有大小的概念, 所以确界原理和单调有界数列必收敛在 \mathbb{R}^n 中不成立, 而定理11.3.6即为柯西收敛准则. 下面我们将给出其他几个完备性定理.

定理 11.3.7 (闭集套定理) 设 $\{F_k : k = 1, 2, \dots\}$ 为 \mathbb{R}^n 中的一列非空闭集, 且满足(i) $F_k \supset F_{k+1}, k \in \mathbb{N}$; (ii) $\text{diam} F_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. 证明: $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ 由唯一一点组成.

证明. 由 $F_k \neq \emptyset$, 任取 $x^{(k)} \in F_k$, 由(ii), 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}$, 当 $k > K$ 时, 有 $\text{diam} F_k < \varepsilon$. 又由(i), 当 $m, n > K$ 时, $x^{(m)}, x^{(n)} \in F_k$, 且有

$$|x^{(m)} - x^{(n)}| \leq \text{diam} F_k < \varepsilon.$$

即 $\{x^{(k)}\}$ 为柯西列, 由定理11.3.6, $\exists x$, 使得 $x^{(k)} \rightarrow x, k \rightarrow \infty$.

由(i), 对 $\forall k$, 当 $k > K$ 时, 有 $F_k \subset F_K$, 即有 $\{x^{(j)} : j = k, k+1, \dots\} \subset F_K$. 显然 $x^{(j)} \rightarrow x, j \rightarrow \infty$. 又 F_K 为闭集, 故 $x \in F_K$. 再由 K 的任意性, 有 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$.

若有 $x, y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ 且 $x \neq y$, 则对 $\forall k$, 有 $x, y \in F_k$, 从而

$$|x - y| \leq \text{diam} F_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty,$$

这是不可能的, 故唯一性得证. ■

定理 11.3.8 (致密性定理) 设 $\{x^{(k)}\}$ 为 \mathbb{R}^n 中的有界点列, 则必能从中选取收敛的子列.

证明. 记 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$. 由 $\{x^{(k)}\}$ 有界知 $\{x_j^{(k)}\}, j = 1, \dots, n$ 有界, 故 $\{x_1^{(k)}\}$ 存在收敛的子列 $\{x_1^{(k'_j)}\}$. 再对 $\{x_2^{(k'_j)}\}$ 又存在收敛的子列 $\{x_2^{(k''_j)}\}$. 经过区 n 次子列可得 $\{x^{(k)}\}$ 的子列 $\{x^{(k_n)}\}$, 它的每个分量组成的序列都收敛, 从而 $\{x^{(k_n)}\}$ 收敛. ■

定义 11.3.9 (开覆盖, 紧集) (1) 设集合 $E \in \mathbb{R}^n$, 若存在集合族 $\{E_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, 其中每个 $E_\lambda \in \mathbb{R}^n$ 为开集, 且 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \supset E$, 则称 $\{E_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 为 E 的一个开覆盖.

(2) $E \in \mathbb{R}^n$ 为紧集 $\iff E$ 的任意开覆盖都有有限的子覆盖, 即若 $\{E_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 为 E 的一个开覆盖, 则存在 $\{E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n} : \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \Lambda\}$, 使得 $\bigcup_{j=1}^n E_{\lambda_j} \supset E$

定理 11.3.10 (有限覆盖定理) 设 $E \in \mathbb{R}^n$. 则 E 为紧集 $\iff E$ 是 \mathbb{R}^n 中的有界闭集.

证明. 充分性. $\{B(0, k) : k \in \mathbb{N}\}$ 显然是 E 的一个开覆盖, 由 E 为紧集, 存在 $k_1 < k_2 < \dots < k_j < +\infty$, 使得 $\{B(0, k_l) : l = 1, 2, \dots, j\}$ 是 E 的一个子覆盖. 则有 $E \subset B(0, k_j)$, 故 E 有界.

若 E 不是闭集, 则存在 E 的一个聚点 $x_0 \notin E$. 任取 $x \in E, x \neq x_0$, 则存在 $r_x = \frac{1}{2}|x - x_0| > 0$, 使得 $B(x, r_x) \cap B(x_0, r_x) = \emptyset$, 由 $\bigcup_{x \in E} B(x, r_x) \supset E$ 及 E 紧, 存在 $x_1, x_2, \dots, x_k \in E$ 使得 $\bigcup_{l=1}^k B(x_l, r_{x_l}) \supset E$.

记 $r = \min_{1 \leq j \leq k} \{r_{x_j}\}$, 则有

$$B(x_0, r) \cap \left(\bigcup_{l=1}^k B(x_l, r_{x_l}) \right) = \emptyset.$$

从而 $B(x_0, r) \cap E = \emptyset$. 这与 x_0 为 E 的聚点矛盾.

必要性. 我们用反证法. 假设 E 是有界闭集但不是紧集, 即设 $\{E_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是 E 的一个开覆盖, 但不存在 E 的有限子覆盖. 为叙述简便起见, 不妨假设 $n = 2$, 一般的情形可类似证明.

不妨设 $E \subset I_0$, 这里 $I_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a\}$. 现将 I_0 分成四个全等的正方形, 则必存在一个小正方形, 使得 E 落在其中的部分不能被 $\{E_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 覆盖. 记次正方形为 I_1 .

依此进行下去, 可得 I_2, \dots, I_n, \dots , 它们满足:

(i) $I_k \supset I_{k+1}, k = 1, 2, \dots$; (ii) I_k 为闭集; (iii) $\text{diam} I_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$;

(iv) 对任意 $k, I_k \cap E$ 不能被 $\{E_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 中的有限个开集覆盖.

记 $E_k = I_k \cap E, k = 1, 2, \dots$, 则 $\{E_k\}$ 也满足上述条件(i), (ii), (iii), 故由定理11.3.7, 存在唯一的 x_0 , 使得 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \{x_0\}$. 显然, $x_0 \in E$, 故存在 $E_{\lambda_0}, \lambda_0 \in \Lambda$ 使得 $x_0 \in E_{\lambda_0}$. 由 E_{λ_0} 为开集及 $\text{diam} E_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, 存在充分大的 $K \in \mathbb{N}$ 使得 $E_K \in E_{\lambda_0}$, 这与上述条件(iv)矛盾. ■

11.4 多元向量值函数的极限

11.4.1 极限的定义及性质

定义 11.4.1 (多元向量值函数) 设 $E \in \mathbb{R}^n$ 是一个非空点集, 称映射 $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为定义在 E 上的一个多元向量值函数, 通常记做

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_m), \text{ 其中 } f_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

其中点集 E 称为该函数的定义域, 集合 $\{f(x_1, x_2, \dots, x_n) | (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E\}$ 称为该函数的值域.

注 11.4.2 (1) $n = 1$ 时称为一元向量值函数.

(2) $m = 1$ 时称为多元函数, 此时可记为: $y = f(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 二元或三元函数有时可记为 $f(x, y), f(x, y, z)$.

定义 11.4.3 (多元向量值函数的极限) 设多元向量值函数 $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x^* \in E', y^* \in \mathbb{R}^m$. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in B(x^*, \delta) \cap E$ 时, 有 $|f(x) - y^*| < \varepsilon$, 则称 y^* 为 f 在点 x^* 处的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = y^*$ 或 $f(x) \rightarrow y^*, x \rightarrow x^*$.

由命题11.1.5, 我们可以给出下列等价定义: 若记 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = y^* \iff$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x_j - x_j^*| < \delta, j = 1, 2, \dots, n$ 时, 有 $|f(x) - y^*| < \varepsilon$.

与一元函数类似, 多元向量值函数的极限与数列极限有下面的关系. 为简便记, 下文中我们将 $x \in B(x^*, \delta) \cap E$ 记为 $B_E(x^*, \delta)$.

定理 11.4.4 设 $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 则 $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = y^* \iff$ 对任意 $\{x^{(k)}\} \subset E - \{x^*\}$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = y^*$.

证明. 由数列极限和函数极限的定义易知必要性成立. 下面用反证法证明充分性.

设 $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) \neq y^*$, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意 $\delta > 0$, 存在 $x_\delta \in B_E(x^*, \delta)$, 使得 $|f(x_\delta) - y^*| \geq \varepsilon_0$. 现取 $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$, 则存在 $x_{\frac{1}{k}} \in B_E(x^*, \frac{1}{k})$, 使得 $|f(x_{\frac{1}{k}}) - y^*| \geq \varepsilon_0$. 此时有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{\frac{1}{k}} = x^*$, 但是 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{\frac{1}{k}}) \neq y^*$, 这与已知条件矛盾. ■

定义 11.4.5 (有界函数) 向量值函数 $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 有界 $\iff f$ 的值域 $f(E)$ 为 \mathbb{R}^m 中的有界集.

与一元函数类似, 有下面的局部有界性. 证明留作练习.

定理 11.4.6 若 f 在 x^* 处有极限, 则 f 在 x^* 的某个邻域内有界.

定义 11.4.7 (振幅) $\text{diam} f(E)$ 称为 f 在 E 上的振幅, 记为 $\omega(f, E)$.

注 11.4.8 (1) 容易证明振幅的等价定义:

$$\omega(f, E) = \sup_{x \in E} f(x) - \inf_{x \in E} f(x).$$

(2) 若 $f, g: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \alpha \in \mathbb{R}$, 显然有

(i) $\omega(f + g, E) \leq \omega(f, E) + \omega(g, E)$;

(ii) $\omega(\alpha f, E) = |\alpha| \omega(f, E)$;

(iii) 若 $D \subset E$, 则 $\omega(f, D) \leq \omega(f, E)$.

借助于振幅的概念, 我们可以证明极限存在的一个充要条件, 其本质就是函数极限的柯西收敛准则.

定理 11.4.9 设 $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x^* \in E$, 则 f 在 x^* 处有极限 \iff 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $\omega(f, B_E(x^*, \delta)) < \varepsilon$.

证明. 必要性. 设 $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = y^*$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in B_E(x^*, \delta)$ 时, 有 $|f(x) - y^*| < \frac{\varepsilon}{2}$. 故对任意 $x_1, x_2 \in B_E(x^*, \delta)$, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - y^*| + |f(x_2) - y^*| < \varepsilon.$$

即有 $\omega(f, B_E(x^*, \delta)) < \varepsilon$.

充分性. 任取 $\{x^{(k)}\} \rightarrow x^*$, 则对 $\delta > 0$, 存在 $k \in \mathbb{N}$, 当 $k > K$ 时, 有 $x^{(k)} \in B_E(\widehat{x^*}, \delta)$, 故当 $m, n > K$ 时, $x^{(m)}, x^{(n)} \in B_E(\widehat{x^*}, \delta)$, 且有

$$f(x^{(m)}) - f(x^{(n)}) \leq \omega(f, B_E(\widehat{x^*}, \delta)) < \varepsilon.$$

即 $\{f(x^{(k)})\}$ 为柯西列, 从而收敛.

下面证明对任意上述 $\{x^{(k)}\}, \{f(x^{(k)})\}$ 的极限唯一, 从而由定理 11.4.4, f 在 x^* 处有极限.

假设存在 $\{x^{(k)}\} \rightarrow x^*, k \rightarrow \infty; \{x^{(k')}\} \rightarrow x^*, k' \rightarrow \infty$, 使得 $f(x^{(k)}) \rightarrow y_1^*, k \rightarrow \infty; f(x^{(k')}) \rightarrow y_2^*, k' \rightarrow \infty$, 且 $y_1^* \neq y_2^*$. 记 $\varepsilon_0 = \frac{|y_1^* - y_2^*|}{4}$, 则存在充分大的 $K \in \mathbb{N}$, 使得当 $k, k' > K$ 时, 有 $x^{(k)}, x^{(k')} \in B_E(\widehat{x^*}, \delta)$, 且

$$|f(x^{(k)}) - y_1^*| < \varepsilon_0, \quad |f(x^{(k')}) - y_2^*| < \varepsilon_0.$$

于是有

$$\begin{aligned} & |f(x^{(k)}) - f(x^{(k')})| \\ & \geq |y_1^* - y_2^*| - |f(x^{(k)}) - y_1^*| - |f(x^{(k')}) - y_2^*| \\ & > 4\varepsilon_0 - \varepsilon_0 - \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0. \end{aligned}$$

这与 $\omega(f, B_E(\widehat{x^*}, \delta)) < \varepsilon$ 矛盾. ■

例 11.4.10 讨论下列函数在 $(0, 0)$ 处的极限.

$$(1) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0); \quad (2) f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0).$$

解. (1) 取 $y = kx$, 则

$$f(x, y) = \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

特别地, 当直线沿 $y = x$ 趋于 $(0, 0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \frac{1}{2};$$

当直线沿 $y = -x$ 趋于 $(0, 0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = -\frac{1}{2}.$$

由此该二元函数在原点处极限不存在.

(2) 因为 $\forall (x, y) \neq (0, 0), \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1$ 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} y = 0$, 所以

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot y = 0.$$

■

例 11.4.11 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } y = x^2 \text{ 时,} \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$ 在原点处的极限.

解. 取 $y = 0$, 沿 $y = 0$ 趋于 $(0, 0)$ 时, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$; 再取 $y = \frac{1}{2}x^2$, 沿 $y = \frac{1}{2}x^2$ 趋于 $(0, 0)$ 时, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 1$.

所以 $f(x, y)$ 在原点处极限不存在. ■

注 11.4.12 沿某些特定曲线 (直线) $M \rightarrow M_0, f(M) \rightarrow A$ 不能保证 $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ 存在.

例 11.4.13 已知 $f(x, y) = x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + y \cos \frac{1}{x^2 + y^2}$, 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$.

解. 因为

$$\left| \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq 1, \left| \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq 1$$

且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} y = 0,$$

所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$. ■

像一元函数一样, 我们也可以定义其他形式的极限. 为简便记, 我们以二元函数为例进行简要说明. 如:

$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = A \iff$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 当 $x > M, y > M$ 时, 有 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. 其他形式的

极限可类似定义.

例 11.4.14 用定义证明: $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{xy-1}{y+1} = 3$.

证明. 由于

$$\left| \frac{xy-1}{y+1} - 3 \right| = \left| \frac{(x-3)y-4}{y+1} \right| < |x-3| + \frac{4}{y},$$

故对任意 $\varepsilon > 0$, 可取 $\delta = \frac{\varepsilon}{5}, M = \frac{5}{\varepsilon}$, 则当 $0 < |x-3| < \delta$ 且 $y > M$ 时, 有 $\left| \frac{xy-1}{y+1} - 3 \right| < \varepsilon$. ■

11.4.2 累次极限

对于多元向量值函数, 除了考虑前面所述的极限之外, 还可以考虑各个变量先后变化时函数值的变化趋势, 也就是累次极限的问题. 我们仅就二元函数的情形进行讨论.

定义 11.4.15 若对任一固定的 y , 当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x, y)$ 的极限存在: $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \phi(y)$, 而 $\phi(y)$ 在 $y \rightarrow b$ 时的极限也存在并等于 A , 亦即

$$\lim_{y \rightarrow b} \phi(y) = A,$$

那么称 A 为 $f(x, y)$ 先对 x 后对 y 的二次极限, 记为

$$\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = A.$$

同样可定义先对 y 后对 x 的二次极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y).$$

一般来说两个二次极限之间没有直接的联系, 而且即使两个二次极限都存在也不一定相等. 我们先给出一个二次极限存在的充分条件.

定理 11.4.16 设 $f(x, y)$ 在点 (a, b) 的二重极限存在, 如果对于 b 的某个去心邻域中的每个 y , 当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x, y)$ 有极限, 则 f 在 (a, b) 处先对 x 后对 y 的极限存在且等于 f 在 (a, b) 处的二重极限.

同理, 如果对于 a 的某个去心邻域中的每个 x , 当 $y \rightarrow b$ 时, $f(x, y)$ 有极限, 则 f 在 (a, b) 处先对 y 后对 x 的极限存在且等于 f 在 (a, b) 处的二重极限.

证明. 由 $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A$ 知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x-a| < \delta, |y-b| < \delta$ 且 $(x, y) \neq (a, b)$ 时

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

现固定 $y, y \neq b$, 在上式中令 $x \rightarrow a$, 即得

$$|\phi(y) - A| \leq \varepsilon,$$

亦即当 $|y - b| < \delta$ 时, 上式成立, 这就证明了 $\lim_{y \rightarrow b} \phi(y) = A$.

同理, 若在定理中把 $\phi(y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ 存在改为

$$\phi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$$

存在, 则

$$\lim_{\substack{y \rightarrow b \\ x \rightarrow a}} f(x, y)$$

也存在且等于 A , 证毕. ■

注. (1) 两个二次极限都不存在, 而二重极限仍可能存在, 例如函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 的两个二次极限都不存在, 但二重极限为0.

(2) 两个二次极限存在而不相等, 此时由上面的定理, 二重极限必不存在, 例如函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

但是一个二次极限存在, 而另外一个二次极限不存在, 二重极限仍可能存在, 比如:

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ 且 } y \neq 0 \\ 0, & x \neq 0 \text{ 或 } y \neq 0 \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 点处.

(3) 两个二次极限存在且相等, 但二重极限仍可能不存在, 例如

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 点处. ■

由此可知二次极限存在与否和二重极限存在与否, 二者之间没有一定的关系. 但上面的定理说明: 若某个二次极限和二重极限都存在, 则二者一定相等. 因此若两个二次极限存在而不相等, 则二重极限一定不存在. 又若两个二次极限存在并且相等, 则称二次极限可以交换求极限的顺序.

例 11.4.17 若 $f(x, y)$ 在某一区域 G 内关于变量 x 连续, 关于变量 y 满足李普希兹条件, 即对任何 $(x, y_1), (x, y_2) \in G$, 有 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$, 其中 L 为常数, 则此函数在 G 内连续.

证明. 对 $\forall (x_0, y_0) \in G$

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &= |(f(x, y) - f(x, y_0)) + (f(x, y_0) - f(x_0, y_0))| \\ &\leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ &\leq L|y - y_0| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|. \end{aligned}$$

由条件知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta_1$ 时有

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

若取 $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2L}$, 当 $|y - y_0| < \delta_2$ 时,

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ 时,

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 内连续, 进而在 G 内连续.

■

习题11.2

1. 设 $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$, 试求 $f(-y, x)$ 、 $f(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ 和 $f[x, f(x, y)]$.
2. 设 $f(\frac{x}{y}, \sqrt{xy}) = \frac{x^3 - 2xy^2\sqrt{xy} + 3xy^4}{y^3}$, 试求 $f(x, y)$ 及 $f(\frac{1}{x}, \frac{2}{y})$.
3. 求函数 $z = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$ 在圆周上 $x^2 + y^2 = R^2$ 的点的值.
4. 设 $f(x + y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.
5. 设 $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$, 求 $f(tx, ty)$.
6. 设 $f(u, v, w) = u^w + w^{u+v}$, 试求 $f(x + y, x - y, xy)$.
7. 设 $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$, 如果当 $y = 1$ 时, $z = x$, 试确定函数 f 和 z .
8. 求下列函数的定义域, 并画出定义域的图形.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad z &= \sqrt{x - \sqrt{y}}; & (2) \quad z &= \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}; \\
 (3) \quad z &= \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}; & (4) \quad u &= \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\
 (5) \quad z &= \arcsin \frac{x}{y^2} + \ln(1 - \sqrt{y}); & (6) \quad u &= \sqrt{\sin(x^2 + y^2)};
 \end{aligned}$$

9. 求下列函数的极限.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{1 - xy}{x^2 + y^2}; & (2) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}; \\
 (3) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1}; & (4) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{x}; \\
 (5) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}; & (6) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow k}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x; \\
 (7) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}; & (8) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}; \\
 (9) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}; & (10) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\
 (11) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}; & (12) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2) e^{x^2 y^2}}; \\
 (13) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(|x| + |y|)^3}{x^2 + y^2}; & (14) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.
 \end{aligned}$$

10. 证明极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ 不存在.

11.5 多元向量值函数的连续性

11.5.1 连续的定义及性质

定义 11.5.1 设 $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x^* \in E$.

- (1) f 在 x^* 连续 $\iff \lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = f(x^*)$. 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in B_E(x^*, \delta)$ 时, $f(x) \in B(f(x^*), \varepsilon)$ (即 $f(B_E(x^*, \delta)) \subset B(f(x^*), \varepsilon)$).
- (2) f 在 E 上连续 $\iff f$ 在 E 上每一点都连续.

定理 11.5.2 设 $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x^* \in E$, 则 f 在 x^* 连续 \iff 对任意包含 $f(x^*)$ 的开集 $U(f(x^*))$, 存在包含 x^* 的开集 $V(x^*)$, 使得 $f(V_E(x^*)) \subset U(f(x^*))$, 这里 $V_E(x^*) = V(x^*) \cap E$.

证明. 必要性. 由 $U(f(x^*))$ 为开集, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(f(x^*), \varepsilon) \subset U(f(x^*))$. 再由 f 在 x^* 连续, 存在 $\delta > 0$, 使得 $f(B_E(x^*, \delta)) \subset B(f(x^*), \varepsilon)$. 令 $V(x^*) = B(x^*, \delta)$, 显然 $V(x^*)$ 为开集. 此时 $V_E(x^*) = B_E(x^*, \delta)$, 则有 $f(V_E(x^*)) \subset B(f(x^*), \varepsilon) \subset U(f(x^*))$.

充分性. 对任意 $\varepsilon > 0$, $B(f(x^*), \varepsilon)$ 为开集, 故存在开集 $V(x^*)$, 使得 $f(V_E(x^*)) \subset B(f(x^*), \varepsilon)$. 由 $V(x^*)$ 为开集, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x^*, \delta) \subset V(x^*)$. 故有 $B_E(x^*, \delta) \subset V_E(x^*)$, 进而有 $f(B_E(x^*, \delta)) \subset B(f(x^*), \varepsilon)$, 即 f 在 x^* 连续. ■

注 11.5.3 由定理 11.5.2 可知, 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 则 f 在 E 上连续 \iff 对 \mathbb{R}^m 中的任意开集 G , 有 $f^{-1}(G) = \{x \in E, f(x) \in G\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的开集.

定义 11.5.4 (函数在一点处的振幅) 设 $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x^* \in E$, 由定义 11.4.7, $\omega(f, B_E(x^*, r))$ 为 f 在 $B_E(x^*, r) = B(x^*, r) \cap E$ 上的振幅. 我们称 $\lim_{r \rightarrow 0} \omega(f, B_E(x^*, r))$ 为 f 在 x^* 处的振幅, 记为 $\omega(f, x^*)$.

注 11.5.5 由 $0 \leq \omega(f, B_E(x^*, r)) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in B_E(x^*, r)\}$ 可知, $\omega(f, B_E(x^*, r))$ 随 r 减小而减小, 且有下界, 故极限存在.

下面的定理是借助于振幅给出函数在一点连续的充要条件, 直观上来看是很显然的.

定理 11.5.6 设 $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x^* \in E$, 则 f 在 x^* 连续 $\iff \omega(f, x^*) = 0$.

证明. 必要性. 由 f 在 x^* 连续, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in B_E(x^*, \delta)$ 时, $|f(x) - f(x^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 则 $\text{diam}(f(B_E(x^*, \delta))) < \varepsilon$. 故当 $r < \delta$ 时, 有 $\omega(f, B_E(x^*, r)) < \varepsilon$, 即 $\omega(f, x^*) = \lim_{r \rightarrow 0} \omega(f, B_E(x^*, r)) = 0$.

充分性. 若 $\omega(f, x^*) = 0$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $r > 0$, 使得 $\omega(f, B_E(x^*, r)) < \varepsilon$, 即对任意 $x \in B_E(x^*, r)$, 有 $|f(x) - f(x^*)| \leq \omega(f, B_E(x^*, r)) < \varepsilon$, 即 f 在 x^* 连续. ■

定理 11.5.7 (1) 设 $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续, 记 $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. 则 f 在 x^* 连续 $\iff f_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 在 x^* 连续.

(2) 设 $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in E$, 记 $g_j: x_j \rightarrow f(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*), j = 1, 2, \dots, n$. 若 f 在 x^* 连续, 则 $g_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 在 x_j^* 连续.

证明. (1) 由 $|f_j(x) - f_j(x^*)| \leq |f(x) - f(x^*)| \leq \sum_{j=1}^n |f_j(x) - f_j(x^*)|$ 易得.

(2) 由 f 在 x^* 连续, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in B_E(x^*, \delta)$ 时, $f(x) \in B(f(x^*), \varepsilon)$. 对任意 $j = 1, 2, \dots, n$, 当 $x_j \in (x_j^* - \delta, x_j^* + \delta)$ 时, 显然 $(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*) \in B_E(x^*, \delta)$, 故有

$$g_j(x_j) = f(x_1^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*) \in B(f(x^*), \varepsilon),$$

即 $|g_j(x_j) - f(x^*)| = |g_j(x_j) - g_j(x_j^*)| < \varepsilon$, 这表明 $g_j(x_j)$ 在 x_j^* 连续. ■

注 11.5.8 (i) 定理 11.5.7 中的 (1) 成立表明只需考虑多元函数的连续性 (即 $m = 1$ 时).

(ii) 定理 11.5.7 中 (2) 的逆命题不成立, 见下例.

例 11.5.9 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ 则 $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ 连续, 但是 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不连续.

与一元函数类似, 两个连续的多元向量值函数的复合仍是连续的, 证明留做练习.

定理 11.5.10 设 $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F \subset \mathbb{R}^m, g: F \rightarrow \mathbb{R}^k$. 若 f 在 $x^* \in E$ 连续, g 在 $f(x^*)$ 连续, 则 $g \circ f$ 在 x^* 连续.

11.5.2 一致连续

定义 11.5.11 (一致连续) 设 $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x, y \in E$ 且 $|x - y| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, 则称 f 在 E 上一致连续.

定理 11.5.12 设 $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 E 上一致连续. 若 $\{x^{(k)}\}$ 为 E 中的柯西列, 则 $\{f(x^{(k)})\}$ 是 \mathbb{R}^m 中的柯西列.

证明. 由已知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x, y \in E$ 且 $|x - y| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 又 $\{x^{(k)}\}$ 为柯西列, 故存在 $K \in \mathbb{N}$, 当 $m, n > K$ 时, 有 $|x^{(m)} - x^{(n)}| < \delta$, 故有 $|f(x^{(m)}) - f(x^{(n)})| < \varepsilon$. 即 $\{f(x^{(k)})\}$ 为柯西列. ■

定理 11.5.13 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 有界, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$. 若对任意 E 中的柯西列 $\{x^{(k)}\}$, 有 $\{f(x^{(k)})\}$ 是 \mathbb{R}^m 中的柯西列, 则 f 在 E 上一致连续.

证明. 反证. 假设 f 在 E 上不一致连续, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意 $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$, 存在 $x^{(k)}, y^{(k)} \in E$, 使得 $|x^{(k)} - y^{(k)}| < \frac{1}{k}$, 但是 $|f(x^{(k)}) - f(y^{(k)})| \geq \varepsilon_0$. 由 E 有界, 则 $\{x^{(k)}\}, \{y^{(k)}\}$ 均为 E 中的有界集, 故存在收敛子列. 这里不妨设 $\{x^{(k)}\}, \{y^{(k)}\}$ 本身收敛, 从而 $\{x^{(k)}\}, \{y^{(k)}\}$ 为柯西列. 则 $\{x^{(1)}, y^{(1)}, x^{(2)}, y^{(2)}, \dots\}$ 也是 E 中的柯西列, 但是 $\{f(x^{(1)}), f(y^{(1)}), f(x^{(2)}), f(y^{(2)}), \dots\}$ 不是柯西列. 这与已知条件矛盾. ■

例 11.5.14 证明: $f(x, y) = \sin(xy)$ 在 \mathbb{R}^2 上不一致连续.

证明. 只需证: 存在序列 $\{P_n\}, \{Q_n\} \subset \mathbb{R}^2$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n - Q_n| = 0$, 但是 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(P_n) - f(Q_n)| \neq 0$. 事实上, 只要取 $P_n(\sqrt{n\pi}, \sqrt{n\pi}), Q_n(\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}, \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}})$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n - Q_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2}|\sqrt{n\pi} - \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}| = 0$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(P_n) - f(Q_n)| = 1 \neq 0$. ■

11.5.3 紧集上连续函数的性质

定理 11.5.15 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续, 则 f 在 E 上一致连续.

证明. 反证. 假设 f 不一致连续, 则由定理 11.5.13, 存在 E 中的柯西列 $\{x^{(k)}\}$, 使得 $\{f(x^{(k)})\}$ 不是柯西列. 由于柯西列必收敛且 E 为紧集, 故存在 $x^* \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^* \in E$. 再由 f 连续, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = f(x^*)$, 即 $\{f(x^{(k)})\}$ 收敛, 从而为柯西列. 矛盾. ■

定理 11.5.16 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续, 则 $f(E)$ 是 \mathbb{R}^m 中的紧集.

证明. 需证 $f(E)$ 为有界闭集. 我们用反证法.

若 $f(E)$ 无界, 则存在 $\{x^{(k)}\} \subset E$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x^{(k)})| = +\infty$. 由 E 为紧集, 存在 $\{x^{(k)}\}$ 的子列 $\{x^{(k_j)}\}$, 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(k_j)} = x^* \in E$. 由 f 连续, 有 $\lim_{j \rightarrow \infty} f(x^{(k_j)}) = f(x^*)$, 这与 $\lim_{j \rightarrow \infty} |f(x^{(k_j)})| = +\infty$ 矛盾.

若 $f(E)$ 不是闭集, 则存在 $\{x^{(k)}\} \subset E$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = y^*$, 但是 $y^* \notin f(E)$. 由 E 为紧集, 存在 $\{x^{(k)}\}$ 的子列 $\{x^{(k_j)}\}$, 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{(k_j)} = x^* \in E$. 由 f 连续, 有 $\lim_{j \rightarrow \infty} f(x^{(k_j)}) = f(x^*)$. 显然, $f(x^*) \in f(E)$. 而 $\lim_{j \rightarrow \infty} f(x^{(k_j)}) = y^*$, 由极限的唯一性, 有 $y^* = f(x^*)$, 这与 $y^* \notin f(E)$ 矛盾. ■

定理 11.5.17 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续, 则 f 在 E 上能取到最大最小值.

证明. 由定理 11.5.16, $f(E)$ 为紧集, 即有界闭集. 设 $M = \sup f(E)$, 则 $M < +\infty$, 且对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $x^{(k)} \in E$, 使得

$$M \geq f(x^{(k)}) > M - \frac{1}{k}.$$

令 $k \rightarrow \infty$, 得 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = M$. 由 $\{f(x^{(k)})\} \subset f(E)$ 及 $f(E)$ 为闭集, 有 $M \in f(E)$, 即存在 $x^* \in E$, 使得 $f(x^*) = M$.

同理可证 f 在 E 上能取到最小值. ■

借助连续的概念, 我们给出道路的定义, 进而给出道路连通的定义. 可以证明, 在 \mathbb{R}^n 中, 道路连通与前面定义的连通是等价的, 但是在这里我们不给出详细的证明.

定义 11.5.18 (道路, 道路连通) (1) 设 $\phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 连续, 则称 ϕ 为 \mathbb{R}^n 中的一条道路.

(2) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 非空. 若对任意 $x, y \in E$, 都存在一条道路 $\phi(t): t \in [\alpha, \beta]$, 使得 $\phi(\alpha) = x, \phi(\beta) = y$, 且对任意 $t \in [\alpha, \beta]$, 有 $\phi(t) \in E$, 则称 E 是道路连通(或简称连通).

定理 11.5.19 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 连通, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续, 则 $f(E) \subset \mathbb{R}^m$ 连通.

证明. 对任意 $y_1, y_2 \in f(E)$, 存在 $x_1, x_2 \in E$, 使得 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. 由 E 连通, 存在 $\phi(t): t \in [\alpha, \beta]$ 连续, 且 $\phi(\alpha) = x_1, \phi(\beta) = x_2$, 则 $f \circ \phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续, 且 $f(\phi(\alpha)) = y_1, f(\phi(\beta)) = y_2$, 即 $f(E)$ 连通. ■

定理 11.5.20 (介值性定理) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 连通, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 连续. 若 $a, b \in E$, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则存在 $c \in E$, 使得 $f(c) = 0$.

证明. 由 E 连通, 存在 $\phi(t): [\alpha, \beta] \rightarrow E$ 连续, 且 $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$, 则 $f \circ \phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 且 $f(\phi(\alpha))f(\phi(\beta)) = f(a)f(b) < 0$, 故存在 $t_0 \in [\alpha, \beta]$, 使得 $f \circ \phi(t_0) = 0$. 令 $c = \phi(t_0) \in E$, 即有 $f(c) = 0$. ■

推论 11.5.21 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 连通, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 连续. 若 $u_1, u_2 \in f(E)$ 且 $u_1 < u_2$, 则对任意 $c \in (u_1, u_2)$, 存在 $\xi \in E$, 使得 $f(\xi) = c$.

11.5.4 习题11.5

1. 求函数 $z = \frac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 的间断点.

2. 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

在原点 $(0, 0)$ 沿每一条射线 $x = t \cos \theta, y = t \sin \theta$ ($0 \leq t < +\infty$) 连续, 但它在 $(0, 0)$ 点不连续.

3. 讨论下了函数在点 $(0, 0)$ 的二次极限与二重极限.

$$(1) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)}; \quad (2) f(x, y) = (x + y) \cdot \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}.$$

4. 设 D 为 \mathbb{R}^2 中的开集, $(x_0, y_0) \in D$, f 为定义在 D 上的函数, 且

(1) 每个 $(x, y) \in D$ 的 x , $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = g(x)$;

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = h(y)$ 关于 $(x, y) \in D$ 中的 y 一致成立.

试证明

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y).$$

11.6 第十一章典型例题选讲

11.6.1 例题选讲

例 11.6.1 讨论函数 $f(x, y) = \frac{(y^2 - x)^2}{x^2 + y^4}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ 在原点处的极限.

解. 取 $y = kx$, 则

$$f(x, y) = \frac{(k^2 x^2 - x)^2}{x^2 + k^4 x^4} = \frac{(k^2 x - 1)^2}{k^4 x^2 + 1},$$

沿直线 $y = kx$ 趋于 $(0, 0)$ 时 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 1$;

取 $x = 0$, 沿 y 轴趋于 $(0, 0)$ 时也成立, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 1$, 因此 (x, y) 沿任何直线趋于 $(0, 0)$ 时 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) =$

1. 但此并不能说明 $f(x, y)$ 在原点处极限存在.

事实上, 若取抛物线 $y^2 = x$, 则 $f(x, y) = 0$, (x, y) 沿此抛物线趋于 $(0, 0)$ 时 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$. 因此 $f(x, y)$ 在

原点处极限不存在. ■

例 11.6.2 计算极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

解. 函数 $\ln(x + e^y)$ 和 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 在定义域上连续, 由极限的四则运算法则得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \ln(x + e^y)}{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{x^2 + y^2}} = \ln 2.$$

■

例 11.6.3 计算极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{2x^2 y^2}$.

解. 显然当 $|x| < 1, |y| < 1$ 且 x 与 y 不全为零时,

$$2x^2 y^2 \leq x^4 + y^4 \leq x^2 + y^2,$$

从而

$$1 \leq (x^2 + y^2)^0 \leq (x^2 + y^2)^{2x^2 y^2} \leq (x^2 + y^2)^{x^2 + y^2}.$$

记 $r = x^2 + y^2$, 则当 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时, $r \rightarrow 0^+$, 又 $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^r = 1$, 故由夹逼法则可得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{2x^2 y^2} = 1.$$

■

例 11.6.4 计算极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (\sqrt{x^3 + y^3 + x - 1} - \sqrt{x^3 + y^3 - y + 3})$.

解.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x - 1 + y - 3}{\sqrt{x^3 + y^3 + x - 1} + \sqrt{x^3 + y^3 - y + 3}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x - 1}{\sqrt{x^3 + y^3 + x - 1} + \sqrt{x^3 + y^3 - y + 3}} \\ &\quad + \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{y - 3}{\sqrt{x^3 + y^3 + x - 1} + \sqrt{x^3 + y^3 - y + 3}}. \end{aligned}$$

记式中第一个函数为 $f(x, y)$, 第二个函数为 $g(x, y)$, 当 x, y 充分大时,

$$0 < f(x, y) < \frac{x - 1}{\sqrt{x^3}},$$

而 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x - 1}{\sqrt{x^3}} = 0$, 所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = 0$. 同理 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} g(x, y) = 0$. 故原式 = 0. ■

例 11.6.5 计算极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}]}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解. 由 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ 得到

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}]}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}]}{(y+1)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (y+1) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} = \frac{\sin[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}]}{(y+1)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (y+1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

例 11.6.6 设 $f(x, y)$ 是区间 $\overline{D}: |x| \leq 1, |y| \leq 1$ 上有界的 k 次齐次函数 ($k \geq 1$), 问

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$$

是否存在? 若存在, 试求其值.

解. 由条件知 $\forall (x, y) \in \overline{D}, |f(x, y)| \leq M, f(tx, ty) = t^k f(x, y), (0 \leq t \leq 1)$.

令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta (0 \leq \theta \leq \pi), r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 当 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时, $r \rightarrow 0$,

$$|f(x, y)| = |f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = r^k |f(\cos \theta, \sin \theta)| \leq r^k M \rightarrow 0,$$

所以

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$$

■

例 11.6.7 设 D 为 \mathbb{R}^2 上开区间集, $(x_0, y_0) \in D, f(x, y)$ 为 D 上函数, 且

(1) 对每个 $(x, y) \in D$ 的 x 存在 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = g(x)$;

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = h(y)$ 关于 $(x, y) \in D$ 中的 y 一致.

试证:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y).$$

证明. 由条件(2)知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 对 $\forall (x, y) \in D$ 有 $|f(x, y) - h(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. 注意此处 δ_1 取与 y 有无关系. 显然 $\forall x', x''$ 若 $0 < |x' - x_0| < \delta_1, 0 < |x'' - x_0| < \delta_1$ 时

$$\begin{aligned} |f(x', y) - f(x'', y)| &= |f(x', y) - h(y) - (f(x'', y) - h(y))| \\ &\leq |f(x', y) - h(y)| + |f(x'', y) - h(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

令 $y \rightarrow y_0$, 则

$$|g(x') - g(x'')| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

由柯西收敛准则知 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ 存在. 故 $\exists \delta_2 > 0$, 只要 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, $|g(x) - a| < \frac{\varepsilon}{3}$. 任取固定 x' 满足 $|x' - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 再由条件(1)知 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x', y) = g(x')$, 取 $\delta_3 > 0$, 当 $0 < |y - y_0| < \delta_3$ 时,

$$|f(x', y) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, 当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时, 由 x' 的取法, $0 < |x' - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\} < \delta_2$, 则同时有

$$|h(y) - f(x', y)| < \frac{\varepsilon}{3}; |f(x', y) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{3}; |g(x') - a| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

从而

$$|h(y) - a| \leq |h(y) - f(x', y)| + |f(x', y) - g(x')| + |g(x') - a| < \varepsilon.$$

故 $\lim_{y \rightarrow y_0} h(y) = a$, 即

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = a = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y).$$

■

例 11.6.8 设 $u = f(x, y, z)$ 在闭立体 $\bar{G} = [a, b] \times [a, b] \times [a, b]$ 上连续, 试证 $g(x, y) = \max_{a \leq z \leq b} f(x, y, z)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续.

证明. 证明 由一致连续性定理知, $u = f(x, y, z)$ 在闭立体 $\bar{G} = [a, b] \times [a, b] \times [a, b]$ 上连续进而一致连续, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \bar{D}$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta, |y_1 - y_2| < \delta, |z_1 - z_2| < \delta$ 时,

$$|f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)| < \varepsilon.$$

特别地有

$$|f(x_1, y_1, z) - f(x_2, y_2, z)| < \varepsilon,$$

即

$$f(x_1, y_1, z) < \varepsilon + f(x_2, y_2, z) < \varepsilon + \max_{a \leq z \leq b} f(x_2, y_2, z),$$

$$\max_{a \leq z \leq b} f(x_1, y_1, z) < \varepsilon + \max_{a \leq z \leq b} f(x_2, y_2, z),$$

$$\max_{a \leq z \leq b} f(x_1, y_1, z) - \max_{a \leq z \leq b} f(x_2, y_2, z) < \varepsilon;$$

同理

$$-\varepsilon < \max_{a \leq z \leq b} f(x_1, y_1, z) - \max_{a \leq z \leq b} f(x_2, y_2, z).$$

所以

$$|\max_{a \leq z \leq b} f(x_1, y_1, z) - \max_{a \leq z \leq b} f(x_2, y_2, z)| < \varepsilon,$$

即

$$|g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2)| < \varepsilon,$$

$g(x, y)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上一致连续, 当然连续. ■

11.7 第十一章总复习题

1. (1) 设 $(x, y) \neq 0$ 时, $f(x, y) = \frac{5xy}{x^2 + y^2}$, 求 $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

(2) 设 $f(xy, \frac{x}{y}) = (x + y)^2$, 求 $f(x, y)$.

2. 求下列极限.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{xy} - 1}{\cos^2 x + \sin^2 y}; & (2) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + y^2}{xy}\right) - 1}{(x - 1)^2 + y^2}; \\ (3) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sqrt[3]{x} + y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y}; & (4) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}; \\ (5) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2); & (6) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1}{|x| + |y|}; \\ (7) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sin(x^4 + y^4)x^2 + y^2; & (8) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x - 1}{\sqrt{x^3}}. \end{aligned}$$

3. 下列极限是否存在? 若存在, 求极限值.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x^2 + y^2}{1 + (x - y)^4}; & (2) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 + xy)}{x + y}, \quad (x + y \neq 0); \\ (3) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}; & (4) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 + 3x^2 y^2 + 2xy^3}{x^2 + y^2}; \\ (5) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{x}; & (6) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 y^{\frac{3}{2}}}}{x^4 + y^2}; \\ (7) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 0^+}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^x; & (8) \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 0}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x + y}}. \end{aligned}$$

4. 讨论函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

在原点处的连续性.

5. 在所讨论的区域上如果 $f(x, y)$ 分别对 x 和 y 是连续的. 试证在下列条件之一满足时该二元函数连续:

(1) $f(x, y)$ 对 x 与 y 一致连续, 即对于任意的 x_0 , 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon$$

对任意的 y 都成立;

(2) $f(x, y)$ 对 y 关于 x 一致连续;

(3) 对某一个变量满足李普希兹条件; (e.g. 对于任意的 $(x, y), (x_1, y)$, 有 $|f(x, y) - f(x_1, y)| \leq a|x - x_1|$)

(4) 设所考虑函数在有界区域 D 上, 而 f 在包含 D 的某个区域 G 上有定义, 且在 G 上对 x (或 y)局部满足李普希兹条件, 即对于每一点 $(x, y) \in D$, 均能找到一个包含 (x, y) 的邻域 O , 当 $(x_1, y_1), (x_2, y_1) \in O$ 时, 有

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1)| \leq \theta |x_1 - x_2|,$$

这里 θ 是一个与 (x, y) 有关的常数.

第十二章 偏导数和全微分

12.1 偏导数和全微分的概念

12.1.1 偏导数的定义

对于一元函数, 我们讨论过函数值关于自变量的变化率, 也即一元函数的导数. 对于多元函数, 同样也可以考察其函数值关于自变量的变化率, 但由于其自变量有多个, 函数值沿着不同的方向都有变化, 所以问题也变得复杂. 通常我们考察函数在关于一个变量的变化率, 也就是关于某一个变量的导数.

例如对于一个二元函数 $f(x, y)$, 讨论关于变量 x 的变化率, 那么可以先固定 y , 而对自变量 x 求导数. 这样, 对于多元函数, 先固定其它自变量不变, 对一个自变量求导数, 就引出了多元函数偏导数的概念. 在这里, 我们仅给出二元函数的偏导数概念, 对于多元函数的偏导数概念完全可以类似定义.

定义 12.1.1 (偏导数) 设二元函数 $u = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 及其附近有定义. 若一元函数 $u = f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数存在, 即极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在且有限, 则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有关于 x 的偏导数. 此极限值就称为函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数. 记为 $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$, 或 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, 也可以记为 $f_x(x_0, y_0)$ 或 $u_x(x_0, y_0)$.

类似地可以定义函数 $u = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处, 关于变量 y 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$, 或 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. 当然类似于关于 y 的偏导数, 也可以记为 $f_y(x_0, y_0)$ 或 $u_y(x_0, y_0)$.

注 12.1.2 (1) 若函数 $u = f(x, y)$ 在开区域 D 中的每一点 (x, y) 处都有关于变量 x 或 y 的偏导数, 则此关于 (x, y) 的二元函数称作 $u = f(x, y)$ 偏导函数. 关于 x 的偏导函数, 记为 $\frac{\partial u}{\partial x}$, 或 $\frac{\partial f}{\partial x}$, 也可以记为 f_x 或 u_x . 关于 y 的偏导函数, 记为 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 或 $\frac{\partial f}{\partial y}$, 也可以记为 f_y 或 u_y .

(2) 定义12.1.1可以推广到多元函数的情形. 设 $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, D 为开集, $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in D$. 若极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^* + te_j) - f(x^*)}{t}$$

存在且唯一, 则称此极限值为 f 在 x^* 处的偏导数, 记为 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*)$ 或 $f_{x_j}(x^*)$.

(3) 偏导数和连续没有必然的联系. 一方面, 若 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 关于 x 或 y 连续, 但不能推出 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 连续. 如:

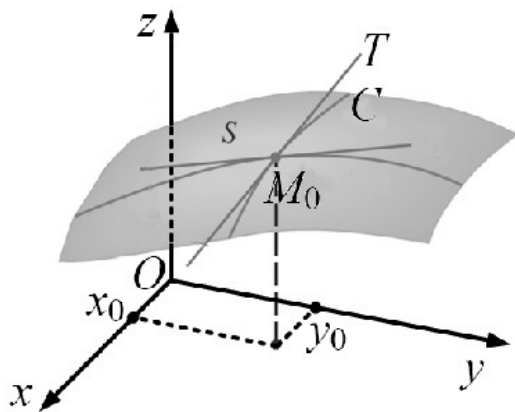
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

另一方面, 很容易举出连续但偏导数不存在的例子.

(4) 若 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 关于 x 满足中值定理, 即

$$f(x + \Delta, y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta \Delta, y), \quad 0 < \theta < 1.$$

(5) 偏导数的几何意义. 我们知道, 对于一元函数, 其在某一点处的导数, 对应于在该点处切线的斜率. 对于二元函数 $u = f(x, y)$, 它在空间中表示一张曲面 S , $M_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面上的一点, $u = f(x, y_0)$ 表示曲面 $u = f(x, y)$ 与平面 $y = y_0$ 相交产生的曲线 C . 那么函数在 M_0 点对 x 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ 为一元函数 $u = f(x, y_0)$ 在 x_0 处的导数. 所以偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ 为曲面 S 与平面 $y = y_0$ 的交线在 M_0 点处切线 T 关于 x 轴的斜率(图12.1.1). 相应的, 也可以得到函数对应变量 y 的偏导数几何意义.



从偏导数的定义可以发现, 对于相应于某一个变量偏导数的计算, 可以先把其它变量看作是固定不变的常量, 而对相应的变量求导数. 例如, 对于二元函数 $f(x, y)$, 其关于变量 x 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$, 就是先把 y 看成是常数, 而对 x 求导数.

例 12.1.3 理想气体的状态方程为 $p = \frac{RT}{V}$, 求 p 关于 V 和 T 的偏导数 $\frac{\partial p}{\partial V}$ 和 $\frac{\partial p}{\partial T}$.

解.

$$\frac{\partial p}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{RT}{V} \right) = -\frac{RT}{V^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{RT}{V} \right) = \frac{R}{V}.$$

■

例 12.1.4 设 $f(x, y) = xy + x^2 + y^3$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, 并求 $f_x(0, 1)$ 和 $f_y(0, 2)$.

解. 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 时, 把 y 看成常数, 对 x 求导数:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y + 2x, \quad f_x(0, 1) = 1.$$

求 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 时, 把 x 看成常数, 对 y 求导数:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 3y^2, \quad f_y(2, 0) = 2.$$

■

例 12.1.5 已知 $f(x, y, z) = x^2 + y + (x - 1) \arctan \frac{xz}{y^2}$, 求 $f_z(1, 1, 1)$.

解. $f(1, 1, z) = 1 + 1 + 0 = 2$, $f_z(1, 1, z) = 0$, $f_z(1, 1, 1) = 0$. ■

12.1.2 全微分

一元函数 $y = f(x)$ 可微是指因变量 y 的改变量 Δy 可以写成

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中 $o(\Delta x)$ 是关于 Δx 的无穷小量. 上式的线性主部 $A\Delta x$ 就是线性函数 $y = f(x)$ 的微分. 对于多元函数 $u = f(x, y)$ 也可考虑类似的问题.

定义 12.1.6 (全微分) 设函数 $u = f(x, y)$ 在点 (x, y) 及其附近有定义. Δx 和 Δy 分别为自变量 x 和 y 的改变量, 若函数的改变量 Δu 可表示为

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right),$$

其中 A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关而仅与 (x, y) 有关, 则称函数在点 (x, y) 处可微. 表达式 $A\Delta x + B\Delta y$ 叫做此函数在点 (x, y) 处的**全微分**, 记为 du 或 $df(x, y)$. 即

$$du \equiv df(x, y) = A\Delta x + B\Delta y.$$

如果函数 $u = f(x, y)$ 在某区域 D 中的每一点处都可微, 则称函数 $u = f(x, y)$ 是区域 D 中的可微函数. 通常把 $A\Delta x + B\Delta y$ 记为 $Adx + Bdy$.

注 12.1.7 (1) 我们不难把微分的定义推广到多元函数. 设 $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, D 为开集, $x^* \in D$. 取 $h \in \mathbb{R}^n$, 使得 $|h|$ 充分小且 $x^* + h \in D$. 若

$$f(x^* + h) - f(x^*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i + o(|h|), |h| \rightarrow 0,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是不依赖于 h 的常数, 则称 f 在 x^* 处可微, 记为 $df(x^*)$, 即

$$df(x^*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i.$$

(2) 可微与连续及偏导数的关系见下面的命题. 证明很容易, 我们留做练习.

命题 12.1.8 如果函数 $u = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微且 $du = Adx + Bdy$, 那么 f 在该点处连续且其偏导数 $f_x(x, y)$ 与 $f_y(x, y)$ 存在, 并且

$$f_x(x, y) = A, \quad f_y(x, y) = B$$

从而 $du = f_x dx + f_y dy$. 也就是说, 多元可微函数对应的偏导数一定存在.

该命题的逆命题不一定成立. 即函数连续或(且)偏导数存在但不一定可微, 见下例.

例 12.1.9 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$ 讨论其在 $(0, 0)$ 处的连续性, 偏导数和可微性.

解. (1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot y = 0 = f(0, 0)$, 这表明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续.

(2) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$, 同理可得 $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, 即 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的两个偏导数都存在.

(3) 由 $\frac{\Delta f - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 当 $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$ 时极限不存在, 可知 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不可微.

■

下面我们给出一个二元函数可微的充分条件.

定理 12.1.10 若函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 的某邻域内偏导数 $f_x(x, y)$ 与 $f_y(x, y)$ 都存在, 并且 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续, 则函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微.

证明. 对于 Δu , 我们有

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \end{aligned}$$

由于偏导数 $f_x(x, y)$ 与 $f_y(x, y)$ 存在, 当 $|\Delta x|$ 和 $|\Delta y|$ 充分小时, 考虑对上式中的每个差应用微分中值定理. 首先固定 $y + \Delta y$ 得到

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x.$$

再固定 x , 得到

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta y.$$

其中 $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$. 设

$$\alpha = f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) - f_x(x, y),$$

$$\beta = f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) - f_y(x, y).$$

显然

$$\Delta u = f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y.$$

并且由偏导数 $f_x(x, y)$ 与 $f_y(x, y)$ 在 (x, y) 处连续,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \alpha = 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \beta = 0.$$

所以当 $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$ 即 $\Delta x \rightarrow 0$ 且 $\Delta y \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0.$$

由函数可微的定义可知, 函数在 (x, y) 处可微. ■

注 12.1.11 (1) 若 f 的各个偏导数在区域 D 内连续, 则称 f 在 D 内连续可微, 记作 $f \in C^1(D)$.

(2) 定理12.1.10可减弱为: 若 $f_x(x, y)$ 在点 (x, y) 存在, 并且 $f_y(x, y)$ 在点 (x, y) 附近存在且连续, 则函数 $f(x, y)$ 必在点 (x, y) 处可微.

(3) 定理12.1.10的逆命题不成立, 见下例.

例 12.1.12 设函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

(1) 求偏导数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$;

(2) 问 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否连续;

(3) 问 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否可微.

解. (1) 当 $(x, y) \neq 0$ 时,

$$f_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$f_y(x, y) = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

而

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{|\Delta x|}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot \sin \frac{1}{|\Delta x|} = 0; \\ f_y(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

于是

$$f_x(x, y) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

(2) 当点 $P(x, y)$ 沿 Ox 轴 ($y = 0$) 趋近于点 $(0, 0)$ 时, 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_x(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

不存在, 所以 $f_x(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不连续, 同理 $f_y(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处也不连续.

(3) 记 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 因为

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - f_x(0, 0)\Delta x - f_y(0, 0)\Delta y}{\rho} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot \sin \frac{1}{\rho} = 0. \end{aligned}$$

所以, 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.

12.1.3 高阶偏导数

对于二元函数 $u = f(x, y)$, 其偏导数 $f_x(x, y)$ 与 $f_y(x, y)$ 仍为 (x, y) 的函数, 类似一元函数求高阶导数的情形, 可求 $f_x(x, y)$ 与 $f_y(x, y)$ 的偏导数, 所得到的数就称为函数 $u = f(x, y)$ 的二阶偏导数. 分别记为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ 或 } f_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \text{ 或 } f_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{ 或 } f_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ 或 } f_{yy}.$$

其中 f_{xy} 和 f_{yx} 称为 f 的二阶混合偏导. 对于二阶偏导数, 例如 $f_{xx}(x, y)$ 仍然为 (x, y) 的函数, 所以还可以定义更高阶的偏导数. 对函数的二阶偏导数再求相应的偏导数叫做原函数的三阶偏导数. 例如

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \text{ 或 } f_{x^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} \text{ 或 } f_{xyx}.$$

例 12.1.13 设 $u = f(x, y) = xe^x \sin y$ 求函数 $u(x, y)$ 的各二阶偏导数.

解.

$$u_x = e^x \sin y + x e^x \sin y = (x + 1) e^x \sin y,$$

$$u_{xx} = (x + 2) e^x \sin y = (x + 2) e^x \sin y,$$

$$u_{xy} = (x+1)e^x \cos y,$$

$$u_y = xe^x \cos y,$$

$$u_{yx} = (x+1)e^x \cos y,$$

$$u_{yy} = -xe^x \sin y.$$

■

需要注意的是,在例12.1.13中有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

故这个函数对 x 与对 y 求偏导数的顺序可以交换. 但是这个结论并不是对任意的函数都成立的. 请看下例.

例 12.1.14 考虑函数:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

证明 $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

证明. 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$f_x(x, y) = y \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right],$$

$$f_y(x, y) = x \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right],$$

而当 $(x, y) = (0, 0)$ 时,

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0,$$

所以,

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, \Delta y) - f_x(0, 0)}{\Delta y} = -1,$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_y(\Delta x, 0) - f_y(0, 0)}{\Delta x} = 1.$$

故 $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$. ■

下面我们给出混合偏导数相等的条件.

定理 12.1.15 若函数 $u = f(x, y)$ 的二阶混合偏导数 $f_{xy}(x, y)$ 与 $f_{yx}(x, y)$ 在点 (x, y) 处都连续, 则

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

证明. 考虑表达式

$$W = \frac{[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]}{\Delta x \Delta y}.$$

利用二次极限与二重极限的关系, 只需证明 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} W$ 存在即可. 设

$$\varphi(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\psi(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

那么,

$$W = \frac{\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x \Delta y} = \frac{\psi(x, y + \Delta y) - \psi(x, y)}{\Delta x \Delta y}.$$

由微分中值定理,

$$\varphi(x, y) = f_y(x, y + \alpha_1 \Delta y) \Delta y,$$

并且

$$\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y) = \varphi_x(x + \alpha_2 \Delta x, y) \Delta x = f_{yx}(x + \alpha_2 \Delta x, y + \alpha_1 \Delta y) \Delta y \Delta x,$$

$$W = f_{yx}(x + \alpha_2 \Delta x, y + \alpha_1 \Delta y).$$

其中 $0 < \alpha_1 < 1, 0 < \alpha_2 < 1$. 同理可以得到

$$\psi(x, y + \Delta y) - \psi(x, y) = \psi_y(x, y + \beta_1 \Delta y) \Delta y = f_{xy}(x + \beta_2 \Delta x, y + \beta_1 \Delta y) \Delta x \Delta y,$$

$$W = f_{xy}(x + \beta_2 \Delta x, y + \beta_1 \Delta y).$$

其中 $0 < \beta_1 < 1, 0 < \beta_2 < 1$. 利用两个混合偏导数在点 (x, y) 处都连续, 可以得到

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} f_{xy}(x + \beta_2 \Delta x, y + \beta_1 \Delta y) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} f_{yx}(x + \alpha_2 \Delta x, y + \alpha_1 \Delta y) \\ &= f_{yx}(x, y). \end{aligned}$$

定理证毕. ■

12.1.4 高阶全微分

设函数 $u = f(x, y)$ 具有连续的二阶偏导数, 由于全微分 $du = f_x dx + f_y dy$, 把 $dx = \Delta x$ 与 $dy = \Delta y$ 看成常量, du 仍然为关于 (x, y) 的函数, 所以还可以对其求全微分. 它称为函数 $u = f(x, y)$ 的二阶全微分, 记为 d^2u . 而

$$\begin{aligned} d^2u &= d(du) = d(f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy) \\ &= d(f_x(x, y)dx) + d(f_y(x, y)dy) \\ &= (f_{xx}(x, y)dx + f_{xy}(x, y)dy)dx + (f_{yx}(x, y)dx + f_{yy}(x, y)dy)dy \\ &= f_{xx}(x, y)dx^2 + 2f_{xy}(x, y)dxdy + f_{yy}(x, y)dy^2. \end{aligned}$$

类似地, 如果函数 $u = f(x, y)$ 存在三阶连续偏导数, 还可以定义其三阶全微分, 记为 d^3u . 相应的也可以类似定义高阶全微分. 一般地, 若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 有直到 n 阶的连续偏导数, 就可简写偏导数为

$$f_{x^t y^{k-t}} = \frac{\partial^k f}{\partial x^t \partial y^{k-t}}.$$

$$\text{用数学归纳法可得 } d^n u = d(d^{n-1}u) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k.$$

作为本节的结尾, 我们可以总结二元函数的连续, 偏导数, 可微以及偏导数连续之间的联系. 此外, 本节中的命题 12.1.8, 定理 12.1.10 以及定理 12.1.15 都可以推广到 n 元函数的情形, 其结果与证明都是类似的, 读者可以尝试自己写出来.

12.1.5 习题 12.1

1. 求下列函数的偏导数:

- | | |
|---|--|
| (1) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2});$ | (2) $z = (1 + xy)^y;$ |
| (3) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$ | (4) $z = \ln\left(\sin \frac{x+a}{\sqrt{y}}\right);$ |
| (5) $u = (xy)^z;$ | (6) $u = x^{yz};$ |
| (7) $u = \arctan(x - y);$ | (8) $z = \frac{y}{x} \cos(xy);$ |
| (9) $z = \arctan \frac{y}{x} + \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$ | |

2. 设 $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$, 求 $f_x(2, 1), f_y(1, 2)$.
3. 设 $f(x, y, z) = \ln(xy + z)$, 求 $f_x(1, 2, 0), f_y(1, 2, 0), f_z(1, 2, 0)$.
4. 设 $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$, 求 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$.
5. 设 $u = (x - y)(y - z)(z - x)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$.
6. 设 $u = \ln(1 + x^2 + y^2 + y + z^2)$, 求 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{(1,1,1)}$.
7. 设 $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$, 验证 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.
8. 设 $z = e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$, 验证 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.
9. 求曲线 $\begin{cases} z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2), \\ y = 4. \end{cases}$ 在点 $M_0(2, 4, 2)$ 处的切线与 Ox 轴正向所成的角度.
10. 求曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \\ x = 1. \end{cases}$ 在点 $M_0(1, 1, \sqrt{3})$ 处的切线与 Oy 轴正向所成的角度.
11. 已知 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2}{x}$, 且当 $x = 1$ 时, $z = \sin y$, 试求 $z(x, y)$.
12. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2y^2}{x + y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 求 $f_y(0, 0)$.
13. 求下列函数的全微分:
 - (1) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;
 - (2) $z = x^2 y^3$;
 - (3) $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;
 - (4) $z = \sin^2 x + \cos^2 y$;
 - (5) $u = yx^y$;
 - (6) $u = \ln(x^2 + y^2)$;
 - (7) $u = \ln(1 + \frac{x}{y})$;
 - (8) $z = \arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{x}{y}$;
 - (9) $z = \ln(\tan \frac{y}{x})$;
 - (10) $u = xyz$;
 - (11) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
 - (12) $u = (xy + \frac{x}{y})^z$;
 - (13) $u = \arctan \frac{xy}{z^2}$;
 - (14) $z = \ln(x^x \cdot y^{y^2}), (x > 0, y > 0)$.
14. 如果函数 $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 求 $df(3, 4, 5)$.
15. 如果函数 $z = \arctan \frac{x}{1 + y^2}$, 求 $dz|_{(1,1)}$.
16. 求函数 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ 在点 $(2, 1)$ 处的全增量与全微分, 并求出当 $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.01, \Delta y = 0.03$ 时, 此函数的全微分的值.
17. 设函数 $f(x, y) = |x| + \sin(xy)$, 试研究 $f(x, y)$ 在点 $O(0, 0)$ 处全微分是否存在.
18. 证明函数 $z = \sqrt{|xy|}$ 在点 $O(0, 0)$ 处全微分不存在.
19. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} \sin(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 试问:
 - (1) 函数 $f(x, y)$ 在点 $O(0, 0)$ 处是否连续?
 - (2) 偏导数 $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ 是否存在?
 - (3) 函数 $f(x, y)$ 在点 $O(0, 0)$ 处是否可微?

20. 设函数 $f(x, y) = |x - y|\phi(x, y)$, 其中 $\phi(x, y)$ 在点 $O(0, 0)$ 的邻域内连续, 试问:

- (1) $\phi(x, y)$ 满足什么条件, 可以使 $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ 存在?
- (2) $\phi(x, y)$ 满足什么条件, 可以使 $f(x, y)$ 在 $O(0, 0)$ 点处可微?

21. 计算下列函数的近似值:

- (1) $\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3}$;
- (2) $(1.97)^{1.05}$ (其中 $\ln 2 \approx 0.693$).

22. 计算函数 $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ 在点 $(10, 8)$ 处当 $\Delta x = 0.2, \Delta y = 0.2$ 时的 Δz 和 dz , 并估计用 dz 代替 Δz 所产生的相对误差是多少?

23. 已知边长 $x = 6m$ 与 $y = 8m$ 的矩形, 如果 x 边增加 $5cm$, 而 y 边减少 $10cm$, 问这个矩形的对角线的近似变化是多少?

24. 设有一圆柱体, 它的底半径 R 由 $2cm$ 增加到 $2.05cm$, 其高 H 由 $10cm$ 减少到 $9.8cm$, 试求体积 V 的近似变化.

25. 有一用水泥做成的开顶长方形水池, 它的外形长 $5m$, 宽 $4m$, 高 $3m$, 又它的四壁及底的厚度为 $20cm$, 试求所需水泥量的近似值和精确值.

26. 扇形的中心角 $\alpha = 60^\circ$, 半径 $R = 20m$, 如果将中心角增加 1° , 为了使扇形面积仍然不变, 应该把扇形半径 R 减少多少 (近似值)?

27. 如果测量得到一三角形两边的长分别为 $60 \pm 0.1m$ 及 $78 \pm 0.1m$, 其夹角为 $60^\circ \pm 1^\circ$, 求从这些数据用余弦定理计算这三角形的第三边时的绝对误差及相对误差.

28. 利用全微分证明: 和的绝对误差等于各加数绝对误差之和.

29. 利用全微分证明: 乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和.

30. 证明: 若 $u(x, y), v = v(x, y)$ 是可微的二元函数, 则微分法则:

- (1) $d(u + v) = du + dv$;
- (2) $d(uv) = vdu + u dv$;
- (3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}, v \neq 0$

仍然成立.

31. 求下列函数的高阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$:

- (1) $u = x \ln(x + y)$;
- (2) $u = \sin^2(ax + by)$;
- (3) $u = y^x$;
- (4) $u = \arctan \frac{y}{x}$.

32. 设 $u = \ln(ax + by)$, 求 $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$.

33. 设 $u = xyz e^{x+y+z}$, 求 $\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$.

34. 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 试证明

$$\frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}.$$

12.2 多元向量值函数的导数与微分

本节, 我们把上节里关于多元函数的偏导数和全微分的概念推广到向量值函数的情形.

定义 12.2.1 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为区域, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in D$. 记 $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$, $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)^T$ (这里 T 表示转置). 若存在 $m \times n$ 矩阵 A , 使得当 $|\Delta x| \rightarrow 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\Delta f(x^*) &= f(x^* + \Delta x) - f(x^*) \\ &= (\Delta f_1(x^*), \Delta f_2(x^*), \dots, \Delta f_m(x^*))^T \\ &= A\Delta x + o(|\Delta x|)\end{aligned}$$

这里 A 中的元素仅与 x^* 有关而与 Δx 无关, $o(|\Delta x|) = (o_1(|\Delta x|), o_2(|\Delta x|), \dots, o_m(|\Delta x|))^T$, 且满足 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|} = 0$. 则称 f 在 x^* 处可微或可导, 称 A 为 f 在 x^* 处的导数, 记作 $f'(x^*)$; 称 $A\Delta x$ 为 f 在 x^* 处的微分, 记作 $df(x^*)$, 即有

$$df(x^*) = A\Delta x = f'(x^*)\Delta x.$$

注 12.2.2 显然, 向量值函数的微分是一元函数或多元函数的微分概念的推广. 但是, 我们定义了与一元函数类似的导数, 而这是多元函数不曾定义过的. 由定义 12.2.1, 若多元函数 $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 可微, $x^* \in D$, 则 f 在 x^* 处的导数和微分分别为

$$\begin{aligned}f'(x^*) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \right), \\ df(x^*) &= f'(x^*)\Delta x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)\Delta x_i.\end{aligned}$$

接下来我们分析一下, 当 f 可微时, A 具有什么样的形式.

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, 则由定义 12.2.1, 对任意 $i = 1, 2, \dots, m$, 有

$$\begin{aligned}\Delta f_i(x^*) &= f_i(x^* + \Delta x) - f_i(x^*) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}\Delta x_j + o_i(|\Delta x|)\end{aligned}$$

注意到, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|} = 0 \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o_i(|\Delta x|)}{|\Delta x|} = 0$, 故 f 在 x^* 可微 $\iff f_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 在 x^* 可微, 且有

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

由此可得

定理 12.2.3 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m): D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x^* \in D$, 则 f 在 x^* 可微 \iff 对任意 $i = 1, 2, \dots, m$, f_i 在 x^* 可微, 且有

$$f'(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^*) \end{bmatrix}.$$

注 12.2.4 (1) 定理 12.2.3 中的矩阵 $f'(x^*)$ 也称为 f 在 x^* 处的 Jacobi 矩阵, 记为 $Jf(x^*)$. 特别的, 当 $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 时, $Jf(x^*)$ 为 $n \times n$ 矩阵, 此时 $Jf(x^*)$ 的行列式称为 f 在 x^* 处的 Jacobi 行列式, 记为 $\left. \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|_{x^*}$, 或简记为 $|f'(x^*)|$.

(2) 若每一个 $f_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 都在区域 D 上具有连续的偏导数, 则 f_i 在 D 上可微, 从而 $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ 在 D 上可微, 记作 $f \in C^1(D)$.

12.3 多元函数复合求导

我们将要给出两个多元向量值函数复合后的求导法则, 由此容易得到多元函数复合的求导方法, 即所谓的链式法则. 我们首先给出一个引理.

引理 12.3.1 已知 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$, 定义 A 的范数为 $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. 若 B 是 $n \times l$ 矩阵, 则有

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

证明. 设 $A = (a_{ik})_{m \times n}$, $B = (b_{kj})_{n \times l}$, $C = (c_{ij})_{m \times l}$, 则有

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

由Schwarz不等式有

$$(c_{ij})^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_{kj}^2.$$

故

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l c_{ij}^2 \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \right) = \|A\|^2 \|B\|^2. \end{aligned}$$

即 $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. ■

注 12.3.2 特别地, 有 $|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$, 这里 x 为 n 维向量.

定理 12.3.3 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, g 在 $x^* \in D$ 可微. 又设 $f : g(D) \rightarrow \mathbb{R}^l$, f 在 $g(x^*)$ 可微, 则有 $f \circ g : D \rightarrow \mathbb{R}^l$ 在 x^* 可微, 且有

$$d(f \circ g)(x^*) = f'(g(x^*))g'(x^*)\Delta x.$$

或

$$(f \circ g)'(x^*) = f'(g(x^*))g'(x^*)$$

证明. 记 $y = g(x)$, $y^* = g(x^*)$, 由 g 在 x^* 处可微, 有

$$\Delta y = g(x^* + \Delta x) - g(x^*) = g'(x^*)\Delta x + \alpha(|\Delta x|),$$

其中 $\alpha(|\Delta x|)$ 满足 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\alpha(|\Delta x|)|}{|\Delta x|} = 0$. 由 f 在 y^* 处可微, 有

$$f(y^* + \Delta y) - f(y^*) = f'(y^*)\Delta y + \beta(|\Delta y|),$$

其中 $\beta(|\Delta y|)$ 满足 $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\beta(|\Delta y|)|}{|\Delta y|} = 0$. 于是有

$$\begin{aligned} \Delta(f \circ g)(x^*) &= f \circ g(x^* + \Delta x) - f \circ g(x^*) = f(g(x^* + \Delta x)) - f(g(x^*)) \\ &= f(g(x^*) + \Delta y) - f(g(x^*)) = f'(g(x^*))\Delta y + \beta(|\Delta y|) \\ &= f'(g(x^*))(g'(x^*)\Delta x + \alpha(|\Delta x|)) + \beta(|g'(x^*)\Delta x + \alpha(|\Delta x|)|) \\ &= f'(g(x^*))g'(x^*)\Delta x + \gamma(|\Delta x|), \end{aligned}$$

其中 $\gamma(|\Delta x|) = f'(g(x^*))\alpha(|\Delta x|) + \beta(|g'(x^*)\Delta x + \alpha(|\Delta x|)|) = f'(g(x^*))\alpha(|\Delta x|) + \beta(|\Delta y|)$.

下证: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\gamma(|\Delta x|)|}{|\Delta x|} = 0$. 由引理12.3.1, 有

$$\frac{|f'(g(x^*))\alpha(|\Delta x|)|}{|\Delta x|} \leq \|f'(g(x^*))\| \frac{\alpha(|\Delta x|)}{|\Delta x|}.$$

再由 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\alpha(|\Delta x|)|}{|\Delta x|} = 0$, 可得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|f'(g(x^*))\alpha(|\Delta x|)|}{|\Delta x|} = 0.$$

另一方面, 仍由引理12.3.1, 有

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta y|}{|\Delta x|} &= \frac{|g'(x^*)\Delta x + \alpha(|\Delta x|)|}{|\Delta x|} \leq \frac{|g'(x^*)\Delta x| + |\alpha(|\Delta x|)|}{|\Delta x|} \\ &= \|g'(x^*)\| + \frac{|\alpha(|\Delta x|)|}{|\Delta x|} \leq +\infty, \Delta x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

故

$$\frac{|\beta(|\Delta y|)|}{|\Delta x|} = \frac{|\beta(|\Delta y|)|}{|\Delta y|} \frac{|\Delta y|}{|\Delta x|} \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0.$$

即 $f \circ g$ 在 x^* 处可微, 且所证结果成立. ■

注 12.3.4 我们来看定理12.3.3中 $l = 1$ 的情形. 记 $z = f(y_1, y_2, \dots, y_m)$, 其中 $y_i = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, m$, 则对复合函数 $z = f(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$, 在上述定理的条件下, 有

$$(f \circ g)'(x^*) = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right) \Big|_{x^*} = \left(\frac{\partial z}{\partial y_1}, \frac{\partial z}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y_m} \right) \Big|_{g(x^*)} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Big|_{x^*}$$

或者

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (12.1)$$

(12.1)式称为多元函数复合求导的链式法则.

(2) 可以证明, 在注(1)中, 若 $g_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 在 x^* 处的各阶偏导数都存在, 而 f 在 $g(x^*)$ 可微, 则 $f \circ g$ 在 x^* 处的各阶偏导数仍存在, 且(12.1)式也成立.

例 12.3.5 设 $u = e^x \sin y$, $x = 2st$, $y = t^2 + s^2$, 求 u_s, u_t .

解.

$$\begin{aligned} u_s &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = e^x \sin y \cdot s 2t + e^x \cos y \cdot 2s \\ &= 2e^x (t \sin y + s \cos y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = e^x \sin y \cdot 2s + e^x \cos y \cdot 2t \\ &= 2e^x (s \sin y + t \cos y). \end{aligned}$$

■

例 12.3.6 设 $u = \ln(x^2 + y^2)$, $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t(t-1)$, 求 $\frac{du}{dt}$.

解.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) + \frac{2y}{x^2 + y^2} (2t - 1).\end{aligned}$$

■

例 12.3.7 设 $z = f(x, y)$ 具有二阶偏导数, $y = \phi(x)$ 的导数 $\phi'(x)$, $\phi''(x)$ 存在, 求 $z = f(x, \phi(x))$ 关于 x 的一阶与二阶导数.

解.

$$\frac{dz}{dx} = f_x + f_y \phi'(x).$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = f_{xx} + f_{xy} \phi'(x) + f_{yx} \phi'(x) + f_{yy} \phi'(x) + \phi''(x) f_y.$$

■

例 12.3.8 设 $z = f(x, y)$ 是 (x, y) 的可微函数, 若采用极坐标 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 试证

$$(1) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2;$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}.$$

证明. (1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta, \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos \theta.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta\right)^2 + \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin^2 \theta, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta - r \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta - r \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta,\end{aligned}$$

两式相加得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}.$$

■

例 12.3.9 设 $u = f(x, y, z)$ 具有连续的各偏导数, $z = \varphi(x, y)$ 的偏导数存在, 从而 $u = f[x, y, \varphi(x, y)]$ 是 (x, y) 的函数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解. 这里可以把变量 x, y, z 都看成是自变量 x, y 的函数, 也就是 $x = x, y = y, z = \varphi(x, y)$, 这样 u 就成为关于自变量 x 和 y 的复合函数. 又因为 $u = f(x, y, z)$ 具有连续的各偏导数, 所以是可微的. 利用复合函数求偏导数的链式法则就有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= f_x(x, y, z) + f_z(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= f_x(x, y, \varphi(x, y)) + f_z(x, y, \varphi(x, y)) \varphi_x(x, y).\end{aligned}$$

类似地还可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= f_y(x, y, z) + f_z(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} \\ &= f_y(x, y, \varphi(x, y)) + f_z(x, y, \varphi(x, y)) \varphi_y(x, y).\end{aligned}$$

■

注 12.3.10 在这个例题的计算过程中, 我们用符号 $f_x(x, y, z)$ 来表示把变量 x 看成是中间变量时, 对 x 的偏导数, 而没有用符号 ∂^n 来表示. 这是因为在这里用 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 来表示当 x, y 为自变量时, 函数 $u = f(x, y, \varphi(x, y))$ 对 x 的偏导数. 如果也用 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 表示当 x 作为中间变量时, 函数 $u = f(x, y, z)$ 对的偏导数, 那么例题中的计算就变成了

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x},$$

这样就会引起混淆, 所以, 在以后有可能产生类似这样的混淆时, 我们都采用这个办法来进行处理.

例 12.3.11 设 $w = f(z), z = \phi(e^x, x^2 + y^2)$, 其中 f 又连续导数, ϕ 有一阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$.

解. 设 $u = e^x, v = x^2 + y^2$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= f'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot e^x + \frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot 2x \right), \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= f'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = f'(z) \frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot 2y.\end{aligned}$$

■

例 12.3.12 设 $z = f(x^2y, \frac{y}{x})$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解. 首先把这个函数看成一个复合函数, 设

$$u = x^2y, \quad v = \frac{y}{x},$$

那么, $z = f(u, v)$. 所以利用求偏导数的链式法则,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2xy \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2y \frac{\partial z}{\partial u} + 2xy \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{y}{x^2} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ &= 2y \frac{\partial z}{\partial u} + 2xy \left[2xy \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right] + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{y}{x^2} \left[2xy \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right] \\ &= 4xy \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4 \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2y \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial z}{\partial v}.\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2x \frac{\partial z}{\partial u} + 2xy \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \frac{1}{x^2} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{y}{x^2} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ &= 2x \frac{\partial z}{\partial u} + 2xy \left[x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right] - \frac{1}{x^2} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{y}{x^2} \left[x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right] \\ &= 2x^3 y \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^3} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2x \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial z}{\partial v}.\end{aligned}$$

■

例 12.3.13 设 $z = f(xy, \frac{x}{y})$ 且 $f(x, y)$ 有一阶连续偏导数, 求函数的全微分 dz 及偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解. 设 $u = xy, v = \frac{x}{y}$, 则

$$\begin{aligned}dz &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} (ydx + xdy) + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy \right) \\ &= \left(y \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v} \right) dx + \left(x \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) dy.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= y \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v}.\end{aligned}$$

■

对于一元函数 $y = f(x)$, 其微分具有微分形式不变性. 也就是不管变量 u 是中间变量还是自变量, 函数的一阶微分都为 $dy = f'(u)du$, 下面我们指出对于多元函数, 其一阶微分也具有形式不变性. 设 $z = f(u, v)$, 如果 u, v 是自变量,

$$dz = f_u(u, v)du + f_v(u, v)dv.$$

下面我们证明, 当 u, v 为中间变量时, 函数的微分仍然具有上面的形式. 设

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y).$$

那么,

$$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y)).$$

其微分

$$\begin{aligned}dz &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= \left(f_u(u, v) \frac{\partial u}{\partial x} + f_v(u, v) \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(f_u(u, v) \frac{\partial u}{\partial y} + f_v(u, v) \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \\ &= f_u(u, v) \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + f_v(u, v) \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \\ &= f_u(u, v)du + f_v(u, v)dv.\end{aligned}$$

另外一元函数的高阶微分不具有形式不变性, 同样多元函数的高阶微分也不具有形式不变性.

12.3.1 习题12.3

1. 设 $z = u^2v - uv^2, u = x \cos y, v = x \sin y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
2. 设 $u = \arctan(x - y), x = 3t, y = 4t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.
3. 设 $z = e^{x-2y}, y = \sin x$, 求 $\frac{dz}{dx}$.
4. 设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 其中 $f \in C^1$ 类, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
5. 设 $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$, 其中 $f \in C^1$ 类, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.
6. 设 $z = f(u, v, w)$ 且 $f \in C^1$ 类, $u = \phi(x, y)$ 的偏导数存在, $v = \psi(x), w = F(y)$ 均为可导函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
7. 设 $u = f(x^2, xy, xyz)$, 且 $f \in C^1$ 类, 求全微分 du .
8. 设函数 $z = x^3 f(\frac{y}{x^2})$, f 为可导函数,
 - (1) 求全微分 dz ;
 - (2) 验证 $x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = 3z$.
9. 设函数 $z = xy + xF(u)$, 其中 $u = \frac{y}{x}, F$ 为可微函数, 求 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$.
10. 设函数 $z = f(x, y)$ 且 $f \in C^1$ 类, 而 $x = u, y^2 = v - u^2$, 试以 u, v 为新的自变量变换方程 $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
11. 设 $z = f(x, y)$ 是可微函数, 且 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 试求 $(\frac{\partial z}{\partial r})^2 + (\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta})^2$.
12. 设函数 $z = \phi(x + y, x - y) \cdot \psi(xy, \frac{y}{x})$, 其中 ϕ, ψ 都是可微函数, 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
13. 设 $z = f[x, g(x, y)]$, 而 $y = \phi(x)$, 其中 f 和 $\phi \in C^1$ 类, 试求 $\frac{dz}{dx}$.
14. 设 $u = f(x, y, z), y = y(x, t), t = t(x, z)$ 都是可微函数, 求偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}$.
15. 设 $f(x, y)$ 是可微函数, 且 $f(x, 2x) = x, f_x(x, 2x) = x^2$ 求 $f_y(x, 2x)$.
16. 设 $z = f(x, u), u = xy$, 其中 $f \in C^2$ 类, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
17. 设 $z = f(xy + \frac{y}{x})$, 其中 $f \in C^2$ 类, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
18. 设函数 $f(u, v) \in C^2$ 类, 而 $z = f(x + y, xy)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
19. 设函数 $f(u, v) \in C^2$ 类, $z = xf(x^2 + y^2, x + y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
20. 设函数 $f(u, v) \in C^2$ 类, 而 $z = xf(xy, \frac{x}{y})$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
21. 设函数 $z = xf(\frac{y}{x}) + yg(\frac{x}{y})$, 其中 $f, g \in C^2$ 类, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
22. 设函数 $z = \frac{1}{x}f(xy) + y\phi(x + y)$, 其中 $f, \phi \in C^2$ 类, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
23. 设 $z = f(u)$ 是可微函数, 函数 $\phi(u)$ 可导, 且 $\phi'(u) \neq 1, p(t)$ 是连续函数, 并且满足关系式 $u = \phi(u) + \int_y^x p(t)dt$, 试求 $p(x) \frac{\partial z}{\partial y} + p(y) \frac{\partial z}{\partial x}$.
24. 设 $f \in C^2$ 类, ϕ 为可微函数, 如果 $z = f[x + \phi(y)]$, 证明

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

25. 设 $z = xf(2x + 3y, xy)$, 其中 f 有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

12.4 隐函数求导法

这一节中我们将要介绍由方程或方程组确定的函数, 也就是隐函数的求导计算. 本节均假定隐函数存在, 下一节再讨论隐函数存在定理.

12.4.1 由一个方程确定的函数求导计算

定义 12.4.1 设 $D \subset \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$. 并设二元函数 $F(x, y)$ 的定义域包含了 $D \times E$. 如果对每一个 $x \in D$, 恰好存在唯一的一个 $y \in E$, 使得 $F(x, y) = 0$, 那么我们就说: 由方程

$$F(x, y) = 0$$

确定了一个从 D 到 E 的隐函数; 或者说, 由条件

$$F(x, y) = 0, \quad x \in D, \quad y \in E$$

确定了一个(从 D 到 E 的)隐函数.

设方程 $F(x, y) = 0$ 满足隐函数存在定理, 那么在一定的 x 取值范围内, 就可以确定以 x 为自变量的函数关系 $y = f(x)$, 也就是成立 $F(x, f(x)) \equiv 0$. 我们要求 y 关于自变量 x 的导数.

恒等式 $F(x, f(x)) \equiv 0$ 两边同时对 x 求导,

$$F_x(x, y) + F_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

这样我们实际上就得到了由方程所确定函数关系的求导方法.

例 12.4.2 求由方程

$$xy - e^x + e^y = 0$$

确定的函数 $y = f(x)$ 关于 x 的导数 y' .

解. 把 y 看成 x 的函数, 方程两边同时对 x 求导,

$$y + xy' - e^x + e^y y' = 0.$$

所以

$$y' = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

■

例 12.4.3 设 z 是由椭球面方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所确定的 x, y 的函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解. 方程两边同时对 x, y 求导数,

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

故得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}.$$

■

例 12.4.4 设 $F(x, x+y, x+y+z) = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解. 设 $x = u, x+y = v, x+y+z = w$, 对方程两边同时对 y 求导,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}$$

而

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 1 + \frac{\partial z}{\partial y}.$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial w} \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

由此

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial w}}{\frac{\partial F}{\partial w}}.$$

■

例 12.4.5 证明由方程 $ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2)$ 所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程 $(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$, 其中 $\Phi(u)$ 是 u 的可微函数, a, b, c 为常数.

证明. 方程两边分别对 x, y 求导得

$$a + c \frac{\partial z}{\partial x} = \phi'(2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x}),$$

$$b + c \frac{\partial z}{\partial y} = \phi'(2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y}).$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x\phi' - a}{c - 2z\phi'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y\phi' - b}{c - 2z\phi'}.$$

故

$$\begin{aligned} (cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} &= (cy - bz)\frac{2x\phi' - a}{c - 2z\phi'} + (az - cx)\frac{2y\phi' - b}{c - 2z\phi'} \\ &= \frac{(cy - bz)(2x\phi') + (az - cx)(2y\phi' - b)}{c - 2z\phi'} \\ &= \frac{(bx - ay)(c - 2z\phi')}{c - 2z\phi'} \\ &= bx - ay. \end{aligned}$$

■

12.4.2 由方程组确定的函数求导计算

我们先来看一个特殊的情形. 设方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad (12.2)$$

满足下一节给出的隐函数存在定理, 即可以通过(14.7)确定函数组 $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$, 其中 u, v 关于 x, y 可微, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

在(14.7)式两边同时对 x 求偏导数, 得

$$\begin{cases} F_x + F_u \frac{\partial u}{\partial x} + F_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ G_x + G_u \frac{\partial u}{\partial x} + G_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (12.3)$$

将(14.8)式写成矩阵形式, 有

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (12.4)$$

同理可得

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (12.5)$$

将(14.9)式和(12.5)式合并起来, 有

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial v} & -\frac{\partial F}{\partial v} \\ -\frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} & \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} & \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

这里 $J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0$.

对一般情形, 有类似结果. 设方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m) = 0 \\ \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m) = 0 \end{cases}$$

确定了 m 个 n 元函数: $u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, m$. 类似于前面的推导过程, 当 $\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)} \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, x_j, \dots, u_m)} / \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

其中 x_j 在第 i 个位置.

例 12.4.6 从方程组 $\begin{cases} x + y + z + u + v = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = 2 \end{cases}$, 求出 u_x, v_x 及 u_{xx}, v_{xx} .

解. 方程组两边分别对 x 求导得(u, v 作为 x, y, z 的函数)

$$\begin{cases} 1 + u_x + v_x = 0, \\ 2x + 2uu_x + 2vv_x = 0. \end{cases}$$

由此

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{x-v}{v-u}, & v_x &= \frac{x-u}{u-v}. \\ u_{xx} &= \frac{(1-v_x)(v-u) - (x-v)(v_x-u_x)}{(v-u)^2} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{x-u}{u-v}\right)(v-u) - (x-v)\left(\frac{x-u}{u-v} - \frac{x-v}{v-u}\right)}{(v-u)^2} \\ &= \frac{2(xu + xv + uv - x^2 - u^2 - v^2)}{(u-v)^3}, \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} v_{xx} &= \frac{(1-u_x)(u-v) - (x-u)(u_x-v_x)}{(u-v)^2} \\ &= \frac{2(xu + xv + uv - x^2 - u^2 - v^2)}{(v-u)^3}. \end{aligned}$$

■

例 12.4.7 设 $z = z(x, y)$. 试通过 $u = x + y, v = x - y, w = xy - z$ 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

解. 函数 $z = z(x, y)$ 通过变换变为函数 $w = w(u, v)$. 由 $u = x + y, v = x - y$ 两边分别对 x, y 求导得

$$u_x = 1, u_y = 1, v_x = 1, v_y = -1,$$

从而所有 u, v 关于 x, y 的各个二阶偏导数均为零.

由 $w = xy - z$, 即 $z = xy - w$ 两边分别对 x, y 求导得

$$z_x = y - w_u u_x - w_v v_x = y - (w_u + w_v), \quad z_y = x - w_u u_y - w_v v_y = x - (w_u - w_v).$$

两边分别对 x, y 得

$$z_{xx} = -w_{uu}u_x - w_{uv}v_x - w_{vu}u_x - w_{vv}v_x = -w_{uu} - 2w_{uv} - w_{vv},$$

$$z_{xy} = 1 - (w_{uu}u_y + w_{uv}v_y + w_{vu}u_y + w_{vv}v_y) = 1 - w_{uu} + w_{vv},$$

$$z_{yy} = -(w_{uu}u_y + w_{uv}v_y) + w_{vu}u_y + w_{vv}v_y = -w_{uu} + 2w_{uv} - w_{vv}.$$

所变换方程左边为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ &= (-w_{uu} - 2w_{uv} - w_{vv}) - 2(1 - w_{uu} + w_{vv}) + (-w_{uu} + 2w_{uv} - w_{vv}) \\ &= -4w_{vv} - 2. \end{aligned}$$

从而所得变换方程为 $-4w_{vv} - 2 = 0$, 即 $2w_{vv} + 1 = 0$ 或

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = -\frac{1}{2}.$$

■

12.4.3 反函数组与坐标变换

我们先给出两个关于Jacobi行列式的性质.

命题 12.4.8 设 $y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_j = x_j(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}, \frac{\partial x_j}{\partial t_k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 都存在, 则有

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)}.$$

证明. 由 $\frac{\partial y_i}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t_j}$ 易得. ■

命题 12.4.9 设映射 $y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 存在逆映射, 则有

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = 1.$$

证明. 设逆映射为 $x_j = g_j(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $j = 1, 2, \dots, n$. 记 $G = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, 则有 $F^{-1} = G$, $G^{-1} = F$, 故有

$$F \circ G(y_1, y_2, \dots, y_n) = F(g_1, g_2, \dots, g_n) = (f_1(g_1, g_2, \dots, g_n), \dots, f_n(g_1, g_2, \dots, g_n)) = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

即 $f_i(g_1(y_1, y_2, \dots, y_n), g_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, g_n(y_1, y_2, \dots, y_n)) = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, 故有

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial g_k}{\partial y_j} = \frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

即有 $JF(x_1, x_2, \dots, x_n)JG(y_1, y_2, \dots, y_n) = I_n$, 故所证结果成立. ■

设函数组 $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$ (其中 $f_i \in C^1$, $i = 1, 2, \dots, n$) 存在反函数组, 即存在

$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ x_2 = g_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ x_n = g_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$ 满足 $y_i = f_i(g_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, g_n(y_1, y_2, \dots, y_n))$, $i = 1, 2, \dots, n$. 我们来

求 $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, 2, \dots$.

由命题12.4.9, 有

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} = I_n,$$

由此可得

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (12.6)$$

例 12.4.10 设 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 求 $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$.

解. $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$, 则有

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r,$$

故由(12.6)式有

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

■

12.4.4 习题12.4

1. 设 $x = 1 + y^2$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
2. 设 $\arctan \frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
3. 设 $y = x + \ln y$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.
4. 设 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^3y}{dx^3}$.
5. 设 $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
6. 求由方程 $2xz - 2xyz + \ln(xyz) = 0$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 的全微分.
7. 设 $2 \sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$, 证明: $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.
8. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x - az = \phi(y - bz)$ 所确定, 其中 $\phi \in C^1$ 类, a, b 是不全为零的常数, 证明: $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.
9. 设 $F(u, v) = 0$, 其中 F 为可微函数, 且 $u = x^2 - y^2, v^2 = y^2 - z^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.
10. 设 $u = F(x, y, z)$, 而 z 由方程 $z^5 - 5xy + 5z = 1$ 所确定, 其中 $f \in C^1$ 类, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.
11. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xz - y + \arctan y = 0$ 所确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
12. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xy + yz + zx = 1$ 所确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
13. 证明: 设方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 则当 $F_y \neq 0$ 时, 有

$$F_y^3 y'' = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}.$$

14. 设 $F(u, v) \in C^1$ 类, 证明: 由方程 $F(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$.
15. 设 $z = \phi(x, y)$, 而 y 是由方程 $\psi(x, y) = 0$ 确定为 x 的函数 $y = f(x)$, 其中 f 与 ϕ 均为可微函数, 试求 $\frac{dz}{dx}$.
16. 设函数 $u = f(z)$, 而 z 由方程 $z = x + y\phi(z)$ 确定为 x, y 的函数, 其中 f 与 ϕ 均为可微函数, 证明: $\frac{\partial u}{\partial y} = \phi(z) \frac{\partial u}{\partial x}$.
17. 设 $F(u, v)$ 是可微函数, 而由方程 $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ 确定 z 为 x, y 的函数, 证明:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

18. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程

$$\frac{x}{z} = \varphi\left(\frac{y}{z}\right)$$

所确定的隐函数, 其中 $\varphi \in C^2$. 验证: 当 $x - y\varphi'(\frac{y}{z}) \neq 0$ 时, 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

19. 设 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.

20. 设 $\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

21. 设 $x = u \cos \frac{v}{u}, y = u \sin \frac{v}{u}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

22. 设 $\begin{cases} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \\ z = uv \end{cases}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

23. 设 $\begin{cases} u = f(u, x, v + y) \\ v = g(u - x, v^2 y), \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}$.

24. 设 x, y, z 为由下列方程组

$$\begin{cases} x^2 - y \cos(uv) + z^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 2, \\ xy - \sin u \cos v + z = 0. \end{cases}$$

确定的 u, v 的函数, 试在 $x = y = 1, z = 0, u = \frac{\pi}{2}, v = 0$ 点计算 $\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}$.

25. 设极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 变换常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + kx(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + ky(x^2 + y^2) \end{cases}$$

为极坐标常微分方程组.

26. 设 $z = z(x, y)$ 由方程组

$$\begin{cases} z = \alpha x + \varphi(\alpha)y + \psi(\alpha), \\ 0 = x + \varphi'(\alpha)y + \psi'(\alpha) \end{cases}$$

所确定, 求证 $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0$.

27. 设 u, v, w 是由方程组

$$\begin{cases} x = f(u, v, w), \\ y = g(u, v, w), \\ z = h(u, v, w), \end{cases}$$

确定的 x, y 和 z 的函数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

28. 设 $y = f(x, t)$, 而 t 由方程 $F(x, y, t) = 0$ 确定为 x, y 的函数, 其中 f 与 F 都具有一阶连续偏导数, 证明:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

29. 设方程 $\Phi(x, y, z) = 0$ 能确定可微的隐函数

$$x = x(y, z), y = y(z, x), z = z(x, y).$$

证明:

$$(1) \quad \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} = 1;$$

$$(2) \quad \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

30. 设 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20. \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.

31. 设 $\begin{cases} xu - yv = 0, \\ yu + xv = 1. \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

32. 设 $\begin{cases} x = e^u \cos v, \\ y = e^u \sin v, \\ z = uv. \end{cases}$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

33. 验证曲线 $F(x, y) = 0$ 在点 $P(x, y)$ 处的曲率半径为

$$R = \left| \frac{[(F_x)^2 + (F_y)^2]^{\frac{3}{2}}}{F_{xx}(F_y)^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}(F_x)^2} \right|.$$

12.5 隐函数存在定理

12.5.1 一个方程所确定的隐函数

由一个方程或方程组所确定的函数, 称为隐函数. 那么, 在什么条件下方程 $F(x, y) = 0$ 能写成显函数 $y = f(x)$ 的形式? 进一步, 这样的函数是否可导? 如: $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 及 $(0, -1)$ 的邻域内分别能唯一确定函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 及 $y = -\sqrt{1 - x^2}$, 且有连续导数, 但在点 $(1, 0)$ 或 $(-1, 0)$ 的任何邻域内不能确定函数 $y = f(x)$.

定理 12.5.1 设 $F(x, y)$ 满足下面条件:

- (1) 在区域 $D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ 上, F_x, F_y 连续;
- (2) $F(x_0, y_0) = 0$;
- (3) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

则有以下结果:

- (1) 在点 (x_0, y_0) 某邻域内, $F(x, y) = 0$ 能唯一确定一个函数 $y = f(x)$ 且 $y_0 = f(x_0)$; 即 $y = f(x)$ 定义在 $O(x_0, \delta)$ 上有定义且满足 $F(x, f(x)) \equiv 0, y_0 = f(x_0)$;
- (2) $y = f(x)$ 在 $O(x_0, \delta)$ 内连续;
- (3) $y = f(x)$ 在 $O(x_0, \delta)$ 内具有连续导数, 且 $y' = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$.

证明. 不妨设 $F_y(x_0, y_0) > 0$. 于是, 由假设可知, 存在 $\eta > 0$, 使得 $F(x, y), F_y(x, y)$ 在

$$D_1 : |x - x_0| \leq \eta, |y - y_0| \leq \eta$$

上连续, $\forall (x, y) \in D, F_y(x, y) > 0$ 且 $F(x_0, y_0 - \eta) < 0, F(x_0, y_0 + \eta) > 0$. 从而存在 $0 < \delta \leq \eta$, 使得当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时

$$F(x, y_0 - \eta) < 0, F(x, y_0 + \eta) > 0.$$

再由 $F(x, y)$ 关于 y 连续且严格单增, 从而存在唯一的 $y(x) \in (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$, 使得

$$F(x, y(x)) = 0.$$

显然 $y(x_0) = y_0$. 这样我们就证明了函数 $y = y(x)$ 的存在唯一性.

以下证明它的连续性. 任取 $\bar{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 记 $\bar{y} = y(\bar{x})$, 则 $|\bar{y} - y_0| < \eta$. 任给 $\varepsilon > 0$ 不妨设 $\varepsilon < \min\{y_0 + \eta - \bar{y}, \bar{y} - y_0 + \eta\}$ ($y_0 - \eta < \bar{y} - \varepsilon < \bar{y} + \varepsilon < y_0 + \eta, \varepsilon < y - y_0 - \eta$). 由于 $F(\bar{x}, y)$ 是 y 的严格单增函数, 从而由 $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ 可得

$$F(\bar{x}, \bar{y} - \varepsilon) < 0, F(\bar{x}, \bar{y} + \varepsilon) > 0.$$

再由 F 的连续性可知, 存在 $0 < r < \min\{x_0 + \delta - \bar{x}, \bar{x} - x_0 + \delta\}$, 使得当 $|x - \bar{x}| < r$ 时有

$$F(x, \bar{y} - \varepsilon) < 0, F(x, \bar{y} + \varepsilon) > 0.$$

于是当 $|x - \bar{x}| < r$ 时

$$|y(x) - \bar{y}| = |y(x) - y(\bar{x})| < \varepsilon,$$

即 $y(x)$ 在 \bar{x} 连续, 由 \bar{x} 的任意性可知 $y = y(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 存在且连续.

最后, 我们证明 $y = y(x)$ 在 x_0 的某邻域内一阶导数连续. 事实上, 取 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 当 $0 < |\Delta x| < \min\{x_0 + \delta - x, x - x_0 + \delta\}$ 时,

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + \Delta x, y(x + \Delta x)) - F(x, y(x)) \\ &= F(x + \Delta x, y(x + \Delta x)) - F(x, y(x + \Delta x)) \\ &\quad + F(x, y(x + \Delta x)) - F(x, y(x)). \end{aligned}$$

由一元函数的中值定理可得

$$0 = F_x(x + \theta_1 \Delta x, y(x + \Delta x)) \Delta x - F_y(x, y(x) + \theta_2 \Delta y) \Delta y,$$

其中 $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$, $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$. 由于在 D 上 $F_y(x, y) \neq 0$, 从而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x + \theta_1 \Delta x, y(x + \Delta x))}{F_y(x, y(x) + \theta_2 \Delta y)}.$$

由 $F_x(x, y)$ 和 $F_y(x, y)$ 的连续性可得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))},$$

即

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}.$$

■

注 12.5.2 利用数学归纳法可以证明在上述定理的条件下, 如果 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 附近有连续的 k 阶偏导数, 那么上面定理中的 $y = y(x)$ 在 x_0 附近也有连续的 k 阶偏导数. 特别的, 如果 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的一个邻域内有无穷阶的偏导数, 那么定理中的函数 $y = y(x)$ 在 x_0 的附近也有无穷阶的偏导数.

例 12.5.3 证明方程 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 在单位圆 $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ 上满足 $y \neq 0$ 的任一点的邻域内能唯一确定有连续导数的函数 $y = f(x)$.

证明. 二元函数

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

在整个二维空间连续, 它的偏导数 $F_x = 2x, F_y = 2y$ 亦连续, 当 $y \neq 0$ 时 F_y 亦不为0, 所以在任何满足上述方程的点 (x, y) 且 $y \neq 0$ 的某一邻域内, 由方程能唯一确定一个具有连续导数的函数 $y = f(x)$. ■

上面所讨论的问题可以推广到多变量情形, 其证明方法与上述相仿, 所以我们只把结论叙述如下:

定理 12.5.4 设 $F(x_1, \dots, x_n, y)$ 满足下面条件:

- (1) 在区域 $D: |x_i - x_i^{(0)}| \leq a_i, |y - y^{(0)}| \leq b$ ($i = 1, \dots, n$) 上具有对一切变量的连续偏导数;
- (2) $F(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y^{(0)}) = 0$;
- (3) $F_y(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$.

则有以下结果:

- (1) 在点 $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y^{(0)})$ 的某邻域 Δ 内, $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ 唯一确定一个函数 $y = f(x_1, \dots, x_n)$, 且 $y^{(0)} = f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$;
- (2) $y = f(x_1, \dots, x_n)$ 在 Δ 内连续;
- (3) $y = f(x_1, \dots, x_n)$ 在 Δ 内对各个变量有连续导数, 且

$$f_{x_i} = -\frac{F_{x_i}(x_1, \dots, x_n, y)}{F_y(x_1, \dots, x_n, y)}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

12.5.2 方程组所确定的隐函数

为简单起见, 我们先给出方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

的隐函数存在定理.

定理 12.5.5 若 $F(x, y, u, v)$ 及 $G(x, y, u, v)$ 满足:

- (1) 在点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某一个邻域 D 内, 函数 F 和 G 分别具有对各个变量的连续偏导数;
- (2) $F(P_0) = 0, G(P_0) = 0$;
- (3) $J(P_0) = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \Big|_{P_0} \neq 0$.

则

- (1) 在点 P_0 的某一个邻域 Δ 内, 方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

确定唯一的一组函数

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases},$$

它们被定义在 (x_0, y_0) 的某个邻域 U 内, 且 $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$;

- (2) $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 在 U 内连续;
- (3) $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 在 U 内有关于 x 和 y 的连续偏导数, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}.$$

这里, $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$.

证明. 由条件(3)可知 F_u, F_v 中至少有一个在 P_0 点不等于零, 不妨设 $F_v(P_0) \neq 0$. 于是由上节的内容知, 可以在 P_0 点的某个邻域内把 v 从 $F(x, y, u, v) = 0$ 中唯一解出, 设为

$$v = \phi(x, y, u)$$

且 $v_0 = \phi(x_0, y_0, u_0)$, 并具有对 x, y, u 的连续偏导数. 而 ϕ_u 可以从下面的方法中求得: 由

$$F(x, y, u, v) = 0$$

得到

$$F_u + F_v \phi_u = 0,$$

所以

$$\phi_u = -\frac{F_u}{F_v}.$$

将 $v = \phi(x, y, u)$ 代入函数 $G(x, y, u, v)$ 中, 得到

$$G(x, y, u, \phi(x, y, u)) \equiv \psi(x, y, u).$$

由于

$$\psi_u = G_u + G_v \phi_u = \frac{G_u F_v - G_v F_u}{F_v} = -\frac{J}{F_v},$$

故由假设知道 $\psi_u(x_0, y_0, u_0) \neq 0$. 按照上节的多变量情形时的隐函数定理知, 在点 (x_0, y_0, u_0) 的某邻域内, 能从方程 $G(x, y, u, \phi) \equiv \psi(x, y, u) = 0$ 将 u 解出, 设为

$$u = u(x, y)$$

它在 (x_0, y_0) 的某一邻域内对 x 及 y 有连续偏导数, 且 $u_0 = u(x_0, y_0)$.

再把 $u = u(x, y)$ 代入 ϕ , 得 $v = \phi(x, y, u(x, y)) \equiv v(x, y)$, 且

$$v(x_0, y_0) = \phi(x_0, y_0, u_0) = v_0,$$

于是这一对函数

$$u = u(x, y), v = v(x, y)$$

即为所求. ■

对于更一般的方程组, 我们也有同样的定理, 它可以用数学归纳法来证明, 这里我们只叙述其结果:

定理 12.5.6 若有 m 个函数

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

满足:

- (1) 在点 $P_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}; y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$ 的某邻域 D 内具有对一切变元的连续偏导数;
- (2) $F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}; y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) = 0 (i = 1, 2, \dots, m)$;
- (3) 在 P_0 点

$$J = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)} \neq 0.$$

则:

- (1) 在 P_0 点的某邻域内, 由方程组

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0 (i = 1, 2, \dots, m)$$

能唯一确定一组函数 $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) (i = 1, 2, \dots, m)$, 它们定义在 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ 点某邻域 Δ 内, 满足

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n; f_1, \dots, f_m) \equiv 0$$

并且有 $y_i^{(0)} = f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) (i = 1, 2, \dots, m)$;

- (2) 这一组函数 f_i 在 Δ 内连续;
- (3) 这一组函数 f_i 在 Δ 内具有对各个变元的连续偏导数, 且其对 x_j 的偏导数可以从方程组

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial y_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_j} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

解得.

例 12.5.7 设 $y = \phi(x)$ 是方程组 $\begin{cases} y = f(x, t) \\ F(x, y, t) = 0 \end{cases}$ 确定的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解. 令 $G = y - f(x, t)$, 那么 $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, t)} = F_t f_x - F_x f_t$, $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, t)} = -f_t F_y - F_t$, 于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_t f_x - F_x f_t}{f_t F_y + F_t}.$$

■

12.5.3 习题12.4

1. 试问当常数 a, b 满足什么条件时, 由方程

$$x^3 + x^2 y - y^3 = a^3 + a^b - b^3$$

能确定隐函数 $y = f(x)$, 这里的 f 在 $x = a$ 处连续, $f(a) = b$.

2. 方程 $\cos x + \sin y = e^{xy}$ 能否在原点某邻域内确定隐函数 $y = f(x)$ 或 $x = g(y)$.

3. 方程 $xy + z \ln y + e^{xz} = 1$ 在点 $(0, 1, 1)$ 的某邻域内能否确定出某一个变量为另外两个变量的函数.

4. 设 $x = y + \varphi(y)$, 其中 $\varphi(0) = 0$, 且当 $-a < y < a$ 时, $\varphi'(y)$ 连续, $|\varphi'(0)| < 1$. 求证存在 $\delta > 0$, 使得当 $-\delta < x < \delta$ 时, 有唯一的可微函数 $y = y(x)$ 满足

$$x = y(x) + \varphi(y(x)), \text{ 且 } y(0) = 0.$$

5. 设函数 $f(x, y)$ 定义在 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 内, 且满足 $f(0, 0) = 0, |f(x, y)| \leq 1, \forall (x, y) \in D$. 又函数

$$F(x, y, z) = z^3 + z(x^2 + y^2) + f(x, y)$$

定义在 $G = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 < 1, |z| \leq 1\}$ 上, 求证:

(1) 在 D 上有唯一的函数 $z = \varphi(x, y)$ 满足方程 $F(x, y, z) = 0$, 且 $|\varphi(x, y)| < 1, \forall (x, y) \in D$;

(2) 若 $f(x, y)$ 在 D 内连续, 则 $\varphi(x, y)$ 也在 D 内连续.

6. 试问在哪些点的邻域内, 由方程组

$$z^2 + xy - a = 0, z^2 + x^2 - y^2 - b = 0$$

可唯一确定

(1) x, y 为 z 的隐函数 $x = f(z), y = g(z)$;

(2) x, z 为 y 的隐函数 $x = f(z), y = g(z)$.

7. 求证: 由方程 $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2 y - y^3$ 在 $(0, 0)$ 点的邻域内可确定三个连续可微函数 $y = y(x)$, 使得 $y(0) = 0$.

8. 设 $f(x, y, z), g(x, y, z) \in C^2(\mathbb{R}^3)$, 且对任意 $y \in \mathbb{R}^1, z \in \mathbb{R}^1$ 都有

$$f(0, 0, z) = f_x(0, 0, z) = f_y(0, 0, z) = g(0, y, z) = 0.$$

求证存在 $x = 0$ 的邻域和定义在此邻域内的一元函数 $y = y(x)$ 和 $z = z(x)$ 满足方程组

$$\begin{cases} xz + xy + f(x, y, z) = 0 \\ x + (1 - z)y + g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

和 $y(0) = z(0) = 0$.

9. 设点 $P_0(x_0, y_0, z_0, u_0)$ 满足方程组

$$\begin{cases} f(x) + f(y) + f(z) = F(u) \\ g(x) + g(y) + g(z) = G(u) \\ h(x) + h(y) + h(z) = H(u) \end{cases}$$

这里出现的所有函数都具有一阶连续的导数.

(1) 说出这些函数满足何种条件时, 由该方程组能确定 x, y, z 分别为 u 的函数?

(2) 在 $f(x) = x, g(x) = x^2, h(x) = x^3$ 的情形下, 上述条件相当于什么?

10. 证明: 由 $u = x^2 - y^2, v = \frac{1}{2} \ln(x + y)$ 所确定的变换在区域 $D = \{(x, y) | x > 0, x + y > 0\}$ 上是一一的.

12.6 第十二章典型例题选讲

例 12.6.1 设 $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$, 求所有一阶、二阶偏导数.

解. 容易求得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

以及

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\arctan \frac{x+y}{x-y} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

从而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

■

例 12.6.2 设 $f(x, y) = |x - y|\phi(x, y)$, $\phi(x, y)$ 在原点的某个邻域内连续, 研究 $f(x, y)$ 在原点的可微性.

解.

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|\phi(x, 0)}{x} = \begin{cases} \phi(0, 0), & x \rightarrow 0+; \\ -\phi(0, 0), & x \rightarrow 0-. \end{cases}$$

同理

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|\phi(0, y)}{y} = \begin{cases} \phi(0, 0), & y \rightarrow 0+; \\ -\phi(0, 0), & y \rightarrow 0-. \end{cases}$$

从而可知 $\phi(0, 0) \neq 0$ 时, $f(x, y)$ 在原点的偏导不存在, 故不可微. 若 $\phi(0, 0) = 0$, 则 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ 且

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x, y) - f(0, 0) - 0 \cdot x - 0 \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| &= \left| \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \\ &\leq \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \phi(x, y) \leq 2\phi(x, y) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微. ■

例 12.6.3 若函数 $f(x, y, z)$ 对任意的实数 t 满足关系式 $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$, 则称 $f(x, y, z)$ 为 k 次齐次函数. 设 f 可微, 试证 $f(x, y, z)$ 是 k 次齐次函数的必要条件是

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = k f(x, y, z),$$

对任意的 (x, y, z) 成立, 反之如何?

证明. 必要性: 任意取定 (x_0, y_0, z_0) , 考虑函数

$$\phi(t) = f(tx_0, ty_0, tz_0) - t^k f(x_0, y_0, z_0),$$

显然

$$\phi'(t) = x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(tx_0, ty_0, tz_0) + y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(tx_0, ty_0, tz_0) + z_0 \frac{\partial f}{\partial z}(tx_0, ty_0, tz_0) - kt^{k-1} f(x_0, y_0, z_0).$$

取 $t = 1$, 得 $\phi'(1) = 0$, 从而

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + z_0 \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = k f(x_0, y_0, z_0).$$

由 (x_0, y_0, z_0) 的任意性知

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = k f(x, y, z).$$

反之并不一定成立.

例如 $f(x, y, z) = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$ 满足

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 3 f(x, y, z)$$

但 $f(x, y, z)$ 不是 3 次齐次函数, 因为此时 $f(tx, ty, tz) = |t|^3 f(x, y, z)$. ■

例 12.6.4 证明方程 $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 的解为 $u = f(x^2 - y^2)$, 其中 f 为任一可微函数.

证明. 令 $v = x^2 - y^2, w = xy$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = 2x \frac{\partial u}{\partial v} + y \frac{\partial u}{\partial w}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} = -2y \frac{\partial u}{\partial v} + x \frac{\partial u}{\partial w}. \end{aligned}$$

所以

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = y \left(2x \frac{\partial u}{\partial v} + y \frac{\partial u}{\partial w} \right) + x \left(-2y \frac{\partial u}{\partial v} + x \frac{\partial u}{\partial w} \right) = (x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial w}.$$

再由

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

知 $\frac{\partial u}{\partial w} = 0$, u 仅与 v 有关, 从而可设 $u = f(v)$, f 为任一可微函数, 所以 $u = f(x^2 - y^2)$. ■

例 12.6.5 设 $f(x, y)$ 在区域 D 内可微, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内, 且

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \leq M.$$

试证

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq M|AB|$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

证明. 作辅助函数

$$\phi(t) = f(x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)),$$

显然 $\phi(t)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 根据拉格朗日定理, 存在 $c \in (0, 1)$, 使得

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(c) = \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial x}(x_2 - x_1) + \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial y}(y_2 - y_1),$$

其中 $(\xi, \eta) = (x_1 + c(x_2 - x_1), y_1 + c(y_2 - y_1))$.

又 $\phi(1) = f(x_2, y_2), \phi(0) = f(x_1, y_1)$, 所以

$$\begin{aligned} & |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \\ &= \left| \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial x}(x_2 - x_1) + \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial y}(y_2 - y_1) \right| \\ &\leq \left[\left(\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{\frac{1}{2}} \leq M|AB|. \end{aligned}$$

■

例 12.6.6 求函数 $u = f(xy, \frac{y}{x})$ 的二阶偏导数(用 f'_i 表示 f 关于第 i 个变量求偏导, f_{ij} 表示 f 先关于第 i 个变量求偏导再关于第 j 个变量求偏导).

解. 先求一阶偏导数:

$$u_x = yf_1 - \frac{y}{x^2}f_2, \quad u_y = xf_1 + \frac{1}{x}f_2.$$

再求二阶偏导数:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= y^2 f_{11} - 2\frac{y^2}{x^2} f_{12} + \frac{y^2}{x^4} f_{22} + \frac{1}{x} f_2, \\ u_{xy} &= xy f_{11} - \frac{y}{x^3} f_{22} + f_1 - \frac{1}{x^2} f_2, \\ u_{yy} &= x^2 f_{11} + 2f_{12} + \frac{1}{x^2} f_{22}. \end{aligned}$$

■

例 12.6.7 设 $u = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 若满足调和方程

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

试求出函数 u .

解. 因 $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{r}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = f'(r)\frac{z}{r}$, 所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\frac{y^2 + z^2}{r^3}.$$

同理可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f''(r)\frac{y^2}{r^2} + f'(r)\frac{z^2 + x^2}{r^3}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= f''(r)\frac{z^2}{r^2} + f'(r)\frac{x^2 + y^2}{r^3}. \end{aligned}$$

由条件得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = 0,$$

或

$$r^2 f''(r) + 2r f'(r) = 0,$$

于是有 $[r^2 f'(r)]' = 0$, 推得 $f'(r) = \frac{C}{r^2}$, 解出 $f(r) = -\frac{C}{r} + C_1$, 其中 C, C_1 为任意常数. ■

例 12.6.8 证明：由方程 $y = x\phi(z) + \psi(z)$ 所决定的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

证明. 先对方程求一阶偏导数,得

$$\begin{cases} 0 = \phi(z) + x\phi'(z)\frac{\partial z}{\partial x} + \psi'(z)\frac{\partial z}{\partial x}, \\ 1 = x\phi'(z)\frac{\partial z}{\partial y} + \psi'(z)\frac{\partial z}{\partial y} \quad (x\phi' + \psi' \neq 0). \end{cases}$$

再对上式求偏导数,有

$$0 = 2\phi'(z)\frac{\partial z}{\partial x} + (x\phi'' + \psi'')\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + (x\phi' + \psi')\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad (12.1)$$

$$0 = \phi'(z)\frac{\partial z}{\partial y} + (x\phi'' + \psi'')\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + (x\phi' + \psi')\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad (12.2)$$

$$0 = (x\phi'' + \psi'')\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + (x\phi' + \psi')\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \quad (12.3)$$

由(12.1)式 $\times \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ - (12.2)式 $\times 2\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$ + (12.3)式 $\times \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$, 推出

$$(x\phi' + \psi') \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] = 0.$$

上式消去 $x\phi' + \psi'$, 即得所求方程. ■

例 12.6.9 取 y 为因变量,解方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

证明. 由上题得到启发, $z = z(x, y)$ 中把 x, z 看成自变量, 对 x 求偏导数,得

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \text{解出 } \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial x} / \frac{\partial z}{\partial y},$$

即

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

再对 x 求偏导, 得

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

将 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 代入上式,有

$$0 = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

利用条件得出 $\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, y 可取为因变量隐含条件 $\frac{\partial z}{\partial y} \neq 0$, 所以 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, 由此解出 $y = x\phi(z) + \psi(z)$. ■

例 12.6.10 设 $f(x, y)$ 二次可微, 且 $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, 试证对任意的常数 C , $f(x, y) = C$ 为一直线的充要条件是

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

证明. 由 $f(x, y) = C$ 决定了隐函数 $y = y(x)$, 且 $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$, 则

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{(-f_{xx} - f_{xy}\frac{dy}{dx})f_y + (f_{yx} + f_{yy}\frac{dy}{dx})f_x}{f_y^2} \\ &= -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}.\end{aligned}$$

显然 $y = y(x)$, 即 $f(x, y) = C$ 为直线的充要条件是 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, 由我们刚才推导的式子即得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

■

12.7 第十二章总复习题

1. 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos\left(\sqrt{\frac{1}{x^2 + y^2}}\right), & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ 在原点处的极限, 偏导数及可微性.

2. 讨论函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x = y = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

在原点处的连续性, 偏导数及可微性.

3. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{5xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ 讨论 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点处的连续性, 偏导数.

4. 设 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ 证明 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 存在但不连续, 在 $(0, 0)$ 点的任何邻域中无界, 但在 $(0, 0)$ 点可微.

5. 设 $f(x, y)$ 为 n 次齐次函数, 且 m 次可微, 证明

$$\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}\right)^m f = n(n-1) \cdots (n-m+1) f.$$

6. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x+y)^p \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ 其中 p 为正整数, 问

(1) 对于 p 的那些值, $f(x, y)$ 在原点连续;

(2) 对于 p 的那些值, $f_x(0, 0)$ 与 $f_y(0, 0)$ 都存在;

(3) 对于 p 的那些值, $f(x, y)$ 在原点有一阶连续偏导数, 并给出证明.

7. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{x(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

证明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微, 并求 $df(0, 0)$.

8. 设 f_x, f_y, f_{yx} 在 (x_0, y_0) 的某邻域内存在, f_{yx} 在点 (x_0, y_0) 处连续, 证明 $f_{xy}(x_0, y_0)$ 存在, 且 $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.
9. 设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 且 f_x, f_y 在 (x_0, y_0) 的某邻域内存在, 则

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

10. 设 $f(x, y) = \phi(xy)$, 其中 $\phi(0) = 0$, 在 $u = 0$ 的附近满足 $|\phi(u)| \leq u^2$, 试证 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.
11. 设 u 是可微函数.

- (1) 如果 $u = f(x, y)$ 满足方程 $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 试证 $f(x, y)$ 在极坐标系里只与 θ 有关.
- (2) 如果 $u = f(x, y)$ 满足 $\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 试证 $f(x, y)$ 在极坐标系里只是 r 的函数.

12. 设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是开区域, $u(x, y)$ 在 D 内满足:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, u^2 + v^2 = C$$

(C 为常数). 求证 $u(x, y), v(x, y)$ 在 D 内恒为常数.

13. 设 $e^{\frac{x}{z}} + e^{\frac{y}{z}} = 2e^2$, 求 $x \left(\frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) \Big|_{x=2, y=2}$.

14. 利用变量置换 $u = x, v = \frac{y}{x}$ 把方程 $\frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ 化为新方程.

15. 设 $z = \phi(x + y) + \psi(x - y)$, 其中 ϕ, ψ 具有二阶连续导数, 则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

16. 设 $u = f(x, y, z), \phi(x^2, e^y, z) = 0, y = \sin x$, 其中 f, ϕ 都具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial \phi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$.

17. 设 $y = y(x), z = z(x)$ 是由方程 $z = xf(x + y)$ 及 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\frac{dz}{dx}$.

18. 设 $z = f(2x - y) + g(x, xy)$, 其中函数 $f(t)$ 二阶可导, $g(u, v)$ 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

19. 设变换 $u = x - 2y, v = x + ay$, 可把方程 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a .

20. 设 $u = f(z)$, 其中 z 为方程式 $z = x + y\phi(z)$ 所定义的为变量 x 和 y 的隐函数, 证明 Lagrange 公式

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left((\phi(z))^n \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

21. z 为 x, y 的可微函数, 试将方程 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$ 变成 $w = w(u, v)$ 的方程, 设 $x = u, y = \frac{u}{1+uv}, z = \frac{u}{1+uw}$.

22. 设 $u = x\phi(x + y) + y\psi(x + y)$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

23. 求 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$.

24. 设 ϕ 与 ψ 是任意的二阶可导函数, 证明 $z = x\phi(\frac{y}{x}) + \psi(\frac{y}{x})$ 满足

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

25. 设 $u = \phi(x + at) + \psi(x - at)$, 其中 ϕ, ψ 是任意的二次可微函数, 求证 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
26. 设 $u = f(x, y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ 以及条件 $f(x, 2x) = x, f_x(x, 2x) = x^2$, 求 $f_{xy}(x, 2x), f_{yy}(x, 2x)$.
27. 设 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, 则有 $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf$, 具有这样性质的函数, 称为 n 次齐函数, 利用这一结果, 对 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 求 $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$.
28. 设线性变换 $\xi = x + \lambda_1 y, \eta = x + \lambda_2 y$, 现在要把方程 $A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (A, B, C 为常数, 且 $AC - B^2 < 0$) 变换为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ 证明 λ_1, λ_2 为方程 $\lambda^2 + 2B\lambda + A = 0$ 的两个相异实根.
29. 求函数 $z = f(x + y, z + y)$ 的二阶偏导数.
30. 设 $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z^2 x$, 证明 $f_x + f_y + f_z = (x + y + z)^2$.
31. 设 $F(x, x + y, x + y + z) = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
32. 试求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数.

- (1) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{2x}$, 求 y' 和 y'' ;
- (2) $\frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} = 1$, 求 z_x, z_y ;
- (3) $x^2 + u^2 = f(x, y, u) + g(x, u)$, 求 u_x, u_y ;
- (4) $u = f(x + u, yu)$, 求 u_x, u_y ;
- (5) $x^y = y^x$, 求 y', y'' ;
- (6) $y - \varepsilon \sin y = x, (0 < \varepsilon < 1)$, 求 y', y'' ;
- (7) $y = 2x \arctan \frac{y}{x}$, 求 y', y'' ;
- (8) $f(xy, yz) = 0$, 求 z_{xx} .

33. 试求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数.

- (1) $xyz = x + y + z$, 求 $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$;
- (2) $\sin(x + y) + \sin(y + z) = 1$, 求 $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$;
- (3) $x + z + (y + z)^2 = 6$, 求 $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$;
- (4) $F(x - y, y - z, z - x) = 0$, 求 z_x, z_y ;
- (5) $f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$, 求 z_{xy} ;
- (6) $z = f(xz, z - y)$, 求 dz ;
- (7) $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$, 求 $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$.

34. 试问在哪些点的邻域内, 由方程

$$y^2 - x^2(1 - x^2) = 1$$

能唯一地确定连续可微的隐函数 $y = f(x)$?

35. 试问由方程

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \cos z = 0$$

在 $(0, 1, 0)$ 点的某邻域内能唯一确定 y 为 x, z 的隐函数吗? 能唯一确定 z 为 x, y 的隐函数吗?

36. (1) 证明: 方程

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2) \quad (a \neq 0)$$

在点 $x = 0, y = 0$ 的邻域中定义两个可微分的函数: $y = y_1(x), y = y_2(x)$, 求 $y_1'(0), y_2'(0)$.

(2) 求证由方程 $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3$ 在点 $(0, 0)$ 的邻域内可确定三个连续可微函数 $y = y(x)$, 使得 $y(0) = 0$.

37. 设

$$u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

证明: (1) $\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$; (2) $\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{n(n-1)}{2} u$.

38. 设函数 $f(x, y)$ 具有连续的 n 阶导数, 试证明函数 $g(t) = f(a + ht, b + kt)$ 的 n 阶导数

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + ht, b + kt).$$

39. 设 $f(x, y)$ 为 n 次齐次函数, 证明

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f = n(n-1) \cdots (n-m+1) f.$$

40. 证明

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \cos \theta \sin \varphi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

函数独立.

41. 证明

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\ y_3 = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 \end{cases}$$

函数相关, 并写出其函数关系式.

42. 求下列变换的雅可比行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$:

$$(1) \begin{cases} u = xy, \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ v = 2xy. \end{cases}$$

43. 设

$$\begin{cases} x = (a + b \cos \varphi) \cos \theta \\ y = (a + b \cos \varphi) \sin \theta \\ z = b \sin \varphi \end{cases}$$

其中 $a > b$ 为正常数, φ, θ 为自变量. 求证上述三个函数相关, 并写出其函数表达式.

44. 设 $\varphi_i(x)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 x 的连续可导函数, 且

$$G_i(x_i, \cdots, x_n) = F_i(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \cdots, \varphi_n(x_n))$$

证明

$$\frac{\partial(G_1, G_2, \cdots, G_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \Delta(\varphi_1(x_1), \cdots, \varphi_n(x_n)) \prod_{i=1}^n \varphi'_i(x_i)$$

其中

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{D(F_1, F_2, \cdots, F_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

$$\prod_{i=1}^n \varphi'_i(x_i) = \varphi'_1(x_1) \varphi'_2(x_2) \cdots \varphi'_n(x_n)$$

第十三章 偏导数的应用

13.1 偏导数在几何上的应用

13.1.1 空间曲线的切线方程和法平面方程

设空间曲线由参数方程

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

给出. 假设这些函数都有连续的导数. 我们要求曲线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程.

经过点 M_0 与点 $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ 的割线方程为

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}$$

那么

$$\frac{\frac{x - x_0}{\Delta x}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\frac{y - y_0}{\Delta y}}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{\frac{z - z_0}{\Delta z}}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

再令 $\Delta t \rightarrow 0$, 取极限, 就得到曲线在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程.

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

其中向量 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 为曲线在 M_0 处的切向量.

显然曲线在 M_0 处的法平面方程为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

特别的, 如果曲线的方程由下式表示,

$$y = y(x), \quad z = z(x).$$

那么在前面的一般参数方程中取 $t = x$, 就可以得到这种参数方程表示下的切线方程:

$$x - x_0 = \frac{y - y_0}{y'(x_0)} = \frac{z - z_0}{z'(x_0)},$$

相应的法平面方程为

$$x - x_0 + y'(x_0)(y - y_0) + z'(x_0)(z - z_0) = 0.$$

如果曲线的表示为两个曲面

$$F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$$

的交线, 我们可把其中一变量看成参数, 由曲线方程组可确定其余两变量是该参数的函数, 从而转化为参数方程. 事实上, 如果记

$$A = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{M_0}, B = \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big|_{M_0}, C = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_{M_0},$$

那么切线方程:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

法平面方程:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

例 13.1.1 求螺旋线 $x = \cos t, y = \sin t, z = 2t$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程与法平面方程.

解. 当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}, z = \frac{\pi}{2}$.

又

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\sin t|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \cos t|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = 2.$$

所以切线方程为

$$\frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z - \frac{\pi}{2}}{2}.$$

即

$$-\sqrt{2}x + 1 = \sqrt{2}y - 1 = \frac{1}{2}z - \frac{\pi}{4}.$$

法平面方程为

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(y - \frac{1}{\sqrt{2}}) + 2(z - \frac{\pi}{2}) = 0.$$

即

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + 2z - \pi = 0.$$

■

例 13.1.2 求两柱面 $x^2 + y^2 = R^2, x^2 + z^2 = R^2$ 的交线在点 $(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}})$ 处的切线方程.

解. 将 y, z 看成 x 的函数, 两柱面方程分别对 x 求导, 得

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0, \quad 2x + 2z \frac{dz}{dx} = 0,$$

由此在 $(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}})$ 处

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}})} = -1, \quad \left. \frac{dz}{dx} \right|_{(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}})} = -\frac{x}{z} = -1.$$

所以切线方程为

$$\frac{x - \frac{R}{\sqrt{2}}}{-1} = \frac{y - \frac{R}{\sqrt{2}}}{-1} = \frac{z - \frac{R}{\sqrt{2}}}{1}.$$

法平面方程为

$$-(x - \frac{R}{\sqrt{2}}) - (y - \frac{R}{\sqrt{2}}) + z - \frac{R}{\sqrt{2}} = 0,$$

即

$$x + y - z - \frac{R}{\sqrt{2}} = 0.$$

■

13.1.2 曲面的切平面和法线方程

设曲面的方程为

$$F(x, y, z) = 0,$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是曲面上一个点. 在曲面上任取一条通过 M_0 的曲线, 设其方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

设

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad z_0 = z(t_0).$$

显然

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

对 t 求导数, 在 M_0 点有

$$F_x(x_0, y_0, z_0)x'(t) + F_y(x_0, y_0, z_0)y'(t) + F_z(x_0, y_0, z_0)z'(t) = 0.$$

已知向量 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 是曲线在点 M_0 处的一个切向量, 于是向量

$$\vec{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$$

与曲线在该点处的切向量正交. 由于上述曲线可以为通过 M_0 曲面上的任一条曲线, 所以 \vec{n} 与所有这样的曲线切线都垂直. 因此这些切线应该形成一个平面, 这个平面通过 M_0 点并与 \vec{n} 垂直, 这个平面叫做曲面在点 M_0 处的切平面. 而 \vec{n} 就是切平面的法向量. 所以切平面的方程为

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

过 M_0 点并与切平面垂直的直线称为曲面在点 M_0 处的法线. 显然它的方程是

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

设 α, β, γ 分别为曲面在点 M_0 的法线与 x, y, z 轴正向之间的夹角, 那么在 M_0 点处法线的方向余弦为(同取正号或负号):

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\pm F_x(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{[F_x(x_0, y_0, z_0)]^2 + [F_y(x_0, y_0, z_0)]^2 + [F_z(x_0, y_0, z_0)]^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{\pm F_y(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{[F_x(x_0, y_0, z_0)]^2 + [F_y(x_0, y_0, z_0)]^2 + [F_z(x_0, y_0, z_0)]^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{\pm F_z(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{[F_x(x_0, y_0, z_0)]^2 + [F_y(x_0, y_0, z_0)]^2 + [F_z(x_0, y_0, z_0)]^2}}. \end{aligned}$$

若曲面的方程是

$$z = f(x, y),$$

那么可视为

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

故

$$F_x(x, y, z) = f_x(x, y), \quad F_y(x, y, z) = f_y(x, y), \quad F_z(x, y, z) = -1.$$

切平面的方程为

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

若曲面方程为参数形式 $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, 也可化为上面形式讨论. 我们在这里直接给出结果: 如果记

$$A = \frac{\partial(g, h)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}, B = \frac{\partial(h, f)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}, C = \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)},$$

那么切平面的方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

例 13.1.3 求抛物面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处的切平面方程和法线方程.

解. 我们有

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2.$$

那么

$$f_x(1, 1) = 2, \quad f_y(1, 1) = 2.$$

从而, 所求切平面方程为

$$2(x - 1) + 2(y - 1) - (z - 2) = 0.$$

即为

$$2x + 2y - z - 2 = 0.$$

所求法线方程为

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 2}{-1}.$$

■

例 13.1.4 证明对任意常数 ρ, ϕ , 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ 与锥面 $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \phi$ 是正交的.

证明. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ 的法线方向数为 (x, y, z) ; 锥面 $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \phi$ 的法线方向数为 $(x, y, \tan^2 \phi \cdot z)$. 在任意一交点 (x_0, y_0, z_0) 处, 两法向量的内积为

$$(x_0, y_0, z_0) \cdot (x_0, y_0, \tan^2 \phi \cdot z_0) = x_0^2 + y_0^2 - \tan^2 \phi \cdot z_0^2$$

而 (x_0, y_0, z_0) 在锥面上, 上式右端等于零, 两曲面的法线相互垂直, 所以球面与锥面是正交的. ■

例 13.1.5 证明曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) 上任何一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a .

证明. 曲面

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

上任何一点 (x_0, y_0, z_0) 处切平面的法向量为 $(\frac{1}{\sqrt{x_0}}, \frac{1}{\sqrt{y_0}}, \frac{1}{\sqrt{z_0}})$, 切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0,$$

即

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0},$$

而 $\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}$, 所以切平面方程为

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}} + \frac{y}{\sqrt{ay_0}} + \frac{z}{\sqrt{az_0}} = 1,$$

在各坐标轴上的截距之和为

$$\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a} \cdot (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a.$$

■

13.1.3 习题13.1

1. 求曲线 $x = \cos t, y = \sin t, z = \tan \frac{t}{2}$, 在点 $(0, 1, 1)$ 的切线方程与法平面方程.
2. 求曲线 $x = \frac{t}{1+t}, y = \frac{1+t}{t}, z = t^2$ 在对于应于 $t_0 = 1$ 的点处的切线方程和法平面方程.
3. 求曲线 $y^2 = mx, z^2 = m - x$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线方程和法平面方程.
4. 求曲线 $y = f(x), z = g(x, y)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线方程, 其中 $f(x)$ 和 $g(x, y)$ 均为可微函数.
5. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线和法平面方程.
6. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0, \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0. \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线与法平面方程.
7. 求曲线 $\begin{cases} xyz = 1, \\ y^2 = x. \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线的方向余弦.
8. 已知曲线 $\begin{cases} xyz = 2, \\ x - y - z = 0. \end{cases}$ 上点 $(2, 1, 1)$ 处的一个切矢量与 Oz 轴正向成锐角, 求此切矢量与 Oz 轴正向所夹的角.
9. 求曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上的点, 使该点的切线平行于平面

$$x + 2y + z = 4.$$

10. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $(2, 1, 4)$ 处的切平面方程和法线方程.
11. 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程和法线方程.
12. 求曲面 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程和法线方程.
13. 设函数 $F(u, v)$ 具有连续的一阶偏导数, 且 $F_u(3, 1) = 1, F_v(3, 1) = -1$, 求曲面 $F(x + y, x - z) = 0$ 在点 M_0 处的法线方程.
14. 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使得该点处的法线垂直于平面

$$x + 3y + z + 9 = 0,$$

并写出这法线方程.

15. 求旋转椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 在点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 XOY 坐标平面的夹角余弦.
16. 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上的点, 使得该点处的法线的三个方向角相等.
17. 设平面 $3x + \lambda y - 3z + 16 = 0$ 与椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 相切, 试求 λ 的值.
18. 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上的点, 使该点处的切平面平行于平面 $x + 4y + 6z = 0$, 并写出切平面方程.
19. 求曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在第一象限的切平面, 使其在各坐标轴上截取长度相等的线段.
20. 设可微函数 $f(x, y)$ 对任意实数 $t (t > 0)$ 满足条件 $f(tx, ty) = tf(x, y)$. $P_0(1, -2, 2)$ 是曲面 $z = f(x, y)$ 上的一点, 且 $f_x(1, -2) = 4$, 求此曲面在点 P_0 处的切平面方程.
21. 证明二次曲面 $ax^2 + by^2 + cz^2 = k$ 上点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为 $ax_0x + by_0y + cz_0z = k$.
22. 证明: 曲面 $xyz = a^3 (a > 0)$ 上任一点处的切平面与三个坐标面形成的四面体的体积为 $\frac{9}{2}a^3$.

23. 已知平面 $lx + my + nz = p$ 与椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 相切, 证明

$$a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 = p^2.$$

24. 证明锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 与椭球面

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2 + c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}$$

在点 $(0, \pm b, c)$ 处相切.

25. 证明锥面 $z = xf(\frac{y}{x})$ 上任意一点处的切平面均通过其顶点 $(0, 0, 0)$.

26. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 与椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 在点 $(-1, -2, 3)$ 处的交角(两曲面在交点处的交角定义为它们在该点处的切平面的交角).

13.2 方向导数、梯度与泰勒公式

13.2.1 方向导数

定义 13.2.1 设 $f(x, y, z)$ 在以 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为起点方向为 \vec{l} 的线段 L 上有定义, $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ 是 L 上异于 P_0 的任一点, 若 P 沿 L 趋于 P_0 时,

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{d(P_0, P)}$$

存在, 则称此极限值为 $f(x, y, z)$ 在点 P_0 沿 \vec{l} 的方向导数, 记为 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(P_0)$ 或 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(x_0, y_0, z_0)$.

定理 13.2.2 若 $f(x, y, z)$ 在一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 可微, 则 $f(x, y, z)$ 在 P_0 点沿任何方向 \vec{l} 的方向导数都存在, 且有

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(P_0) = f_x(x_0, y_0, z_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0, z_0) \cos \beta + f_z(x_0, y_0, z_0) \cos \gamma$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 \vec{l} 的方向余弦.

证明. 若 $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ 是射线上的点, 则

$$\cos \alpha = \frac{\Delta x}{d(P_0, P)}, \quad \cos \beta = \frac{\Delta y}{d(P_0, P)}, \quad \cos \gamma = \frac{\Delta z}{d(P_0, P)},$$

由假设 $f(P)$ 在 P_0 可微, 故有

$$\begin{aligned} f(P) - f(P_0) &= f_x(x_0, y_0, z_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0) \Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0) \Delta z \\ &\quad + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\right), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{f(P) - f(P_0)}{d(p_0, p)} &= f_x \cdot \frac{\Delta x}{d(p_0, p)} + f_y \cdot \frac{\Delta y}{d(p_0, p)} + f_z \cdot \frac{\Delta z}{d(p_0, p)} \\ &\quad + \frac{o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\right)}{d(p_0, p)}. \end{aligned}$$

而 $d(p_0, p) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. 所以当 P 沿射线趋于 P_0 时, 由上式取极限, 即得

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{d(p_0, p)} = f_x(x_0, y_0, z_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0, z_0) \cos \beta + f_z(x_0, y_0, z_0) \cos \gamma.$$

定理证毕. ■

例 13.2.3 求 $u = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$ 在 $M(1, 1, 1)$ 沿方向 $\vec{l} = (1, -1, 1)$ 的方向导数.

解. $u_x = 2x + yz, u_y = 2y + xz, u_z = 2z + xy$. 在 $M(1, 1, 1)$ 处 $u_x = u_y = u_z = 3$. 方向 $\vec{l} = (1, -1, 1)$ 的方向余弦为 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. 所求方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} + 3 \times \frac{-1}{\sqrt{3}} + 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

■

例 13.2.4 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{xy}{x-y}, & x-y \neq 0 \\ 0, & x-y = 0 \end{cases}.$$

求 f 在点 $(0, 0)$ 沿方向 $\vec{l} = (\cos \theta, \sin \theta)$ (这里 $\sin \theta - \cos \theta \neq 0$) 的方向导数.

解. 由定义所求方向导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(0 + t \cos \theta, 0 + t \sin \theta) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin \left(\frac{t^2 \cos \theta \sin \theta}{t \cos \theta - t \sin \theta} \right)}{t} \\ &= \frac{\cos \theta \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}. \end{aligned}$$

■

13.2.2 梯度

我们在研究一个物理量 $u(x, y, z)$ 在某一区域的分布时,常常需要考察这区域中有相同物理量的点,也就是满足 $u(x, y, z) = C$ (其中 C 是常数) 的点. 这个方程在几何上表示一个曲面,我们称它为等量面. 当 C 取不同数值时,所得到的等量面也不同,如气象学中的等温面和等压面,电学中的等位面等等. 同样,对于含两个自变量的物理量则有等量线 $u(x, y) = C$.

设函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 可微, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为 \vec{l} 方向的方向余弦, 则函数 $u = f(x, y, z)$ 在该点沿方向 \vec{l} 的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = f_x \cos \alpha + f_y \cos \beta + f_z \cos \gamma = (f_x, f_y, f_z) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

如果记矢量 $\vec{g} = (f_x, f_y, f_z)$, 以 \vec{l}^0 表示与 \vec{l} 同方向的单位矢量, 即

$$\vec{l}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

则计算方向导数的公式可改写为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \vec{g} \cdot \vec{l}^0 = |\vec{g}| \cos \theta,$$

其中 θ 为 \vec{g} 与 \vec{l} 的夹角.

由上式可看出, 当 $\theta = 0$ 时, 即 \vec{l} 的方向与 \vec{g} 的方向一致时, 方向导数取得最大值, 其最大值

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = |\vec{g}| = \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + (f_z)^2}.$$

定义 13.2.5 设函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 处可微, 如果存在一矢量, 其方向是函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 处方向导数取得最大值的方向, 其模是方向导数所取得的最大值, 则称该矢量为函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 处的梯度, 记为 $\text{grad } u$ 或 $\text{grad } f(x, y, z)$.

按定义, 前面所述的矢量 \vec{g} 就是函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 处的梯度, 即

$$\text{grad } f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z).$$

$f(x, y, z) = c$ 上任一点 P 的法线方向

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

称为 $u = f(x, y, z)$ 在点 P 的梯度, 记为

$$\text{grad } u = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}.$$

其模

$$|\text{grad } f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 处沿任一方向的方向导数与函数在该点处的梯度 \vec{g} 有以下关系:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \vec{g} \cdot \vec{l}^0 = |\vec{g}| \cos \theta = |\text{grad } f| \cos \theta,$$

其中 θ 为 $\text{grad } f$ 与 \vec{l} 的夹角. 上式表明函数在点 P 沿方向 \vec{l} 的方向导数是梯度在 \vec{l} 方向上的投影.

根据梯度的定义, 不难验证梯度具有以下性质:

- (1) $\text{grad}(u_1 \pm u_2) = \text{grad}(u_1) \pm \text{grad}(u_2);$
- (2) $\text{grad}(u_1 u_2) = u_2 \text{grad}(u_1) + u_1 \text{grad}(u_2);$
- (3) $\text{grad}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = \frac{u_2 \text{grad}(u_1) - u_1 \text{grad}(u_2)}{u_2^2};$
- (4) $\text{grad } F(u) = F'(u) \text{grad } u,$

其中, $F(u)$ 是可微函数.

例 13.2.6 求函数 $u = xy^2 + yz^3$ 在点 $P(2, -1, 1)$ 处的梯度及沿方向 $\vec{l} = (2, 2, -1)$ 的方向导数.

解. $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + z^3, \frac{\partial u}{\partial z} = 3yz^2$, 因为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(2, -1, 1)} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(2, -1, 1)} = -3, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(2, -1, 1)} = -3.$$

所以 $\text{grad } u|_{(2, -1, 1)} = (1, -3, -3)$. 由于

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \text{grad } u \cdot \vec{l}^0 = \frac{\text{grad } u \cdot \vec{l}}{|\vec{l}|},$$

于是

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_{(2, -1, 1)} = \frac{(1, -3, -3) \cdot (2, 2, -1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = -\frac{1}{3}.$$

■

例 13.2.7 已知一点电荷 q 位于坐标原点 $O(0, 0, 0)$, 它所产生的电场中任一点 $P(x, y, z)$ (x, y, z 不同时为零) 的电位为 $u = \frac{kq}{r}$. 其中 k 为常数, r 为原点到点 P 的距离, 求电位 u 的梯度.

解. 根据梯度的计算公式, 有

$$\text{grad } u = \text{grad} \left(\frac{kq}{r} \right) = kq \text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{kq}{r^2} \text{grad } r,$$

由于 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 故

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{(x, y, z)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^{3/2}} = \frac{\vec{r}}{r^3},$$

这里 $\vec{r} = (x, y, z)$, 于是 $\operatorname{grad} u = -\frac{kq}{r^3} \cdot \vec{r}$. 由于此点电荷所产生的静电场在点 $P(x, y, z)$ 的电场强度为 $\vec{E} = \frac{kq}{r^3} \vec{r}$, 所以 $\operatorname{grad} u = -\vec{E}$. 这就说明, 电位在电场强度相反的方向增加最快.

■

13.2.3 二元函数的泰勒公式

与一元函数类似, 也有多元函数的泰勒公式. 这里以二元函数为例, 叙述如下.

定理 13.2.8 若二元函数 $u = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 对 x 及 y 具有直到 $n+1$ 阶连续偏导数, 则

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

这里记号 $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x, y) = \sum_{r=0}^p C_p^r h^{p-r} k^r \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-r} \partial y^r}$.

证明. 构造一元函数 $F(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$, 显然 $F(0) = f(x_0, y_0)$, $F(1) = f(x, y)$. 用一元函数的 n 阶泰勒公式得到

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}, \quad (0 < \theta < 1).$$

由于

$$\frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0 + th, y_0 + tk);$$

一般地,

$$\frac{d^p F}{dt^p} = \sum_{r=0}^p C_p^r h^{p-r} k^r \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-r} \partial y^r} = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x_0 + th, y_0 + tk).$$

于是

$$F^{(p)}(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x_0, y_0) \quad (p = 1, 2, \cdots, n),$$

特别的

$$F^{(n+1)}(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

代入上式, 就得到二元函数的泰勒公式:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

特别地, 取 $n = 0$, 泰勒公式为

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h + f_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)k \quad (0 < \theta < 1),$$

即得二元函数的中值公式. ■

13.2.4 习题13.2

1. 求函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 $P_0(1, 2)$ 处沿从点 $(1, 2)$ 到点 $(2, 2 + \sqrt{3})$ 方向的方向导数.
2. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^4 - 3xz$ 在点 $P_0(1, 1, 1)$ 沿 $\vec{l} = \{1, 2, 2\}$ 方向的方向导数.
3. 求函数 $u = 2xy - z^2$ 在点 $P_0(2, -1, 1)$ 沿从点 $(2, -1, 1)$ 到点 $(3, 1, -1)$ 方向的方向导数.
4. 求函数 $z = x^2 - xy + y^2$ 在点 $P_0(1, 1)$ 沿与 Ox 轴正向夹角为 α 的 l 方向的方向导数, 试问在怎样的方向上此方向导数有: (1) 最大的值; (2) 最小的值; (3) 等于零.
5. 求函数 $z = \ln(x + y)$ 在位于抛物线 $y^2 = 4x$ 上点处沿着这抛物线在此点切线方向的方向导数.
6. 求函数 $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处沿曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

的切线方向的方向导数.

7. 数量函数 $u = \ln \frac{1}{r}$, $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ 在空间中哪些点成立 $|\text{grad } u| = 1$?
8. 设 $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ 均为可微函数, 而 $\vec{g} = \left\{ \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right\}$, 求函数 u 沿 \vec{g} 方向的方向导数.
9. 设函数 $u = 2xy - z^2$, 求 u 在点 $P_0(2, -1, 1)$ 处的梯度.
10. 设函数 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$, 求 $\text{grad } f(0, 0, 0)$ 及 $\text{grad } f(1, 1, 1)$.
11. 求函数 $u = \frac{1}{r}$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处梯度的大小和方向.
12. 设函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, 求 $\text{grad } f(1, -1, 2)$.
13. 求函数 $u = x^2 + y^2 - z^2$ 在点 $A(\varepsilon, 0, 0)$ 及 $B(0, \varepsilon, 0)$ 两点的梯度之间的角度.
14. 求 $u = x + y + z$ 在 $o(0, 0, 0)$ 及 $A(1, 1, 1)$ 的梯度及其大小.
15. 设函数 $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, 且 u, v 都具有连续的偏导数, 证明:
 - (1) $\text{grad}(ku_1 + lu_2) = k \text{grad}(u_1) + l \text{grad}(u_2)$, (k, l 为常数);
 - (2) $\text{grad}(u_1 u_2) = u_2 \text{grad}(u_1) + u_1 \text{grad}(u_2)$;
 - (3) $\text{grad}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = \frac{u_2 \text{grad}(u_1) - u_1 \text{grad}(u_2)}{u_2^2}$;
 - (4) $\text{grad } F(u) = F'(u) \text{grad } u$, 其中, $F(u)$ 是可微函数.
16. 求函数 $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ 在点 $(1, -2)$ 处的泰勒公式.
17. 求函数 $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 的三阶泰勒展开式.
18. 求函数 $f(x, y) = e^{x+y}$ 的三阶泰勒展开式.

13.3 无条件极值

13.3.1 无条件极值

定义 13.3.1 设 n 元函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 附近有定义. 如果存在 $\eta > 0$, 使得

$$f(x) \geq f(a), \quad \forall |x - a| < \eta,$$

则称 f 在 a 处取得极小值, a 称为极小值点. 类似的可以定义极大值及极大值点.

极大、小值点统称为极值点. 这里出现的极值又称为普通极值.

这里所讨论的极值点都只限于所给定义域的内点. 由定义可见, 若 f 在点 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 取得极值, 则当固定 a_2, \dots, a_n 时, 一元函数 $f(x, a_2, \dots, a_n)$ 必定在 $x = a_1$ 取相同的极值. 同理, 对于其它情况所对应的一元函数也会取相同的极值. 于是得多元函数取极值的必要条件如下:

定理 13.3.2 (多元函数极值存在的必要条件) 若 $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 可微, 且 f 在 a 处取得极值, 则

$$df(a) = 0.$$

即 f 在 a 点的各偏导数均为0:

$$f_{x_1}(a) = f_{x_2}(a) = \dots = f_{x_n}(a) = 0.$$

证明. 我们只证明二元函数的情形, 其它情况的证明与此类似. 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有极大值. 由极大值的定义, 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内异于 (x_0, y_0) 的一切点 (x, y) 皆有

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0),$$

特殊地在该邻域内取 $y = y_0, x \neq x_0$, 仍有不等式

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0),$$

这就表明一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 点处取得极大值, 所以

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0)|_{x=x_0} = 0,$$

即

$$f_x(x_0, y_0) = 0.$$

同理可证 $f_y(x_0, y_0) = 0$. ■

定义 13.3.3 设 f 在点 a 可微, 如果 f 在这点的各偏导数都等于0, 那么我们就说点 a 是函数 f 的驻点.

注 13.3.4 若 f 存在偏导数, 则其极值点一定是驻点, 但是驻点并不都是极值点, 如 $h(x, y) = xy$, 原点 $(0, 0)$ 是它的驻点, 但是显然它在原点并不取得极值.

注 13.3.5 偏导数不存在的点也可能为极值点, 如 $z = f(x, y) = |x|$ 在 $(0, 0)$ 处偏导数不存在, 但是明显该点是它的极值点.

13.3.2 极值的求法

要求函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的极值, 首先要求 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的驻点及偏导数不存在的点, 然后再讨论在该点周围 $\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的符号.

与二元函数的Taylor公式一样, 我们有多元函数的二阶Taylor展开式: 设 f 在 a 处有连续的各二阶偏导数, 则

$$f(a+h) = f(a) + df(a)h + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} h_i h_j + o(|h|^2).$$

其中 $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$,

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), i, j = 1, 2, \dots, m.$$

另外, 我们需要线性代数中一个非常重要的概念:

定义 13.3.6 如果对于任意的 $(h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, 均有

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} h_i h_j > 0,$$

则称 $(A_{ij})_{n \times n}$ 是正定矩阵. 而如果对于任意的 $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} h_i h_j < 0,$$

则称矩阵 $(A_{ij})_{n \times n}$ 是负定矩阵.

我们还需要下面的引理:

引理 13.3.7 设矩阵 $(A_{ij})_{n \times n}$ 是正定的, 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \xi_i \xi_j \geq \delta \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right).$$

这里 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

证明. 在以 0 为心, 1 为半径的单位球面 $\partial B(0, 1)$ 上, 考虑函数

$$\begin{aligned} F &: \partial B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \\ \vec{\eta} &\mapsto \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \eta_i \eta_j. \end{aligned}$$

则 F 是定义在 $\partial B(0, 1)$ 上的一个连续函数. 且对于任意的 $\vec{\eta} \in \partial B(0, 1)$, 有 $F(\vec{\eta}) > 0$. 而 $\partial B(0, 1)$ 是紧集, 故在 $\partial B(0, 1)$ 上存在 $\vec{\eta}_0$, 使得任意的 $\vec{\eta} \in \partial B(0, 1)$, 有

$$F(\vec{\eta}) \geq F(\vec{\eta}_0) > 0.$$

如果 $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0$, 命题显然成立. 现假设 $\vec{\xi} \neq 0$. 记 $\vec{\eta} = \frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|}$, 则 $|\vec{\eta}| = 1$, 即 $\vec{\eta} \in \partial B(0, 1)$. 于是

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \eta_i \eta_j = \frac{1}{|\vec{\xi}|^2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \xi_i \xi_j \geq F(\vec{\eta}_0),$$

令 $\delta = F(\vec{\eta}_0)$, 即得本命题结论. ■

设 $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 附近至少是二阶连续可微的. 则

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{n \times n}$$

称为 f 在 a 的 Hasse 方阵.

定理 13.3.8 设 $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 附近至少是二阶连续可微的, a 是 f 的一个驻点. 如果函数 f 在点 a 的 Hasse 方阵 $H_f(a)$ 正定(负定), 那么函数 f 在点 a 取得严格极小(极大)值.

证明. 由于 a 是驻点, 所以

$$df(a) = 0,$$

由 Taylor 公式得到

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o(|h|^2).$$

如果 $H_f(a)$ 正定, 那么存在 $\delta > 0$, 使得

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j \geq \delta |h|^2,$$

于是

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \delta |h|^2 + o(|h|^2) = |h|^2 \left(\frac{1}{2} \delta + o(1) \right).$$

由此可知当 $|h|$ 足够小时, 有

$$f(a+h) - f(a) \geq 0,$$

即 f 在 a 处取得极小值.

同理可以证明若 $H_f(a)$ 是负定的, 则 $f(a)$ 为极大值. ■

对于二元函数极值的判定, 有下面比较的结果:

定理 13.3.9 设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的一切二阶偏导数存在且连续, (x_0, y_0) 为驻点, 记 $A = f_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f_{yy}(x_0, y_0)$, $H = AC - B^2$. 当 $H > 0$ 时, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 取得极值, 其中 $A < 0$ 时, (x_0, y_0) 为极大值点, $A > 0$ 时, (x_0, y_0) 为极小值点; 当 $H < 0$ 时, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 不取得极值; 当 $H = 0$ 时, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可能取极值, 也可能不取极值.

这个定理是由定理 13.3.8 直接得到的.

例 13.3.10 讨论函数 $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ ($p > 0, q > 0$) 的极值.

解. 由方程组

$$\begin{cases} z_x = \frac{x}{p} = 0, \\ z_y = \frac{y}{q} = 0, \end{cases}$$

得 z 的驻点 $P_0 = (0, 0)$. 由于 $A = z_{xx}(P_0) = \frac{1}{p}$, $B = z_{xy}(P_0) = 0$, $C = z_{yy}(P_0) = \frac{1}{q}$,

$$H = AC - B^2 = (z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2)(P_0) = \frac{1}{pq} > 0.$$

所以由定理 13.3.9 可知, z 在 P_0 取得极小值 $z(0, 0) = 0$, 又因 z 处处存在偏导数, 故 $(0, 0)$ 为 z 的唯一极值点. ■

例 13.3.11 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的驻点与极值.

解. 由方程组

$$f_x = 3x^2 + 6x - 9 = 0, f_y = -3y^2 + 6y = 0$$

得到

$$x = 1, -3; y = 0, 2,$$

所以驻点有 $(1, 0), (-3, 0), (1, 2), (-3, 2)$.

由于 $f_{xx} = 6x + 6$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = -6y + 6$, 所以对于点 $(1, 0)$, $A = f_{xx}(1, 0) = 6$, $B = f_{xy}(1, 0) = 0$, $C = f_{yy}(1, 0) = 6$, $H = (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(1, 0) = 36$, 所以由定理 13.3.3, f 在该点处取得极小值 $f(1, 0) = -5$.

对于点 $(-3, 0)$, $A = f_{xx}(-3, 0) = -18$, $B = f_{xy}(-3, 0) = 0$, $C = f_{yy}(-3, 0) = 6$, $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(-3, 0) = -108$, 所以由定理 13.3.3, f 在该点处不能取极值.

对于点 $(1, 2)$, $A = f_{xx}(1, 2) = -12$, $B = f_{xy}(1, 2) = 0$, $C = f_{yy}(1, 2) = -6$, $H = (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(1, 2) = -72$, 所以由定理 13.3.3, f 在该点处不能取极值.

对于点 $(-3, 2)$, $A = f_{xx}(-3, 2) = -12$, $B = f_{xy}(-3, 2) = 0$, $C = f_{yy}(-3, 2) = -6$, $H = (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(-3, 2) = 72$, 所以由定理 13.3.3, f 在该点处取极大值 $f(-3, 2) = 31$.

因此, 极大值 $f(-3, 2) = 31$, 极小值 $f(1, 0) = -5$. ■

例 13.3.12 求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ 的极值.

解. 求方程组

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 6y = 0; f_y(x, y) = 24y^2 - 6x = 0$$

的一切实数解, 求得驻点 $M_1(0, 0), M_2(1, \frac{1}{2})$.

求函数 $f(x, y)$ 的二阶偏导数:

$$f_{xx}(x, y) = 6x, f_{xy}(x, y) = -6, f_{yy}(x, y) = 48y,$$

在 $M_1(0, 0)$ 点处, $A = 0, B = -6, C = 0, B^2 - AC = 36 > 0$, 依极值存在充分条件知, $f(0, 0) = 5$ 不是函数的极值.

在 $M_2(1, \frac{1}{2})$ 处, $A = 6, B = -6, C = 24, B^2 - AC = -108 < 0$, 而 $A = 6 > 0$, 依极值存在的充分条件知, $f(1, \frac{1}{2}) = 4$ 为函数的极小值.

■

13.3.3 函数最值的求法

若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 中连续, 由于 \mathbb{R}^2 里的有界闭集都是紧集, 那么由连续函数的性质, $f(x, y)$ 在 D 内一定有最大值与最小值. 我们可以利用多元函数的极值来求多元函数的最大值与最小值. 先求出函数在 D 内的所有驻点与驻点的函数值, 再与边界值比较, 则其中最大者为函数 $f(x, y)$ 的最大值, 最小者为函数 $f(x, y)$ 的最小值.

例 13.3.13 试在 x 轴, y 轴与直线 $x + y = 2\pi$ 围成的三角形区域上求函数 $u = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ 的最大值.

解. 我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x - \cos(x + y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos y - \cos(x + y).$$

在区域内部, 仅在点 $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 上两个偏导数同时为 0. 而在此点出函数值 $u = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 因为在区域边界, 即直线 $x = 0, y = 0$ 及 $x + y = 2\pi$ 上此函数取零值, 因此显然函数在点 $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 上达到最大值, 最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ■

例 13.3.14 设 $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 + 3y^2$, 求 $f(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大值与最小值.

解. 我们有

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2 - 3y^2 + 6x, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -6xy + 6y, \end{cases}$$

而在区域内部, 仅在点 $y = 0, x = 0$ 处两个偏导数同时为 0, 而在此处的函数值 $f = 0$. 而在区域边界, 即圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上, $f(x, y) = 4x^3 - 3x + 3$, 当 $x = -\frac{1}{2}, 1$ 时, $4x^3 - 3x + 3$ 有最大值 4, 当 $x = -1, \frac{1}{2}$ 时有最小值 2, 故 $\max f(x, y) = 4, \min f(x, y) = 0$. ■

如果集合 D 不是有界闭集, 那么求 D 上的连续函数 f 的最值, 除了求出 D 内所有的极值可疑点外, 还应求出函数 f 的边界极值, 特别是当 D 是无界时, 要求出 $\lim_{|M| \rightarrow +\infty} f(M)$ 的值.

13.3.4 最小二乘法

最小二乘法是根据试验数据合理地给出变量之间依赖关系的一种方法.

设在实验测得一组数据

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n),$$

又已知 x 和 y 之间服从直线关系, 即 $y = ax + b$, 选择 a, b 使

$$S = \sum_{i=1}^n s_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

最小.

由于

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i - b) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0,$$

把这组关于 a, b 的线性方程加以整理, 得

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i,$$

求此方程组的解, 即得 $f(a, b)$ 的驻点

$$\bar{a} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \{\sum_{i=1}^n x_i\}^2},$$

$$\bar{b} = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i y_i)(\sum_{i=1}^n x_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \{\sum_{i=1}^n x_i\}^2}.$$

为进一步确定该点是极小值点, 我们计算得

$$A = S_{aa} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0,$$

$$B = S_{ab} = 2 \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$C = S_{bb} = 2n;$$

$$H = AC - B^2 = 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - 4(\sum_{i=1}^n x_i)^2 > 0.$$

从而根据定理13.3.8, $f(a, b)$ 在点 (\bar{a}, \bar{b}) 取得极小值.

事实上, 这唯一的极小值也是 f 的最小值. 此种方法称为最小二乘法. $y = ax + b$ 视为变量 y 与 x 之间的近似函数关系, 称为这组数据在最小二乘意义下的拟合曲线(实践中常称为经验公式).

最小二乘法广泛用于实际生活中, 物理学, 化学, 生物学, 医学, 经济学, 商业统计等方面都要用它来计算经验公式. 在数学上, 数理统计中的回归分析方法就要用到这个工具. 熟悉计算机的读者还会发现, 许多计算机软件也是用这种方法来作出拟合曲线的.

13.3.5 习题13.3

1. 求下列函数的极值:

(1) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y;$

(2) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y;$

(3) $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y) (0 \leq \frac{x}{y} \leq \frac{\pi}{2});$

(4) $z = xy \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}}.$

2. 证明 $z = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ 有无穷多个极大值, 但无极小值.

3. 在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中求出面积最大的三角形.

4. 若函数 $f(x, y) = 2x^2 + ax + xy^2 + 2y$ 在点 $(1, -1)$ 处取得极值, 试确定常数 a .

5. 求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 确定的函数 $z = f(x, y)$ 的极值.

6. 设函数 $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$, 证明: 限制在每一条过原点的直线上, 原点是 f 的极小值点, 但是函数 f 在原点处无极值.

7. 证明: 当 $0 < x < 1, 0 < y < +\infty$ 时, $yx^y(1 - x) < e^{-1}$.

8. 求下列函数在指定区域 D 上的最大值和最小值.

(1) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x, D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4\};$

(2) $f(x, y) = 12y - 6xy - 4y^2 - 9x^2, D = \{(x, y); \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\};$

(3) $f(x, y, z) = x^2y^2z^2, D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\};$

(4) $f(x, y) = ax + by + \sqrt{1 - x^2 - y^2}, D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}.$

9. 设 $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$. 求证: 如果 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 达到极大(小)值, 则它必在 (x_0, y_0) 达到最大(小)值.

10. 已给一组数据 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$. 问实数 a, b, c 满足什么条件使得误差

$$\sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

达到最小.

11. 在曲面 $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ 上求到原点, 距离最近的点和最远的点.

12. 求点 $(0, 0, c)$ 到锥面 $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 的最短距离, 其中 $c > 0, 0 < b < a$.

13. 在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中, 求出面积为最大的三角形.

14. 在 xy 平面上求一点, 使它到三直线 $x = 0, y = 0, x + 2y - 16 = 0$ 的距离平方和最小.

15. 假设观察数据 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$, 近似地适合方程 $y = \frac{a}{b+x}$, 如何估计 a 和 b ?

16. 已知平面上 n 个点的坐标分别为

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n),$$

试求一点, 使它与这 n 个点距离的平方和最小.

17. 在半径为 R 的圆上, 求内接三角形得面积最大者.

18. 证明当 $x \geq 1, y \geq 0$ 时, 不等式

$$xy \leq x \ln x - x + e^y$$

成立.

19. 设 $F(x, y, z)$ 有二阶连续导数, 并由 $F(x, y, z) = 0$ 可确定 $z = f(x, y)$. 讨论 $z = f(x, y)$ 的极值的必要和充分条件. 再求由

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$

所确定的 $z = f(x, y)$ 的极值.

13.4 条件极值

13.4.1 问题的引入

之前讨论的多元函数的极值问题是限定在函数的定义域内的, 自变量是各自独立变化的. 然而, 在实际讨论极值问题时, 往往遇到自变量受某些条件的限制. 比如, 在具有给定周长的所有长方形中, 求面积为最大的长方形. 如果设长方形的边长分别为 a, b , 则面积 $S = ab$, 假定周长为 $2C$, 那么自变量除了必须大于0之外, 还必须满足附加条件 $a + b = C$. 再比如, 要在曲面上 $F(x, y, z) = 0$ 找一点 $P(x, y, z)$ 使与已知点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的距离为最小. 上述这类极值问题叫做条件极值问题. 更一般的, 我们有如下定义:

定义 13.4.1 (条件极值) 某些实际问题中, 考察这样的目标函数:

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_{m+p}),$$

它的变元满足一定的条件:

$$\begin{cases} g_1(\vec{x}) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_{m+p}) = 0, \\ g_2(\vec{x}) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_{m+p}) = 0, \\ \vdots \\ g_p(\vec{x}) = g_p(x_1, x_2, \dots, x_{m+p}) = 0, \end{cases}$$

目标函数在上述条件下的极值问题称为条件极值 (或约束极值).

13.4.2 条件极值的必要条件

在某些情形下, 可以把条件极值问题转化为无条件极值. 比如:

求 $f(x, y, u, v)$ 在条件 $\begin{cases} g(x, y, u, v) = 0 \\ h(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ 下的极值.

若 $\frac{\partial(g, h)}{\partial(u, v)} \neq 0$, 从条件 $\begin{cases} g(x, y, u, v) = 0 \\ h(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ 可确定 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 将其代入 $f(x, y, u, v)$,

有 $f(x, y, u(x, y), v(x, y)) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, y)$ 变为求二元函数的极值问题.

但一般情形下求出 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 较困难, 需用新的方法.

若 $f(x, y, u, v)$ 取得极值, 则有

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = 0,$$

此外由条件有

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv = 0,$$

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial u} du + \frac{\partial h}{\partial v} dv = 0.$$

用 $1, \lambda, \mu$ 别乘上述三式并相加得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} + \mu \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \mu \frac{\partial h}{\partial y} \right) dy \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u} + \mu \frac{\partial h}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \lambda \frac{\partial g}{\partial v} + \mu \frac{\partial h}{\partial v} \right) dv = 0 \end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial(g, h)}{\partial(u, v)} \neq 0$, 从而存在 λ, μ 使

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u} + \mu \frac{\partial h}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + \lambda \frac{\partial g}{\partial v} + \mu \frac{\partial h}{\partial v} = 0.$$

此时有 (因为 dx, dy 相互独立)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} + \mu \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \mu \frac{\partial h}{\partial y} = 0.$$

令 $L(x, y, u, v, \lambda, \mu) = f(x, y, u, v) + \lambda g(x, y, u, v) + \mu h(x, y, u, v)$ 则有 $L_x = L_y = L_u = L_v = 0$, 再加上条件 $\begin{cases} g(x, y, u, v) = 0 \\ h(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$, 即 $L_\lambda = L_\mu = 0$, 可求出 λ, μ 及 (x, y, u, v) . 这里 (x, y, u, v) 就是可能取到极值的点. 根据上面的讨论, 对于一般的情形, 我们有以下定理:

定理 13.4.2 条件极值问题如果在点 $a = (a_1, \dots, a_{m+p})$ 处取得极值, 那么存在 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, 使得 (a, λ) 是辅助函数(也称拉格朗日函数)

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(x)$$

的驻点. 即 a 和 λ 应该满足

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(a) = 0, k = 1, 2, \dots, m+p, \\ g_j(a) = 0, j = 1, 2, \dots, p. \end{cases}$$

设 (a, λ) 满足上述定理的条件. 考虑

$$f(a+h) - f(a).$$

由Taylor展开式:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{m+p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{m+p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(|h|^2).$$

而

$$g_k(a+h) - g_k(a) = \sum_{j=1}^{m+p} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(a) h_j + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{m+p} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(|h|^2),$$

分别乘以 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, 加上去即得

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{m+p} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a, \lambda) h_i h_j + o(|h|^2).$$

这样, 我们得到:

定理 13.4.3 设 (a, λ) 满足条件极值问题的必要条件. 如果二次型

$$\sum_{j,i=1}^{m+p} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (a, \lambda) h_i h_j$$

是正定的, 那么 f 在 a 处取得极小值. 反之, f 在 a 处取得极大值.

例 13.4.4 抛物面

$$x^2 + y^2 = z$$

被平面

$$x + y + z = 1$$

截成一个椭圆, 求这个椭圆到坐标原点的 longest 与最短距离.

解. 这个问题实质上就是要求函数

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

在条件 $x^2 + y^2 - z = 0$ 及 $x + y + z - 1 = 0$ 下的最大, 小值问题. 应用拉格朗日乘数法, 令

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 1),$$

对 L 求一阶偏导数, 并令它们都等于0, 则有

$$L_x = 2x + 2x\lambda + \mu = 0,$$

$$L_y = 2y + 2y\lambda + \mu = 0,$$

$$L_z = 2z - \lambda + \mu = 0,$$

$$L_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0$$

$$L_\mu = x + y + z - 1 = 0;$$

求得这方程组的解为

$$\lambda = -3 \pm \frac{5}{3}\sqrt{3}, \mu = -7 \pm \frac{11}{3}\sqrt{3}$$

与

$$x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, z = 2 \mp \sqrt{3}.$$

这就是拉格朗日函数 $L(x, y, z, \lambda, \mu)$ 的稳定点, 且所求的条件极值点必在其中取得. 由于所求问题存在最大值与最小值(函数 f 在有界闭集 $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 = z, x + y + z = 1\}$ 上连续, 从而必存在最大值和最小值), 故由

$$f\left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, 2 \mp \sqrt{3}\right)$$

所求得的两个值 $9 \mp 5\sqrt{3}$, 正是该椭圆到原点的 longest 距离 $\sqrt{9 + 5\sqrt{3}}$ 与最短距离 $\sqrt{9 - 5\sqrt{3}}$. ■

13.4.3 习题13.4

1. 求 $u = x + y + z$ 在区域 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, x > 0, y > 0, z > 0$ 中的最值.
2. 求 $z = x + 2y$ 在区域 $2x^2 + y^2 = 3$ 中的最值.
3. 求 $f(x, y, z) = xyz$ 在条件 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{r}, (x > 0, y > 0, z > 0, r > 0)$ 下的极小值; 并证明不等式

$$3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^{-1} \leq \sqrt[3]{abc},$$

其中 abc 为任意正实数.

4. (1) 求空间一点 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的最短距离;
 (2) 求原点到二平面 $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ 的交线的最短距离.
5. 应用拉格朗日乘数法, 求下列函数的条件极值:
 (1) $f(x, y) = x^2 + y^2$, 若 $x + y - 1 = 0$;
 (2) $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$, 若 $xyz t = c^4$ (其中 $x, y, z, t > 0, c > 0$);
 (3) $f(x, y, z) = xyz$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.
6. 在两个平面 $y + 2 = 0, x + 2z = 7$ 的交线上找一点, 使其到点 $(0, 1, 1)$ 的距离最短, 并求这最短距离.
7. 求二次型 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) 在限制条件 $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 下的最大和最小值.
8. 求椭圆 $x^2 + 3y^2 = 12$ 的内等腰三角形, 其底边平行于椭圆的长轴, 而使面积最大.
9. 当 $x > 0, y > 0, z > 0$ 时, 求函数

$$f(x, y, z) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z$$

在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6R^2$ 上的极大值. 并由此证明: 当 a, b, c 为正数时, 成立不等式

$$ab^2c^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6} \right)^6.$$

10. 在圆锥面 $Rz = h\sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = h$ ($R > 0, h > 0$)所围的圆锥体内作一个底面平行于 xOy 面的最大长方体, 求此最大长方体的体积.
11. 求函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 在条件

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 1 (a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n)$$

之下的最小值.

12. 设 a_1, a_2, \cdots, a_n 为已知的 n 个正数, 求

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

在约束条件

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1$$

之下的最大值.

13. 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5R^2$ ($x > 0, y > 0, z > 0$)上, 求函数 $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$ 的最大值, 并利用所得结果证明不等式

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5 \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

14. 证明: 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 与平面 $Ax + By + Cz = 0$ 相交所成的椭圆的面积为

$$S = \pi \sqrt{\frac{(A^2 + B^2 + C^2)a^2b^2c^2}{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}}.$$

13.5 第十三章综合例题选讲

例 13.5.1 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$ 在点 $M(1, -2, 1)$ 处的切线及法平面方程.

解. 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6, G(x, y, z) = x + y + z$. 则 $F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = 2z, G_x = G_y = G_z = 1$.

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_M = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1, -2, 1)} = -6,$$

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \right|_M = \begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1, -2, 1)} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right|_M = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{(1, -2, 1)} = 6,$$

所以曲线 $f(x)$ 在点 $M(1, -2, 1)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{6},$$

法平面方程为

$$-6(x-1) + 6(z-1) = 0,$$

即

$$x - z = 0.$$

■

例 13.5.2 已知平面 $lx + my + nz = p$ 与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

相切, 证明 $a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 = p^2$.

证明. 椭球面过 (x_1, y_1, z_1) 点的切平面为

$$\frac{2x_1}{a^2}(x - x_1) + \frac{2y_1}{b^2}(y - y_1) + \frac{2z_1}{c^2}(z - z_1) = 0,$$

即

$$\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y + \frac{z_1}{c^2}z = 1.$$

两边同乘 p 得

$$p\frac{x_1}{a^2}x + p\frac{y_1}{b^2}y + p\frac{z_1}{c^2}z = p.$$

因该平面与平面 $lx + my + nz = p$ 均是过 (x_1, y_1, z_1) 的切平面, 故须

$$l = p\frac{x_1}{a^2}, \quad m = p\frac{y_1}{b^2}, \quad n = p\frac{z_1}{c^2},$$

所以

$$x_1 = \frac{a^2l}{p}, \quad y_1 = p\frac{b^2m}{p}, \quad z_1 = \frac{c^2n}{p}.$$

再将它们代入已知平面方程 $lx + my + nz = p$, 即有

$$a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 = p^2.$$

■

例 13.5.3 试证曲面 $f(x - ay, z - by) = 0$ 的任一切平面恒与某一直线相平行 (其中 f 为) 可微函数.

证明. 令 $F(x, y, z) = f(x - ay, z - by) = 0$, 则

$$F_x = f_1, \quad F_y = -af_1 - bf_2, \quad F_z = f_2.$$

曲面 $F(x, y, z) = 0$ 的切平面的法向量 \vec{n} 为

$$(F_x, F_y, F_z),$$

若该切平面与定直线

$$x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt$$

平行, 则

$$lF_x + mF_y + nF_z = 0,$$

即

$$(l - ma)f_1 + (n - mb)f_2 = 0.$$

取 $l = ma, n = mb$, 特别地可取 $m = 1$, 则 $l = a, m = 1, n = b$ 上式显然成立, 此时曲面的切平面恒与定直线 $x = x_0 + at, y = y_0 + t, z = z_0 + bt$ 相平行, 其中 (x_0, y_0, z_0) 为任一固定点. ■

例 13.5.4 试证曲面 $xyz = a^2$ 在任何一点的切平面与三个坐标面所围成的立体体积为定值.

证明. 过点 (x, y, z) 的切平面方程为

$$yz(X - x) + xz(Y - y) + xy(Z - z) = 0,$$

即

$$yzX + xzY + xyZ = 3a^2.$$

此平面与坐标轴截距分别为

$$\frac{3a^2}{yz}, \frac{3a^2}{xz}, \frac{3a^2}{xy}.$$

切平面与坐标面所围成的立体体积为

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{3a^2}{yz} \cdot \frac{3a^2}{xz} \cdot \frac{3a^2}{xy} = \frac{9}{2}a^2$$

为定值. ■

例 13.5.5 求椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 在点 $P_0(-1, 2, 3)$ 处的夹角.

证明. 令 $F(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 16$, $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$. 则曲面 $F(x, y, z) = 0$ 与 $G(x, y, z) = 0$ 在点 P_0 处的法向量分别是

$$\vec{n}_F = (F_x, F_y, F_z)|_{P_0} = (-6, 4, 6),$$

$$\vec{n}_G = (G_x, G_y, G_z)|_{P_0} = (-2, 4, 6).$$

于是两曲面在该点的夹角 θ 的余弦为

$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_F \cdot \vec{n}_G}{|\vec{n}_F| \cdot |\vec{n}_G|} = \frac{12 + 16 + 36}{\sqrt{88} \cdot \sqrt{56}} = \frac{8}{\sqrt{77}}.$$

故所求夹角为 $\theta = \arccos \frac{8}{\sqrt{77}}$. ■

例 13.5.6 过直线 $\begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 作曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$ 的切平面, 求此切平面方程.

解. 设 $F(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - z^2 - 27$, 则

$$F_x = 6x, \quad F_y = 2y, \quad F_z = -2z.$$

过直线 $\begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 的平面方程为

$$10x + 2y - 2z - 27 + \lambda(x + y - z) = 0,$$

其法向量为

$$(10 + \lambda, 2 + \lambda, -2 - \lambda).$$

设所求切面切点为 $p_0(x_0, y_0, z_0)$, 则

$$\begin{cases} \frac{10+\lambda}{6x_0} = \frac{2+\lambda}{2y_0} = \frac{-2-\lambda}{-2z_0}, \\ 3x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 27 = 0, \\ (10 + \lambda)x_0 + (2 + \lambda)y_0 - (2 + \lambda)z_0 - 27 = 0. \end{cases}$$

解得 $x_0 = 3, y_0 = 1, z_0 = 1, \lambda = -1$ 或 $x_0 = -3, y_0 = -17, z_0 = -17, \lambda = -19$. 所求切平面方程为 $9x + y - z - 27 = 0$ 或 $9x + 17y - 17z + 27 = 0$. ■

例 13.5.7 设 $y = y(x)$ 为 $x^2 + y^2 + xy = 1$ 所确定的隐函数, 试讨论 y 的最值.

解. 方程的两边对 x 求导, 得:

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y},$$

驻点满足 $y = -2x$, 不可导点满足为 $y = -\frac{1}{2}x$. 再由 $x^2 + y^2 + xy = 1$, 得所求驻点为 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$, 及不可导点 $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. 于是有:

$$y_{\max} = 2/\sqrt{3}, y_{\min} = -2/\sqrt{3}.$$

■

例 13.5.8 求旋转抛物面 $z + x^2 + y^2 = 0$ 到平面 $4x + 2y + z = 6$ 的最短距离.

解. 设旋转抛物面上的点 (x_0, y_0, z_0) , 平面上的点设为 (x_1, y_1, z_1) , 令

$$d^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2,$$

于是我们只需求 d^2 在条件 $z_0 + x_0^2 + y_0^2 = 0$ 及 $4x_1 + 2y_1 + z_1 = 6$ 下的最小值. ■

考虑

$$\begin{aligned} L(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, \lambda_1, \lambda_2) \\ = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 + \\ \lambda_1(z_0 + x_0^2 + y_0^2) + \lambda_2(4x_1 + 2y_1 + z_1 - 6). \end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_0} &= 2(x_0 - x_1) + 2\lambda_1 x_0 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y_0} &= 2(y_0 - y_1) + 2\lambda_1 y_0 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z_0} &= 2(z_0 - z) + \lambda_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -2(x_0 - x_1) + 4\lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y_1} &= -2(y_0 - y_1) + 4\lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z_1} &= -2(z_0 - z_1) + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= x_0^2 + y_0^2 + z_0 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= 4x_1 + 2y_1 + z_1 - 6,\end{aligned}$$

得 $(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, \lambda_1, \lambda_2) = (2, 1, -5, \frac{46}{21}, \frac{23}{23}, -\frac{103}{21}, \frac{2}{21}, -\frac{2}{21})$.

而由图形得几何性质知道, d 的最小值是存在的, 故上面给出的驻点就是所求的最小点, 且有 $d_{\min} = 1/\sqrt{21}$.

例 13.5.9 在曲面块 $S: z = 1 - x^2 - y^2$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 上求一点, 使得 S 在该点处的切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积最小? 并求出此体积.

解. 若 (x_0, y_0, z_0) 在 S 上, 则在该点处, 关于 S 的法向量为

$$\vec{n} = (2x_0, 2y_0, 1)$$

从而过该点的切平面为

$$2x_0x + 2y_0y + z = 2x_0^2 + 2y_0^2 + z_0 = 2 - z_0$$

所给定的四面体的体积为

$$V = \frac{(2 - z_0)^3}{12x_0y_0}.$$

设

$$L(x_0, y_0, z_0) = \frac{(2 - z_0)^3}{12x_0y_0} + \lambda(x_0^2 + y_0^2 + z_0 - 1)$$

则

$$L_{x_0} = -\frac{(2 - z_0)^3}{12x_0^2y_0} + 2\lambda x_0 = 0$$

$$L_{y_0} = -\frac{(2 - z_0)^3}{12x_0y_0^2} + 2\lambda y_0 = 0$$

$$L_{z_0} = -\frac{3(2 - z_0)^2}{12x_0y_0} + \lambda = 0.$$

令 $L_{x_0} = L_{y_0} = L_{z_0} = 0$ 求得 $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{2}$. 利用拉格朗日乘数法, 知当 $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{2}$ 时, 上述面积达到最小, 此时 $V = 9/16$. ■

13.6 第十三章总复习题

1. 求曲面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $(2, 1, 4)$ 的切平面与法线方程.
2. 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上求一点, 使此点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$.
3. 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ 上切平面平行于 xOy 坐标面, 求切点坐标.
4. 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程.
5. 求由曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12, \\ z = 0. \end{cases}$ 绕 Oy 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量.
6. 求曲面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 12$ 上点 $M(-1, 0, 3)$ 处切平面与平面 $z = 0$ 的夹角.
7. 在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点, 使其到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离为最近, 并求最近距离.
8. 试证以 λ 为参数的曲线族

$$\frac{x^2}{a - \mu} + \frac{y^2}{b - \lambda} = 1 \quad (a > b)$$

是相互正交的 (当相交时).

9. 求下列函数的极值
 - (1) $z = x^3 y^2 (6 - x - y) (x > 0, y > 0)$;
 - (2) $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y (x > 0, y > 0)$;
 - (3) $z = x^2 - (y - 1)^2$;
 - (4) $z = (x - y + 1)^2$.
10. 求下列函数在指定区域 D 上的最大值和最小值.
 - (1) $f(x, y, z) = x + y + z, D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$;
 - (2) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, D = \{(x, y); |x| + |y| \leq 1\}$;
 - (3) $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y), D = \{(x, y); x \leq 0, y \leq 0, x + y \leq 2\pi\}$.
11. 设 $f(x, y) = \sin x \cos y \sin(x + y)$, 求 $f(x, y)$ 的驻点, 极大值、极小值点.
12. 求下列函数在所给的条件下的极值:
 - (1) $f(x, y) = x^2 - y^3$, 若 $x^2 + y^2 = 1$;
 - (2) $f(x, y, z) = 4x - 2y + z$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
 - (3) $f(x, y, z) = x^2 y^2 z$, 若 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0)$;
 - (4) $f(x, y) = \frac{2}{x} + \frac{1}{y}$, 若 $x + y = 2$.
13. 求点 $(a, 0, 0)$ 到锥面 $x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 的距离, 其中 $a > 0, 0 < b < c$.
14. 求在曲面 $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ 上求到原点距离最近的点和最远的点.
15. 求函数 $u = x_1^2 \cdots x_n^2$ 在条件 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 下的最大值.
16. 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在第一象限中点的切平面与坐标平面围成一个四面体, 在这些四面体中体积的最小值为多少?
17. 求抛物线 $y = x^2$ 和直线 $x - y = 1$ 之间的最短距离.

18. 长为 a 的铁丝切成两段, 一段围成一个正方形, 一段围成一个圆, 这两段的长为多少时, 由他们所围正方形的面积和圆的面积之和最大?
19. 设凸四边形各边长分别为 a, b, c, d . 求证: 凸四边形对角和为 π 时面积最大.
20. 在圆锥面 $Rz = h\sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = h(R > 0, h > 0)$ 所围成的圆锥体内作一个地面平行于 xOy 面的最大长方体, 求此最大长方体的体积.
21. 如果点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是光滑曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上与原点的距离最近的点, 试证过点 M_0 的法线必定通过坐标原点.
22. 已知平面上 n 个点的坐标分别是

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \cdots, A_n(x_n, y_n),$$

试求一点, 使它与这 n 个点的距离的平方和最小.

23. 确定实数 a, b , 使得积分

$$\int_0^1 [ax + b - \frac{1}{1+x^2}]^2 dx$$

最小.

24. 求椭圆 $x^2 + 3y^2 = 12$ 的内接三角形, 使其底边平行于椭圆的长轴, 而面积最大.
25. 试求抛物线 $y^2 = 6x$ 上的点, 使它与直线 $x - y + 4$ 的距离最近.
26. 求空间一点 (a, b, c) 到平面 $Ax + By + Cz + d = 0$ 的最短距离.
27. 求 $f = x^m y^n z^p$ 在条件 $x + y + z = a, a > 0, m > 0, n > 0, p > 0, x > 0, y > 0, z > 0$ 之下的最大值.
28. 求原点到二平面 $a_1x + b_1y + c_1z = d_1, a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ 的交线的最短距离.
29. 设 n 为正整数, $x, y > 0$. 利用条件极值方法证明:

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^n.$$

30. 求出椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在第一卦限中的切平面与三个坐标面所成的四面体的最小体积.
31. 设 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 是曲面 $F(x, y, z) = 1$ 的非奇异点, F 在 $U(p_0)$ 可微, 且为 n 次齐次函数. 证明: 此曲面在 p_0 处的切平面方程为

$$xF_x(p_0) + yF_y(p_0) + zF_z(p_0) = n.$$

32. 设区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2, F(x, y, z) \in C^2$, 且 $F_z(x, y, z) \neq 0$. 证明:

(1) 由 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极值的必要条件是: 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处满足

$$F(P_0) = F_x(P_0) = F_y(P_0) = 0.$$

(2) 记 $D = F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2, E = -\frac{F_{xx}}{F_z}$. 在满足上述必要条件的点 P_0 处, $z(x, y)$ 取得极值的充分条件是:

当 $D(P_0) > 0, E(P_0) > 0$ 时, $z(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 取极小值;

当 $D(P_0) > 0, E(P_0) < 0$ 时, $z(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 取极大值;

当 $D(P_0) < 0$ 时, $z(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 不取极值.

33. 求由方程 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) (a > 0)$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的极值.

第十四章 重积分

14.1 引例

例 14.1.1 (平面上不均匀物体的质量) 设有一密度不均匀的物体, 其质量分布在一个平面图形 D 上, 假设这个图形有确定的面积, 它的密度函数是 $f(M) = f(x, y)$. 假设 $f(x, y)$ 连续, 求其质量 M .

把图形 D 任意分成 n 个小块 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, 并把这些小块的面积仍记为 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. 在第 i 个小块 $\Delta\sigma_i$ 上任意取一个点 $M_i = (\zeta_i, \eta_i)$ (图15-1), 那么这个小块的质量近似的等于 $f(\zeta_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 于是图形 D 的总质量就近似等于和数

$$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

令 $\lambda = \max\{\text{diam}(\Delta\sigma_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时上面所给出的和式极限就是所求的质量 M , 即

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

例 14.1.2 (曲顶柱体的体积) 设有一立体, 它的底是坐标面 xOy 上由曲线 C 所围成的有界闭区域 D , 侧面是以 C 为准线而母线平行于 z 轴的柱面, 其顶部是由 D 上的连续函数 $z = f(x, y)$ 所确定的曲面, 假定 $f(x, y) \geq 0$. 这种立体称为曲顶柱体, 现在考虑其体积 V .

将 D 任意分为 n 个小块 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. 以每个小块的边界为准线作母线平行于 z 轴的柱面, 它们将整个曲顶柱体分割成了 n 个小的曲顶柱体. 用 $\Delta\sigma_i$ 表示小块 σ_i 的面积, ΔV_i 表示以 σ_i 为底的小曲顶柱体的体积, $i = 1, 2, \dots, n$. 在每个小块 σ_i 上任取一点 (ζ_i, η_i) , 作以 σ_i 为底而高为 $f(\zeta_i, \eta_i)$ 的平顶柱体, 它的体积是 $f(\zeta_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$. 当把区域 D 分割得很细时, 有

$$\Delta V_i \approx f(\zeta_i, \eta_i)\Delta\sigma_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

由此得到曲顶柱体的体积

$$V \approx \sum_{i=1}^n f(\zeta_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

令 $\lambda = \max\{\text{diam}(\Delta\sigma_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时上面所给出的和式极限就是所求的体积 V , 即

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

14.2 矩形区域上二重积分的定义和基本性质

设 I 为平面上的矩形, 即 $I = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} = [a, b] \times [c, d]$, $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 的分割分别为:

$$\pi_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad \pi_y : c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

记 $\pi = \pi_x \times \pi_y$, 称 π 为 I 的一个分割. 显然, π 将 I 分割为 $n \times m = k$ 个小矩形, 将这 k 个小矩形记为 I_1, I_2, \dots, I_k .

任取 $(\xi_i, \eta_i) \in I_i, i = 1, 2, \dots, k$, 则积分和(也称黎曼和)为 $\sum_{i=1}^k f(\xi_i, \eta_i)\sigma(I_i)$, 其中 $\sigma(I_i)$ 为矩形 I_i 的面积,

记 $\lambda = \max\{\text{diam} I_1, \text{diam} I_2, \dots, \text{diam} I_k\}$. (如无特别说明, 下面我们将用 I 表示矩形.)

定义 14.2.1 (矩形上的二重积分) 设 $f(x, y)$ 在 I 上有定义, 若存在常数 A , 使得对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当分割 π 满足 $\lambda < \delta$ 时, 对任意 $(\xi_i, \eta_i) \in I_i, i = 1, 2, \dots, k$, 都有

$$\left| \sum_{i=1}^k f(\xi_i, \eta_i)\sigma(I_i) - A \right| < \varepsilon.$$

则称 $f(x, y)$ 在 I 上的二重积分存在(或称 f 在 I 上可积), 记为 $\iint_I f(x, y)d\sigma$, 或 $\iint_I f(x, y)dx dy$, 或简记为 $\int_I f d\sigma$.

与定积分类似, 由二重积分的定义可得积分存在的必要条件.

定理 14.2.2 (可积的必要条件) 若 f 在 I 上可积, 则 f 在 I 上必有界.

同样由二重积分的定义易得下面的性质.

定理 14.2.3 (积分性质) 设 f 和 g 在 I 上都可积, 则有

(1) $kf \pm lg$ 在 I 上也可积 (k, l 为常数), 且有

$$\int_I (kf \pm lg) d\sigma = k \int_I f d\sigma \pm l \int_I g d\sigma.$$

(2) 若 $f \geq 0$, 则 $\int_I f d\sigma \geq 0$.

(3) 若 $f \geq g$, 则 $\int_I f d\sigma \geq \int_I g d\sigma$.

14.3 可积性理论

14.3.1 可积性(一): 达布理论

定义 14.3.1 (达布上(下)和) 记 $S(f, \pi) = \sum_{i=1}^k f(\xi_i, \eta_i) \sigma(I_i)$, 令 $M_i = \sup f(I_i)$, $m_i = \min f(I_i)$, 则称

$$\bar{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^k M_i \sigma(I_i), \quad \underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^k m_i \sigma(I_i),$$

分别为 f 关于分割 π 的达布上和与达布下和. 显然有,

$$\underline{S}(f, \pi) \leq S(f, \pi) \leq \bar{S}(f, \pi).$$

定义 14.3.2 (分割的加细) 设 $\pi = \pi_x \times \pi_y$ 和 $\pi' = \pi'_x \times \pi'_y$ 为两个分割, 若任意 π_x, π_y 的分点都在 π'_x, π'_y 中, 则称 π' 为 π 的加细. 记为 $\pi' \leq \pi$.

定理 14.3.3 设 π 和 π' 是 I 的两个分割, 且 $\pi' \leq \pi$, 则有

$$\underline{S}(f, \pi) \leq \underline{S}(f, \pi') \leq \bar{S}(f, \pi') \leq \bar{S}(f, \pi).$$

证明. 设 π 的每个子矩形 L 都被分成了 π' 的子矩形 $L_1, L_2, \dots, L_\alpha$. 则有 $\sigma(L) = \sigma(L_1) + \dots + \sigma(L_\alpha)$. 分别用 $m_i(f, L_i)$ ($i = 1, 2, \dots, \alpha$) 和 $m(f, L)$ 表示 f 在 L_i 和 L 上的下确界, 则有 $m(f, L) \leq m_i(f, L_i)$. 进而有

$$m(f, L) \sigma(L) = m(f, L) (\sigma(L_1) + \dots + \sigma(L_\alpha)) \leq m_1(f, L_1) \sigma(L_1) + \dots + m_\alpha(f, L_\alpha) \sigma(L_\alpha). \quad (14.1)$$

在(14.1)式两边关于分割 π 求和即得

$$\underline{S}(f, \pi) \leq \underline{S}(f, \pi').$$

关于上和的证明类似. ■

定理 14.3.4 设 π_1, π_2 是 I 的任意两个分割, 则有

$$\underline{S}(f, \pi_1) \leq \bar{S}(f, \pi_2).$$

证明. 任取 π_1 和 π_2 的加细(比如可以把 π_1 和 π_2 合在一起), 记为 π . 由定理14.3.3, 有

$$\underline{S}(f, \pi_1) \leq \underline{S}(f, \pi) \leq \bar{S}(f, \pi) \leq \bar{S}(f, \pi_2).$$

■

定义 14.3.5 (上(下)积分) 记

$$\int_I f d\sigma = \sup_{\pi} \underline{S}(f, \pi), \quad \overline{\int_I} f d\sigma = \inf_{\pi} \overline{S}(f, \pi),$$

分别称之为 f 在 I 上的下积分和上积分.

定理 14.3.6 等式

$$\int_I f d\sigma = \overline{\int_I} f d\sigma$$

成立 \iff 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 I 的一个分割 π , 使得

$$\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon.$$

证明. 必要性. 记 $l = \int_I f d\sigma, L = \overline{\int_I} f d\sigma$. 由确界的定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 π_1, π_2 , 使得

$$\overline{S}(f, \pi_2) - \frac{\varepsilon}{2} \leq l = L \leq \underline{S}(f, \pi_1) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14.2)$$

取 $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, 由定理 14.3.3,

$$\underline{S}(f, \pi_1) \leq \underline{S}(f, \pi) \leq \overline{S}(f, \pi_2).$$

再由 (14.2) 式, 有

$$\overline{S}(f, \pi) - \frac{\varepsilon}{2} \leq l = L \leq \underline{S}(f, \pi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

此即

$$\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon.$$

充分性. 易知对任意分割 π , 有

$$\overline{S}(f, \pi) \leq l \leq L \leq \underline{S}(f, \pi),$$

则有

$$L - l \leq \underline{S}(f, \pi) - \overline{S}(f, \pi). \quad (14.3)$$

又由已知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在分割 π , 使得

$$\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon.$$

结合 (14.3) 式, 有 $L - l \leq \varepsilon$, 故 $l = L$. ■

定理 14.3.7 有界函数 f 在 I 上可积 $\iff \int_I f d\sigma = \overline{\int_I} f d\sigma$, 且此时这个公共值就是积分值 $\int_I f d\sigma$.

证明. 必要性. 设 f 在 I 上可积, 记其积分值为 A . 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在分割 $\pi = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$, 使得对任意 $\xi_i \in I_i (i = 1, 2, \dots, k)$, 有

$$A - \varepsilon < \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \sigma(I_i) < A + \varepsilon.$$

由 ξ_i 的任意性, 可得

$$A - \varepsilon \leq \underline{S}(f, \pi) \leq \overline{S}(f, \pi) \leq A + \varepsilon.$$

由此有

$$A - \varepsilon \leq \int_I f d\sigma \leq \overline{\int_I} f d\sigma \leq A + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 即得 $\int_I f d\sigma = \overline{\int_I} f d\sigma = A$.

充分性. 设 $\int_I f d\sigma = \overline{\int_I f d\sigma} = A$. 由定理14.3.6, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在分割 $\pi_\varepsilon = \{J_1, J_2, \dots, J_l\}$, 使得

$$\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon.$$

将子矩形 J_i 的每一边平行的向矩形内部收缩同一距离 $\delta > 0$, 作成开矩形 $\tilde{J}_i \subset J_i (i = 1, 2, \dots, l)$. 令

$$K = I \cap \left(\bigcup_{i=1}^l \tilde{J}_i \right)^C.$$

则 K 是一个闭集, 并且可取 δ 充分小, 使得 $\delta(K) < \varepsilon$. 由于 K 是若干个没有公共内点的矩形的集合, $\sigma(K)$ 可被定义为那些矩形的面积之和.

设 I 的分割 $\pi = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$ 满足: $\lambda = \max\{\text{diam} \tilde{J}_1, \dots, \text{diam} \tilde{J}_l\} < \delta$. 则有

$$\underline{S}(f, \pi) \leq S(f, \pi) \leq \overline{S}(f, \pi) \quad (14.4)$$

此外, 显然有

$$\underline{S}(f, \pi) \leq A \leq \overline{S}(f, \pi) \quad (14.5)$$

由(14.4)式和(14.5)式, 可得

$$|S(f, \pi) - A| \leq \overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) = \sum_{j=1}^k (M_j - m_j) \sigma(I_j) = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

其中

$$\Sigma_1 = \sum_{I_j \subset K} (M_j - m_j) \sigma(I_j), \Sigma_2 = \sum_{I_j \not\subset K} (M_j - m_j) \sigma(I_j).$$

一方面, 由 f 在 I 上有界, 可设 $|f(x)| \leq M, \forall x \in I$. 则有

$$\Sigma_1 \leq 2M \sum_{I_j \subset K} \sigma(I_j) \leq 2M \sigma(K) < 2M\varepsilon.$$

另一方面, 在 Σ_2 中, $I_j \not\subset K$, 则这样的 I_j 必与某个 \tilde{J}_i 相交. 由 \tilde{J}_i 的作法可知 $I_j \subset J_i$, 故有

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{i=1}^l \sum_{I_j \subset J_i} (M_j - m_j) \sigma(I_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^l (\sup f(J_i) - \inf f(J_i)) \sum_{I_j \subset J_i} \sigma(I_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^l (\sup f(J_i) - \inf f(J_i)) \sigma(J_i) \\ &= \overline{S}(f, \pi_\varepsilon) - \underline{S}(f, \pi_\varepsilon) < \varepsilon, \end{aligned}$$

从而有 $|S(f, \pi) - A| < (2M + 1)\varepsilon$. 这表明 f 在 I 上可积, 并且 $\int_I f d\sigma = A$. ■

由定义14.3.1, 定理14.3.6和定理14.3.7, 易得下面的定理.

定理 14.3.8 设 f 在 I 上有界, 则以下条件等价:

- (1) f 在 I 上可积;
- (2) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \omega(f, I_i) \sigma(I_i) = 0$, 其中 $\omega(f, I_i)$ 为 f 在 I_i 上的振幅;
- (3) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 I 的一个分割 π , 使得

$$\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon;$$

- (4) $\overline{\int_I f d\sigma} = \underline{\int_I f d\sigma}$.

定理 14.3.9 若 f 在 I 上有界且连续, 则 f 在 I 上可积.

推论 14.3.10 若 f 在 I 上有界且只有有限多个不连续点, 则 f 在 I 上可积.

例 14.3.11 证明: (二维)Dirichlet函数 f 在任意矩形 I 上都不可积. 这里

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ 且 } x, y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ 且 } x \text{ 或 } y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

14.3.2 可积性(二): Lebesgue理论

下面我们用 D 表示 \mathbb{R}^2 中的任意集合, 不限于矩形.

定义 14.3.12 (零测集) 设 $D \in \mathbb{R}^2$. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在可数个闭矩形序列 $I_i, i = 1, 2, \dots$, 使得

$$D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(I_i) < \varepsilon,$$

则称 D 为(二维)零测集.

定义 14.3.13 (零面积集) 设 $D \in \mathbb{R}^2$. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限个闭矩形序列 I_1, I_2, \dots, I_m 使得

$$D \subset \bigcup_{i=1}^m I_i, \quad \sum_{i=1}^m \sigma(I_i) < \varepsilon,$$

则称 D 为(二维)零面积集.

注 14.3.14 (1) 显然, 零面积集是零测集, 但是反之不一定.

(2) 定义 14.3.12 和 14.3.13 中的闭矩形可以换成开矩形.

关于零测集和零面积集, 有下面的简单性质.

命题 14.3.15 (1) 零测集的任意子集仍是零测集.

(2) 有限个零面积集之并仍是零面积集.

(3) 至多可数集是零测集.

(4) 至多可数个零测集之并仍是零测集.

(5) D 是零面积集 $\iff \bar{D}$ 是零面积集.

(6) 若 D 为紧集, 则 D 为零测集 $\iff D$ 为零面积集.

证明. (1),(2)显然. (4)可与(3)类似证明, 留做练习.

(3)不妨设 D 为可数集. 记 $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, 其中 $a_n = (x_n, y_n)$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 作闭矩形

$$I_n = \{(x, y) : x_n - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}} \leq x \leq x_n + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}}, \quad y_n - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}} \leq y \leq y_n + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}}\}$$

则 $a_n \in I_n$, 从而 $D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. 而 $\sigma(I_n) = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. 即 D 是零测集.

(5)充分性显然, 下证必要性. 设 D 为零面积集, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限个闭矩形 I_1, I_2, \dots, I_m , 使得 $D \subset \bigcup_{i=1}^m I_i$, $\sum_{i=1}^m \sigma(I_i) \leq \varepsilon$. 由于 $\bigcup_{i=1}^m I_i$ 为闭集, 故仍有 $\bar{D} \subset \bigcup_{i=1}^m I_i$, 即 \bar{D} 也是零面积集.

(6)只需证必要性. 由 D 为零测集, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开矩形序列 $\{I_i, i = 1, 2, \dots\}$, 使得 $D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(I_i) < \varepsilon$. 又由 D 是紧集, 可从 $\{I_i\}$ 中可选出有限个覆盖 D , 而这些开矩形的面积之和仍小于 ε , 故 D 是零面积集. ■

例 14.3.16 设 D 表示 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中的所有有理点(即两个坐标均为有理数)所成的集合, 则 D 是一个零测集, 但是 \bar{D} 不是零测集, 并且 D 也不是零面积集.

例 14.3.17 设 $D \in \mathbb{R}^2$ 是一段连续的参数曲线, 且其中至少有一个分量有连续的导数. 证明: D 是零面积集.

证明. 设 $D: x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$. 不妨设 $y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导数. 由 $x(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续 (从而一致连续), 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在分割 $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, 使得当 $s, t \in [t_{i-1}, t_i]$ 时, 有 $|x(s) - x(t)| < \varepsilon$.

令 $a_i = \min x([t_{i-1}, t_i]), b_i = \max x([t_{i-1}, t_i])$, 则有 $b_i - a_i < \varepsilon$. 再令 $c_i = \min y([t_{i-1}, t_i]), d_i = \max y([t_{i-1}, t_i]), I_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i], i = 1, 2, \cdots, n$, 则当 $t \in [t_{i-1}, t_i]$ 时, 有 $(x(t), y(t)) \in I_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 故有 $D \subset \bigcup_{i=1}^n I_i$.

由 y 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导数, 存在 $M > 0$, 使得对任意 $t \in [\alpha, \beta]$, 有 $|y'(t)| < M$. 由微分中值定理, 有 $d_i - c_i \leq M(t_i - t_{i-1})$. 故有

$$\sum_{i=1}^n \sigma(I_i) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)(d_i - c_i) < M \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = M(\beta - \alpha)\varepsilon.$$

■

注 14.3.18 (1) 若 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 则 f 的图像 $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ 是零面积集.

(2) 光滑曲线段是零面积集.

定义 11.5.4 给出了函数在一点处的振幅, 借助于振幅的概念, 我们给出下面的记号. 设 $\delta > 0, D \in \mathbb{R}^2$, 记 $D_\delta = \{x \in D : \omega(f, x) > \delta\}$. 此外, 用 $D(f)$ 表示 f 的不连续点的全体.

引理 14.3.19 $D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}$.

证明. 由定理 11.5.6 知, $D_{1/n}$ 中的点都是 f 的不连续点, 故有 $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n} \subset D(f)$. 反过来, 对任意 $x \in D(f)$, 由 f 在 x 不连续, 仍由定理 11.5.6, 有 $\omega(f, x) > 0$. 现取 n 充分大, 使得 $\omega(f, x) > 1/n$, 即有 $x \in D_{1/n}$, 故 $D(f) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}$. ■

引理 14.3.20 设 f 是定义在有限闭矩形 I 上的函数, 若存在一列开矩形 $I_j (j = 1, 2, \cdots)$, 使得 $D(f) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$.

记 $K = I \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in K, y \in I$ 且 $|x - y| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

证明. 反证. 若结论不成立, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 及点列 $\{x^{(n)}\} \in K, \{y^{(n)}\} \in I$, 使得当 $|x^{(n)} - y^{(n)}| < 1/n$ 时, 有

$$|f(x^{(n)}) - f(y^{(n)})| \geq \varepsilon_0.$$

由 $\{x^{(n)}\} \in K \subset I$ 且 I 为闭矩形, 存在 $\{x^{(n)}\}$ 的子列 $\{x^{(n_k)}\}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(n_k)} = x$, 且 $x \in K$. 由 $|x^{(n_k)} - y^{(n_k)}| < 1/n_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, 易知 $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{(n_k)} = x$. 故由假设, 有

$$|f(x^{(n_k)}) - f(y^{(n_k)})| \geq \varepsilon_0. \quad (14.6)$$

由 $x \in K$, 则 f 在 x 连续, 在 (14.6) 式中令 $k \rightarrow \infty$ 得

$$\varepsilon_0 \leq |f(x^{(n_k)}) - f(y^{(n_k)})| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

这与 $\varepsilon_0 > 0$ 矛盾. ■

定理 14.3.21 (Lebesgue) 设 f 是在闭矩形 I 上有界, 则 f 在 I 上可积 $\iff D(f)$ 是一个零测集.

证明. 必要性. 由引理14.3.19和命题14.3.15的(4), 只需证明 $D_{1/n}$ 为零测集. 由 f 在 I 上可积, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 I 的分割 $\pi = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$, 使得

$$\sum_{i=1}^m \omega(f, I_i) \sigma(I_i) < \varepsilon/n.$$

令 $E_n = D_{1/n} \setminus l(\pi)$, 这里 $l(\pi)$ 表示 π 的分割线所成的集合. 显然 $l(\pi)$ 为零面积集, 故只需证 E_n 为零测集.

由于 $I \setminus l(\pi) = \bigcup_{i=1}^m I_i$, 这里 I_i 为开矩形, 故

$$E_n = D_{1/n} \setminus l(\pi) = D_{1/n} \cap (l(\pi))^C = D_{1/n} \cap \left(\bigcup_{i=1}^m I_i \right) \subset \bigcup \{I_i : D_{1/n} \cap I_i \neq \emptyset\}.$$

这表明 E_n 被一系列开矩形覆盖, 且这些开矩形中的每一个都含有 $D_{1/n}$ 中的点. 任取 $x \in D_{1/n} \cap I_i$, 则存在充分小的 $r > 0$, 使得 $B(x, r) \subset I_i$. 则有

$$\omega(f, I_i) \geq \omega(f, B(x, r)) \geq \omega(f, x) \geq \frac{1}{n}.$$

若用 \sum' 表示对满足 $D_{1/n} \cap I_i \neq \emptyset$ 的 i 求和, 则有

$$\frac{\varepsilon}{n} > \sum_{i=1}^m \omega(f, I_i) \sigma(I_i) \geq \sum' \omega(f, I_i) \sigma(I_i) \geq \frac{1}{n} \sum' \sigma(I_i),$$

即 $\sum' \sigma(I_i) < \varepsilon$, 故 E_n 为零面积集, 从而 $D(f)$ 为零测集.

充分性. 设 $D(f)$ 为零测集, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一系列开矩形 $J_i (i = 1, 2, \dots)$, 使得

$$D(f) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(J_i) < \frac{\varepsilon}{2\omega},$$

这里 $\omega = \omega(f, I)$.

令 $K = I \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$, 则由引理14.3.20, 对上述 ε , 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in K, y \in I$ 且 $|x - y| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4\sigma(I)}.$$

现取分割 $\pi = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$, 使得 $\lambda = \max\{\text{diam} I_1, \text{diam} I_2, \dots, \text{diam} I_m\} < \delta$. 令

$$\sum_{i=1}^m \omega(f, I_i) \sigma(I_i) = \sum_1 \omega(f, I_i) \sigma(I_i) + \sum_2 \omega(f, I_i) \sigma(I_i), \quad (14.7)$$

这里 \sum_1 是对 K 和 I_i 相交的那些 i 求和, \sum_2 是对 K 和 I_i 不相交的那些 i 求和.

对 \sum_1 中的项, 由于 $K \cap I_i \neq \emptyset$, 任取 $y^{(i)} \in K \cap I_i$, 则有

$$\begin{aligned} \omega(f, I_i) &= \sup\{|f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| : x^{(1)}, x^{(2)} \in I_i\} \\ &\leq \sup\{|f(x^{(1)}) - f(y^{(i)})| + |f(y^{(i)}) - f(x^{(2)})| : x^{(1)}, x^{(2)} \in I_i, y^{(i)} \in K \cap I_i\} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\sigma(I)}. \end{aligned}$$

故

$$\sum_1 \omega(f, I_i) \sigma(I_i) \leq \frac{\varepsilon}{2\sigma(I)} \sigma(I) = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14.8)$$

对 \sum_2 中的项, 由于 $K \cap I_i = \emptyset$, 则由 $K = I \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$, 当 $x \in I_i$ 时, 有 $x \notin K$, 从而 $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$, 故有 $I_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$, 进而有

$$\sum_2 \sigma(I_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(J_i) < \frac{\varepsilon}{2\omega}.$$

所以

$$\sum_2 \omega(f, I_i) \sigma(I_i) \leq \omega \sum_2 \sigma(I_i) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14.9)$$

综合(14.7), (14.8), (14.9)可得 $\sum_{i=1}^m \omega(f, I_i) \sigma(I_i) < \varepsilon$, 由定理14.3.8, f 在 I 上可积. ■

定理 14.3.22 设 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 有界. 若集合 $E = \{x \in I : f(x) \neq 0\}$ 为一个零面积集, 则 f 在 I 上可积, 且 $\int_I f d\sigma = 0$.

证明. 先证 f 可积. 由已知, 若 $x \notin \bar{E}$, 则 $f(x) = 0$, 即 f 在 $I^\circ \setminus \bar{E}$ 上恒为零, 从而连续. 故 $D(f) \subset (I^\circ \setminus \bar{E})^C = \partial I \cup \bar{E}$. 由已知及命题14.3.15的(5), \bar{E} 为零面积集, 而 ∂I 显然为零面积集, 故 $\partial I \cup \bar{E}$ 也为零面积集, 由定理14.3.21, f 在 I 上可积.

再证 $\int_I f d\sigma = 0$. 对 I 的任意分割 $\pi = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$, 由 \bar{E} 为零面积集, 故在任意 $I_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 中总存在 $x_i \in I_i$, 使得 $f(x_i) = 0$, 此时的Riemann和为

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \sigma(I_i) = 0.$$

由于 f 在 I 上可积, 故有 $\int_I f d\sigma = 0$. ■

推论 14.3.23 设 f, g 在 I 上有界, $E = \{x \in I : f(x) \neq g(x)\}$ 为一个零面积集. 若 f 和 g 中有一个在 I 上可积, 则另一个也在 I 上可积, 且有

$$\int_I f d\sigma = \int_I g d\sigma.$$

证明. 考虑 $f - g$, 利用定理14.3.22, 易得所证结论成立. ■

14.4 矩形区域上二重积分的计算

定义 14.4.1 (累次积分) 设 $I = [a, b] \times [c, d]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. 若对固定的 $x \in [a, b]$, $f(x, y)$ 在 $[c, d]$ 上可积, 则可得函数

$$\phi(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b].$$

又若 $\phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则有

$$\int_a^b \phi(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (14.10)$$

我们称(14.10)式右边为(先 y 后 x)的**累次积分**. 也可记为 $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$.

类似地, 可以定义(先 x 后 y)的累次积分 $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$.

下面我们将证明: 在一定条件下, 有

$$\int_I f d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

为此, 我们先给出下面的记号. 设 f 在闭矩形 I 上有界, 则

$$\alpha(x) = \int_{\underline{c}}^d f(x, y) dy, \quad \beta(x) = \int_c^{\overline{d}} f(x, y) dy$$

在 $[a, b]$ 上都有定义.

定理 14.4.2 若 f 在 $I = [a, b] \times [c, d]$ 上可积, 则 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 在 $[a, b]$ 上都可积, 且有

$$\int_I f d\sigma = \int_a^b \alpha(x) dx = \int_c^d \beta(x) dx.$$

证明. 分别对 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 作分割:

$$\pi_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b; \quad \pi_y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d.$$

令 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $J_j = [y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, 2, \cdots, n$; $j = 1, 2, \cdots, m$, 则子矩形 $I_i \times J_j$ ($i = 1, 2, \cdots, n$; $j = 1, 2, \cdots, m$) 构成 I 的分割 $\pi = \pi_x \times \pi_y$. 令 $A = \int_I f d\sigma$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 I 的分割 π 满足 $\lambda < \delta$ 时, 有

$$A - \varepsilon < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j < A + \varepsilon, \quad (14.11)$$

其中 $\xi_i \in I_i$, $\eta_j \in J_j$.

现在取分割 π_x 与 π_y , 使得 $\lambda_x < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, $\lambda_y < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, 则有 $\lambda < \delta$, 并且

$$A - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \inf f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sup f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \leq A + \varepsilon. \quad (14.12)$$

注意这里的确界都是对 $\eta_j \in J_j$ 取的. 因为(14.11)式对任意 $\xi_i \in I_i$, $\eta_j \in J_j$ 都成立, 从而(14.12)式成立. 此外, (14.12)式中的 $\sum_{j=1}^m \inf f(\xi_i, \eta_j) \delta y_j$ 是 $f(\xi_i, y)$ 在 $[c, d]$ 上的达布下和, 故有

$$\sum_{j=1}^m \inf f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j \leq \int_{\underline{c}}^d f(\xi_i, y) dy = \alpha(\xi_i).$$

同理有

$$\beta(\xi_i) = \int_c^{\overline{d}} f(\xi_i, y) dy \leq \sum_{j=1}^m \sup f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j.$$

显然 $\int_{\underline{c}}^d f(\xi_i, y) dy \leq \int_c^{\overline{d}} f(\xi_i, y) dy$ 即 $\alpha(\xi_i) \leq \beta(\xi_i)$ 成立. 故有

$$A - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^n \alpha(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \beta(\xi_i) \Delta x_i \leq A + \varepsilon,$$

此即

$$\lim_{\lambda_x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \alpha(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda_x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \beta(\xi_i) \Delta x_i = A.$$

也即所证结果成立. ■

推论 14.4.3 设 f 在 $I = [a, b] \times [c, d]$ 上可积. 若对任意 $x \in [a, b]$, $f(x, y)$ 在 $[c, d]$ 上可积, 则有

$$\int_I f d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

同样, 若对任意 $y \in [c, d]$, $f(x, y)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则有

$$\int_I f d\sigma = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

证明. 由已知, 有 $\alpha(x) = \beta(x) = \int_c^d f(x, y)dy$, 再由定理14.4.2可得. ■

推论 14.4.4 若 f 在 $I = [a, b] \times [c, d]$ 上连续, 则有

$$\int_I f d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx.$$

注 14.4.5 (1) 推论14.4.3和推论14.4.4给出了计算矩形上二重积分的方法.

(2) 与二重极限和两个二次极限的关系类似, 可以证明: f 在 $I = [a, b] \times [c, d]$ 上可积不能得到 $\int_c^d f(x, y)dy$ 对任意 $x \in [a, b]$ 或 $\int_a^b f(x, y)dx$ 对任意 $y \in [c, d]$ 存在. 反过来, 对任意 $x \in [a, b]$, $\int_c^d f(x, y)dy$ 存在且对任意 $y \in [c, d]$, $\int_a^b f(x, y)dx$ 存在并且两者相等, 也不能得到 f 在 $I = [a, b] \times [c, d]$ 上可积. 相关的讨论读者可以参考其他资料, 我们在这里不展开.

14.5 有界集合上的二重积分

现在我们将矩形区域上的二重积分推广到任意 \mathbb{R}^2 上的有界区域上.

定义 14.5.1 设 $B \subset \mathbb{R}^2$, $f: B \rightarrow \mathbb{R}$. 令

$$f_B(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

则 f_B 在 \mathbb{R}^2 上有定义, 且 $f_B|_B = f$.

定义 14.5.2 (有界集合上的二重积分) 任取有界的闭矩形 $I \supset B$, 若 f_B 在 I 上可积, 则称 f 在 B 上可积, 并称数值 $\int_I f_B d\sigma$ 为 f 在 B 上的二重积分, 记作 $\int_B f d\sigma$ 或 $\iint_B f(x, y)dx dy$.

注 14.5.3 (1) 定义14.5.2不依赖于 I 的选取. 事实上, 若 $I_1 \supset B, I_2 \supset B$, 则存在更大的矩形 I , 使得 $I_i \subset I (i = 1, 2)$, 则有

$$\int_I f_B d\sigma = \int_{I_1} f_B d\sigma = \int_{I_2} f_B d\sigma.$$

因此, 在选择 I 的时候, 可以使 I 满足 $I^\circ \supset \bar{B}$.

(2) 由定理14.3.21, f 在 D 上可积 $\iff D(f_B)$ 为零测集.

定理 14.5.4 设有界集 $B \subset \mathbb{R}^2$, $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ 有界. 若 ∂B 和 $D(f)$ 都是零测集, 则 f 在 B 上可积.

证明. 取闭矩形 I , 使得 $I^\circ \supset \bar{B}$, 由 f_B 的定义知, f_B 在 \bar{B}^C 上连续. 而在 B° 上, $f_B = f$, 故 f_B 的不连续点即为 f 的不连续点, 因此, 有 $D(f_B) \subset D(f) \cup \partial B$. 由已知, $D(f) \cup \partial B$ 为零测集, 则 $D(f_B)$ 也为零测集, 即 f_B 在 I 上可积, 从而 f 在 B 上可积. ■

注 14.5.5 定理14.5.4给出了 f 在 B 上可积的一个充分条件, 但是不必要.

定理 14.5.6 (1) 设 $B \subset \mathbb{R}^2$ 有界, f, g 在 B 上可积, 则对任意常数 C , $Cf, f \pm g$ 在 B 上也可积, 且有

$$\int_B Cf d\sigma = C \int_B f d\sigma, \quad \int_B (f \pm g) d\sigma = \int_B f d\sigma \pm \int_B g d\sigma.$$

(2) 设 $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^2$ 有界, 且 $B_1 \cap B_2$ 是一零面积集. 若 f 在 B_1 和 B_2 上都可积, 则 f 在 $B_1 \cup B_2$ 上也可积, 且有

$$\int_{B_1 \cup B_2} f d\sigma = \int_{B_1} f d\sigma + \int_{B_2} f d\sigma.$$

证明. (1)由定义14.5.2易证. 下证(2).

由已知, $f_{B_1 \cup B_2} = f_{B_1} + f_{B_2}$ 除一零面积集之外成立. 设矩形 $I \supset B_1 \cup B_2$, 则有

$$\int_{B_1} f d\sigma + \int_{B_2} f d\sigma = \int_I f_{B_1} d\sigma + \int_I f_{B_2} d\sigma = \int_I (f_{B_1} + f_{B_2}) d\sigma.$$

由推论14.3.23, 有

$$\int_I (f_{B_1} + f_{B_2}) d\sigma = \int_I (f_{B_1 \cup B_2}) d\sigma = \int_{B_1 \cup B_2} f d\sigma.$$

■

定义 14.5.7 (集合的面积) 设 $B \subset \mathbb{R}^2$ 为有界集. 若常值函数1在 B 上可积, 则称积分 $\int_B 1 d\sigma$ 为 B 的面积, 记为 $\sigma(B)$. 这时称 B 是有面积的.

注 14.5.8 $\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$ 称为点集 B 的特征函数. 借助于 χ_B , 有 $\sigma(B) = \int_B 1 d\sigma = \int_I \chi_B d\sigma$, 这里 I 为任意包含 B 的矩形.

定理 14.5.9 设 $B \subset \mathbb{R}^2$ 有界, 则 B 为零面积集 $\iff \sigma(B) = \int_B 1 d\sigma = 0$.

证明. 必要性. 设 B 为零面积集. 作闭矩形 I , 使得 $I^\circ \cup \bar{B}$, 则对 χ_B , 有 $B = \{x \in I : \chi_B(x) \neq 0\}$, 由 B 为零面积集及定理14.3.22, χ_B 在 I 上可积, 且有 $\sigma(B) = \int_B 1 d\sigma = \int_I \chi_B d\sigma = 0$.

充分性. 先证 B 的特征函数有如下性质: $D(\chi_B) = \partial B$, 即 χ_B 的不连续点的全体为 ∂B . 一方面, 因为 $\mathbb{R}^2 = B^\circ \cup \partial B \cup (B^C)^\circ$, 而在 B° 和 $(B^C)^\circ$ 上分别有 $\chi_B = 1$ 和 $\chi_B = 0$, 故 χ_B 在 B° 和 $(B^C)^\circ$ 上连续, 从而有 $D(\chi_B) \subset \partial B$. 另一方面, 对任意 $x \in \partial B$, x 的任意邻域中既有 B 中的点 $x^{(1)}$ 也有 B^C 中的点 x_2 , 则有 $\chi_B(x^{(1)}) = 1, \chi_B(x^{(2)}) = 0$, 故 χ_B 在 x 处不连续, 从而 $\partial B \subset D(\chi_B)$. 故所证结论成立.

由 $\sigma(B) = 0$, 则 B 必无内点. 否则存在小矩形 $I \subset B$, 使得 $\sigma(B) > \sigma(I) > 0$. 又 χ_B 可积, 故 $D(\chi_B)$ 为零测集, 由上述所证 χ_B 的性质, χ_B 为零测集. 又 ∂B 为有界闭集, 故 ∂B 为零面积集. 再由 $B^\circ = \emptyset$ 以及 $\mathbb{R}^2 = B^\circ \cup \partial B \cup (B^C)^\circ$ 可知 $B \subset \partial B$, 从而 B 为零面积集. ■

推论 14.5.10 设 $B \subset \mathbb{R}^2$ 有界, 则 B 有面积 $\iff B$ 的边界 ∂B 是一个零面积集.

证明. 由定理14.5.9的证明知, $D(\chi_B) = \partial B$, 而 B 有面积 $\iff \chi_B$ 在 $I \supset B$ 上可积, 而这等价于 $D(\chi_B) = \partial B$ 是 I 上的零面积集. ■

注 14.5.11 (1) 二重积分必须在有面积的集合上进行.

(2) 并非一切有界集都是有面积的.

本节的最后, 我们给出二重积分的积分平均值性质.

定理 14.5.12 设 $B \subset \mathbb{R}^2$ 为由有限条光滑曲线围成的有界闭区域, 函数 f, g 在 B 上连续, 且 g 在 B 上不变号, 则存在 $\xi \in B$, 使得

$$\int_B f g d\sigma = f(\xi) \int_B g d\sigma.$$

证明. 显然, f, g 和 $f g$ 在 B 上都可积.

由 B 为紧集, f 在 B 上能取到最值. 设最小值为 m , 最大值为 M . 不妨设 g 在 B 上有 $g \geq 0$. 则对任意 $x \in B$ 有

$$m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x).$$

进而有

$$m \int_B g(x) d\sigma \leq \int_B f(x) g(x) d\sigma \leq M \int_B g(x) d\sigma.$$

若 $\int_B g(x)d\sigma = 0$, 则有 $g(x) = 0, \forall x \in H$.

若 $\int_B g(x)d\sigma \neq 0$, 不妨设 $\int_B g(x)d\sigma > 0$, 则有

$$m \leq \left(\int_B fgd\sigma \right) \left(\int_B gd\sigma \right)^{-1} \leq M.$$

由 f 在 B 上连续及介值定理, 存在 $\xi \in B$, 使得

$$\left(\int_B fgd\sigma \right) \left(\int_B gd\sigma \right)^{-1} = f(\xi).$$

此即所证之结果. ■

14.6 有界集合上二重积分的计算

定理 14.6.1 设

$$B = \{(x, y) : \phi(x) \leq y \leq \psi(x), a \leq x \leq b\}$$

其中 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, f 在 B 上可积. 若对任意 $x \in [a, b]$, $\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy$ 存在, 则有

$$\int_B f d\sigma = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy.$$

证明. 令 $c = \inf \phi([a, b]), d = \sup \psi([a, b])$, 则 $I = [a, b] \times [c, d] \supset B$. 由 f 在 B 上可积, f_B 在 I 上可积, 且 $\int_B f d\sigma = \int_I f_B d\sigma$. 由已知, 对任意 $x \in [a, b]$, $f_B(x, y)$ 在 $[c, d]$ 上可积. 由推论 14.4.3, 有

$$\int_I f_B d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f_B(x, y)dy.$$

而

$$\int_c^d f_B(x, y)dy = \int_c^{\phi(x)} f_B(x, y)dy + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f_B(x, y)dy + \int_{\psi(x)}^d f_B(x, y)dy. \quad (14.13)$$

显然, (14.13) 式中的第一个和第三个积分都为 0. 故有

$$\int_c^d f_B(x, y)dy = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f_B(x, y)dy = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy.$$

故有 $\int_B f d\sigma = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy$. ■

注 14.6.2 (1) 若 $B = \{(x, y) : \phi(y) \leq x \leq \psi(y), c \leq y \leq d\}$, $\phi(y)$ 和 $\psi(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续, f 在 B 上可积, 且对任意 $y \in [c, d]$, $\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx$, 则有

$$\int_B f d\sigma = \int_c^d dy \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx.$$

我们分别称 $\{(x, y) : \phi(x) \leq y \leq \psi(x), a \leq x \leq b\}$ 和 $\{(x, y) : \phi(y) \leq x \leq \psi(y), c \leq y \leq d\}$ 为 X -型域和 Y -型域.

(2) 也可以利用二重积分的几何意义得到定理 14.6.1 的结果. 下面假定 $f(x, y)$ 是连续的, 且 $f(x, y) \geq 0$.

先考虑一个简单情形. 如图 14.1, 如果积分区域 D 可以表示为

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

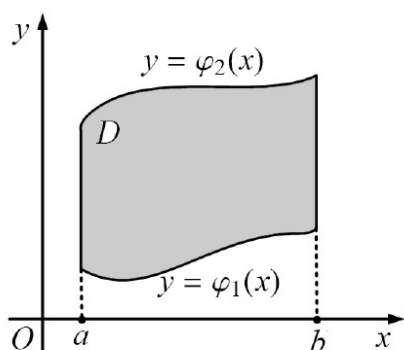


图 14.1

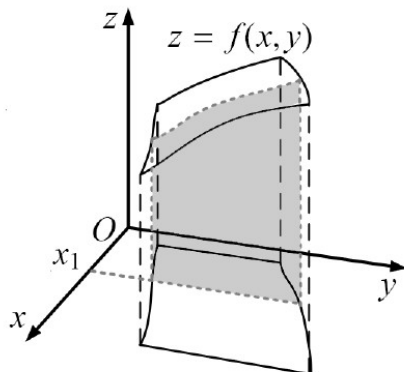


图 14.2

其中函数 $\varphi_1(x)$ 、 $\varphi_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续. 利用二重积分的定义, $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 可以理解为以 $z = f(x, y)$ 为

顶、积分区域 D 为底的曲顶柱体的体积. 现在应用定积分中学过的“平行截面面积为已知的立体体积”的方法来计算此曲顶柱体的体积.

在 $[a, b]$ 上任意固定一点 x_1 . 考虑曲顶柱体与平面 $x = x_1$ 的截面(图14.2中的阴影部分)面积 $S(x_1)$. 由图14.2易见, 这一截面是由曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ x = x_1, \end{cases}$ 在区间 $[\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_1)]$ 上所形成的曲边梯形, 它的面积 $S(x_1)$ 可以用定积分表示为 $S(x_1) = \int_{\varphi_1(x_1)}^{\varphi_2(x_1)} f(x_1, y) dy$.

再由 x_1 的任意性, 过区间 $[a, b]$ 上任一点 x 且平行于 yOz 面的平面截曲顶柱体所得到的截面面积:

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

于是, 得曲顶柱体的体积:

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx.$$

这个体积也就是所求二重积分的值, 从而有等式

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx.$$

例 14.6.3 计算二重积分 $\iint_D \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right) d\sigma$, 其中 D 为矩形区域

$$\{(x, y) | -2 \leq y \leq 2, -1 \leq x \leq 1\}.$$

解. 先画出积分区域 D 的图形(图14.3). 由于 D 既是X-型, 又是Y-型的区域, 因此有两种方法来计算这个积分. 先按X-型域计算, 得

$$\begin{aligned} \iint_D \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right) d\sigma &= \int_{-1}^1 dx \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[y - \frac{xy}{3} - \frac{1}{8}y^2 \right]_{-2}^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(4 - \frac{4}{3}x\right) dx = 8. \end{aligned}$$

再按Y-型区域计算:

$$\begin{aligned}
 \iint_D \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right) d\sigma &= \int_{-2}^2 dy \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right) dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left[x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{y}{4}x \right]_{-1}^1 dy \\
 &= \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{1}{2}y\right) dy = 8.
 \end{aligned}$$

■

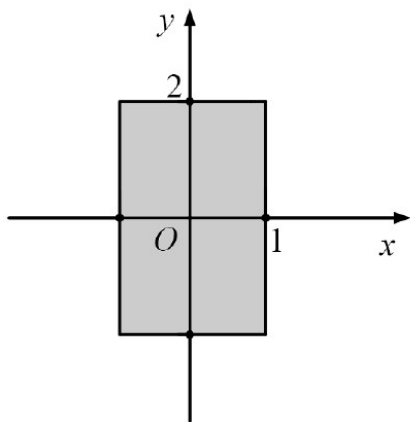


图 14.3

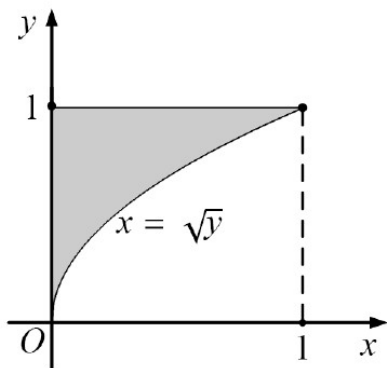


图 14.4

例 14.6.4 计算 $\iint_D x^2 y d\sigma$, 其中 D 是由 $x=0, y=1$ 与 $x=\sqrt{y}$ 所围成的区域.

解. 画出积分区域如图14.4所示. 容易求出直线 $y=1$ 与抛物线的交点坐标为 $(1,1)$. 将 D 视为X-型区域, 先对 y 后对 x 积分, 得

$$\begin{aligned}
 \iint_D x^2 y d\sigma &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 x^2 y dy \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_{x^2}^1 dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 (1 - x^4) dx \\
 &= \left[\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{14} x^7 \right]_0^1 = \frac{2}{21};
 \end{aligned}$$

将 D 视为Y-型区域, 先对 x 后对 y 积分, 得

$$\begin{aligned}
 \iint_D x^2 y d\sigma &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} x^2 y dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{3} y^{5/2} dy = \frac{2}{21}.
 \end{aligned}$$

■

例 14.6.5 计算 $\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma$, 其中 D 是由 $xy=1, y=x$, 与 $y=2$ 所围成的区域.

解. 画出积分区域如图14.5所示. 容易求出三条曲线的交点分别为 $(\frac{1}{2}, 2)$ 、 $(1, 1)$ 和 $(2, 2)$. 将 D 视为Y-型区域, 先对 x 后对 y 积分, 得

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma = \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^y \frac{x^2}{y^2} dx = \int_1^2 \frac{y^6 - 1}{3y^5} dy = \frac{27}{64}.$$

如果用直线 $x = 1$ 把此区域分成两部分, 那么 D 可以看作是两个X型区域的并. 先对 y 后对 x 积分, 得

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 \frac{x^2}{y^2} dy + \int_1^2 dx \int_x^2 \frac{x^2}{y^2} dy$$

由上式可以得到同样的结果, 但这种方法显然要麻烦一些. ■

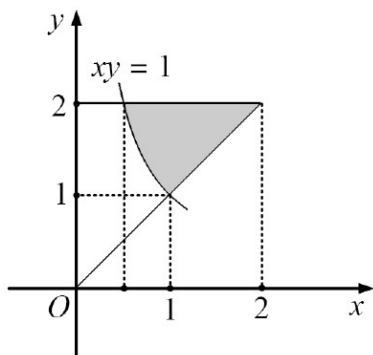


图 14.5

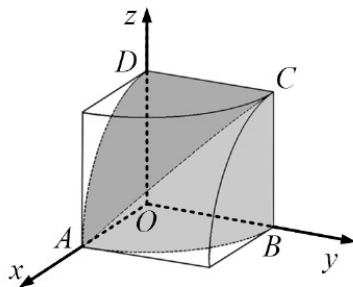


图 14.6

例 14.6.6 求两个底圆半径都等于 R 的直交圆柱面所围成的立体的体积.

解. 假设这两个圆柱的方程分别为 $x^2 + y^2 = R^2$ 和 $x^2 + z^2 = R^2$. 利用对称性, 所求立体的体积为如图14.6所示阴影部分和坐标面所围区域体积的8倍. 注意到曲面 ABC 与 xOy 平面垂直, 因此曲面 ACD 在 xOy 上的投影 $D = \{x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$. 利用二重积分的几何意义, 这个区域的体积

$$V = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} d\sigma = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} dy = \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3}R^3;$$

故所求的体积为 $\frac{16}{3}R^3$. ■

例 14.6.7 计算二重积分 $\iint_D x^2 e^{-y^2} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$.

解. 注意到这个积分区域既是X-型的, 又是Y-型的. 选择先对 x 后对 y 的积分顺序, 有

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 y^3 e^{-y^2} dy = \frac{1}{6} \int_0^1 y^2 e^{-y^2} dy^2 \\ &= \frac{1}{6} \left[-y^2 e^{-y^2} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-y^2} dy^2 \right] \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{3e}. \end{aligned}$$

■

在本例中, 若把二重积分化为先对 y 、后对 x 的累次积分, 由于 e^{-y^2} 没有初等的原函数, 这时积分难以进行. 这表明本例中的二重积分不宜进行先对 y 后对 x 的累次积分.

把二重积分化为累次积分时, 积分顺序不同往往使计算的繁简也会不同, 甚至会出现无法求出的情况. 所以在计算二重积分时, 应当先考查一下被积函数的性质和积分域的形状, 以决定采用哪一种积分顺序的累次积分来进行计算.

由于将二重积分化为累次积分时有两种积分顺序, 所以通过它可以已给的累次积分进行积分顺序的交换, 这种积分顺序的交换有时可以化简计算.

例 14.6.8 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 改变累次积分

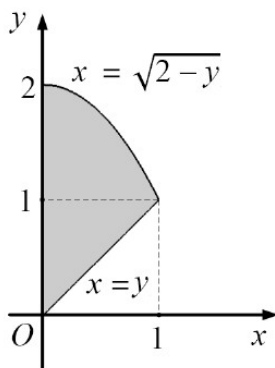
$$I = \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx$$

的顺序.

解. 首先将所给的累次积分看成函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分, 积分域 $D = D_1 \cup D_2$, 其中 $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$, $D_2 = \{(x, y) | 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{2-y}\}$. 在同一个坐标系中画出 D_1 和 D_2 的图形(图14.6). 考虑交换积分顺序, 选择先对 y 的积分顺序, 有

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy$$

■



例 14.6.9 计算二重积分 $I = \iint_D xy^2 dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$.

解. 分别用 D_1 和 D_2 表示 x 轴上方和下方的区域, 则有

$$\iint_{D_1} xy^2 dx dy = \int_0^1 y^2 dy \int_{-y-1}^{y+1} x dx = 0.$$

$$\iint_{D_2} xy^2 dx dy = \int_{-1}^0 y^2 dy \int_{y-1}^{1-y} x dx = 0.$$

故有 $I = 0$. ■

14.7 二重积分的换元法

定义 14.7.1 (正则映射) 若映射 $\phi: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$ 是从 $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ 到 $D \subset \mathbb{R}^2$ 的一一映射. $x, y \in C^1(\Delta)$, 且对任意 $(u, v) \in \Delta$, 有 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, 则称 ϕ 是 Δ 到 D 的正则映射.

引理 14.7.2 设正则映射 ϕ 把 \mathbb{R}^2 中以 $(u_0, v_0), (u_0 + h, v_0), (u_0 + h, v_0 + k), (u_0, v_0 + k)$ 为顶点的矩形 I_{hk} 一一地映为 $\phi(I_{hk})$. 则有

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{\sigma(\phi(I_{hk}))}{\sigma(I_{hk})} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|.$$

证明. 由已知, 有

$$\sigma(\phi(I_{hk})) \approx |(\phi(u_0 + h, v_0) - \phi(u_0, v_0)) \times (\phi(u_0, v_0 + k) - \phi(u_0, v_0))|.$$

而

$$\begin{aligned} \phi(u_0 + h, v_0) - \phi(u_0, v_0) &= (x(u_0 + h, v_0) - x(u_0, v_0), y(u_0 + h, v_0) - y(u_0, v_0)) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)h + \xi_1, \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)h + \xi_2 \right), \end{aligned}$$

这里 $\xi_i = o(h), i = 1, 2$, 并且也用到了条件 $x, y \in C^1(\Delta)$. 同理有

$$\phi(u_0, v_0 + k) - \phi(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)k + \eta_1, \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)k + \eta_2 \right), \eta_j = o(k), j = 1, 2.$$

则有

$$\begin{aligned} & |(\phi(u_0 + h, v_0) - \phi(u_0, v_0)) \times (\phi(u_0, v_0 + k) - \phi(u_0, v_0))| \\ &= \left| \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)hk + \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)h\eta_2 + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)k\xi_1 + \xi_1\eta_2 \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)hk + \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)k\xi_2 + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)h\eta_1 + \xi_2\eta_1 \right] \right| \\ &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}hk + o(hk) \right|. \end{aligned}$$

故有

$$\frac{\sigma(\phi(I_{hk}))}{\sigma(I_{hk})} \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| + o(1).$$

令 $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$, 可得所证结论. ■

定理 14.7.3 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界区域, 有面积. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 连续. 映射 $\phi: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$ 是从 $(u, v) \in \Delta$ 到 D 的正则映射, 则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

证明. 任取矩形 I 使得 $I \supset \Delta$, 再用平行于 u 轴和 v 轴的直线 $u = u_i (i = 0, 1, \dots, m), v = v_j (j = 0, 1, \dots, n)$ 去分割 I . 这里 $u_0 < u_1 < \dots < u_m, v_0 < v_1 < \dots < v_n$, 并且这 mn 个矩形在 ϕ 的作用下, 映成了 xy 平面上的 mn 个曲边四边形.

设完全包含在 D 内的曲边四边形为 $D_i (i = 1, 2, \dots, k)$, 且 $D_i = \phi(\Delta_i)$, 则 Δ_i 为完全包含在 Δ 中的矩形. 任取 $M_i \in D_i$, 则存在惟一的 $P_i \in \Delta_i$, 使得 $M_i = \phi(P_i)$. 由引理 14.7.2, 有

$$\sigma(D_i) \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(P_i) \right| \sigma(\Delta_i).$$

进而有

$$\sum_{i=1}^k f(M_i) \sigma(D_i) \approx \sum_{i=1}^k f(\phi(P_i)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(P_i) \right| \sigma(\Delta_i).$$

令 $\lambda_D = \max_{1 \leq i \leq mn} \{\text{diam} D_i\}$, $\lambda_\Delta = \max_{1 \leq i \leq mn} \{\text{diam} \Delta_i\}$, 则可以证明: 当 $\lambda_D \rightarrow 0$ 时有 $\lambda_\Delta \rightarrow 0$, 并且有

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \lim_{\lambda_D \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(M_i) \sigma(D_i) \\ &= \lim_{\lambda_\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(\phi(P_i)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(P_i) \right| \sigma(\Delta_i) \\ &= \iint_\Delta f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \end{aligned}$$

■

注 14.7.4 定理 14.7.3 的条件可改为: $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ 在 Δ 上除个别点或有限条曲线外不为 0, 或者 ϕ 在 Δ 上除有限条曲线外是到 D 的一一映射, 则结论仍成立.

二重积分中常用的一种变换是极坐标变换. 设 $\phi: \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ 把 Δ 一一地映为 D , 则有 $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$, 由定理 14.7.3 有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

注 14.7.5 当 Δ 包含原点时, $r = 0$; 当 Δ 包含正实轴的某一部分时, ϕ 不是一一映射, 但是由定理 14.7.4, 仍然可以用极坐标变换.

例 14.7.6 计算 $I = \iint_D |xy| dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\} (a > 0)$.

解. 由于积分区域关于 x 轴和 y 轴对称, 且被积函数关于 x 和 y 均为偶函数, 故利用对称性可得

$$I = 4 \iint_{D_1} xy dx dy,$$

其中 $D_1 = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ 是 D 在第一象限的部分. 选极坐标计算, 得

$$\begin{aligned} I &= 4 \iint_{D_1} \rho^2 \sin \theta \cos \theta d\rho d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho \\ &= \frac{a^4}{2}. \end{aligned}$$

■

例 14.7.7 求介于圆 $\rho = r$ 以外和圆 $\rho = 2r \cos \theta$ 以内的平面部分 (图 14.7) 的面积 $S (r > 0)$.

证明. 联立方程 $\begin{cases} \rho = r, \\ \rho = 2r \cos \theta, \end{cases}$ 得两圆的交点 $(r, \frac{\pi}{3})$ 和 $(r, -\frac{\pi}{3})$, 故所求面积的区域可以用不等式表示:

$$r \leq \rho \leq 2r \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3},$$

于是

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D dx dy = \iint_D \rho d\rho d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_r^{2r \cos \theta} \rho d\rho \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [\rho^2]_r^{2r \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} r^2 (4 \cos^2 \theta - 1) d\theta \\
 &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos 2\theta + 1) d\theta = r^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right).
 \end{aligned}$$

■

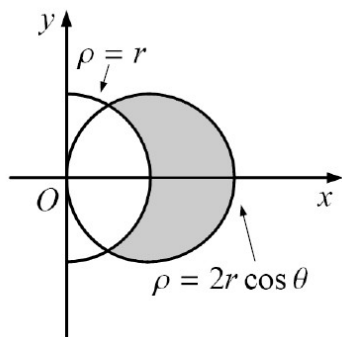


图 14.7

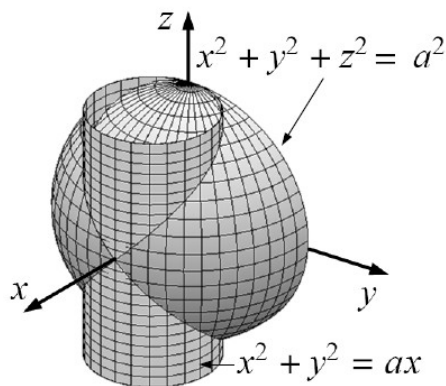


图 14.8

例 14.7.8 球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 被柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 所截, 求截下的体积(图 14.8).

解. 我们只需计算上半球体被截下的体积, 然后二倍之. 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq ax\}$, 用极坐标换元, 得

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \rho \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=a \cos \theta}^{r=0} d\theta \\
 &= \frac{2}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta \\
 &= \frac{2}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)) d\theta \\
 &= \frac{2}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).
 \end{aligned}$$

故欲求的体积为 $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9} \right) a^3$. ■

例 14.7.9 (广义极坐标) 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的面积.

解. 记 $D = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. 则所求的面积为 $S = \iint_D dx dy$.

做变换 $\begin{cases} x = ar \cos \theta, \\ y = br \sin \theta, \end{cases}$ 则有 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 且 $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = abr$, 故有

$$S = \int_0^1 \int_0^{2\pi} abr dr d\theta = \pi ab.$$

■

例 14.7.10 计算积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

解. 对任意 $R > 0$, 考虑 $D(R) = [-R, R] \times [-R, R]$ 上的二重积分 $I(R) = \iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, 则有

$$I(R) = \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 = 4 \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2.$$

另一方面, 记 $B(0, R) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $B(0, \sqrt{R}) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2R^2\}$, 则有 $B(0, R) \subset D(R) \subset B(0, \sqrt{R})$. 于是有

$$\iint_{B(0, R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{B(0, \sqrt{R})} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

由极坐标换元易得

$$\iint_{B(0, R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\theta = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

$$\iint_{B(0, \sqrt{R})} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi(1 - e^{-2R^2}).$$

故有

$$\pi(1 - e^{-R^2}) \leq 4 \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \pi(1 - e^{-2R^2}).$$

令 $R \rightarrow +\infty$, 可得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

■

14.8 三重积分

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z)$ 在 Ω 上有定义. 与二重积分类似, 我们可以定义 f 在 Ω 上的三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$ 或 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$. 比如, 我们可以先考虑立方体上的三重积分, 可以讨论其可积性(有相应的达布理论和Lebesgue理论)以及积分性质, 然后将其推广到一般的有界集上. 我们还可以定义三维空间上的零测集和零体积集, 也可以定义集合的体积等等. 下面我们重点讨论三重积分的计算.

14.8.1 直角坐标系下三重积分的计算方法

与二重积分类似, 如果 $f(x, y, z)$ 可积, 我们也只需要考虑某种比较特殊的分割方式, 比如用平行于三个坐标面的三族平面来分割 Ω , 那么除了包含 Ω 边界的一些不规则小闭区域外, 绝大多数的小闭区域 Ω_i 为长方体. 设长方体小闭域 Ω_i 的边长为 $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$, 则有 $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$, 进而 $dV = dx dy dz$. 于是有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

称 $dx dy dz$ 为直角坐标系中的体积元素.

先考虑最简单的情形. 假设积分区域为长方体闭区域:

$$\Omega = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\},$$

f 为 Ω 上的一个可积函数.

把区间 $[a, b]$ 、 $[c, d]$ 、 $[r, s]$ 分别 l 、 m 、 n 等分; $[a, b]$ 的第 i 个子区间记为 $[x_{i-1}, x_i]$, 区间长度 Δx ; $[c, d]$ 的第 j 个子区间记为 $[y_{j-1}, y_j]$, 区间长度 Δy ; $[r, s]$ 的第 k 个子区间记为 $[z_{k-1}, z_k]$, 区间长度 Δk . 用平面族 $x = x_i, y = y_j, z = z_k (i = 0 \cdots l, j = 0 \cdots m, k = 0 \cdots n)$ 可将 Ω 分为 lmn 个子闭长方体:

$$\Omega_{ijk} = \{(x, y, z) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, z_{k-1} \leq z \leq z_k\}, \\ i = 1 \cdots l, j = 1 \cdots m, k = 1 \cdots n.$$

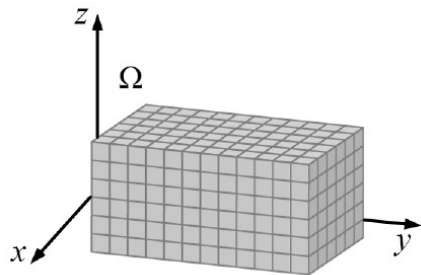


图 14.9

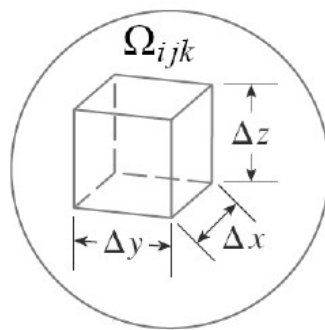


图 14.10

每个子长方体的体积 ΔV 均为 $\Delta x \Delta y \Delta z$ (图14.9,图14.10).

注意到点 (x_i, y_j, z_k) 在 Ω_{ijk} 中, 利用三重积分的定义, 有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

可以证明如果有界 f 在 Ω 上除个别点或有限条线或有限块面外连续(该证明已超出本书讨论范围), 则上述三重极限可以化为三次极限:

$$\begin{aligned} & \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta x \Delta y \Delta z \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta x \Delta y \Delta z \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta z \Delta y \Delta x. \end{aligned}$$

利用定积分的定义, 有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dV &= \int_r^s \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_r^s f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx, \end{aligned}$$

特别的, 如积分区域在 xOy 平面上的投影为

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

利用二重积分与累次积分的关系, 有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dV &= \iint_D dx \, dy \int_r^s f(x, y, z) \, dz \\ &= \int_r^s dz \iint_D f(x, y, z) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

用同样的方法可以把这个三重积分化成其它积分顺序的累次积分.

由此可见如果积分区域的性质比较好, 计算在此区域上的三重积分可以根据积分区域的特点先计算一个定积分再计算一个二重积分或先计算一个二重积分再计算一个定积分. 以下将不加证明的给出计算三重积分的一些计算公式.

如果平行于 z 轴且穿过 Ω 内部的直线至多与 Ω 的边界曲面交于两点(图14.11), 则积分区域可以表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$

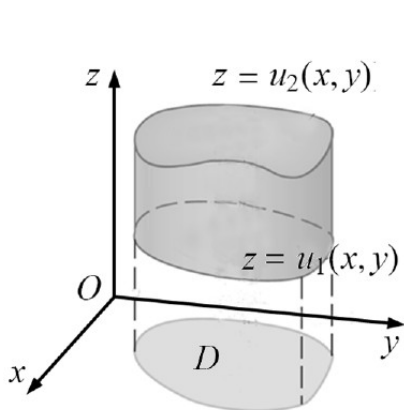


图 14.11

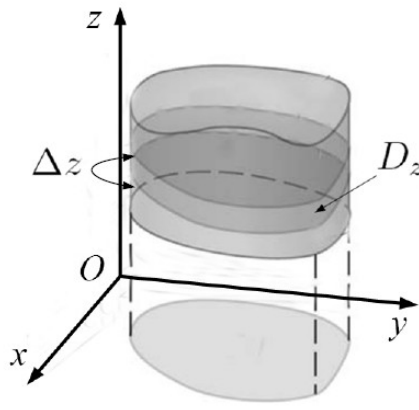


图 14.12

与积分区域为长方体区域的情形类似, 可以把在 Ω 上的三重积分化为定积分与二重积分的累次积分:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

这种积分顺序简称为‘先单后重’或‘先一后二’.

又若 $D = \{(x, y) | v_1(x) \leq y \leq v_2(x), x \in [a, b]\}$, 则进一步运用二重积分化为二次积分的方法, 得

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{v_1(x)}^{v_2(x)} dy \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

类似地, 当平行于 y 轴(x 轴)且穿过 Ω 的直线至多与 Ω 的边界曲面交于两点时, 我们可把积分区域投影到 xOz (或 yOz)平面上而得到类似的公式.

设对于积分区域 Ω , z 的取值范围是 $[r, s]$. 如果我们把积分区域 Ω 被过点 $(0, 0, z)$ 且平行于 xOy 面的平面所截出的平面区域记做 D_z , 则有下列变换公式:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_r^s dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy.$$

这种积分顺序简称为‘先重后单’或‘先二后一’.

上述方法也适合于用垂直于 x 轴(y 轴)且过点 $(x, 0, 0)$ (或 $(0, y, 0)$)的平面与 Ω 相截而得到的积分公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{D_x} f(x, y, z) dx dy.$$

和

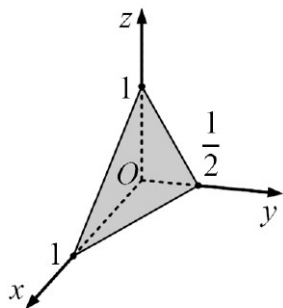
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \iint_{D_y} f(x, y, z) dx dy.$$

例 14.8.1 用两种方法计算积分 $I = \iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz$, 区域 Ω 由三个坐标平面及 $x+2y+z=1$ 围成 (图 14.8.1).

解法一. 先一后二法

积分区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1-x-2y, (x, y) \in D\}$, 其中 Ω 在 xOy 平面上的投影为

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{2} \right\}.$$



于是有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz &= \iint_D dx \, dy \int_0^{1-x-2y} x \, dz = \iint_D x(1-x-2y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y) \, dy = \int_0^1 x [y(1-x) - y^2]_0^{\frac{1-x}{2}} dx \\ &= \int_0^1 x \left(\frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^2}{4} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{4} dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

■

解法二. 采用先二后一法:

令 $D_z = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1-z, 0 \leq y \leq \frac{1-z-x}{2}\}$, 则 Ω 可以写成

$$\{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1, (x, y) \in D_z\};$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dz \iint_{D_z} x \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{\frac{1-z-x}{2}} x \, dy \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{x(1-z-x)}{2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(1-z)^3}{12} dz = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

■

利用对称性或轮换对称性可简化或计算三重积分.

例 14.8.2 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x+z) \, dV$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围区域.

解. 易知 Ω 关于 yOz 平面对称, 且 Ω 在 xOy 上的投影区域 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$.

由对称性易有 $\iiint_{\Omega} x \, dV = 0$, 而

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z \, dV &= \iint_D dx \, dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz = \iint_D \left(\frac{1}{2} - x^2 - y^2\right) dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - \rho^2\right) \rho \, d\rho \\ &= 2\pi \times \frac{1}{16} = \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

■

例 14.8.3 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dV$, Ω 是椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所围空间区域.

解. 令 $D_z = \{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}\}$, 则 Ω 可以写成

$$\{(x, y, z) | -c \leq z \leq c, (x, y) \in D_z\},$$

从而

$$\iiint_{\Omega} z^2 \, dx \, dy \, dz = \int_{-c}^c z^2 \, dz \iint_{D_z} dx \, dy.$$

而由椭圆的面积公式知,

$$\iint_{D_z} dx \, dy = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

故

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z^2 \, dx \, dy \, dz &= \pi ab \int_{-c}^c z^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz \\ &= \pi ab \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5c^2}\right) \Big|_{-c}^c \\ &= \frac{4}{15} \pi abc^3.\end{aligned}$$

利用轮换对称性,

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} x^2 \, dx \, dy \, dz &= \frac{4}{15} \pi a^3 bc, \\ \iiint_{\Omega} y^2 \, dx \, dy \, dz &= \frac{4}{15} \pi ab^3 c.\end{aligned}$$

得

$$I = \frac{4}{15} \pi abc(a^2 + b^2 + c^2).$$

■

14.8.2 利用变量代换计算三重积分

平面几何里为了能够表示某些曲线和区域, 除了直角坐标系外还引进了极坐标系. 与此相仿, 空间解析几何中除了常用的直角坐标系外, 还有两个常用的坐标系: 柱面坐标系与球坐标系.

变量替换公式

三重积分的变量替换与二重积分完全相仿, 这里我们仅叙述主要结论.

定理 14.8.4 设 $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ 在 $uOvw$ 中有界闭区域 Ω' 上具有连续的偏导数, 且 $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$. 假设这些函数建立了空间区域 Ω 中的点 (x, y, z) 与区域 Ω' 的点 (u, v, w) 之间的一个一一对应, f 是 Ω 上的连续函数. 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J| du dv dw.$$

由此可以看出体积元素在不同坐标系中的转换关系为 $dx dy dz = |J| du dv dw$. 需要注意的是如果雅可比行列式 J 只在 Ω' 上的个别点或有限条线或有限块面上为零时, 定理 14.8.4 的结论仍然成立.

利用柱面坐标计算三重积分

设 M 为空间内一点, 其直角坐标为 (x, y, z) , 并设点 M 在 xOy 面上的投影 P 的极坐标为 (ρ, θ) , 则有序数组 (ρ, θ, z) 就称为点 M 的柱面坐标(图 14.13). 这里规定 ρ, θ, z 的变化范围为:

$$0 \leq \rho < +\infty,$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ 或一个长度为 } 2\pi \text{ 的闭区间},$$

$$-\infty < z < +\infty.$$

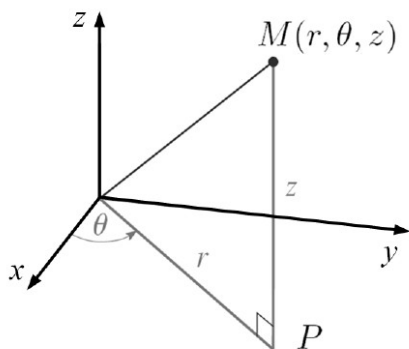


图 14.13

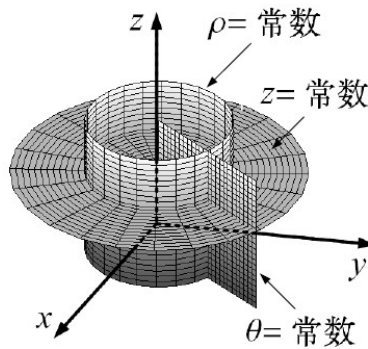


图 14.14

三组坐标面分别对应于 $Oxyz$ 中的曲面如下:(如图 14.14):

$\rho = \text{常数}$, 表示以 z 轴为中心轴半径为给定常数的圆柱面;

$\theta = \text{常数}$, 表示以 z 轴为边界的半平面;

$z = \text{常数}$, 表示与 xOy 坐标面平行的平面.

显然, 点 M 的直角坐标与柱面坐标的关系为

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = z.$$

当某个几何体在建立适当的坐标系后关于 z 轴是对称的时候, 柱面坐标将会使这个区域的表示变得非常简单. 比如, 柱面 $x^2 + y^2 = c^2$ 在柱面坐标下的方程为 $\rho = c$. 利用定理14.8.4

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dV &= \iiint_{\Omega'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho \, d\rho \, d\theta \, dz \\ &= \iiint_{\Omega'} F(\rho, \theta, z) \, d\rho \, d\theta \, dz,\end{aligned}$$

其中 $F(\rho, \theta, z) = \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$. 这个式子是把三重积分的变量从直角坐标变换为柱面坐标的公式. 至于变量变换为柱面坐标后的三重积分的计算, 与二重积分类似, 可以根据积分区域的特点化为三次积分来进行. 下面通过几个例子来说明计算方法.

例 14.8.5 用柱面坐标计算

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz,$$

其中 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$ (图14.15).

解. 积分区域在 xOy 上的投影为 $x^2 + y^2 \leq 4$, 在极坐标系下可以记为 $0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$; 上下底面分别为 $z = 2, z = 0$, 于是在柱面坐标下, 积分区域可以记为

$$\Omega = \{(\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\}.$$

故

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho \, d\rho \, d\theta \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 \, d\rho \int_0^2 dz = 16\pi.\end{aligned}$$

■

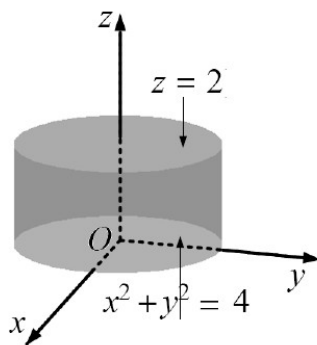


图 14.15

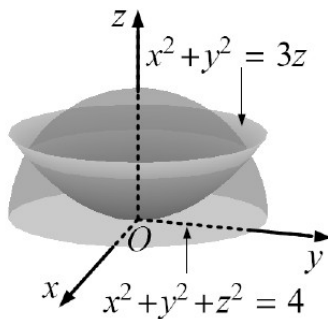


图 14.16

例 14.8.6 设 Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与抛物面 $x^2 + y^2 = 3z$ 所围部分 (图14.16), 计算 $\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$.

解. 积分区域在 xOy 上的投影为 $x^2 + y^2 \leq 3$, 在极坐标系下可以记为 $0 \leq \rho \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 上下底面分别为 $z = \sqrt{4 - \rho^2}, z = \frac{1}{3}\rho^2$, 在柱面坐标系下积分区域可以写为:

$$\Omega = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}, \frac{1}{3}\rho^2 \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2} \right\}.$$

因此

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho \, d\rho \int_{\frac{1}{3}\rho^2}^{\sqrt{4-\rho^2}} z \, dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \rho (4 - \rho^2 - \frac{1}{9}\rho^4) \, d\rho \\
 &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} (4\rho - \rho^3 - \frac{1}{9}\rho^5) \, d\rho \\
 &= \frac{13}{4} \pi.
 \end{aligned}$$

■

利用球面坐标计算三重积分

设 $M(x, y, z)$ 为空间内一点, 则点 M 也可用这样三个有次序的数 r, φ, θ 来确定, 其中 r 为原点 O 与点 M 间的距离, φ 为有向线段 \overrightarrow{OM} 与 z 轴正向所夹的角, θ 为从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向转到有向线段 \overrightarrow{OP} 的角度, 这里 P 为点 M 在 xOy 面上的投影(图 14.17). 这样的三个数 r, φ, θ 称为点 M 的球面坐标, 这里 r, φ, θ 的变化范围为

$$0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

如图 14.18 所示, 三组坐标平面分别为 $r = \text{常数}$, 即以原点为心的球面; $\varphi = \text{常数}$, 即以原点为顶点、 z 轴为轴的圆锥面; $\theta = \text{常数}$, 即过 z 轴的半平面.

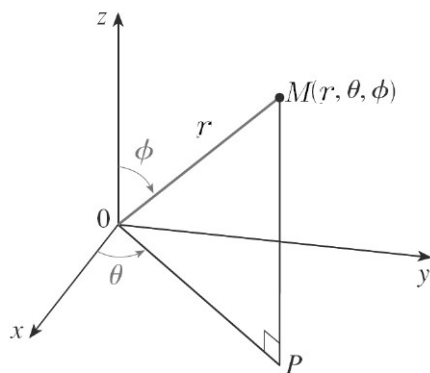


图 14.17

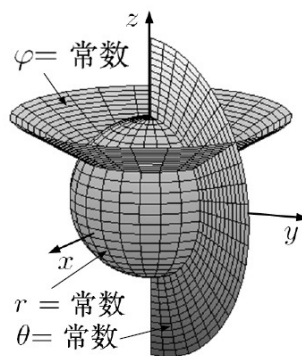


图 14.18

点 M 的直角坐标与球面坐标的关系为

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi.$$

利用定理 14.8.4,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dV = \iiint_{\Omega'} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta.$$

上式就是把三重积分的变量从直角坐标变换为球面坐标的公式.

要计算变量变换为球面坐标后的三重积分, 可把它化为对 r 对 φ 及对 θ 的三次积分. 而这需要能精确确定坐标限. 一般来说:

1. 关于 θ 的限. 将积分区域 Ω 进行观察, 观察其在 xOy 面上的投影(不必画出投影面), 按投影面确定 θ 的范围. 如果投影面包含原点, 则 $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

- 关于 φ 的限. 在 θ 的范围内任取一点 θ , 过 z 轴做一与 xOz 成 θ 角的半平面, 这个半平面在 Ω 内截得区域 D_1 , 由此区域确定出 φ 的范围.
- 关于 r 的限. 做一条从原点出发的射线, 从曲面 $r = r_1(\theta, \varphi)$ 穿入 Ω (为积分下限), 从 $r = r_2(\theta, \varphi)$ 穿出 Ω (为积分上限).

比如积分区域 Ω 的边界曲面是一个包围原点的闭曲面, 其球面坐标方程为 $r = r(\varphi, \theta)$, 则

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi, \theta)} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi \, dr. \end{aligned}$$

特别地, 当积分区域为 $r = a$, 被积函数为 $f(x, y, z) = 1$ 时, 由上式即得球的体积

$$V = \iiint_{\Omega} dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin \varphi \, dr = \frac{4}{3} \pi a^3,$$

这是我们所熟知的.

例 14.8.7 利用球坐标计算由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 以及 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 所围成的区域(图14.19)的体积.

证明. 注意到 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 是以 $(0, 0, \frac{1}{2})$ 为中心, $\frac{1}{2}$ 为半径的球面, 在球坐标下, 这个球面的方程为 $r = \cos \varphi$, 而锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在球坐标系下变为:

$$r \cos \varphi = \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta} = r \sin \varphi,$$

于是, 这个锥面的方程为 $\varphi = \frac{\pi}{4}$. 从图14.20可以看出, 当 φ 和 θ 固定时, r 从0变化到 $\cos \varphi$; 再由图14.21知, 当 θ 固定时, φ 由0变化到 $\pi/4$; 而由图14.22知道 θ 的变化范围是 $[0, 2\pi]$, 于是因此该立体在球坐标系下可以记为:

$$\Omega = \{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi/4, 0 \leq r \leq \cos \varphi\}.$$

从而所求的体积

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^2 \sin \varphi \, dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \sin \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

■

例 14.8.8 计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV,$$

其中 Ω 是以原点为心, 1为半径的球: $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

解. 注意到积分区域 Ω 是一个球体, 利用球坐标, 积分区域可以表示为:

$$\Omega = \{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\},$$

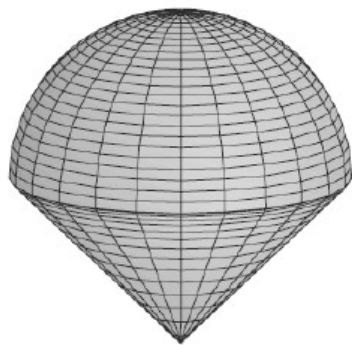


图 14.19

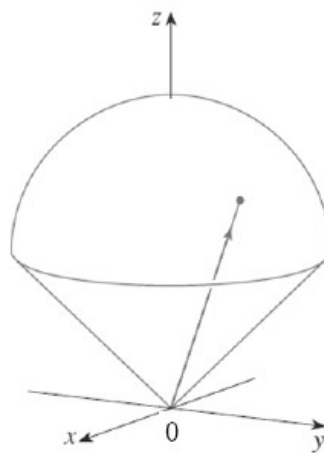


图 14.20

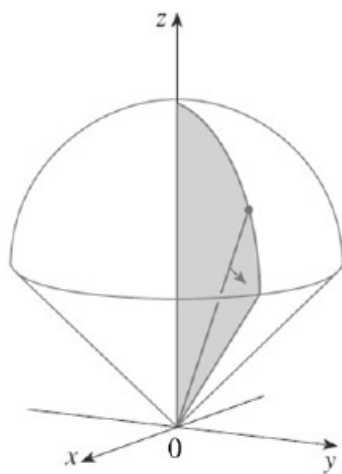


图 14.21

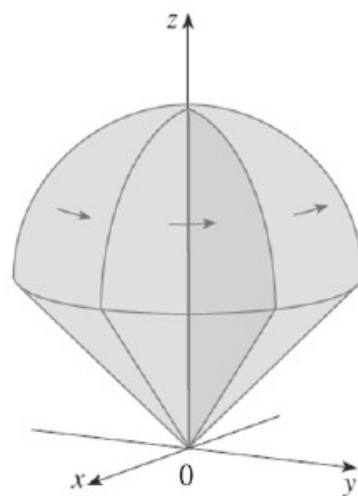


图 14.22

另外, 在球坐标系下, 被积函数中的 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, 利用球坐标变换公式, 得

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 e^{(r^2)^{3/2}} r^2 \sin \varphi dr \\ &= \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 e^{r^3} dr = \frac{4}{3}\pi(e-1).\end{aligned}$$

■

需要注意的是, 在这个例子中, 如果不用球坐标而用一般的三重积分化为累次积分的办法是无法把积分值算出来的.

例 14.8.9 计算

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz,$$

其中 Ω 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围区域(这里 $a, b, c > 0$).

解. 作广义球坐标代换:

$$x = ar \sin \phi \cos \theta, y = br \sin \phi \sin \theta, z = cr \cos \phi$$

其中 $r \geq 0, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

在这个变换下, 椭球面方程变为 $r = 1$, 域 Ω 变为

$$\Omega' = \{(r, \phi, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

其变换的雅可比行列式 $J = abcr^2 \sin \phi$ (仅在有限的平面上为零).

故

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz &= \iiint_{\Omega'} \sqrt{1 - r^2} \cdot abcr^2 \sin \phi dr d\phi d\theta \\ &= abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r^2 dr \\ &= \frac{\pi^2}{4} abc.\end{aligned}$$

■

习题14.8

1. 将重积分 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 化为直角坐标系的累次积分, 其中 Ω 分别为:

- (1) $\Omega = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$;
- (2) $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x + y \leq 1, x, y \geq 0\}$;
- (3) Ω 由 $y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0, x + z = \pi/2$ 所围成的闭区域.

2. 将下列三次积分改为形如 $\int dz \int dy \int f(x, y, z) dx$ 的三次积分:

- (1) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^1 f(x, y, z) dz$;

$$(2) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz;$$

3. 计算下列三重积分:

$$(1) I = \iiint_{\Omega} y dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由 } z=0, z=y, y=1 \text{ 及 } y=x^2 \text{ 所围成的闭区域};$$

$$(2) I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由 } x=0, y=0, z=0 \text{ 及 } x+y+z=1 \text{ 所围成的闭区域};$$

$$(3) I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由 } x=1, x=2, z=0, y=0, y=x \text{ 及 } z=y \text{ 所围成的闭区域};$$

$$(4) I = \iiint_{\Omega} y \cos(z+x) dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由 } y=\sqrt{x}, y=0, z=0 \text{ 及 } x+z=\frac{\pi}{2} \text{ 所围成的闭区域};$$

$$(5) I = \iiint_{\Omega} \left(\frac{y \sin z}{1+x^2} - 1 \right) dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq \pi;$$

$$(6) I = \iiint_{\Omega} xy^2z^3 dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是曲面 } z=xy, y=x, z=0 \text{ 所围成的闭区域}.$$

4. 证明 $\int_0^x dv \int_0^v du \int_0^u f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$.

5. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_{\Omega} z dV, \Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}\};$$

$$(2) \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV, \Omega = \{(x, y, z) | \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 2\};$$

$$(3) \iiint_{\Omega} \frac{1}{1+x^2+y^2} dV, \Omega = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\};$$

$$(4) \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2+y^2} dV, \Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq \sqrt{2y-y^2}, 0 \leq z \leq a\}, (a > 0);$$

$$(5) \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2} dV, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由柱面 } y = \sqrt{1-x^2} \text{ 及平面 } y=0, z=0, x+y+z=4 \text{ 所围成的闭区域}.$$

6. 利用球面坐标计算下列积分:

$$(1) \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV, \Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\};$$

$$(2) \iiint_{\Omega} z dV, \Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + (z-a)^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq z^2\}, (a > 0);$$

$$(3) \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV, \Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1, z \geq 1, y \geq 0\};$$

- (4) $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 此处 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 和 $x^2 + y^2 + (z-a)^2 \leq a^2$ 的公共部分($a > 0$);
- (5) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz$.

7. 选择适当坐标系计算下列三重积分:

- (1) $\iiint_{\Omega} xy dV$, 其中 Ω 是由 $x^2 + y^2 = 1$ 及 $z = 1, z = 0, x = 0, y = 0$ 所围成的位于第一卦限内的闭区域;
- (2) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dV$, $\Omega = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}, 0 \leq y \leq x\}$;
- (3) $\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$, 此处 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 和 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 所围成的且 $z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 的闭区域;
- (4) $\iiint_{\Omega} \frac{b-x}{[(b-x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 (0 < a < b)\}$;

14.9 n 重积分

我们可以把二重积分和三重积分的所有理论推广到更一般的情形, 即 n 重积分. 关于 n 重积分的理论这里不再赘述, 我们只用两个例子来加以说明.

例 14.9.1 n 维球体是指集合 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\}$, 记为 $B_n(R)$. 它是平面上的圆或三维空间中的球在高维空间的推广. 计算其体积 $\mu(B_n(R))$.

解. 由 n 重积分的定义, 有

$$\mu(B_n(R)) = \int_{B_n(R)} d\mu.$$

作换元 $x_i = Rt_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则有 $\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)} = R^n$. 故有

$$\mu(B_n(R)) = R^n \mu(B_n(1)) = R^n \int_{B_n(1)} d\mu = R^n \int \cdots \int_{t_1^2 + \cdots + t_n^2 \leq 1} dt_1 \cdots dt_n. \quad (14.14)$$

其中 $B_n(1) = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) : t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 \leq 1\}$. 可以将其表示为 $\{(t_1, t_2, \dots, t_n) : t_{n-1}^2 + t_n^2 \leq 1, t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_{n-2}^2 \leq 1 - t_{n-1}^2 - t_n^2\}$, 然后将(14.14)式右边的 n 重积分化为累次积分, 有

$$\mu(B_n(1)) = \iint_{t_{n-1}^2 + t_n^2 \leq 1} dt_{n-1} dt_n \int \cdots \int_{K_{n-2}} dt_1 \cdots dt_{n-2}.$$

这里 $K_{n-2} = B_{n-2}(\sqrt{1 - t_{n-1}^2 - t_n^2})$. 显然 K_{n-2} 仍然是一个球体, 故有

$$\int \cdots \int_{K_{n-2}} dt_1 \cdots dt_{n-2} = \mu(K_{n-2}) = \mu(B_{n-2}(\sqrt{1 - t_{n-1}^2 - t_n^2})) = (1 - t_{n-1}^2 - t_n^2)^{\frac{n-2}{2}} \mu(B_{n-2}(1)).$$

从而有

$$\mu(B_n(1)) = \mu(B_{n-2}(1)) \iint_{t_{n-1}^2 + t_n^2 \leq 1} (1 - t_{n-1}^2 - t_n^2)^{\frac{n-2}{2}} dt_{n-1} dt_n.$$

由极坐标易求得

$$\iint_{t_{n-1}^2+t_n^2 \leq 1} (1-t_{n-1}^2-t_n^2)^{\frac{n-2}{2}} dt_{n-1} dt_n = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n-2}{2}} r dr = \frac{2\pi}{n}.$$

即有 $\mu(B_n(1)) = \frac{2\pi}{n} \mu(B_{n-2}(1))$, 由于 $\mu(B_1(1)) = 2, \mu(B_2(1)) = \pi$, 故有

$$\mu(B_{2n}(1)) = \frac{\pi^n}{n!}, \mu(B_{2n-1}(1)) = \frac{2^n \pi^{n-1}}{(2n-1)!!}.$$

进而有

$$\mu(B_{2n}(R)) = \frac{\pi^n}{n!} R^{2n}, \mu(B_{2n-1}(R)) = \frac{2^n \pi^{n-1}}{(2n-1)!!} R^{2n-1}.$$

■

例 14.9.2 用 n 维球坐标变换求 $\mu(B_n(R))$.

解. n 维球坐标变换是指

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1 \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \end{cases}$$

对应于 $B_n(R)$ 有, $0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-2} \leq \pi, 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$. 经过计算可知

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})} = r^{n-1} (\sin \theta_1)^{n-2} (\sin \theta_2)^{n-3} \cdots \sin \theta_{n-2}.$$

故有

$$\begin{aligned} \mu(B_n(R)) &= \int_{B_n(R)} d\mu = \int_0^R r^{n-1} dr \int_0^\pi (\sin \theta_1)^{n-2} d\theta_1 \cdots \int_0^\pi \sin \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \\ &= \frac{2\pi R^n}{n} \left(\int_0^\pi (\sin \theta_1)^{n-2} d\theta_1 \right) \left(\int_0^\pi (\sin \theta_2)^{n-3} d\theta_2 \right) \cdots \left(\int_0^\pi \sin \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{\pi^n}{n!} R^{2n}, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{2^n \pi^{n-1}}{(2n-1)!!} R^{2n-1}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases} \end{aligned}$$

这里我们用到了如下结果:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

■

14.10 积分的应用

14.10.1 重积分在几何上的应用

根据二重积分的几何意义或三重积分的定义, 可以利用重积分计算封闭曲面所围立体的体积, 在这里就不赘述了. 二重积分还可以用来计算空间曲面的面积.

设曲面 S 由方程 $z = f(x, y)$ 给出, D 为曲面 S 在 xOy 面上的投影区域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上具有连续偏导数 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$. 我们要计算曲面 S 的面积 A .

在闭区域 D 上任取一直径很小的面积为 $d\sigma$ 闭区域 σ . 在 σ 上取一点 $P(x, y)$, 相应地曲面 S 上有一点 $M(x, y, f(x, y))$, 点 M 在 xOy 面上的投影即点 P . 点 M 处曲面 S 的切平面设为 T (图14.23). 以 σ 的边界为准线作母线平行于 z 轴的柱面, 这柱面在曲面 S 上截下一小片曲面 S_σ , 在切平面 T 上截下一小片平面 T_σ . 由于 σ 的直径很小, T_σ 的面积 dA 可以近似代替 S_σ 的面积. 记曲面 S 在点 M 处的单位法向量(指向朝上)为 \vec{n}^0 , 利用曲面的方程, 有

$$\vec{n}^0 = \frac{(-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)}{\sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}},$$

其与 z 轴正向所成的角 γ 满足

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}}.$$

注意到 T_σ 在 xOy 上的投影是 D_σ ,

$$dA = \frac{1}{\cos \gamma} d\sigma,$$

这就是曲面 S 的面积元素, 以它为被积表达式在闭区域 D 上积分, 得曲面面积公式:

$$A = \iint_D \frac{1}{\cos \gamma} d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} d\sigma.$$

如果曲面块 S 的方程为参数形式: $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in \Sigma$. 其中 Σ 为 uOv 平面上的一区域, S 上的点与 Σ 中的点 (u, v) 之间一一对应. 若 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ 在 Σ 上连续, 且有一阶连续偏导数, 记

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

并且 $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. 根据隐函数存在定理、隐函数的求导法则以及刚才得到的曲面的面积公式, 可以得到参数方程下曲面的面积:

$$A = \iint_{\Sigma} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv,$$

特别的, 如果记

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned}$$

则

$$A = \iint_{\Sigma} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

例 14.10.1 求以 R 为半径的球面面积.

解. 上半球面的方程为 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 其在 xOy 上的投影 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$. 注意到

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, z_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

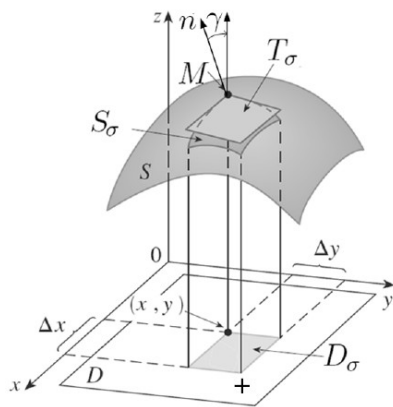


图 14.23

于是球面面积

$$A = 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

这个二重积分的被积函数在积分区域上无界, 因此由定义9.1, 上述积分的被积函数其实不可积. 这种情况与之前出现过的无界函数的广义积分非常类似. 我们可以利用类似的方法定义无界函数的广义二重积分, 有兴趣的读者可以试着自己写出. 而在具体计算过程中, 广义二重积分与二重积分的计算方法几乎没有区别, 比如我们可以这样计算上面这个积分:

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{R}{R^2 - \rho^2} \rho d\rho \\ &= -4\pi R \sqrt{R^2 - \rho^2} \Big|_0^R = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

我们可以用另外一种方法验证上面得到的结果: 球面的参数方程

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \sin \varphi, \\ y = R \sin \theta \sin \varphi, \\ z = R \cos \varphi, \end{cases}$$

并且 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$. 易知 $EG - F^2 = R^4 \sin^2 \varphi$, 故球面的面积元素

$$dS = \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = R^2 \sin \varphi d\theta d\varphi,$$

于是球面面积

$$A = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi R^2 \sin \varphi d\varphi = 2\pi R^2 (-\cos \varphi) \Big|_0^\pi = 4\pi R^2.$$

■

14.10.2 重积分在物理上的应用

利用重积分可以计算平面薄板和空间物体的质量、质心、转动惯量等问题.

物体的质量

由二重积分的概念, 面密度为 $\mu = f(x, y)$ 的平面薄板 D 的质量

$$m = \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

同理, 体密度为 $\mu = f(x, y, z)$ 的空间物体 Ω 的质量

$$m = \iiint_\Omega f(x, y, z) dV.$$

质心

设 Ω 为一可求面积的曲面或可求体积的空间区域, 其密度函数 $\rho(x, y, z)$ 是连续的. 为求得 Ω 的质心坐标, 先将 Ω 分割成 n 小块, 在体积为 ΔV_i 的第 i 个小块 V_i 上任取一点 (ζ_i, η_i, ξ_i) , 于是小块 V_i 的质量可以用 $\rho(\zeta_i, \eta_i, \xi_i) \Delta V_i$ 近似代替. 若把每一小块看作质量集中在 (ζ_i, η_i, ξ_i) 的质点时, 整个物体就可用这个 n 个质点的质点系来近似代替. 设这个质点系的质心为 $(\bar{x}_n, \bar{y}_n, \bar{z}_n)$, 由质心坐标公式,

$$\begin{aligned} \bar{x}_n &= \frac{\sum_{i=1}^n \zeta_i \rho(\zeta_i, \eta_i, \xi_i) \Delta v_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\zeta_i, \eta_i, \xi_i) \Delta v_i}; \\ \bar{y}_n &= \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \rho(\zeta_i, \eta_i, \xi_i) \Delta v_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\zeta_i, \eta_i, \xi_i) \Delta v_i}; \end{aligned}$$

$$\bar{z}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\zeta_i, \eta_i, \xi_i) \Delta v_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\zeta_i, \eta_i, \xi_i) \Delta v_i};$$

当 Ω 的分割变得越来越细时, 我们自然地把 $(\bar{x}_n, \bar{y}_n, \bar{z}_n)$ 的极限 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 定义为 Ω 的质心坐标, 即

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}, \\ \bar{y} &= \frac{\iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}, \\ \bar{z} &= \frac{\iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}.\end{aligned}$$

当物体 Ω 的密度均匀即 ρ 为常数时, 有

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} x \, dV, \bar{y} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} y \, dV, \bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z \, dV,$$

这里 V 为 Ω 的体积.

此外我们可以看到, 对于密度分布为 $\rho(x, y)$ 的平面薄板 D , 它的质心坐标则是

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) \, d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) \, d\sigma}, \bar{y} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) \, d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) \, d\sigma}.$$

当平面薄板 D 密度均匀即 ρ 是常数时, 有

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \, d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{1}{A} \iint_D x \, d\sigma, \bar{y} = \frac{\iint_D y \, d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{1}{A} \iint_D y \, d\sigma,$$

这里 A 为平面薄板 D 的面积.

例 14.10.2 求一均匀的球顶锥体的质心. 设该球的球心在原点, 半径为 a . 圆锥体的顶点在原点, 中心轴为 z 轴, 锥面与 z 轴交角为 α ($0 < \alpha < \pi/2$).

解. 不妨设此物体的密度为 $\mu(x, y, z) \equiv 1$, 设质心为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. 由对称性知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$, 下面求 \bar{z} . 在球面坐标系中, 球顶柱体 Ω 可表示为

$$\{(\rho, \theta, \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 \leq \rho \leq a\}.$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^a 1 \cdot r^2 \sin \varphi \, dr \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 (1 - \cos \alpha).\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^a 1 \cdot r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi \, dr \\ &= \frac{\pi}{4} a^4 (1 - \cos^2 \alpha).\end{aligned}$$

所以

$$\bar{z} = \frac{\frac{\pi}{4} a^4 (1 - \cos^2 \alpha)}{\frac{2}{3} \pi a^3 (1 - \cos \alpha)} = \frac{3}{8} a (1 + \cos \alpha),$$

即质心为 $(0, 0, \frac{3}{8} a (1 + \cos \alpha))$. ■

转动惯量

根据力学的定义, 一个质点对一个轴的转动惯量等于该质点的质量 m 与此质点到轴的距离的平方的乘积.

现在考虑一个面密度为 $\mu = f(x, y)$ 的平面薄板 D 对坐标轴的转动惯量.

把平面薄板 D 任意分成 n 个子域 σ_i , 其面积记为 $\Delta\sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 在 σ_i 上任取一点 (ξ_i, η_i) , 如果将 σ_i 看成是位于 (ξ_i, η_i) 的质量为 $f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ 的质点, 则这个质点对 x 轴、 y 轴的转动惯量:

$$\Delta I_x \approx \eta_i^2 f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, \quad \Delta I_y \approx \xi_i^2 f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i;$$

质点对过原点 O 且垂直于作表面的转动轴的转动惯量可近似地表示为

$$\Delta I_O \approx (\xi_i^2 + \eta_i^2) f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

利用与处理质心一样的方法可得平面薄板 D 对 x 轴、 y 轴的转动惯量分别为

$$I_x = \iint_D y^2 f(x, y) \, d\sigma,$$

$$I_y = \iint_D x^2 f(x, y) \, d\sigma.$$

对于通过原点 O 且垂直于坐标平面的轴的转动惯量为

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) f(x, y) \, d\sigma.$$

比较上面的公式, 有

$$I_O = I_x + I_y.$$

把平面的情况推广到空间物体, 设空间物体的范围是空间有界闭域 Ω , 其密度为 $\mu(x, y, z)$, 对原点 x 轴、 y 轴、 z 轴的转动惯量 I_x 、 I_y 、 I_z 的计算公式分别为:

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \mu(x, y, z) dx dy dz, .$$

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

例 14.10.3 求半径为 a 的球体对过球心的直线及对与球体相切的直线的转动惯量.

证明. (1)取球心为原点, 且取过球心的直线为 z 轴, 则 $\Omega = (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$. 取密度 $\mu(x, y, z) = 1$, Ω 上任意点 (x, y, z) 到 z 轴的距离的平方为 $x^2 + y^2$, 则

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a r^4 \sin^3 \varphi dr \\ &= -2\pi \cdot \frac{1}{5} a^5 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \varphi) d\cos \varphi \\ &= \frac{8}{15} \pi a^5. \end{aligned}$$

(2)取球心为原点, 且取与球体相切的直线 l 为过 $(0, a, 0)$ 与 z 轴平行的直线, 则 l 上任一点的坐标为 $(0, a, z)$, 它到球内任意点 (x, y, z) 的距离平方为

$$d^2 = x^2 - (y - a)^2 + (z - z)^2 = x^2 + (y - a)^2.$$

于是

$$\begin{aligned} I_l &= \iiint_{\Omega} [x^2 + (y - a)^2] dV = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + a^2 - 2ay) dV \\ &= \frac{8}{15} \pi a^5 + \iiint_{\Omega} (a^2 - 2ar \sin \varphi \sin \theta) r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi dr \\ &= \frac{8}{15} \pi a^5 + \frac{4}{3} \pi a^5 \\ &= \frac{28}{15} \pi a^5. \end{aligned}$$

■

习题16.10

1. 求下列空间闭区域的体积 V :

(1) Ω 由 $z = \frac{1}{2}$, $2z = x^2 + y^2$ 所围而成;

(2) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 \leq Rx\}, (R > 0)$;

(3) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}, (a > b > 0)$;

(4) Ω 由曲面 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$ 与三个坐标面所围而成($a > 0, b > 0, c > 0$).

2. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4az$ 被曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 分成的两部分的体积比.

3. 计算下列曲面上指定部分的曲面的面积:

(1) 抛物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 在 $z \geq 0$ 部分曲面;

(2) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被二平面 $y = \frac{R}{4}$ 与 $y = \frac{R}{2}$ ($R > 0$)所夹部分的曲面;

(3) 圆柱面 $y^2 + z^2 = 2z$ 被圆锥面 $y^2 + z^2 = x^2$ 所截出的部分的曲面;

- (4) 圆锥面 $x^2 = y^2 + z^2$ 包含在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 内部的曲面;
4. 计算由 $y = x^2$ 及 $y^2 = x$ 所围的平面薄片的质量, 其密度 $\mu = xy$.
5. 设一形体 Ω 由曲面 $z = 6 - x^2 - y^2$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成, 其上任一点 (x, y, z) 处的密度是该点到 z 轴的距离, 试求 Ω 的质量.
6. 求高为 h , 底分别为 a 和 b 的等腰梯形均匀薄片的质心.
7. 设由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$) 所围的立体, 其上各点的密度与该点到原点的距离成正比 (比例常数 $K > 0$), 求立体的质心.
8. 求边长为 a 的正方形均匀薄片对于其一边和一个顶点的转动惯量 ($a > 0$).
9. 求密度为 1, 由 $y^2 = ax$ 与 $x = a$ ($a > 0$) 所围成的平面图形对于直线 $x = -a$ 的转动惯量.
10. 设物体 Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = 2x$ 所围成. 其上各点的密度等于该点到 xOz 平面距离的平方. 求该物体对 z 轴的转动惯量.

第十六章总复习题

1. 比较下列积分值的大小:

(1) $I_1 = \iint_D \ln^3(x+y) d\sigma$, $I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$, $I_3 = \iint_D (\sin(x+y))^3 d\sigma$, 其中 D 由 $x = 0, y = 0, x + y = \frac{1}{2}, x + y = 1$ 围成, 则 I_1, I_2, I_3 之间的大小顺序为

(A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_3 \leq I_2 \leq I_1$.
 (C) $I_1 < I_3 < I_2$. (D) $I_3 \leq I_1 \leq I_2$.

(2) $I_i = \iint_{D_i} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$, $i = 1, 2, 3$, 其中

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}, \\ D_2 &= \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2R^2\}, \\ D_3 &= \{(x, y) : |x| \leq R, |y| \leq R\}. \end{aligned}$$

则

(A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_3 \leq I_2 \leq I_1$.
 (C) $I_1 < I_3 < I_2$. (D) $I_3 \leq I_1 \leq I_2$.

2. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$.

(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_x^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$.

3. 计算二重积分 $\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y = -a + \sqrt{a^2 - x^2}$ ($a > 0$) 和直线 $y = -x$ 所围成的区域.

4. 计算二重积分

$$I = \iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)} \sin(x^2+y^2) d\sigma,$$

其中积分区域 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \pi\}$.

5. 求 $\iint_D (\sqrt{x^2+y^2} + y) d\sigma$, 其中 D 是由区域 $x^2 + y^2 \leq 4$ 和 $(x+1)^2 + y^2 \geq 1$ 公共平面区域.

6. 设 $f(x, y)$ 连续可微, 求

$$I = \iint_D \frac{xf_y(x, y) - yf_x(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy,$$

其中 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

7. 求证

$$\iint_D f(xy) dx dy = \ln 2 \int_1^2 f(u) du,$$

其中 D 为曲线 $xy = 1$, $xy = 2$, $x = y$, $y = 4x$ 在第一象限所围的闭区域.

8. 求 $(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1$, ($a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$) 所围区域 D 的面积.

9. 证明下列等式:

$$\iint_D f(ax + by + c) d\sigma = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2} + c) du,$$

其中 $D = (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1$ 且 $a^2 + b^2 \neq 0$.

10. 证明

$$\int_a^b dx \int_a^x (x-y)^{n-2} f(y) dy = \frac{1}{n-1} \int_a^b (b-y)^{n-1} f(y) dy,$$

其中 n 为大于 1 的正整数.

11. 求证:

$$2 \int_0^a f(x) dx \int_x^a f(y) dy = \left(\int_0^a f(x) dx \right)^2,$$

其中 $f(x)$ 为连续函数.

12. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 试研究 $\int_a^b dx \int_a^b (f(x) - f(y))^2 dy$, 从而证明不等式

$$\left(\int_0^a f(x) dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f(x)^2 dx$$

且仅当 $f(x)$ 为常数时等号才成立.

13. 求积分

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha dV$$

其中 $\Omega = (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $\alpha > 0$.

14. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x^2 \sqrt{x^2 + y^2} \, dV$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = x^2 + y^2$ 围成的有界区域.

15. 球 xOz 平面上的圆周 $(x-a)^2 + z^2 = b^2$ ($0 < b < a$) 绕 z 轴一圈所围闭曲面所包围的体积.

16. 已知

$$F(t) = \iiint_{\Omega_t} f(x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

其中 f 为可微函数, Ω_t 为 $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$, 求 $F'(t)$.

17. 设 $f(t)$ 是一元连续函数,

$$F(t) = \iiint_{\Omega_t} f(xyz) \, dx \, dy \, dz,$$

其中 $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t, 0 \leq z \leq t\}$, 求 $F'(t)$.

18. 设函数 $f(u)$ 具有连续导数且 $f(0) = 0$, 求

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \, dx \, dy \, dz,$$

其中 Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$.

19. 已知两个球体的半径分别为 a 和 b ($a > b > 0$) 且小球球心在大球面上, 试求小球体在大球体内的那部分体积.

20. 设 Ω 为曲面 $x^2 + y^2 = az$ 与 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($a > 0$) 所围空间闭区域, 试求: (1) Ω 的体积; (2) Ω 的表面积.

21. 均匀圆柱体的底面半径为 R , 高为 H ($R, H > 0$), 试求对于

(1) 通过圆柱体中心且平行于母线的轴的转动惯量;

(2) 通过圆柱体中心且垂直于母线的轴的转动惯量.

22. 在第一卦限内作旋转抛物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 的切平面, 使得该切平面与旋转抛物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 及三个坐标面所围成的体积最小, 求切点的坐标.

23. 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上, 要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片, 为了使整个薄片的质心恰好落在圆心上, 问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

24. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一阶导数连续, 且 $f(0) = 0$, 令

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} \, dt, \quad 0 < t < 1, \varphi(0) = 0.$$

求证:

(1) $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一阶导数连续且

$$\varphi'(x) = \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}} \, dt, \quad \varphi'(0) = 0;$$

(2) $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{x-t}} \, dt, \quad 0 < x \leq 1.$

第十五章 曲线积分和曲面积分的计算

15.1 第一类曲线积分的计算

定理 15.1.1 设函数 $f(x, y, z)$ 在光滑曲线 L 上连续, L 的方程为由参量方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

给出, 则

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

证明. 在区间 $[\alpha, \beta]$ 中任意插入 $n-1$ 个点:

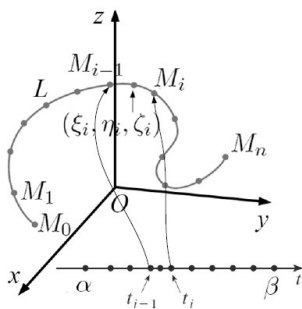


图 15.1

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta,$$

记 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. 曲线 L 相应的被分割成 n 个小弧段, 设 $[t_{i-1}, t_i]$ 对应的小弧段为 $\widehat{M_{i-1}M_i}$, 其弧长为 Δs_i (如图 15.1 所示). 由弧长公式可知

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

由于曲线 L 光滑, 故上述积分的被积函数连续, 应用积分中值定理, 得

$$\Delta s_i = \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2 + (z'(\tau_i))^2} \Delta t_i, \quad t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i.$$

记

$$x(\tau_i) = \xi_i, \quad y(\tau_i) = \eta_i, \quad z(\tau_i) = \zeta_i,$$

则点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 位于弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上. 记

$$\mu = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}, \quad \lambda = \max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n\}.$$

另一方面, 由于 $f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 注意到当 $\lambda \rightarrow 0$ 时有 $\mu \rightarrow 0$, 由定积分的定义和连续函数的可积性可知

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y, z) ds &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2 + (z'(\tau_i))^2} \Delta t_i \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

这个公式给出了当空间曲线 L 由参量方程表示时, 第一类曲线积分的计算法. 即对弧长的曲线积分可化为定积分计算. 而对于平面曲线情形, 结论类似:

定理 15.1.2 若函数 $f(x, y)$ 在光滑曲线 L 上有定义且连续, L 的方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

特别的, 若曲线 L 的方程为

$$y = \varphi(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

那么

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx.$$

由证明过程可以看出, 在利用定理15.1.1或定理15.1.2计算曲线积分的时候, 总是要求定积分的上限大于下限.

例 15.1.3 计算第一类曲线积分 $\int_L (2 + x^2 y) ds$, 其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 在上半平面的部分(图15.2).

解. 要想利用定理15.1.2, 首先需要给出曲线 L 的参数方程. 而圆弧 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

于是

$$\begin{aligned} \int_L (2 + x^2 y) ds &= \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{[(x'(t))]^2 + [y'(t)]^2} dt \\ &= \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \sin t) dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi} \\ &= 2\pi + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

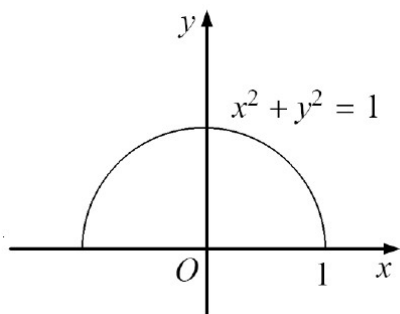


图 15.2

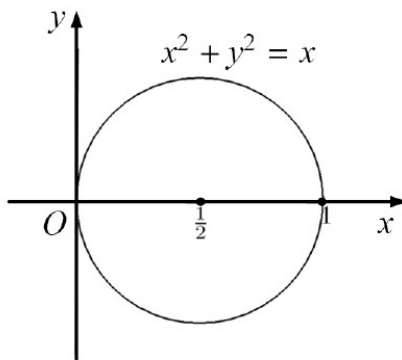


图 15.3

例 15.1.4 计算 $I = \int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = x$ (图 15.3).

解. 圆周 L 可以写成

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta, \\ y = \frac{1}{2} \sin \theta. \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

而

$$\sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} = \frac{1}{2},$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta\right)} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 2. \end{aligned}$$

■

例 15.1.5 求 $I = \int_L y^2 ds$, 其中 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + z = a \end{cases} \quad (a > 0)$ (图 15.4).

解. L 在 xOy 平面的投影为: $x^2 + y^2 + (a - x)^2 = a^2$, 即 $2x^2 + y^2 - 2ax = 0$, 亦即

$$\frac{(x - \frac{a}{2})^2}{\frac{a^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{2}} = 1.$$

因此 L 参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \theta, \\ y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \theta, \\ z = a - x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos \theta. \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

由于

$$\sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 + [z'(\theta)]^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} \sin^2 \theta + \frac{a^2}{2} \cos^2 \theta + \frac{a^2}{4} \sin^2 \theta} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} \sin^2 \theta \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} d\theta \\ &= \frac{a^3}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{a^3 \pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

■

例 15.1.6 计算曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 L 为圆柱螺线 $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = t \end{cases}$ 上相应于 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一段弧 (图 15.5).

解. 由于 $ds = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + 1^2} dt = \sqrt{1 + a^2} dt$, 故

$$\begin{aligned} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds &= \int_0^{2\pi} [(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 + (t)^2] \sqrt{1 + a^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 + t^2) \sqrt{1 + a^2} dt = \sqrt{1 + a^2} \left[a^2 t + \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{2}{3} \pi \sqrt{1 + a^2} (3a^2 + 4\pi^2). \end{aligned}$$

■

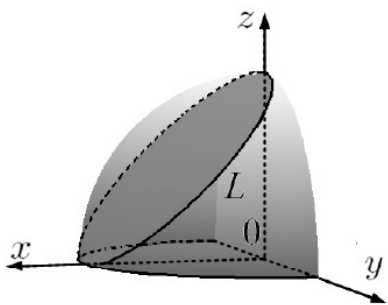


图 15.4

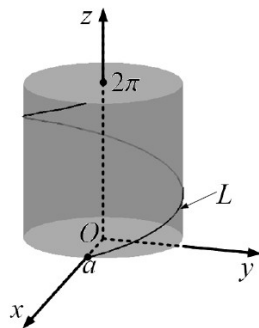


图 15.5

15.1.1 习题17-1

1. 求 $\int_L xy \, ds$, 其中 L 是由直线 $x = 0, y = 0, x = 4$ 及 $y = 2$ 所构成的矩形回路.
2. 求 $\int_L (x + y) \, ds$, 其中 L 为以 $O(0, 0), A(1, 0)$ 和 $B(0, 1)$ 为顶点的三角形围线.
3. 求 $\int_L x \, ds$, 其中 L 为双曲线 $xy = 1$ 从点 $(\frac{1}{2}, 2)$ 到点 $(1, 1)$ 的一段弧.
4. 求 $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, 其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$).
5. 求 $\int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) \, ds$, 其中 L 为星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) ($a > 0$).
6. 求 $\int_L (x^2 + y^2) \, ds$, 其中 L 是曲线 $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).
7. 求 $\int_L y^2 \, ds$, 其中 L 是摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 的一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$).
8. 求 $\int_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} \, ds$, 其中 L 为曲线 $\rho = a, \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{4}$ (ρ 和 θ 为极坐标) 所界的凸围线.
9. 求 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) \, ds$, 其中 L 为螺线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ 的第一旋 ($0 \leq t \leq 2\pi$).
10. 求 $\int_L \sqrt{2y^2 + z^2} \, ds$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x = y$ 的交线.
11. 求 $\oint_L x^2 \, ds$, 其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线.
12. 已知一铁丝成半圆形 $x = a \cos t, y = a \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$), 其上每一点处的密度等于该点的纵坐标, 求铁丝的质量.
13. 设物质曲线 $x = at, y = \frac{a}{2}t^2, z = \frac{a}{3}t^3$ 上每点的线密度 $\mu(x, y, z) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$, 求对应于 $0 \leq t \leq 1$ 一段弧的质量 ($a > 0$).
14. 若 L 为平面曲线 $y = |1 - x| - x, 0 \leq x \leq 2$, 计算 $\int_L (x + y) \, ds$.

15.2 第一类曲面积分的计算

与第一类曲线积分的计算类似, 利用第一类曲面积分的定义以及曲面的面积公式, 我们有:

定理 15.2.1 若曲面块 Σ 的方程为 $z = f(x, y)$, 曲面在 xOy 面的投影区域为 D_{xy} , $\phi(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} \phi(x, y, z) \, dS = \iint_{D_{xy}} \phi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right]^2} \, dx dy.$$

定理 15.2.2 如果曲面块 Σ 的方程为参数形式:

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D_{uv}.$$

其中 D_{uv} 为 uOv 平面上的一区域, Σ 上的点与 D_{uv} 中的点之间一一对应. 若 $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ 在 D_{uv} 上连续, 且有一阶连续偏导数, 记

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

$\phi(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \phi(x, y, z) \, dS &= \iint_{D_{uv}} \phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du dv \\ &= \iint_{D_{uv}} \phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} \, du dv, \end{aligned}$$

例 15.2.3 计算 $\iint_{\Sigma} (x + y + z) \, dS$, Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ (图 15.6).

解. 积分曲面在 xOy 上的投影 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 注意到

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

故

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x + y + z) \, dS &= \iint_D \left(x + y + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, d\sigma \\ &= \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \left(x + y + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right) \, dy \\ &= \int_{-a}^a \left(\pi a x + 2a \sqrt{a^2 - x^2} \right) \, dx \\ &= 4a \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \\ &= 4a \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \pi a^3. \end{aligned}$$

■

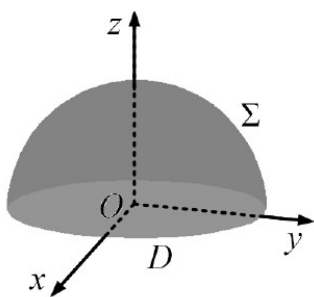


图 15.6

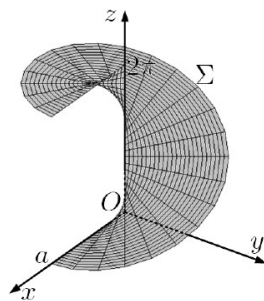


图 15.7

例 15.2.4 计算积分 $\iint_D z dS$, 其中 Σ 为螺旋面的一部分 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v (0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq 2\pi)$ (图 15.7).

证明. 由于

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1 + u^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

故 $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + u^2}$. 于是

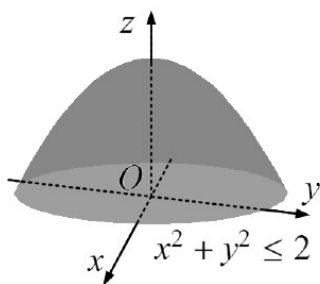
$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z dS &= \int_0^a du \int_0^{2\pi} v \sqrt{1 + u^2} dv = 2\pi^2 \int_0^a \sqrt{1 + u^2} du \\ &= 2\pi^2 \left[\frac{u}{2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \right] \Big|_0^a \\ &= \pi^2 a \sqrt{1 + a^2} + \pi^2 \ln(a + \sqrt{1 + a^2}). \end{aligned}$$

■

例 15.2.5 设有曲面片 $\Sigma = \{(x, y, z) : z = 2 - (x^2 + y^2), x^2 + y^2 \leq 2\}$ (图 15.2), 面密度 $\mu(x, y, z) = x^2 + y^2$, 求 Σ 的质量.

证明. $\frac{\partial z}{\partial x} = -2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, 故

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)},$$



于是所求质量

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = \iint_{x^2 + y^2 \leq 2} (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} d\sigma \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho^3 d\rho \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho^3 d\rho \\
 &= \pi \int_0^2 \sqrt{1 + 4u} \cdot u du \\
 &= \frac{149}{30} \pi.
 \end{aligned}$$

■

15.2.1 习题17-2

1. 求 $\iint_{\Sigma} (z + 2x + \frac{4}{3}y) dS$, 其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限中的部分.
2. 求 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 所围之立体的表面.
3. 求 $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截部分.
4. 求 $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, 其中 Σ 为四面体 $x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的边界.
5. 求 $\iint_{\Sigma} z^2 dS$, 其中 Σ 为圆锥表面的一部分 $\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \alpha, \\ y = r \sin \varphi \sin \alpha, \\ z = r \cos \alpha. \end{cases} (0 \leq r \leq a; 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$. 其中 α 为常数且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
6. 求 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{r^2} dS$, 其中 Σ 是介于平面 $z = 0$ 及 $z = H$ 之间的圆柱体 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 的侧面, 而 r 为空间的点到原点的距离 ($a > 0$).
7. 求圆柱面 $x^2 + y^2 - ax = 0$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 之内部分的侧面积 ($a > 0$).
8. 求由曲面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2$ 和 $\Sigma_2: z + y = 2$ 所围立体的表面积.

9. 求抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ($0 \leq z \leq 1$) 的质量, 其密度 $\mu = z$.

10. 设球面三角形为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

(1) 求其周界的形心坐标(即密度为1的质心坐标.)

(2) 求此球面三角形的形心坐标.

11. 求密度为 ρ_0 的均匀球壳

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z \geq 0)$$

对于 Oz 轴的转动惯量.

12. 求密度为 ρ_0 的均匀锥面壳

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \leq z \leq b)$$

对于直线

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$$

的转动惯量.

15.3 第二类曲线积分

从这一节开始, 我们将介绍多变量积分中的另一类型积分, 它包括第二类曲线积分和第二类曲面积分. 这类积分的引进也是实际问题的需要, 特别在研究各种物理场时.

第二类曲线积分又称为对坐标的曲线积分, 是研究向量场的曲线积分. 在这类积分中要涉及到向量场和曲线的方向等概念. 所以下文先介绍向量场及曲线方向的概念, 然后再给出第二类曲线积分的概念和计算方法.

15.3.1 向量场的概念

设区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 若在 Ω 上的每一点 $M(x, y, z)$ 处于时刻 t 总存在着一个确定的数值 $u = u(x, y, z, t)$ 与之对应, 则称在 Ω 上确定了一个数量场 $u = u(x, y, z, t)$. 例如, 如果 u 表示 t 时刻对应于点 M 的温度, 则 u 是温度场; 如果 u 表示 M 的电位, 则 u 是电位场.

如果对于 Ω 上的每一点 $M(x, y, z)$, 在时刻 t 都有一个确定的向量 $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$ 与之对应, 则称在 Ω 上确定了一个向量场 $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$ (如图 15.8). 例如, 若 \vec{A} 表示对应于点 M 的引力, 则 \vec{A} 是引力场; \vec{A} 表示对应于点 M 处的速度, 则 \vec{A} 是速度场.

无论是数量场还是向量场, 凡是不随时间 t 变化的, 均称为稳定场. 在稳定场中, 由于不依赖于 t , 而仅与点 $M(x, y, z)$ 的坐标有关, 这时数量场可以表示为 $u = u(x, y, z)$, 向量场可以表示为 $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$, 如图 15.9. 本章中只讨论稳定场.

设 $\vec{A}(x, y, z)$ 在空间直角坐标系中三个坐标轴上的投影分别为

$$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z),$$

于是 $\vec{A}(x, y, z)$ 可以表示为:

$$\vec{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

如果 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 都连续, 则称 $\vec{A}(x, y, z)$ 是连续的. 本书中除非特别说明, 总假定 $\vec{A}(x, y, z)$ 连续.

第二类曲线积分要涉及曲线的方向问题, 因此先给出曲线方向的规定: 对空间非封闭的分段光滑曲线段 L , 如果 A 、 B 是它的两个端点, 则总可以规定其中的一个点为曲线的起点, 而另外一个点为曲线的终点. 因此这条曲线有两个方向: 从 A 到 B 和从 B 到 A . 如果取定其中一个为正向, 则另外一个方向为负向. 规定了正向的曲线称为有向曲线.

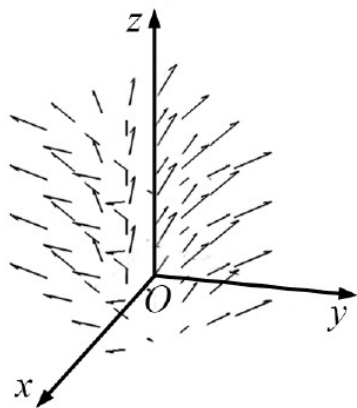


图 15.8

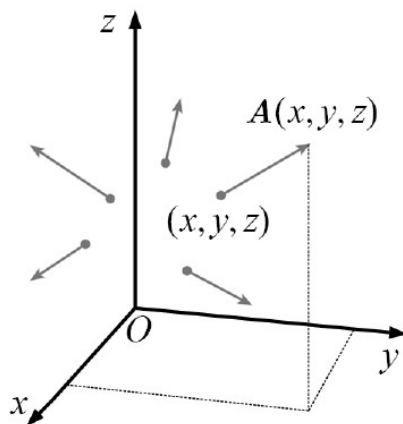
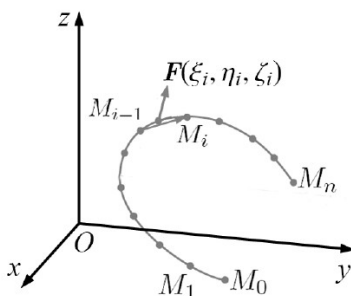


图 15.9



对于空间的封闭曲线 L , 由于没有起点与终点, 用起点和终点表示曲线的正负向是不可能的. 这时可以另外用文字说明 L 的方向或者在曲线上取三个不重合的点, 以便准确描述闭曲线 L 的方向, 从而正确地定出闭曲线 L 的正负向.

对于平面上的向量场以及有向曲线也有相应的定义, 只需在上述定义中稍加修改即可. 请读者自行给出.

15.3.2 第二类曲线积分的概念及性质

为了引出第二类曲线积分的概念, 先研究下面的例子.

例 15.3.1 设 A 、 B 是空间中的两个点, L 是连接这两点的一条分段光滑曲线. 一个质点在力场

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

的作用下, 沿 L 从 A 移动到 B . 试求在这个过程中力场 \vec{F} 所作的功 W .

解. 从 A 到 B 在 L 内插入 $n-1$ 个分点: $M_i(x_i, y_i, z_i) (i = 1, \dots, n-1)$, 并记 $M_0 = A, M_n = B$. 如果这些分点足够密, 那么质点沿着由 M_{i-1} 到 M_i 这一段弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上的运动, 可以看成是在直线段 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 上运动. 这一段弧上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 力场 \vec{F} 可以近似看成为常力 $\vec{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ (图15.3.2). 在这一段上力场所做的功

$$W_i \approx \vec{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i},$$

其中 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 的坐标表达式为

$$\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j} + \Delta z_i \vec{k}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

因此

$$\begin{aligned} W &\approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \\ &= \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i], \end{aligned}$$

其中 $\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i$, $\sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i$, $\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i$ 分别为 \vec{F} 在三个坐标轴方向的分力所做的功的近似值. 记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\}$. 则:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i]. \end{aligned}$$

■

由上例, 可以抽象出第二类曲线积分的定义.

定义 15.3.2 设 Ω 是一个空间区域, 映射 $\vec{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是一个向量场. 可求长的有向曲线 $L \subset \Omega$, 其起点记为 A , 终点记为 B . 在 L 上依次从 A 到 B 的方向顺序取一列点 $\{M_i(x_i, y_i, z_i) : i = 0, 1, \dots, n\}$, 使得 $M_0 = A$, $M_n = B$. 令 $\Delta \vec{s}_i = \overrightarrow{M_i - M_{i-1}}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), Δs_i 为弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 的弧长, 在 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任取点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 若和式极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{A}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta \vec{s}_i$$

为一确定的有限数 (这里 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\}$), 且极限值与对有向曲线 L 的分法无关, 也与每个子弧段上的点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关, 则将这个数记为

$$\int_L \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{s},$$

并称它是向量场 \vec{A} 沿有向曲线 L 的第二类曲线积分, 即

$$\int_L \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{s} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{A}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta \vec{s}_i.$$

如果记

$$\begin{aligned} \vec{A}(x, y, z) &= (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \\ &= P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}, \end{aligned}$$

$$\Delta \vec{s}_i = \overrightarrow{M_i - M_{i-1}} = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j} + \Delta z_i \vec{k}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

那么

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{A}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta \vec{s}_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i,$$

而后面一个极限可以记为

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

因此有

$$\int_L \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{s} = \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

实际上, 上面给出的第二类曲线积分的坐标形式是三个积分的组合, 它们也可以单独表示为:

$$\int_L P(x, y, z) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i,$$

$$\int_L Q(x, y, z) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i,$$

$$\int_L R(x, y, z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i,$$

并分别称它们为函数 P 、 Q 、 R 沿有向曲线 L 的对坐标 x 、 y 、 z 的曲线积分, 或 P 、 Q 、 R 沿 L 的第二类曲线积分.

上面的讨论表明, 向量值函数 \vec{A} 沿有向曲线 L 的曲线积分可表示为其坐标函数 P 、 Q 、 R 对相对应坐标的曲线积分之和, 而 $d\vec{s} = (dx, dy, dz)$.

可以证明, 如果函数 P 、 Q 、 R 在分段光滑的有向曲线 L 上连续, 则第二类曲线积分

$$\int_L P(x, y, z) dx, \int_L Q(x, y, z) dy, \int_L R(x, y, z) dz$$

都存在, 从而 $\int_L \vec{A} \cdot d\vec{s}$ 也存在.

应当指出, 第二类曲线积分与第一类曲线积分的主要差别在于: 第一类曲线积分的定义中, 被积式为函数值 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 与小弧段的弧长 Δs_i 的乘积, 而 Δs_i 总是正值, 故积分值与积分路径的方向无关; 而第二类曲线积分中, 被积式则是向量 $\vec{A}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 与有向直线段 $\Delta \vec{s}_i$ 的内积, 而如果改变积分路径的方向, 那么所有的有向线段也将改变方向, 相对应的内积将变号, 从而积分值改变符号. 由此可见, 如果我们没有把方向弄清楚, 那么计算的结果就有可能差一个符号. 从而有:

命题 15.3.3 如果把积分路径 L 的方向反过来(记做 L^-), 那么积分值将改变符号, 即

$$\int_L \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{s} = - \int_{L^-} \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{s}$$

第二类曲线积分也具有与第一类曲线积分类似的一些性质, 如线性性质:

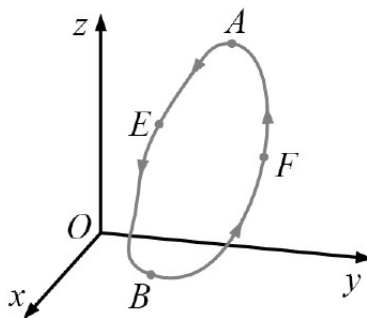
$$\begin{aligned} & \int_L [k_1 \vec{A}_1(x, y, z) \pm k_2 \vec{A}_2(x, y, z)] \cdot d\vec{s} \\ &= k_1 \int_L \vec{A}_1(x, y, z) \cdot d\vec{s} \pm k_2 \int_L \vec{A}_2(x, y, z) \cdot d\vec{s} \quad (k_1, k_2 \text{ 为常数}). \end{aligned}$$

再比如, 设 A, B 为曲线 L 的起点和终点, 则曲线上任意一点 D 把曲线分为两段有向曲线, 分别记为 \widehat{AD} 及 \widehat{DB} , 则

$$\int_L \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{s} = \int_{\widehat{AD}} \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{s} + \int_{\widehat{DB}} \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{s}.$$

即第二类曲线积分也具有对积分路径的可加性. 根据这个性质, 我们可以给出在封闭曲线上的第二类曲线积分的定义. 设 C 是空间中的一条封闭曲线, 方向 $A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow A$, 如图 15.3.2 所示. 将 C 从 A 、 B 处断开, 这样就把 C 分为了两条有向曲线 \widehat{AEB} 和 \widehat{BFA} , 记

$$\int_C \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{s} = \int_{\widehat{AEB}} \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{s} + \int_{\widehat{BFA}} \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{s}.$$



利用第二类曲线积分的性质, 可以证明这样的定义是与断点 A 、 B 的选取无关的, 于是一个向量值函数也可以在一条闭曲线上进行第二类曲线积分了. 需要注意的是, 与第一类曲线积分一样, 对于闭曲线, 积分符号一般记为 \oint .

以上讨论的是空间曲线的情形, 在平面曲线下, 也可以相应的定义第二类曲线积分:

$$\int_L \vec{A}(x, y) \cdot d\vec{s} = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

15.3.3 第二类曲线积分的计算

利用推导第一类曲线积分计算公式类似的方法, 可以证明:

定理 15.3.4 设光滑曲线 L 的参数方程为:
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$
 L 的起点 A 和终点 B 对应的参数分别为 α 、 β , 向量

值函数 $\vec{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ 在曲线 L 上连续, 则

$$\begin{aligned} \int_L \vec{A} \cdot d\vec{s} &= \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &\quad + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt. \end{aligned}$$

特别的, 有

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y, z) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t))x'(t) dt; \\ \int_L Q(x, y, z) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) dt; \\ \int_L R(x, y, z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} R(x(t), y(t), z(t))z'(t) dt. \end{aligned}$$

由此可见, 计算第二类曲线积分 $\int_L \vec{A} \cdot d\vec{s}$, 只要将积分路径 L 的参数式代入被积表达式中, 然后计算一个定积分就可以了, 但要注意积分的下限(上限)是起点(终点)处的参数值.

相应于上述定理, 如果 L 是一条平面曲线, 参数方程为 $x = x(t)$, $y = y(t)$, 起点和终点所对应的参数分别为 α , β , 则

$$\int_L \vec{A}(x, y) \cdot d\vec{s} = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

例 15.3.5 求空间中一质量为 m 的物体沿某一光滑曲线 L 从 A 点移动到 B 点时, 重力所做的功.

解. 作直角坐标系, 使 z 轴铅直向上. 在这个坐标系下, 设点 $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$. 设 L (图15.10)的方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), (a \leq t \leq \beta),$$

则

$$A = (x_1, y_1, z_1) = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)),$$

$$B = (x_2, y_2, z_2) = (x(\beta), y(\beta), z(\beta)).$$

因为重力 $\vec{F} = -mg\vec{k}$, 这里 g 为重力加速度. 故重力所做的功为

$$\vec{W} = \int_L (-mg) dz = -mg \int_L dz = -mg \int_\alpha^\beta z'(t) dt = mg(z_1 - z_2).$$

这说明, 重力所做的功与路径无关, 它仅取决于物体下降(或上升)的高度. ■

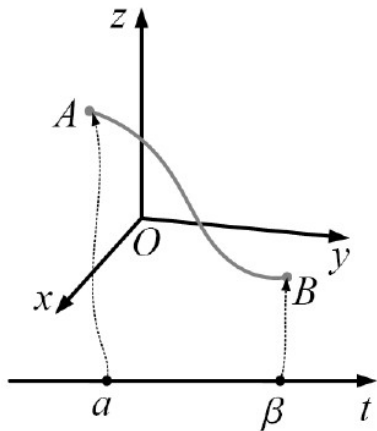


图 15.10

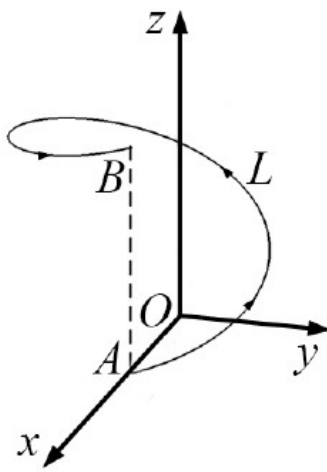


图 15.11

例 15.3.6 求在力 $\vec{F} = (y, -x, x + y + z)$ 的作用下,

(1) 质点由 $A(a, 0, 0)$ 沿螺旋线 L 到 $B(a, 0, 2\pi b)$ (图15.11)所作的功, 其中

$$L: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi);$$

(2) 质点由 A 沿直线 AB 所作的功.

解. 力 \vec{F} 沿空间曲线 L 所做的功

$$W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_L y dx - x dy + (x + y + z) dz.$$

(1) 由于 $dx = -a \sin t dt$, $dy = a \cos t dt$, $dz = b dt$, 所以

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} (-a^2 \sin^2 t - a^2 \cos^2 t + ab \cos t + ab \sin t + b^2 t) dt \\ &= 2\pi(b^2 \pi - a^2). \end{aligned}$$

(2) AB 的参量方程为

$$x = a, y = 0, z = t \quad (0 \leq t \leq 2\pi b).$$

由于 $dx = 0, dy = 0, dz = dt$, 所以

$$W = \int_0^{2\pi b} (a + t) dt = 2\pi b(a + \pi b).$$

■

例 15.3.7 计算 $\int_L xy dx + (y - x) dy$, 其中:

(1) L 为直线 $y - x = 0$ 从点 $O(0, 0)$ 到点 $B(1, 1)$;

(2) L 为抛物线 $y = x^2$ 从点 $O(0, 0)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段(图15.12).

解. (1)沿直线 $y - x = 0$ 积分时, 可以取 x 作为参量, 起点对应的 x 为0, 终点对应的 x 为1, 而 $y = x, dy = dx$, 于是

$$\begin{aligned} \int_L xy dx + (y - x) dy &= \int_0^1 x \cdot x dx + (x - x) dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(2)沿抛物线 $y = x^2$ 积分时, 如果取 x 作为参量, 则 $dy = 2x dx$, 则

$$\begin{aligned} \int_L xy dx + (y - x) dy &= \int_0^1 (x \cdot x^2) dx + (x^2 - x) \cdot 2x dx \\ &= \int_0^1 (3x^3 - 2x^2) dx = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

■

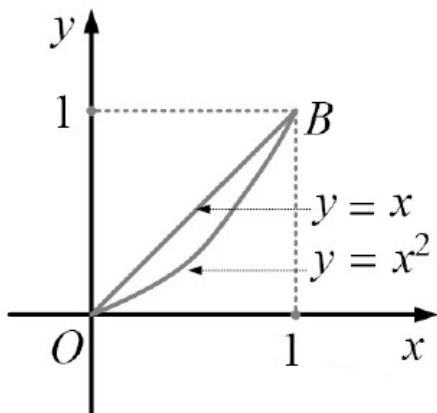


图 15.12

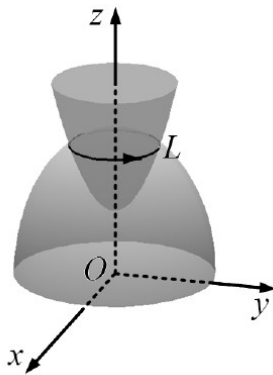


图 15.13

例 15.3.8 计算 $I = \oint_L y(z - x^2) dx + xy^2 dy + (x + y + 1) dz$. 其中 L 为两曲面

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5, z = x^2 + y^2 + 1$$

的交线(图15.13), L 的正向从原点看去为顺时针方向.

解. 由 L 的方程可知 $(z-1)+z^2=5$, 由此得 $z=2(z=-3$ 舍), 故曲线的方程又可以表示为

$$\{z=2, z=x^2+y^2+1,$$

或

$$\{z=2, x^2+y^2=1.$$

于是曲线 L 的参数方程为:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2. \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

参量 t 从0变到 2π 即为 L 的正向, 因此

$$\begin{aligned} I &= \oint_L y(z-x^2)dx + xy^2dy + (x+y+1)dz \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin t(2-\cos^2 t)(-\sin t) + \cos t \sin^2 t(\cos t) + 0] dt \\ &= -\frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

■

15.3.4 两类曲线积分的关系

虽然第一类曲线积分与第二类曲线积分来自不同的物理原型, 且有着不同的特性, 但在一定条件下可以建立它们之间的联系.

设 L 为从 A 到 B 的有向光滑曲线, 以弧长作为参数的参数方程为 $\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \\ z = z(s), \end{cases}$ 起点和终点所对应的参

数分别为0、 l , 其中 l 表示曲线的 L 弧长. $\vec{T}(x, y, z)$ 表示曲线上 (x, y, z) 点处与曲线 L 正向一致的单位切向量. 曲线的参数方程满足

$$\sqrt{[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 + [z'(s)]^2} = 1,$$

根据切向量公式, 有

$$\vec{T}(x, y, z) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (x'(s), y'(s), z'(s)),$$

其中 α 、 β 、 γ 分别表示向量 \vec{T} 与 x 轴、 y 轴、 z 轴正向的夹角.

若 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 为曲线 L 上的连续函数, 设

$$\vec{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

则根据第二类曲线积分的计算公式, 有

$$\begin{aligned} &\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ &= \int_0^l [P(x(s), y(s), z(s))x'(s) + Q(x(s), y(s), z(s))y'(s) + R(x(s), y(s), z(s))z'(s)] ds \\ &= \int_L [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] ds. \end{aligned}$$

于是我们有等式

$$\int_L \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{s} = \int_L \vec{A}(x, y, z) \cdot \vec{T}(x, y, z) ds.$$

这里必须指出, 上面给出的公式左端的第二类曲线积分中 L 改变方向时, 积分值改变符号, 相应在上式右端第一类曲线积分中, 曲线上的各点的切向量指向相反的方向. 这个时候夹角 α, β, γ 分别与原来的夹角相差弧度 π , 从而 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 和 $\cos \gamma$ 都要相应改变符号. 而这刚好也是第二类曲线积分所具有的性质. 另

外, 还须注意的是 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 和 $\cos \gamma$ 的形式比较复杂, 除了一些特殊情形外, 第二类曲线积分一般不必化为第一类曲线积分去计算.

对于 \mathbb{R}^2 上的第二类和第一类曲线积分的关系, 我们有着类似的结论:

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_L [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta] ds,$$

其中 α, β 分别表示在 (x, y) 处与曲线方向一致的切向量与 x 轴正向和 y 轴正向的夹角.

15.3.5 习题17-3

1. 求 $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, 其中 L 是椭圆周 $x = a \cos t, y = b \sin t (a, b > 0)$ 的上半部分, 顺时针方向.
2. 求 $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, 其中 L 为抛物线 $y = x^2$ 上从 $(-1, 1)$ 到 $(1, 1)$ 的一段弧.
3. 求 $\oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$, 逆时针方向.
4. 求 $\oint_L ydx + \sin x dy$, 其中 L 为 $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ 与 x 轴所围成的闭曲线, 依顺时针方向.
5. 求 $\int_L x^2 dx + z dy - y dz$, L 为曲线 $x = k\theta, y = a \cos \theta, z = a \sin \theta$ 上由 $\theta = 0$ 到 $\theta = \pi$ 的一段弧.
6. 求 $\int_L (y^2 - z^2)dx + 2yz dy - x^2 dz$, 其中 L 为曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上由 $t = 0$ 到 $t = 1$ 的一段.
7. 求 $\int_L ydx + z dy + x dz$, 其中 L 中为圆柱螺线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ 上由 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一段.
8. 求 $\int_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, 式中 L 为曲面

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$$

的围线, 从 z 轴向下看逆时针.

9. 一质点受力 $\vec{F}(x, y) = (2xy^2, 2x^2y)$ 的作用, 沿平面曲线 $L : x = t, y = t^2$ 从点 $A(1, 1)$ 移动到点 $B(2, 4)$, 求力 \vec{F} 所作的功.
10. 设平面力场 $\vec{F} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$, L 为圆周 $x = a \cos t, y = a \sin t (0 \leq t \leq 2\pi) (a > 0)$. 一质点沿 L 逆时针方向运动一周, 求力场所作的功.
11. 设力 $\vec{F} = (x + y^2)\vec{i} + (2xy - 8)\vec{j}$, 证明质点沿圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 移动一周时, 力场所作的功等于零.
12. 设一质点受力 \vec{F} 作用沿直线 $L : x = at, y = bt, z = ct (c \neq 0)$ 从点 $M(a, b, c)$ 移动到点 $N(2a, 2b, 2c)$, 其中 \vec{F} 的方向指向原点, 大小与该点到 xOy 平面的距离成反比. 求力 \vec{F} 所作的功.
13. 证明曲线积分的估计式:

$$\left| \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy \right| \leq LM,$$

其中 L 为 \widehat{AB} 的弧长, $M = \max_{(x, y) \in \widehat{AB}} \left\{ \sqrt{P^2 + Q^2} \right\}$. 利用上述不等式估计积分

$$I_R = \int_{x^2 + y^2 = R^2} \frac{ydx - xdy}{(x^2 + xy + y^2)^2},$$

并证明 $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = 0$.

14. 证明: 若 L 是平面光滑闭曲线, 而 \vec{l} 为任意固定的方向向量, 则

$$\oint_L \cos(\vec{l}, \vec{n}) \, ds = 0,$$

其中 \vec{n} 是 L 的外法线向量.

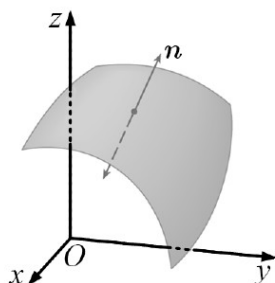
15. 质量为 m 的质点在力场 \vec{F} 的作用下沿曲线 Γ 运动, Γ 的起点为 a , 终点为 b . 若 $v(p)$ 表示质点在 p 点处速度大小, 求证:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}mv^2(p)|_a^b.$$

15.4 第二类曲面积分

本节要讨论的积分与曲面的方向有关, 因此先介绍曲面的侧和有向曲面的概念, 然后再由具体问题引出三元向量值函数沿有向曲面块的积分概念, 最后讨论计算和其他问题.

15.4.1 有向曲面



设 Σ 是以 L 为边界曲线的曲面块, 任取 $M \in \Sigma$, 作 Σ 在 M 点处的单位法向量. 它有两种可能的方向(图15.4.1), 取定其一, 并记为 $\vec{n}(M)$. 如果存在一条不越过边界曲线 L 且过 M 点的光滑闭曲线 C , 使得当 \vec{n} 从 M 点出发沿着 C 移动一周并回到 M 点时, \vec{n} 的指向刚好相反, 则称这个曲面是一个单侧曲面. 比如图15.14和图15.15所构造的莫比乌斯(Mobius)带, 图15.15中曲线上的点 M 处的法向量在沿一条封闭曲线连续变化回到 M 时刚好改变了方向.

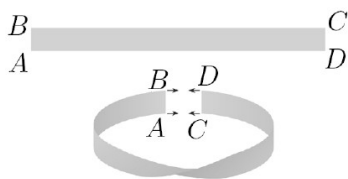


图 15.14

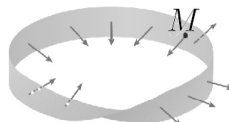


图 15.15

称一个曲面是双侧曲面, 如果它不是单侧的. 接下来所讨论的曲面, 除非特别指定, 都是双侧曲面.

在讨论第二类曲面积分时, 需要知道是对曲面哪一侧积分. 为此可以通过曲面上法向量的指向来确定曲面的侧. 例如, 对于曲面 $z = z(x, y)$, 若取它的法向量 \vec{n} 的指向朝上(下), 我们就认为是取定曲面的上(下)侧, 或称取曲面的上(下)侧为正侧(图15.16). 对于封闭曲面, 如果取它的法向量指向朝外(内)(图15.17), 就认为曲面的外(内)侧为正侧. 这样, 取定了法向量的指向, 也就选定了曲面的侧. 规定了正侧或者取定了法向量的曲面称为有向曲面. 有向曲面的另一侧称为这个曲面的负侧.

15.4.2 第二类曲面积分的定义

从物理学中的计算流量或通量的问题可以引出第二类曲面积分. 设 Ω 是 \mathbb{R}^3 的一个区域, Ω 内有稳定流速场, 其流速为

$$\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

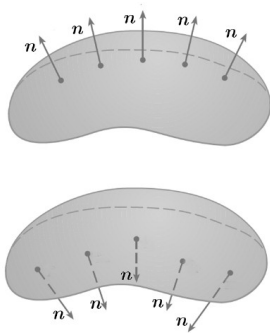


图 15.16

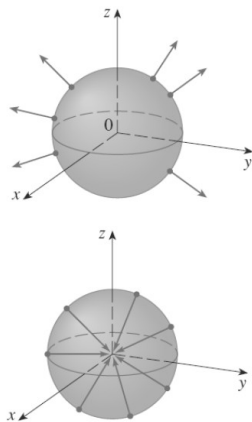
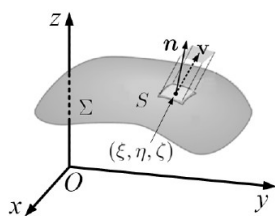


图 15.17



给定 Ω 内的一个有向曲面 Σ , \vec{n} 是它指定的单位法向量. 我们的问题是求单位时间内流体穿过 Σ 从负侧到正侧的流量 Q . 将 Σ 分成 n 个小曲面块, 任取一块这样的一小片曲面 S_i , 其面积记为 $\Delta S_i (i = 1, 2, \dots, n)$. 任取 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in S_i$, 记在这一点处的单位法向量 $\vec{n}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = (\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i)$. S_i 可以近似地视为在 Σ 中过 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的切平面上, 所以单位时间内穿过 S_i 从负侧到正侧的流量 ΔQ_i 近似于以 S_i 为底面 $\vec{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 为母线的斜柱体的体积(图15.4.2).

于是

$$\Delta Q_i \approx (\vec{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \vec{n}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)) \Delta S_i.$$

(需要注意的是, 如果 \vec{v} 与 \vec{n} 的夹角超过了 $\pi/2$, 则流量为负). 从而流过有向曲面 Σ 的总流量

$$Q = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^n \vec{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \vec{n}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

和以前一样, 如果记 λ 是所有曲面块的直径中最大者, 则有

$$\begin{aligned} Q &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \vec{n}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i] \Delta S_i \\ &= \iint_{\Sigma} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS. \end{aligned}$$

这种思想使我们引入下面的定义.

定义 15.4.1 (第二类曲面积分) 设

$$\vec{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

为一个向量场, Σ 为该向量场中一光滑的有向曲面, 曲面上点 (x, y, z) 处所指定的单位法向量 $\vec{n}(x, y, z) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. 称

$$\iint_{\Sigma} \vec{A}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS$$

为向量场 \vec{A} 在有向曲面 Σ 上的第二类曲面积分 (如果等式右端的第一类曲面积分存在). 特别的, 如果记 $d\vec{S} = \vec{n}(x, y, z) dS$, 并称之为有向曲面微元, 则 \vec{A} 在 Σ 上的第二类曲面积分可以记为

$$\iint_{\Sigma} \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{S}.$$

若 Σ 是由有向光滑曲面 $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ 组成的有向曲面, 则定义

$$\iint_{\Sigma} \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \iint_{\Sigma_i} \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{S}.$$

第二类曲面积分具有与第二类曲线积分类似的性质. 比如, 记 Σ^- 为 Σ 的负侧, 则

$$\iint_{\Sigma^-} \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = - \iint_{\Sigma} \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{S}.$$

在 Σ 上的点 (x, y, z) 处取一个 Σ 的有向面积微元 $d\vec{S}$, 设在这一点处的单位法向量 $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. 记 $d\vec{S}$ 在 xOy 平面上的投影的面积为 $dx dy$. 如果我们用微分形式 $dx \wedge dy$ 表示 $d\vec{S}$ 在 xOy 平面上的有向投影面积, 即

$$dx \wedge dy = \begin{cases} dx dy & \text{当 } \cos \gamma > 0 \text{ 时,} \\ -dx dy & \text{当 } \cos \gamma < 0 \text{ 时,} \\ 0 & \text{当 } \cos \gamma = 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

那么 $dx \wedge dy = \cos \gamma dS$ (图15.18, 图15.19).

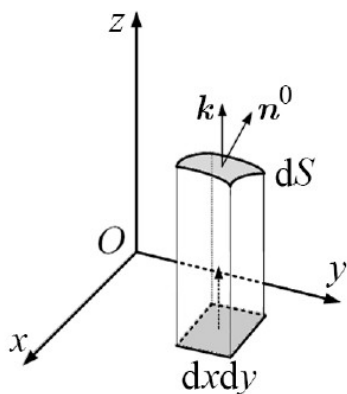


图 15.18

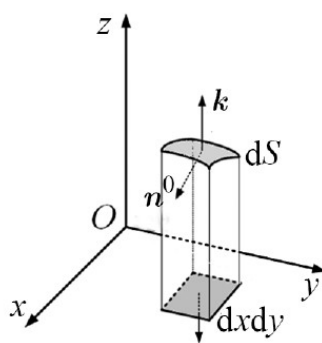


图 15.19

类似的, 我们用 $dy \wedge dz$ 表示有向面积微元在 yOz 面上的有向投影面积, $dz \wedge dx$ 示有向曲面积微元在 zOx 面上的有向投影面积. 则

$$dy \wedge dz = \cos \alpha dS, \quad dz \wedge dx = \cos \beta dS.$$

这样, 利用第二类曲面积分的定义, 有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{\Sigma} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS \\ &= \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy \wedge dz + Q(x, y, z) dz \wedge dx + R(x, y, z) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

需要强调的是, 上述 $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ 与所给定的积分曲面的侧有关.

有时也分别称 $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy \wedge dz$ 、 $\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz \wedge dx$ 、 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx \wedge dy$ 为对 yOz 面、 zOx 面、 xOy 面的曲面积分. 因此第二类曲面积分也称为对坐标面的积分.

15.4.3 第二类曲面积分的计算

第二类曲面积分可以通过化为第一类曲面积分进行计算.

比如, 光滑的有向曲面 $\Sigma = \{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$ (这里 D_{xy} 是 xOy 面上的一个区域), 取上侧为正侧. 其单位法向量记为 \vec{n} . 由于上侧为正, 因此这个法向量与 z 轴正向的夹角 (\vec{n}, \vec{k}) 小于 $\pi/2$, 它的坐标中的第三个分量应该大于 0, 于是利用法向量公式, 有

$$\vec{n} = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1\right)}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right]^2}}.$$

如果

$$\vec{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

是一个连续的向量场, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{S} &= \iint_{\Sigma} \vec{A}(x, y, z) \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_{\Sigma} \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)P(x, y, z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)Q(x, y, z) + R(x, y, z)}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right]^2}} dS \\ &= \iint_{D_{xy}} \left[-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)P(x, y, f(x, y)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)Q(x, y, f(x, y)) \right. \\ &\quad \left. + R(x, y, f(x, y)) \right] dx dy. \end{aligned}$$

其中第二个等式用到了第一类曲面积分的计算公式. 特别的, 如果令 $P(x, y, z) = Q(x, y, z) = 0$, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx \wedge dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

类似的, 如果取 Σ 的下侧为正侧, 则

$$\vec{n} = -\frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1\right)}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right]^2}},$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{S} &= \iint_{\Sigma} \vec{A}(x, y, z) \cdot \vec{n} dS \\ &= - \iint_{D_{xy}} \left[-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)P(x, y, f(x, y)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)Q(x, y, f(x, y)) \right. \\ &\quad \left. + R(x, y, f(x, y)) \right] dx dy.\end{aligned}$$

并且有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx \wedge dy = - \iint_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y)) dx dy$$

成立.

若 Σ 由 $\{(x, y, z) | x = g(y, z), (y, z) \in D_{yz}\}$ (这里 D_{yz} 是 yOz 面上的一个区域)给出, 取右侧为正, 则

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dy \wedge dz = \iint_{D_{yz}} Q(g(y, z), y, z) dy dz;$$

而若 Σ 由 $\{(x, y, z) | y = h(x, z), (x, z) \in D_{zx}\}$ (这里 D_{zx} 是 zOx 面上的一个区域)给出, 取前侧为正, 则

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dz \wedge dx = \iint_{D_{zx}} P(x, h(x, z), z) dz dx.$$

若曲面 Σ 由方程 $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ 给出, 其中 $(u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$, 设

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

利用隐函数求导法则容易得到

$$\vec{n} = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (\text{或 } \vec{n} = -\frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}),$$

当 $\vec{n} = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 时有

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy \wedge dz + Q(x, y, z) dz \wedge dx + R(x, y, z) dx \wedge dy \\ &= \iint_D \left[P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right. \\ &\quad \left. + R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv.\end{aligned}$$

例 15.4.2 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz dx \wedge dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分, 取外侧为正.

解. 将球面分为两部分:

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

以及

$$\Sigma_2 = \left\{ (x, y, z) : z = -\sqrt{1-x^2-y^2}, x^2+y^2 \leq 1 \right\}.$$

则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} xyz \, dx \wedge dy &= \iint_{\Sigma_1} xyz \, dx \wedge dy + \iint_{\Sigma_2} xyz \, dx \wedge dy \\ &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy + \left[- \iint_{D_{xy}} xy \left(-\sqrt{1-x^2-y^2} \right) \, dx \, dy \right] \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho \cos \theta \cdot \rho \sin \theta \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho \, d\rho \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} \, d\rho = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

■

例 15.4.3 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x+y) \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + dx \wedge dy$, Σ 是四面体 $OABC$ 所成的曲面 ($O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$), 取外侧为正 (图 15.20).

解. 可以将有向曲面 Σ 分为四个面 OAB , OAC , OBC , ABC (图 15.20). 到平面区域 OAB 上向下的单位法向量为 $(0,0,-1)$, 平面区域 OBC 上向后的单位法向量为 $(-1,0,0)$, 平面区域 OAC 的向左的单位法向量为 $(0,-1,0)$, 因此

$$\begin{aligned} \iint_{OAB} (x+y) \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + dx \wedge dy &= \iint_{OAB} [0 \cdot (x+y) + 0 \cdot y + (-1) \cdot 1] \, dS \\ &= -\frac{1}{2}, \\ \iint_{OBC} (x+y) \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + dx \wedge dy &= \iint_{OBC} (-x-y) \, dS = -\frac{1}{6}, \\ \iint_{OAC} (x+y) \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + dx \wedge dy &= - \iint_{OAC} y \, dS = 0. \end{aligned}$$

最后, 面 ABC 的方程为 $x+y+z=1$, 向上的单位法向量为 $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, 故

$$\iint_{ABC} (x+y) \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + dx \wedge dy = \iint_{ABC} \frac{1}{\sqrt{3}} [x+y+y+1] \, dS,$$

而 ABC 在 xOy 面上的投影为 OAB , 因此

$$\iint_{ABC} (x+y) \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + dx \wedge dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+2y+1) \, dy = 1,$$

从而

$$I = \left\{ \iint_{OAB} + \iint_{OAC} + \iint_{OBC} + \iint_{ABC} \right\} (x+y) \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + dx \wedge dy = \frac{1}{3}.$$

■

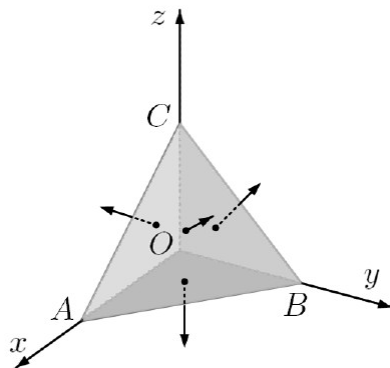


图 15.20

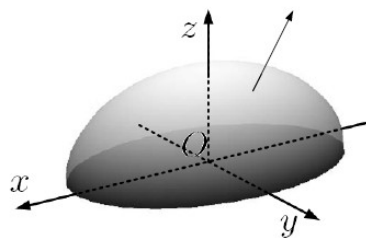


图 15.21

例 15.4.4 计算第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^3 dy \wedge dz$. 其中 Σ 是上半椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0$$

的上侧(图 15.21).

解. 本题与例 15.4.3 一样, 可以把积分曲面分为两部分后分别计算. 这里我们利用曲面的参数方程来解此题. Σ 的参数方程为 $\frac{x}{a} = \sin \phi \cos \theta$, $\frac{y}{b} = \sin \phi \sin \theta$, $\frac{z}{c} = \cos \phi$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 曲面的上侧为正, 故选定的法向量的坐标中的第三个分量应该大于零, 由法向量公式, 这个分量的符号由 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\phi, \theta)}$ 的符号确定. 而

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\phi, \theta)} = ab \sin \phi \cos \theta > 0,$$

因此公式中的符号取正, 再由

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\phi, \theta)} = bc \sin^2 \phi \cos \theta$$

知

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x^3 dy \wedge dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{2\pi} a^3 \sin^3 \phi \cos^3 \theta \cdot bc \sin^2 \phi \cos \theta d\theta \\ &= a^3 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \phi d\phi \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{2}{5} \pi a^3 bc. \end{aligned}$$

■

15.4.4 习题 17-4

1. 把下面的曲面积分化为累次积分.

- (1) $\iint_{\Sigma} \frac{e^x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \wedge dy$, Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被平面 $z = 1$ 与 $z = 2$ 所截部分的外侧;
- (2) $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dx \wedge dy + (y - z) dy \wedge dz$, Σ 为三个坐标平面及平面 $x = 1, y = 1, z = 1$ 所围立方体边界的外侧.

2. 计算下列第二类曲面积分:

- (1) $\iint_{\Sigma} xz \, dy \wedge dz + yz \, dz \wedge dx + x^2 \, dx \wedge dy$, 其中 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 外侧;
- (2) $\iint_{\Sigma} z \, dx \wedge dy$, 其中 $\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 外侧;
- (3) $\iint_{\Sigma} xy^2 \, dx \wedge dy + y \, dz \wedge dx + dy \wedge dz$, 其中 Σ 为平面 $x=1, x=-1, y=1, y=-1, z=1, z=-1$ 所围立体表面的外侧;
- (4) $\iint_{\Sigma} x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy$, 其中 Σ 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=h$ ($h>0$) 之间部分的外侧;
- (5) $\iint_{\Sigma} x^2 \, dy \wedge dz + y^2 \, dz \wedge dx + z^2 \, dx \wedge dy$, 其中 Σ 为球壳

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

的外侧;

- (6) $\iint_{\Sigma} (y-z) \, dy \wedge dz + (z-x) \, dz \wedge dx + (x-y) \, dx \wedge dy$, 其中 Σ 为圆锥曲面 $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的外侧;
- (7) $\iint_{\Sigma} \frac{dy \wedge dz}{x} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dx \wedge dy}{z}$, 其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧;

3. $\iint_{\Sigma} f(x) \, dy \wedge dz + g(y) \, dz \wedge dx + h(z) \, dx \wedge dy$, 其中 f, g, h 连续, Σ 为区域 $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ 的边界曲面, 外侧.

4. 求流速场

$$\vec{v} = (x-2z)\vec{i} + (x+3y+z)\vec{j} + (5x+y)\vec{k}$$

通过以点 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$ 为顶点的三角形 ABC 上侧的通量.

5. 试将曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \, dx \wedge dy$ 与 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \, dy \wedge dz$ 化为直角坐标系下的二重积分, 其中 Σ 是由柱面 $x^2 + y^2 = 1$, 平面 $z=0$ 及 $z=4$ 所围立体的外侧.

6. 设 Σ 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($z \geq 0$), 又设 $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j}$, \vec{n} 是 Σ 上的单位法向量, 它和 z 轴正向的夹角为锐角, 求曲面积分 $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$:

(1) Σ 的方程为 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$;

(2) Σ 的方程为 $x = \sin u \cos v, y = \sin u \sin v, z = \cos u$.

7. 设磁场强度为 $\vec{E} = (x, y, z)$, 求从球内出发通过上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ 的磁通量.

8. 若流体流速为

$$\mathbf{v} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k},$$

求流体由平面 $z=1, x=0, y=0$ 和锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 所围成的立体在第一象限部分向外的流量.

15.5 第十七章总复习题

1. 计算下列第一型曲线积分:

(1) $\int_L (x^3 + y^3) ds$, L 为以 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ 为顶点的三角形;

(2) $\int_L (x^3 - y^3) ds$, L 为圆 $x^2 + y^2 = 4$;

(3) $\int_L |y| ds$, L 为曲线 $(2x^2 + y^2)^2 = a^2(2x^2 - y^2)$;

(4) $\int_L (x^4 + y^4 + z^4) ds$, $L: x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt (a, b > 0, 0 \leq t \leq 2\pi)$;

2. 设金属丝 L 在 x, y 平面具有椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$$

的形状, 已知在 $M(x, y)$ 点它的线密度为 $\rho = |x + y|$, 求 L 的质量.

3. 设 L 是平面上简单光滑封闭曲线, $\omega(x, y)$ 在 L 的一个领域内连续, 令

$$u(\xi, \eta) = \int_L \omega(x, y) \ln \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} ds_{x,y},$$

$ds_{x,y}$ 表示曲线积分中 x, y 是积分变量

(1) 求证 $u(\xi, \eta)$ 在全平面连续;

(2) 当 $\int_L \omega(x, y) ds = 0$ 时, 求证

$$\lim_{\xi^2 + \eta^2 \rightarrow +\infty} u(\xi, \eta) = 0;$$

(3) 当 $\omega(x, y) \equiv 1$ 且 $L: x^2 + y^2 = 1$ 时, 求 $u(\xi, \eta)$.

4. 设 $u(x, y)$ 在 R^2 上连续, $\Omega = \{(x, y) : (\xi - x)^2 + (y - \eta)^2 \leq r^2\}$. 对任意 $r > 0$ 证明: 等式

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Sigma} u(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

成立的充分条件是等式

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\pi r} \int_{(\xi-x)^2 + (y-\eta)^2 \leq r^2} u(\xi, \eta) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) d\theta, \quad (\forall r > 0) \end{aligned}$$

成立.

5. 求 $I = \int_L \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, 其中 $L: x^2 + 4y^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$, 方向为顺时针.

6. 计算第二类曲线积分

$$\oint_L (x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy,$$

L 是圆周 $x^2 + y^2 = ax$, 逆时针方向.

7. 设 C 为简单光滑闭曲线, 求下列积分:

(1) $\oint_C \cos \langle \vec{l}, \vec{n} \rangle ds$, \vec{l} 为给定的方向, \vec{n} 为 C 的外法线方向;

(2) $\oint_C \cos \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle ds$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, \vec{n} 为 C 的外法线方向.

8. 设 $A > 0, C > 0, AC - B^2 > 0$, 求证:

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{AC - B^2}}, L: x^2 + y^2 = R^2.$$

9. 求环面 $x = (b + a \cos \varphi) \cos \theta, y = (b + a \cos \varphi) \sin \theta, z = a \sin \varphi (0 < a < b)$ 被两条经线 $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ 和两条纬线 $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ 所围成的那部分的面积, 并求出整个环面的面积.

10. 求曲面 $z = \sqrt{2xy}$ 被平面 $x + y = 1, x = 1$ 及 $y = 1$ 所截下的那部分的面积.

11. 平面上椭圆绕其长轴旋转得一旋转椭球 Ω , 求 Ω 的表面积.

12. 设曲面 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 4$, 求下列积分:

$$(1) I = \iint_{\Sigma} z(x^2 + y^2) dS;$$

$$(2) I = \iint_{\Sigma} [x^2 + y^2 + (z - 2)^2] dS.$$

13. 求

$$I = \iint_{\Sigma} xy dS,$$

其中 Σ 为 $x^2 + y^2 = 4$ 在第一卦限内且在 $y = 0, y = 1$ 之间的部分.

14. 设 $f(x)$ 为一元连续函数, 证明普阿松公式

$$\iint_{\Sigma} f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}(\xi)\right) d\xi,$$

其中 Σ 为球面: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

15. 求下列第二类曲面积分:

(1)

$$\iint_{\Sigma} x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy,$$

Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧;

(2)

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

Σ 是立体 Ω 的边界面的外侧,

$$\Omega: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c;$$

(3)

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{dy \wedge dz}{x} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dx \wedge dy}{z} \right),$$

Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧;

(4)

$$\iint_{\Sigma} (y - z) dy \wedge dz + (z - x) dz \wedge dx + (x - y) dx \wedge dy,$$

其中 $\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq h^2$ 的下侧.

16. 设 Σ 是曲面
$$\begin{cases} u = u \cos v \\ v = u \sin v \\ z = -u + a \cos v \end{cases}, u \geq 0, -\infty < v < +\infty (a > 0)$$
和平面 $z = 0$ 所围成的区域的外表面, 求

$$I = \iint_{\Sigma} x \mathrm{d} y \mathrm{d} z + y \mathrm{d} z \mathrm{d} x + z \mathrm{d} x \mathrm{d} y.$$

第十六章 各种积分之间的关系及场论初步

16.1 格林公式

本节先介绍格林公式, 然后利用格林公式讨论平面曲线积分与路径无关的条件.

格林公式描述了平面上闭合曲线积分与二重积分之间的关系, 它在理论上和实际应用中都有重要的作用.

16.1.1 格林公式

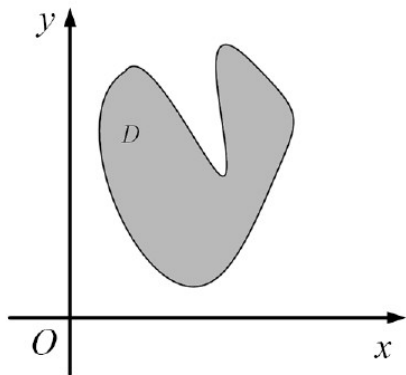


图 16.1

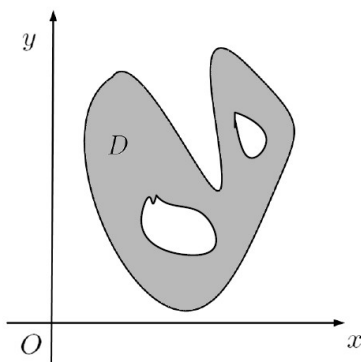


图 16.2

首先介绍 \mathbb{R}^2 上单连通区域、复连通区域及平面区域边界正向的概念. 按照区域的定义, 区域具有连通性, 即对区域 D 中的任意两点 P_1 与 P_2 , 总能用位于 D 中的折线把它们连接起来. 这就是说, 区域就是指连通域. 但是连通域还有单连通和复连通之分: 如果区域 D 中的任何闭曲线所包围的点都全在 D 中, 则称 D 为单连通域(图16.1), 否则称为复连通域或多连通域(图16.2). 从直观上看, 单连通区域就是内部不含‘洞’的区域.

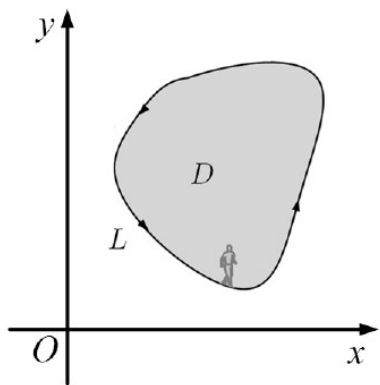


图 16.3

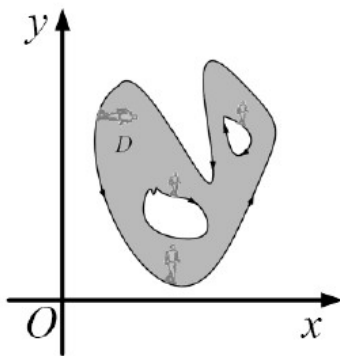
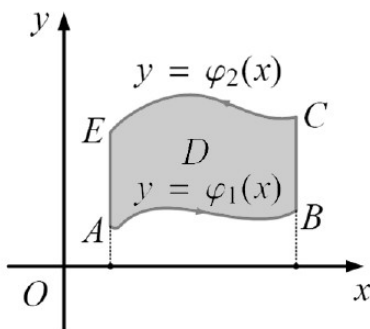


图 16.4

对于单连通域或复连通域的边界闭曲线 L 正向的规定为: 若一个人沿着闭曲线前进时, 区域在其附近的部分总在他的左侧, 则人的前进方向就是边界闭曲线的正向; 与上述规定相反的方向称为边界曲线的负方向(图16.3,图16.4).



定理 16.1.1 设 D 为平面有界闭区域, 其边界曲线 L 由一条或几条逐段光滑的曲线组成, 并取 L 的方向为正向. 若 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 在 D 的内部及边界 L 上有连续的一阶偏导数, 则

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma.$$

上式称为格林公式.

解. 证明 我们将分别证明

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = - \oint_L P dx \quad \text{及} \quad \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma = \oint_L Q dy.$$

根据区域 D 的不同形状, 分三种情况讨论.

(1) 设区域 D 是 x -型区域(图16.1.1). 这时区域 D 可表示为

$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b,$$

这里 $y = \varphi_1(x)$ 和 $y = \varphi_2(x)$ 分别为曲线 \widehat{AB} 和 \widehat{CE} 的方程. 注意到公式的两端都可以化为定积分, 因此只要把验证它们化成的积分相等即可.

首先

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \\ &= \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx, \end{aligned}$$

另一方面, 如图16.1.1所示,

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y) dx &= \int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + \int_{\widehat{BC}} P(x, y) dx + \int_{\widehat{CE}} P(x, y) dx \\ &\quad + \int_{\widehat{EA}} P(x, y) dx, \end{aligned}$$

注意到 \widehat{BC} 与 \widehat{EA} 平行于 y 轴, 而 \widehat{AB} 和 \widehat{CE} 的方程分别为 $y = \varphi_1(x)$ 和 $y = \varphi_2(x)$, 我们有

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y) dx &= \int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + \int_{\widehat{CE}} P(x, y) dx \\ &= \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx. \end{aligned}$$

于是, 有

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = - \oint_L P(x, y) dx.$$

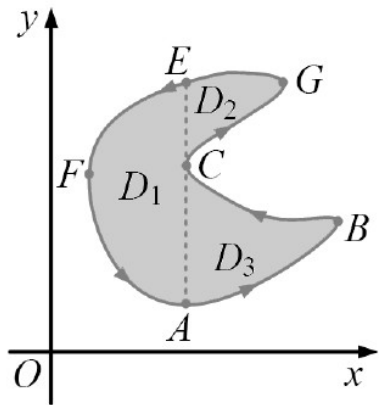


图 16.5

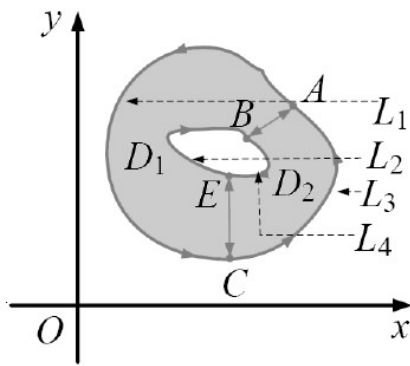


图 16.6

(2) 若区域 D 是由一条分段光滑的闭曲线围成, 但不是 x -型区域, 则可以先用几段光滑曲线将 D 分成有限个 x -型子区域, 比如图 16.5 中, 可将区域 D 分成三个 x -型区域: D_1, D_2, D_3 . D_1 的边界 L_1 由 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CE}, \widehat{EFA}$ 组成, D_2 的边界 L_2 由 $\widehat{CGE}, \overrightarrow{EC}$ 组成, D_3 的边界曲线 L_3 是由 $\widehat{ABC}, \overrightarrow{CA}$ 组成. 利用之前证明的结果, 并利用第二类曲线积分的性质, 有

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma &= \iint_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma + \iint_{D_2} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma + \iint_{D_3} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma \\ &= -\oint_{L_1^+} P dx - \oint_{L_2^+} P dx - \oint_{L_3^+} P dx \\ &= -\oint_L P dx. \end{aligned}$$

(3) 若区域 D 不止由一条闭曲线所围成, 即它是复连通区域, 如图 16.6 所示区域 D . 把区域 D 沿线段 AB, CE 剪开, 得到两个单连通子区域 D_1 和 D_2 , 而 D_1 的边界曲线由 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CE}, L_1, L_2$ 构成, D_2 的边界曲线由 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EC}, L_3, L_4$ 构成. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma &= \iint_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma + \iint_{D_2} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma \\ &= \left\{ \int_{\overrightarrow{BA}} + \int_{L_1} + \int_{\overrightarrow{CE}} + \int_{L_2} + \int_{\overrightarrow{AB}} + \int_{L_4} + \int_{\overrightarrow{DC}} + \int_{L_3} \right\} P dx \\ &= \left(\oint_{L_1} + \oint_{L_2} + \oint_{L_3} + \oint_{L_4} \right) P dx \\ &= \oint_L P dx. \end{aligned}$$

这样我们就证明了只要 D 连通, 并且边界曲线分段光滑, 则

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = -\oint_L P dx.$$

同理可以证得

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma = \oint_L Q(x, y) dy.$$

■

例 16.1.2 计算 $I = \oint_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为任一不包含原点的有界区域 D 的边界曲线, 取正向.

解. 因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

且两个偏导数在域 D 连续, 故由格林公式,

$$I = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] d\sigma = 0.$$

■

例 16.1.3 计算 $\int_L \frac{y^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx + \left[4x + 2y \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \right] dy$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 上由点 $A(a, 0)$ 依逆时针方向到点 $B(-a, 0)$ 的半圆周.

解. 本题若直接用曲线积分计算相当困难. 为了使用格林公式, 作辅助线段 \overrightarrow{BA} , 则 \overrightarrow{BA} 与 L 构成了半圆形闭区域 D 的正向边界 C . 为了书写方便, 略去曲线积分中的被积式, 于是有

$$\begin{aligned}\oint_C &= \int_L + \int_{\overrightarrow{BA}} \\ &= \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[4x + 2y \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right] \right\} dx dy \\ &= 4 \iint_D dx dy = 4 \cdot \frac{1}{2} \pi a^2 \\ &= 2\pi a^2,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_L &= \oint_C - \int_{\overrightarrow{BA}} = 2\pi a^2 - \int_{-a}^a \frac{0}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx \\ &= 2\pi a^2.\end{aligned}$$

■

注 16.1.4 在格林公式中, 令 $P(x, y) = -y, Q(x, y) = x$, 可得到用曲线积分计算平面面积的公式:

$$S = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_L -y dx + x dy.$$

例 16.1.5 设封闭曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} (t \in [\alpha, \beta])$. C 的正向为参数增加的方向, $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 的在 $[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导数. 证明: C 所围区域的面积为

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} dt.$$

证明.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} dt &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\psi'(t) dt - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t)\psi(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy,\end{aligned}$$

利用第二类曲线积分与面积的关系, 得证. ■

例 16.1.6 计算积分

$$I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{|x| + |y|},$$

此处 L 是 $(0, -1), (0, 1), (1, 0), (0, 1)$ 为顶点的正方形边界正向。

解. 因 $L: |x| + |y| = 1$, 故

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{|x| + |y|} = \oint_L x dy - y dx = 2 \iint_D d\sigma,$$

其中 D 是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形. 由二重积分的几何意义得:

$$I = 2 \times (\sqrt{2})^2 = 4.$$

■

例 16.1.7 计算

$$\oint_L \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + y^2},$$

其中 L 是以点 $(1, 0)$ 为中心 R 为半径的圆周($R \neq 1$), 取逆时针方向.

证明. 在积分

$$\oint_L \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + y^2}$$

中,

$$P(x, y) = \frac{-y}{4x^2 + y^2}, Q(x, y) = \frac{x}{4x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

若 $R < 1$, 则 L 不包围原点, 由格林公式

$$\oint_L \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + y^2} = 0.$$

若 $R > 1$, 则 L 包含原点, 在 L 内部作小椭圆

$$L_1: \begin{cases} x = \frac{1}{2}\varepsilon \cos \theta, \\ y = \varepsilon \sin \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

在由 L 与 L_1 所围成的区域 D 上应用格林公式, 有

$$\oint_{L+L_1^-} = \oint_L - \oint_{L_1} = 0,$$

故

$$\oint_L \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + y^2} = \oint_{L_1} \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + y^2}.$$

而在 L_1 上 $4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, 故

$$\oint_{L_1} \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{L_1} -y dx + x dy.$$

以 L_1 为边界的椭圆的面积为 $\pi \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \varepsilon = \frac{\pi}{2} \varepsilon^2$, 于是有 $\oint_{L_1} \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + y^2} = \pi$. 即

$$\oint_L \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + y^2} = \pi$$

■

注 16.1.8 例16.1.7中如果把圆周 L 换为不过原点的任一正向简单闭曲线 C 所求的积分之值仍为0或 π .

16.1.2 平面曲线积分与路径无关的条件

一般来讲, 第二类曲线积分 $\int_L \vec{A}(x, y) \cdot d\vec{s}$ 的值应与向量场 \vec{A} 的分布、起点终点的位置以及积分路径 L 三者有关. 然而在一些物理问题中, 有些第二类曲线积分的值是与积分路径无关, 而只与向量场的分布和起点终点的位置有关. 例如, 如果 \vec{G} 表示重力场, 那么质点从起点 A 移动到终点 B 时, 重力场所做的功 $W = \int_L \vec{G} \cdot d\vec{s}$ 只与起点和终点的位置有关, 而与积分路径无关.

曲线积分 $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 与路径无关的具体含义是: 设 D 为已给平面域, A, B 为 D 内的任意两点, 沿着任何一条以 A, B 两点为端点且完全含于 D 内的曲线段 \widehat{AB} 的曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

均相等. 即积分

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

的值只由端点 A, B 而定, 而与路径 \widehat{AB} 的选取无关.

当积分 $\int_L \vec{A}(x, y) \cdot d\vec{s}$ 的值与积分路径无关时, 称向量场 \vec{A} 为保守场.

定理 16.1.9 设 D 为单连通区域, 若 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续的偏导数, 那么以下四个命题等价:

1. 对于 D 内的任意一条分段光滑的简单闭曲线 C , 有 $\oint_C P dx + Q dy = 0$.
2. 对于 D 中的任一以 A 为起点、 B 为终点的曲线 L , $\int_L P dx + Q dy$ 与积分路径无关, 而只与端点 A, B 有关.
3. $P dx + Q dy$ 在 D 内是某一个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分, 即 $du = P dx + Q dy$. 此时称 u 为 $P dx + Q dy$ 的一个原函数.
4. 在区域 D 中的任一点 (x, y) 处, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

证明. 我们采用循环推证法. 首先证明 (1) \Rightarrow (2).

任取 D 内的两个点 A 和 B , 设 \widehat{ARB} 与 \widehat{ASB} 为连接点 A, B 的任意两条光滑曲线, 如果 \widehat{ARB} 与 \widehat{ASB} 除了 A 和 B 外没有其它的交点(如图 16.7), 那么, 由命题 (1), 有:

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{ARB}} P dx + Q dy - \int_{\widehat{ASB}} P dx + Q dy \\ &= \int_{\widehat{ARB}} P dx + Q dy + \int_{\widehat{BSA}} P dx + Q dy \\ &= \oint_{\widehat{ARBSA}} P dx + Q dy = 0. \end{aligned}$$

所以

$$\int_{\widehat{ARB}} P dx + Q dy = \int_{\widehat{ASB}} P dx + Q dy.$$

如果 \widehat{ARB} 与 \widehat{ASB} 还有其它的交点(图 16.8), 情况会复杂一些. 以下只证明除端点外只有一个其它交点的情形. 在 D 内从 A 到 B 再作一条曲线 \widehat{ATB} , 使得它与 \widehat{ARB} 和 \widehat{ASB} 均无其它交点, 于是, 根据上面的证明, 有

$$\int_{\widehat{ARB}} P dx + Q dy = \int_{\widehat{ATB}} P dx + Q dy = \int_{\widehat{ASB}} P dx + Q dy.$$

因此, 命题 (2) 成立.

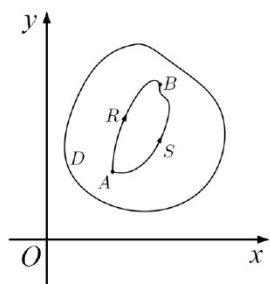


图 16.7

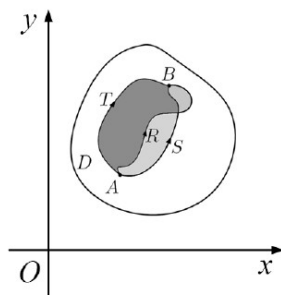
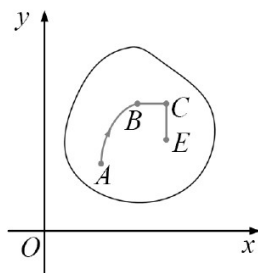


图 16.8



其次证明(2) \Rightarrow (3).

设命题(2)成立. $A(x_0, y_0)$ 为 D 内某一固定的点, $B(x, y)$ 为 D 内任意一点. 由(2), 曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy$$

与路线的选择无关, 故当 $B(x, y)$ 在 D 内变动时, 其积分值是点 $B(x, y)$ 的函数, 记为

$$u(x, y) = \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy.$$

取 $\Delta x, \Delta y$ 充分小, 使点 $C = (x + \Delta x, y)$ 和 $E(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 都在 D 中(图16.1.2), 则函数 u 的全增量

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \\ &= \int_{\widehat{AE}} P dx + Q dy - \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

因为在 D 内曲线积分与路线无关, 所以

$$\int_{\widehat{AE}} P dx + Q dy = \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + \int_{\widehat{BC}} P dx + Q dy + \int_{\widehat{CE}} P dx + Q dy.$$

由于直线段 BC 平行于 x 轴, 所以 BC 的参数方程可以记为: $x = t, t \in [x, x + \Delta x], y = y$, 注意到在 BC 上, 纵坐标是不变的, 因而 $dy = 0$, 于是

$$\int_{\widehat{BC}} P dx + Q dy = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt.$$

对上式右端应用积分中值定理, 得

$$\int_{\widehat{BC}} P dx + Q dy = P(x + \theta_1 \Delta x, y) \Delta x \quad (0 \leq \theta_1 \leq 1).$$

再依 P 在 D 上的连续性, 推得

$$\int_{\widehat{BC}} P dx + Q dy = P(x, y) \Delta x + \alpha \Delta x,$$

这里 α 满足 $\lim_{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0} \alpha = 0$, 同理可以得到

$$\int_{\overrightarrow{CE}} P dx + Q dy = Q(x, y)\Delta y + \beta\Delta y.$$

其中 β 满足 $\lim_{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0} \beta = 0$. 于是有

$$\begin{aligned}\Delta u &= P(x, y)\Delta x + Q(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \\ &= P(x, y)\Delta x + Q(x, y)\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}).\end{aligned}$$

即

$$du = P dx + Q dy.$$

接下来证明(3) \Rightarrow (4).

设存在函数 u 使得

$$du = P dx + Q dy,$$

即

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y),$$

因此

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

因为 P 、 Q 在区域 D 内具有一阶连续偏导数, 所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

从而在 D 内每一点处都有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

最后, 我们只须证明(4) \Rightarrow (1).

设 L 为 D 中任一分段光滑闭曲线, 记 L 所围得区域为 D_1 . 由于 D 为单连通区域, 所以区域 D_1 含在 D 内. 应用格林公式及在 D 内恒有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

就得到

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

■

在上述定理中, 条件单连通区域是很重要的. 如例16.1.2, 对任何不包含原点的单连通区域 D , 已证得在 D 内任何闭曲线 L 上, 皆有

$$\oint_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = 0.$$

倘若 L 为绕原点一周的闭曲线, 则 $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$ 只在剔除原点外的任何区域 D 上有定义, 所以 L 必含在某个复连通区域内. 这时它不满足上面定理的条件, 因而就不能保证使上面积分等于0的结果. 事实上, 设 L 为绕原点一周的圆:

$$x = a \cos \theta, y = a \sin \theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

则有

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}{a^2} d\theta = 2\pi \neq 0.$$

例 16.1.10 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续的导数, 求曲线积分

$$\int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y} dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy,$$

其中 L 是从点 $A(3, \frac{2}{3})$ 到点 $B(1, 2)$ 的直线段.

解. 在积分

$$\int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y} dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$$

中, 令

$$P(x, y) = \frac{1+y^2 f(xy)}{y}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1],$$

由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = f(xy) - \frac{1}{y^2} + xyf'(xy), \quad (y \neq 0)$$

因此可知曲线积分与路径无关.

取点 $C(1, \frac{2}{3})$ 与 A, B 一起构成闭合折线 ABC , 于是

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_{AC} + \int_{CB} \right) \frac{1+y^2 f(xy)}{y} dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy \\ &= \frac{3}{2} \int_3^1 3 \left[1 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 f\left(\frac{2}{3}x\right) \right] dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 f(y) dy - \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{1}{y^2} dy \\ &= -4 - \frac{2}{3} \int_1^3 f\left(\frac{2}{3}x\right) dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 f(y) dy = -4, \end{aligned}$$

其中只需在 $\int_1^3 f\left(\frac{2}{3}x\right) dx$ 中做变换 $y = \frac{2}{3}x$ 即可证得最后的等式, 于是有

$$I = -4.$$

■

例 16.1.11 设 $f(t)$ 是满足 $f(0) = 0$ 的连续可微函数, 且 $\int_L y^2 dx + (2f(x)y + 1) dy$ 与路径无关, 求 $f(x)$ 及被积表达式的原函数.

解. $P = y^2, Q = 2f(x)y + 1$, 故

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2yf'(x),$$

由于积分与路径无关, 故有

$$2yf'(x) = 2y, \text{ 即 } f'(x) = 1,$$

再由 $f(0) = 0$ 知 $f(x) = x$. ■

如果 $du = P dx + Q dy$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2$, 于是可以假设 $u(x, y) = xy^2 + C(y)$. 而 $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + 1$, 故 $C'(y) = 1, C(y) = y + C$. 所以, 相应的原函数为 $xy^2 + y + C$.

16.1.3 习题18-1

1. 应用格林公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L xy^2 dx - x^2y dy$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 逆时针方向;

(2) $\oint_L e^x(1 - \cos y) dx - e^x(y - \sin y) dy$, 其中 L 为区域

$$\{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$$

的正向边界曲线;

(3) $\oint_L (x + y) dx + (x - y) dy$, 其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的正向;

(4) $\oint_L (yx^3 + e^y) dx + (xy^3 + xe^y - 2y) dy$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 的正向;

(5) $\oint_L (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$, 其中 L 是以 $A(1, 1), B(2, 3), C(2, 5)$ 为顶点的三角形 ABC 的正向边界曲线;

(6) $\int_L \frac{-y}{(x+1)^2+y^2} dx + \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} dy$, 其中 L 是以原点为圆心, R 为半径的圆周, 取逆时针方向, $R \neq 1$.

2. $\int_L (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$, 其中 m 为常数, L 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$ 上半部的弧线由 $O(0, 0)$ 到 $A(a, 0)$ 的一段弧(其中 a 为正数).

3. 应用格林公式计算下列曲线所围的平面面积:

(1) 椭圆周: $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$;

(2) 双纽线: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$;

(3) 星形线: $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$;

4. 求 $I = \oint_L \frac{-Ydx + Xdy}{X^2 + Y^2}$, 其中 $X = ax + by, Y = cx + ey, ae - bc \neq 0$, L 为包围原点的逐段光滑简单封闭曲线, 逆时针方向.

5. 设 D 是 \mathbb{R}^2 上带有逐段光滑边界 L 的有界闭区域, \vec{n} 为边界曲线 L 的外法向量, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为Laplace算子.

(1) 若 $u \in C^2(\overline{D}), v \in C^1(\overline{D})$, 求证

$$\iint_D v \Delta u dx dy = - \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \oint_L v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds.$$

(2) 若 $u, v \in C^2(\overline{D})$, 求证

$$\iint_D (v \Delta u - u \Delta v) dx dy = \oint_L \left(v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) ds.$$

6. 单变量函数 f 连续可微, L 是任意一条分段光滑的封闭曲线. 证明:

(1) $\oint_L f(xy)(y dx + x dy) = 0$;

(2) $\oint_L f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0$;

$$(3) \oint_L f(x^n + y^n)(x^{n-1}dx + y^{n-1}dy) = 0, \text{ 这里常数 } n \geq 1.$$

7. 设 $\varphi(y)$ 为连续可微函数, L 为连接点 $A(0, c)$ 和点 $B(0, d)$ ($c > d$)且与线段 AB 所围区域面积为 A 的分段光滑曲线, 方向从 A 指向 B . 计算曲线积分

$$\int_L [\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy.$$

8. 求下列全微分的原函数:

- (1) $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$;
- (2) $e^x[e^y(x - y + 2) + y]dx + e^x[e^y(x - y) + 1]dy$;
- (3) $(2x \cos y - y^2 \sin x)dx + (2y \cos x - x^2 \sin y)dy$;
- (4) $\frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$.

9. 确定常数 a , 使得在任何不包含 $y = 0$ 的区域内曲线积分

$$\int_L \frac{x}{y} (x^2 + y^2)^a dx - \frac{x^2}{y^2} (x^2 + y^2)^a dy$$

与路径无关. 如果 L 是以 $(1, 1)$ 为起点, (x, y) 为终点的不过原点的曲线, 试求

$$\int_L \frac{x}{y} (x^2 + y^2)^a dx - \frac{x^2}{y^2} (x^2 + y^2)^a dy$$

值.

10. 已知 ϕ 具有一阶连续导数, $\phi(0) = 1$, 试确定 $\phi(x)$ 使曲线积分

$$\int_L \left[\frac{-\phi(x)}{1+x^2} \right] xy dx + \phi(x) dy$$

与路径无关, 并计算当 L 的起点与终点分别为 $(1, 0)$ 和 $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 时的积分值.

11. 为了使线积分

$$\int_L F(x, y)(ydx + xdy)$$

与路径无关, 则可微函数 $F(x, y)$ 应该满足怎样的条件?

12. 求出所有二阶偏导数连续的函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 使得线积分

$$I = \int_L P(x + \alpha, y + \beta)dx + Q(x + \alpha, y + \beta)dy$$

对任何简单封闭逐段光滑定向曲线 L 都与 α, β 无关.

13. 设有一力场 $\vec{F} = (y^2 \cos x - 2xy^3) \vec{i} + (4 + 2y \sin x - 3x^2 y^2) \vec{j}$, 求质点沿曲线 $L: 2x = \pi y^2$ 从点 $O(0, 0)$ 运动到 $A(\frac{\pi}{2}, 1)$ 时, 力场 \vec{F} 所做的功.

14. 判断下列方程是否为全微分方程, 并求其通解:

- (1) $xy dx + \frac{1}{2}(x^2 + y) dy = 0$;
- (2) $(3x^2 + 6xy^2) dx + (4y^3 + 6x^2 y) dy = 0$;
- (3) $(x^2 + y^2 + 2x) dx + 2xy dy = 0$;

$$(4) \sin(x+y) dx + [x \cos(x+y)](dx + dy) = 0;$$

$$(5) \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0;$$

$$(6) \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2} = 0.$$

15. 利用观察法求下列方程的积分因子, 并求其通解:

$$(1) (x^2 + y) dx - x dy = 0;$$

$$(2) y(1 + xy) dx - x dy = 0;$$

$$(3) y^2(x - 3y) dx + (1 - 3xy^2) dy = 0;$$

$$(4) (x + y) dx + (y - x) dy = 0;$$

$$(5) (y + 2xy^2) dx + (x - 2x^2y) dy = 0.$$

16.2 高斯公式与散度

16.2.1 高斯公式

格林公式给出了平面区域 D 上的二重积分与其边界上的第二类曲线积分之间的联系, 类似地, 自然会想到空间区域上的三重积分是否与其边界的第二类曲面积分有联系? 这一问题的回答正是本节所讨论的高斯公式, 为了叙述方便, 我们还需对空间区域的连通性作进一步的说明.

如果空间区域中任何闭曲面可不经区域外的点连续收缩为区域内的一点, 则称此空间区域为空间单连通区域; 如果对于这个区域内的任何闭曲线都可不经过区域外的点而连续收缩为区域内的一点, 则称空间区域为曲面单连通区域. 例如球面所围的区域是既是曲面单连通区域也是空间单连通区域, 以两个同心球作为边界的区域(图16.9)为曲面单连通区域, 但不是空间单连通区域. 而环面(图16.10)既不是曲面单连通区域也不是空间单连通区域.

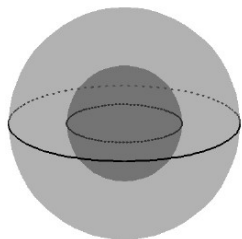


图 16.9

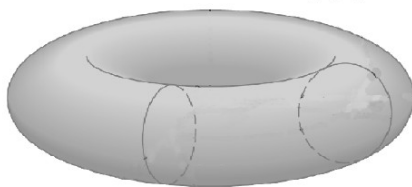


图 16.10

定理 16.2.1 (高斯公式) 设空间闭区域 Ω 的边界曲面 Σ 分片光滑, 函数 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在 Ω 及 Σ 上具有连续偏导数. Σ 上指向区域外侧的单位法向量 $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. 则

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \iint_{\Sigma} [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] dS \\ &= \iint_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy. \end{aligned}$$

最后一个积分是沿曲面 Σ 的外侧进行, 上式称为高斯公式.

证明. 高斯公式中, 后面一个等式由两类曲面积分的关系已经知道是成立的. 故仅需证明第一个等式成立即可.

假设平行于 Oz 轴且穿过 Ω 内部的直线与 Σ 最多只有两个交点, 则可设 Σ 是由 S_1 , S_2 及柱面 S_3 组成(图16.11). 因为 Σ 的外侧为正, 因此这里, 分别取 S_1 的下侧, S_2 的上侧以及 S_3 的外侧为正侧. 再设 S_1, S_2 分别为: $S_1: z = z_1(x, y), (x, y) \in D, S_2: z = z_2(x, y), (x, y) \in D$, 其中 $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$, D 是空间区域 Ω 在 xOy 平面上的投影.

根据三重积分的计算方法, 有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz \\ &= \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_D \{R[x, y, z_2(x, y)] - R[x, y, z_1(x, y)]\} dx dy \\ &= \iint_D R[x, y, z_2(x, y)] dx dy - \iint_D R[x, y, z_1(x, y)] dx dy. \end{aligned}$$

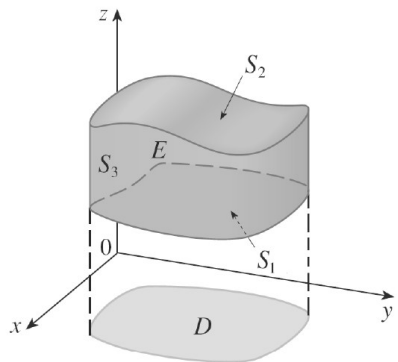


图 16.11

另一方面, 根据曲面积分的计算方法, 并注意到 S_3 上法向量的第三个分量为0, 故有

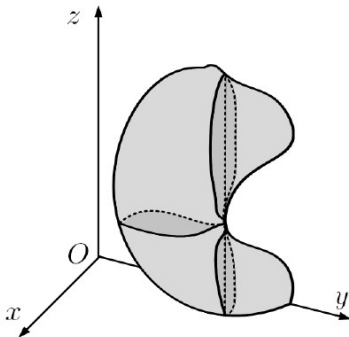
$$\begin{aligned} & \oint_{\Sigma} R(x, y, z) dx \wedge dy \\ &= \iint_{S_2} R(x, y, z) dx \wedge dy + \iint_{S_1} R(x, y, z) dx \wedge dy + \iint_{S_3} R(x, y, z) dx \wedge dy \\ &= \iint_D R[x, y, z_2(x, y)] dx dy - \iint_{D_{xy}} R[x, y, z_1(x, y)] dx dy + 0 \\ &= \iint_D R[x, y, z_2(x, y)] dx dy - \iint_D R[x, y, z_1(x, y)] dx dy \end{aligned}$$

从而有

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oint_{\Sigma} R(x, y, z) dx \wedge dy.$$

类似地可证:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz &= \oint_{\Sigma} P(x, y, z) dy \wedge dz, \\ \iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz &= \oint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz \wedge dx. \end{aligned}$$



如果闭区域 Ω 不满足上面的条件(平行于坐标轴的直线于 Ω 的边界曲面的交点多于两个)时, 可以用平面将 Ω 分成若干小的闭区域(如图16.2.1), 使每一个闭区域都满足以上的条件. 再利用第二类曲面积分中, 如果曲面取负侧, 相应的积分值变号可知, 只要 Ω 的边界曲面 Σ 是分片光滑的, 则高斯公式成立. ■

例 16.2.2 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

其中 $\Sigma: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, 取外侧为正(图 16.12).

解. 利用高斯公式,

$$I = 2 \iiint_{\Omega} (x+y+z) dx dy dz;$$

其中 $\Omega: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq R^2$, 如果假设 Ω 的密度为 1, 那么, 由对称性知道 Ω 的质心为球心 (a, b, c) , 利用质心公式, 有

$$\iiint_{\Omega} x dx dy dz = a \iiint_{\Omega} dx dy dz = \frac{4}{3} \pi a R^3,$$

同理, 有

$$\iiint_{\Omega} y dx dy dz = b \iiint_{\Omega} dx dy dz = \frac{4}{3} \pi b R^3,$$

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = c \iiint_{\Omega} dx dy dz = \frac{4}{3} \pi c R^3,$$

于是, 有:

$$I = \frac{8}{3} \pi R^3 (a + b + c).$$

■

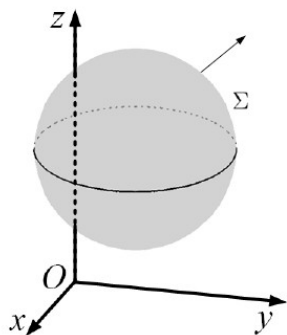


图 16.12

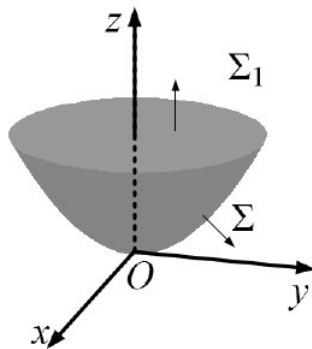


图 16.13

例 16.2.3 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) x dy \wedge dz$, 其中 $\Sigma: z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$ 的下侧(图 16.13).

解. 积分曲面不是一个封闭曲面, 因此不能直接利用高斯公式. 为此, 考虑曲面 $\Sigma_1: z = 1 (x^2 + y^2 \leq 1)$, 取上侧为正. 则 $\Sigma + \Sigma_1$ 构成一个封闭曲面, 利用高斯公式

$$I + \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) x dy \wedge dz = \iiint_{\Omega} (3x^2 + y^2) dx dy dz,$$

其中 $\Omega: x^2 + y^2 \leq z, 0 \leq z \leq 1$. 而

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (3x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} \rho^2 (1 + 2 \cos^2 \theta) \rho d\rho \\ &= \int_0^1 \frac{z^2}{4} dz \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

另外, 由于 Σ_1 与 yOz 平面垂直, 故

$$\iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2)x \, dy \wedge dz = 0,$$

于是 $I = \frac{\pi}{3}$. ■

16.2.2 沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

定理 16.2.4 设 Ω 是空间二维单连通闭区域, P 、 Q 、 R 在 Ω 内具有一阶连续的偏导数, 则曲面积分

$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy$$

在 Ω 内与所选取的曲面 Σ 无关, 而只取决于 Σ 的边界曲线(或沿 Ω 内任意一闭曲面的曲面积分为零)的充要条件是等式

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

在 Ω 内恒成立.

证明. 容易证明曲面积分在 Ω 内与所取的曲面 Σ 无关, 而只取决于 Σ 的边界曲线与沿 Ω 内任意一闭曲面的曲面积分为零, 这两者是完全等价的(即互为充分必要条件). 因此只需要证明在 Ω 内沿任一闭曲面的曲面积分为零的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

成立.

充分性 如果

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

在 Ω 内恒成立, 则由高斯公式立刻得到沿 Ω 内的任意闭曲面 Σ 的曲面积分为零, 故充分性成立.

必要性 用反证法, 设在 Ω 内任意一个闭曲面 Σ 上曲面积分 $\oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S}$ 为零, 而 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ 在 Ω 内不恒成立; 不妨设在 Ω 内存在一点 M_0 , 使 $\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\Big|_{M_0} = \eta > 0$. 由于 $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ 是连续的, 故在以 M_0 为中心, 充分小正数 r_0 为半径的球面 Σ_0 所包围的空间区域 Ω_0 内, 恒有

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) > \frac{1}{2}\eta.$$

故

$$\begin{aligned} & \oint_{\Sigma_0} P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy \\ &= \iiint_{\Omega_0} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \, dy \, dz \\ &\geq \frac{1}{2}\eta \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3 > 0. \end{aligned}$$

这与假设矛盾, 故在 Ω 内必恒有

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

■

16.2.3 散度

在第二类曲面积分的讨论中, 我们知道 $\iint_{\Sigma} \vec{A}(x, y, z) \cdot d\vec{S}$ 的物理意义是向量场 \vec{A} 对曲面 Σ 的流量. 设想在 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 中有一个不可压缩的定常流速场 $\vec{v}(x, y, z)$, Σ 为 Ω 内一闭合曲面, 法向量指向外侧, 则

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

表示流入闭曲面 Σ 与流出 Σ 的代数和. 如果 $\Phi > 0$, 则表示流入的少而流出的多. 这时, 在 Σ 所包围的区域 V 内必有产生流体的‘源’; 如果 $\Phi < 0$, 则流入的多而流出的少, 这时 V 内必有吸收流体的‘洞’, 我们把‘洞’看作是负源. 因而只要 $\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} \neq 0$, Σ 所围区域内必有源存在. 在不同的物理场中, 源有不同的物理意义. 例如, 对于电场, 正源表示正电荷, 它发出电力线; 负源表示负电荷, 它吸收电力线. 又如, 对于磁场, 正负源分别表示磁场的正负极.

对于给定的向量场, 不仅要研究源的存在性, 还应该掌握源的强度. 为此, 引进散度的定义.

定义 16.2.5 (散度定义) 设有向量场 $\vec{A}(M) = \vec{A}(x, y, z)$, 在场中某一点 M 处的某邻域内作一个包含点 M 在内的任意闭曲面 $\Delta\Sigma$ (取外侧), 设其包围的空间为 $\Delta\Omega$, 以 ΔV 表示其体积, 以 $\Delta\Phi$ 表示从其内穿出 $\Delta\Sigma$ 的流量, 当 $\Delta\Omega$ 以任意方式向点 M 收缩时, 如果极限

$$\lim_{\Delta\Omega \rightarrow M} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V} = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow M} \frac{\oiint_{\Delta\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

存在, 则称此极限值为向量场 $\vec{A}(M)$ 在点 M 处的散度, 记为 $\operatorname{div} \vec{A}$.

由散度定义可知, $\operatorname{div} \vec{A}$ 为一数量. 它表示在场中 M 点处流量对体积的变化率, 即在点 M 处的单位体积所穿出的流量, 实际就是点 M 处的源的强度 (或流量密度).

因此, 当 $\operatorname{div} \vec{A} \neq 0$ 时, 其符号的正、负就表示了在该点 M 处有散发流量的正源或吸收流量的负源; 而其绝对值 $|\operatorname{div} \vec{A}|$ 相应的表示了在该点 M 处散发或吸收流量的强度. 而当 $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ 时, 表示在该点无源. 对于 $\operatorname{div} \vec{A} \equiv 0$ 的向量场 \vec{A} , 则称为无源场或管形场.

定理 16.2.6 若向量场 $\vec{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ 中 P, Q, R 均有一阶连续的偏导数, 则在任意一点 $M(x, y, z)$ 处的散度为

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

证明. 对任意包围点 M 的一个闭曲面 $\Delta\Sigma$ (其法向量指向外侧), 设其所围的空间 $\Delta\Omega$ 的体积为 ΔV , 由高斯公式

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \oiint_{\Delta\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Delta\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy \\ &= \iiint_{\Delta\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV. \end{aligned}$$

由三重积分的中值定理, 存在 $M^*(\xi, \eta, \zeta) \in \Delta\Omega$, 使

$$\Delta\Phi = \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right]_{M^*} \Delta V,$$

故

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \lim_{\Delta\Omega \rightarrow M} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V} = \lim_{M^* \rightarrow M} \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right]_{M^*} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned}$$

■

散度具有下面的运算性质 (请读者自行给出证明):

- (1) $\operatorname{div}(k\vec{A}) = k \operatorname{div} \vec{A}$ (k 为常数);
- (2) $\operatorname{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \vec{B}$;
- (3) $\operatorname{div}(u\vec{A}) = u \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} u$ (u 为数量函数).

例 16.2.7 置于原点的点电荷 q , 产生的静电场强度为

$$\vec{E} = \frac{e}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

验证 \vec{E} 在不包含原点的空间区域内为无源场.

解. 因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right) &= \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}{(x^2 + y^2 + z^2)^4} (-2x^2 + y^2 + z^2), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right) &= \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}{(x^2 + y^2 + z^2)^4} (x^2 - 2y^2 + z^2), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right) &= \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}{(x^2 + y^2 + z^2)^4} (x^2 + y^2 - 2z^2)\end{aligned}$$

于是

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0,$$

所以 \vec{E} 在不包含原点的空间区域内为无源场. ■

例 16.2.8 若 $u = e^{xyz}$, $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, 求 $\operatorname{div} u\vec{A}$.

解. 因为 $\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 3$,
 $\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} e^{xyz} = e^{xyz}(yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k})$.
 所以

$$\operatorname{div}(u\vec{A}) = u \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} u = 3(1 + xyz)e^{xyz}.$$

■

16.2.4 习题18-2

1. 应用高斯公式计算下列曲面积分:

- (1) $\iint_{\Sigma} yz \, dy \wedge dz + zx \, dz \wedge dx + xy \, dx \wedge dy$, 其中 Σ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧;
- (2) $\iint_{\Sigma} x^2 \, dy \wedge dz + y^2 \, dz \wedge dx + z^2 \, dx \wedge dy$, 其中 Σ 是立方体 $0 \leq x, y, z \leq a$ 表面的外侧;
- (3) $\iint_{\Sigma} (x - y) \, dx \wedge dy - x(y - z) \, dy \wedge dz$, 其中 Σ 为是圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = 0, z = 1$ 所围立体的表面之外侧;
- (4) $\iint_{\Sigma} (x + 2y + 3z) \, dx \wedge dy + (y + 2z) \, dy \wedge dz + (z^2 - 1) \, dz \wedge dx$, 其中 Σ 为平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标平面所围四面体的表面之外侧;
- (5) $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$, 其中 $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, Σ 为椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的外侧;

- (6) $\iint_{\Sigma} y^2 z \, dx \wedge dy + z^2 x \, dy \wedge dz + x^2 y \, dz \wedge dx$, 其中 Σ 是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$, 圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 和坐标平面在第一象限所围立体的表面的外侧.

2. 求 $\iint_{\Sigma} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, 其中 Σ 是上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.
3. 求 $\iint_{\Sigma} a^2 b^2 z^2 x dy \wedge dz + b^2 c^2 x^2 y dz \wedge dx + c^2 a^2 y^2 z dx \wedge dy$, 其中 Σ 为上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (z \geq 0)$ 的下侧 ($a > 0, b > 0, c > 0$).
4. 证明由闭曲面 Σ 所包围立体的体积 V 可用下面公式计算:

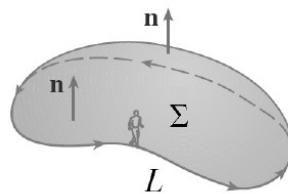
$$V = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS.$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ 的外法线的方向余弦.

5. 计算 $\oint_{\Sigma} xf(xy) dy \wedge dz - yf(xy) dz \wedge dx + zf(xy) dx \wedge dy$, 其中 $f(u)$ 具有连续的导数, Σ 为由曲面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 及 $z = 0$ 所围立体的表面, 外侧.
6. 求下列向量场 \vec{A} 的散度:
 - (1) $\vec{A} = (x^2 + yz)\vec{i} + (y^2 + xz)\vec{j} + (z^2 + xy)\vec{k}$;
 - (2) $\vec{A} = e^{xy}\vec{i} + \cos(xy)\vec{j} + \cos(xz^2)\vec{k}$;
 - (3) $\vec{A} = \text{grad}(x^{10}y^{11}z^{12})$;
 - (4) $\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r^n} (n > 0)$, 其中 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, r = |\vec{r}|$.

16.3 斯托克斯公式与旋度

设 Σ 是一有向曲面, L 是它的边界曲线, 规定 Σ 的正侧与 L 的正向的关系如下: 若观察者站在曲面的正侧上 (即观察者由脚至头部的方向与曲面的法向量方向一致), 当他沿着曲线 L 前进时, 曲面 Σ 总在他的左侧, 这时规定观察者前进的方向为 L 的正向, 并称 L 的正向与 Σ 的法线向量方向遵循右手法则 (图 16.14), 或称 L 是有向曲面 Σ 的正向边界曲线.



16.3.1 斯托克斯公式

我们要把格林公式由平面推广到曲面, 将在具有光滑边界曲线的光滑曲面上的积分和其边界上的积分联系起来.

定理 16.3.1 (斯托克斯公式) 假设 Σ 是一个光滑有向曲面, 在任一点处的单位法向量记 $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 其正向边界曲线为光滑有向曲线 L , 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在包含曲面 Σ 的某空间区域内有连续偏导数, 则成立以下的公式:

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

上式称为斯托克斯公式. 特别的, 如果利用行列式符号, 那么上式可以记为:

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \\ &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

证明. 首先设平行于 z 轴的直线至多与 Σ 相交于一点, 取上侧为正, 在 xOy 平面上的投影为域 D . 则 Σ 的方程可以写为 $\{(x, y, z) : z = z(x, y), (x, y) \in D\}$. 注意到上侧为正侧, 故 γ 是锐角. 首先证明

$$\oint_L P dx = \iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy$$

成立. 为此, 设 L 在 xOy 平面上的投影曲线 L' 的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), (a \leq t \leq b),$$

于是 L 的参数方程可以写为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(x(t), y(t)), (a \leq t \leq b).$$

不妨设参量增大的方向刚好就是 L 的方向. 注意到 L' 是 D 的边界曲线, 而且当参数从 a 增加到 b 时所对应的方向对应于 D 的边界正向, 于是

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y, z) dx &= \int_a^b P[x(t), y(t), z(x(t), y(t))] x'(t) dt \\ &= \oint_{L'} P(x, y, z(x, y)) dx \\ &= \iint_D [0 - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y))] dx dy \\ &= - \iint_D (\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}) dx dy \\ &= \iint_D -\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} dx dy - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

因为 γ 是锐角, 所以 $dx dy = \cos \gamma dS = dz \wedge dx$. 而

$$dz \wedge dx = \cos \beta dS = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} dx dy,$$

又由 $\cos \gamma = \frac{1}{\Delta}$, $\cos \beta = -\frac{\partial z}{\partial y} \frac{1}{\Delta}$ (其中 $\Delta = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}$), 得

$$\frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = -\frac{\partial z}{\partial y},$$

故 $-\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = dz \wedge dx$. 代入上面的式子, 即得:

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy.$$

当 γ 是钝角得时候, 同样可以证明上式是成立的.

类似地可证

$$\oint_L Q(x, y, z) dy = \iint_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz$$

和

$$\oint_L R(x, y, z) dz = \iint_{\Sigma} \frac{\partial R}{\partial x} dy \wedge dz - \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dx$$

成立.

如果平行于坐标轴的直线与 Σ 相交可能多于一点, 那么我们可以把曲面分割成几个部分, 使得每一部分都满足平行于坐标轴的直线与 Σ 相交最多于一点, 在每一部分, 上面的式子成立, 把相对应的等式相加即可.

将上面的几个式子加起来, 就是斯托克斯公式. ■

在斯托克斯公式中, 当 Σ 是平行于 xOy 的坐标面的平面域时, 由于 $\vec{n} = \pm(0, 0, 1)$, 故此公式就变成了格林公式.

例 16.3.2 计算 $I = \oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, L 为柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 和 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ ($a > 0, h > 0$) 的交线, 即 L 是一椭圆, 其方向为逆时针方向.

证明. 把平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ 上 L 所包围的区域记为 Σ , 曲面的法线方向和曲线的方向服从右手法则, 则 Σ 的单位法向量为 $\frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}}(h, 0, a)$ (平面方程 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ 可写成 $hx - az = ah$). 将 L 上的积分按照斯托克斯公式化为 Σ 上的积分:

$$\begin{aligned} & \oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz \\ &= -2 \iint_{\Sigma} dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy \\ &= -2 \iint_D \left(1 + \frac{h}{a}\right) dx dy, \end{aligned}$$

其中 D 是 Σ 在 xOy 上的投影: $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 因而

$$\begin{aligned} I &= \oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz \\ &= -2\pi a(a+h). \end{aligned}$$

■

16.3.2 空间曲线积分与路径无关的条件

定理 16.3.3 设函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 及其偏导数在空间一维单连通区域 Ω 上连续, 则下面四个命题等价:

- (1) 在 Ω 中曲线积分 $\int_L P dx + Q dy + R dz$ 与路径无关, 而只与起点和终点有关;
 (2) 在 Ω 中, 沿任何一条闭曲线 L 的积分值为零, 即

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0;$$

- (3) 在 Ω 中任意点 (x, y, z) 处, 有

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0;$$

- (4) 在 Ω 中, 存在函数 $u(x, y, z)$, 使曲线积分 $\int_L P dx + Q dy + R dz$ 中的被积式是 $u(x, y, z)$ 的全微分, 即

$$du = P dx + Q dy + R dz,$$

此时也称 $u(x, y, z)$ 为 $P dx + Q dy + R dz$ 的一个原函数.

证明从略.

例 16.3.4 设力场为 $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, 其中

$$P = yz(2x + y + z), Q = xz(x + 2y + z), R = xy(x + y + 2z),$$

证明该力场为保守场, 并求场对质点 M 沿任一路径 L 从点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 到点 $B(x, y, z)$ 所做的功 W .

解. 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} &= (2xz - 2yz + z^2) - (2xz + 2yz + z^2) = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} &= (2xy + y^2 + 2yz) - (2xy + y^2 + 2yz) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} &= (2xy + 2xz + x^2) - (2xy + 2xz + x^2) = 0, \end{aligned}$$

所以沿任何闭路 L 所做的功为零, 即

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0.$$

这说明 \vec{F} 为保守力场, 此力场所做的功 W 只与起点和终点有关, 而与路径无关. 于是考虑沿连接 $A(x_0, y_0, z_0), C(x, y_0, z_0)$ 折线 Γ 积分, 得

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{\Gamma} yz(2x + y + z) dx + xz(x + 2y + z) dy + xy(x + y + 2z) dz \\ &= \int_{x_0}^x y_0 z_0 (2x + y_0 + z_0) dx + \int_{y_0}^y x z_0 (x + 2y + z_0) dy + \int_{z_0}^z xy(x + y + 2z) dz \\ &= x^2 y z + x y^2 z + x y z^2 - (x_0^2 y_0 z_0 + x_0 y_0^2 z_0 + x_0 y_0 z_0^2). \end{aligned}$$

■

16.3.3 旋度

由第二类曲线积分的物理意义可知, 若给定力场 $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, 则质点沿闭曲线 L 的正向所作的功 W 为

$$W = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_L P dx + Q dy + R dz,$$

这里, W 除了表示功, 还表示了力场 \vec{F} 推动质点沿 L 正向‘转动’所具有的转动能力. 在数学上, 对一般的向量场而言, 称 W 为向量场沿曲线 L 正向的环量, 环量通常用 Γ 来表示.

定义 16.3.5 (环量的定义) 设有向量场

$$\vec{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

则沿场中某一封闭有向曲线 L 正向的曲线积分

$$\Gamma = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

称为向量场 $\vec{A}(x, y, z)$ 沿曲线 L 正向的环量.

向量场 $\vec{A}(x, y, z)$ 的环量表示质点在 $\vec{A}(x, y, z)$ 的作用下沿闭曲线 L 的旋转情况.

定义 16.3.6 (环量密度) 设 M 为向量场 \vec{A} 中的一点, 在点 M 处取定一个方向 \vec{n} , 再过点 M 作一个微小的曲面 $\Delta\Sigma$ (其面积记为 ΔS), 并以 \vec{n} 为其在点 M 处的法向量, $\Delta\Sigma$ 的边界用 L 表示, 且 L 的正向与 \vec{n} 遵循右手法则(如图16.14). 若极限

$$\lim_{\Delta\Sigma \rightarrow M} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta S}$$

存在, 则称此极限值为向量场 \vec{A} 在点 M 处沿方向 \vec{n} 的环量密度, 记为 μ_n (环量对面积的变化率), 即

$$\mu_n = \lim_{\Delta S \rightarrow M} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow M} \frac{\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta S}.$$

从上面的定义可知, 环量密度 μ_n 的值除了与点 M 的位置有关之外, 还与所取的方向 \vec{n} 有关, 这一点与数量场的方向导数的概念类似. 在数量场中引出了一个梯度向量, 类似的, 在向量场 \vec{A} 中也可引出一个向量, 这个向量就是向量场 \vec{A} 在点 M 处的旋度.

定义 16.3.7 (旋度的定义) 若向量场 \vec{A} 中的点 $M(x, y, z)$ 处存在这样一个向量, 其方向为取得最大值的环量密度方向, 其模为最大环量密度的值, 则称此向量为向量场 \vec{A} 在点 M 处的旋度, 记为 $\text{curl } \vec{A}|_M$, 当点 M 变化时, 得到一个关于 (x, y, z) 的向量值函数, 记为 $\text{curl } \vec{A}$.

下面的定理提供了在直角坐标系下, 计算向量场旋度的公式.

定理 16.3.8 若向量场 $\vec{A} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, P 、 Q 、 R 具有一阶连续偏导数, 则在任一点 $M(x, y, z)$ 处的旋度为

$$\begin{aligned}\operatorname{curl} \vec{A} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

证明. 先求环量密度 μ_n , 因为

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma &= \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint_L P dx + Q dy + R dz \\ &= \iint_{\Delta\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \iint_{\Delta\Sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS.\end{aligned}$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 $\Delta\Sigma$ 上单位法线向量的方向余弦. 由积分中值定理, 在 $\Delta\Sigma$ 上必存在点 $M'(\xi, \eta, \zeta)$ 使上式为

$$\Delta\Gamma = \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right]_{M'} \Delta S,$$

所以得

$$\begin{aligned}\mu_{\vec{n}} &= \lim_{\Delta\Sigma \rightarrow M} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta\Sigma} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta S} \\ &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right]_{M'} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma.\end{aligned}$$

上式就是向量场 \vec{A} 在点 M 处沿法线向量 $\vec{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 方向的环量密度在直角坐标系中的表达式.

如果设向量 \vec{R} 为

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},\end{aligned}$$

则

$$\mu_{\vec{n}} = \lim_{\Delta\Sigma \rightarrow M} \frac{\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta S} = \vec{R} \cdot \vec{n} = |\vec{R}| \cos(\vec{R}, \vec{n}).$$

从上式可知, 当角 $(\vec{R}, \vec{n}) = 0$ 时, 环量密度具有最大值 $|\vec{R}|$, 即 \vec{R} 的方向为最大环量密度的方向, 其模为最大环量密度值, 所以向量 \vec{R} 正好就是向量场 \vec{A} 在点 M 处的旋度, 即

$$\operatorname{curl} \vec{A} = \vec{R} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

■

旋度具有下面的运算性质:

- (1) $\operatorname{curl}(k\vec{A}) = k \operatorname{curl} \vec{A}$ (k 为常数);
- (2) $\operatorname{curl}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \operatorname{curl} \vec{A} \pm \operatorname{curl} \vec{B}$;
- (3) $\operatorname{curl}(\mu\vec{A}) = u \operatorname{curl} \vec{A} + \operatorname{grad} u \times \vec{A}$;
- (4) $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} u) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ 为零向量).

若向量场 \vec{A} 的旋度 $\operatorname{curl} \vec{A} \equiv \mathbf{0}$, 则称向量场 \vec{A} 为无旋场. 既是无旋场又是无源场的向量场 \vec{A} 称为调和场.

例 16.3.9 求向量场 $\vec{A} = xy^2z^2\vec{i} + z^2 \sin y\vec{j} + x^2e^y\vec{k}$ 的旋度.

解.

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & z^2 \sin y & x^2e^y \end{vmatrix} \\ &= (x^2e^y - 2z \sin y)\vec{i} + 2x(y^2z - e^y)\vec{j} - 2xyz^2\vec{k}. \end{aligned}$$

■

16.3.4 习题18-3

1. 求曲线积分

$$\oint_L xdx + (x+z)dy + ydz,$$

L 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$)和圆柱面 $ax - x^2 = y^2$ 的交线, 球面的方向是外侧, L 的方向与球面方向服从右手法则, $a > 0$.

2. 直接计算曲线积分 $\oint_L ydx + zdy + xdz$, 并用Stokes公式再计算一次. 其中 L 为 xOy 平面上的圆周: $x^2 + y^2 = 1$, 从 z 轴正向看去为逆时针.
3. 求 $\oint_L ydx + zdy + xdz$, L 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x + y + z = 0$ 的交线, 从原点看去, L 的方向为顺时针.
4. 求 $\oint_L (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, L 为曲面 $x^2 + y^2 = 2y$ 与 $y = z$ 的交线, 从点 $(0, 1, 0)$ 看去, L 的方向为逆时针.
5. 求 $\oint_L (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$, L 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ 与 $x^2 + y^2 = 2bx$ 的交线中 $z \geq 0$ 的部分 ($0 < b < a$), 从点 $(b, 0, 0)$ 看去, L 的方向为逆时针.
6. 求 $\oint_L (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$, 其中 L 为 $x + y + z = 1$ 与三坐标面的交线, 它的走向使所围平面区域上侧在曲线的左侧.
7. 求 $\oint_L (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$, 其中 L 为以 $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)$ 为顶点的三角形沿 $ABCA$ 的方向.

8. 求

$$I = \oint_L (x^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz,$$

L 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ 与 $x^2 + y^2 = 2ax$ ($0 < a < R, z > 0$)的交线, 且 L 的正向是使它在球面上所围小区域上侧在它的左方.

9. 求 $\oint_L 3ydx + xzdy + yz^2dz$, 其中 L 为圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = 2, \end{cases}$ 从 z 轴正向看去为逆时针方向.

10. 求下列全微分的原函数:

$$(1) \, du = (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz;$$

$$(2) \, du = (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy.$$

11. 证明 $\int_L yzdx + zx dy + xy dz$ 与路径无关, 并求原函数 $u(x, y, z)$.

12. 其下列向量场的旋度:

$$(1) \, \vec{A} = ye^z \vec{i} + (x^3 - y^2 + z^3) \vec{j} + xyz \vec{k};$$

$$(2) \, \vec{A} = (x^2y^3z^3, x^3y^2z^3, x^3y^3z^2);$$

$$(3) \, \vec{A} = x \sin(yz) \vec{i} + y \sin xz \vec{j} + \sin xk.$$

13. 已知 $\vec{a} = 3y\vec{i} + 2z^2\vec{j} + xy\vec{k}, \vec{b} = x^2\vec{i} - 4\vec{k}$. 求 $\text{curl}(\vec{a} \times \vec{b})$.

16.4 复习题18

1. 计算下列第一类曲线积分:

$$(1) \, \int_L (x^2 + y^2) ds, \, L \text{ 为以 } (0, 0), (1, 0), (0, 1) \text{ 为顶点的三角形};$$

$$(2) \, \int_L (x^3 - y^3) ds, \, L \text{ 为圆 } x^2 + y^2 = 4;$$

$$(3) \, \int_L |z| ds, \, L: x = t \cos t, y = t \sin t, z = t (0 \leq t \leq t_0).$$

2. 设金属丝 L 在 xOy 平面具有椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$$

的形状, 已知在 $M(x, y)$ 点它的线密度为 $\rho = |x + y|$, 求 L 的质量.

3. 求密度均匀的曲线 $x = at, y = \frac{1}{3}t^3, z = \frac{a}{2}t^2 (0 \leq t \leq 1)$ 的质心.

4. 求下列第二类曲线积分:

$$(1) \, \int_{\widehat{AB}} (x - 2xy^2)dx + (y - 2x^2)dy, \text{ 其中 } A(0, 0), B(2, 4), \widehat{AB}: y = x^2;$$

$$(2) \, \int_{\widehat{AB}} (x + y)dx + xydy, \text{ 其中 } A(0, 0), B(2, 0), \widehat{AB}: y = 1 - |1 - x|;$$

$$(3) \, \int_{\widehat{AB}} (x - y)dx + (y - z)dy + (z - x)dz, \text{ 其中 } A(0, 0, 0), B(1, 1, 1), \widehat{AB}: x = t, y = t^2, z = t^3;$$

(4) $\int_{\widehat{AB}} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 其中 $A(\alpha, 0, 0), B(\alpha, 0, 2\pi\gamma), \widehat{AB}$:
 $x = \alpha \cos t, y = \beta \sin t, z = \gamma t (\alpha, \beta, \gamma \text{ 为正数}).$

5. 计算下列积分:

(1) $\oint_L xy^2 dy - yx^2 dx$, 其中 $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 逆时针方向;

(2) $\oint_L e^y \sin x dx + e^{-x} \sin y dy$, 其中 L 为 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 的边界, 正向;

(3) $\oint_L (x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$, L 是圆周 $x^2 + y^2 = ax$, 逆时针方向.

6. 设 $A > 0, C > 0, AC - B^2 > 0$, 求证:

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{AC - B^2}},$$

其中 $L: x^2 + y^2 = R^2$, 逆时针方向.

7. 设弹性力的方向指向坐标原点, 力的大小与质点到原点的距离成正比. 设质点由 $(a, 0)$ 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 逆时针方向移动到 $(0, b)$, 求弹性力所做的功.

8. 求曲面 $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2, \sqrt{2}x + z = 2a (a > 0)$ 所围成的立体的表面积.

9. 设曲面 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 4$, 求下列积分:

(1) $I = \iint_{\Sigma} z(x^2 + y^2) dS;$

(2) $I = \iint_{\Sigma} [x^2 + y^2 + (z - 2)^2] dS.$

10. 求均匀球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被锥面

$$z \tan \beta = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2})$$

截下部分的质心.

11. 求密度为 $\rho = |xy|$ 的球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ 关于 z 轴的转动惯量.

12. 设 $f(x)$ 为一元连续函数, 证明普阿松公式

$$\iint_{\Sigma} f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \xi) d\xi,$$

其中 Σ 为球面: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

13. 设 $f(x)$ 具有连续的导数, 且 $f(0) = \frac{1}{2}$. 已知曲线积分

$$\int_L [x + f(x)] y^2 dx + y f(x) dy$$

与路径无关 (其中 $y \neq 0$), 试求 $f(x)$.

14. 验证 $(4x + 2y)dx + (2x - 6y)dy$ 是某个二元函数 $u = u(x, y)$ 的全微分, 并求满足条件 $u(1, 1) = 0$ 的 $u(x, y)$.

15. 在过点 $O(1,0)$ 和 $A(1,0)$ 的曲线族 $y = a(x - x^2)$ 中, 求一条曲线 L 使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $I(a) = \int_L (1 + ay)dx + (2x + y)dy$ 的值最小。

16. 验证:

$$Pdx + Qdy = \frac{1}{2} \frac{xdy - ydx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}$$

(A, B, C 为常数, 且 $AC - B^2 > 0$)适合条件:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

如果 L 是一条包含原点方向为逆时针的光滑闭曲线, 试求

$$\oint_L Pdx + Qdy.$$

17. 计算

$$\iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x]d\wedge ydz + [2f(x, y, z) + y]dz\wedge dx + [f(x, y, z) + z]dx\wedge dy,$$

其中 $f(x, y, z)$ 为连续函数, Σ 是平面 $x - y + 1 = 1$ 在第四卦限的部分的上侧。

18. 利用曲线积分计算下列曲线所围成的图形的面积:

(1) $(x + y)^2 = ax (a > 0)$ 和 x 轴;

(2) 旋轮线的一段: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$ 与 x 轴。

19. 利用Gauss公式证明阿基米德原理: 将物体全部浸没在液体中时, 物体受的浮力等于与物体同体积的液体的重量, 而方向是垂直向上的。

20. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有连续的二阶偏导数, 且满足关系式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

证明:

(1) 等式

$$\oint_L f \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} dS = \iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

成立, 其中 L 为 D 的边界, \vec{n} 为 L 的外法线方向;

(2) 若 $f(x, y)$ 在 L 上恒等于零, 则 $f(x, y)$ 在 D 上也恒等于零。

21. 设 $f(x, y)$ 是 $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上二次连续可微函数, 满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 y^2,$$

计算积分

$$\iint_D \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} \right] dx dy,$$

这里 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 。

22. 设 $\vec{A} = \text{grad} \varphi(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi(r)$ 可导, 在何条件下有

$$\text{div}(\text{grad} \varphi(r)) = 0?$$

23. 设 Σ 是一个光滑封闭曲面, 向量场 \vec{F} 的分量有连续的一阶偏导数, 证明

$$\iint_{\Sigma} \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 0.$$

第十七章 含参变量的积分

17.1 含参变量的常义积分

17.1.1 含参变量的常义积分

定义 17.1.1 设二元函数 $f(x, y)$ 在闭矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上有定义. 如果对固定的 $y \in [c, d]$, 函数 $f(x, y)$ 对变量 x 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, 则称积分

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x$$

是含参变量 y 的积分, 它是自变量 y 的函数. 同样, 对于任一固定的 $x \in [a, b]$, 积分

$$G(x) = \int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y$$

如果存在, 则称之为含参变量 x 的积分, 它是自变量 x 的函数.

定理 17.1.2 设函数 $f(x, y)$ 在闭矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上连续, 则 $I(y) = \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x$ 是 $[c, d]$ 上的连续函数, 且

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \mathrm{d}x,$$

即极限运算与积分运算可交换次序.

证明. 首先证明 $I(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续.

设 $y \in [c, d]$ 对充分小的 Δy , 有 $\Delta y + y \in [c, d]$ (若 y 为区间端点, 则仅考虑 $\Delta y > 0$ 或 $\Delta y < 0$), 于是

$$I(y + \Delta y) - I(y) = \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \mathrm{d}x.$$

由于 f 在有界闭域 D 上连续, 从而一致连续, 即对任给正数 ε , 总存在能找到一个只与 ε 有关的正数 δ , 对 D 内任何两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 只要

$$|x_1 - x_2| < \delta, |y_1 - y_2| < \delta,$$

就有

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

于是对任何 $y \in [c, d]$ 及 $|\Delta y| < \delta$, 也有

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

从而

$$\begin{aligned} |I(y + \Delta y) - I(y)| &\leq \int_a^b |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| \mathrm{d}x \\ &< \int_a^b \varepsilon \mathrm{d}x = \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

这就证得 $I(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续. 于是对任何 $y_0 \in [c, d]$, 都有

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \mathrm{d}x.$$

■

定理 17.1.3 设函数 $f(x, y)$ 及 $f_y(x, y)$ 在闭矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上连续, 则 $\int_a^b f(x, y) dx$ 在 $[c, d]$ 上可导, 且

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f_y(x, y) dx,$$

即求导运算与积分运算可交换次序.

证明. 设 $y \in [c, d]$, $y + \Delta y \in [c, d]$, 令 $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, 则由微分中值定理

$$\begin{aligned} \frac{\Delta I}{\Delta y} &= \frac{1}{\Delta y} \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx \\ &= \int_a^b f_y(x, y + \theta \Delta y) dx \end{aligned}$$

(这里 $0 \leq \theta \leq 1$).

由于 f_y 连续, 故对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $|\Delta y| < \delta$, 就有

$$|f_y(x, y + \theta \Delta y) - f_y(x, y)| < \varepsilon,$$

于是, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta I}{\Delta y} - \int_a^b f_y(x, y) dx \right| &= \left| \int_a^b f_y(x, y + \theta \Delta y) - f_y(x, y) dx \right| \\ &< \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

这就是要证明的. ■

以上所给定的积分限 a 与 b 都是常数, 但在实际应用中还会遇到积分限也含参变量 y , 即形如 $F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$ 的积分.

定理 17.1.4 设函数 $f(x, y)$ 在闭矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上连续, 函数 $a(y)$ 及 $b(y)$ 都在 $[c, d]$ 上连续, 且 $a \leq a(y), b(y) \leq b$, 则 $F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$ 在 $[c, d]$ 上连续.

证明. 对积分

$$F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$$

用换元法, 令

$$x = a(y) + t(b(y) - a(y)),$$

当 x 在 $a(y)$ 与 $b(y)$ 之间取值时, t 在 $[0, 1]$ 上取值,

$$dx = (b(y) - a(y)) dt,$$

从而

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \\ &= \int_0^1 f(a(y) + t(b(y) - a(y)), y) (b(y) - a(y)) dt. \end{aligned}$$

由于右端被积函数 $f(a(y) + t(b(y) - a(y)), y)(b(y) - a(y))$ 在矩形区域 $[0, 1] \times [c, d]$ 上连续知 $F(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续. ■

定理 17.1.5 设函数 $f(x, y)$ 及 $f_y(x, y)$ 在闭矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上连续, 函数 $a(y)$ 及 $b(y)$ 都在 $[c, d]$ 上可导, 且 $a \leq a(y), b(y) \leq b$, 则 $F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$ 在 $[c, d]$ 可导, 且

$$F'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x, y) dx + f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y).$$

证明. 三元函数

$$\varphi(y, t, s) = \int_t^s f(x, y) dx$$

的三个偏导数

$$\varphi_y = \int_t^s f_y(x, y) dy, \varphi_s = f(s, y), \varphi_t = -f(t, y)$$

都存在且连续, 故 $\varphi(y, s, t)$ 连续可微. 根据复合函数求导公式, 从 $F(y) = \varphi(y, s(y), t(y))$ 得

$$F'(y) = \varphi_y + \varphi_s s' + \varphi_t t'.$$

将 $\varphi_y, \varphi_s, \varphi_t$ 代入即获得证明. ■

例 17.1.6 设 $f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{1+t^2} dt$, 求 $f'(x)$.

解. 直接利用公式, 有:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{1+\cos^2 x} (\cos x)' - e^{1+\sin^2 x} (\sin x)' \\ &= -e^{1+\cos^2 x} \sin x - e^{1+\sin^2 x} \cos x. \end{aligned}$$

■

例 17.1.7 求 $I(\theta) = \int_0^\pi \ln(1 + \theta \cos x) dx$, 其中 $|\theta| < 1$.

解. 我们利用积分号下求导数来求这个积分. 对 $|\theta| < 1$ 中任一定值 θ , 一定存在 b , 使 $|\theta| \leq b < 1$. 这时 $f(x, \theta)$ 和 $f_\theta(x, \theta)$ 是 $0 \leq x \leq \pi, -b \leq \theta \leq b$ 上的连续函数, 利用定理 17.1.5, 有

$$\begin{aligned} I'(\theta) &= \int_0^\pi \frac{\cos x}{1 + \theta \cos x} dx \\ &= \frac{1}{\theta} \int_0^\pi \left(1 - \frac{1}{1 + \theta \cos x}\right) dx \\ &= \frac{\pi}{\theta} - \frac{1}{\theta} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \theta \cos x}. \end{aligned}$$

作代换 $t = \tan \frac{x}{2}$, 求得一个原函数

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \theta \cos x} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1 + \theta \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt \\ &= \int \frac{2dt}{(1+\theta) + (1-\theta)t^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-\theta^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} \tan \frac{x}{2}\right) + C, \end{aligned}$$

所以

$$I'(\theta) = \frac{\pi}{\theta} - \frac{2}{\theta\sqrt{1-\theta^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\right),$$

这个结论对于 $-1 < \theta < 1$ 中的一切 θ 成立.

再对 θ 积分, 得

$$I(\theta) = \pi(\ln|\theta| + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \theta^2}}{|\theta|}) + C = \pi \ln(1 + \sqrt{1 - \theta^2}) + C.$$

最后来确定常数 C . 由原来的定义知道 $I(0) = 0$, 于是由上面得式子得到:

$$C = -\pi \ln 2,$$

最后得到

$$I(\theta) = \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \theta^2}}{2}.$$

■

定理 17.1.8 设函数 $f(x, y)$ 在闭矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上连续, 则

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

即积分运算可换序.

证明. 记

$$I_1(u) = \int_c^u dy \int_a^b f(x, y) dx,$$

$$I_2(u) = \int_a^b dx \int_c^u f(x, y) dy,$$

首先证明 $I_1'(u) = I_2'(u)$.

记 $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. 注意到 f 是连续的, 所以 $I(y)$ 是一个连续函数. 从而变上限的积分 $\int_c^u I(y) dy = \int_c^u dy \int_a^b f(x, y) dx$ 可导, 且

$$I_1'(u) = I(u) = \int_a^b f(x, u) dx.$$

将另外一个积分 $\int_a^b dx \int_c^u f(x, y) dy$ 记为 $\int_a^b F(x, u) dx$, 这里

$$F(x, u) = \int_c^u f(x, y) dy.$$

应用定理17.1.3, 得

$$I_2'(u) = \int_a^b F_u(x, u) dx = \int_a^b f(x, u) dx.$$

于是得到了 $I_1'(u) = I(u) = \int_a^b f(x, u) dx$. 所以有

$$I_1(u) = I_2(u) + \alpha \quad (\alpha \text{ 为一常数}).$$

现在来确定常数 α . 令 $u = c$, 得

$$I_1(c) = I_2(c) = 0,$$

于是 $\alpha = 0$, 所以

$$I_1(u) = I_2(u) \quad (c \leq u \leq d).$$

再令 $u = d$, 定理17.1.8得证. ■

例 17.1.9 求 $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0)$.

解. 我们知道

$$\int_a^b x^y dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x},$$

所以

$$I = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy.$$

变换积分次序(定理17.1.8的条件显然是满足的), 得

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{1}{1+y} dy = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

■

17.1.2 习题14.1

1. 求下列极限:

$$(1) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha^2}^{1+\alpha^2} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2};$$

$$(2) \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^1 x e^{-x^\alpha} dx.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 求证

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{t}{t^2 + x^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

3. 求下列函数的导数:

$$(1) F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy;$$

$$(2) F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y} dy;$$

$$(3) F(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x+y)}{x+y} dy \quad (x > 0);$$

$$(4) F(x) = \int_0^{x^2} dt \int_{t-x}^{t+x} \sin(t^2 + y^2 - x^2) dy.$$

4. 设 $f(x, t), f_x(x, t)$ 连续, 记

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi,$$

其中 a 为正常数, 求证 $u(x, t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t).$$

5. 已给椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi,$$

其中 $|k| < 1$, 求证

$$(1) kF'(k) + F(k) = \frac{E(k)}{1 - k^2},$$

$$(2) E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{1}{1 - k^2} E(k) = 0 (k \neq 0).$$

6. 求下列定积分

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \sin x}{1-a \sin x} \frac{1}{\sin x} dx \quad (|a| < 1);$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx \quad (|a| > 1);$$

7. 设 $I(a) = \int_0^\pi \ln(1 + a \cos \theta) d\theta$, 其中 $|a| < 1$, 求证

$$\lim_{a \rightarrow 1} I(a) = \int_0^\pi \ln(1 + \cos \theta) d\theta.$$

8. 设 $f(x, t)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 上有界, 对任意 $t \in [c, d]$, $f(x, t)$ 作为 x 的函数在 $[a, b]$ 上可积, 对任意 $x \in [a, b]$, $f(x, t)$ 作为 t 的函数在 $[c, d]$ 上连续, 求证: $\varphi(t) = \int_a^b f(x, t) dx$ 在 $[c, d]$ 上连续.

9. 对任意自然数 n , 求证:

$$\int_0^n \frac{1 - (1 - \frac{t}{n})^n}{t} dt = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

17.2 含参变量的广义积分

17.2.1 一致收敛积分的定义与判别法

设 $f(x, y)$ 在 $a \leq x < +\infty, c \leq y \leq d$ 上有定义, 并且对每一个 $y \in [c, d]$, 无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 存在, 也就是对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $A_0(\varepsilon, y) > 0$ 使得当 $A', A \geq A_0$ 时, 成立

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon, \text{ 或者 } \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

注意: 这里的 $A_0(\varepsilon, y)$ 不仅与 ε 有关而且与 y 有关. 如果存在与 $y \in [c, d]$ 无关的 A_0 , 就有一致收敛的定义如下:

定义 17.2.1 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $A_0(\varepsilon) > 0$ (即仅与 ε 有关), 当 $A', A \geq A_0$ 时, 对一切 $y \in [c, d]$, 成立

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \text{ 或者 } \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

则称 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛. 这里的区间 $[c, d]$ 可以换成其他区间如 $[c, d), (c, d), [c, +\infty)$ 等等. 对于无界函数的积分, 也有类似的定义.

定义 17.2.2 设 $\int_a^b f(x, y) dx$ 对每一个 $y \in [c, d]$, 以 $x = b$ 为奇点的积分存在, 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta_0(\varepsilon) > 0$ (仅与 ε 有关), 当 $0 < \eta, \eta' < \delta_0(\varepsilon)$ 时, 对一切 $y \in [c, d]$, 成立

$$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \text{ 或者 } \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

则称 $\int_a^b f(x, y) dx$ 关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛.

以下只讨论区间是无穷的广义积分, 其它类似情况请自行写出.

定理 17.2.3 (Weierstrass 判别法) 设有函数 $F(x)$, 使

$$|f(x, y)| \leq F(x) \quad (a \leq x < +\infty, c \leq y \leq d).$$

如果积分 $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ 收敛, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛.

证明. 由一致收敛的定义和不等式

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| \leq \left| \int_A^{A'} |f(x, y)| dx \right| \leq \left| \int_A^{A'} F(x) dx \right|$$

就可以推出结论. 因为这个时候对 $\varepsilon > 0$, 有 A_0 , 使得当 $A', A \geq A_0$ 时

$$\left| \int_A^{A'} F(x) dx \right| < \varepsilon$$

成立. ■

例 17.2.4 设 $r_0 > 0$, 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-rx} dx$ 在 $r \in [r_0, +\infty)$ 内一致收敛.

证明. 因为当 $r \in [r_0, \infty)$ 时

$$e^{-rx} \leq e^{-r_0x},$$

而 $\int_0^{+\infty} e^{-r_0x} dx$ 是收敛的, 由 Weierstrass 判别法得 $\int_0^{+\infty} e^{-rx} dx$ 在 $r \in [r_0, \infty)$ 内一致收敛. ■

17.2.2 一致收敛积分的分析性质

定理 17.2.5 设 $f(x, y)$ 在 $D = \{(x, y) | a \leq x < +\infty, c \leq y \leq d\}$ 上连续,

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛, 则 $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 y 在 $[c, d]$ 上连续.

证明. 因为 $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 在 $[c, d]$ 上一致收敛, 所以对于任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $A_0(\varepsilon)$, 使当 $A \geq A_0$ 时

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

对 $[c, d]$ 上一切 y 成立, 因此当 $y + \Delta y$ 在 $[c, d]$ 上时, 也成立

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, y + \Delta y) dx \right| < \varepsilon.$$

又 $f(x, y)$ 在 $[a, A] \times [c, d]$ 上连续, 所以 $\int_c^A f(x, y) dx$ 是 y 在 $[c, d]$ 上的连续函数, 对 ε , 存在 $\delta > 0$, 使当 $|\Delta y| < \delta$ 时

$$\left| \int_a^A f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

因此, 当 $|\Delta y| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} |I(y + \Delta y) - I(y)| &\leq \left| \int_a^A f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_A^{+\infty} f(x, y + \Delta y) dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| \\ &< 3\varepsilon, \end{aligned}$$

即 $I(y)$ 是 $[c, d]$ 上的连续函数. ■

定理 17.2.6 设 $f(x, y)$ 在 $a \leq x < +\infty, c \leq y \leq d$ 上连续, $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 为一致收敛, 则 $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 在 $[c, d]$ 上的积分可以在积分号下进行:

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

证明. 只需证明

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 由于 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛, 故存在 A_0 , 使得当 $A > A_0$ 时, 有

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

另外, $f(x, y)$ 在 $[a, A] \times [c, d]$ 上一致连续, 故

$$\int_a^A dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^A f(x, y) dx.$$

于是

$$\left| \int_a^A dx \int_c^d f(x, y) dy - \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right| = \left| \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon(d-c).$$

即

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$

■

注意: 当 $[c, d]$ 也改为无穷区间 $[c, +\infty]$ 时, 本定理的条件就不足以保证积分次序可交换.

定理 17.2.7 设 $f(x, y), f_y(x, y)$ 在 $a \leq x < +\infty, c \leq y \leq d$ 上连续, $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 存在, $\int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 为一致收敛, 则 $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 在 $[c, d]$ 上可导, 且

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx.$$

就是说可以在积分号下求导.

证明. 记 $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$, $\phi(y) = \int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx$, 由 $\int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx$ 关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛的假设知 $\phi(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续, 于是对于 $y \in [c, d]$, 由定理 17.2.6 知道

$$\begin{aligned} \int_c^y \phi(y) dy &= \int_c^y dy \int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx \\ &= \int_a^{+\infty} dx \int_c^y f_y(x, y) dy \\ &= \int_a^{+\infty} [f(x, y) - f(x, c)] dx \\ &= \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, c) dx = I(y) - I(c). \end{aligned}$$

由于 $\phi(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续, 所以函数 $\int_c^y \phi(y) dy$ 可微, 从而 $I(y)$ 可微. 两边求导就得

$$I'(y) = \phi(y) = \int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx.$$

■

例 17.2.8 计算 $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-a^2 x^2} \cos(2xy) dx (a > 0)$ 之值.

解. 考虑积分

$$\int_0^{+\infty} f_y(x, y) dx = -2 \int_0^{+\infty} x e^{-a^2 x^2} \sin 2xy dx,$$

由于 $|x e^{-a^2 x^2} \sin 2xy| \leq x e^{-a^2 x^2}$, 又 $\int_0^{+\infty} x e^{-a^2 x^2} dx$ 收敛, 所以

$$\int_0^{+\infty} f_y(x, y) dx$$

一致收敛. 从而

$$I'(y) = -2 \int_0^{+\infty} x e^{-a^2 x^2} \sin 2xy \, dx.$$

对右边分部积分, 得

$$\begin{aligned} I'(y) &= \frac{1}{a^2} e^{-a^2 x^2} \sin 2xy \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{2y}{a^2} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2xy \, dx \\ &= -\frac{2y}{a^2} I(y). \end{aligned}$$

积分这个方程, 得到 $I(y) = C e^{-\frac{y^2}{a^2}}$. 在原来的积分式中置 $y = 0$, 有

$$\begin{aligned} C = I(0) &= \int_0^{+\infty} e^{-a^2 x^2} \, dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du. \end{aligned}$$

下一节的结论可知

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

所以有 $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$. 于是

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2xy \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{y^2}{a^2}}.$$

■

接下来介绍两个常用的判断广义积分一致收敛性的定理.

定理 17.2.9 (Dirichlet) 设函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 在 $[a, +\infty) \times D$ 连续. 如果

- (1) 对于任意取定的 $y \in D$, 函数 $f(x, y)$ 关于 x 单调, 并且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x, y)$ 对于 $y \in D$ 一致收敛于 0;
- (2) 积分

$$\int_a^u g(x, y) \, dx$$

对于 y 和 u 一致有界, 即存在 $M > 0$, 使得

$$\left| \int_a^u g(x, y) \, dx \right| \leq M, \forall y \in D, u \geq c,$$

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) \, dx$$

对 $y \in D$ 一致收敛.

定理 17.2.10 (Abel) 设函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 在 $[a, +\infty) \times D$ 连续. 如果

- (1) 对每一个取定的 $y \in D$, 函数 $f(x, y)$ 关于 x 单调, 且

$$|f(x, y)| \leq K, \forall y \in D, x \in [a, +\infty),$$

- (2) 积分

$$\int_a^{+\infty} g(x, y) \, dx$$

对 $y \in D$ 一致收敛, 那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) \, dx$$

对 $y \in D$ 一致收敛.

例 17.2.11 设函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续且广义可积. 求证

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-ax} g(x) dx = \int_0^{+\infty} g(x) dx.$$

证明. 首先对于取定的 $a \in [0, \eta]$, 函数

$$f(a, x) = e^{-ax}$$

关于 x 单调, 并且

$$|f(a, x)| \leq 1, \quad \forall a \in [0, \eta], x \in [0, +\infty).$$

其次, 积分

$$\int_0^{+\infty} g(x) dx$$

收敛, 这样根据 Abel 判别法, 积分

$$\int_0^{+\infty} f(a, x) g(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax} g(x) dx$$

对于 $a \in [0, \eta]$ 一致收敛, 因而函数

$$\varphi(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} g(x) dx$$

在 $[0, \eta]$ 连续. 于是有

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \varphi(a) = \varphi(0),$$

即

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-ax} g(x) dx = \int_0^{+\infty} g(x) dx.$$

■

17.2.3 Gamma函数和Beta函数(欧拉积分)

在数理方程, 概率论等方面经常会遇到以下的含参变量的积分

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx,$$

依次称为第一类和第二类欧拉积分, 或依次称为Beta函数和Gamma函数. 不难知道, 当 $p > 0, q > 0$ 时, $B(p, q)$ 收敛; 当 $s > 0$ 时, $\Gamma(s)$ 收敛, 其他情形发散. 这表明 $B(p, q)$ 的定义域是 $p > 0, q > 0$; $\Gamma(s)$ 的定义域是 $s > 0$. 这些积分可以通过查表计算他们的数值.

引理 17.2.12 Γ 函数在 $(0, +\infty)$ 有定义且连续.

证明. 因为 $\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ 对 $x > 0$ 收敛, 所以 Γ 函数对 $x > 0$ 有定义. 又因为 $\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ 对 $x \in [\delta, +\infty)$ 一致收敛 (δ 可以是任意小的正数), 所以 Γ 函数对 $x > 0$ 连续. ■

引理 17.2.13 对于 $u \geq 0, v \geq 0, \lambda > 0, \mu > 0, \lambda + \mu = 1$, 我们有

$$u^\lambda v^\mu \leq \lambda u + \mu v.$$

证明. 如果记 $\varphi(x) = -\ln x$, 那么就有

$$\varphi''(x) = \frac{1}{x^2} > 0.$$

这样 $\varphi(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的凸函数, 因而对 $u > 0$ 和 $v > 0$, 有

$$\varphi(\lambda u + \mu v) \leq \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v).$$

即

$$u^\lambda v^\mu \leq \lambda u + \mu v.$$

对于 $u = 0, v > 0$, 或者 $u > 0, v = 0$, 或者 $u = v = 0$ 的情形, 上面的不等式显然也成立. ■

引理 17.2.14 设 $a < A$. 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, A]$ 连续, 且

$$f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, x \in [a, A].$$

如果

$$p > 1, q > 1 \text{ 且 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

那么

$$\int_a^A f(x) g(x) dx \leq \left(\int_a^A f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^A g(x)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

证明. 记

$$F = \int_a^A f(t)^p dt, G = \int_a^A g(t)^q dt,$$

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{F} f(t)^p, \tilde{g}(t) = \frac{1}{G} g(t)^q.$$

记 $\lambda = \frac{1}{p}, \mu = \frac{1}{q}$, 于是有

$$(\tilde{f}(t))^\lambda (\tilde{g}(t))^\mu \leq \lambda \tilde{f}(t) + \mu \tilde{g}(t).$$

上面的不等式两边从 a 到 A 积分就得到

$$\int_a^A (\tilde{f}(t))^\lambda (\tilde{g}(t))^\mu dt \leq \lambda \int_a^A \tilde{f}(t) dt + \mu \int_a^A \tilde{g}(t) dt = 1.$$

由此得到

$$\int_a^A (f(t)^p)^\lambda (g(t)^q)^\mu dt \leq F^\lambda G^\mu.$$

即

$$\int_a^A f(x) g(x) dx \leq \left(\int_a^A f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^A g(x)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

■

引理 17.2.15 Γ 函数具有以下基本性质:

- (1) $\Gamma(s) > 0, \forall s \in (0, +\infty)$;
- (2) $\Gamma(1) = 1$;
- (3) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), s \in (0, +\infty)$;
- (4) $\ln \Gamma(s)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是下凸函数
- (5) $\ln \Gamma(n+1) = n!$.

证明. 除了(3)之外, 其它都很显然. 下面证明性质(3). 对于 $A > a > 0, \lambda > 0, \mu > 0, \lambda + \mu = 1, x > 0, y > 0$, 有

$$\begin{aligned} \int_a^A t^{\lambda x + \mu y - 1} e^{-t} dt &= \int_a^A (t^{x-1} e^{-t})^\lambda (t^{y-1} e^{-t})^\mu dt \\ &\leq \left(\int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt \right)^\lambda \left(\int_a^A t^{y-1} e^{-t} dt \right)^\mu. \end{aligned}$$

令 $a \rightarrow 0+, A \rightarrow +\infty$, 即得

$$\Gamma(\lambda x + \mu y) \leq (\Gamma(x))^\lambda (\Gamma(y))^\mu.$$

由此有

$$\ln \Gamma(\lambda x + \mu y) \leq \lambda \ln \Gamma(x) + \mu \ln \Gamma(y).$$

■

上面定理的几条性质完全决定了 Γ 函数:

定理 17.2.16 (Bohr-Mollerup) 如果定义于 $(0, +\infty)$ 的函数 f 满足以下条件:

- (1) $f(x) > 0$,
 - (2) $f(1) = 1$,
 - (3) $f(x+1) = xf(x)$,
 - (4) $\ln f(x)$ 是下凸函数,
- 那么有

$$f(x) = \Gamma(x).$$

定理 17.2.17 对于 $x > 0$, 我们有

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

可以根据上面的定理, 得到以下的计算公式:

定理 17.2.18 (Γ 函数的余元公式)

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, x \in (0, 1).$$

推论 17.2.19

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

下面的定理称为倍元公式:

定理 17.2.20

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}, x > 0.$$

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Γ 函数与 B 函数有很好的关系:

命题 17.2.21 $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, (p > 0, q > 0).$

上面这个命题可以利用 Γ 函数的唯一性来证明.

定理 17.2.22

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, x \in (0, 1).$$

例 17.2.23 求 $I = \int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^3} dx$.

解.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 (1-x^3)^{\frac{1}{2}} dx^3 \\ &= \frac{1}{3} B\left(2, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma(2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(7/2)} \\ &= \frac{4}{45}. \end{aligned}$$

■

17.2.4 习题14.2

1. 证明:

$$\varphi(t) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^t(\pi-x)^{2-t}} dx$$

在 $(0, 2)$ 上连续.2. 研究下列积分关于 α 在指定区间的一致收敛性.

$$(1) \int_0^{+\infty} x e^{-x} \sin \alpha x dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty);$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty);$$

$$(3) \int_a^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \quad (0 < \alpha < +\infty);$$

$$(4) \int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx \quad (a \leq \alpha \leq b);$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^\alpha} dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty).$$

3. 设 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 讨论积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha |\sin x|^\beta} dx$$

的收敛性和关于 α, β 的一致收敛性.

4. 证明:

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+t)^2} dx$$

在 $t \in (-\infty, +\infty)$ 上可微.

5. 研究下列函数在指定区间的连续性.

$$(1) F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^x} dy \quad (x > 2);$$

$$(2) F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{y^x} dy \quad (x > 0);$$

$$(3) F(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} dy; \quad (-\infty < x < +\infty).$$

6. 证明 $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{|\sin y|^x} dy$ 在 $(0, 1)$ 内连续.

7. 求积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad a > 0, b > 0.$$

(提示: $e^{-ax} - e^{-bx} = \int_a^b (-e^{-xy})'_y dy$).

8. 求积分

$$(1) I = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx;$$

$$(2) \int_\pi^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx;$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx;$$

$$(5) \int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p};$$

$$(6) \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx.$$

9. 利用在积分号求导, 求下列积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, a > 0, b > 0;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right)^2 dx, a > 0, b > 0;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx dx, a > 0, b > 0;$$

10. 求积分

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + \frac{t^2}{x^2})} dx (t > 0)$$

(提示: $I'(t) = -2I(t)$).

11. 证明:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} (a \geq 0)$$

(提示: $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy$)

12. 求证

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

13. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = 1.$$

14. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且存在 $t_0 > 0$ 使得积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{t_0 + x} dx$$

收敛. 求证对任意 $t > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{t+x} dx$ 收敛且函数

$$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{t+x} dx$$

当 $t > 0$ 时任意次连续可微. 进一步求证对任意 $t > 0, \varepsilon > 0$, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{(x-t)^2 + \varepsilon^2} dx$$

收敛且

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon f(x)}{(x-t)^2 + \varepsilon^2} dx = \pi f(t).$$

15. 利用不等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x dx,$$

其中 k 为正整数, 证明:

$$\frac{\pi \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2k+2)} < \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k)}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)} \frac{1}{2k+1} < \frac{\pi \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2k)}$$

进一步证明 Wallis 公式

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdots 2k}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)} \right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

16. 设 $p > 0$, 求证:

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{p}} e^{-yt} \cos y dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{p}} e^{-yt} \cos y dy.$$

17. 设 $\alpha \geq 0$, 求

$$I = \int_{\alpha}^{\alpha+1} \ln \Gamma(x) dx$$

18. 求 $I = \int_0^1 (\ln \Gamma(x)) \cos 2n\pi x dx$, 其中 n 为正整数.

19. 设 $0 < \alpha < \beta$, 求

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{e^{\beta x} - e^{-\beta x}} dx$$

20. 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad (s > 0)$$

(提示: 将 $\frac{1}{e^x - 1}$ 展成 e^{-x} 的幂级数).

17.3 第十四章综合例题选讲

例 17.3.1 设 $F(y) = \int_0^y (x+y)f(x) dx$, 其中 $f(x)$ 为可微函数, 求 $F''(y)$.

解. $F'(y) = 2yf(y) + \int_0^y f(x) dx$,

$$F''(y) = 2f(y) + 2yf'(y) + f(y) = 3f(y) + 2yf'(y). \quad \blacksquare$$

例 17.3.2 计算积分 $I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx$ ($|r| < 1$).

解. 解 当 $|r| < 1$ 时, 由于

$$1 - 2r \cos x + r^2 \geq 1 - 2|r| + r^2 = (1 - |r|)^2 > 0,$$

故 $\ln(1 - 2r \cos x + r^2)$ 为连续函数, 且具有连续导数, 从而可在积分号下求导. 将 $I(r)$ 对 r 求导数, 得

$$\begin{aligned} I'(r) &= \int_0^\pi \frac{-2 \cos x + 2r}{1 - 2r \cos x + r^2} dx \\ &= \frac{1}{r} \int_0^\pi \left(1 + \frac{r^2 - 1}{1 - 2r \cos x + r^2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{r} - \frac{1 - r^2}{r} \int_0^\pi \frac{dx}{(1 + r^2) - 2r \cos x} \\ &= \frac{\pi}{r} - \frac{1 - r^2}{r(1 + r^2)} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \left(\frac{-2r}{1+r^2}\right) \cos x} \\ &= \frac{\pi}{r} - \frac{2}{r} \arctan \left(\frac{1+r}{1-r} \tan \frac{x}{2} \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{r} - \frac{2\pi}{r} = 0. \end{aligned}$$

于是, 有 $I(r) = C$ (常数). 但是 $I(0) = 0$, 故 $C = 0$. 从而 $I(r) = 0$. \blacksquare

例 17.3.3 设 ϕ, ψ 分别可以微分两次和一次, 证明

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\phi(x - at) + \phi(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) \, ds$$

满足弦振动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 。

解. 证明

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2}[-a\phi'(x - at) + a\phi'(x + at)] \\ &\quad + \frac{1}{2}\psi(x + at) + \frac{1}{2}\psi(x - at), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{2}[a^2\phi''(x - at) + a^2\phi''(x + at)] \\ &\quad + \frac{a}{2}\psi'(x + at) - \frac{a}{2}\psi'(x - at). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2}[\phi'(x - at) + \phi'(x + at)] \\ &\quad + \frac{1}{2a}\psi(x + at) - \frac{1}{2a}\psi(x - at), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2}[\phi''(x - at) + \phi''(x + at)] \\ &\quad + \frac{1}{2a}\psi'(x + at) - \frac{1}{2a}\psi'(x - at). \end{aligned}$$

比较上面几个式子, 即得 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 。 ■

例 17.3.4 求 $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos tx \, dx$ 。

解. 因为 $x^2 \cos tx$ 是连续函数, 故含参变量 t 的积分

$$F(t) = \int_0^2 x^2 \cos tx \, dx$$

是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 故

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos tx \, dx &= \lim_{t \rightarrow 0} F(t) \\ &= F(0) = \int_0^2 x^2 \, dx = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

■

例 17.3.5 设 $a < b$, f 为可微的函数, 命 $\phi(u) = \int_a^b f(x)(x - u) \, dx$, 求 $\phi''(u)$ 。

解.

$$\begin{aligned} \phi'(u) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} [f(x)(x - u)] \, dx \\ &= - \int_a^b f(x) \, dx, \end{aligned}$$

则

$$\phi''(u) = 0.$$

■

例 17.3.6 证明 n 阶 Bessel 函数 $J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x \sin \phi) d\phi$ 满足 Bessel 方程

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

证明.

$$\begin{aligned} J_n'(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \phi \cdot \sin(n\phi - x \sin \phi) d\phi, \\ J_n''(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \phi \cdot \cos(n\phi - x \sin \phi) d\phi. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [(x^2 \sin^2 \phi + n^2 - x^2) \cos(n\phi - x \sin \phi) \\ &\quad - x \sin \phi \cdot \sin(n\phi - x \sin \phi)] d\phi \\ &= -\frac{1}{\pi} (n + x \cos \phi) \cdot \sin(n\phi - x \sin \phi) \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

本题获证. ■

例 17.3.7 设 f 在 $[a, A]$ 上连续, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x (f(t+h) - f(t)) dt = f(x) - f(a).$$

证明. 令 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则有 $F(a) = 0, F'(x) = f(x)$. 注意到:

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t+h) dt &= \int_{a+h}^{x+h} f(u) du = \int_{a+h}^{x+h} f(t) dt \\ &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^{a+h} f(t) dt = F(x+h) - F(a+h), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x (f(t+h) - f(t)) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(x+h) - F(a+h) - F(x)) + F(a) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(a+h) - F(a)) \\ &= F'(x) - F'(a) \\ &= f(x) - f(a). \end{aligned}$$

■

17.4 第十四章总复习题

1. 设

$$F(x) = \int_a^b f(y) |x - y| dy,$$

其中 $a < b$ 及 $f(y)$ 为可微分的函数, 求 $F''(x)$.

2. 设

$$F(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f(x + \xi + \eta) d\eta (h > 0),$$

其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $F''(x)$.

3. 设

$$F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt,$$

求 $F^{(n)}(x)$.

4. 研究函数

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx, \quad (y > 0)$$

的连续性, 其中 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上连续且为正的函数.

5. 应用积分号下求积分的方法计算积分:

$$\int_0^1 \sin(\ln \frac{1}{x}) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx (a > 0, b > 0).$$

6. 设二阶可微函数 $K(t)$ 满足 $K'' + bK' + cK = 0$, 及 $K(0) = 0, K'(0) = 1$. 证明

$$x(t) = \int_0^t f(s)K(t-s)ds$$

满足方程 $x'' + bx' + cx = f$, 这里 b, c 为常数, f 于 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

7. 求下列极限

$$(1) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 x^2 \cos \alpha x dx;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n}.$$

8. 求下列函数的导数:

$$(1) F(x) = \int_0^x f(x+y)dy, \text{ 其中 } f(x) \text{ 连续};$$

$$(2) F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-y^2}} dy;$$

$$(3) F(x) = \int_{a+x}^{b+x} \frac{\sin xy}{y} dy.$$

9. 求下列定积分

$$(1) \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta \quad (r < 1),$$

$$(2) \int_0^1 \cos(\ln \frac{1}{x}) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a, b > 0).$$

10. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微, 求证:

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \int_a^x f''(t)(x-t)dt$$

($\forall t \in [a, b]$).

11. 设 $a > 0, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 并满足

$$f\left(\frac{a^2}{x}\right) = f(x) \quad (\forall x > 0).$$

求证

$$(1) \int_a^{a^2} \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^a \frac{f(x)}{x} dx;$$

$$(2) \int_1^a \frac{f(x^2)}{x} dx = \int_1^a \frac{f(x)}{x} dx;$$

$$(3) \text{ 如果 } g(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上连续, 则 } \int_1^a g(x^2 + \frac{a^2}{x^2}) \frac{dx}{x} = \int_1^a g(x + \frac{a^2}{x}) \frac{dx}{x}.$$

12. (1) 设 $f(x)$ 是奇函数, 求证: $f(x)$ 的任一原函数是偶函数;

(2) 如果 $f(x)$ 是偶函数, 求证: $f(x)$ 的任一原函数的一个奇函数与一个常数之和.

$$13. \text{ 求证: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$$

14. 设函数 $f(x)$ 二阶可微, 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)^3,$$

$$\text{其中 } M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

15. 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且存在 $m \in N$, 使得

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0 \quad (n = 0, 1, \dots, m).$$

16. 设 $0 < a < b$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 并满足

$$f\left(\frac{ab}{x}\right) = f(x) \quad (\forall x \in [a, b]).$$

求证:

$$\int_a^b f(x) \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln(ab)}{2} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx.$$

索引

- Abel判别法, 187
- Bessel方程, 195
- Bessel函数, 195
- Beta函数, 188
- Bohr-Mollerup 定理, 190
- Dirichlet判别法, 187
- Gamma函数, 188
- Hasse方阵, 66
- Weierstrass 判别法, 184
- 保守场, 156
- 边界闭曲线的正向, 151
- 变量替换
 - 三重积分的变量替换, 105
- 单侧曲面, 139
- 单连通, 151
- 第二类曲面积分, 140
- 调和场, 173
- 二元函数, 4
- 法平面方程, 55
- 法线, 57
 - 参数形式, 58
- 方向导数, 60
- 方向余弦, 57
- 复连通, 151
- 负定矩阵, 66
- 高斯公式, 162
- 管形场, 166
- 含参变量的积分, 179
- 环量, 171
- 环量密度, 171
- 积分
 - 第二类曲线积分, 132, 133
- 极值, 64
 - 必要条件, 65, 66
- 空间单连通区域, 162
- 拉格朗日函数, 72
- 连通, 151
- 面积
 - 曲面面积公式, 114
- 莫比乌斯(Mobius)带, 139
- 偏导数, 17
 - 高阶偏导数, 21
 - 混合偏导数, 21
- 切平面, 57
 - 参数形式, 58
- 切线方程, 55
- 球面坐标, 107
- 曲面单连通区域, 162
- 全微分, 19
 - 高阶全微分, 23
- 散度, 166
- 数量场, 130
- 双侧曲面, 139
- 斯托克斯公式, 168
- 泰勒公式
 - 二元函数的泰勒公式, 63
- 梯度, 61
- 梯度方向上的投影, 62
- 体积元素
 - 直角坐标系中的体积元素, 100
- 条件极值, 71
- 稳定场, 130
- 无旋场, 173
- 无源场, 166
- 向量场, 130
- 旋度, 171
- 一致收敛
 - 含参变量的广义积分, 184
- 隐函数, 33
- 隐函数存在定理, 40
- 有向曲面微元, 141
- 余元公式, 190
- 正定矩阵, 66
- 质量
 - 空间物体的质量, 115
 - 平面薄板的质量, 115
- 质心, 115
- 柱面坐标, 105

驻点, [65](#)

转动惯量, [117](#)

最小二乘法, [68](#)

最值, [68](#)