汽车理论第五次作业（期末大作业）

1851754 李玖思

（注：本报告所有代码和视频参看压缩包附件）

问题 1

（1）

汽车相关参数（参考资料:《汽车理论》第二版 P194）

内容	数值	单位
整车质量m	1150	kg
车轮半径r	0.287	m
质心至前轴距l_f	1.4	m
质心至后轴距l_r	1.26	m
前轮侧偏刚度k_f	-18500	N/rad
后轮侧偏刚度k_r	-22500	N/rad
绕 z 轴转动惯量I_z	1850	$kg\cdot m^2$

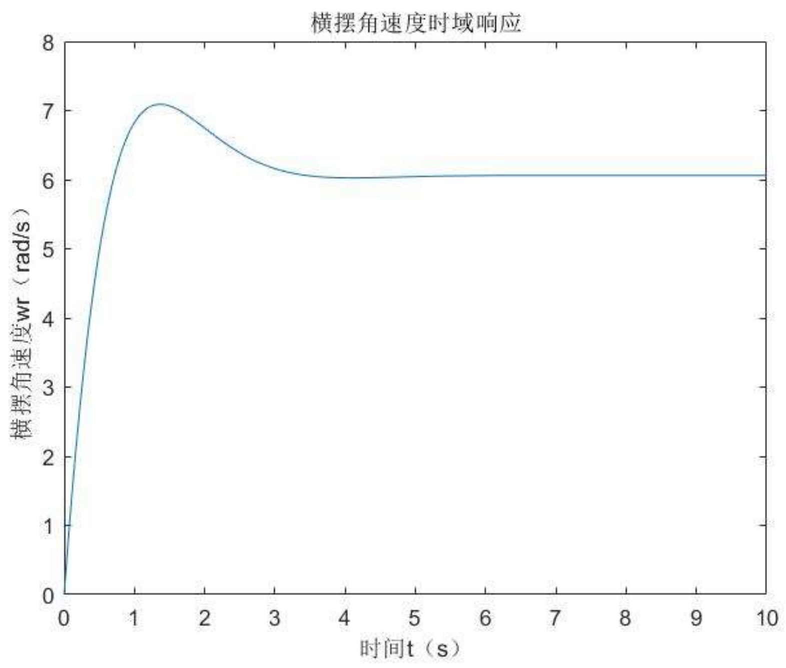
设汽车行驶速度$\mathrm{v}=30\mathrm{m/s}$,在$\mathrm{t}=0$时给汽车转向盘角阶跃输入$\begin{cases} t<0,\delta=0 \\ t\geq 0,\delta=1rad/s \end{cases}$,

则横摆角速度瞬态响应为:

$$\omega_r(\mathrm{t})=\frac{\omega_r}{\delta}\bigg|_s\delta_{sw0}[1+\sqrt{[\left(\frac{mvl_f}{lk_r}\right)^2\omega_0^2+\frac{2mvl_f\zeta}{lk_r}\omega_0+1]\frac{1}{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega t+\varphi)]$$

$$\varphi=arctan\frac{-\sqrt{1-\zeta^2}}{-\frac{mvl_f\omega_0}{lk_r}-\zeta}$$

代入数据可求:



稳态时圆周运动半径$\mathrm{R} = 4.9502\mathrm{m}$，稳态横摆角速度$\omega_{r0} = 6.0604 rad/s$

绘制汽车瞬态响应行驶轨迹：
将 0~10s 的时间离散化，取$\Delta\mathrm{t} = 0.01s$，将每个小时间段内的轨迹看作等速圆周运动（圆弧的一小部分），可近似得到瞬态响应的行驶轨迹。
第 n 个时间段内可根据横摆角速度瞬态响应方程求出ω_n

该时间段内等速圆周运动的半径$R_n = \frac{v}{\omega_n}$

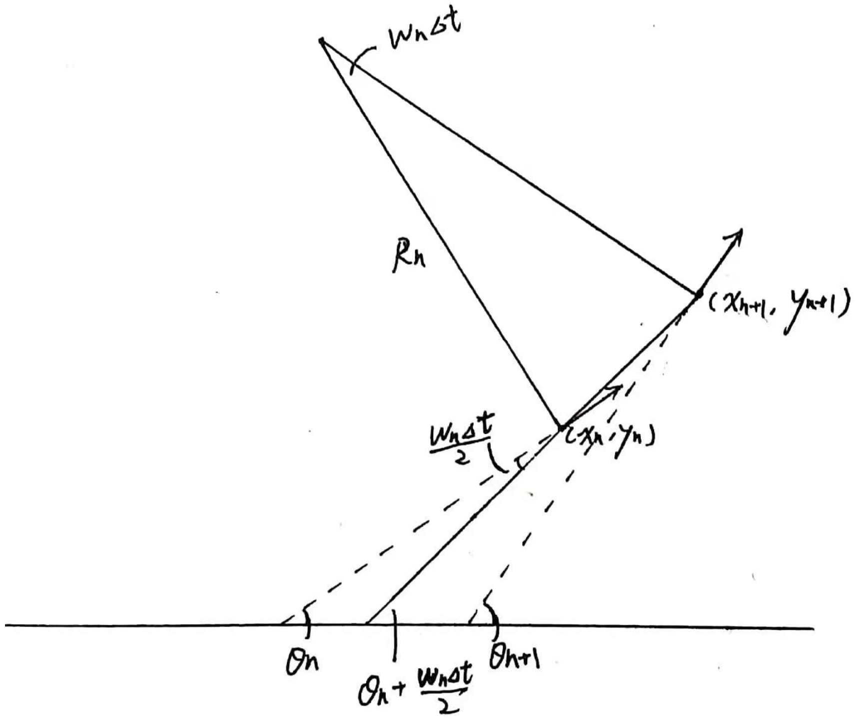
将汽车近似视为一质点，其速度方向与水平方向的夹角为θ_n
由下图的几何关系可知

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega_n \Delta\mathrm{t}$$

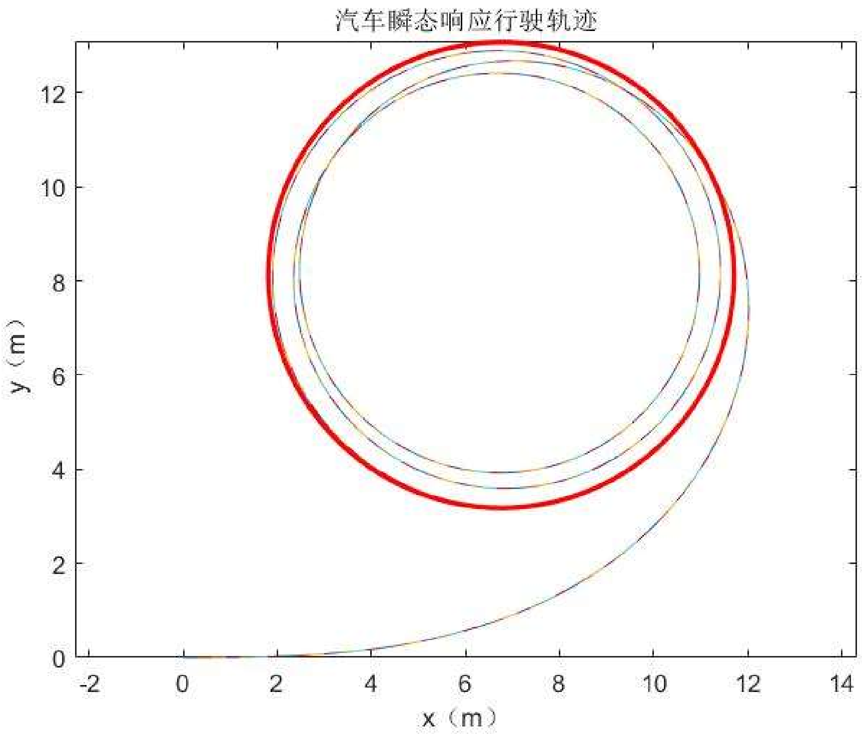
$$x_{n+1} = x_n + R_n(\omega_n \Delta\mathrm{t})\cos(\theta_n + \frac{\omega_n \Delta\mathrm{t}}{2})$$

$$y_{n+1} = y_n + R_n(\omega_n \Delta\mathrm{t})\sin(\theta_n + \frac{\omega_n \Delta\mathrm{t}}{2})$$

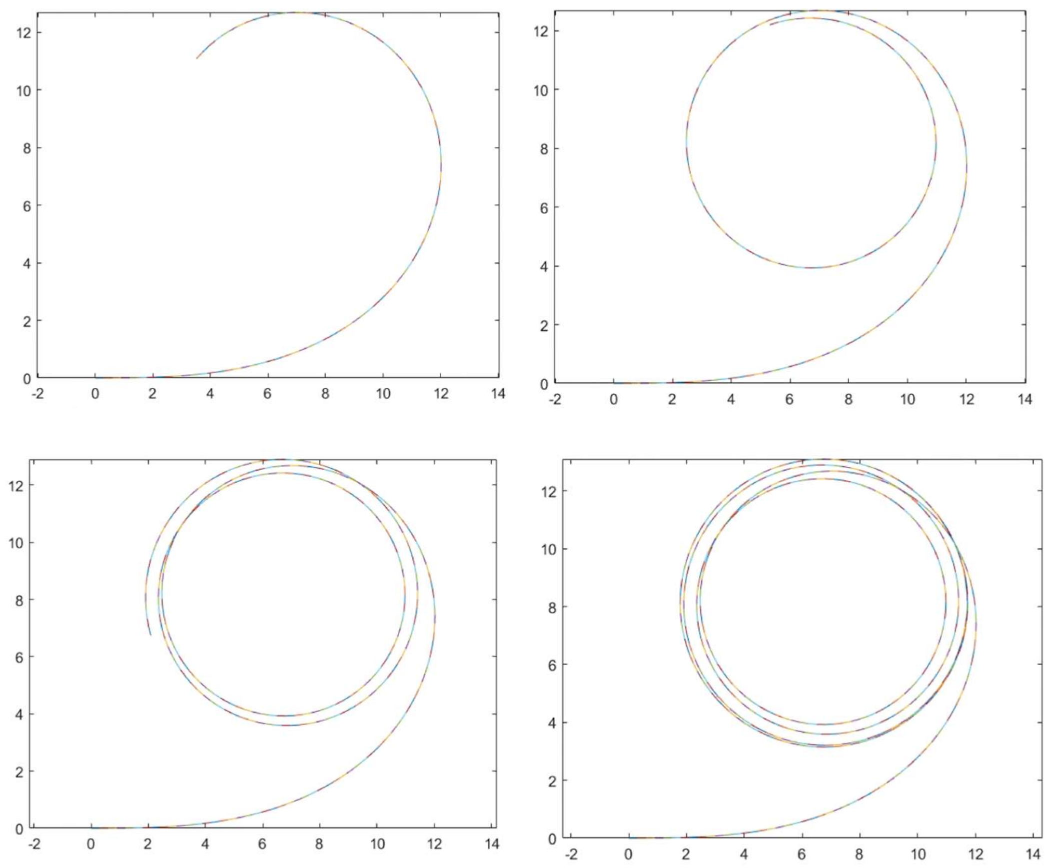
且初始时$x_1 = 0, y_1 = 0, \theta_1 = 0$



$\Delta\mathrm{t} = 0.01\mathrm{s}$分段作出近似轨迹如下：



（注意：由横摆角速度时域响应可知，汽车很快逼近稳态。本图用离散时间的方法分段画出，在 t=8s 后用粗红线画出轨迹，此时的轨迹基本为稳态响应轨迹）



轨迹绘制过程基本如上图所示，具体动态过程可见**压缩包内视频**

（2）

根据汽车二自由度运动微分方程组：

$$\mathrm{m}v\frac{d\beta}{dt}-\left(k_f+k_r\right)\beta+\left[mv-\frac{1}{v}\left(l_fk_f-l_rk_r\right)\right]\omega_r=-k_f\delta$$

$$(l_fk_f-l_rk_r)\beta-I_z\frac{d\omega_r}{dt}+\frac{\left(l_f^2k_f+l_r^2k_r\right)}{v}\omega_r=l_fk_f\delta$$

可以写出以β为变量的形式：

$$\ddot{\beta}+2\omega_0\zeta\dot{\beta}+\omega_0^2\beta=B_1'\dot{\delta}+B_0'\delta$$

其中$\omega_0=\frac{l}{v}\sqrt{\frac{k_fk_r(1+Kv^2)}{mI_z}}$，$\zeta=-[\mathrm{m}\left(l_f^2k_f+l_r^2k_r\right)+I_z(k_f+k_r)]/(2\mathrm{m}\cdot I_z\cdot l\sqrt{\frac{k_fk_r(1+Kv^2)}{mI_z}})$，

$B_1'=-\frac{k_f}{mv}$，$B_0'=\frac{k_f(l_fmv^2+k_rl_rl)}{I_zmv^2}$

当汽车转向盘角阶跃输入时，$\begin{cases}t<0,\delta=0\\t\geq0,\delta=\delta_{sw}\\t>0,\dot{\delta}=0\end{cases}$，$t>0$时，方程简化为：

$$\ddot{\beta}+2\omega_0\zeta\dot{\beta}+\omega_0^2\beta=B_0'\delta$$

特解为：

$$\beta(\mathrm{t})=\frac{B_0'\delta_{sw0}}{\omega_0^2}=\frac{\beta}{\delta}\bigg|_s\delta_{sw0}$$

即为稳态质心侧偏角

$\delta<1$时，齐次方程的通解为：

$$\beta(\mathrm{t})=\mathrm{C}e^{-\zeta\omega_0t}\sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t+\varphi)$$

综上，令$\omega=\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$，质心侧偏角为：

$$\beta(\mathrm{t})=\frac{B_0'\delta_{sw0}}{\omega_0^2}+\mathrm{C}e^{-\zeta\omega_0t}\sin(\omega t+\varphi)$$

或

$$\beta(\mathrm{t})=\frac{B_0'\delta_{sw0}}{\omega_0^2}+A_1e^{-\zeta\omega_0t}\cos(\omega t)+A_2e^{-\zeta\omega_0t}\sin(\omega t)$$

由初始条件$\mathrm{t}=0$时，$\omega_r=0$，$\beta=0$，$\delta=\delta_{sw0}$，并由汽车二自由度运动微分方程组得

$$\dot{\beta}=-\frac{k_f\delta_{sw0}}{mv}=B_1'\delta_{sw0}$$

由$\mathrm{t}=0$，$\beta=0$，得

$$A_1=-\frac{B_0'\delta_{sw}}{\omega_0^2}$$

由$\mathrm{t}=0$，$\dot{\beta}=-\frac{k_f\delta_{sw0}}{mv}=B_1'\delta_{sw0}$，得

$$A_2=\frac{B_0'\delta_{sw0}}{\omega_0^2}\left(\frac{B_1'}{B_0'}\omega_0^2-\zeta\omega_0\right)\frac{1}{\omega}=\frac{\beta}{\delta}\bigg|_s\delta_{sw0}(-\frac{I_zv\omega_0}{l_fmv^2+k_rl_rl}-\zeta)\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\mathrm{C}=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=\frac{\beta}{\delta}\bigg|_s\delta_{sw}\sqrt{[\left(\frac{I_zv}{l_fmv^2+k_rl_rl}\right)^2\omega_0^2+\frac{2I_zv\zeta}{l_fmv^2+k_rl_rl}\omega_0+1]\frac{1}{1-\zeta^2}}$$

$$\varphi = \arctan\frac{A_1}{A_2} = arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\frac{I_z v\omega_0}{l_f m v^2 + k_r l_r l} + \zeta}$$

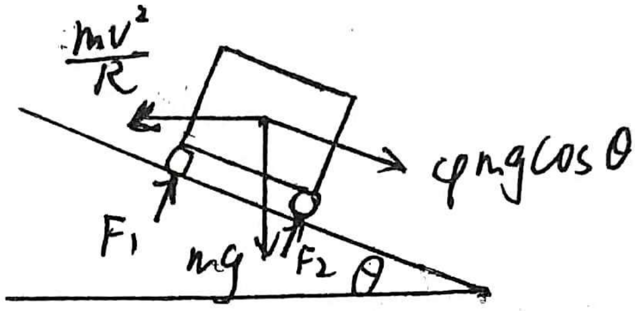
因此**方程的解析解**为:

$$\beta(t) = \frac{\beta}{\delta}\Big|_s \delta_{sw}\ [1 + \sqrt{[\left(\frac{I_z v}{l_f m v^2 + k_r l_r l}\right)^2 \omega_0^2 + \frac{2 I_z v\zeta}{l_f m v^2 + k_r l_r l}\omega_0 + 1]\frac{1}{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega t + \varphi)]$$

问题 2

考虑不发生侧滑的极限稳定车速:

汽车在环形路上行驶，忽略汽车的滚动阻力偶，空气阻力以及旋转质量的惯性矩等，其横截面上受力如下图所示（由于以下不涉及力矩平衡，地面附着力移到质心处），其中$\frac{mv^2}{R}$为离心力



水平方向受力平衡可知:

$$\frac{mv_1^2}{R} = \varphi\text{mgcos}\theta\cos\theta + (F_1 + F_2)\sin\theta$$

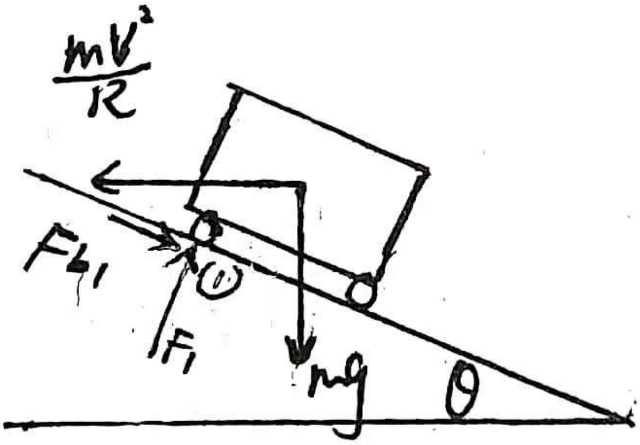
其中$F_1 + F_2 = mgcos\theta$

$$v_1 = \sqrt{R\varphi\text{gcos}\theta\cos\theta + \text{Rgcos}\theta\sin\theta}$$

v_1,不发生侧滑的极限稳定车速，单位：m/s

考虑不发生侧翻的极限稳定车速:

汽车在环形路上行驶，忽略汽车的滚动阻力偶，空气阻力以及旋转质量的惯性矩等，考虑极限情况，内侧车轮刚好离地，不受地面的法向力，其横截面上受力如下图所示



对外侧车轮与地面的接触点①进行力矩平衡：

$$\frac{mv_2^2}{R}cos\theta H_{cg}-\frac{mv_2^2}{R}\sin\theta\frac{S_t}{2}=\mathrm{mg}\sin\theta H_{cg}+mgcos\theta\frac{S_t}{2}$$

解得：

$$v_2=\sqrt{\frac{RH_{cg}gsin\theta+R\frac{S_t}{2}gcos\theta}{H_{cg}cos\theta-\frac{S_t}{2}sin\theta}}$$

v_2,不发生侧翻的极限稳定车速，单位：m/s

H_{cg}，汽车重心高度，单位 m

S_t，汽车轮距，单位 m

（注：没有考虑侧倾轴线的高度，结果趋于保守）

综上所述，车辆临界速度(km/h)

$$V_{cr}=\min\{3.6v_1,3.6v_2\}$$