

题目：乘机时间选择与效用分析

队员 1 信息

姓名： 楼家澍

专业： 数理金融

学号： 2019191138

上课时间： 周四下午 6-8

队员 2 信息

姓名： 邱文宣

专业： 数理金融

学号： 2019191137

上课时间： 周四下午 6-8

队员 3 信息

姓名： 卢泽海

专业： 数理金融

学号： 2019193018

上课时间： 周三下午 6-8

乘机时间选择与效用分析

摘要

赶飞机出发时间的选择是生活中常见的决策问题，提前规划好出行时间和路线，能够节约时间，提高出行质量。本文将研究飞机的最优出发时间问题，并对不同时间段，对于赶飞机的出发时间决策影响进行解释。

首先，对于问题一，建立出发时间模型：登机时间-出发时间=路上耗时+安检耗时。针对路上耗时，对道路模型进行简化，假设车辆在道路车辆密度最大的条件下安全行驶，利用刹车模型和车流量与车速的基本关系，求得速度公式。再加入红绿灯的影响对模型进行优化，求出路上耗时函数。同时我们也讨论了诸如天气情况、路面状况等外部因素对于耗时函数的影响。对于安检耗时，我们采用现有数据进行拟合研究，再假设机场每小时处理旅客数目为定值，得到安检耗时。

其次，对于问题二，由于数据的缺失，我们采用某路段一天中车流量数据进行研究。研究发现，一天中车流量在早午晚高峰取到最大值，呈现一定的周期性。为了后续研究，利用正弦函数对车流量进行了拟合，并将拟合结果代入模型且以深圳大学到宝安机场共 20km 路程为例，对模型进行了求解。同时，我们获取了北京大兴国际机场 2016 年 9 月 11 日的人流数据，通过 2 小时均线对其去趋势处理，也同样得到了周期变化的人流量函数。随后我们将这两个函数错位叠加，发现在总耗时函数中，早上十点与下午一点的耗时最短，而几个交通高峰期耗时最长。

基于以上二者，我们得到了一天中不同时间的飞机在路程上与机场排队所耗费的时间。随后我们考虑机票价格，并引入负效用函数的概念将其二者结合。说明了不同偏好的人群所做出的不同选择，并解释了其背后的原理。

在文章的最后，我们分析了模型的优点以及存在的不足，我们认为该模型在一定程度上可以模拟并预测现实生活情况，并在交通、物流、机票定价等领域具有一定的参考价值。并提出了一些可行的改进方向。

关键词 车流量 道路通行 乘机时间 负效用函数

1. 问题重述

无论是出差、旅行还是留学，机场作为重要的交通枢纽，使得人们在各地、甚至各国之间往来便利，而冗长的等候时间是大家所不希望的。经济学家 George Sigler 说：“如果你从来没有误过机，那么你一定在机场花了过多的时间。”如果能精准预测路途中所耗费的时间，在避免误机的同时还可以使得等候的焦虑降到最小，这是我们都希望看到的。为此，我们将原问题重述为如下三个子问题：

- 问题一：对于赶飞机过程中可能遇到的各种耗时进行量化研究，包括路上耗时、红绿灯耗时、安检耗时等，并建立数学模型，研究飞机的最优出发时间问题和各种因素对最优决策的影响。
- 问题二：不同时间段，交通的拥堵情况、机场的候机队伍长度不同，分析不同时间段，对于赶飞机出发时间决策的影响。
- 问题三：考虑机票价格，并分析不同偏好的人群会做出怎么样的不同决策。

2. 问题分析

2.1 问题一

出发时间的决策取决于飞机起飞的时点与前往机场登机的总耗时，关键在于总耗时的求解。我们将总耗时分为路上耗时与安检耗时，由道路车流量、车速、车密度的基本关系求出车速，加入红绿灯的影响对模型进行优化并进一步用路程解出路上耗时。由机场人流量与安检效率解出安检耗时，综合分析最终解出最优出发时间。

2.2 问题二

我们将采用代表性数据来探究在一天中各个指标变化的周期性规律，并从中拟合出可用的函数图像。随后基于深圳大学粤海校区到宝安国际机场的 20 千米路程进行模型求解。

2.3 问题三

由于除了时间成本，经济成本也是必须要考虑的一环。又因为无论是花费时间还是金钱，都是大家所不愿意的事情。故我们将引入负效用函数对时间成本与经济成本进行统一的刻画，从而进一步刻画出不同人群对于航班时间做出的不同选择。

3. 模型假设

- 假设一：每个人对于等待时间与多花费用效用都为负值。
- 假设二：我们考虑单行道，在刹车模型中不包括交叉路口。
- 假设三：在制动过程中，车辆做匀减速运动。
- 假设四：机场安排值机口与登机口足够优化，可以使得同一时间段排队时间相同。

4. 符号说明

符号	含义
v	车速
c_1	司机反应时间
d_1	反应距离
c_1	反应时间
d_2	制动距离
d_0	刹车距离
c_2	制动器工作效率
$f(x)$	耗时边际效用
$g(x)$	费用边际效用
Δm	为了减少等待而多花的钱
$h(x)$	多花钱换时间
θ	偏好值

表 1 符号说明

5. 模型求解

5.1 基于车身长度与刹车距离的道路通行模型

5.1.1 基于刹车模型的速度求解

由于在道路上行驶的汽车不可能紧紧挨着彼此行驶，当发生紧急情况需要紧急刹车，前后

车都需要为了安全而留出一定的车距，我们称之为刹车距离。这段距离的长度由反应距离与制动距离组成。反应距离由司机的反应时间和当时车速决定，制动距离由制动器效率，道路，气候都有所关联。

对于刹车距离，我们设当前车速为 v ，司机反应时间为 c_1 ，故有：

$$d_1 = c_1 v \quad (1)$$

对于制动距离，制动过程呈现一个匀减速运动，在力 F 作用下实现车速由 v 变为0，令 c_2 为制动器工作效率，事实上 $c_2 = 1 / (2a)$ ，当然 a 会因为车型，天气情况与路面状况有所不同而改变，这部分我们会在后续的优化模型中进行调整，单位为 mh^2/km^2 。在整个减速过程中有：

$$d_2 = c_2 v^2 \quad (2)$$

刹车距离 $d_0 = d_1 + d_2$ 。我们假设汽车平均长度为 l ，某时长为 d 道路上共有 p 辆车，此时可以得到 $l \cdot p + d_0 \cdot (p - 1) = d$ ，代入 d_0 ，从而可以求解出：

$$v = (-c_1 p + \sqrt{c_1^2 p^2 - 4 \cdot l \cdot p + 4d}) / 2 \cdot c_2 \cdot p \quad (3)$$

即给定 p ，我们可以知道通过这段路的平均速度，再根据 $t = s/v$ ，即可求得通行时间

5.1.2 道路车辆数与时间的关系

通过查阅，某地某路的车流量在一天之中的变化如下图所示：

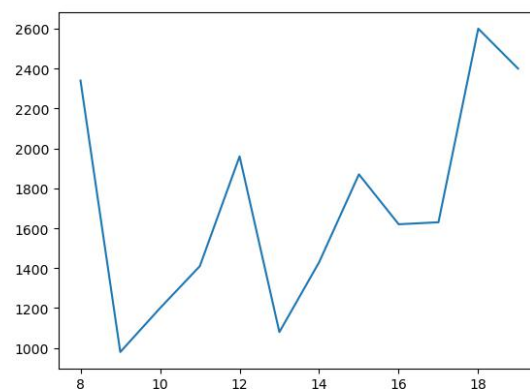


图 1 车流量变化

从图中可大致看出，7：30-8：30、11：30-12：30、2：30-3：30、5：30-6：30为四个高峰期，分别对应着早高峰、午高峰、学生放学小高峰与下班高峰，其中一天最拥挤时段会集中在早上上班高峰时段与晚上下班高峰时段，且规律性较强。车流量的增加从而导致旅客在路上耗时增加，发生堵车等情况。

5.1.3 车流量周期性波动

首先为了排除量纲的影响，我们对车流量数据进行标准化处理。由于车流量随时间变化有着明显的周期性，故我们采用正弦函数对其进行拟合，公式为：

$$\begin{aligned} \Sigma(a*\sin(b*x+c)) \\ t=d/v \end{aligned} \quad (4)$$

我们采用非线性最小二乘法进行拟合计算，每个数据样本，误差为：

$$r_i(b) = y_i - (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) \quad (5)$$

并定义损失函数为：

$$\phi(b) = \sum_{i=0}^m r_i^2 \quad (6)$$

我们令损失函数最小，所得到的拟合结果如下：

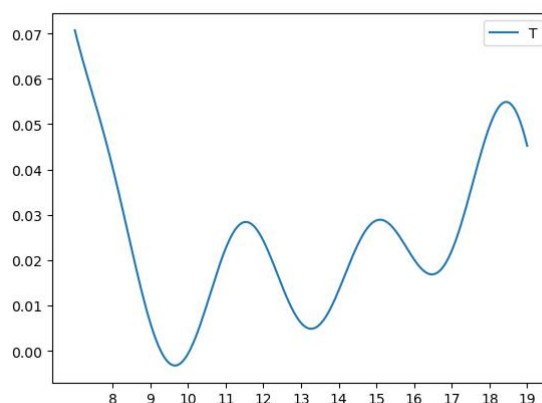


图 2 通行时间

其中 $SSE=0.09598$ ， $R^2=0.9194$ ，具有统计学意义。图像表明了，在 8 点前后将耗费最多的时间，而在 10 点前后可以避免拥堵，尽快地抵达机场。

5.2 考虑红绿灯的通行模型

接下来考虑道路中的红绿灯情况，我们假设在总长度为 20km 的道路上，共有 n 盏红绿灯。其中，每个红绿灯将以 t 秒红灯， t 秒绿灯循环。在车辆从起点出发时，所有的红绿灯都刚好变为红灯。

结合实际情况，这样的假设是合理的。在道路规划中，有绿波带这一概念，即在指定的交通线路上，当规定好路段的车速后，要求信号控制机根据路段距离，把该车流所经过的各路口绿灯起始时间，做相应的调整，这样一来，以确保该车流到达每个路口时，正好遇到绿灯。

理想的情况应该是考察真实路段中的红绿灯间隔与时长设置，而由于此处数据的缺失，先

仅仅令 $n = 20$ ， $t = 40$ ，来观察一天之内抵达机场耗时会发生什么变化。

经过运算，我们得到下图：

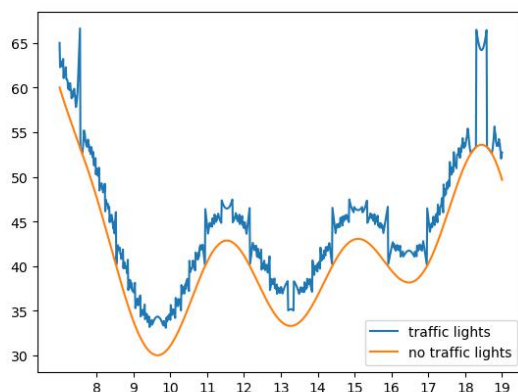


图 3 考虑红绿灯的通行时间

由于红绿灯的加入，对于任意速度而言，所需抵达机场的时间都增加了。而两条曲线的交点即为我们所谓的绿波带速度点。

而从图中可以发现，在 8 时与 18 时前后，存在几个突起的离群值，使得抵达时间远远高于前后的值。此处即为所谓红波带效应。这提示我们如果行驶过程中每到一个路口都恰好遇到交通灯由绿变红，那或许可以考虑略微降低或提高车速来规避红波带效应。

5.3 其他影响道路通行的因素

在上面的模型中我们通过刹车距离与道路通行能力，求解出一段路程的均值速度，进而求解出时间。但影响城市道路通行能力不仅有由路段的几何条件决定的客观通行情况，同时也存在道路条件和环境条件的软件式调节。

5.3.1 道路条件

道路路面质量体现在道路的平滑程度与抗滑能力，当路面质量较差时，车辆行驶的速度就会大大折扣。

平滑程度在城市中问题并不大，去往机场的路上大多是高速公路，但不排除有未建好而崎岖的石子路，导致的颠簸使得汽车车速下降。真正对于城市道路有影响的是道路的抗滑能力，晴天时道路干燥，清洁，那么摩擦系数相对较高，抗滑能力相对较好；而雨天，雪天出行，道路较为泥泞，车辆较容易打滑，那么驾驶员会将车速减缓的同时也会把刹车距离拉大。

同时出于道路的系统规划，交通布局考虑，交叉口大地分为 Y 型交叉口，十字形交叉口等。进入交叉口车辆的行驶方向不同，所形成的情况也不相同。当车辆的行车方向相互交叉时，可能产生相互碰撞的点称为冲突点；当车辆从不同方向驶向同一方向时，车辆产生的锐角相交时可能产生的碰撞点为交织点。当交叉路口的冲突点与交织点越多，道路通行能力越差，同时发生车祸的概率也会提高。

交叉路口的冲突点和交织点的增多，导致驾驶员视线盲区较大，各方面的车辆均在交叉口汇聚，会导致通行能力的下降。

5.3.2 环境条件

当出现雾霾天气之时，空气的可见度会发生改变，造成雾霾天气的主要原因为停留在空气中的颗粒物，而空气湿度与大气颗粒物是导致可见度下降的主要因素，而空气湿度较大，凝结空中的PM2.5时，可见度会更低，因此湿霾相较于干霾天气可见度更低。

可见度的降低会恶化交通环境，从而对司机形成干扰，驾驶员会出于对可见度的考虑，自行拉开间距，减慢速度，而如果在交通车流较为复杂的路段，会更加容易出现拥堵与车祸。路网运行效率的降低和拥堵发生将会危及路网行车安全。如下图，是雾霾对于路上耗时造成的干扰：

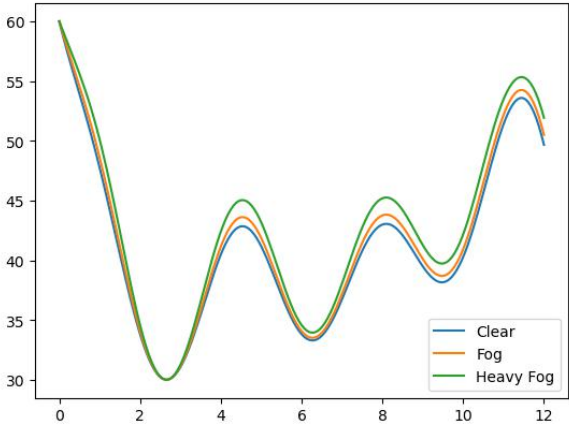


图 4 大雾影响

另外，根据气象局对降雨量的划分标准，不同降雨类型对应的降雨强度如下表所示：

降雨类型	降雨强度($mm(h)^{-1}$)	降雨强度($mm(12h)^{-1}$)	降雨强度($mm(24h)^{-1}$)
小雨	0-2.5	0-4.9	0-9.9
中雨	2.6-8	5.0-14.9	10.0-24.9
大雨	8.1-15.0	15.0-29.9	25.0-49.9
暴雨	≥ 16.0	≥ 30.0	≥ 50.0

表 2 降雨类型

对于雨天对于的道路的影响，我们可以分为可见度，道路与驾驶员心理三个方面。

对于可见度，空气湿度的增加与云层厚度增加都导致可见度降低，湿度增加使得空气中的气溶胶（PM2.5）更容易与水分子结合形成霾，而云层厚度增加使得光线穿透率减少，空气明度降低。通过影响 c_1 与 c_2 ，使得驾驶员将自行增加与前车的距离，同时将速度减慢。而降雨本身造成的最为直观的影响是路面摩擦系数降低，水膜厚度增加。最后是驾驶员心理，如下图：

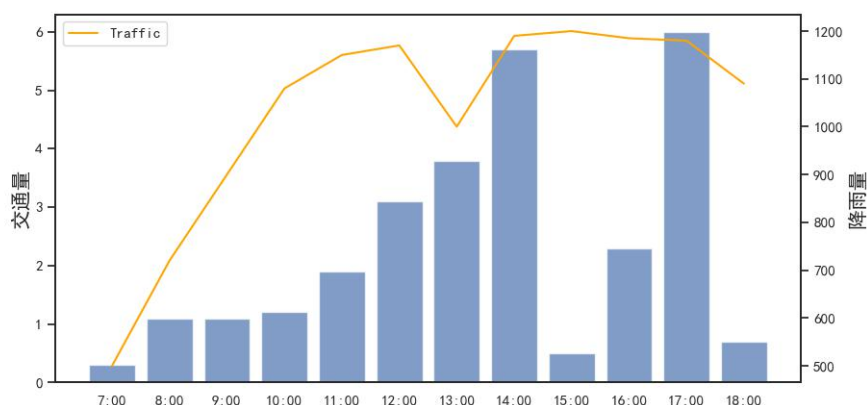


图 5 交通量与降水量

可以看出交通量并非在降雨量达到最大时最小，而是在最大降雨前的一段时间最小，这表明降雨对交通量的影响由时间上的前置性。在降雨不大或者非降雨时段，交通量均保持比较高的水平；在降雨量大时交通量有明显的下降趋势。这些现象均表明降雨对交通量的单因素影响。

5.3 机场人流量周期性波动

我们以北京大兴国际机场 2016 年 9 月 11 日的人流数据为例，如下图所示：

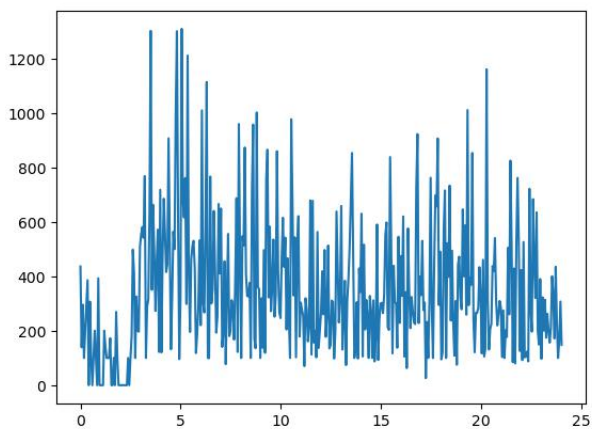


图 6 大兴机场人流量

由于数据过于离散，离群值较多，不利于我们从中寻找到周期性规律。故我们通过求取 2 小时均线的方式来对原始数据进行去趋势。均线理论出自于现代股票技术分析中，简称 MA，MA 是用统计分析的方法，将一定时期内的证券价格（指数）加以平均，并把不同时间的平均值连接起来，形成一根 MA，用以观察证券价格变动趋势的一种技术指标。其最终目的即为从纷繁变化的数据中提取出主要的变化趋势。对该数据求取移动平均，得下图：

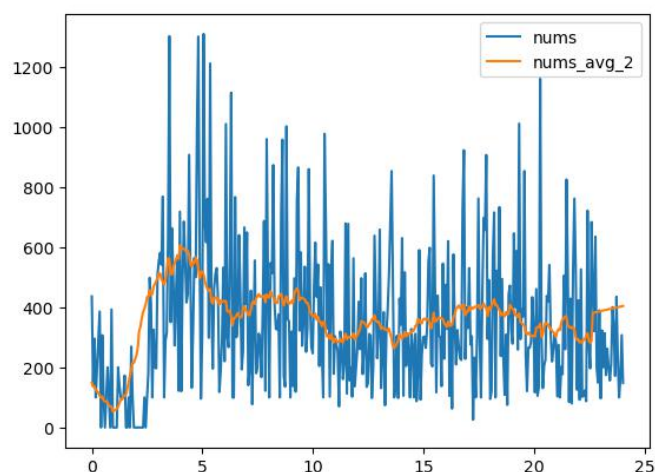


图 7 人流量 2h 均线

由此我们可以较为清晰地看出，机场的人流量在一天之内也随着时间存在周期性的波动。再假定机场每小时处理旅客的数目是一个定值 k ，则在机场的耗时即为 $nums/k$ 。将 t_0 时刻的道路通勤用时与 $t_0 + t$ 时刻的机场排队用时错位相加，我们可以得到如下图所示的总用时曲线：



图 8 总耗时函数

由该图可知，如果不愿意耗费过多的等待时间，早上 10 点、下午 1 点这两个时间段前后的航班应该成为首选。而早晚高峰期的航班可能会使得等候超过两个小时。

5.4 结合机票价格的效用分析

由上述结论，那么是否就意味着都建议大家选择上午十点或是下午一点的飞机呢？答案显然是否定的。因为不难发现，这两个时间段虽然拥有最短的等候时间，但同时机票的价格也是最贵的。下图为 2021 年 5 月 9 日由广州白云机场飞往上海的航班价格在一天之内的波动图：

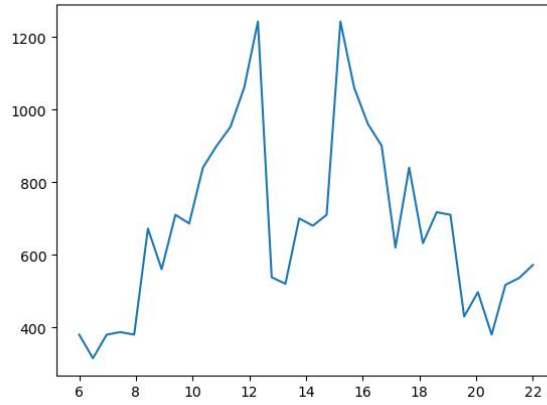


图 9 机票价格

我们可以发现，价格的最高值确实出现在上午十点与下午一点前后。换言之，如果你选择乘坐这里两个时间的航班，那实际上是一种用金钱成本换时间成本的行为。为了衡量这两种成本对于我们决策的影响，接下来我们将引入效用的概念进行讨论。

5.4.1 负效用函数

与经济学中的效用函数不同，我们此处考虑的耗时与花钱都是大家所不愿意做的事情。换言之此处我们讨论的是厌恶品（bads）而非商品（goods），所以他们产生的是负效用。而与商品不同，厌恶品的边际效用是递增的。这很好理解，当你在机场等候 10 分钟时，此时多等一分钟或许算不上什么；而倘若你在机场已经等了三个小时，此时多等一分钟对于你而言也是一种煎熬。

我们令耗时的边际效用为 $f(x)$ ，花钱的边际效用为 $g(x)$ 。而由于经济实力与个人偏好的不同，这两者会对不同人产生不同的效用。故我们令 Δu 为做出决策的效用增减，有：

$$\Delta u = \Theta f(x) * h(\Delta m) + (1 - \Theta) g(x) * \Delta m \quad (7)$$

其中 Δm 是指你为了减少等待而多花的钱，而 $h(\Delta m)$ 则为你用这部分多花的钱所换取少等待的时间。 $h(x)$ 有如下性质：对于任意 $x > 0$ ， $h(x) < 0$ ；且对于任意 $x_1 > x_2$ ，有

$$dh/dx_1(h(x_1)) < dh/dx_2(h(x_2)) \quad (8)$$

在该效用公式中， Θ 值将依据不同人的经济情况以及对于等待的厌恶程度而定。例如一位企业的高管，他认为自己的时间比较值钱，则可能会选取一个较大的 Θ 值；而收入不高的人群则希望尽量少花钱，所以他们会去选择费事费力但省钱的航班。

而 $h(x)$ 则较为复杂，它刻画的是一整个机票价格与起飞时间的安排。事实上它并不是一个连续函数，因为现实生活中并没有连续时间连续价格的航班供消费者选择。它通常以一个表函数的形式出现。下表即为 2021 年 5 月 9 日由广州白云机场飞往上海的航班价格节选：

起飞时间	价格	预计用时
6:05	380.00	48.04766
9:00	686.00	40.29244
10:00	900.00	31.04813
11:00	1242.00	34.32515
12:00	680.00	41.02062
13:00	1242.00	33.81295
14:00	960.00	36.55067
16:00	900.00	39.49196
18:00	632.00	40.63879
20:05	430.00	51.59017

表 3 航班价格表

我们首先计算出，改变飞机起飞时间的收益与代价分别是什么：

起飞时间	价格差	时间差
6:05	306.00	-7.755213276
9:00	214.00	-5.967298689
10:00	342.00	-3.277015255
11:00	-562.00	9.972492965
12:00	562.00	-7.207668895
13:00	-282.00	2.737718679
14:00	-60.00	2.941284438
16:00	-268.00	1.146827945
18:00	-202.00	10.95138668

表 4 边际价格与边际时间

随后将数据标准化至 $[-1, 1]$ 区间中，公式如下：

$$2 * (x + \max(x)) / (\max(x) - \min(x)) - 1 \tag{9}$$

得标准化后的数据：

起飞时间	标准化价格	标准化时间
6:05	0.544483986	-0.658283877
9:00	0.380782918	-0.467130531
10:00	0.608540925	-0.179501198
11:00	-1	1.237058546
12:00	1	-0.599743642
13:00	-0.501779359	0.463558893
14:00	-0.106761566	0.48532295
16:00	-0.476868327	0.293470182
18:00	-0.359430605	1.341716123

表 5 标准化边际

5.4.2 不同人群的偏好分析

为了模拟不同偏好的人群，我们令 θ 分别取值 0, 0.2, 0.5, 0.8, 1。得到下图：

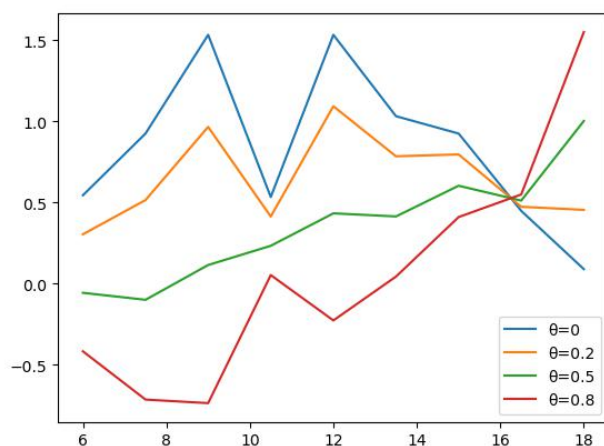


图 10 不同偏好人群的效用

由于此处的 Δu 是指负效用减少的值，所以 Δu 越小，说明做出这个改变所带来的好处就越大。从图中我们可以看出， θ 值越大，10:00处航班的 Δu 就越小，顾客就越有可能选择该时段的航班。反之，随着 θ 的减小，顾客就更偏向于选择较为便宜的例如6:05或是18:00的班次。

存在这样结果的根本原因是机票价格的自由定价，由于机票不像火车票一样全年全时段同价，航空公司可以根据不同时段的销量来决定不同的价格。这种利用不同顾客的不同保留价格进行价格歧视的现象在市场经济中尤为常见，它促进了资源配置的高效性，使得资源去到了真正需要它的人手中。

6. 模型评价与改进

本模型通过刻画从起点到登机所发生的事情的耗时，来量化一天之中不同时段乘机成本与效用，可以在一定程度上为我们选购机票提供参考。

同时也需要注意的是，一方面，真实世界的交通情况会复杂的多。比如我们没有考虑不同车辆的制动能力不同，也没有考虑诸如限速、多车道、不同车辆之间的博弈等等问题。由于时间有限，这些问题可以留待后续研究解决。

另一方面，由于数据的不完整性，导致我们没有全国所有道路与全国所有机场的流量数据，而这部分数据对于模型的求解而言是最重要的。但是如果依托于政府大数据整合与利用，该模型在指导交通，指导机票定价与个人决策方面将会起到显著的作用。

7. 参考文献

- [1]姜启源. 数学建模（第五版）[M]. 北京：高等教育出版社，2018，25-28
- [2]罗伯特·S. 平狄克. 微观经济学（第7版）[M]. 北京：清华大学出版社，2010，149-156

[3]移动平均线理论. 百度百科

<https://baike.baidu.com/item/%E7%A7%BB%E5%8A%A8%E5%B9%B3%E5%9D%87%E7%BA%BF/217887?fr=aladdin>

[4]绿波带. 百度百科

<https://baike.baidu.com/item/%E7%BB%BF%E6%B3%A2%E5%B8%A6/2330640?fr=aladdin>

[5]孙标. 交通事故对道路通行能力影响的研究与分析[D]. 贵州师范大学, 2016.

[6]费为银, 陈超, 梁勇. Knight 不确定下考虑负效用的消费和投资问题研究[J]. 应用概率统计, 2013, 29(01): 53-63.